

CHUYÊN ĐỀ: ĐẠI SỐ TỔ HỢP

Bài 1: QUY TẮC ĐẾM

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT:

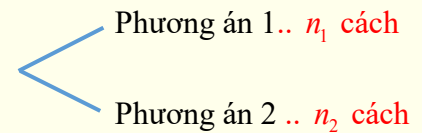
1. Quy tắc cộng và sơ đồ hình cây

Quy tắc cộng

Giả sử một công việc nào đó có thể thực hiện theo một trong hai phương án khác nhau:

- Phương án 1 có n_1 cách thực hiện.
- Phương án 2 có n_2 cách thực hiện.

Khi đó số cách thực hiện công việc là : $n_1 + n_2$ cách



Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động này có m cách thực hiện, hành động kia có n cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất thì công việc đó có $m + n$ cách thực hiện.

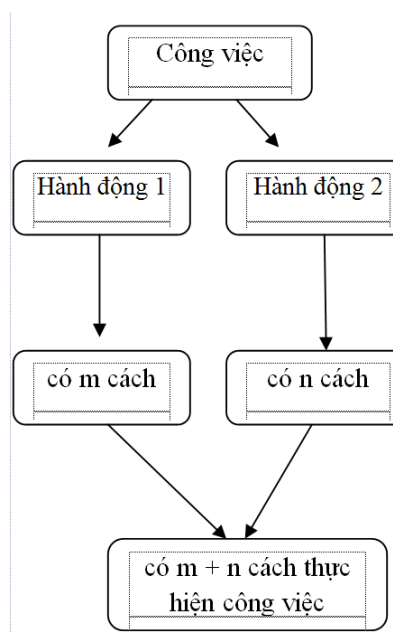
Chú ý: số phần tử của tập hợp hữu hạn X được kí hiệu là $|X|$ hoặc $n(X)$.

Quy tắc cộng được phát biểu ở trên thực chất là quy tắc đếm số phần tử của hợp hai tập hợp hữu hạn không giao nhau: Nếu A và B là các tập hợp hữu hạn không giao nhau thì

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

Mở rộng: Một công việc được hoàn thành bởi một trong k hành động

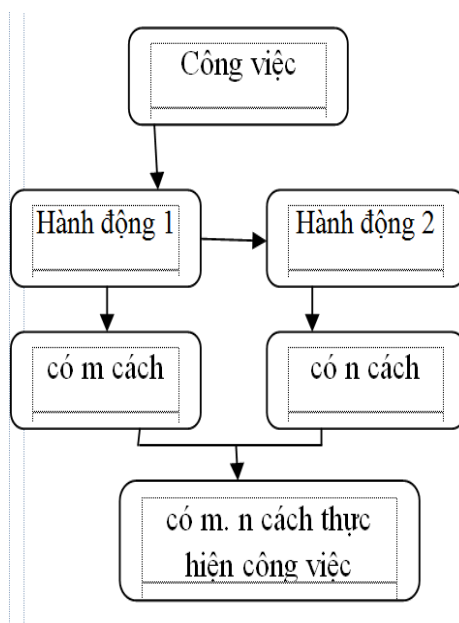
$A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$. Nếu hành động A_1 có m_1 cách thực hiện, hành động A_2 có m_2 cách thực hiện, ..., hành động A_k có m_k cách thực hiện và các cách thực hiện của các hành động trên không trùng nhau thì công việc đó có $m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_k$ cách thực hiện.



2. Quy tắc nhân

Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai thì công việc đó có $m.n$ cách thực hiện.

Mở rộng: Một công việc được hoàn thành bởi k hành động $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ liên tiếp. Nếu hành động A_1 có m_1 cách thực hiện, ứng với mỗi cách thực hiện hành động A_1 có m_2 cách thực hiện hành động $A_2, \dots$, có m_k cách thực hiện hành động A_k thì công việc đó có $m_1.m_2.m_3 \dots m_k$ cách hoàn thành.



NHẬN XÉT CHUNG:

Để đếm số cách lựa chọn để thực hiện một công việc A bằng quy tắc cộng, ta thực hiện các bước như sau:

Bước 1: Phân tích xem có bao nhiêu phương án riêng biệt để thực hiện công việc A (có nghĩa công việc A có thể hoàn thành một trong các phương án $A_1, A_2, \dots, A_n$).

Bước 2: Đếm số cách chọn $x_1, x_2, \dots, x_n$ trong các phương án $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Bước 3: Dùng quy tắc cộng ta tính được số cách lựa chọn để thực hiện công việc A là:

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Để đếm số cách lựa chọn để thực hiện công việc A bằng quy tắc nhân, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Phân tích xem có bao nhiêu công đoạn liên tiếp cần phải tiến hành để thực hiện công việc A (giả sử A chỉ hoàn thành sau khi tất cả các công đoạn $A_1, A_2, \dots, A_n$ hoàn thành).

Bước 2: Đếm số cách chọn $x_1, x_2, \dots, x_n$ trong các công đoạn $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Bước 3: Dùng quy tắc nhân ta tính được số cách lựa chọn để thực hiện công việc A là:

$$x = x_1 . x_2 . \dots . x_n.$$

Cách đếm gián tiếp (đếm phần bù)

Trong trường hợp hành động H chia nhiều trường hợp thì ta đi đếm phần bù của bài toán như sau:

- Đếm số phương án thực hiện hành động H (không cần quan tâm đến có thỏa tính chất T hay không) ta được a phương án.
- Đếm số phương án thực hiện hành động H không thỏa tính chất T ta được b phương án.

Khi đó số phương án thỏa yêu cầu bài toán là: $a - b$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN:

1. Dạng 1: Quy tắc cộng

a) Phương pháp:

Nếu một công việc nào nó **có thể thực hiện theo n hướng khác nhau**, trong đó:

Hướng thứ 1 có m_1 cách thực hiện

Hướng thứ 2 có m_2 cách thực hiện

.....

Hướng thứ n có m_n cách thực hiện

Khi đó, có: $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ cách để hoàn thành công việc đã cho.

b) Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Một quán bán ba loại đồ uống: trà sữa, nước hoa quả và sinh tố. Có 5 loại trà sữa, 6 loại nước hoa quả và 4 loại sinh tố. Hỏi khách hàng có bao nhiêu cách chọn một loại đồ uống?

Lời giải:

Khách hàng có ba phương án lựa chọn đồ uống.

Phương án 1: uống trà sữa có 5 cách

Phương án 2: uống nước hoa quả có 6 cách

Phương án 3: uống sinh tố có 4 cách

Theo quy tắc cộng có $5 + 6 + 4 = 15$ cách.

Vậy khách hàng có 15 cách chọn một loại đồ uống

Ví dụ 2: Gia đình bạn Liên dự định đi du lịch ở Quy Nhơn (Bình Định). Hướng dẫn viên du lịch đưa ra hai chương trình tham quan như sau:

Chương trình 1 có 4 địa điểm tham quan: Khu Safari FLC, khu du lịch Eo Gió, khu du lịch Kỳ Co, Tịnh Xá Ngọc Hòa (Hình 2).

Chương trình 2 có 7 địa điểm tham quan: biển Quy Nhơn, khu du lịch Ghềnh Ráng Tiên Sa, khu du lịch Tháp đôi, đầm Thị Nại, khu du lịch Cửa biển, Sulf Bar, nhà thờ Làng Sông (Hình 3).

Hỏi gia đình bạn Liên có bao nhiêu cách lựa chọn một địa điểm tham quan?



(Nguồn: <https://docmiendatnuoc.com>)

Hình 2



(Nguồn: <https://docmiendatnuoc.com>)

Hình 3

Lời giải:

Gia đình bạn Liên có hai phương án lựa chọn địa điểm tham quan:

Phương án 1: chọn chương trình 1: có 4 cách

Phương án 2: chọn chương trình 2: có 7 cách

Vậy gia đình bạn Liên $4 + 7 = 11$ cách chọn một địa điểm tham quan.

Ví dụ 3: Từ một nhóm học sinh gồm 5 nam và 9 nữ, có bao nhiêu cách chọn ra một học sinh?

Lời giải:

Có hai phương án lựa chọn học sinh .

Phương án 1: Chọn nam có 5 cách

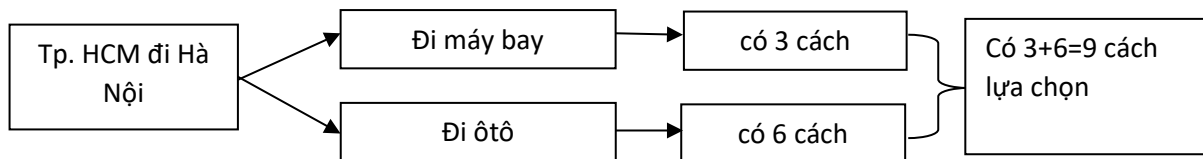
Phương án 2: Chọn nữ có 9 cách.

Vậy số cách chọn một học sinh là $5 + 9 = 14$ cách.

Ví dụ 4. Để đi từ TP.HCM ra Hà Nội có thể đi bằng máy bay hoặc ô tô. Mỗi ngày có 3 chuyến bay và 6 chuyến ô tô từ TP.HCM ra Hà Nội. Hãy vẽ sơ đồ cây minh họa và cho biết có tất cả có bao nhiêu lựa chọn để đi từ TP.HCM ra Hà Nội.

Lời giải:

Ta có sơ đồ cây của bài toán này như sau:



Đi từ TP.HCM đến Hà Nội có hai phương án:

Phương án 1: đi máy bay có 3 cách

Phương án 2: đi ô tô có 6 cách

Vậy số lựa chọn đi từ TP. HCM đến Hà Nội là $3+6=9$

Ví dụ 5: Có 3 quyển vở khác nhau, 5 quyển sách khác nhau và 4 bút chì khác nhau. Có bao nhiêu cách chọn một đồ vật trong các đồ vật đã cho?

Lời giải:

Có ba phương án lựa chọn một đồ vật.

Phương án 1: Chọn vở có 3 cách.

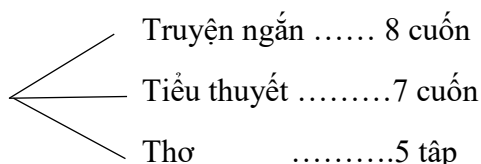
Phương án 2: Chọn sách có 5 cách

Phương án 3: Chọn bút chì có 4 cách

Vậy số cách chọn là $3 + 5 + 4 = 12$ cách.

Ví dụ 6: Trên giá sách có 8 cuốn truyện ngắn, 7 cuốn tiểu thuyết và 5 tập thơ (tất cả đều khác nhau). Vẽ sơ đồ hình cây minh họa và cho biết bạn Phong có bao nhiêu cách chọn một cuốn để đọc vào ngày cuối tuần.

Lời giải



Để chọn một cuốn sách đọc vào ngày cuối tuần, bạn Phong thực hiện 1 trong 3 sự lựa chọn sau:

Chọn một cuốn truyện ngắn : Có 8 cách.

Chọn một cuốn tiểu thuyết : Có 7 cách.

Chọn một tập thơ : Có 5 cách.

Theo quy tắc cộng thì bạn Phong có : $8 + 7 + 5 = 20$ cách.

Ví dụ 7: Giả sử bạn muốn mua một áo sơ mi cỡ 39 hoặc cỡ 40. Áo cỡ 39 có 5 màu khác nhau, áo cỡ 40 có 4 màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu sự lựa chọn (về màu áo và cỡ áo)?

Lời giải

Nếu chọn cỡ áo 39 thì sẽ có 5 cách.

Nếu chọn cỡ áo 40 thì sẽ có 4 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $5 + 4 = 9$ cách chọn mua áo.

Ví dụ 8: Một người có 4 cái quần khác nhau, 6 cái áo khác nhau, 3 chiếc cà vạt khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một cái quần hoặc một cái áo hoặc một cái cà vạt?

Lời giải

- Nếu chọn một cái quần thì sẽ có 4 cách.

- Nếu chọn một cái áo thì sẽ có 6 cách.

- Nếu chọn một cái cà vạt thì sẽ có 3 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $4 + 6 + 3 = 13$ cách chọn.

Ví dụ 9: Trên bàn có 8 cây bút chì khác nhau, 6 cây bút bi khác nhau và 10 cuốn tập khác nhau. Một học sinh muốn chọn một đồ vật duy nhất hoặc một cây bút chì hoặc một cây bút bi hoặc một cuốn tập thì số cách chọn khác nhau bằng bao nhiêu?

Lời giải

- Nếu chọn một cây bút chì thì sẽ có 8 cách.

- Nếu chọn một cây bút bi thì sẽ có 6 cách.

- Nếu chọn một cuốn tập thì sẽ có 10 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $8 + 6 + 10 = 24$ cách chọn.

Ví dụ 10: Trong một trường THPT, khối 11 có 280 học sinh nam và 325 học sinh nữ. Nhà trường cần chọn một học sinh ở khối 11 đi dự đại hội của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

Lời giải

Nếu chọn một học sinh nam có 280 cách.

Nếu chọn một học sinh nữ có 325 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $280 + 325 = 605$ cách chọn.

2. Dạng 2: Quy tắc nhân

Ví dụ 1: Tung đồng thời một đồng xu và một con súc sắc, nhận được kết quả là mặt xuất hiện trên đồng xu (sấp hay ngửa) và số chấm xuất hiện trên con xúc xắc.

a) Tính số kết quả có thể xảy ra

b) Vẽ sơ đồ hình cây và liệt kê tất cả các kết quả đó.



Hình 10

Lời giải

a) Kết quả của đồng xu và xúc xắc xảy ra đồng thời nên kết quả xảy ra gồm 2 kết quả liên tiếp nhau

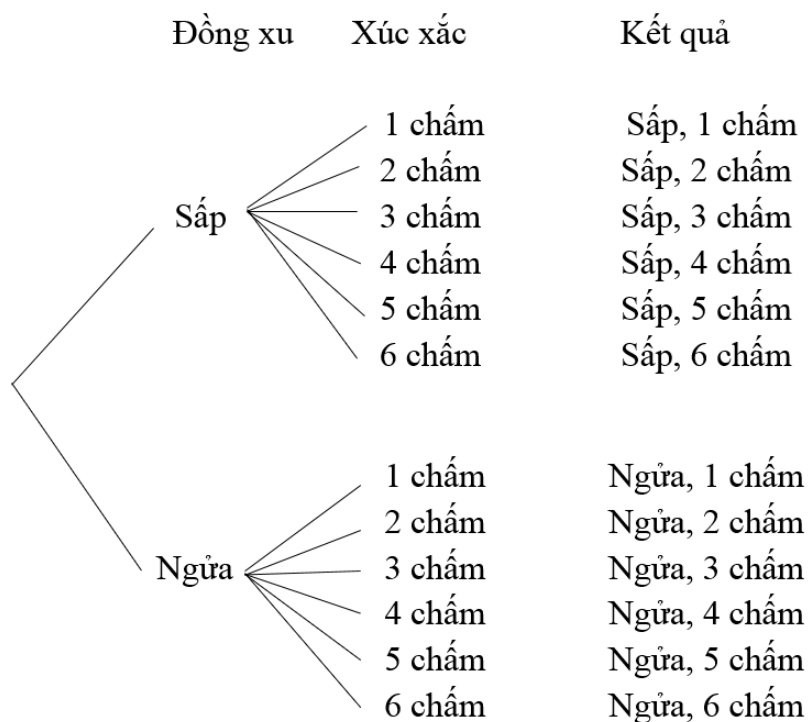
Kết quả 1: Kết quả của đồng xu, có 2 kết quả: Sấp và ngửa

Kết quả 2: Kết quả của xúc xắc, có 6 kết quả: mỗi kết quả của mỗi mặt con xúc xắc

Áp dụng quy tắc nhân, ta có số kết quả có thể xuất hiện khi gieo đồng thời một đồng xu và một con xúc xắc là: $2.6 = 12$ (kết quả)

Vậy có 12 kết quả có thể xảy ra

b)



Ví dụ 2: Một người gieo đồng xu hai mặt, sau mỗi lần gieo thì ghi lại kết quả sấp hay ngửa. Hỏi nếu người đó gieo ba lần thì có thể có bao nhiêu khả năng xảy ra?

Lời giải

Việc gieo đồng xu được thực hiện theo ba công đoạn như sau:

Công đoạn 1: Lần gieo thứ nhất: Có 2 khả năng xảy ra.

Công đoạn 2: Lần gieo thứ hai: Có 2 khả năng xảy ra.

Công đoạn 3: Lần gieo thứ ba: Có 2 khả năng xảy ra.

Theo quy tắc nhân có $2.2.2 = 8$ khả năng xảy ra

Nếu người đó gieo ba lần thì có 8 khả năng xảy ra.

Ví dụ 3: Tại một nhà hàng chuyên phục vụ cơm trưa văn phòng, thực đơn có 5 món chính, 3 món phụ và 4 loại đồ uống. Tại đây thực khách có bao nhiêu cách chọn bữa trưa gồm một món chính, một món phụ và một loại đồ uống.

Lời giải

Việc thực hiện bữa trưa gồm một món chính, một món phụ và một loại đồ uống gồm ba công đoạn

Công đoạn 1: Chọn 1 món chính trong 5 món, có 5 cách chọn

Công đoạn 2: Chọn 1 món phụ trong 3 món, có 3 cách chọn

Công đoạn 3: Chọn 1 loại đồ uống trong 4 loại, có 4 cách chọn

Áp dụng quy tắc nhân, ta có số cách chọn một bữa trưa đầy đủ là

$$5.3.4=60 \text{ (cách)}$$

Vậy có 60 cách chọn bữa trưa gồm một món chính, một món phụ và một loại đồ uống.

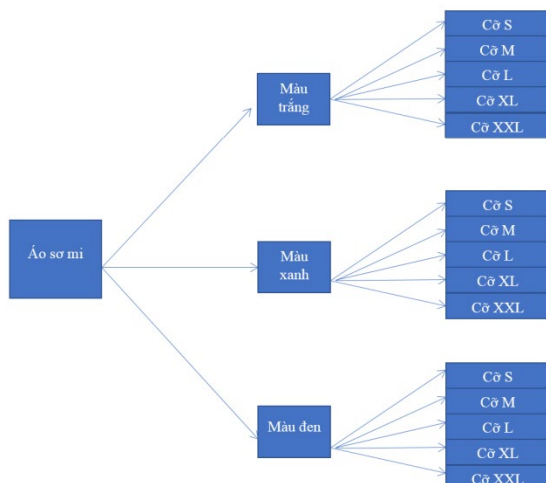
Ví dụ 4: Một hãng thời trang đưa ra một mẫu áo sơ mi mới có ba màu: trắng, xanh, đen. Mỗi loại có các cỡ S, M, L, XL, XXL

a) Vẽ sơ đồ hình cây biểu thị các loại áo sơ mi với màu và cỡ áo nói trên.

b) Nếu một cửa hàng muốn mua tất cả các loại áo sơ mi (đủ loại màu và đủ loại cỡ áo) và mỗi loại một chiếc để về giới thiệu thì cần mua tất cả bao nhiêu chiếc áo sơ mi?

Lời giải

a) Sơ đồ hình cây biểu thị các loại áo sơ mi với màu và cỡ áo nói trên



b) Nếu một cửa hàng muốn mua tất cả các loại áo sơ mi (đủ loại màu và đủ loại cỡ áo) và mỗi loại một chiếc để về giới thiệu thì cần mua tất cả $3.5 = 15$ chiếc áo sơ mi.

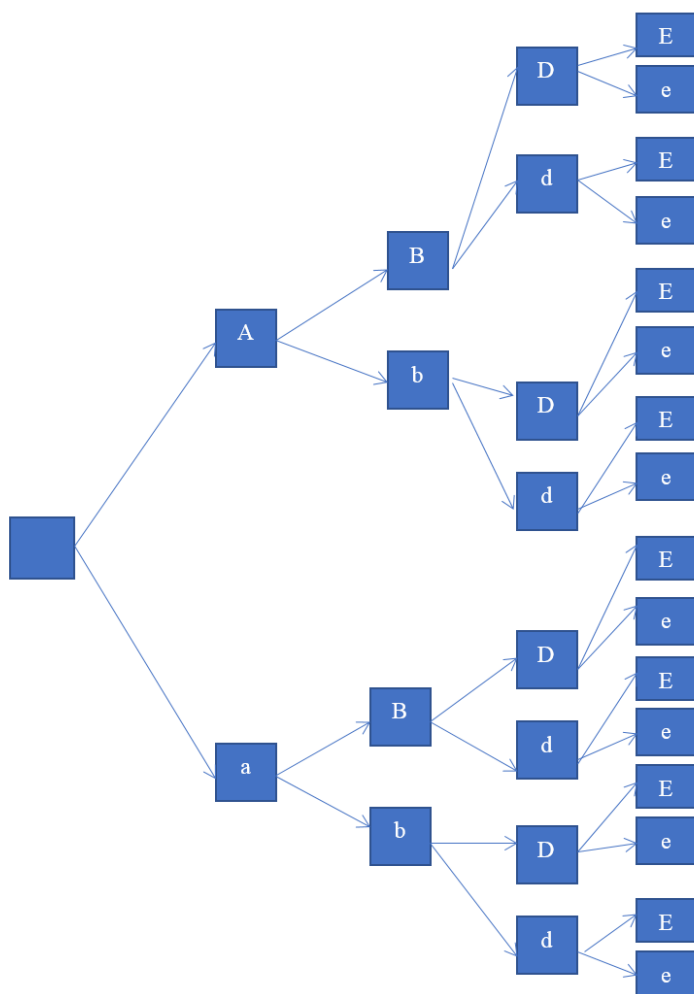
Ví dụ 5: Cho kiểu gen $AaBbDdEe$.. Giả sử quá trình giảm phân tạo giao tử bình thường, không xảy ra đột biến.

a) Vẽ sơ đồ hình cây biểu thị sự hình thành giao tử.

b) Từ đó, tính số loại giao tử của kiểu gen $AaBbDdEe$.

Lời giải

a) Sơ đồ hình cây biểu thị sự hình thành giao tử:



b) Dựa vào sơ đồ cây, số loại giao tử của kiểu gen $AaBbDdEe$ là: 16 (loại)

Ví dụ 6: Trong giải thi đấu bóng đá World Cup, vòng bảng có 32 đội tham gia, được chia làm 8 bảng, mỗi bảng có 4 đội đấu vòng tròn một lượt. Tính số trận đấu được thi đấu trong vòng bảng theo thể thức trên.

Lời giải

Lời giải chi tiết

Với mỗi bảng, kí hiệu 4 đội lần lượt là A, B, C, D

Số trận đấu chính là số cách chọn 2 đội thi đấu trong bảng, thực hiện liên tiếp các hoạt động sau:

Chọn một đội thi đấu với đội A : Có 3 cách chọn

Chọn một đội thi đấu với đội B : Có 2 cách chọn

Chọn một đội thi đấu với đội C : Có 1 cách chọn

Theo quy tắc nhân có $3.2.1 = 6$ trận đấu trong mỗi bảng.

Vì có 8 bảng nên tất cả có $8.6 = 48$ trận đấu được thi đấu trong vòng bảng

Ví dụ 6: Ở Canada, mã bưu chính có 6 kí tự gồm: 3 chữ cái in hoa (trong số 26 chữ cái tiếng Anh) và 3 chữ số. Mỗi mã bưu chính bắt đầu bằng 1 chữ cái và xen kẽ bằng 1 chữ số.

(Nguồn: <https://capath.vn/postal-code-canada>)

a) Có thể tạo được bao nhiêu mã bưu chính?

b) Có thể tạo được bao nhiêu mã bắt đầu bằng chữ S ?

c) Có thể tạo được bao nhiêu mã bắt đầu bằng chữ S và kết thúc bằng chữ số 8 ?

Lời giải

a) Chọn kí tự đầu tiên là một chữ cái có 26 (cách)

Chọn kí tự thứ hai là một chữ số nên có: 10 (cách)

Chọn kí tự thứ ba là một chữ cái có 26 (cách)

Chọn kí tự thứ tư là một chữ số nên có: 10 (cách)

Chọn kí tự thứ năm là một chữ cái có 26 (cách)

Chọn kí tự cuối cùng là một chữ số nên có: 10 (cách)

Theo quy tắc nhân, ta có số mã bưu chính có thể tạo ra là: $26.10.26.10.26.10 = 17576000$ (mã bưu chính)

b) Chọn kí tự đầu tiên là chữ S nên có 1 (cách)

Chọn kí tự thứ hai là một chữ số nên có: 10 (cách)

Chọn kí tự thứ ba là một chữ cái có 26 (cách)

Chọn kí tự thứ tư là một chữ số nên có: 10 (cách)

Chọn kí tự thứ năm là một chữ cái có 26 (cách)

Chọn kí tự cuối cùng là một chữ số nên có: 10 (cách)

Theo quy tắc nhân, ta có số mã bưu chính có thể tạo ra là: $1.10.26.10.26.10 = 676000$ (mã bưu chính)

c) Chọn kí tự đầu tiên là chữ S nên có 1 (cách)

Chọn kí tự thứ hai là một chữ số nên có: 10 (cách)

Chọn kí tự thứ ba là một chữ cái có 26 (cách)

Chọn kí tự thứ tư là một chữ số nên có: 10 (cách)

Chọn kí tự thứ năm là một chữ cái có 26 (cách)

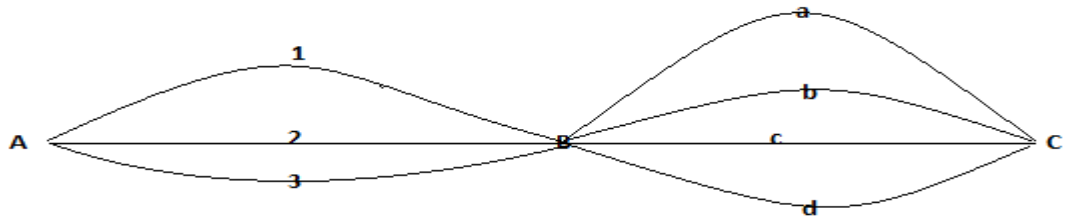
Chọn kí tự cuối cùng là chữ số 8 nên có: 1 (cách)

Theo quy tắc nhân, ta có số mã bưu chính có thể tạo ra là: $1.10.26.10.26.1 = 67600$ (mã bưu chính)

Ví dụ 7: Từ thành phố A đến thành phố B có 3 con đường, từ thành phố B đến thành phố C có 4 con đường. Có bao nhiêu cách đi từ thành phố A đến thành phố C, biết phải đi qua thành phố

Lời giải

Cách 1: Làm bằng cách liệt kê các con đường đi:



Căn cứ vào sơ đồ trên, ta có các con đường đi là: 1a, 1b, 1c, 1d, 2a, 2b, 2c, 2d, 3a, 3b, 3c, 3d. Vậy có 12 con đường

Cách 2: Sử dụng quy tắc nhân

Để đi từ thành phố A đến thành phố B ta có 6 con đường để đi. Với mỗi cách đi từ thành phố A đến thành phố B ta có 4 cách đi từ thành phố B đến thành phố

Vậy có $3.4 = 12$ cách đi từ thành phố A đến.

Ví dụ 8: Từ một nhóm học sinh gồm 20 nam và 25 nữ, có bao nhiêu cách chọn một nam và một nữ?

Hướng dẫn giải

Để chọn được một đôi song ca gồm một nam và một nữ ta thực hiện liên tiếp 2 công đoạn:

Công đoạn 1: Chọn 1 học sinh nam từ 20 học sinh nam $\Rightarrow$ có 20 cách chọn.

Công đoạn 2: Chọn 1 học sinh nữ từ 25 học sinh nữ $\Rightarrow$ có 25 cách chọn.

Theo quy tắc nhân ta có $20.25 = 500$ cách chọn.

Ví dụ 9. Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số khác nhau được lập từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6

Giải.

