

Câu 1 (3,5 điểm).

1) Cho phương trình $3x^2 + 6x - 2\sqrt{(x-3)(x+5)} - m = 0$ (1)

a) Giải phương trình khi $m = 46$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (3x+y)(x+3y)\sqrt{xy} = 14 \\ (x+y)(x^2+14xy+y^2) = 36 \end{cases}$$

Câu 2 (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC, gọi M là trung điểm của cạnh AC và D là điểm trên cạnh BC sao cho $BD = DM$. Giả sử rằng $2BC^2 - AC^2 = AB.AC$. Trên tia đối của tia AC lấy điểm P sao cho $AB = AP$.

1. Chứng minh DM là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác BMP.
2. Chứng minh AD là phân giác của góc BAC.
3. Tính tích $BD.DC$ theo AB và AC.

Câu 3 (1,0 điểm). Cho a, b là các số thực dương. Chứng minh:

$$\sqrt{\frac{(1+ab)(a+b)}{a^2+b^2}} + \sqrt{\frac{(a^2+b)(b+1)}{a(b^2+1)}} + \sqrt{\frac{(b^2+a)(a+1)}{b(a^2+1)}} \geq 3\sqrt{2}.$$

Câu 4 (1,5 điểm).

1) Một tờ giấy được xé thành 4 mảnh, mỗi tờ giấy trong một số tờ giấy trong bốn mảnh nhỏ này lại được xé thành 4 mảnh nhỏ nữa, và một trong các mảnh nhỏ này lại được xé thành 4 mảnh,..., tiếp tục như vậy thì có khi nào ta thu được 2019 mảnh giấy hay không? Vì sao?

2) Cho n nguyên, $n > 1$ thỏa mãn $3^n - 1 : n^3$. Chứng minh rằng n chẵn và n không chia hết cho 4.

Câu 5 (1,0 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho

$$f(xy + f(x)) + f(x + 2yf(x)) = 2x, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

----- Hết -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

ĐÁP ÁN
Môn thi: TOÁN 10 Chuyên

Câu	Nội dung	Điểm
	a) $m = 46$, PT có hai nghiệm $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{17}$ b) ĐK $-5 \leq x \leq 3$. Đặt $t = \sqrt{(x-3)(x+5)}$, $0 \leq t \leq 1$. Ta có phương trình $3t^2 - 2t - m + 45 = 0$ (2) PT đã cho có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ PT ẩn t có 1 nghiệm $t \in [0;1)$ Lập bảng biến thiên của hàm $f(t) = 3t^2 - 2t + 45$ trên $[0;1)$. Từ bảng biến thiên ta có $m \in \left\{\frac{134}{3}\right\} \cup (45; 46)$.	2,5 điểm
Câu 1 (3điểm)	2) ĐK $xy \geq 0$ HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} \left[3(x+y)^2 + 4xy\right]\sqrt{xy} = 14 \\ (x+y)\left[(x+y)^2 + 12xy\right] = 36 \end{cases}$ Đặt $x+y=u, \sqrt{xy}=v$ Ta có hệ $\begin{cases} (3u^2 + 4v^2)v = 14 \\ u(u^2 + 12v^2) = 36 \end{cases}$ (*) (hệ đẳng cấp bậc 3) Nhận thấy $v \neq 0$ nên đặt $u = kv$. Hệ (*) trở thành $\begin{cases} v^3(3k^2 + 4) = 14 \\ v^3k(k^2 + 12) = 36 \end{cases} \Rightarrow k = 6 \Rightarrow u = 3, v = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ xy=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow x, y \text{ là nghiệm}$ PT $t^2 - 3t + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow (x; y) = \left(\frac{3+2\sqrt{2}}{2}; \frac{3-2\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{3-2\sqrt{2}}{2}; \frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right)$	1 điểm
Câu 2 (3điểm)	1. Từ $2BC^2 - AC^2 = AB.AC$ suy ra $2BC^2 = AC.(AB + AC) = AC.CP = 2CM.CP$. Từ đó, ta có $CB^2 = CM.CP$, vậy CB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MPB. 2. Do $BD = DM$ nên DM cũng là tiếp tuyến của đường tròn (MPB). Suy ra $\angle DBM = \angle BMD = \angle BPM$. Suy ra $\angle BAM = \angle MDC$. Vậy tứ giác AMDB là tứ giác nội tiếp. Suy ra AD là phân giác của góc BAC.	1 điểm