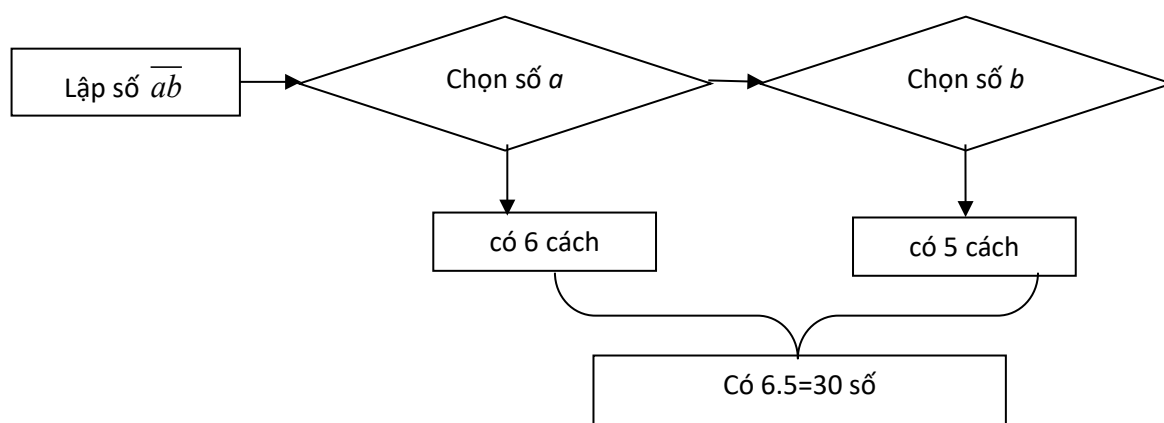
Gọi $\overline{ab}$ là số tự nhiên có hai chữ số khác nhau

Bước 1. Chọn số a: có 6 cách chọn

Bước 2. Chọn số b: có 5 cách chọn

Vậy có $6.5 = 30$ số $\overline{ab}$ theo yêu cầu bài toán

Sơ đồ bài toán trên như sau:



3. Dạng 3: Tổng hợp quy tắc cộng và quy tắc nhân:

Ví dụ 1: Một thùng chứa 6 quả dưa hấu, một thùng khác chứa 15 quả thanh long. Từ hai thùng này,

a) có bao nhiêu cách chọn một quả dưa hấu hoặc một quả thanh long.

b) có bao nhiêu cách chọn một quả dưa hấu và một quả thanh long.



Hình 9

Lời giải

a) Việc chọn một quả dưa hấu hoặc một quả thanh long được thực hiện qua 2 phương án

Phương án 1: Chọn một quả dưa hấu, có 6 cách thực hiện

Phương án 2: Chọn một quả thanh long, có 15 cách thực hiện

Áp dụng quy tắc cộng, số cách chọn một quả dưa hấu hoặc một quả thanh long là

$$6+15=21 \text{ (cách chọn)}$$

b) Việc chọn một quả dưa hấu và một quả thanh long được thực hiện qua 2 công đoạn:

Công đoạn 1: Chọn một quả dưa hấu, có 6 cách thực hiện

Công đoạn 2: Chọn một quả thanh long, có 15 cách thực hiện

Áp dụng quy tắc nhân, số cách chọn một quả thanh long và một quả dưa hấu là

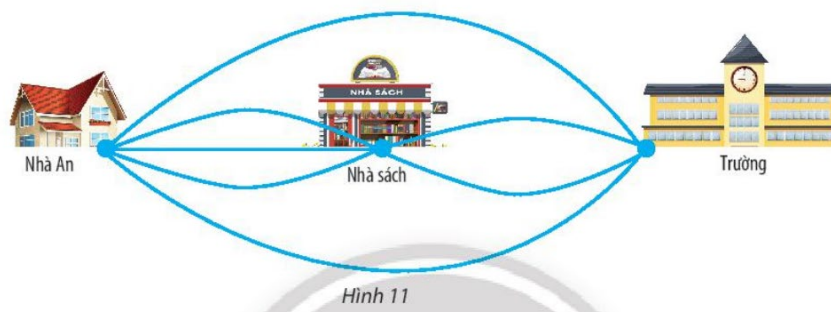
$$6.15=90 \text{ (cách chọn)}$$

Ví dụ 2: An có thể đi từ nhà đến trường theo các con đường như hình 11, trong đó có những con đường đi qua nhà sách.

a) An có bao nhiêu cách đi từ nhà đến trường mà có đi qua nhà sách?

b) An có bao nhiêu cách đi từ nhà đến trường?

Lưu ý: Chỉ tính những đường đi qua các điểm (nhà An, nhà sách, nhà trường) không quá 1 lần



Hình 11

Lời giải

a) Việc đi từ nhà đến trường qua nhà sách được thực hiện qua hai công đoạn:

Công đoạn 1: Đi từ nhà đến nhà sách, có 3 con đường

Công đoạn 2: Đi từ nhà sách đến trường, có 2 con đường

Số cách đi từ nhà đến trường qua nhà sách có số cách là:

$$3.2=6(\text{cách})$$

b) Việc đi từ nhà đến trường có 2 phương án

Phương án 1: Đi từ nhà đến trường qua nhà sách, có 6 cách thực hiện (kết quả của câu a))

Phương án 2: Đi từ nhà đến trường không qua nhà sách có 2 cách

Áp dụng quy tắc cộng, ta có số cách đi từ nhà đến trường là:

$$6+2=8 (\text{cách})$$

Ví dụ 3: Trong một trường trung học phổ thông, khối 10 có 245 học sinh nam và 235 học sinh nữ.

a) Nhà trường cần chọn một học sinh ở khối 10 đi dự buổi giao lưu với học sinh các trường trung học phổ thông trong tỉnh. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

b) Nhà trường cần chọn hai học sinh ở khối 10, trong đó có 1 nam và 1 nữ, đi dự trại hè của học sinh trong tỉnh. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

Lời giải

a) Việc chọn một học sinh đi dự buổi giao lưu là thực hiện một trong hai hoạt động sau:

Chọn một học sinh nam: Có 245 cách chọn.

Chọn một học sinh nữ: Có 235 cách chọn.

Theo quy tắc cộng có $245 + 235 = 480$ cách chọn một học sinh đi dự buổi giao lưu.

b) Việc chọn hai học sinh đi dự trại hè cần thực hiện liên tiếp hai hoạt động sau:

Chọn một học sinh nam: Có 245 cách chọn.

Chọn một học sinh nữ: Có 235 cách chọn.

Vậy có $245.235 = 57575$ cách chọn hai học sinh đi dự trại hè.

Ví dụ 4: Ở một loài thực vật, A là gen trội quy định tính trạng hoa kép, a là gen lặn quy định tính trạng hoa đơn.

a) Sự tổ hợp giữa hai gen trên tạo ra mấy kiểu gen?

b) Khi giao phối ngẫu nhiên, có bao nhiêu kiểu giao phối khác nhau từ các kiểu gen đó?

Lời giải

a) Sự tổ hợp gen A và gen a thành các kiểu gen là: AA, Aa, aa.

Vậy có 3 kiểu gen.

b) Khi giao phối ngẫu nhiên thì có các kiểu giao phối:

$$AA \times AA$$

$aa \times aa$
 $Aa \times Aa$
 $AA \times aa$
 $Aa \times AA$
 $Aa \times aa$

Vậy có 6 kiểu giao phối khác nhau.

Ví dụ 5: Bạn An có 3 cái áo và 4 cái quần. Hỏi bạn An có mấy cách chọn

- a) Một cái quần hoặc một cái áo? b) Một bộ quần áo ?

Lời giải

a) Để chọn một cái quần hoặc một cái áo ta có hai phương án lựa chọn

Phương án A- Chọn một cái quần: Có 4 cách thực hiện.

Phương án B- Chọn một cái áo: Có 3 cách thực hiện.

Theo quy tắc cộng ta có: $4 + 3 = 7$ cách chọn một cái quần hoặc một cái áo.

b) Để chọn một bộ quần áo, ta phải thực hiện hai công đoạn liên tiếp

Công đoạn 1- Chọn một cái quần: Có 4 cách thực hiện

Công đoạn 2- Chọn một cái áo: Có 3 cách thực hiện.

Theo quy tắc nhân ta có $4.3 = 12$ cách chọn một bộ quần áo.

Ví dụ 6: Có bao nhiêu số tự nhiên

- a) có ba chữ số khác nhau?
b) là số lẻ có ba chữ số khác nhau?
c) là số có ba chữ số và chia hết cho 5?
d) là số có ba chữ số khác nhau và chia hết cho 5?

Lời giải

a) Gọi số tự nhiên cần tìm là $\overline{abc}$ với a, b, c là các chữ số tự nhiên đôi một khác nhau, $a \neq 0$.

Chọn a : Có 9 cách.

Chọn b : Có 9 cách.

Chọn c : Có 8 cách.

Như vậy có $9.9.8 = 648$ số tự nhiên có ba chữ số khác nhau.

b) Gọi số tự nhiên cần tìm là $\overline{abc}$ với a, b, c là các chữ số tự nhiên đôi một khác nhau, $a \neq 0$ và c lẻ.

Chọn c : Có 5 cách.

Chọn a : Có 8 cách.

Chọn b : Có 8 cách.

Như vậy có $5.8.8 = 320$ số tự nhiên lẻ có ba chữ số khác nhau.

c) Gọi số tự nhiên cần tìm là $\overline{abc}$ với a, b, c là các chữ số tự nhiên $a \neq 0$ và $c \in \{0; 5\}$.

Chọn a : Có 9 cách.

Chọn b : Có 10 cách.

Chọn c : Có 2 cách.

Như vậy có $9.10.2 = 180$ số tự nhiên có ba chữ số và chia hết cho 5.

d) Gọi số tự nhiên cần tìm là $\overline{abc}$ với a, b, c là các chữ số tự nhiên đôi một khác nhau $a \neq 0$ và $c \in \{0; 5\}$

Trường hợp 1: $c = 0$

Chọn c : Có 1 cách.

Chọn a : Có 9 cách.

Chọn b : Có 8 cách.

Như vậy có $1.9.8 = 72$ số thỏa mãn bài toán.

Trường hợp 2: $c = 5$

Chọn c : Có 1 cách.

Chọn a : Có 8 cách.

Chọn b : Có 8 cách.

Như vậy có $1.8.8 = 64$ số thỏa mãn bài toán.

Vậy có $72 + 64 = 136$ số tự nhiên có ba chữ số khác nhau và chia hết cho 5.

Ví dụ 7: a) Mật khẩu của chương trình máy tính quy định gồm 3 ký tự, mỗi ký tự là một chữ số. Hỏi có thể tạo được bao nhiêu mật khẩu khác nhau?

b) Nếu chương trình máy tính quy định mới mật khẩu vẫn gồm 3 ký tự, nhưng ký tự đầu tiên phải là một chữ cái in hoa trong bảng chữ cái tiếng Anh gồm 26 chữ (từ A đến Z) và 2 ký tự sau là các chữ số (từ 0 đến 9). Hỏi quy định mới có thể tạo được nhiều hơn quy định cũ bao nhiêu mật khẩu khác nhau?

Lời giải

a) Giả sử mật khẩu của máy tính gồm 3 ký tự, mỗi ký tự là một chữ số.

Chọn ký tự đầu tiên: Có 10 cách chọn.

Chọn ký tự thứ hai: Có 10 cách chọn.

Chọn ký tự thứ ba: Có 10 cách chọn.

Vậy có thể tạo được $10.10.10 = 1000$ mật khẩu khác nhau thỏa mãn bài toán.

b) Giả sử mật khẩu mới của máy tính gồm 3 ký tự, ký tự đầu là một chữ cái in hoa, 2 ký tự sau là một chữ số.

Chọn ký tự đầu tiên là một chữ cái in hoa trong bảng chữ cái tiếng Anh gồm 26 chữ (từ A đến Z): Có 26 cách chọn.

Chọn ký tự thứ hai là các chữ số (từ 0 đến 9): Có 10 cách chọn.

Chọn ký tự thứ ba là các chữ số (từ 0 đến 9): Có 10 cách chọn.

Vậy có thể tạo được $26.10.10 = 2600$ mật khẩu khác nhau thỏa mãn bài toán.

Do đó quy định mới có thể tạo được nhiều hơn quy định cũ số mật khẩu khác nhau là:

$$2600 - 1000 = 1600 \text{ (mật khẩu).}$$

Ví dụ 8: Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số, trong đó chữ số hàng trăm là chữ số chẵn, chữ số hàng đơn vị là chữ số lẻ.

Lời giải

Giả sử chữ số cần tìm có dạng $\overline{abc}$

Chữ số a là chữ số hàng trăm và là chữ số chẵn nên $a \in \{2; 4; 6; 8\}$, do đó a có 4 cách chọn

Chữ số c là chữ số hàng số hàng đơn vị và là chữ số lẻ nên $c \in \{1; 3; 5; 7; 9\}$, do đó c có 5 cách chọn

Chữ số b không có điều kiện ràng buộc nên có 10 cách chọn

Áp dụng quy tắc nhân, ta có số số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu là:

$$4.5.10 = 200 \text{ số } \overline{abc}$$

Vậy có 200 số tự nhiên có 3 chữ số, trong đó chữ số hàng trăm là chữ số chẵn, chữ số hàng đơn vị là chữ số lẻ.

Ví dụ 9: Bạn Nam dự định đặt mật khẩu cho khóa vali là một số có ba chữ số được chọn ra từ các chữ số 1, 2, 3, 4. Hỏi bạn Nam có bao nhiêu cách đặt mật khẩu?

Lời giải

Để đặt mật khẩu ta thực hiện ba hành động liên tiếp: chọn chữ số hàng trăm, chọn chữ số hàng chục, chọn chữ số hàng đơn vị.

Chọn chữ số hàng trăm: Có 4 cách chọn.

Chọn chữ số hàng chục: Có 4 cách chọn.

Chọn chữ số hàng đơn vị: Có 4 cách chọn.

Vậy có $4.4.4 = 64$ cách đặt mật khẩu.

Ví dụ 10: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 ta lập ra số tự nhiên gồm ba chữ số, chia hết cho 5. Có thể lập được bao nhiêu số như thế?

Lời giải

Việc lập số tự nhiên gồm ba chữ số chia hết cho 5 là thực hiện 3 hành động liên tiếp: chọn chữ số hàng đơn vị, chọn chữ số hàng chục, chọn chữ số hàng trăm.

Hành động 1: chọn chữ số hàng đơn vị: Có 1 cách chọn (số 5).

Hành động 2: chọn chữ số hàng chục: Có 6 cách chọn.

Hành động 3: chọn chữ số hàng trăm: Có 6 cách chọn.

Theo quy tắc nhân, số số tự nhiên lập được là: $1.6.6 = 36$ (số).

Ví dụ 11: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 lập được bao nhiêu

a) Số chẵn gồm ba chữ số?

b) Số chẵn gồm ba chữ số đôi một khác nhau?

Lời giải

a) Việc lập số chẵn gồm ba chữ số là thực hiện 3 hành động liên tiếp: chọn chữ số hàng đơn vị, chọn chữ số hàng chục, chọn chữ số hàng trăm.

chọn chữ số hàng đơn vị: Có 3 cách chọn (chọn trong các số 2, 4, 6).

chọn chữ số hàng chục: Có 7 cách chọn.

chọn chữ số hàng trăm: Có 7 cách chọn.

Theo quy tắc nhân, số số chẵn lập được là: $3.7.7=147$ (số).

b) Việc lập số chẵn gồm ba chữ số đôi một khác nhau là thực hiện 3 hành động liên tiếp: chọn chữ số hàng đơn vị, chọn chữ số hàng chục, chọn chữ số hàng trăm.

chọn chữ số hàng đơn vị: Có 3 cách chọn (chọn trong các số 2, 4, 6).

chọn chữ số hàng chục: Có 6 cách chọn.

chọn chữ số hàng trăm: Có 5 cách chọn.

Theo quy tắc nhân, số số chẵn lập được là: $3.6.5=90$ (số).

Ví dụ 12: Có bao nhiêu chữ số chẵn gồm bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ các số 0,1,2,4,5,6,8

Lời giải

Gọi $x = \overline{abcd}$; $a, b, c, d \in \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 8\}$.

Cách 1: Tính trực tiếp

Vì x là số chẵn nên $d \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

TH 1: $d = 0 \Rightarrow$ có 1 cách chọn d .

Với mỗi cách chọn d ta có 6 cách chọn $a \in \{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$

Với mỗi cách chọn a, d ta có 5 cách chọn $b \in \{1, 2, 4, 5, 6, 8\} \setminus \{a\}$

Với mỗi cách chọn a, b, d ta có 4 cách chọn $c \in \{1, 2, 4, 5, 6, 8\} \setminus \{a, b\}$

Suy ra trong trường hợp này có $1.6.5.4 = 120$ số.

TH 2: $d \neq 0 \Rightarrow d \in \{2, 4, 6, 8\} \Rightarrow$ có 4 cách chọn d

Với mỗi cách chọn d , do $a \neq 0$ nên ta có 5 cách chọn

$a \in \{1, 2, 4, 5, 6, 8\} \setminus \{d\}$.

Với mỗi cách chọn a, d ta có 5 cách chọn $b \in \{1, 2, 4, 5, 6, 8\} \setminus \{a\}$

Với mỗi cách chọn a, b, d ta có 4 cách chọn $c \in \{1, 2, 4, 5, 6, 8\} \setminus \{a, b\}$

Suy ra trong trường hợp này có $4.5.5.4 = 400$ số.

Vậy có tất cả $120 + 400 = 520$ số cần lập.

Cách 2: Tính gián tiếp (đếm phần bù)

Gọi $A = \{\text{số các số tự nhiên có bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ các số } 0, 1, 2, 4, 5, 6, 8\}$

$B = \{\text{số các số tự nhiên lẻ có bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ các số } 0, 1, 2, 4, 5, 6, 8\}$

$C = \{\text{số các số tự nhiên chẵn có bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ các số } 0, 1, 2, 4, 5, 6, 8\}$

Ta có: $|C| = |A| - |B|$.

Dễ dàng tính được: $|A| = 6.6.5.4 = 720$.

Ta đi tính $|B|$?

$x = \overline{abcd}$ là số lẻ $\Rightarrow d \in \{1, 5\} \Rightarrow d$ có 2 cách chọn.

Với mỗi cách chọn d ta có 5 cách chọn a (vì $a \neq 0, a \neq d$)

Với mỗi cách chọn a, d ta có 5 cách chọn b

Với mỗi cách chọn a, b, d ta có 4 cách chọn c

Suy ra $|B| = 2.5.5.4 = 200$

Vậy $|C| = 520$.

Ví dụ 13: Cho hai đường thẳng song song d, d' . Trên d lấy 10 điểm phân biệt, trên d' lấy 15 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu tam giác mà đỉnh của nó được chọn từ 25 đỉnh nói trên?

Lời giải

- Trường hợp 1: Lấy 2 điểm thuộc d , 1 điểm thuộc d' :
Lấy điểm thứ nhất thuộc d có 10 cách, lấy điểm thứ hai thuộc d có 9 cách
Lấy điểm thuộc d' có 15 cách.

Vì sự thay đổi các đỉnh trong tam giác không tạo thành một tam giác mới nên hai đỉnh lấy trên d nếu đổi thứ tự lấy không tạo thành tam giác mới.

$$\text{Do đó có } \frac{10 \times 9}{2} \times 15 = 675 \text{ tam giác}$$

- Trường hợp 2: Lấy 1 điểm thuộc d , 2 điểm thuộc d' :
Lấy điểm thứ nhất thuộc d' có 15 cách, lấy điểm thứ hai thuộc d' có 14 cách
Lấy điểm thuộc d có 10 cách.

Vì sự thay đổi các đỉnh trong tam giác không tạo thành một tam giác mới nên hai đỉnh lấy trên d' nếu đổi thứ tự lấy không tạo thành tam giác mới.

$$\text{Do đó có } \frac{15 \times 14}{2} \times 10 = 1050 \text{ tam giác}$$

Vậy có $675 + 1050 = 1725$ tam giác.

Ví dụ 14. Cho tập $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm ba chữ số khác nhau lấy từ tập X đã cho.

Giải. Gọi $\overline{abc}$ là số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau, $\overline{abc}$ chẵn

Có hai trường hợp khi $\overline{abc}$ chẵn là $c = 0$ hoặc $c \neq 0$

Trường hợp 1: $c = 0$

Số a có 9 cách chọn

Số b có 8 cách chọn

Suy ra có $1.9.8 = 72$ số

Trường hợp 2. $c \neq 0$

Số c có 4 cách chọn

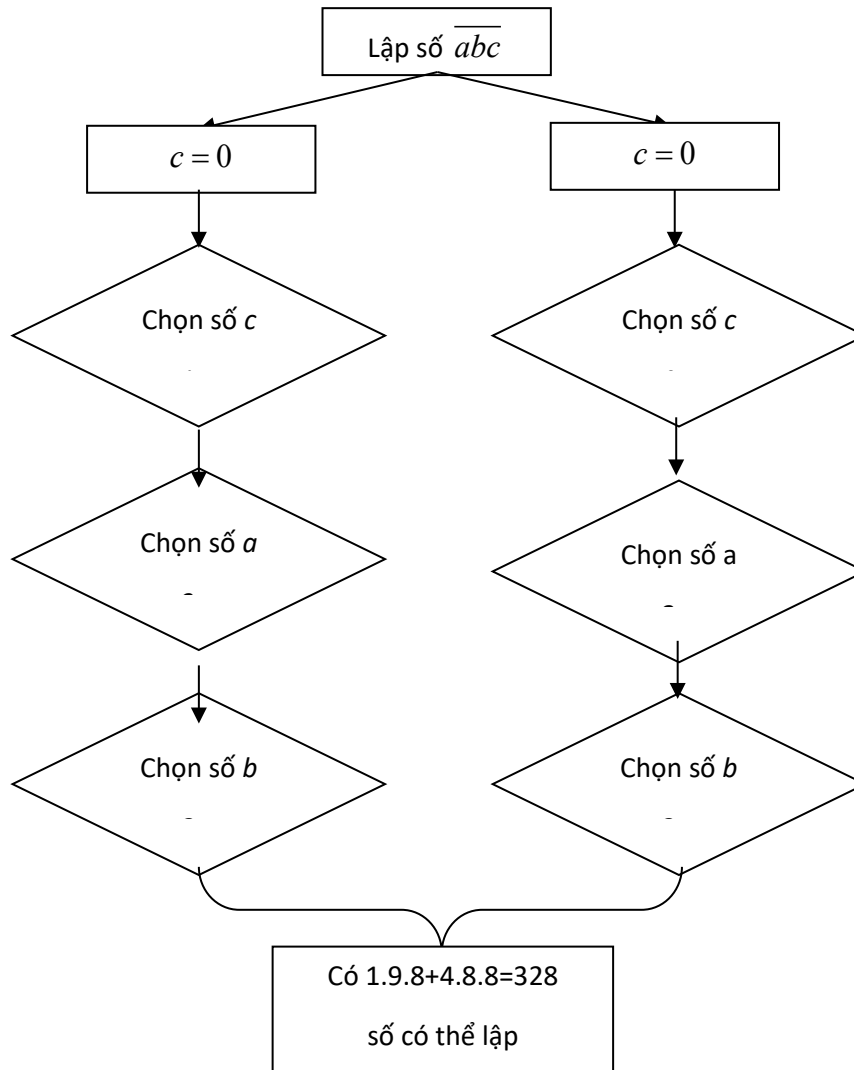
Số a có 8 cách chọn

Số b có 8 cách chọn

Suy ra có $4.8.8 = 256$ số

Vậy có $72 + 256 = 328$ số tự nhiên chẵn gồm ba chữ số khác nhau

Sơ đồ bài toán trên như sau:



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM QUY TẮC ĐẾM 1

Câu 1: Giả sử bạn muốn mua một áo sơ mi cỡ 39 hoặc cỡ 40. Áo cỡ 39 có 5 màu khác nhau, áo cỡ 40 có 4 màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu sự lựa chọn?

A. 9.

B. 5.

C. 4.

D. 1.

Lời giải.

- Nếu chọn cỡ áo 39 thì sẽ có 5 cách.
- Nếu chọn cỡ áo 40 thì sẽ có 4 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $5 + 4 = 9$ cách chọn mua áo.

Câu 2: Một người có 4 cái quần khác nhau, 6 cái áo khác nhau, 3 chiếc cà vạt khác nhau. Để chọn một cái quần hoặc một cái áo hoặc một cái cà vạt thì số cách chọn khác nhau là:

A. 13.

B. 72.

C. 12.

D. 30.

Lời giải.

- Nếu chọn một cái quần thì sẽ có 4 cách.
- Nếu chọn một cái áo thì sẽ có 6 cách.
- Nếu chọn một cái cà vạt thì sẽ có 3 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $4 + 6 + 3 = 13$ cách chọn.

Câu 3: Trên bàn có 8 cây bút chì khác nhau, 6 cây bút bi khác nhau và 10 cuốn tập khác nhau. Một học sinh muốn chọn một đồ vật duy nhất hoặc một cây bút chì hoặc một cây bút bi hoặc một cuốn tập thì số cách chọn khác nhau là:

A. 480.

B. 24.

C. 48.

D. 60.

Lời giải.

- Nếu chọn một cây bút chì thì sẽ có 8 cách.
- Nếu chọn một cây bút bi thì sẽ có 6 cách.
- Nếu chọn một cuốn tập thì sẽ có 10 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $8 + 6 + 10 = 24$ cách chọn.

Câu 4: Trong một trường THPT, khối 11 có 280 học sinh nam và 325 học sinh nữ. Nhà trường cần chọn một học sinh ở khối 11 đi dự dạ hội của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

A. 45.

B. 280.

C. 325.

D. 605.

Lời giải.

- Nếu chọn một học sinh nam có 280 cách.
- Nếu chọn một học sinh nữ có 325 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $280 + 325 = 605$ cách chọn.

Câu 5: Một trường THPT được cử một học sinh đi dự trại hè toàn quốc. Nhà trường quyết định chọn một học sinh tiên tiến lớp 11A hoặc lớp 12B. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn, nếu biết rằng lớp 11A có 31 học sinh tiên tiến và lớp 12B có 22 học sinh tiên tiến?

A. 31.

B. 9.

C. 53.

D. 682.

Lời giải.

- Nếu chọn một học sinh lớp 11A có 31 cách.
- Nếu chọn một học sinh lớp 12B có 22 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $31 + 22 = 53$ cách chọn.

Câu 6: Trong một hộp chứa sáu quả cầu trắng được đánh số từ 1 đến 6 và ba quả cầu đen được đánh số 7, 8, 9. Có bao nhiêu cách chọn một trong các quả cầu ấy?

A. 27.

B. 9.

C. 6.

D. 3.

Lời giải.

Vì các quả cầu trắng hoặc đen đều được đánh số phân biệt nên mỗi lần lấy ra một quả cầu bất kì là một lần chọn.

- Nếu chọn một quả trắng có 6 cách.
- Nếu chọn một quả đen có 3 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $6 + 3 = 9$ cách chọn.

Câu 7: Giả sử từ tỉnh A đến tỉnh B có thể đi bằng các phương tiện: ô tô, tàu hỏa, tàu thủy hoặc máy bay. Mỗi ngày có 10 chuyến ô tô, 5 chuyến tàu hỏa, 3 chuyến tàu thủy và 2 chuyến máy bay. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ tỉnh A đến tỉnh B ?

- A. 20. B. 300. C. 18. D. 15.

Lời giải.

- Nếu đi bằng ô tô có 10 cách.
- Nếu đi bằng tàu hỏa có 5 cách.
- Nếu đi bằng tàu thủy có 3 cách.
- Nếu đi bằng máy bay có 2 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $10 + 5 + 3 + 2 = 20$ cách chọn.

Câu 8: Trong một cuộc thi tìm hiểu về đất nước Việt Nam, ban tổ chức công bố danh sách các đề tài bao gồm: 8 đề tài về lịch sử, 7 đề tài về thiên nhiên, 10 đề tài về con người và 6 đề tài về văn hóa. Mỗi thí sinh được quyền chọn một đề tài. Hỏi mỗi thí sinh có bao nhiêu khả năng lựa chọn đề tài?

- A. 20. B. 3360. C. 31. D. 30.

Lời giải.

- Nếu chọn đề tài về lịch sử có 8 cách.
- Nếu chọn đề tài về thiên nhiên có 7 cách.
- Nếu chọn đề tài về con người có 10 cách.
- Nếu chọn đề tài về văn hóa có 6 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $8 + 7 + 10 + 6 = 31$ cách chọn.