	3. Do tính chất phân giác ta có $BD = \frac{AB \cdot BC}{AB + AC}$ và $DC = \frac{AC \cdot BC}{AB + AC}$. Suy ra $BD \cdot DC = \frac{AC \cdot AB \cdot BC^2}{(AB + AC)^2} = \frac{AC^2 \cdot AB}{2(AB + AC)}.$	1 điểm
Câu 3 1điểm	$(1 + ab)(a + b) = a(b^2 + 1) + b(a^2 + 1);$ Nhận thấy $(a^2 + b)(b + 1) = a^2 + b^2 + b(a^2 + 1);$ $(b^2 + a)(a + 1) = a^2 + b^2 + a(b^2 + 1)$ Đặt $a^2 + b^2 = x; a(b^2 + 1) = y; b(a^2 + 1) = z \quad (x, y, z > 0)$ Ta viết BĐT cần chứng minh lại dưới dạng: $\sqrt{\frac{x+y}{z}} + \sqrt{\frac{y+z}{x}} + \sqrt{\frac{z+x}{y}} \geq 3\sqrt{2}, \forall x, y, z > 0 \quad (*)$ Theo BĐT Cauchy cho hai số không âm, ta có: $\left. \begin{aligned} x + y &\geq 2\sqrt{xy} \\ y + z &\geq 2\sqrt{yz} \\ z + x &\geq 2\sqrt{zx} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$ $\Rightarrow \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} \geq 8 \quad (1)$ Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số không âm, ta lại có: $\sqrt{\frac{x+y}{z}} + \sqrt{\frac{y+z}{x}} + \sqrt{\frac{z+x}{y}} \geq 3\sqrt{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}} \quad (2)$ Từ (1) và (2), hiển nhiên BĐT (*) được chứng minh hoàn toàn. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$. Vậy ta có điều phải chứng minh.	1điểm
Câu 4 1điểm	1. Số các mảnh giấy tăng lên sau mỗi lần xé là 3(mảnh) (đây là đại lượng bất biến trong quá trình xé giấy) Ở lần xé thứ n, số mảnh giấy là $1+3n$ (mảnh) với n là số tự nhiên. Vì 2019 chia hết cho 3 nên không thể thu được 2019 mảnh giấy 2. Giả sử n lẻ. Gọi p là ước nguyên tố nhỏ nhất của n. suy ra p lẻ.	0.75 điểm

	Ta có $3^n \equiv 1(\text{mod } p) \Rightarrow p \neq 3$. Theo định lí Fecma nhỏ ta có $3^{p-1} \equiv 1(\text{mod } p)$ Gọi h là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $3^h \equiv 1(\text{mod } p)$ Khi đó $h n, h p-1$. Do p là ước nguyên tố nhỏ nhất của n nên $h=1$. Do đó $3 \equiv 1(\text{mod } p) \Rightarrow p$ chẵn (mâu thuẫn với p lẻ). Vậy điều giả sử sai nên suy ra n chẵn +) Gọi $v_2(n) = k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow v_2(n^3) = 3k$ Ta có $v_2(3^n - 1) = v_2(3 - 1) + v_2(3 + 1) + v_2(n) - 1 = k + 2$. Do $3^n - 1 : n^3 \Rightarrow v_2(3^n - 1) \geq v_2(n^3) \Rightarrow k + 2 \geq 3k \Rightarrow k \leq 1$ mà $k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow k = 1$ hay $v_2(n) = 1$. Vậy n chẵn và n không chia hết cho 4 (đpcm).		0.75 điểm
Câu 5 1 điểm	Giả sử hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn (1): $f(xy + f(x)) + f(x + 2yf(x)) = 2x, \forall x, y \in \mathbb{R}.$ Kí hiệu $P(u; v)$ chỉ việc thay $(x; y)$ bởi $(u; v)$ vào (1). + $P(x; 0) \Rightarrow f(f(x)) + f(x) = 2x, \forall x$. Điều này dẫn đến f là đơn ánh. Thật vậy, giả sử có $f(a) = f(b)$ thì suy ra $2a = f(f(a)) + f(a) = f(f(b)) + f(b) = 2b$ nên $a = b$. + $P(x; 1) \Rightarrow f(x + f(x)) + f(x + 2f(x)) = 2x, \forall x$, $P\left(x; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}x + f(x)\right) + f(x + f(x)) = 2x, \forall x.$ Kết hợp hai điều trên suy ra $f(x + 2f(x)) = f\left(\frac{1}{2}x + f(x)\right), \forall x$, mà f là đơn ánh nên xảy ra $x + 2f(x) = \frac{1}{2}x + f(x), \forall x \Leftrightarrow f(x) = \frac{-x}{2}, \forall x$.		1 điểm