Câu 9: Một tổ có 5 học sinh nữ và 6 học sinh nam. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ngẫu nhiên một học sinh của tổ đó đi trực nhật.

- A. 20. B. 11. C. 30. D. 10.

Lời giải

Chọn ngẫu nhiên một học sinh từ 11 học sinh, ta có 11 cách chọn.

Câu 10: Có bao nhiêu số tự nhiên có chín chữ số mà các chữ số của nó viết theo thứ tự giảm dần:

- A. 5. B. 15. C. 55. D. 10.

Lời giải

Với một cách chọn 9 chữ số từ tập $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ta có duy nhất một cách xếp chúng theo thứ tự giảm dần.

Ta có 10 cách chọn 9 chữ số từ tập $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Do đó có 10 số tự nhiên cần tìm.

Câu 11: Có 3 kiểu mặt đồng hồ đeo tay và 4 kiểu dây. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một chiếc đồng hồ gồm một mặt và một dây?

A. 4.

B. 7.

C. 12.

D. 16.

Lời giải.

Để chọn một chiếc đồng hồ, ta có:

- Có 3 cách chọn mặt.
- Có 4 cách chọn dây.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $3 \times 4 = 12$ cách.

Câu 12: Một người có 4 cái quần, 6 cái áo, 3 chiếc cà vạt. Để chọn mỗi thứ một món thì có bao nhiêu cách chọn bộ "quần-áo-cà vạt" khác nhau?

A. 13.

B. 72.

C. 12.

D. 30.

Lời giải.

Để chọn một bộ "quần-áo-cà vạt", ta có:

- Có 4 cách chọn quần.
- Có 6 cách chọn áo.
- Có 3 cách chọn cà vạt.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $4 \times 6 \times 3 = 72$ cách.

Câu 13: Một thùng trong đó có 12 hộp đựng bút màu đỏ, 18 hộp đựng bút màu xanh. Số cách khác nhau để chọn được đồng thời một hộp màu đỏ, một hộp màu xanh là?

A. 13.

B. 12.

C. 18.

D. 216.

Lời giải.

Để chọn một hộp màu đỏ và một hộp màu xanh, ta có:

- Có 12 cách chọn hộp màu đỏ.
- Có 18 cách chọn hộp màu xanh.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $12 \times 18 = 216$ cách.

Câu 14: Trên bàn có 8 cây bút chì khác nhau, 6 cây bút bi khác nhau và 10 cuốn tập khác nhau. Số cách khác nhau để chọn được đồng thời một cây bút chì, một cây bút bi và một cuốn tập.

A. 24.

B. 48.

C. 480.

D. 60.

Lời giải.

Để chọn "một cây bút chì - một cây bút bi - một cuốn tập", ta có:

- Có 8 cách chọn bút chì.
- Có 6 cách chọn bút bi.
- Có 10 cách chọn cuốn tập.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $8 \times 6 \times 10 = 480$ cách.

Câu 15: Một bó hoa có 5 hoa hồng trắng, 6 hoa hồng đỏ và 7 hoa hồng vàng. Hỏi có mấy cách chọn lấy ba bông hoa có đủ cả ba màu.

A. 240.

B. 210.

C. 18.

D. 120.

Lời giải.

Để chọn ba bông hoa có đủ cả ba màu, ta có:

- Có 5 cách chọn hoa hồng trắng.
- Có 6 cách chọn hoa hồng đỏ.
- Có 7 cách chọn hoa hồng vàng.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $5 \times 6 \times 7 = 210$ cách.

Câu 16: Một người vào cửa hàng ăn, người đó chọn thực đơn gồm một món ăn trong năm món, một loại quả tráng miệng trong năm loại quả tráng miệng và một nước uống trong ba loại nước uống. Có bao nhiêu cách chọn thực đơn.

- A.** 25. **B.** 75. **C.** 100. **D.** 15.

Lời giải.

Để chọn thực đơn, ta có:

- Có 5 cách chọn món ăn.
- Có 5 cách chọn quả tráng miệng.
- Có 3 cách chọn nước uống.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $5 \times 5 \times 3 = 75$ cách.

Câu 17: Trong một trường THPT, khối 11 có 280 học sinh nam và 325 học sinh nữ. Nhà trường cần chọn hai học sinh trong đó có một nam và một nữ đi dự trại hè của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

- A.** 910000. **B.** 91000. **C.** 910. **D.** 625.

Lời giải.

Để chọn một nam và một nữ đi dự trại hè, ta có:

- Có 280 cách chọn học sinh nam.
- Có 325 cách chọn học sinh nữ.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $280 \times 325 = 91000$ cách.

Câu 18: Một đội học sinh giỏi của trường THPT, gồm 5 học sinh khối 12, 4 học sinh khối 11, 3 học sinh khối 10. Số cách chọn ba học sinh trong đó mỗi khối có một em?

- A.** 12. **B.** 220. **C.** 60. **D.** 3.

Lời giải.

Để chọn một nam và một nữ đi dự trại hè, ta có:

- Có 5 cách chọn học sinh khối 12.
- Có 4 cách chọn học sinh khối 11.
- Có 3 cách chọn học sinh khối 10.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $5 \times 4 \times 3 = 60$ cách.

Câu 19: Có 10 cặp vợ chồng đi dự tiệc. Tổng số cách chọn một người đàn ông và một người đàn bà trong bữa tiệc phát biểu ý kiến sao cho hai người đó không là vợ chồng?

A. 100.

B. 91.

C. 10.

D. 90.

Lời giải.

Để chọn một người đàn ông và một người đàn bà không là vợ chồng, ta có

- Có 10 cách chọn người đàn ông.
- Có 9 cách chọn người đàn bà.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $9 \times 10 = 90$ cách.

Câu 20: An muốn qua nhà Bình để cùng Bình đến chơi nhà Cường. Từ nhà An đến nhà Bình có 4 con đường đi, từ nhà Bình tới nhà Cường có 6 con đường đi. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn đường đi đến nhà Cường?

A. 6.

B. 4.

C. 10.

D. 24.

Lời giải.

- Từ An $\longrightarrow$ Bình có 4 cách.
- Từ Bình $\longrightarrow$ Cường có 6 cách.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $4 \times 6 = 24$ cách.

Câu 21: Các thành phố A, B, C, D được nối với nhau bởi các con đường như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến D mà qua B và C chỉ một lần?



A. 9.

B. 10.

C. 18.

D. 24.

Lời giải.

- Từ A $\longrightarrow$ B có 4 cách.
- Từ B $\longrightarrow$ C có 2 cách.
- Từ C $\longrightarrow$ D có 2 cách.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $4 \times 2 \times 2 = 16$ cách.

Câu 22: Các thành phố A, B, C, D được nối với nhau bởi các con đường như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến D rồi quay lại A?



A. 1296.

B. 784.

C. 576.

D. 324.

Lời giải.

Từ kết quả câu trên, ta có:

- Từ A $\longrightarrow$ D có 24 cách.
- Tương tự, từ D $\longrightarrow$ A có 24 cách.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $24 \times 24 = 576$ cách.

Câu 23: Có 10 cái bút khác nhau và 8 quyển sách giáo khoa khác nhau. Một bạn học sinh cần chọn 1 cái bút và 1 quyển sách. Hỏi bạn học sinh đó có bao nhiêu cách chọn?

A. 80 .

B. 60 .

C. 90 .

D. 70 .

Lời giải

Số cách chọn 1 cái bút có 10 cách, số cách chọn 1 quyển sách có 8 cách.

Vậy theo quy tắc nhân, số cách chọn 1 cái bút và 1 quyển sách là: $10.8 = 80$ cách.

Câu 24: Một hộp đựng 5 bi đỏ và 4 bi xanh. Có bao nhiêu cách lấy 2 bi có đủ cả 2 màu?

A. 20 .

B. 16 .

C. 9 .

D. 36 .

Lời giải

Lấy 1 bi đỏ có 5 cách.

Lấy 1 bi xanh có 4 cách.

Theo quy tắc nhân, số cách lấy 2 bi có đủ cả 2 màu là $5.4 = 20$ cách.

Câu 25: Một người vào cửa hàng ăn, người đó chọn thực đơn gồm 1 món ăn trong 5 món ăn, 1 loại quả tráng miệng trong 4 loại quả tráng miệng và 1 loại nước uống trong 3 loại nước uống. Hỏi có bao nhiêu cách chọn thực đơn?

A. 75 .

B. 12 .

C. 60 .

D. 3 .

Lời giải

Có 5 cách chọn 1 món ăn trong 5 món ăn, 4 cách chọn 1 loại quả tráng miệng trong 4 loại quả tráng miệng và 3 cách chọn 1 loại nước uống trong 3 loại nước uống.

Theo quy tắc nhân có $5.4.3 = 60$ cách chọn thực đơn.

Câu 26: Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà cả hai chữ số đều lẻ?

A. 25 .

B. 20 .

C. 50 .

D. 10 .

Lời giải

Gọi số tự nhiên có hai chữ số mà cả hai chữ số đều lẻ là $\overline{ab}$.

Số cách chọn số a là 5 cách.

Số cách chọn số b là 5 cách.

Vậy có $5.5 = 25$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 27: Số các số tự nhiên chẵn, gồm bốn chữ số khác nhau đôi một và không tận cùng bằng 0 là :

A. 504 .

B. 1792 .

C. 953088 .

D. 2296 .

Lời giải

Gọi số cần tìm là $\overline{abcd}$

Có 4 cách chọn d , 8 cách chọn a , 8 cách chọn b và 7 cách chọn c . Vậy có tất cả :

$$4.8.8.7 = 1792$$

Câu 28: Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau?

A. 1000 .

B. 720 .

C. 729 .

D. 648 .

Lời giải

Gọi số cần lập là $\overline{abc}$ có ba chữ số đôi một khác nhau.

Chữ số a có 9 cách chọn.

Chữ số b có 9 cách chọn.

Chữ số c có 8 cách chọn.

Do đó có $9.9.8 = 648$ cách lập số.

- Câu 29:** Có 10 quả cầu đỏ được đánh số từ 1 đến 10, 7 quả cầu xanh được đánh số từ 1 đến 7 và 8 quả cầu vàng được đánh số từ 1 đến 8. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 3 quả cầu khác màu và khác số.
A. 392 **B.** 1023 **C.** 3014 **D.** 391

Lời giải

Ta chọn các quả cầu theo trình tự sau

Chọn quả xanh: 7 cách chọn

Chọn quả cầu vàng: có 7 cách chọn

Chọn quả cầu đỏ: có 8 cách chọn

Vậy có tất cả $7.7.8 = 392$ cách chọn.

- Câu 30:** Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số được lập từ sáu chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 ?
A. 120. **B.** 216. **C.** 256. **D.** 20.

Lời giải

Gọi số tự nhiên có ba chữ số là $\overline{abc}$.

Có 6 cách chọn a .

Có 6 cách chọn b .

Có 6 cách chọn c .

Theo quy tắc nhân có $6.6.6 = 216$.

- Câu 31:** Cho các số 1,5,6,7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số với các chữ số khác nhau:
A. 12. **B.** 24. **C.** 64. **D.** 256.

Lời giải

Gọi số tự nhiên có 4 chữ số cần tìm là: $\overline{abcd}$, $a \neq 0$, khi đó:

a có 4 cách chọn

b có 3 cách chọn

c có 2 cách chọn

d có 1 cách chọn

Vậy có: $4.3.2.1 = 24$ số.

- Câu 32:** Trong một tuần bạn A dự định mỗi ngày đi thăm một người bạn trong 12 người bạn của mình. Hỏi bạn A có thể lập được bao nhiêu kế hoạch đi thăm bạn của mình?
A. 3991680. **B.** 12!. **C.** 35831808. **D.** 7!.

Lời giải.

Một tuần có bảy ngày và mỗi ngày thăm một bạn.

- Có 12 cách chọn bạn vào ngày thứ nhất.
- Có 11 cách chọn bạn vào ngày thứ hai.
- Có 10 cách chọn bạn vào ngày thứ ba.
- Có 9 cách chọn bạn vào ngày thứ tư.

- Có 8 cách chọn bạn vào ngày thứ năm.
- Có 7 cách chọn bạn vào ngày thứ sáu.
- Có 6 cách chọn bạn vào ngày thứ bảy.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3991680$ cách.

Câu 33: Nhận mỗi chiếc ghế trong hội trường gồm hai phần: phần đầu là một chữ cái, phần thứ hai là một số nguyên dương nhỏ hơn 26. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu chiếc ghế được ghi nhãn khác nhau?

- A.** 624. **B.** 48. **C.** 600. **D.** 625.

Lời giải.

Một chiếc nhãn gồm phần đầu và phần thứ hai $\in \{1; 2; \dots; 25\}$.

- Có 24 cách chọn phần đầu.
- Có 25 cách chọn phần thứ hai.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $24 \times 25 = 600$ cách.

Câu 34: Biển số xe máy của tỉnh A có 6 kí tự, trong đó kí tự ở vị trí đầu tiên là một chữ cái, kí tự ở vị trí thứ hai là một chữ số thuộc tập $\{1; 2; \dots; 9\}$, mỗi kí tự ở bốn vị trí tiếp theo là một chữ số thuộc tập $\{0; 1; 2; \dots; 9\}$. Hỏi nếu chỉ dùng một mã số tỉnh thì tỉnh A có thể làm được nhiều nhất bao nhiêu biển số xe máy khác nhau?

- A.** 2340000. **B.** 234000. **C.** 75. **D.** 2600000.

Lời giải.

Giả sử biển số xe là $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$.

- Có 26 cách chọn a_1
- Có 9 cách chọn 1, 2, 3, 4, 5, 6
- Có 10 cách chọn a_3
- Có 10 cách chọn a_4
- Có 10 cách chọn a_5
- Có 10 cách chọn a_6

Vậy theo qui tắc nhân ta có $26 \times 9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 2340000$ biển số xe.

Câu 35: Số 253125000 có bao nhiêu ước số tự nhiên?

- A.** 160. **B.** 240. **C.** 180. **D.** 120.

Lời giải.

Ta có $253125000 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^8$ nên mỗi ước số tự nhiên của số đã cho đều có dạng $2^m \times 3^n \times 5^p$ trong đó $m, n, p \in \mathbb{N}$ sao cho $0 \leq m \leq 3$; $0 \leq n \leq 4$; $0 \leq p \leq 8$.

- Có 4 cách chọn m .

$\overline{abcd}$ Có 5 cách chọn n .

- Có 9 cách chọn p .

Vậy theo qui tắc nhân ta có $4 \times 5 \times 9 = 180$ ước số tự nhiên.

Câu 36: Từ các chữ số 1, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu chữ số tự nhiên có 4 chữ số?

A. 324.

B. 256.

C. 248.

D. 124.

Lời giải.

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$ với $(a, b, c, d) \in A = \{1, 5, 6, 7\}$.

Vì số cần tìm có 4 chữ số không nhất thiết khác nhau nên:

☐ a được chọn từ tập A nên có 4 cách chọn.

☐ b được chọn từ tập A nên có 4 cách chọn.

☐ c được chọn từ tập A nên có 4 cách chọn.

☐ d được chọn từ tập A nên có 4 cách chọn.

Như vậy, ta có $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ số cần tìm.

Câu 37: Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà hai chữ số đều chẵn?

A. 99.

B. 50.

C. 20.

D. 10.

Lời giải.

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{ab}$ với $(a, b) \in A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ và $a \neq 0$.

Trong đó:

- a được chọn từ tập $A \setminus \{0\}$ nên có 4 cách chọn.

- b được chọn từ tập A nên có 5 cách chọn.

Như vậy, ta có $4 \times 5 = 20$ số cần tìm.

Câu 38: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu chữ số tự nhiên bé hơn 100?

A. 36.

B. 62.

C. 54.

D. 42.

Lời giải.

Các số bé hơn 100 chính là các số có một chữ số và hai chữ số được hình thành từ tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Từ tập A có thể lập được 6 số có một chữ số.

Gọi số có hai chữ số có dạng $\overline{ab}$ với $(a, b) \in A$.

Trong đó:

- a được chọn từ tập A nên có 6 cách chọn.

- b được chọn từ tập A nên có 6 cách chọn.

Như vậy, ta có $6 \times 6 = 36$ số có hai chữ số.

Vậy, từ A có thể lập được $36 + 6 = 42$ số tự nhiên bé hơn 100.

Câu 39: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số lẻ gồm 4 chữ số khác nhau?

A. 154.

B. 145.

C. 144.

D. 155.

Lời giải.

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$ với $(a, b, c, d) \in A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Vì $\overline{abcd}$ là số lẻ $\Rightarrow d = \{1, 3, 5\} \Rightarrow d$: có 3 cách chọn.

Khi đó a : có 4 cách chọn, b : có 4 cách chọn và c : có 3 cách chọn.

Vậy có tất cả $3 \times 4 \times 4 \times 3 = 144$ số cần tìm.

- Câu 40:** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 4 chữ số khác nhau?
A. 156. **B.** 144. **C.** 96. **D.** 134.

Lời giải.

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$ với $(a, b, c, d) \in A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Vì $\overline{abcd}$ là số chẵn $\Rightarrow d = \{0, 2, 4\}$.

TH1. Nếu $d = 0$, số cần tìm là $\overline{abc0}$. Khi đó:

- a được chọn từ tập $A \setminus \{0\}$ nên có 5 cách chọn.
- b được chọn từ tập $A \setminus \{0, a\}$ nên có 4 cách chọn.
- c được chọn từ tập $A \setminus \{0, a, b\}$ nên có 3 cách chọn.

Như vậy, ta có $5 \times 4 \times 3 = 60$ số có dạng $\overline{abc0}$.

TH2. Nếu $d = \{2, 4\} \Rightarrow d$: có 2 cách chọn.

Khi đó a : có 4 cách chọn, b : có 4 cách chọn và c : có 3 cách chọn.

Như vậy, ta có $2 \times 4 \times 4 \times 3 = 96$ số cần tìm như trên.

Vậy có tất cả $60 + 96 = 156$ số cần tìm.

- Câu 41:** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có ba chữ số?
A. 210. **B.** 105. **C.** 168. **D.** 145.

Lời giải

- Gọi số có ba chữ số cần tìm là $n = \overline{abc}$, với $a \neq 0$ và c là số chẵn chọn từ các số đã cho.
- $a \neq 0$ nên có 6 cách chọn, c chẵn nên có 4 cách chọn và b tùy ý nên có 7 cách chọn.
- Vậy số các số cần tìm là $6.4.7 = 168$.

- Câu 42:** Có bao nhiêu số chẵn gồm 6 chữ số khác nhau, trong đó chữ số đầu tiên là chữ số lẻ? Câu trả lời nào đúng?
A. 40000 số. **B.** 38000 số. **C.** 44000 số. **D.** 42000 số.

Lời giải

Gọi số có 6 chữ số đó là $\overline{abcdef}$. Vì a lẻ nên $a \in \{1; 3; 5; 7; 9\}$, vậy a có 5 lựa chọn. Vì f chẵn nên $f \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$, vậy f có 5 lựa chọn. Tiếp theo b có 8 lựa chọn, c có 7 lựa chọn, d có 6 lựa chọn, e có 5 lựa chọn. Vậy có tất cả $5.5.8.7.6.5 = 42000$ số thỏa mãn.

Câu 43: Cho các chữ số 1, 2, 3, ..., 9. Từ các số đó có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 4 chữ số khác nhau và không vượt quá 2011.

A. 168

B. 170

C. 164

D. 172

Lời giải

Gọi số cần lập $x = \overline{abcd}$, $a, b, c, d \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Vì x chẵn nên $d \in \{2, 4, 6, 8\}$. Đồng thời $x \leq 2011 \Rightarrow a = 1$

• $a = 1 \Rightarrow a$ có 1 cách chọn, khi đó d có 4 cách chọn; b, c có 7.6 cách

Suy ra có: $1.4.6.7 = 168$ số

Câu 44: Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau và là số lẻ

A. 360

B. 343

C. 480

D. 347

Lời giải

Gọi số cần lập $x = \overline{abcd}$; $a, b, c, d \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ và a, b, c, d đôi một khác nhau.

Vì số x cần lập là số lẻ nên d phải là số lẻ. Ta lập x qua các công đoạn sau.

Bước 1: Có 4 cách chọn d

Bước 2: Có 6 cách chọn a

Bước 3: Có 5 cách chọn b

Bước 4: Có 4 cách chọn c

Vậy có 480 số thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 45: Có bao nhiêu cách xếp 4 người A, B, C, D lên 3 toa tàu, biết mỗi toa có thể chứa 4 người.

A. 81

B. 68

C. 42

D. 98

Lời giải

Để xếp A ta có 3 cách lên một trong ba toa

Với mỗi cách xếp A ta có 3 cách xếp B lên toa tàu

Với mỗi cách xếp A, B ta có 3 cách xếp C lên toa tàu

Với mỗi cách xếp A, B, C ta có 3 cách xếp D lên toa tàu

Vậy có $3.3.3.3 = 81$ cách xếp 4 người lên toa tàu.

Câu 46: Có 3 nam và 3 nữ cần xếp ngồi vào một hàng ghế. Hỏi có mấy cách xếp sao cho nam, nữ ngồi xen kẽ?

A. 72

B. 74

C. 76

D. 78

Lời giải

Có 6 cách chọn một người tùy ý ngồi vào chỗ thứ nhất. Tiếp đến, có 3 cách chọn một người khác phái ngồi vào chỗ thứ 2. Lại có 2 cách chọn một người khác phái ngồi vào chỗ thứ 3, có 2 cách chọn vào chỗ thứ 4, có 1 cách chọn vào chỗ thứ 5, có 1 cách chọn vào chỗ thứ 6.

Vậy có: $6.3.2.2.1.1 = 72$ cách.

Câu 47: Có bao nhiêu cách sắp xếp 3 nữ sinh, 3 nam sinh thành một hàng dọc sao cho các bạn nam và nữ ngồi xen kẽ:

A. 6.

B. 72.

C. 720.

D. 144.

Lời giải

Chọn vị trí 3 nam và 3 nữ: 2.1 cách chọn.

Xếp 3 nam có: 3.2.1 cách xếp.

Xếp 3 nữ có: 3.2.1 cách xếp.

Vậy có $2.1.(3.2.1)^2 = 72$ cách xếp.

Câu 48: Số điện thoại ở Huyện Củ Chi có 7 chữ số và bắt đầu bởi 3 chữ số đầu tiên là 790. Hỏi ở Huyện Củ Chi có tối đa bao nhiêu máy điện thoại:

A. 1000.

B. 100000.

C. 10000.

D. 1000000.

Lời giải

Gọi số điện thoại cần tìm có dạng $\overline{790abcd}$.

Khi đó: a có 10 cách chọn, b có 10 cách chọn, c có 10 cách chọn, d có 10 cách chọn.

Nên có tất cả $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$ số.

Câu 49: Trong một giải thi đấu bóng đá có 20 đội tham gia với thể thức thi đấu vòng tròn. Cứ hai đội thì gặp nhau đúng một lần. Hỏi có tất cả bao nhiêu trận đấu xảy ra.

A. 190

B. 182

C. 280

D. 194

Lời giải

Cứ mỗi đội phải thi đấu với 19 đội còn lại nên có $19 \cdot 20$ trận đấu. Tuy nhiên theo cách tính này thì một trận đấu chẳng hạn A gặp B được tính hai lần. Do đó số trận đấu thực tế diễn ra là:

$$\frac{19 \cdot 20}{2} = 190 \text{ trận.}$$

Câu 50: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu chữ số tự nhiên bé hơn 100?

A. 36.

B. 62.

C. 54.

D. 42.

Lời giải

Các số bé hơn 100 chính là các số có một chữ số và hai chữ số được hình thành từ tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Từ tập A có thể lập được 6 số có một chữ số.

Gọi số có hai chữ số có dạng $\overline{ab}$ với $(a, b) \in A$.

Trong đó:

- a được chọn từ tập A nên có 6 cách chọn.
- b được chọn từ tập A nên có 6 cách chọn.

Như vậy, ta có $6 \times 6 = 36$ số có hai chữ số.

Vậy, từ A có thể lập được $36 + 6 = 42$ số tự nhiên bé hơn 100.

Câu 51: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số lẻ gồm 4 chữ số khác nhau?

A. 154.

B. 145.

C. 144.

D. 155.

Lời giải

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$ với $(a, b, c, d) \in A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Vì $\overline{abcd}$ là số lẻ $\Rightarrow d \in \{1, 3, 5\} \Rightarrow d$: có 3 cách chọn.

Khi đó a : có 4 cách chọn, b : có 4 cách chọn và c : có 3 cách chọn.

Vậy có tất cả $3 \times 4 \times 4 \times 3 = 144$ số cần tìm.

Câu 52: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 4 chữ số khác nhau?

A. 156.

B. 144.

C. 96.

D. 134.

Lời giải

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$ với $(a, b, c, d) \in A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Vì $\overline{abcd}$ là số chẵn $\Rightarrow d \in \{0, 2, 4\}$.

TH1. Nếu $d = 0$, số cần tìm là $\overline{abc0}$. Khi đó:

- a được chọn từ tập $A \setminus \{0\}$ nên có 5 cách chọn.
- b được chọn từ tập $A \setminus \{0, a\}$ nên có 4 cách chọn.
- c được chọn từ tập $A \setminus \{0, a, b\}$ nên có 3 cách chọn.

Như vậy, ta có $5 \times 4 \times 3 = 60$ số có dạng $\overline{abc0}$.

TH2. Nếu $d = \{2, 4\} \Rightarrow d$: có 2 cách chọn.

Khi đó a : có 4 cách chọn, b : có 4 cách chọn và c : có 3 cách chọn.

Như vậy, ta có $2 \times 4 \times 4 \times 3 = 96$ số cần tìm như trên.

Vậy có tất cả $60 + 96 = 156$ số cần tìm.

Câu 53: Cho tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số và chia hết cho 2?

A. 8232.

B. 1230.

C. 1260.

D. 2880.

Lời giải

Gọi số có 5 chữ số cần tìm là $x = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$; $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in A$; $a_1 \neq 0$; $a_5 \in \{0; 2; 4; 6\}$.

Công việc thành lập số x được chia thành các bước:

- Chọn chữ số a_1 có 6 lựa chọn vì khác 0.
- Chọn các chữ số a_2, a_3, a_4 , mỗi chữ số có 7 lựa chọn.
- Chọn chữ số a_5 có 4 lựa chọn vì số tạo thành chia hết cho 2.

Số số thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $6 \cdot 7^3 \cdot 4 = 8232$.

Câu 54: Có 6 học sinh và 3 thầy giáo A, B, C . Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ 9 người đó ngồi trên một hàng ngang có 9 chỗ sao cho mỗi thầy giáo ngồi giữa hai học sinh.

A. 4320.

B. 90.

C. 43200.

D. 720.

Lời giải

Sắp 6 học sinh thành một hàng ngang, giữa 6 học sinh có 5 khoảng trống, ta chọn 3 khoảng trống và đưa 3 giáo viên vào được cách sắp thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy tất cả có: $6! \cdot A_3^3 = 43200$ cách.

Câu 55: Có 15 học sinh giỏi gồm 6 học sinh khối 12, 4 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 6 học sinh sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh?

A. 4249.

B. 4250.

C. 5005.

D. 805.

Lời giải

Số cách chọn 6 học sinh bất kỳ trong 15 học sinh là $C_{15}^6 = 5005$.

Số cách chọn 6 học sinh chỉ có khối 12 là $C_6^6 = 1$ cách.

Số cách chọn 6 học sinh chỉ có khối 10 và 11 là $C_9^6 = 84$ cách.

Số cách chọn 6 học sinh chỉ có khối 10 và 12 là $C_{11}^6 - C_6^6 = 461$ cách.

Số cách chọn 6 học sinh chỉ có khối 11 và 12 là $C_{10}^6 - C_6^6 = 209$ cách.

Do đó số cách chọn 6 học sinh sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh là $5005 - 1 - 84 - 461 - 209 = 4250$ cách.

Câu 56: Một liên đoàn bóng đá có 10 đội, mỗi đội phải đá 4 trận với mỗi đội khác, 2 trận ở sân nhà và 2 trận ở sân khách. Số trận đấu được sắp xếp là:

- A. 180 B. 160. C. 90. D. 45.

Lời giải

Mỗi đội sẽ gặp 9 đội khác trong hai lượt trận sân nhà và sân khách. Có $10 \cdot 9 = 90$ trận.

Mỗi đội đá 2 trận sân nhà, 2 trận sân khách. Nên số trận đấu là $2 \cdot 90 = 180$ trận.

Câu 57: Từ tập có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số đôi một khác nhau sao chữ số đầu chẵn chữ số đứng cuối lẻ.

- A. 11523 B. 11520 C. 11346 D. 22311

Lời giải

Vì chữ số đứng đầu chẵn nên a_1 có 4 cách chọn, chữ số đứng cuối lẻ nên a_8 có 4 cách chọn.

Các số còn lại có 6.5.4.3.2.1 cách chọn

Vậy có $4^2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 11520$ số thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 58: Có bao nhiêu số tự nhiên nhỏ hơn 100 chia hết cho 2 và 3.

- A. 12. B. 16. C. 17. D. 20.

Lời giải

Số các số tự nhiên lớn nhất, nhỏ hơn 100 chia hết cho 2 và 3 là 96.

Số các số tự nhiên nhỏ nhất, nhỏ hơn 100 chia hết cho 2 và 3 là 0.

Số các số tự nhiên nhỏ hơn 100 chia hết cho 2 và 3 là $\frac{96-0}{6} + 1 = 17$ nên chọn C.

Câu 59: Cho tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số đôi một khác nhau sao các số này lẻ không chia hết cho 5.

- A. 15120 B. 23523 C. 16862 D. 23145

Lời giải

Vì x lẻ và không chia hết cho 5 nên $d \in \{1, 3, 7\} \Rightarrow d$ có 3 cách chọn

Số các chọn các chữ số còn lại là: 7.6.5.4.3.2.1

Vậy 15120 số thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 60: Cho tập $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số và chia hết cho 5.

- A. 660 B. 432 C. 679 D. 523

Lời giải

Gọi $x = \overline{abcde}$ là số cần lập, $e \in \{0, 5\}, a \neq 0$

• $e = 0 \Rightarrow e$ có 1 cách chọn, cách chọn a, b, c, d : 6.5.4.3

Trường hợp này có 360 số

$e = 5 \Rightarrow e$ có một cách chọn, số cách chọn a, b, c, d : 5.5.4.3 = 300

Trường hợp này có 300 số

Vậy có 660 số thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 61: Số các số tự nhiên gồm 5 chữ số chia hết cho 10 là:

- A. 3260. B. 3168. C. 9000. D. 12070.

Lời giải

Gọi số cần tìm có dạng: $\overline{abcde}$ ($a \neq 0$).

Chọn e : có 1 cách ($e = 0$)

Chọn a : có 9 cách ($a \neq 0$)

Chọn $\overline{bcd}$: có 10^3 cách

Theo quy tắc nhân, có $1.9.10^3 = 9000$.

Câu 62: Cho tập hợp số: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Hỏi có thể thành lập bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau và chia hết cho 3.

A. 114

B. 144

C. 146

D. 148

Lời giải

Ta có một số chia hết cho 3 khi và chỉ khi tổng các chữ số chia hết cho 3. Trong tập A có các tập con các chữ số chia hết cho 3 là $\{0, 1, 2, 3\}$, $\{0, 1, 2, 6\}$, $\{0, 2, 3, 4\}$, $\{0, 3, 4, 5\}$, $\{1, 2, 4, 5\}$, $\{1, 2, 3, 6\}$, $\{1, 3, 5, 6\}$.

Vậy số các số cần lập là: $4(4! - 3!) + 3.4! = 144$ số.

Câu 63: Cho các chữ số 1, 2, 3, ..., 9. Từ các số đó có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 4 chữ số khác nhau và không vượt quá 2011.

A. 168

B. 170

C. 164

D. 172

Lời giải

Gọi số cần lập $x = \overline{abcd}$, $a, b, c, d \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Vì x chẵn nên $d \in \{2, 4, 6, 8\}$. Đồng thời $x \leq 2011 \Rightarrow a = 1$

• $a = 1 \Rightarrow a$ có 1 cách chọn, khi đó d có 4 cách chọn; b, c có 7.6 cách

Suy ra có: $1.4.6.7 = 168$ số

Câu 64: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu chữ số tự nhiên bé hơn 100?

A. 36.

B. 62.

C. 54.

D. 42.

Lời giải

Các số bé hơn 100 chính là các số có một chữ số và hai chữ số được hình thành từ tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Từ tập A có thể lập được 6 số có một chữ số.

Gọi số có hai chữ số có dạng $\overline{ab}$ với $(a, b) \in A$.

Trong đó:

- a được chọn từ tập A nên có 6 cách chọn.
- b được chọn từ tập A nên có 6 cách chọn.

Như vậy, ta có $6 \times 6 = 36$ số có hai chữ số.

Vậy, từ A có thể lập được $36 + 6 = 42$ số tự nhiên bé hơn 100.

Câu 65: Một hộp chứa 16 quả cầu gồm sáu quả cầu xanh đánh số từ 1 đến 6, năm quả cầu đỏ đánh số từ 1 đến 5 và năm quả cầu vàng đánh số từ 1 đến 5. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra từ hộp đó 3 quả cầu vừa khác màu vừa khác số.

A. 72.

B. 150.

C. 60.

D. 80.

Lời giải

Kí hiệu các quả cầu như hình vẽ.

Xanh						Đỏ					Vàng				
X1	X2	X3	X4	X5	X6	Đ1	Đ2	Đ3	Đ4	Đ5	V1	V2	V3	V4	V5

TH1: Có quả xanh X6.

Bước 1: Lấy quả X6 có 1 cách.

Bước 2: Lấy 1 quả đỏ có 5 cách.

Bước 3: Lấy 1 quả vàng có 4 cách.

Vậy có $1.5.4 = 20$.

TH2: Không có quả xanh X6.

Bước 1: Lấy quả xanh có 5 cách.

Bước 2: Lấy 1 quả đỏ có 4 cách.

Bước 3: Lấy 1 quả vàng có 3 cách.

Vậy có $5.4.3 = 60$.

Vậy có 80.

Câu 66: Có bao nhiêu cách sắp xếp 3 nữ sinh, 3 nam sinh thành một hàng dọc sao cho các bạn nam và nữ ngồi xen kẽ:

A. 6.

B. 72.

C. 720.

D. 144.

Lời giải

Chọn B

Chọn vị trí 3 nam và 3 nữ: 2.1 cách chọn.

Xếp 3 nam có: 3.2.1 cách xếp.

Xếp 3 nữ có: 3.2.1 cách xếp.

Vậy có $2.1.(3.2.1)^2 = 72$ cách xếp.

Câu 67: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 5, 8 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ có bốn chữ số đôi một khác nhau và phải có mặt chữ số 3.

A. 36 số.

B. 108 số.

C. 228 số.

D. 144 số.

Lời giải

Gọi số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau là $\overline{abcd}$. Do số cần lập là số lẻ và phải có mặt chữ số 3 nên ta có các trường hợp.

TH1: $a = 3$ khi đó số có dạng $\overline{3bcd}$.

Có 2 cách chọn d .

Có 4 cách chọn a .

Có 3 cách chọn c .

Theo quy tắc nhân có $1.4.3.2 = 24$.

TH2: $b = 3$ khi đó số có dạng $\overline{a3cd}$.

Có 2 cách chọn d .

Có 3 cách chọn a .

Có 3 cách chọn c .

Theo quy tắc nhân có $3.1.3.2 = 18$.

TH3: $c = 3$ khi đó số có dạng $\overline{ab3d}$.

Có 2 cách chọn d .

Có 3 cách chọn a .

Có 3 cách chọn b .

Theo quy tắc nhân có $3.1.3.2 = 18$.

TH4: $d = 3$ khi đó số có dạng $\overline{abc3}$.

Có 4 cách chọn a .

Có 4 cách chọn b .

Có 3 cách chọn c .

Theo quy tắc nhân có $4.4.3.1 = 48$.

Theo quy tắc cộng có $24 + 18 + 18 + 48 = 108$.

Câu 68: Từ các chữ số 0, 2, 3, 5, 6, 8 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau trong đó hai chữ số 0 và 5 không đứng cạnh nhau.

A. 384

B. 120

C. 216

D. 600

Lời giải

Số các số có 6 chữ số được lập từ các chữ số 0, 2, 3, 5, 6, 8 là $6! - 5!$.

Số các số có chữ số 0 và 5 đứng cạnh nhau: $2.5! - 4!$.

Số các số có chữ số 0 và 5 không đứng cạnh nhau là: $6! - 5! - (2.5! - 4!) = 384$.

Câu 69: Một phiếu điều tra về đề tự học của học sinh gồm 10 câu hỏi trắc nghiệm, mỗi câu có bốn lựa chọn để trả lời. Khi tiến hành điều tra, phiếu thu lại được coi là hợp lệ nếu người được hỏi trả lời đủ 10 câu hỏi, mỗi câu chỉ chọn một phương án. Hỏi cần tối thiểu bao nhiêu phiếu hợp lệ để trong số đó luôn có ít nhất hai phiếu trả lời giống hệt nhau cả 10 câu hỏi?

A. 2097152.

B. 10001.

C. 1048577.

D. 1048576.

Lời giải

Mỗi câu hỏi có 4 lựa chọn.

$\Rightarrow$ 10 câu hỏi có $4^{10} = 1048576$ phương án trả lời khác nhau.

Vậy nếu có nhiều hơn 1048576 phiếu hợp lệ thì luôn có ít nhất hai phiếu trả lời giống nhau nên số phiếu hợp lệ tối thiểu cần phát là 1048577 phiếu.

Câu 70: Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số 5, 6, 7, 8, 9. Tính tổng tất cả các số thuộc tập S .

A. 9333420.

B. 46666200.

C. 9333240.

D. 46666240.

Lời giải

Số các số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau được lập từ 5, 6, 7, 8, 9 là $5! = 120$ số.

Vì vai trò các chữ số như nhau nên mỗi chữ số 5, 6, 7, 8, 9 xuất hiện ở hàng đơn vị là $4! = 24$ lần.

Tổng các chữ số ở hàng đơn vị là $24(5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 840$.

Tương tự thì mỗi lần xuất hiện ở các hàng chục, trăm, nghìn, chục nghìn của mỗi chữ số là 24 lần.

Vậy tổng các số thuộc tập S là $840(1 + 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4) = 9333240$.

Câu 71: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ có 6 chữ số khác nhau và trong mỗi số đó tổng của ba chữ số đầu lớn hơn tổng của ba chữ số cuối một đơn vị

A. 32.

B. 72.

C. 36.

D. 24.

Lời giải

Gọi $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ là số cần tìm

Ta có $a_6 \in \{1; 3; 5\}$ và $(a_1 + a_2 + a_3) - (a_4 + a_5 + a_6) = 1$

○ Với $a_6 = 1$ thì $(a_1 + a_2 + a_3) - (a_4 + a_5) = 2 \Rightarrow \begin{cases} a_1, a_2, a_3 \in \{2, 3, 6\} \\ a_4, a_5 \in \{4, 5\} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1, a_2, a_3 \in \{2, 4, 5\} \\ a_4, a_5 \in \{3, 6\} \end{cases}$

○ Với $a_6 = 3$ thì $(a_1 + a_2 + a_3) - (a_4 + a_5) = 4 \Rightarrow \begin{cases} a_1, a_2, a_3 \in \{2; 4; 5\} \\ a_4, a_5 \in \{1, 6\} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1, a_2, a_3 \in \{1, 4, 6\} \\ a_4, a_5 \in \{2, 5\} \end{cases}$

$$\bigcirc \text{ Với } a_6 = 5 \text{ thì } (a_1 + a_2 + a_3) - (a_4 + a_5) = 6 \Rightarrow \begin{cases} a_1, a_2, a_3 \in \{2, 3, 6\} \\ a_4, a_5 \in \{1, 4\} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a_1, a_2, a_3 \in \{1, 4, 6\} \\ a_4, a_5 \in \{2, 3\} \end{cases}$$

Mỗi trường hợp có $3!.2! = 12$ số thỏa mãn yêu cầu

Vậy có tất cả $6.12 = 72$ số cần tìm.

Câu 72: Tô màu các cạnh của hình vuông $ABCD$ bởi 6 màu khác nhau sao cho mỗi cạnh được tô bởi một màu và hai cạnh kề nhau thì tô bởi hai màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách tô?

- A.** 360. **B.** 480. **C.** 600. **D.** 630.

Lời giải

Trường hợp 1: Tô cạnh AB và CD khác màu:

- ☐ Số cách tô cạnh AB : 6 cách.
- ☐ Số cách tô cạnh BC : 5 cách.
- ☐ Số cách tô cạnh CD : 4 cách.
- ☐ Số cách tô cạnh AD : 4 cách.

Theo quy tắc nhân ta có: $6.5.4.4 = 480$ cách tô cạnh AB và CD khác màu.

Trường hợp 2: Tô cạnh AB và CD cùng màu:

- ☐ Số cách tô cạnh AB : 6 cách.
- ☐ Số cách tô cạnh BC : 5 cách.
- ☐ Số cách tô cạnh CD : 1 cách.
- ☐ Số cách tô cạnh AD : 5 cách.

Theo quy tắc nhân ta có: $6.5.1.5 = 150$ cách tô cạnh AB và CD cùng màu.

Vậy số cách tô màu thỏa đề bài là: $480 + 150 = 630$ cách.

Câu 73: Cho 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 6. Lập các số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau từ 5 chữ số đã cho. Tính tổng của các số lập được.

- A.** 12321 **B.** 21312 **C.** 12312 **D.** 21321

Lời giải

Mỗi số số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau từ 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 6 là một chỉnh hợp chập 3 của các chữ số này. Do đó, ta lập được $A_5^3 = 60$ số.

Do vai trò các số 1, 2, 3, 4, 6 như nhau, nên số lần xuất hiện của mỗi chữ số trong các chữ số này ở mỗi hàng là như nhau và bằng $60 : 5 = 12$ lần.

Vậy, tổng các số lập được là:

$$S = 12.(1 + 2 + 3 + 4 + 6)(100 + 10 + 1) = 21312.$$

Câu 74: Có bao nhiêu số có 10 chữ số được tạo thành từ các chữ số 1, 2, 3 sao cho bất kì 2 chữ số nào đứng cạnh nhau cũng hơn kém nhau 1 đơn vị?

- A.** 32 **B.** 16 **C.** 80 **D.** 64

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm có dạng $\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_{10}}$

Bước 1: Xếp số 2 ở vị trí lẻ $a_1, a_3, \dots, a_9$ hoặc vị trí chẵn $a_2, a_4, \dots, a_{10}$ có 2 cách.

Bước 2: Xếp các số 1 hoặc 3 vào các vị trí còn lại có 2^5 cách.

Theo quy tắc nhân ta có $2.2^5 = 64$ cách.

Câu 75: Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 9 mà mỗi số 2011 chữ số và trong đó có ít nhất hai chữ số 9.

A. $\frac{9^{2011} - 2019 \cdot 9^{2010} + 8}{9}$ **B.** $\frac{9^{2011} - 2 \cdot 9^{2010} + 8}{9}$ **C.** $\frac{9^{2011} - 9^{2010} + 8}{9}$ **D.** $\frac{9^{2011} - 19 \cdot 9^{2010} + 8}{9}$

Lời giải

Đặt X là các số tự nhiên thỏa yêu cầu bài toán.

$A = \{ \text{các số tự nhiên không vượt quá } 2011 \text{ chữ số và chia hết cho } 9 \}$

Với mỗi số thuộc A có m chữ số ($m \leq 2008$) thì ta có thể bổ sung thêm $2011 - m$ số 0 vào phía trước thì số có được không đổi khi chia cho 9. Do đó ta xét các số thuộc A có dạng

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_{2011}}; a_i \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$$

$$A_0 = \{a \in A \mid \text{mà trong } a \text{ không có chữ số } 9\}$$

$$A_1 = \{a \in A \mid \text{mà trong } a \text{ có đúng 1 chữ số } 9\}$$

• Ta thấy tập A có $1 + \frac{9^{2011} - 1}{9}$ phần tử

• Tính số phần tử của A_0

Với $x \in A_0 \Rightarrow x = \overline{a_1 \dots a_{2011}}; a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 8\} \quad i = \overline{1, 2010}$ và $a_{2011} = 9 - r$ với $r \in [1; 9], r \equiv \sum_{i=1}^{2010} a_i$.

Từ đó ta suy ra A_0 có 9^{2010} phần tử

• Tính số phần tử của A_1

Để lập số của thuộc tập A_1 ta thực hiện liên tiếp hai bước sau

Bước 1: Lập một dãy gồm 2010 chữ số thuộc tập $\{0, 1, 2, \dots, 8\}$ và tổng các chữ số chia hết cho 9. Số các dãy là 9^{2009}

Bước 2: Với mỗi dãy vừa lập trên, ta bổ sung số 9 vào một vị trí bất kì ở dãy trên, ta có 2010 các bổ sung số 9

Do đó A_1 có $2010 \cdot 9^{2009}$ phần tử.

Vậy số các số cần lập là:

$$1 + \frac{9^{2011} - 1}{9} - 9^{2010} - 2010 \cdot 9^{2009} = \frac{9^{2011} - 2019 \cdot 9^{2010} + 8}{9}.$$

Câu 76: Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số có 6 chữ số đồng thời thỏa điều kiện: sáu số của mỗi số là khác nhau và trong mỗi số đó tổng của 3 chữ số đầu nhỏ hơn tổng của 3 số sau một đơn vị.

A. 104

B. 106

C. 108

D. 112

Lời giải

Cách 1: Gọi $x = \overline{a_1 a_2 \dots a_6}$, $a_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ là số cần lập

$$\text{Theo bài ra ta có: } a_1 + a_2 + a_3 + 1 = a_4 + a_5 + a_6$$

Mà $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ và đôi một khác nhau nên

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

$$\text{Từ, suy ra: } a_1 + a_2 + a_3 = 10$$

Phương trình này có các bộ nghiệm là: $(a_1, a_2, a_3) = (1, 3, 6); (1, 4, 5); (2, 3, 5)$

Với mỗi bộ ta có $3! \cdot 3! = 36$ số.

Vậy có $3 \cdot 36 = 108$ số cần lập.

Cách 2: Gọi $x = \overline{abcdef}$ là số cần lập

Ta có:
$$\begin{cases} a+b+c+d+e+f = 1+2+3+4+5+6 = 21 \\ a+b+c = d+e+f+1 \end{cases}$$

$\Rightarrow a+b+c = 11$. Do $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Suy ra ta có các cặp sau: $(a, b, c) = (1, 4, 6); (2, 3, 6); (2, 4, 5)$

Với mỗi bộ như vậy ta có $3!$ cách chọn a, b, c và $3!$ cách chọn d, e, f

Do đó có: $3.3!.3! = 108$ số thỏa yêu cầu bài toán.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM QUY TẮC ĐẾM 2

Câu 1. Từ A đến B có 3 con đường, từ B đến C có 4 con đường. Hỏi có bao nhiêu cách chọn đường từ A đến C (qua B)?

- A. 7 B. 12 C. 81 D. 64

Câu 2. Từ A đến B có 3 con đường, từ B đến C có 4 con đường. Hỏi có bao nhiêu cách chọn đường từ A đến C (qua B) và trở về C đến A (qua B) và không đi lại các con đường đã đi rồi?

- A. 72 B. 132 C. 18 D. 23

Câu 3. Một hộp có chứa 8 bóng đèn màu đỏ và 5 bóng đèn màu xanh. Số cách chọn được một bóng đèn trong hộp đó là:

- A. 13 B. 5 C. 8 D. 40

Câu 4. Giả sử một công việc có thể được tiến hành theo hai phương án A và B . Phương án A có thể thực hiện bằng n cách, phương án B có thể thực hiện bằng m cách không trùng với cách nào của phương án A . Khi đó:

A. Công việc có thể được thực hiện bằng $m.n$ cách. B. Công việc có thể được thực hiện bằng $\frac{1}{2}.m.n$ cách.

C. Công việc có thể được thực hiện bằng $m+n$ cách. D. Công việc có thể thực hiện bằng $\frac{1}{2}(m+n)$ cách.

Câu 5. Có 8 quyển sách khác nhau và 6 quyển vở khác nhau. Số cách chọn một trong các quyển đó là:

- A. 6 B. 8 C. 14 D. 48

Câu 6. Giả sử một công việc có thể tiến hành theo hai công đoạn A và B . Công đoạn A có thể thực hiện bằng n cách, công đoạn B có thể thực hiện bằng m cách. Khi đó:

A. Công việc có thể được thực hiện bằng $m.n$ cách. B. Công việc có thể được thực hiện bằng $\frac{1}{2}.m.n$ cách.

C. Công việc có thể được thực hiện bằng $m+n$ cách. D. Công việc có thể thực hiện bằng $\frac{1}{2}(m+n)$ cách.

Câu 7. Từ tỉnh A tới tỉnh B có thể đi bằng ô tô, tàu hỏa, tàu thủy hoặc máy bay. Từ tỉnh B tới tỉnh C có thể đi bằng ô tô hoặc tàu hỏa. Muốn đi từ tỉnh A đến tỉnh C bắt buộc phải đi qua B . Số cách đi từ tỉnh A đến tỉnh C là:

- A. 4 B. 2 C. 6 D. 8

Câu 8. Một quán tạp hóa có 6 loại rượu, 4 loại bia và 3 loại nước ngọt. Ông Ba cần chọn mua đúng một loại đồ uống.

- A. 13 B. 72 C. 30 D. 42

Câu 9. Đi vào một khu di tích nọ có bốn cửa Đông, Tây, Nam, Bắc. Một người đi vào tham quan rồi đi ra phải đi hai cửa khác nhau. Số cách đi vào và đi ra của người đó là:

- A. 8 B. 12 C. 14 D. 64

Câu 10. Một lớp học có 18 học sinh nam và 20 học sinh nữ. Nếu muốn chọn một học sinh nam và một học sinh nữ đi dự một cuộc thi nào đó thì số cách chọn là:

- A. 38 B. 18 C. 20 D. 360

Câu 11. Một du khách đến thành phố Huế, anh ta muốn tiêu khiển nhưng chỉ đủ thời gian đi đến một địa điểm. Có hai phòng trà ca hát, ba vũ trường và một rạp chiếu bóng. Vậy anh ta có bao nhiêu cách lựa chọn?

A. 2

B. 3

C. 5

D. 6

Câu 12. Cho tập hợp $A = \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Có thể lập bao nhiêu số gồm 3 chữ số được thành lập từ các chữ số thuộc A ?

A. 360

B. 216

C. 27

D. 120

Câu 13. Cho tập hợp $A = \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Có thể lập bao nhiêu số gồm 3 chữ số khác nhau được thành lập từ các chữ số thuộc A ?

A. 256

B. 216

C. 180

D. 120

Câu 14. Cho tập hợp $A = \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Có thể lập bao nhiêu số lẻ có 4 chữ số khác nhau từ A ?

A. 360

B. 180

C. 27

D. 18

Câu 15. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Có thể lập bao nhiêu số chẵn có 3 chữ số khác nhau từ A ?

A. 8

B. 12

C. 18

D. 24

Câu 16. Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số?

A. 899

B. 900

C. 901

D. 999

Câu 17. Bạn muốn mua một cây bút chì và một cây bút mực. Bút mực có 8 màu, bút chì cũng có 8 màu khác nhau. Vậy bạn có bao nhiêu cách chọn?

A. 64

B. 32

C. 20

D. 16

Câu 18. Cho tập hợp $A = \{2; 3; 5; 8\}$. Có thể lập bao nhiêu số tự nhiên x sao cho $400 < x < 600$?

A. 3^2 B. 4^4 C. $4!$ D. 4^2

Câu 19. Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Có thể lập bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 4 chữ số khác nhau?

A. 752

B. 160

C. 156

D. 240

Câu 20. Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Có thể lập bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau và chia hết cho 5?

A. 42

B. 40

C. 38

D. 36

Câu 21. Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Có thể lập bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau?

A. 600

B. 240

C. 80

D. 60

Câu 22. Cho 6 chữ số 4, 5, 6, 7, 8, 9. Hỏi có bao nhiêu số khác nhau gồm 3 chữ số được lập từ 6 chữ số đó

A. 120

B. 180

C. 256

D. 216

Câu 23. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm hai chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5?

A. 5

B. 15

C. 13

D. 22

Câu 24. Số các chữ số tự nhiên có hai chữ số mà hai chữ số đó đều là hai số chẵn là:

A. 15

B. 16

C. 18

D. 20

Câu 25. Số các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau và chia hết cho 10 là:

A. 3260

B. 3168

C. 5436

D. 3024

Câu 26. Từ các chữ số 1, 5, 6, 7 ta có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số?

A. 256

B. 64

C. 19

D. 12

Câu 27. Từ các chữ số 1, 2, 3 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số khác nhau?

A. 4

B. 8

C. 12

D. 6

Câu 28. Từ các chữ số 1, 2, 3 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có các chữ số khác nhau?

A. 9

B. 15

C. 4

D. 6

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Chọn đáp án B

Đề đi từ A đến C (qua B)

Bước 1: Đi từ A đến B có 3 cách chọn con đường.

Bước 2: Đi từ B đến C có 4 con đường.

Do đó theo quy tắc nhân có tổng cộng $3.4 = 12$ cách chọn đường từ A đến C (qua B).

Câu 2. Chọn đáp án A

Đề đi từ A đến C có 3 cách chọn con đường đi từ A đến B và 4 cách chọn con đường đi từ B đến C

Đề đi từ C về A có 3 cách chọn con đường đi từ C và B và có 2 cách chọn con đường đi từ B và A (Do không đi lại các con đường đã đi rồi)

Do đó theo quy tắc nhân có: $3.4.2.3 = 72$ cách.

Câu 3. Chọn đáp án A

Để chọn được 1 bóng đèn trong hộp.

TH1: Chọn được bóng đèn màu đỏ có 8 cách.

TH2: Chọn được bóng đèn màu xanh có 5 cách.

Do đó theo quy tắc cộng có: $8 + 5 = 13$ cách.

Câu 4. Chọn đáp án C

Theo quy tắc cộng có: $m + n$ cách.

Câu 5. Chọn đáp án C

Để chọn được 1 quyển sách hoặc vở.

TH1: Chọn được quyển sách có 8 cách.

TH2: Chọn được quyển vở có 6 cách.

Do đó theo quy tắc cộng có: $8 + 6 = 13$ cách.

Câu 6. Chọn đáp án A

Áp dụng quy tắc nhân có tổng cộng $m.n$ cách.

Câu 7. Chọn đáp án D

Để đi từ tỉnh A đến tỉnh B có 4 cách chọn phương tiện di chuyển.

Để đi từ tỉnh B đến tỉnh C có 2 cách chọn phương tiện di chuyển.

Do đó theo quy tắc nhân có $4.2 = 8$ cách di chuyển từ A đến C.

Câu 8. Chọn đáp án A

Có 6 cách chọn một loại rượu, 4 cách chọn một loại bia và 3 cách chọn một loại nước ngọt

Theo quy tắc cộng có tổng cộng $6 + 4 + 3 = 13$ cách chọn một loại đồ uống.

Câu 9. Chọn đáp án B

Để đi vào có 4 cách chọn cửa và đi ra có 3 cách chọn cửa (Do 2 cửa khác nhau)

Do đó theo quy tắc nhân có $4.3 = 12$ cách đi vào và đi ra.

Câu 10. Chọn đáp án D

Để chọn một học sinh nam có 18 cách chọn, chọn thêm một học sinh nữ đi dự thi có 20 cách chọn.

Do đó theo quy tắc nhân có $18.20 = 360$ cách chọn một học sinh nam và một học sinh nữ đi dự cuộc thi.

Câu 11. Chọn đáp án D

Có 2 cách chọn phòng trà ca hát, 3 cách chọn vũ trường và 1 cách chọn rạp chiếu phim

Theo quy tắc cộng có $2 + 3 + 1 = 6$ cách chọn.

Câu 12. Chọn đáp án B

Gọi số cần lập có 3 chữ số là $\overline{abc}$ (trong đó $a, b, c \in A$)

Có 6 cách chọn a , 6 cách chọn b và 6 cách chọn c .

Do đó theo quy tắc nhân có tất cả $6^3 = 216$ số.

Câu 13. Chọn đáp án D

Gọi số cần lập có 3 chữ số là $\overline{abc}$ (trong đó $a, b, c \in A$ và a, b, c đôi một khác nhau)

Có 6 cách chọn a , 5 cách chọn b và 4 cách chọn c .

Do đó theo quy tắc nhân có tất cả $6.5.4 = 120$ số.

Câu 14. Chọn đáp án B

Gọi số lẻ cần lập có dạng $abcd$ (trong đó $a, b, c \in A$ và a, b, c đôi một khác nhau)

+) Vì số cần lập là số lẻ nên có 3 cách chọn d gồm $d = \{3; 5; 7\}$.

+) Sau khi chọn d lần lượt có 5 cách chọn a , 4 cách chọn b và 3 cách chọn c .

Theo quy tắc nhân có $3.5.4.3 = 180$ số.

Câu 15. Chọn đáp án D

Gọi số cần lập có 3 chữ số là $\overline{abc}$ (trong đó $a, b, c \in A$ và a, b, c đôi một khác nhau)

Do số cần lập là số chẵn nên có 2 cách chọn c .

Khi đó có 4 cách chọn a và 3 cách chọn b .

Do đó theo quy tắc nhân có tất cả $2.4.3 = 24$ số.

Câu 16. Chọn đáp án B

Số tự nhiên có 3 chữ số là $\overline{abc}$ với a, b, c là các số tự nhiên có 1 chữ số, trong đó $a \neq 0$.

Có 10 cách chọn c , 10 cách chọn b và 9 cách chọn a . Vậy có tất cả: $10.10.9 = 900$ số.

Câu 17. Chọn đáp án A

Số cách chọn đủ 2 bút theo màu: $8.8 = 64$ cách.

Câu 18. Chọn đáp án D

Số tự nhiên x có dạng $\overline{abc}$ với $a, b, c \in A$.

Vì $400 < x < 600$ nên $a = 5$, còn b, c chỉ cần thuộc A .

Số số tự nhiên thỏa mãn là: $1.4.4 = 16$.

Câu 19. Chọn đáp án C

Số tự nhiên thỏa mãn có dạng $\overline{abcd}$ với $a, b, c, d \in A$ và đôi một khác nhau.

TH1: $d = 0 \Rightarrow$ số số $\overline{abc0}$ thỏa mãn là $5.4.3 = 60$ số.

TH2: $d \neq 0 \Rightarrow d$ có 2 cách chọn là 2, 4; số số $\overline{abc}$ thỏa mãn tiếp theo là $A_5^3 - A_4^2 = 48$, trường hợp này có $48.2 = 96$ số. Vậy có tất cả: $96 + 60 = 156$ số.

Câu 20. Chọn đáp án D

Số tự nhiên x có dạng $\overline{abc}$ với $a, b, c \in A$ và đôi một phân biệt.

Vì số tạo ra chia hết cho 5 nên $c \in \{0; 5\}$.

+) Với $c = 0, b$ có 5 cách chọn, a có 4 cách chọn $\Rightarrow 5.4 = 20$ số.

+) Với $c = 5$, số số $\overline{ab}$ thỏa mãn tiếp theo là: $A_5^2 - A_4^1 = 16$.

Vậy có tất cả: $20 + 16 = 36$ số.

Câu 21. Chọn đáp án A

Xếp 5 phần tử của A vào 5 ô trống liền nhau, mỗi ô trống chỉ chứa 1 phần tử, không ô trống nào chứa cùng phần tử, số cách xếp ban đầu này là: $A_6^5 = 720$. Tương tự như vậy, nhưng mặc định ô trống đầu tiên là chứa phần tử 0, số cách xếp tương ứng là: $A_5^4 = 120$, kết quả cần tìm: $720 - 120 = 600$.

Câu 22. Chọn đáp án A

Yêu cầu bài toán tương đương với tạo 3 ô trống, mỗi ô trống chứa một trong 6 chữ số của đề bài, hai ô trống không chứa cùng một số. Như vậy, số số tạo thành cần tìm cũng là số cách sắp xếp vào ô trống theo yêu cầu trên: $A_6^3 = 120$.

Câu 23. Chọn đáp án C

Số tự nhiên thỏa mãn có dạng $\overline{ab}$. Vì cần số chẵn nên $b \in \{0; 2; 4\}$

+) Với $b = 0 \Rightarrow a \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow 5$ số.

+) Với $b \neq 0 \Rightarrow b$ có 2 cách chọn là 2, 4; a có 4 cách chọn $\Rightarrow 2.4 = 8$ số.

Vậy có tất cả: $8 + 5 = 13$ số.

Câu 24. Chọn đáp án D

Số tự nhiên thỏa mãn có dạng $\overline{ab}$ với a, b là số tự nhiên chẵn có 1 chữ số và $a \neq 0$

Để thấy b có 5 cách chọn là 0, 2, 4, 6, 8 và a có 4 cách chọn là 2, 4, 6, 8

Vậy có tất cả $5.4 = 20$ số.

Câu 25. Chọn đáp án D

Số tự nhiên thỏa mãn có dạng $\overline{abcd0}$ với a, b, c, d là các số tự nhiên có 1 chữ số khác 0 và đôi một phân biệt. Theo đó, d có 9 cách chọn, c có 8 cách chọn, b có 7 cách chọn, a có 6 cách chọn.

Vậy có tất cả: $9.8.7.6 = 3024$ số.

Câu 26. Chọn đáp án A

Số tự nhiên thỏa mãn có dạng $\overline{abcd}$ với $a, b, c, d \in \{1; 5; 6; 7\}$.

Khi đó a, b, c, d đều có 4 cách chọn. Vậy số số tạo thành: $4^4 = 256$.

Câu 27. Chọn đáp án D

Số số cần tìm: $A_3^2 = 6$.

Câu 28. Chọn đáp án B

Ta có thể lập được các số có 1 chữ số, 2 chữ số hoặc 3 chữ số có các chữ số đôi một phân biệt từ các chữ số 1, 2, 3. Trường hợp tạo thành số có 1 chữ số: 3 số. Trường hợp tạo thành số có 2 chữ số: $A_3^2 = 6$ số.

Trường hợp tạo thành số có 3 chữ số: $A_3^3 = 6$. Vậy có tất cả: $3 + 6 + 6 = 15$ số.

A.

CHUYÊN ĐỀ: ĐẠI SỐ TỔ HỢP

Bài 2: HOÁN VỊ – CHÍNH HỢP – TỔ HỢP

1. HOÁN VỊ

a) Định nghĩa: Một hoán vị của một tập hợp có n phần tử là một cách sắp xếp có thứ tự n phần tử đó (với n là số tự nhiên, $n \geq 1$).

b) Số các hoán vị của một tập hợp có n phần tử là

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2)\dots 1.$$

c) Ví dụ:

Ví dụ 1: Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số phân biệt thuộc tập $\{1; 2; 3; 4; 5\}$?

Lời giải

Mỗi số tự nhiên có 5 chữ số phân biệt thuộc tập $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ là một hoán vị của 5 phần tử.

Vậy số các số tự nhiên là $P_5 = 5! = 120$ số

Ví dụ 2: Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho 5 hành khách:

a) Vào 5 ghế xếp thành một dãy.

b. Vào 5 ghế xung quanh một bàn tròn, nếu không có sự phân biệt giữa các ghế này.

Lời giải

a. Mỗi một cách xếp là một hoán vị của 5 phần tử. Do đó số cách xếp 5 hành khách vào 5 ghế xếp thành một dãy có $P_5 = 5! = 120$ cách.

b. Vì bàn tròn không phân biệt đầu cuối nên để xếp 5 người ngồi quanh một bàn tròn ta cố định 1 người và xếp 4 người còn lại quanh người đã cố định. Vậy có $P_4 = 4! = 24$ cách xếp

Chú ý:

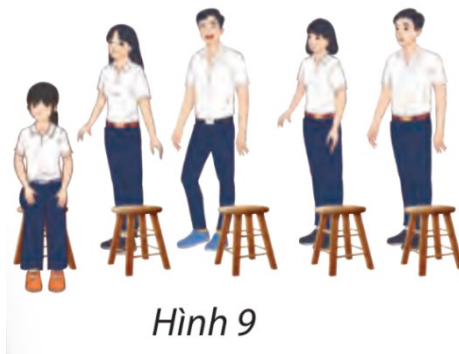
+ Có $n!$ cách xếp n người vào n ghế xếp thành một dãy.

+ Có $(n-1)!$ cách xếp n người vào n ghế xếp quanh một bàn tròn nếu không có sự phân biệt giữa các ghế.

Ví dụ 3: Cần xếp một nhóm 5 học sinh ngồi vào một dãy 5 chiếc ghế

a) Có bao nhiêu cách sắp xếp?

b) Nếu bạn Nga (một thành viên trong nhóm) nhất định muốn ngồi vào chiếc ghế ngoài cùng bên trái, thì có bao nhiêu cách sắp xếp?



Hình 9

Lời giải

a) Mỗi cách sắp xếp 5 bạn học sinh vào 5 chiếc ghế là một hoán vị của 5 bạn học sinh. Do đó, số cách sắp xếp 5 bạn học sinh ngồi vào 5 cái ghế là hoán vị là:

$$P_5 = 5! = 120 \text{ (cách)}$$

b) Khi bạn Nga nhất định ngồi vào chiếc ghế ngoài cùng bên trái, thì số cách sắp xếp là số cách sắp xếp 4 bạn còn lại vào 4 chiếc ghế, mỗi cách như vậy là một hoán vị của 4 bạn học sinh. Do đó, số cách sắp xếp là: $P_4 = 4! = 24$ (cách)

Ví dụ 4: Một họa sĩ cần trưng bày 10 bức tranh nghệ thuật khác nhau thành một hàng ngang. Hỏi có bao nhiêu cách để họa sĩ sắp xếp các bức tranh?

Lời giải

Mỗi cách sắp xếp 10 bức tranh khác nhau thành một hàng ngang là một hoán vị của 10 phần tử.

Vậy số cách sắp xếp các bức tranh là: $10! = 3628800$ (cách).

Ví dụ 5: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 có thể lập được mấy số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau.

Lời giải

Gọi $A = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$ với $a_1 \neq 0$ và a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 phân biệt là số cần lập.

+ Bước 1: chữ số $a_1 \neq 0$ nên có 4 cách chọn a_1 .

+ Bước 2: xếp 4 chữ số còn lại vào 4 vị trí có $4! = 24$ cách.

Vậy có $4 \cdot 24 = 96$ số.

Ví dụ 6: Có hai dãy ghế, mỗi dãy 5 ghế. Xếp 5 nam, 5 nữ vào hai dãy ghế trên, có bao nhiêu cách, nếu :

a. Nam và nữ được xếp tùy ý.

b. Nam 1 dãy ghế, nữ 1 dãy ghế.

Lời giải

a. Mỗi cách xếp 5 nam và 5 nữ vào hai dãy ghế một cách tùy ý là một hoán vị của 10 người. Vậy có $10! = 3628800$ cách xếp.

b. Chọn 1 dãy để xếp nam ngồi vào có 2 cách; xếp 5 nam vào dãy ghế đã chọn có $5!$ cách; xếp 5 nữ vào dãy ghế còn lại có $5!$ cách. Vậy có tất cả là $2 \cdot 5! \cdot 5!$ cách xếp thỏa điều kiện bài toán.

Ví dụ 7: Cho một bàn dài có 10 ghế và 10 học sinh trong đó có 5 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho 10 học sinh sao cho :

a. Nam, nữ ngồi xen kẽ nhau ?

b. Những học sinh cùng giới thì ngồi cạnh nhau ?

Lời giải

a.

Trường hợp 1: Xếp 5 học sinh nam ngồi vào vị trí chẵn có $5!$ cách, sau đó xếp 5 học sinh nữ vào 5 vị trí còn lại có $5!$ cách $\Rightarrow$ có $5!.5!$ cách.

Trường hợp 2: Xếp 5 học sinh nam ngồi vào vị trí lẻ có $5!$ cách, sau đó xếp 5 học sinh nữ vào 5 vị trí còn lại có $5!$ cách $\Rightarrow$ có $5!.5!$ cách.

Vậy tất cả có $2.5!.5! = 28800$ cách.

b. Xem 5 nam là 1 tổ và 5 nữ là một tổ, ta có 2 tổ. Xếp 2 tổ ngồi vào bàn ta có $2!$ cách. Đổi chỗ 5 nam cho nhau có $5!$ cách, đổi chỗ 5 nữ cho nhau có $5!$ cách.

Vậy ta có $2!.5!.5! = 28800$ cách.

Ví dụ 8: Một trường trung học phổ thông có 4 học sinh giỏi khối 12, có 5 học sinh giỏi khối 11, có 6 học sinh giỏi khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 15 học sinh trên thành một hàng ngang để đón đoàn đại biểu, nếu:

a). Các học sinh được xếp bất kì.

b). Các học sinh trong cùng một khối phải đứng kề nhau.

Lời giải

a). Mỗi cách sắp xếp 15 học sinh thành một hàng ngang là một hoán vị của 15 phần tử. Vậy số cách xếp 15 học sinh thành một hàng ngang là $P_{15} = 15!$ (cách)

b).

Bước 1: Xếp các khối có $3!$ cách xếp.

Bước 2: Xếp các bạn trong khối 12 có $4!$ cách.

Bước 3: Xếp các bạn trong khối 11 có $5!$ cách.

Bước 4: Xếp các bạn trong khối 10 có $6!$ cách.

Theo quy tắc nhân có $3!.4!.5!.6! = 12441600$ cách xếp thỏa yêu cầu.

Ví dụ 11: Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau, biết tổng của 3 chữ số này bằng 18?

Lời giải

Gọi số cần tìm $n = \overline{abc}, (a \neq 0)$.

Từ tập $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ta có những tập con của A gồm 3 phần tử sao cho tổng của chúng bằng 18 là $\{9, 8, 1\}; \{9, 6, 3\}; \{9, 5, 4\}; \{8, 7, 3\}; \{8, 6, 4\}; \{7, 6, 5\}; \{2, 7, 9\}$. Vậy có 7 tập con có 3 phần tử thuộc A sao cho tổng của 3 phần tử này bằng 18. Hoán vị 3 phần tử trong 1 tập con này ta được một số cần tìm. Suy ra có tất cả $3!.7 = 42$ số thỏa yêu cầu.

2. CHỈNH HỢP

a) Định nghĩa: Một chỉnh hợp chập k của n là một cách sắp xếp có thứ tự k phần tử từ một tập hợp n phần tử (với k, n là các số tự nhiên, $1 \leq k \leq n$).

b) Số các chỉnh hợp chập k của một tập hợp có n phần tử $1 \leq k \leq n$ là

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

c) Ví dụ:

Ví dụ 1: Có bao nhiêu cách xếp 5 người ngồi vào một băng ghế có 7 chỗ ngồi.

Lời giải

Mỗi cách chọn ra 5 chỗ ngồi từ băng ghế để sắp 5 người vào và có hoán vị là một chỉnh hợp chập 5 của 7.

Vậy có $A_7^5 = \frac{7!}{(7-5)!} = 2520$ cách sắp.

Ví dụ 2: Cho 5 điểm A,B,C,D,E. Hỏi có bao nhiêu vector khác $\vec{0}$ được thành lập từ hai trong năm điểm trên?

Lời giải

Cứ hai điểm phân biệt sẽ lập được 2 vector.

Do đó số vector khác $\vec{0}$ được lập từ 5 điểm A,B,C,D,E là $A_5^2 = 20$ vector.

Ví dụ 3: Tổ 1 gồm 10 em, bầu ra 3 cán sự gồm một tổ trưởng, một tổ phó, một thư kí (không kiêm nhiệm) Hỏi có bao nhiêu cách.

Lời giải

Mỗi cách chọn 3 cán sự trong 10 bạn là một chỉnh hợp chập 3 của 10 phần tử.

Vậy có $A_{10}^3 = 720$ cách.

Ví dụ 4: Từ một danh sách gồm 8 người, người ta bầu ra một ủy ban gồm một chủ tịch, một phó chủ tịch, một thư ký và một ủy viên. Có bao nhiêu khả năng có thể về kết quả bầu ủy ban này?

Lời giải

Mỗi kết quả bầu ủy ban như trên là mỗi kết quả chọn 4 người trong 8 người và sắp xếp 4 người đó vào 4 vị trí chủ tịch, phó chủ tịch, thư ký và ủy viên, nên mỗi kết quả có thể xảy ra là một chỉnh hợp chập 4 của 8 phần tử. Do đó, số khả năng có thể xảy ra về kết quả bầu ủy ban là:

$$A_8^4 = 1680 \text{ (khả năng)}$$

Ví dụ 5: Từ các chữ số sau đây, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau?

a) 1, 2, 3, 4, 5, 6

b) 0, 1, 2, 3, 4, 5

Lời giải

a) Mỗi số có 4 chữ số khác nhau lập được từ 6 chữ số đã cho là chọn 4 chữ số và sắp xếp chúng, mỗi cách chọn như vậy là một chỉnh hợp chập 4 của 6 phần tử. Do đó, số các số có 4 chữ số khác nhau lập được từ 6 chữ số đã cho là:

$$A_6^4 = 360 \text{ (số)}$$

b) Việc lập một số có 4 chữ số từ 6 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 bao gồm 2 công đoạn

Công đoạn 1: Chọn 1 chữ số khác 0 làm chữ số hàng nghìn, có 5 cách chọn (chọn từ các chữ số 1; 2; 3; 4 hoặc 5)

Công đoạn 2: Chọn 3 chữ số từ 5 chữ số còn lại (trừ chữ số đã chọn làm chữ số hàng nghìn) và sắp xếp chúng, mỗi cách như vậy là một chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử. Do đó, số cách chọn 3 chữ số từ 5 chữ số còn lại và sắp xếp chúng là:

$$A_5^3 = 60 \text{ (cách)}$$

Áp dụng quy tắc nhân, ta có số các số có 4 chữ số khác nhau lập được từ 6 chữ số đã cho là :

$$5.60=300 \text{ (số)}$$

Ví dụ 6: Trong chương trình ngoại khoá giáo dục truyền thống, 60 học sinh được trường tổ chức cho đi xem phim. Các ghế ở rạp được sắp thành các hàng. Mỗi hàng có 20 ghế.

- a) Có bao nhiêu cách sắp xếp 20 bạn để ngồi vào hàng đầu tiên?
- b) Sau khi sắp xếp xong hàng đầu tiên, có bao nhiêu cách sắp xếp 20 bạn để ngồi vào hàng thứ hai?
- c) Sau khi sắp xếp xong hai hàng đầu, có bao nhiêu cách sắp xếp 20 bạn để ngồi vào hàng thứ ba?

Lời giải

- a, Số cách sắp xếp 20 bạn để ngồi vào hàng đầu tiên là: A_{20}^{20} (cách)
- b, Sau khi sắp xếp xong hàng đầu tiên, số cách sắp xếp 20 bạn để ngồi vào hàng thứ hai là: A_{20}^{20} (cách)
- c, Sau khi sắp xếp xong hai hàng đầu, số cách sắp xếp 20 bạn để ngồi vào hàng thứ ba là: $P_{20} = 20!$ (cách)

Ví dụ 7: Bạn Việt chọn mật khẩu cho email của mình là một dãy gồm 8 kí tự đôi một khác nhau, trong đó có 3 kí tự đầu tiên là 3 chữ cái trong bảng gồm 26 chữ cái in thường và 5 kí tự tiếp theo là chữ số. Bạn Việt có bao nhiêu cách tạo ra mật khẩu?

Lời giải

Số cách chọn 3 kí tự đầu tiên là 3 chữ cái trong bảng gồm 26 chữ cái in thường là: A_{26}^3 (cách)

Số cách chọn 5 kí tự tiếp theo là chữ số là: A_{10}^5 (cách)

Áp dụng quy tắc nhân, số mật khẩu Việt có thể tạo ra là: $A_{26}^3 \cdot A_{10}^5$ (mật khẩu)

Ví dụ 8: Mỗi máy tính tham gia vào mạng phải có một địa chỉ duy nhất, gọi là địa chỉ IP, nhằm định danh máy tính đó trên Internet. Xét tập hợp A gồm các địa chỉ IP có dạng "192.168.abc.deg", trong đó a, d là các chữ số khác nhau được chọn ra từ các chữ số 1, 2 còn b, c, e, g là các chữ số đôi một khác nhau được chọn ra từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5. Hỏi tập hợp A có bao nhiêu phần tử?

Lời giải

Số cách chọn hai kí tự "a, d" là: $2!$ (cách)

Số cách chọn bốn kí tự "b, c, e, g" là: A_6^4 (cách)

+) Áp dụng quy tắc nhân, số phần tử của tập A là: $2 \cdot A_6^4 = 720$ (phần tử)

Ví dụ 9: Một nhóm 22 bạn đi chụp ảnh kỉ yếu. Nhóm muốn trong bức ảnh có 7 bạn ngồi ở hàng đầu và 15 bạn đứng ở hàng sau. Có bao nhiêu cách xếp vị trí chụp ảnh như vậy?

Lời giải

Số cách chọn 7 bạn ngồi ở hàng đầu là: A_{22}^7 (cách)

Số cách sắp xếp 15 bạn còn lại vào hàng sau là: $15!$ (cách)

Áp dụng quy tắc nhân, số cách xếp vị trí chụp ảnh là: $A_{22}^7 \cdot 15!$ (cách)

Ví dụ 10: Từ tập hợp $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ có thể lập được mấy số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau.

Lời giải

Gọi $A = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$ với $a_1 \neq 0$ và a_1, a_2, a_3, a_4 phân biệt là số cần lập.

+ Bước 1: chữ số $a_1 \neq 0$ nên có 5 cách chọn a_1 .

+ Bước 2: chọn 3 trong 5 chữ số còn lại để sắp vào 3 vị trí A_5^3 cách.

Vậy có $5A_5^3 = 300$ số.

Ví dụ 11: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số khác nhau?

Lời giải

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abc}$ ($a \neq 0$).

Chọn chữ số a từ các chữ số 1, 2, 3, 4 có 4 (cách).

Ứng với mỗi cách chọn a có số cách chọn bộ $\overline{bc}$ từ 4 chữ số còn lại là A_4^2 (cách).

Áp dụng quy tắc nhân, số các số tự nhiên có ba chữ số khác nhau là: $4.A_4^2 = 48$ (số).

Ví dụ 12: Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 5 mà mỗi số có bốn chữ số khác nhau?

Lời giải

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$ trong đó $a \neq 0, c, d \in \{0;5\}$.

TH1: $d = 0$

Chọn chữ số a có 9 (cách).

Ứng với mỗi cách chọn a có số cách chọn bộ $\overline{bc}$ từ 8 chữ số còn lại là A_8^2 (cách).

Số các số lập được là: $9.A_8^2 = 504$ (số).

TH1: $d = 5$

Chọn chữ số a có 8 (cách).

Ứng với mỗi cách chọn a có số cách chọn bộ $\overline{bc}$ từ 8 chữ số còn lại là A_8^2 (cách).

Số các số lập được là: $8.A_8^2 = 448$ (số).

Vậy số các số tự nhiên chia hết cho 5 và có bốn chữ số khác nhau là: $448 + 504 = 952$ (số).

Ví dụ 13: a. Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau ?

b. Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số và số đó là số chẵn ?

c. Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau và số đó là số lẻ ?

Lời giải

a. Gọi $M = \overline{abcde}, (a \neq 0)$ là số có 5 chữ số khác nhau.

Ta có a có 9 cách chọn nên có A_9^4 cách chọn 4 số xếp vào 4 vị trí $\overline{bcde}$.

Vậy có $9.A_9^4 = 27216$ số.

b. Gọi $A = \overline{abcde}$ là số có 5 chữ số và A là số chẵn.

Ta có a có 9 cách chọn ; b,c,d mỗi số có 10 cách chọn ; e có 5 cách chọn.

Vậy có $9.10^3.5 = 45000$ số.

c. Gọi $B = \overline{abcde}$ là số có 5 chữ số và B là số lẻ.

Ta có e có 5 cách chọn ; a có 8 cách chọn ; có A_8^3 cách chọn chữ số xếp vào ba vị trí b,c,d.

Vậy có $5.8.A_8^3 = 13440$ số.

Ví dụ 14: Có bao nhiêu số gồm 5 chữ số phân biệt có mặt đủ ba chữ số 1,2,3.

Lời giải

Dùng 5 ô sau để xếp số thỏa bài toán :

--	--	--	--	--

TH1: Ô 1 là số 1 :

– Chọn 2 ô để xếp số 2 và số 3 có A_4^2 cách ;

– Chọn 2 ô trong các số $\{0; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ xếp vào 2 ô còn lại có A_7^2 cách ;

$\Rightarrow$ ta có $A_4^2 \cdot A_7^2$ cách.

TH2 : Ô 1 là số 2 : tương tự, ta cũng có $A_4^2 \cdot A_7^2$ cách.

TH3: Ô 1 là số 3 : tương tự, ta cũng có $A_4^2 \cdot A_7^2$ cách.

TH4 : Ô 1 là số khác 1, 2, 3:

– Chọn 3 ô xếp số 1, 2, 3 vào có A_4^3 cách ;

– Chọn một số thuộc $\{0; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ xếp vào ô 1 có 6 cách ;

– Chọn một số xếp vào ô còn lại : có 6 cách ;

$\Rightarrow$ ta có $36 \cdot A_4^3$ cách.

Vậy ta có tất cả $3A_4^3 \cdot A_7^2 + 36A_4^3 = 2376$ số.

Cách 2:

Bước 1: Chọn 3 vị trí trong 5 vị trí để xếp ba chữ số $\{1, 2, 3\}$, có A_5^3

Bước 2: Chọn 2 chữ số trong 7 chữ số còn lại để xếp vào hai vị trí còn lại, có A_7^2 cách.

Theo quy tắc nhân có $A_5^3 \cdot A_7^2 = 2520$ số, nhưng có những số có chữ số 0 đứng vị trí đầu.

Trường hợp $a_1 = 0$: Bước 1: Chọn 3 vị trí trong 4 vị trí để xếp ba chữ số $\{1, 2, 3\}$, có A_4^3 cách.

Bước 2: Chọn 1 chữ số trong 6 chữ số còn lại để xếp vào một vị trí còn lại, có 6 cách.

Theo quy tắc nhân có $A_4^3 \cdot 6 = 144$ số có chữ số 0 ở vị trí đầu.

Kết luận có $2520 - 144 = 2376$ số thỏa yêu cầu.

- Ví dụ 15:** a. Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau và bé hơn số 475 ?
b. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 3 chữ số và bé hơn số 475 ?
c. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số đôi một khác nhau bé hơn số 475 và là số lẻ ?

Lời giải

a. Gọi $\overline{abc}$ là số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau và nhỏ hơn 475.

TH1: $a < 4$: a có ba cách chọn ; bc có A_9^2 cách chọn $\Rightarrow$ có $3 \cdot A_9^2 = 216$ số.

TH2: $a = 4$: $b < 7 \Rightarrow$ b có 6 cách chọn ($b \in \{6; 5; 3; 2; 1; 0\}$) và c có 8 cách chọn;

$b = 7 \Rightarrow$ c có 4 cách chọn ($c \in \{3; 2; 1; 0\}$)

$\Rightarrow$ có $6 \cdot 8 + 4 = 52$ số.

Vậy tất cả ta lập được $216 + 52 = 268$ số.

b. Gọi $\overline{abc}$ là số tự nhiên chẵn có ba chữ số đôi một khác nhau và nhỏ hơn 475.

TH1 : $a = 1$ hoặc 3 : a có 2 cách chọn ; c có 5 cách chọn và b có 8 cách chọn

$\Rightarrow$ có $2 \cdot 5 \cdot 8 = 80$ số.

TH2 : $a = 2$: c có 4 cách chọn và b có 8 cách chọn $\Rightarrow$ có $4 \cdot 9 = 32$ số.

TH3 : $a = 4$: nếu $b = 0, 2, 6$: b có 3 cách chọn và c có 3 cách chọn ;

nếu $b = 1, 3, 5$: b có 3 cách chọn và c có 4 cách chọn ;

nếu $b = 7$ thì c có hai cách chọn ($c \in \{0; 2\}$)

$\Rightarrow$ có $3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 2 = 23$ số.

Vậy ta lập được tổng cộng $80 + 32 + 23 = 135$ số.

c. Gọi $\overline{abc}$ là số tự nhiên lẻ có ba chữ số đôi một khác nhau và nhỏ hơn 475.

TH1 : $a = 1, 3$: a có 2 cách chọn ; c có 4 cách chọn và b có 8 cách chọn

$\Rightarrow$ có $2 \cdot 4 \cdot 8 = 64$ số.

TH2 : $a = 2$: c có 5 cách chọn và b có 8 cách chọn $\Rightarrow$ có $5 \cdot 8 = 40$ số.

TH3 : $a = 4$: nếu $b = 0, 2, 6$: b có 3 cách chọn và c có 5 cách chọn ;
 nếu $b = 1, 3, 5$: b có 3 cách chọn và c có 4 cách chọn ;
 nếu $b = 7$ thì c có 2 cách chọn ($c \in \{1, 3\}$)
 $\Rightarrow$ có $3.5 + 3.4 + 2 = 29$ số.

Vậy ta lập được tổng cộng $64 + 40 + 29 = 133$ số.

Ví dụ 16: Xếp 5 bạn nam và 5 bạn nữ thành một hàng dọc .Hỏi có bao nhiêu cách xếp :

- Nam nữ đứng xen kẽ .
- Nữ luôn đứng cạnh nhau .
- Không có 2 nam nào đứng cạnh nhau .

Lời giải

a). Trường hợp 1 : Bạn nam đứng đầu có 5 cách chọn , kế đến là bạn nữ có 5 cách chọn , kế đến là bạn nam có 4 cách chọn , kế đến là 1 bạn nữ có 4 cách chọn , ... cuối cùng xếp 1 bạn nữ có 1 cách chọn . Suy ra tổng số cách xếp $5!.5!$ cách .

Trường hợp 2 : Bạn nữ đứng đầu , xếp hoàn toàn tương tự như trường hợp 1 , suy ra tổng số cách xếp của trường hợp này là $5!.5!$

Kết luận theo quy tắc cộng tổng số cách xếp nam nữ xen kẽ nhau là $5!.5! + 5!.5! =$

b). Gọi nhóm bạn nữ là nhóm X . Số cách xếp 5 bạn nam và X là $6!$ cách

ứng với mỗi cách xếp trên có $5!$ cách xếp 5 bạn nữ trong nhóm X .

Theo quy tắc nhân có $6!.5! = 86400$ cách xếp .

c). Bước đầu tiên xếp 5 bạn nữ đứng kề nhau có $5!$ cách xếp . Để các bạn nam không đứng kề nhau ta xen các bạn nam vào giữa các bạn nữ . giữa 5 bạn nữ có 4 vị trí và thêm 2 vị trí đầu và cuối, tổng cộng có 6 vị trí để xếp 5 bạn nam. Chọn 5 vị trí trong 6 vị trí để xếp các bạn nam, có A_6^5 cách.

Theo quy tắc nhân có $5!.A_6^5 = 86400$ cách xếp thỏa yêu cầu bài toán .

Ví dụ 17: Có thể lập ra được bao nhiêu số điện thoại di động có 10 chữ số bắt đầu là 0908, các chữ số còn lại khác nhau đôi một, khác với 4 chữ số đầu và phải có mặt chữ số 6.

Lời giải

Gọi số điện thoại có dạng $\overline{0908abcdef}$

Chọn 1 vị trí trong 6 vị trí $\overline{abcdef}$ để xếp chữ số 6 có 6 cách chọn.

Chọn 5 chữ số trong 6 chữ số là $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ để xếp vào 5 vị trí còn lại, có A_6^5 cách.

Kết luận có $6.A_6^5 = 4320$ số điện thoại thỏa yêu cầu.

Ví dụ 18: Có 6 học sinh lớp 11 và 3 học sinh lớp 12 sẽ ngồi trên một hàng ngang có 9 ghế. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho 9 học sinh đó sao cho mỗi học sinh lớp 12 ngồi giữa hai học sinh lớp 11.

Lời giải

Bước 1: Xếp 6 học sinh lớp 11 thành một hàng ngang, có $6!$ cách.

Bước 2: giữa 6 bạn học sinh lớp 11 có 5 khoảng trống, chọn 3 khoảng trống trong 5 khoảng trống để xếp các bạn lớp 12, có A_5^3 cách.

Theo quy tắc nhân có $6!.A_5^3 = 14400$ cách xếp thỏa yêu cầu.

Ví dụ 19: Mùa giải 2019, giải bóng đá vô địch quốc gia (V.League) có 14 đội bóng tham gia. Các đội bóng đấu vòng tròn 2 lượt đi và về. Hỏi cả giải đấu có bao nhiêu trận đấu?

Lời giải

Mỗi trận đấu gồm 2 đội từ 14 đội và trên sân nhà hay sân đối thủ, nên mỗi trận đấu là một cách chọn 2 đội và sắp xếp chúng. Do đó, mỗi trận đấu là một chỉnh hợp chập 2 của 14 phần tử. Vậy số trận đấu có thể xảy ra là:

$$A_{214}=14.13=182 \quad A_{142}=14.13=182 \text{ (trận)}$$

3. TỔ HỢP

a) Định nghĩa: Một tổ hợp chập k của n là một cách chọn k phần tử từ một tập hợp n phần tử (với k, n là các số tự nhiên, $0 \leq k \leq n$).

b) Số các tổ hợp chập k của một tập hợp có n phần tử ($1 \leq k \leq n$) là

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

c. Hai tính chất cơ bản của số C_n^k

Tính chất 1:

Cho số nguyên dương n và số nguyên k với $0 \leq k \leq n$. Khi đó $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Tính chất 2:

Cho các số nguyên n và k với $1 \leq k \leq n$. Khi đó $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

d) Ví dụ:

Ví dụ 1: Có 10 cuốn sách toán khác nhau. Chọn ra 4 cuốn, hỏi có bao nhiêu cách.

Giải

Mỗi cách chọn ra 4 trong 10 cuốn sách là một tổ hợp chập 4 của 10.

Vậy có $C_{10}^4 = 210$ cách chọn.

Ví dụ 2: Tổ 1 có 4 bạn nam và 5 bạn nữ. Có bao nhiêu cách cử 3 bạn của tổ làm trực nhật trong mỗi trường hợp như sau?

a) 3 bạn được chọn bất kỳ

b) 3 bạn gồm 2 nam và 1 nữ

Lời giải

a) Mỗi cách chọn 3 bạn từ 9 bạn trong tổ một đi trực nhật là một tổ hợp chập 3 của 9. Do đó, số cách cử 3 bạn bất kì đi trực nhật là:

$$C_9^3 = 84 \text{ (cách)}$$

b) Mỗi cách chọn 3 bạn gồm 2 nam và 1 nữ đi trực nhật gồm 2 công đoạn:

Công đoạn 1: Chọn 2 bạn nam

Mỗi cách chọn 2 bạn nam từ 4 bạn nam đã cho là một tổ hợp chập 2 của 4. Do đó, số cách chọn 2 bạn nam từ 4 bạn nam đã cho là: $C_4^2 = 6$ (cách)

Công đoạn 2: Chọn 1 bạn nữ trong 5 bạn đã cho, có 5 cách

Áp dụng quy tắc nhân, ta có số các cử 3 bạn đi trực nhật trong đó 2 nam và 1 nữ là:

$$6.5=30 \text{ (cách)}$$

Ví dụ 3: Cho 8 điểm sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Có bao nhiêu tam giác với 3 đỉnh là 3 điểm trong 8 điểm đã cho?

Lời giải

Số tam giác với 3 đỉnh là 3 điểm trong 8 điểm đã cho là tổ hợp chập 3 của 8 phần tử, do đó số tam giác là: $C_8^3 = 56$ (tam giác)

Ví dụ 4: Có 8 đội tham gia một giải bóng đá. Có bao nhiêu cách xếp trận đấu vòng tính điểm sao cho hai đội chỉ gặp nhau đúng một lần?

Lời giải

Số cách xếp trận đấu vòng tính điểm để cho hai đội chỉ gặp nhau đúng một lần là tổ hợp chập 2 của 10 phần tử, do đó số cách xếp trận đấu là: $C_{10}^2 = 45$ (cách xếp)

Ví dụ 5: Một nhóm gồm 7 bạn đến trung tâm chăm sóc người cao tuổi làm từ thiện. Theo chỉ dẫn của trung tâm, 3 bạn hỗ trợ đi lại, 2 bạn hỗ trợ tắm rửa và 2 bạn hỗ trợ ăn uống. Có bao nhiêu cách phân công các bạn trong nhóm làm các công việc trên?

Lời giải

Việc phân công các bạn tình nguyện làm các việc trên gồm 3 công đoạn

Công đoạn 1: Chọn 3 bạn để hỗ trợ đi lại, mỗi cách chọn 3 bạn từ nhóm 7 bạn để làm công việc này là một tổ hợp chập 3 của 7 phần tử. Do đó, số cách chọn 3 bạn làm công việc hỗ trợ đi lại là: $C_7^3 = 35$ (cách)

Công đoạn 2: Chọn 2 bạn để hỗ trợ tắm rửa, mỗi cách chọn 2 bạn từ nhóm 4 bạn còn lại để làm công việc này là một tổ hợp chập 2 của 4 phần tử. Do đó, số cách chọn 2 bạn làm công việc hỗ trợ tắm rửa là: $C_4^2 = 6$ (cách)

Công đoạn 3: Chọn 2 bạn để hỗ trợ ăn uống từ 2 bạn cuối cùng, có 1 cách duy nhất

Áp dụng quy tắc nhân, ta có số cách phân công các bạn trong nhóm làm công việc trên là $35 \cdot 6 \cdot 1 = 210$ (cách)

Ví dụ 6: Bạn Hà có 5 viên bi xanh và 7 viên bi đỏ. Có bao nhiêu cách để Hà chọn ra đúng 2 viên bi khác màu?

Lời giải

Chọn một bi xanh từ 5 viên bi xanh có 5 (cách).

Ứng với mỗi cách chọn một bi xanh có số cách chọn một bi đỏ từ 7 viên bi đỏ là 7 (cách).

Áp dụng quy tắc nhân, số cách chọn ra đúng 2 viên bi khác màu là: $5 \cdot 7 = 35$ (cách).

Ví dụ 7: Một nhóm có 5 nam và 3 nữ. Chọn ra 3 người sao cho trong đó có ít nhất 1 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách.

Lời giải

+ Trường hợp 1: chọn 1 nữ và 2 nam.

- Bước 1: chọn ra 1 trong 3 nữ có 3 cách.

- Bước 2: chọn ra 2 trong 5 nam có C_5^2 .

Suy ra có $3C_5^2$ cách chọn.

+ Trường hợp 2: chọn 2 nữ và 1 nam.

- Bước 1: chọn ra 2 trong 3 nữ có C_3^2 cách.

- Bước 2: chọn ra 1 trong 5 nam có 5.

Suy ra có $5C_3^2$ cách chọn.

+ Trường hợp 3: chọn 3 nữ có 1 cách.

$$\text{Vậy có } 3C_5^2 + 5C_3^2 + 1 = 46 \text{ cách chọn.}$$

Ví dụ 8: Khối 10 có 16 bạn nữ và 18 bạn nam tham gia đợt tình nguyện Mùa hè xanh. Đoàn trường dự định lập một tổ trồng cây gồm 3 học sinh có cả nam và nữ. Có bao nhiêu cách lập một tổ trồng cây như vậy?

Lời giải

Trường hợp 1: Chọn 2 nam và 1 nữ có: $C_{18}^2 \cdot C_{16}^1$ cách

Trường hợp 1: Chọn 1 nam và 2 nữ có: $C_{18}^1 \cdot C_{16}^2$ cách

Vậy có tất cả $C_{18}^2 \cdot C_{16}^1 + C_{18}^1 \cdot C_{16}^2 = 4608$ (cách chọn)

Ví dụ 9: Một quán nhỏ bày bán hoa có 50 bông hồng và 60 bông cúc. Bác Ngọc muốn mua 5 bông hoa gồm cả hai loại hoa trên. Bác Ngọc có bao nhiêu cách chọn hoa?

Lời giải

Số cách chọn 5 bông hoa bất kì trong 110 bông hoa là: C_{110}^5 (cách chọn)

Số cách chọn 5 bông cúc trong 60 bông cúc là: C_{60}^5 (cách chọn)

Số cách chọn 5 bông hoa hồng trong 50 bông hồng là: C_{50}^5 (cách chọn)

Số cách chọn 5 bông hoa gồm cả 2 loại trong 110 bông hoa là:

$$C_{110}^5 - C_{60}^5 - C_{50}^5 = 114811250 \text{ (cách chọn)}$$

Ví dụ 10: Một tổ trực gồm 8 nam và 6 nữ. Giáo viên muốn chọn ra 5 học sinh trực. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu nhóm này có ít nhất một nữ sinh.

Lời giải

Cách 1: Làm trực tiếp

- Chọn 1 nữ, 4 nam có $C_6^1 C_8^4$

- Chọn 2 nữ, 3 nam có $C_6^2 C_8^3$

- Chọn 3 nữ, 2 nam có $C_6^3 C_8^2$

- Chọn 4 nữ, 1 nam có $C_6^4 C_8^1$

- Chọn 5 nữ C_6^5

Vậy có $C_6^1 C_8^4 + C_6^2 C_8^3 + C_6^3 C_8^2 + C_6^4 C_8^1 + C_6^5 = 1946$ cách.

Cách 2: Làm gián tiếp

Chọn 5 học sinh nam có $C_8^5 = 56$ cách

Để chọn 5 học sinh bất kì trong 14 học sinh có $C_{14}^5 = 2002$ cách

Vậy số cách chọn 5 học sinh có ít nhất 1 nữ là $2002 - 56 = 1946$ cách

Ví dụ 11: Một câu lạc bộ cờ vua có 10 bạn nam và 7 bạn nữ. Huấn luyện viên muốn chọn 4 bạn đi thi đấu cờ vua.

a) Có bao nhiêu cách chọn 4 bạn nam?

b) Có bao nhiêu cách chọn 4 bạn không phân biệt nam, nữ?

c) Có bao nhiêu cách chọn 4 bạn, trong đó có 2 bạn nam và 2 bạn nữ?

Lời giải

a) Mỗi cách chọn 4 bạn nam từ 10 bạn nam là một tổ hợp chập 4 của 10.

Số cách chọn là: $C_{10}^4 = 210$ (cách).

b) Mỗi cách chọn 4 bạn không phân biệt nam, nữ là một tổ hợp chập 4 của 17.

Số cách chọn là: $C_{17}^4 = 2380$ (cách).

c) Số cách chọn 2 bạn nam từ 10 bạn nam là $C_{10}^2 = 45$ (cách).

Ứng với mỗi cách chọn 2 bạn nam, số cách chọn 2 bạn nữ từ 7 nữ là $C_7^2 = 21$ (cách).

Vậy số cách chọn 2 bạn nam và 2 bạn nữ là: $21.45 = 945$ (cách).

Ví dụ 12: Hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số sao cho trong mỗi số đó, chữ số hàng ngàn lớn hơn hàng trăm, chữ số hàng trăm lớn hơn hàng chục và chữ số hàng chục lớn hơn hàng đơn vị.

Giải

Gọi $A = \overline{a_1a_2a_3a_4}$ với $9 \geq a_1 > a_2 > a_3 > a_4 \geq 0$ là số cần lập.

$$X = \{0; 1; 2; \dots; 8; 9\}.$$

Từ 10 phần tử của X ta chọn ra 4 phần tử bất kỳ thì chỉ lập được 1 số A. Nghĩa là không có hoán vị hay là một tổ hợp chập 4 của 10.

Vậy có $C_{10}^4 = 210$ số.

Ví dụ 13: Từ 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng, 4 bông hồng đỏ (các bông hồng xem như đôi một khác nhau). Người ta muốn chọn ra 1 bó hoa hồng gồm 7 bông. Có bao nhiêu cách chọn.

a) 1 bó hoa trong đó có đúng một bông hồng đỏ.

b) 1 bó hoa trong đó có ít nhất 3 bông hồng vàng và ít nhất 3 bông hồng đỏ.

Lời giải

a). Chọn 1 bó hoa gồm 7 bông, trong đó có đúng 1 bông hồng đỏ, 6 bông hồng còn lại chọn trong 8 bông (gồm vàng và trắng). Số cách chọn:

$$C_4^1.C_8^6 = 112 \text{ cách.}$$

b). Có các trường hợp sau xảy ra thỏa yêu cầu bài toán:

Trường hợp 1: Chọn 3 bông hồng vàng, 3 bông hồng đỏ và 1 bông hồng trắng, có

$$C_5^3.C_4^3.C_3^1 \text{ cách.}$$

Trường hợp 2: Chọn 4 bông hồng vàng và 3 bông hồng đỏ, có $C_5^4.C_4^3$ cách.

Trường hợp 3: Chọn 3 bông hồng vàng và 4 bông hồng đỏ, có $C_5^3.C_4^4$ cách.

Theo quy tắc cộng có: $C_5^3.C_4^3.C_3^1 + C_5^4.C_4^3 + C_5^3.C_4^4$.

Ví dụ 14: Có 9 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ, 4 bi vàng có kích thước đôi một khác nhau.

a. Có bao nhiêu cách chọn ra 6 viên bi, trong đó có đúng 2 viên bi đỏ.

b. Có bao nhiêu cách chọn ra 6 viên bi, trong đó số bi xanh bằng số bi đỏ.

Lời giải

a. Ta lần lượt thực hiện các công đoạn sau:

Bước 1: Chọn 2 bi đỏ trong 5 bi đỏ, có C_5^2 cách chọn.

Bước 2: Có C_{13}^4 cách chọn 4 bi trong 13 viên bi xanh và vàng.

Vậy ta có $C_5^2.C_{13}^4 = 7150$ cách.

b. Số bi xanh, đỏ, vàng được chọn có 3 trường hợp là:

Trường hợp 1: Chọn 3 xanh, 3 đỏ, ta có $C_9^3 C_5^3$ cách.

Trường hợp 2: Chọn 2 xanh, 2 đỏ, 2 vàng, ta có $C_9^2 C_5^2 C_4^2$ cách.

Trường hợp 3: Chọn 1 xanh, 1 đỏ, 4 vàng, ta có $C_9^1 C_5^1 C_4^4$ cách.

Theo quy tắc cộng ta có: $C_9^3.C_5^3 + C_9^2.C_5^2.C_4^2 + C_9^1.C_5^1.C_4^4 = 3045$ cách.

Ví dụ 15: Có một hộp đựng 5 viên bi xanh, 6 viên bi đỏ và 4 viên bi vàng.

a). Có bao nhiêu cách lấy ra 6 viên bi, trong đó có 2 viên bi xanh và có nhiều nhất 2 viên bi vàng và phải có đủ 3 màu.

b). Có bao nhiêu cách lấy ra 9 viên bi có đủ 3 màu.

Lời giải

a). Các trường hợp xảy ra theo yêu cầu đề:

Trường hợp 1: 2 xanh, 2 vàng, 2 đỏ, có: $C_5^2.C_4^2.C_6^2$ cách.

Trường hợp 2: 2 xanh, 1 vàng, 3 đỏ, có: $C_5^2.C_4^1.C_6^3$ cách.

Vậy có: $C_5^2.C_4^2.C_6^2 + C_5^2.C_4^1.C_6^3 = 1700$ cách.

b). Sử dụng phương pháp gián tiếp:

Lấy ra 9 viên bi trong 15 viên bi bất kỳ, có C_{15}^9 cách.

Trường hợp 1: lấy 9 viên bi chỉ có 2 màu là xanh và đỏ, có C_{11}^9 cách.

Trường hợp 2: lấy 9 viên bi chỉ có 2 màu là xanh và vàng, có C_9^9 cách.

Trường hợp 3: lấy ra 9 viên bi chỉ có màu đỏ và vàng, có C_{10}^9 cách.

Vậy có: $C_{15}^9 - (C_{11}^9 + C_9^9 + C_{10}^9) = 4984$ cách.

Ví dụ 16: Một đội cảnh sát giao thông gồm 15 người trong đó có 12 nam. Hỏi có bao nhiêu cách phân đội csgt đó về 3 chốt giao thông sao cho mỗi chốt có 4 nam và 1 nữ.

Lời giải

Bước 1: Chọn 4 nam trong 12 nam và chọn 1 nữ trong 3 nữ, có $C_{12}^4.C_3^1$ cách.

Bước 2: Chọn 4 nam trong 8 nam còn lại và chọn 1 nữ trong 2 nữ còn lại, có $C_8^4.C_2^1$ cách.

Bước 3: 4 nam còn lại và 1 nữ còn lại bắt buộc phải về công tác ở chốt giao thông cuối cùng, nên có 1 cách.

Theo quy tắc nhân có: $C_{12}^4.C_3^1.C_8^4.C_2^1.1 = 207900$ cách chọn.

Ví dụ 17: Một lớp có 20 học sinh trong đó có 14 nam, 6 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập 1 đội gồm 4 học sinh trong đó có.

a. Số nam và nữ bằng nhau.

b. Ít nhất 1 nữ.

Lời giải

a. Bước 1: Chọn 2 nam trong 14 nam, có C_{14}^2 cách.

Bước 2: Chọn 2 nữ trong 6 nữ, có C_6^2 cách.

Vậy số cách chọn nhóm có 2 nam, 2 nữ là $C_{14}^2.C_6^2 = 1365$ cách.

b. Cách 1: Xét các trường hợp xảy ra cụ thể:

Trường hợp 1: Chọn 1 nữ, 3 nam có $6.C_{14}^3 = 2184$ cách

Trường hợp 2: Chọn 2 nữ, 2 nam có $C_6^2.C_{14}^2 = 1365$ cách

Trường hợp 3: Chọn 3 nữ, 1 nam có $C_6^3.14 = 280$ cách

Trường hợp 4: Chọn 4 nữ thì có $C_6^4 = 15$ cách

Vậy số cách chọn cần tìm là: $2184 + 1365 + 280 + 15 = 3844$ cách.

Cách 2: Sử dụng phân bù:

Bước 1: Chọn 4 bạn bất kỳ trong 20 bạn, có C_{20}^4 cách.

Bước 2: Chọn 4 bạn đều nam, có C_{14}^4 cách.

Suy ra chọn 4 bạn có ít nhất 1 nữ: $C_{20}^4 - C_{14}^4 = 3844$ cách chọn.

Ví dụ 18: Một đội văn nghệ gồm 20 người, trong đó có 10 nam, 10 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 người, sao cho:

- Có đúng 2 nam trong 5 người đó?
- Có ít nhất 2 nam, ít nhất 1 nữ trong 5 người đó.

Lời giải

a. Số cách chọn 2 nam, 3 nữ là: $C_{10}^2 C_{10}^3 = 5400$ cách.

b. Có các trường hợp xảy ra thỏa yêu cầu của đề như sau:

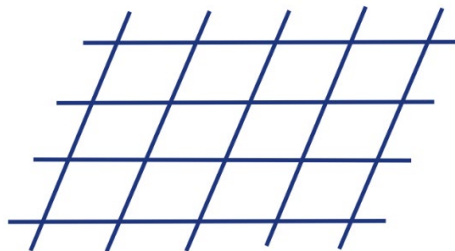
Trường hợp 1: Có 2 nam và 3 nữ. Số cách chọn 5400 cách.

Trường hợp 2: Có 3 nam và 2 nữ. Số cách chọn: $C_{10}^3 C_{10}^2 = 5400$

Trường hợp 3: Có 4 nam và 1 nữ. Số cách chọn: $C_{10}^4 C_{10}^1 = 2100$

* Tổng cộng 3 trường hợp ta có $5400 + 5400 + 2100 = 12900$ cách.

Ví dụ 19: Có 4 đường thẳng song song cắt 5 đường thẳng song song khác tạo thành những hình bình hành (như hình 10). Có bao nhiêu hình bình hành được tạo thành?



Hình 10

Lời giải

Ta thấy rằng, cứ 2 đường thẳng song song cắt 2 đường thẳng song song khác thì tạo thành một hình bình hành

Do đó, hình bình hành tạo thành được xác định qua 2 công đoạn

Công đoạn 1: Chọn 2 đường thẳng trong 4 đường nằm ngang, có:

$$C_4^2 = 6 \text{ cách}$$

Công đoạn 2: Chọn 2 đường thẳng trong 5 đường xiên, có: $C_5^2 = 10$ cách

Vậy số hình bình hành được tạo thành là: $6 \cdot 10 = 60$ (hình bình hành)

Ví dụ 20: Có bao nhiêu cách chọn một tập hợp gồm hai số nguyên dương nhỏ hơn 100? Có bao nhiêu cách chọn một tập hợp gồm ba số nguyên dương nhỏ hơn 100?

Lời giải

a) Gọi tập hợp cần tìm có dạng $\{a; b\}$, $0 < a, b < 100$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

Mỗi tập hợp là một tổ hợp chập 2 của 99.

Vậy số cách chọn một tập hợp gồm hai số nguyên dương nhỏ hơn 100 là: $C_{99}^2 = 4851$ (cách).

b) Gọi tập hợp cần tìm có dạng $\{a; b; c\}$, $0 < a, b, c < 100$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Mỗi tập hợp là một tổ hợp chập 3 của 99.

Vậy số cách chọn một tập hợp gồm ba số nguyên dương nhỏ hơn 100 là: $C_{99}^3 = 156849$ (cách).

Nhận xét:

- i) Điều kiện để xảy ra hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp là n phần tử phải phân biệt.
- ii) Chỉnh hợp và tổ hợp khác nhau ở chỗ là sau khi chọn ra k trong n phần tử thì chỉnh hợp có sắp thứ tự còn tổ hợp thì không.

4. TỔNG HỢP HOÁN VỊ-CHỈNH HỢP-TỔ HỢP

a) Hoán vị-chỉnh hợp-tổ hợp

Ví dụ 1: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ta lập được bao nhiêu số tự nhiên:

- a) Gồm 8 chữ số đôi một khác nhau?
- b) Gồm 6 chữ số đôi một khác nhau?

Lời giải

a, Số các số tự nhiên gồm 8 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 là: $P_8 = 8! = 40320$ (số)

b, Số các số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 là: $A_8^6 = 8! = 21060$ (số)

Ví dụ 2: Một nhóm công nhân gồm 15 nam và 5 nữ. Người ta muốn chọn từ nhóm ra 5 người để lập thành một tổ công tác sao cho phải có 1 tổ trưởng nam, 1 tổ phó nam và có ít nhất 1 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập tổ công tác.

Lời giải

+ Trường hợp 1: chọn 1 nữ và 4 nam.

- Bước 1: chọn 1 trong 5 nữ có 5 cách.

- Bước 2: chọn 2 trong 15 nam làm tổ trưởng và tổ phó có A_{15}^2 cách.

- Bước 3: chọn 2 trong 13 nam còn lại có C_{13}^2 cách.

Suy ra có $5A_{15}^2.C_{13}^2$ cách chọn cho trường hợp 1.

+ Trường hợp 2: chọn 2 nữ và 3 nam.

- Bước 1: chọn 2 trong 5 nữ có C_5^2 cách.

- Bước 2: chọn 2 trong 15 nam làm tổ trưởng và tổ phó có A_{15}^2 cách.

- Bước 3: chọn 1 trong 13 nam còn lại có 13 cách.

Suy ra có $13A_{15}^2.C_5^2$ cách chọn cho trường hợp 2.

+ Trường hợp 3: chọn 3 nữ và 2 nam.

- Bước 1: chọn 3 trong 5 nữ có C_5^3 cách.

- Bước 2: chọn 2 trong 15 nam làm tổ trưởng và tổ phó có A_{15}^2 cách.

Suy ra có $A_{15}^2 \cdot C_5^3$ cách chọn cho trường hợp 3.

Vậy có $5A_{15}^2 \cdot C_{13}^2 + 13A_{15}^2 \cdot C_5^2 + A_{15}^2 \cdot C_5^3 = 111300$ cách.

Cách khác:

+ Bước 1: chọn 2 trong 15 nam làm tổ trưởng và tổ phó có A_{15}^2 cách.

+ Bước 2: chọn 3 tổ viên, trong đó có nữ.

- Trường hợp 1: chọn 1 nữ và 2 nam có $5 \cdot C_{13}^2$ cách.

- Trường hợp 2: chọn 2 nữ và 1 nam có $13 \cdot C_5^2$ cách.

- Trường hợp 3: chọn 3 nữ có C_5^3 cách.

Vậy có $A_{15}^2 (5 \cdot C_{13}^2 + 13 \cdot C_5^2 + C_5^3) = 111300$ cách.

Ví dụ 3: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 có thể lập được mấy số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau.

Lời giải

+ Loại 1: chữ số a_1 tùy ý, ta có $5! = 120$ số.

+ Loại 2: chữ số $a_1 = 0$, ta có $4! = 24$ số.

Vậy có $120 - 24 = 96$ số.

Ví dụ 10. Một nhóm có 7 nam và 6 nữ. Chọn ra 3 người sao cho trong đó có ít nhất 1 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách.

Lời giải

+ Loại 1: chọn 3 người tùy ý trong 13 người có C_{13}^3 cách.

+ Loại 2: chọn 3 nam (không có nữ) trong 7 nam có C_7^3 cách.

Vậy có $C_{13}^3 - C_7^3 = 251$ cách chọn.

Ví dụ 4: Từ 20 câu hỏi trắc nghiệm gồm 9 câu dễ, 7 câu trung bình và 4 câu khó người ta chọn ra 10 câu để làm đề kiểm tra sao cho phải có đủ cả 3 loại dễ, trung bình và khó. Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra.

Lời giải

+ Loại 1: chọn 10 câu tùy ý trong 20 câu có C_{20}^{10} cách.

+ Loại 2: chọn 10 câu có không quá 2 trong 3 loại dễ, trung bình và khó.

- Trường hợp 1: chọn 10 câu dễ và trung bình trong 16 câu có C_{16}^{10} cách.

- Trường hợp 2: chọn 10 câu dễ và khó trong 13 câu có C_{13}^{10} cách.

- Trường hợp 3: chọn 10 câu trung bình và khó trong 11 câu có C_{11}^{10} cách.

Vậy có $C_{20}^{10} - (C_{16}^{10} + C_{13}^{10} + C_{11}^{10}) = 176451$ đề kiểm tra.

Chú ý:

Giải bằng phương pháp phân bù có ưu điểm là ngắn tuy nhiên nhược điểm là thường sai sót khi tính số lượng từng loại.

Ví dụ 5: Từ 20 câu hỏi trắc nghiệm gồm 9 câu dễ, 7 câu trung bình và 4 câu khó người ta chọn ra 7 câu để làm đề kiểm tra sao cho phải có đủ cả 3 loại dễ, trung bình và khó. Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra.

Lời giải

Chú ý :

Cách giải sai:

- + Loại 1: chọn 7 câu tùy ý trong 20 câu có C_{20}^7 cách.
- + Loại 2: chọn 7 câu không thỏa yêu cầu.
 - Trường hợp 1: chọn 7 câu dễ trong 9 câu có C_9^7 cách.
 - Trường hợp 2: chọn 7 câu trung bình có 1 cách.
 - Trường hợp 3: chọn 7 câu dễ **và** trung bình trong 16 câu có C_{16}^7 cách.
 - Trường hợp 4: chọn 7 câu dễ **và** khó trong 13 câu có C_{13}^7 cách.
 - Trường hợp 5: chọn 7 câu trung bình **và** khó trong 11 câu có C_{11}^7 cách.

Vậy có $C_{20}^7 - (1 + C_9^7 + C_{16}^7 + C_{13}^7 + C_{11}^7) = 63997$ đề kiểm tra!

Sai sót trong cách tính số đề loại 2. Chẳng hạn, khi tính số đề trong trường hợp 3 ta đã tính lặp lại trường hợp 1 và trường hợp 2.

Cách giải sai khác:

- + Loại 1: chọn 7 câu tùy ý trong 20 câu có C_{20}^7 cách.
- + Loại 2: chọn 7 câu không thỏa yêu cầu.
 - Trường hợp 1: chọn 7 câu dễ **hoặc** trung bình trong 16 câu có C_{16}^7 cách.
 - Trường hợp 2: chọn 7 câu dễ **hoặc** khó trong 13 câu có C_{13}^7 cách.
 - Trường hợp 3: chọn 7 câu trung bình **hoặc** khó trong 11 câu có C_{11}^7 cách.

Vậy có $C_{20}^7 - (C_{16}^7 + C_{13}^7 + C_{11}^7) = 64034$ đề kiểm tra.

Sai sót do ta đã tính lặp lại số cách chọn đề chỉ có 7 câu dễ và đề chỉ có 7 câu trung bình trong trường hợp 1 và trường hợp 2.

Cách giải đúng:

- + Loại 1: chọn 7 câu tùy ý trong 20 câu có C_{20}^7 cách.
-

+ Loại 2: chọn 7 câu không thỏa yêu cầu.

- Trường hợp 1: chọn 7 câu dễ **hoặc** trung bình trong 16 câu có C_{16}^7 cách.

- Trường hợp 2: chọn 7 câu dễ **và** khó trong 13 câu có $C_{13}^7 - C_9^7$ cách.

- Trường hợp 3: chọn 7 câu trung bình **và** khó trong 11 câu có $C_{11}^7 - 1$ cách.

Vậy có $C_{20}^7 - (C_{16}^7 + C_{13}^7 - C_9^7 + C_{11}^7 - 1) = 64071$ đề kiểm tra.

Ví dụ 6: Hội đồng quản trị của một công ty gồm 12 người, trong đó có 5 nữ. Từ hội đồng quản trị đó người ta bầu ra 1 chủ tịch hội đồng quản trị, 1 phó chủ tịch hội đồng quản trị và 2 ủy viên. Hỏi có mấy cách bầu sao cho trong 4 người được bầu phải có nữ.

Lời giải

+ Loại 1: bầu 4 người tùy ý (không phân biệt nam, nữ).

- Bước 1: bầu chủ tịch và phó chủ tịch có A_{12}^2 cách.

- Bước 2: bầu 2 ủy viên có C_{10}^2 cách.

Suy ra có $A_{12}^2 \cdot C_{10}^2$ cách bầu loại 1.

+ Loại 2: bầu 4 người toàn nam.

- Bước 1: bầu chủ tịch và phó chủ tịch có A_7^2 cách.

- Bước 2: bầu 2 ủy viên có C_5^2 cách.

Suy ra có $A_7^2 \cdot C_5^2$ cách bầu loại 2.

Vậy có $A_{12}^2 \cdot C_{10}^2 - A_7^2 \cdot C_5^2 = 5520$ cách.

b) KỸ THUẬT SỬ DỤNG VÁCH NGĂN

Ví dụ 1: Có bao nhiêu cách xếp 5 bạn nam và 7 bạn nữ thành một hàng ngang, sao cho không có hai bạn nam nào đứng cạnh nhau.

Lời giải

Xếp 7 bạn nữ thành hàng ngang có $7.6.5.4.3.2.1 = 5040$ cách xếp.

Khi đó 7 bạn nữ chia hàng ngang thành 8 khoảng trống mà mỗi bạn nữ là một vách ngăn.

Xếp 5 bạn nam vào 8 khoảng trống đó sao cho mỗi khoảng trống xếp nhiều nhất một bạn nam. Số cách xếp 5 bạn nam là: $8.7.6.5.4 = 6720$ cách xếp.

Theo quy tắc nhân có: $5040 \times 6720 = 33868800$ cách xếp.

Ví dụ 2: Có bao nhiêu cách chia 10 cái bánh giống nhau cho 3 người sao cho mỗi người có ít nhất một chiếc bánh.

Lời giải

Xếp 10 cái bánh thành một hàng, khi đó có 9 khoảng trống ở giữa các chiếc bánh. Để chia 10 chiếc bánh thành 3 phần mà mỗi phần có ít nhất một chiếc, người ta đặt hai chiếc đũa vào 2 khoảng

trống trong 9 khoảng trống đó. Tuy nhiên vai trò hai chiếc đĩa là như nhau nên có tất cả $\frac{9.8}{2} = 36$ cách chia

Ví dụ 3: Tổ 1 của lớp 11A có 2 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 6 bạn học sinh vào 1 dãy ghế đặt theo hàng ngang sao cho 2 bạn học sinh nam không đứng cạnh nhau?

Lời giải

Có 4 vị trí để xếp 4 học sinh nữ

+ Vị trí 1: có 4 cách xếp

+ Vị trí 2: có 3 cách xếp

+ Vị trí 3: có 2 cách xếp

+ Vị trí 4: có 1 cách xếp

Ta có 4 học sinh nữ tạo thành 5 vách ngăn, ta đặt 2 học sinh nam vào 5 vách ngăn đó

+ Học sinh nam thứ nhất: có 5 cách chọn

+ Học sinh nam thứ hai: có 4 cách chọn

Theo quy tắc nhân: $4.3.2.1.5.4 = 480$ cách chọn

Ví dụ 4: Có bao nhiêu cách xếp 7 bạn nam và 5 bạn nữ vào một bàn tròn có 12 chỗ ngồi, sao cho không có hai bạn nam nào ngồi cạnh nhau.

Lời giải

Xếp 7 bạn nam vào bàn tròn có $1.6.5.4.3.2.1 = 720$ cách xếp.

Khi đó 7 bạn nam chia vòng tròn quanh bàn thành 7 khoảng trống.

Xếp 5 bạn nữ vào 7 khoảng trống đó sao cho mỗi khoảng trống xếp nhiều nhất một bạn nữ. Số cách xếp 5 bạn nữ là: $7.6.5.4.3 = 2520$ cách xếp.

Theo quy tắc nhân có: $720 \times 2520 = 1814400$ cách xếp.

Ví dụ 4: a) Hỏi có bao nhiêu cách xếp 6 cặp vợ chồng ngồi xung quanh một chiếc bàn tròn, sao cho nam và nữ ngồi xen kẽ nhau?.

b). Hỏi có bao nhiêu cách xếp 6 cặp vợ chồng ngồi xung quanh một chiếc bàn tròn, sao cho mỗi bà đều ngồi cạnh chồng của mình?

Lời giải

a). Ta tiến hành xếp chỗ ngồi theo hai công đoạn.

Bước 1: Xếp 6 nam ngồi quanh bàn tròn, có $(6 - 1)! = 5!$ Cách xếp.

Bước 2: Ta xem 6 người nam vừa xếp là 6 vách ngăn, vì 6 người nam ngồi quanh bàn tròn nên có 6 khoảng trống để xếp 6 người nữ, vậy có 6! Cách xếp.

Theo quy tắc nhân có $5!.6! = 86400$ cách.

b). Ta tiến hành xếp chỗ ngồi theo hai công đoạn.

Bước 1: Xếp 6 người chồng ngồi quanh bàn tròn, có $(6 - 1)! = 5!$ Cách xếp. (vì vợ ngồi gần chồng).

Bước 2: Mỗi cặp vợ chồng đổi chỗ cho nhau có 1 cách xếp mới, vậy có 2^6 cách.

Theo quy tắc nhân có $5!.2^6 = 7680$ cách.

c) MỘT SỐ BÀI TOÁN Đếm SỐ CÁC SỐ TỰ NHIÊN THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Ví dụ 1: Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau lập thành từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4?

Lời giải

Gọi $\overline{abcd}$ là số tự nhiên cần lập.

Khi đó

+ $a \neq 0$ nên có 4 cách chọn.

+ $b \neq a$ nên có 4 cách chọn.

+ $c \notin \{a; b\}$ nên có 3 cách chọn.

+ $d \notin \{a; b; c\}$ nên có 2 cách chọn.

Vậy có $4.4.3.2 = 96$ số.

Ví dụ 2: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau trong đó luôn có mặt chữ số 2?

Lời giải

Từ các chữ số trên ta có thể lập được $6.6.5 = 180$ số có 3 chữ số khác nhau

Số các số có ba chữ số khác nhau lập từ các chữ số đã cho và không có mặt chữ số 2 là $5.5.4 = 100$ số.

Vậy có $180 - 100 = 80$ số thỏa đề.

Ví dụ 3: Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau được lập thành từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 6 và số đó phải chia hết cho 3.

Lời giải

Từ 5 chữ số đã cho ta có 4 bộ gồm ba chữ số có tổng chia hết cho 3 là (1; 2; 3), (1; 2; 6), (2; 3; 4) và (2; 4; 6). Mỗi bộ ba chữ số này ta lập được $3! = 6$ số thuộc tập hợp S .

Vậy có 24 số thỏa mãn

Ví dụ 4: Cho tập hợp $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Hỏi từ X có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 6 và có bốn chữ số.

Lời giải

Giả sử dạng của mỗi số cần tìm là $\overline{abcd}$. Chọn $d \in \{2; 4; 6; 8\}$ có 4 cách.

Chọn a, b có 9^2 cách. Để chọn c ta xét tổng $S = a + b + d$:

Nếu S chia cho 3 dư 0 thì $c \in \{3; 6; 9\}$ suy ra có 3 cách.

Nếu S chia cho 3 dư 1 thì $c \in \{2; 5; 8\}$ suy ra có 3 cách.

Nếu S chia cho 3 dư 2 thì $c \in \{1; 4; 7\}$ suy ra có 3 cách.

Do đó số các số chia hết cho 6 có bốn chữ số được lập từ X là $4.9^2.3 = 972$.

Ví dụ 5: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau trong đó luôn có mặt chữ số 2 và 5?

Lời giải

Gọi $\overline{abc}$ là số tự nhiên cần lập

TH1. $a = 2, b = 5 \Rightarrow c$ có 5 cách chọn.

TH2. $a = 5, b = 2 \Rightarrow c$ có 5 cách chọn.

TH3. $a = 2, c = 5 \Rightarrow b$ có 5 cách chọn.

TH4. $a = 5, c = 2 \Rightarrow b$ có 5 cách chọn.

TH5. $b = 2, c = 5 \Rightarrow a \neq 0$ có 4 cách chọn.

TH6. $b = 5, c = 2 \Rightarrow a \neq 0$ có 4 cách chọn.

Vậy có 28 số thỏa yêu cầu bài toán

Ví dụ 6: Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số là số lẻ và chia hết cho 9.

Lời giải

Ta có các số lẻ chia hết cho 9 là dãy 1000017, 1000035, 1000053, ..., 9999999 lập thành một cấp số cộng có $u_1 = 1000017$ và công sai $d = 18$ nên số phần tử của dãy này là $\frac{9999999 - 1000017}{18} + 1 = 500000$. Vậy số các số tự nhiên lẻ có 7 chữ số và chia hết cho 9 là $5 \cdot 10^5$.

Ví dụ 7: Một trường trung học phổ thông, có 26 học sinh giỏi khối 12, có 43 học sinh giỏi khối 11, có 59 học sinh giỏi khối 10. Vậy nhà trường có bao nhiêu cách chọn 1 học sinh giỏi để đi dự thi trại hè.

Lời giải

Có các phương án sau thỏa yêu cầu đề bài

Cách 1: Chọn 1 học sinh giỏi của khối 12, có 26 cách chọn.

Cách 2: Chọn 1 học sinh giỏi của khối 11, có 43 cách chọn.

Cách 3: Chọn 1 học sinh giỏi của khối 10, có 59 cách chọn.

Vậy theo quy tắc cộng có $26 + 43 + 59 = 128$ cách chọn thỏa yêu cầu đề bài.

Ví dụ 8: Bạn B đi học từ nhà đến trường; biết rằng từ nhà đến bến phà có 3 tuyến đường; từ bến phà đến trạm xe buýt có 6 tuyến đường; từ trạm xe buýt có 4 tuyến đường đến trường. Vậy bạn B có bao nhiêu cách chọn tuyến đường đi học.

Lời giải

Ta chia việc đi học của bạn B thành ba công đoạn sau:

Công đoạn 1: Bạn B chọn 1 trong 3 con đường để đi từ nhà đến phà, có 3 cách chọn.

Công đoạn 2: Bạn B chọn 1 trong 6 con đường để đi từ phà đến trạm xe buýt, có 6 cách chọn.

Công đoạn 3: Bạn B chọn 1 trong 4 con đường để đi từ trạm xe buýt đến trường, có 4 cách chọn.

Theo quy tắc nhân có $3 \cdot 6 \cdot 4 = 72$ cách.

Ví dụ 9: Một lớp học có 19 học sinh nam, 11 học sinh nữ (tất cả đều hát rất hay). Vậy lớp học đó có bao nhiêu cách chọn 1 đôi song ca (1 nam, 1 nữ) để dự thi văn nghệ của trường.

Lời giải

Có hai công đoạn sau, để chọn được một đôi song ca có cả nam và nữ:

Công đoạn 1: Chọn 1 sinh nam, có 19 cách chọn.

Công đoạn 2: Chọn 1 học sinh nữ, có 11 cách chọn.

Theo quy tắc nhân có $19 \cdot 11 = 209$ cách chọn một đôi song ca gồm một nam và một nữ.

Ví dụ 10: Một trường trung học phổ thông có 26 học sinh giỏi khối 12, có 43 học sinh giỏi khối 11, có 59 học sinh giỏi khối 10. Vậy nhà trường có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh giỏi đủ 3 khối để đi dự trại hè.

Lời giải

Có ba công đoạn sau, để chọn được một đội có 3 người có đầy đủ cả ba khối:

Công đoạn 1: Chọn 1 bạn học sinh giỏi khối 12, có 26 cách chọn.

Công đoạn 2: Chọn 1 bạn học sinh giỏi khối 11, có 43 cách chọn.

Công đoạn 3: Chọn 1 bạn học sinh giỏi khối 10, có 59 cách chọn.

Theo quy tắc nhân có $26 \cdot 43 \cdot 59 = 65962$ cách chọn một nhóm ba bạn có đầy đủ 3 khối.

Ví dụ 11: Một bài thi trắc nghiệm khách quan gồm 10 câu, mỗi câu có 4 phương án trả lời. Hỏi bài thi đó có bao nhiêu phương án trả lời.

Lời giải

Có các công đoạn sau, để hoàn thành bài thi trắc nghiệm:

Công đoạn 1: Chọn đáp án cho câu hỏi 1, có 4 phương án trả lời.

Công đoạn 2: Chọn đáp án cho câu hỏi 2, có 4 phương án trả lời.

Công đoạn 3: Chọn đáp án cho câu hỏi 3, có 4 phương án trả lời.

.....

Công đoạn 10: Chọn đáp án cho câu hỏi 10, có 4 phương án trả lời.

Vậy theo quy tắc nhân có $\underbrace{4 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 4}_{10 \text{ số } 4} = 4^{10}$ phương án trả lời.

d. Hoán vị lặp (tham khảo)

Cho tập hợp X có n phần tử gồm n_1 phần tử giống nhau, n_2 phần tử khác lại giống nhau, ..., n_k phần tử khác nữa lại giống nhau ($n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$). Mỗi cách sắp n phần tử này vào n vị trí là một hoán vị lặp, số hoán vị lặp là $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$.

Ví dụ 1: Từ các chữ số 1, 2, 3 lập được bao nhiêu số tự nhiên có đúng 5 chữ số 1, 2 chữ số 2 và 3 chữ số 3.

Lời giải

Xem số cần lập có 10 chữ số gồm 5 chữ số 1 giống nhau, 2 chữ số 2 giống nhau và 3 chữ số 3 giống nhau.

Vậy có $\frac{10!}{5!2!3!} = 2520$ số.

Cách giải thường dùng:

+ Bước 1: chọn 5 trong 10 vị trí để sắp 5 chữ số 1 có C_{10}^5 cách.

+ Bước 2: chọn 2 trong 5 vị trí còn lại để sắp 2 chữ số 2 có C_5^2 cách.

+ Bước 3: sắp 3 chữ số 3 vào 3 vị trí còn lại có 1 cách.

Vậy có $C_{10}^5 \cdot C_5^2 \cdot 1 = 2520$ số.

Ví dụ 2: a. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau và chia hết cho 5 ?

b. Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau đều là số chẵn ?

c. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số trong đó các chữ số cách đều số đứng giữa thì giống nhau ?

Lời giải

a. Gọi $X = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ là số có 6 chữ số và X chia hết cho 5. Ta có hai khả năng sau :

* $a_6 = 0$: Có A_9^5 cách chọn 5 chữ số còn lại.

* $a_6 = 5$: Có 8 cách chọn a_1 ; có A_8^4 cách chọn 4 chữ số còn lại.

Vậy ta có thể lập được tất cả là $A_9^5 + 8A_8^4 = 28560$.

b. Gọi $Y = \overline{abc}$ là số có ba chữ số đều là số chẵn. Ta có :

* $c = 0$: Có A_4^2 cách chọn a và b.

* $c \neq 0$: c có 4 cách chọn từ các chữ số $\{2, 4, 6, 8\}$, a có 3 cách chọn (bỏ số 0 và một chữ số chẵn c đã chọn), b có 3 cách chọn (bỏ 2 chữ số chẵn mà a và c đã chọn). Vậy có $4 \cdot 3 \cdot 3$ số

Kết luận vậy có $A_4^2 + 4 \cdot 3 \cdot 3 = 48$ số thỏa yêu cầu.

c. Gọi $Z = \overline{a_1a_2a_3a_4a_3a_2a_1}$ là số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ta có : Chọn một số khác 0 xếp vào vị trí a_1 có 9 cách;

Chọn một số xếp vào vị trí a_2 có 10 cách;

Chọn một số xếp vào vị trí a_3 có 10 cách ;

Chọn một số xếp vào vị trí a_4 có 10 cách.

Vậy có $9 \cdot 10^3 = 9000$ số.

Ví dụ 3: a. Có bao nhiêu số chẵn gồm 6 chữ số khác nhau đôi một trong đó chữ số đầu tiên là số lẻ ?

b. Có bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau đôi một trong đó có đúng ba chữ số lẻ và ba chữ số chẵn (chữ số đầu phải khác 0) ?

Lời giải

Gọi tập $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

a. Gọi $A = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}, (a_1 \neq 0)$ là số chẵn có 6 chữ số khác nhau và a_1 là số lẻ.

Ta có : * $a_1 \in \{1, 3, 5, 7, 9\} \Rightarrow a_1$ có 5 cách chọn ;

* $a_6 \in \{0, 2, 4, 6, 8\} \Rightarrow a_6$ có 5 cách chọn ;

* $\overline{a_2 a_3 a_4 a_5}$ có A_8^4 cách chọn (chọn 4 chữ số từ 8 chữ số thuộc tập A, bỏ 2 chữ số mà a_1 và a_6 đã chọn để xếp vào 4 vị trí $\overline{a_2 a_3 a_4 a_5}$).

Vậy có $5.5.A_8^4 = 42000$ số A.

b. Gọi $B = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6}$, ($a_1 \neq 0$) là số có 6 chữ số khác nhau trong đó có 3 chữ số chẵn và 3 chữ số lẻ.

Ta có hai trường hợp sau :

TH1 : a_1 là số lẻ, khi đó :

* a_1 có 5 cách chọn ;

* Lấy 2 số lẻ trong 4 số còn lại và 3 số chẵn xếp vào 5 vị trí còn lại có $C_4^2.C_5^3.5!$ cách.

$\Rightarrow$ trường hợp 1 có $5.C_4^2.C_5^3.5!$ số B.

TH2 : a_1 là số chẵn, ta có :

* a_1 có 4 cách chọn ;

* Lấy 2 số chẵn trong 4 số còn lại và 3 số lẻ xếp vào 5 vị trí còn lại có $C_4^2.C_5^3.5!$ cách.

$\Rightarrow$ trường hợp 2 có $4.C_4^2.C_5^3.5!$ số B.

Vậy tất cả có $9.C_4^2.C_5^3.5! = 64800$ số B.

Ví dụ 4: Có bao nhiêu số tự nhiên :

- Có 5 chữ số sao cho tổng các chữ số của mỗi số là một số lẻ ?
- Có 6 chữ số, là số lẻ và chia hết cho 9 ?
- Có 6 chữ số sao cho chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng trước ?
- Có 6 chữ số sao cho chữ số đứng sau nhỏ hơn chữ số đứng trước ?
- Có 5 chữ số khác nhau và chia hết cho 10 ?
- Có 6 chữ số trong đó 3 chữ số liên nhau phải khác nhau ?

Lời giải

a. Gọi $X = \overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5}$ là số có 5 chữ số và $P = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ là số lẻ.

Ta có : x_1 có 9 cách chọn ;

x_2 có 10 cách chọn ;

x_3 có 10 cách chọn ;

x_4 có 10 cách chọn ;

x_5 có 5 cách chọn.

Vậy có $9.10^3.5 = 45000$ số X.

b. Số lẻ nhỏ nhất gồm 6 chữ số và chia hết cho 9 là : 100017 ;

Số lẻ lớn nhất gồm 6 chữ số và chia hết cho 9 là : 999999 ;

Các số gồm 6 chữ số và chia hết cho 9 là :

100017, 100035, 100053, ... , 999981, 999999.

Đây là một cấp số cộng có $u_1 = 100017, u_n = 999999$ và $d = 18$

$\Rightarrow n = \frac{u_n - u_1}{d} + 1 = 50000$ số.

c. Gọi $X = \overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6}$ là số có 6 chữ số và $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$.

Ta có $x_i \neq 0$ nên $x_i \in E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

* Lấy 6 chữ số thuộc E có C_9^6 cách.

* Mỗi bộ 6 chữ số trên lập được đúng 1 số thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy số các số lập được là $C_9^6 = 84$ số.

d. Gọi $X = \overline{x_1x_2x_3x_4x_5x_6}$ là số có 6 chữ số và $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5 > x_6$.

Ta có $x_i \in E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

* Lấy 6 chữ số thuộc E có C_{10}^6 cách.

* Mỗi bộ 6 chữ số trên lập được đúng 1 số thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy số các số cần lập được là $C_{10}^6 = 210$ số.

e. Gọi $X = \overline{x_1x_2x_3x_4x_5}$ là số có 5 chữ số khác nhau và X chia hết cho 10.

Ta có : * x_5 có 1 cách chọn ($x_5 = 0$);

* $\overline{x_1x_2x_3x_4}$ có A_9^4 cách chọn.

Vậy tất cả có $A_9^4 = 3024$ số X.

f. Gọi $X = \overline{x_1x_2x_3x_4x_5x_6}$ là số có 6 chữ số trong đó 3 chữ số liền nhau phải khác nhau.

Ta có : * x_1 có 9 cách chọn ;

* x_2 có 9 cách chọn ;

* x_3 có 8 cách chọn ;

* x_4 có 8 cách chọn ;

* x_5 có 8 cách chọn ;

* x_6 có 8 cách chọn.

Vậy tất cả có $9^2 \cdot 8^4 = 331776$ số.

Ví dụ 5: Tập hợp $E = \{1, 2, 5, 7, 8\}$. Có bao nhiêu cách lập ra một số có 3 chữ số khác nhau lấy từ E sao cho :

a. Số tạo thành là số chẵn ?

b. Số tạo thành là một số không có chữ số 5 ?

c. Số tạo thành là một số nhỏ hơn 278 ?

Lời giải

a. Gọi $x = \overline{abc}$ là số cần lập. Ta có :

* c có 2 cách chọn ;

* $\overline{ab}$ có A_4^2 cách chọn.

Vậy có tất cả là $2 \cdot A_4^2$ số thỏa yêu cầu bài toán.

b. Mỗi số thỏa yêu cầu bài toán là một chỉnh hợp chập ba của các số sau : 1; 2; 7; 8 nên số các số lập được là A_4^3 số.

c. Gọi $x = \overline{abc}$ là số cần lập. Ta có :

* $a = 1$: $\overline{bc}$ có A_4^2 cách chọn $\Rightarrow$ lập được A_4^2 số.

* $a = 2$: nếu $b = 7$ thì c có 2 cách chọn $\Rightarrow$ lập được 2 số ;

nếu $b < 7$ thì b có hai cách chọn và c có 3 cách chọn $\Rightarrow$ lập được 2.3 số.

Vậy ta lập được $A_4^2 + 2 + 2 \cdot 3 = 20$ số thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 6: Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số phân biệt sao cho 1, 2, 3 luôn đứng cạnh nhau.

Lời giải

Gọi a là số gồm ba chữ số khác nhau lập từ các số 1, 2, 3. Ta có $3!$ số a . Với mỗi số a , ta xét tập hợp $A = \{a; 0; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Số thỏa bài toán có dạng là $M = \overline{xyz}$ trong đó x, y, z phân biệt lấy từ A và luôn có mặt số a . Ta có các trường hợp sau :

- Nếu $x = a$ thì $\overline{yz}$ có A_7^2 cách chọn $\Rightarrow$ có A_7^2 số M ;
- Nếu $y = a$ thì x có 6 cách chọn và z có 6 cách chọn $\Rightarrow$ có $6.6 = 36$ số M ;
- Nếu $z = a$ thì x có 6 cách chọn và y có 6 cách chọn $\Rightarrow$ có $6.6 = 36$ số M .

Do đó từ A ta lập được $A_7^2 + 36.2 = 114$ số M .

Vậy số tất cả các số lập được là $3!.114 = 684$ số.

Ví dụ 7: Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau đôi một, trong đó nhất thiết phải có mặt hai chữ số 1 và 3 ?

Lời giải

Gọi $A = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ là số thỏa yêu cầu bài toán. Ta có ba trường hợp sau :

- * $a_1 = 1$: + Xếp số 3 vào 1 trong 4 vị trí a_2, a_3, a_4, a_5 có 4 cách ;
+ Lấy 3 trong 8 số còn lại xếp vào 3 vị trí còn lại có A_8^3 cách ;

$\Rightarrow$ có $4.A_8^3$ số có dạng $\overline{1a_2a_3a_4a_5}$.

- * $a_1 = 3$: + Xếp số 1 vào 1 trong 4 vị trí a_2, a_3, a_4, a_5 có 4 cách ;
+ Lấy 3 trong 8 số còn lại xếp vào 3 vị trí còn lại có A_8^3 cách.

$\Rightarrow$ có $4.A_8^3$ số có dạng $\overline{3a_2a_3a_4a_5}$.

- * $a_1 \neq 1$ và 3 : + a_1 có 7 cách chọn (bỏ 3 chữ số 0, 1, 3).

+ Xếp số 1 và 3 vào 2 trong 4 vị trí còn lại có A_4^2 cách .

+ Lấy 2 trong 7 số còn lại xếp vào 2 vị trí còn lại có A_7^2 cách.

$\Rightarrow$ có $7.A_4^2.A_7^2$ số có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ trong đó có mặt 1 và 3 và $a_1 \neq 1$ và 3.

Vậy tất cả có $2.4.A_8^3 + 7.A_4^2.A_7^2 = 6216$.

Ví dụ 8: Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 4 chữ số đôi một khác nhau sao cho trong mỗi số đều có mặt hai chữ số 8 và 9.

Lời giải

Gọi số cần lập là $n = \overline{abcd}$, với $d \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Xét các trường hợp xảy ra sau :

- Trường hợp 1: $d = 0$, chọn 2 vị trí trong 3 vị trí $\overline{abc}$ để xếp hai chữ số 8 và 9 có A_3^2 cách. Vị trí còn lại có 7 cách (bỏ 3 chữ số là 0, 8, 9). Vậy có $A_3^2.7 = 42$ số.

- Trường hợp 2 : $d = 8$

Nếu $a = 9$, chọn 2 chữ số từ tập $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ xếp vào hai vị trí $\overline{bc}$ có A_8^2 cách.

Nếu $a \neq 9$, có 2 cách xếp chữ số 9 vào hai vị trí b, c . Vị trí a có 7 cách chọn (bỏ 3 chữ số là 0, 8, 9). Vị trí còn lại có 7 cách (bỏ 3 chữ số là 8, 9, a). Vậy có $2.7.7 = 98$ số.

- Trường hợp 3 : $d \in \{2, 4, 6\}$ vậy d có 3 cách chọn. Chọn 2 vị trí trong 3 vị trí $\overline{abc}$ để xếp hai chữ số 8 và 9 có A_3^2 cách. Vị trí còn lại có 7 cách chọn (bỏ 3 chữ số là $d, 8, 9$). Vậy có $3.A_3^2.7 = 126$ số, trong 126 số này có những số chữ số 0 đứng ở vị trí a . Số trường hợp số 0 ở vị trí a là $3.2 = 6$ số.

Kết luận vậy có $42 + A_8^2 + 98 + 126 - 6 = 316$ số cần tìm.

Ví dụ 9: Từ 10 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau, sao cho trong các chữ số đó có mặt chữ số 0 và 1.

Lời giải

Gọi số cần lập $n = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6}$ ($a_1 \neq 0$)

Bước 1: Xếp chữ số 0 vào 1 trong 5 vị trí từ a_2 đến a_6 , có 5 cách xếp.

Bước 2: Xếp chữ số 1 vào 1 trong 5 vị trí còn lại (bỏ 1 vị trí chữ số 0 đã chọn), có 5 cách xếp.

Bước 3: Chọn 4 chữ số trong 8 chữ số $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ để xếp vào 4 vị trí còn lại, có A_8^4 cách.

Theo quy tắc nhân có $5 \cdot 5 \cdot A_8^4 = 42000$ số thỏa yêu cầu.

- Ví dụ 10:** a). Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau đôi một trong đó có mặt chữ số 0 nhưng không có mặt chữ số 1 ?
b). Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số trong đó chữ số 2 có mặt đúng hai lần, chữ số 3 có mặt đúng ba lần và các chữ số còn lại có mặt không quá một lần ?

Lời giải

a. Dùng 6 ô sau để thiết lập số thỏa điều kiện bài toán :

--	--	--	--	--	--

* Xếp số 0 vào một ô : có 5 cách ;

* Chọn 5 số thuộc tập hợp $\{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ và xếp vào 5 ô còn lại có A_8^5 cách.

Vậy ta có $5 \cdot A_8^5 = 33600$ số.

b. Dùng 7 ô sau để thiết lập số có 7 chữ số :

--	--	--	--	--	--	--

* Chọn 2 ô để xếp 2 số 2 : có C_7^2 cách ;

Chọn 3 ô để xếp 3 số 3 : có C_5^3 cách ;

Chọn 2 số (khác 2 và 3) xếp vào 2 ô còn lại : có A_8^2 cách ;

$\Rightarrow$ có $C_7^2 \cdot C_5^3 \cdot A_8^2 = 11760$ số (có kể số có số 0 đứng đầu).

* Khi số 0 đứng ô thứ nhất , ta có :

+ có C_6^2 cách xếp 2 số 2 ;

+ có C_4^3 cách xếp 3 số 3 ;

+ có 8 cách xếp số vào ô còn lại ;

$\Rightarrow$ có $C_6^2 \cdot C_4^3 \cdot 8 = 480$ số mà chữ số 0 đứng đầu.

Vậy số các số lập được là $11760 - 480 = 11280$.

- Ví dụ 11:** Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số có nghĩa, biết rằng chữ số 2 có mặt đúng 2 lần, chữ số 3 có mặt đúng 3 lần, các chữ số còn lại có mặt không quá một lần?

Lời giải

Bước 1: Chọn 2 vị trí trong 7 vị trí để xếp hai chữ số 2, có C_7^2 cách.

Bước 2: Chọn 3 vị trí trong 5 vị trí còn lại để xếp ba chữ số 3, có C_5^3 cách.

Bước 3: Chọn 2 số trong 8 số còn lại là $\{0, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ để xếp vào hai vị trí còn lại có A_8^2 cách chọn.

Theo quy tắc nhân có $C_7^2 \cdot C_5^3 \cdot A_8^2$ số thỏa mãn, nhưng trong những số này có những số có chữ số 0 đứng vị trí đầu tiên.

Trường hợp chữ số 0 đứng vị trí đầu tiên.

Bước 1: Chọn 2 vị trí trong 6 vị trí để xếp hai chữ số 2, có C_6^2 cách.

Bước 2: Chọn 3 vị trí trong 4 vị trí còn lại để xếp ba chữ số 3, có C_4^3 cách.

Bước 3: Chọn 1 số trong 7 số còn lại là $\{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ để xếp vào một vị trí còn lại có 7 cách chọn.

Theo quy tắc nhân có $C_6^2.C_4^3.7 = 420$ số có chữ số 0 đứng vị trí đầu tiên.

Kết luận có $C_7^2.C_5^3.A_8^2 - C_6^2.C_4^3.7 = 11340$ số thỏa mãn yêu cầu.

Ví dụ 12: Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số, sao cho không có chữ số nào lặp lại đúng 3 lần.

Lời giải

Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4}$ là số tự nhiên cần lập.

• Bước 1: Tìm các số n có bốn chữ số (không chú ý đến điều kiện không có chữ số nào lặp lại đúng 3 lần)

Ta có: 9 cách chọn a_1 ($a_1 \neq 0$). Mỗi chữ số a_1, a_2, a_3 mỗi số có 10 cách chọn.

Do đó ta có $9.10^3 = 9000$ số có 4 chữ số.

Xét các trường hợp có 1 chữ số lặp lại đúng 3 lần.

Trường hợp 1: Số 0 lặp lại 3 lần. Bắt buộc ba chữ số 0 phải ở vị trí $a_2a_3a_4$, có 1 cách xếp.

Chọn 1 số trong 9 số còn lại để xếp vào vị trí a_1 có 9 cách. Vậy có 9 số có ba chữ số 0.

Trường hợp 2: Mỗi số trong các số từ $\overline{1,9}$ lặp lại 3 lần. Không mất tính tổng quát giả sử chữ số a lặp lại 3 lần, với $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Bước 1: Chọn 3 trong 4 vị trí của $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ để xếp chữ số a , có C_4^3 cách.

Bước 2: Chọn 1 chữ số trong 9 chữ số còn lại (bỏ số a), để xếp vào vị trí còn lại, có 9 cách.

Theo quy tắc nhân có $C_4^3.9 = 36$ số, nhưng trong những số này, có những số có chữ số 0 đứng vị trí a_1 . Trường hợp $a_1 = 0$ thì 3 vị trí còn lại xếp chữ số a , có 1 cách.

Trong trường hợp 2 có $36 - 1 = 35$ số thỏa yêu cầu.

Vậy có $9 + 35.9 = 324$ số có 4 chữ số, trong đó có một chữ số lặp lại đúng 3 lần.

Kết luận vậy có $9000 - 324 = 8676$ số có 4 chữ số trong đó không có chữ số nào lặp lại đúng ba lần.

Ví dụ 13: Cho 9 chữ số 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5. Lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số, được rút ra từ 9 chữ số nói trên.

Lời giải

Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ là số cần lập. Ta có 4 trường hợp:

* $a_i \in \{1, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Chọn 2 vị trí trong 6 vị trí để xếp hai chữ số 1, có C_6^2 cách. Xếp 4 chữ số còn lại vào 4 vị trí còn lại, có 4! Cách. Vậy có $C_6^2.4! = 360$ số n .

* $a_i \in \{1, 1, 1, x, y, z\}$, với x, y, z thỏa chọn 3 chữ số trong 4 chữ số $\{2, 3, 4, 5\}$.

Bước 1: Chọn 3 vị trí trong 6 vị trí để xếp ba chữ số 1, có C_6^3 cách. Bước 2: Xếp 3 chữ số x, y, z vào 3 vị trí còn lại, có 3! Cách. Bước 3: chọn 3 chữ số x, y, z có, C_4^3 cách.

Theo quy tắc nhân có $C_6^3.3!.C_4^3 = 480$ số.

Theo quy tắc nhân có $C_6^3.3!.C_4^3 = 480$ số.

* $a_i \in \{1, 1, 1, 1, x, y\}$ với x, y thỏa chọn 2 chữ số trong 4 chữ số $\{2, 3, 4, 5\}$.

Bước 1: Chọn 4 vị trí trong 6 vị trí để xếp bốn chữ số 1, có C_6^4 cách. Bước 2: Xếp 2 chữ số x, y vào 2 vị trí còn lại, có $2!$ Cách. Bước 3: chọn 2 chữ số x, y có, C_4^2 cách.

Theo quy tắc nhân có $C_6^4 \cdot 2! \cdot C_4^2 = 180$ số.

* $a_i \in \{1, 1, 1, 1, x\}$ với x thỏa chọn 1 chữ số trong 4 chữ số $\{2, 3, 4, 5\}$.

Bước 1: Chọn 5 vị trí trong 6 vị trí để xếp năm chữ số 1, có C_6^5 cách. Bước 2: Xếp 1 chữ số x vào 1 vị trí còn lại, có 1 cách. Bước 3: chọn 1 chữ số x có, C_4^1 cách.

Theo quy tắc nhân có $C_6^5 \cdot 1 \cdot C_4^1 = 24$ số.

Tổng cộng ta có $360 + 480 + 180 + 24 = 1044$ số n.

e) THÀNH LẬP SỐ CHIA HẾT

Ví dụ 1: Từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau và chia hết cho 15.

Lời giải

+ Gọi số cần tìm là $x = \overline{x_1x_2x_3x_4x_5}$

+ x chia hết cho 3 khi tổng các số hạng chia hết cho 3 nên các x_i thuộc một trong các tập hợp sau :

$A_1 = \{0, 1, 2, 3, 6\}$, $A_2 = \{0, 1, 2, 4, 5\}$, $A_3 = \{0, 1, 2, 5, 6\}$, $A_4 = \{0, 2, 3, 4, 6\}$, $A_5 = \{0, 3, 4, 5, 6\}$,

$A_6 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A_7 = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

+ X chia hết cho 5 thì

x_5 thuộc A_1, A_4, A_6, A_7 (chỉ có 0 hoặc 5) : có 96 số

Hoặc x_5 thuộc A_2, A_3, A_5 , (có 0 và 5) : có 126 số

+ Vậy có $96 + 126 = 222$ số.

Ví dụ 2: Cho $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, từ các chữ số thuộc tập A lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số và số đó chia hết cho 3 .

Lời giải

Gọi số có 5 chữ số cần tìm là $\overline{abcde}$ ($a \neq 0$). Do $\overline{abcde} : 3$ nên $(a + b + c + d + e) : 3$.

Nếu $(a + b + c + d) : 3$ thì $e = 0$ hoặc $e = 3$.

Nếu $(a + b + c + d)$ chia cho 3 dư 1 thì $e = 2$ hoặc $e = 5$.

Nếu $(a + b + c + d)$ chia cho 3 dư 2 thì $e = 1$ hoặc $e = 4$.

Như vậy từ một số có 4 chữ số $\overline{abcd}$ (các chữ số được lấy từ tập A) sẽ tạo được 2 số tự nhiên có 5 chữ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Từ các chữ số của tập A lập được $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1080$ số tự nhiên có 4 chữ số.

Nên từ các chữ số của tập A lập được $2 \cdot 1080 = 2160$ số chia hết cho 3 có 5 chữ số.

Ví dụ 3: Có bao nhiêu số lẻ có 6 chữ số chia hết 9?

Lời giải

Số nhỏ nhất và lớn nhất có 6 chữ số là số lẻ và chia hết cho 9 là 100017 và 999999

Nhận thấy rằng trong đoạn từ 100017 đến 999999 cứ cách nhau 18 đơn vị thì có 1 số chia hết cho 9 là số lẻ .

Vậy số các số thỏa mãn là : $\frac{999999 - 100017}{18} + 1 = 50000$

Ví dụ 4: Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể thành lập được bao nhiêu số có hai chữ số khác nhau và số đó chia hết cho 6 ?

Lời giải

Số có hai chữ số chia hết cho 6 có dạng $\overline{ab}$ với $b = 2, 4, 6$.

Nếu $b = 2$ thì $a \in \{1; 4\} \Rightarrow$ có 2 số với tận cùng là 2.

Nếu $b = 4$ thì $a \in \{2; 5\} \Rightarrow$ có 2 số với tận cùng là 4 ;

Nếu $b = 6$ thì $a \in \{3\} \Rightarrow$ có 1 số với tận cùng là 6.

Vậy có $2 + 2 + 1 = 5$ số thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 5. Cho các số $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Hỏi có thể thành lập được bao nhiêu số có 3 chữ số không chia hết cho 3 mà các chữ số trong mỗi số là khác nhau đôi một.

Lời giải

Gọi $n = \overline{a_1 a_2 a_3}$ là số cần lập. $N = \overline{a_1 a_2 a_3}$ là số có 3 chữ số bất kì

$N' = \overline{a_1 a_2 a_3}$ là số có 3 chữ số chia hết cho 3. Thì $n = N - N'$

* Tính các số N : có 5 cách chọn số cho a_1 (bỏ chữ số 0). Chọn 2 chữ số trong 5 chữ số còn lại (bỏ 1 chữ số a_1 đã chọn) xếp vào 2 vị trí $a_2 a_3$, có A_5^2 cách.

Theo quy tắc nhân có $5 \cdot A_5^2 = 100$ số N .

* Tính các số N' : Các tập hợp con của E có ba phần tử mà tổng ba phần tử chia hết cho 3 là :

$$E_1 = \{0; 1; 2\}, E_2 = \{0; 1; 5\}, E_3 = \{0; 2; 4\}, E_4 = \{0; 4; 5\}$$

$$E_5 = \{1; 2; 3\}, E_6 = \{1; 3; 5\}, E_7 = \{2; 3; 4\}, E_8 = \{3; 4; 5\}$$

Từ các tập E_1, E_2, E_3, E_4 , mỗi tập ta lập được $2 \cdot 2!$ số có ba chữ số khác nhau và chia hết cho 3.

Từ các tập E_5, E_6, E_7, E_8 , mỗi tập ta lập được $3!$ số có ba chữ số khác nhau và chia hết cho 3.

Vậy tất cả ta lập được $4 \cdot 2 \cdot 2! + 4 \cdot 3! = 40$ số.

Kết luận có $100 - 40 = 60$ số thỏa yêu cầu.

Ví dụ 5: Xét những số gồm 9 chữ số, trong đó có 5 chữ số 1 và bốn chữ số còn lại là 2, 3, 4, 5. Hỏi có bao nhiêu số như thế, nếu:

a). 5 chữ số 1 được xếp kề nhau.

b). Các chữ số được xếp tùy ý.

Lời giải

a. $n = \overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_9}$

Đán 5 chữ số 1 lại với nhau thành số X.

Xếp X và 4 chữ số $\{2, 3, 4, 5\}$, có $P_5 = 5!$ cách.

b. Ta xét học có 9 ô trống

--	--	--	--	--	--	--	--	--

Bước 1: Chọn 5 vị trí trong 9 vị trí để xếp 5 chữ số 1, có C_9^5 cách chọn.

Bước 2: Xếp 4 số $\{2, 3, 4, 5\}$ vào 4 vị trí còn lại, có $4!$ Cách xếp.

Vậy ta có $C_9^5 \times 4! = 3024$ số thỏa yêu cầu.

Ví dụ 6: Trong các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số có 7 chữ số trong đó chữ số 4 có mặt đúng 3 lần, còn các chữ số khác có mặt đúng 1 lần.

Lời giải

Gọi số cần tìm $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7}$ ($a_1 \neq 0$)

Bước 1: Xếp chữ số 0 vào 1 trong 6 vị trí từ a_2 đến a_7 , có 6 cách xếp.

Bước 2: Chọn 3 vị trí trong 6 vị trí còn lại để xếp ba chữ số 4, có C_6^3 cách.

Bước 3: Xếp ba chữ số $\{1, 2, 3\}$ vào ba vị trí còn lại, có $3!$ Cách.

Theo quy tắc nhân có $6.C_6^3.3! = 720$ số thỏa điều kiện.

Ví dụ 7: Từ 3 chữ số 2, 3, 4 có thể tạo ra được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số, trong đó có đủ mặt 3 chữ số nói trên.

Lời giải

Các tập hợp các chữ số sử dụng:

$$s_1 = \{2, 3, 4, 2, 2\}; s_2 = \{2, 3, 4, 2, 3\}; s_3 = \{2, 3, 4, 2, 4\}$$

$$s_4 = \{2, 3, 4, 3, 3\}; s_5 = \{2, 3, 4, 3, 4\}; s_6 = \{2, 3, 4, 4, 4\}$$

* xét tập s_1 : xét hộc có 5 ô trống

--	--	--	--	--

Bước 1: Chọn 3 vị trí trong 5 vị trí xếp chữ số 2, có C_5^3 cách. Bước 2: 2 vị trí còn lại xếp hai chữ số 3 và 4, có $2!$ Cách.

Vậy ta có $C_5^3.2! = 20$ số

Tương tự cho s_4, s_6 mỗi trường hợp ta có 20 số n

* $s_2 = \{2, 3, 4, 2, 3\}$ xét hộc 5 ô trống:

--	--	--	--	--

Bước 1: Chọn 2 vị trí trong 5 vị trí để xếp hai chữ số 2, có C_5^2 cách. Bước 2: Chọn 2 vị trí trong 3 vị trí còn lại để xếp hai chữ số 3, có C_3^2 cách. Vị trí còn lại xếp chữ số 4.

Vậy ta có $C_5^2.C_3^2.1 = 30$ số

Tương tự cho s_3, s_5 mỗi trường hợp ta có 30 số.

Theo quy tắc cộng ta có $3.20 + 3.30 = 150$ số.

Cách 2:

Trường hợp 1: Số có 5 chữ số, trong đó có 1 chữ số có mặt đúng ba lần, 2 chữ số còn lại mỗi chữ có mặt đúng một lần. (Câu $\overline{aaabc}$ chữ số a có mặt 3 lần, 2 chữ số b và c có mặt đúng 1 lần).

Bước 1: Chọn 3 vị trí trong 5 vị trí để xếp chữ số a, có C_5^3 cách. Bước 2: Xếp 2 chữ số còn lại vào 2 vị trí còn lại có $2!$ Cách. Vậy có $C_5^3.2! = 20$ số chữ số a có mặt đúng 3 lần.

Tương tự cho chữ số b có mặt đúng 3 lần, và chữ số c có mặt đúng 3 lần.

Các khả năng xảy ra của trường hợp 1: $20.3 = 60$ số.

Trường hợp 2: Số có 5 chữ số, trong đó có 2 chữ số có mặt đúng 2 lần, chữ số còn lại có mặt đúng một lần. (Câu $\overline{aabbcc}$)

Bước 1: Chọn 2 vị trí trong 5 vị trí để xếp chữ số a, có C_5^2 cách. Bước 2: Chọn 2 vị trí trong 3 vị trí còn lại để xếp 2 chữ số b, có C_3^2 cách. Vị trí còn lại xếp chữ số c, có 1 cách. Vậy có $C_5^2.C_3^2 = 30$ số trong đó có 2 chữ số a, 2 chữ số b và 1 chữ số c.

Hoàn toàn tương tự cho trường hợp: có 2 chữ số a và 2 chữ số c. Có 2 chữ số b và 2 chữ số c.

Các khả năng xảy ra của trường hợp 2: $30.3 = 90$ số.

Kết luận có: $60 + 90 = 150$ số thỏa yêu cầu.

Ví dụ 8: Có bao nhiêu số gồm 7 chữ số khác nhau đôi một được lập bằng cách dùng 7 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9 sao cho hai chữ số chẵn không đứng liền nhau.

Lời giải

-Dùng 7 chữ số đã cho, ta lập được $7!$ số có 7 chữ số.

-Trong các số trên có những số có 2 số chẵn liên nhau là $\{2, 4\}$

--	--	--	--	--	--	--	--

Các trường hợp hai chữ số 2, 4 đứng kề nhau:

Dán hai chữ số 2 và 4 thành chữ số X.

Bước 1: Sắp xếp X và 5 chữ số còn lại có $6!$ cách.

Bước 2: Ứng với mỗi cách xếp ở bước 1, có $2!$ cách xếp 2 phần tử trong X.

Vậy có $6! \cdot 2! = 1440$ số mà 2 chữ số 2 và 4 đứng kề nhau.

Kết luận có $7! - 1440 = 3600$ số thỏa yêu cầu.

Ví dụ 9: Từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4 có thể lập được bao nhiêu số:

a) Có 8 chữ số sao cho chữ số 1 có mặt 3 lần, chữ số 4 có mặt 2 lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần.

b) Có 9 chữ số sao cho chữ số 0 có mặt 2 lần, chữ số 2 có mặt 3 lần, chữ số 3 có mặt 2 lần các chữ số còn lại có mặt đúng một lần.

Lời giải

a)

--	--	--	--	--	--	--	--

Xếp số vào 8 ô trống thỏa yêu cầu đề bài.

Bước 1: Chọn 3 ô trong 8 ô để xếp 3 chữ số 1, có C_8^3 cách.

Bước 2: Chọn 2 ô trong 5 ô còn lại để xếp 2 chữ số 4, có C_5^2 cách.

Bước 3: Xếp 3 chữ số số còn lại vào 3 ô còn lại, có $3!$ cách.

Vậy có $C_8^3 \cdot C_5^2 \cdot 3!$ số thỏa yêu cầu, nhưng có những số có chữ số 0 đứng vị trí đầu tiên.

Trường hợp số 0 ở ô thứ nhất.

Bước 1: Chọn 3 ô trong 7 ô còn lại, xếp 3 chữ số 1, có C_7^3 cách.

Bước 2: Chọn 2 ô trong 4 ô còn lại, xếp 2 chữ số 4, có C_4^2 cách.

Bước 3: Xếp hai chữ số số còn lại vào 2 ô còn lại, có $2!$ cách.

Vậy có: $C_7^3 \cdot C_4^2 \cdot 2!$ số mà chữ số 0 ở vị trí đầu tiên.

Kết luận có: $C_8^3 \cdot C_5^2 \cdot 3! - C_7^3 \cdot C_4^2 \cdot 2! = 2940$ số thỏa yêu cầu.

b)

--	--	--	--	--	--	--	--	--

Xếp số vào 9 ô trống thỏa yêu cầu đề bài:

Bước 1: Chọn 2 ô trong 8 ô (bỏ ô đầu tiên) để xếp hai chữ số 0, có C_8^2 cách chọn.

Bước 2: Chọn 3 ô trong 7 ô còn lại để xếp ba chữ số 2, có C_7^3 cách.

Bước 3: Chọn 2 ô trống trong 4 ô còn lại để xếp 2 chữ số 3, có C_4^2 cách chọn.

Bước 4: Hai ô còn lại xếp 2 chữ số còn lại, có $2!$ Cách xếp.

Theo quy tắc nhân có:

$C_8^2 \cdot C_7^3 \cdot C_4^2 \cdot 2! = 11760$ số thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 10: Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 có thể lập được bao nhiêu số có 12 chữ số trong đó chữ số 5 có mặt đúng 2 lần; chữ số 6 có mặt đúng 4 lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần.

Lời giải

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Xếp số vào 12 ô trống thỏa yêu cầu bài toán:

Bước 1: Chọn 2 ô trong 12 ô để xếp hai chữ số 5, có C_{12}^2 cách.

Bước 2: Chọn 4 ô trong 10 ô còn lại để xếp 4 chữ số 6, có C_{10}^4 cách.

Bước 3: 6 ô còn lại được xếp bởi 6 chữ số còn lại, có 6! Cách xếp.

Theo quy tắc nhân có: $C_{12}^2.C_{10}^4.6! = 9979200$ số thỏa yêu cầu đề bài.

Ví dụ 11: Từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5 có thể lập được bao nhiêu số có 8 chữ số trong đó chữ số 5 có mặt 3 lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần.

Lời giải

--	--	--	--	--	--	--	--

Xếp số vào 8 ô trống thỏa yêu cầu đề:

Bước 1: Chọn 3 ô trong 8 ô để xếp ba chữ số 5, có C_8^3 cách.

Theo quy tắc nhân có: $C_7^3.4!$ số.

Vậy có: $C_8^3.5! - C_7^3.4! = 5880$ số thỏa yêu cầu đề bài.

Ví dụ 12: Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6 có thể lập được bao nhiêu số có 7 chữ số trong đó chữ số 4 có mặt đúng 2 lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần và các số này không bắt đầu bằng số 12.

Lời giải

--	--	--	--	--	--	--

Xếp số vào 7 ô thỏa yêu cầu đề:

Bước 1: Chọn 2 ô trong 7 ô để xếp 2 chữ số 4, có C_7^2 cách.

Bước 2: Xếp 5 chữ số còn lại vào 5 ô còn lại có 5! Cách xếp.

Theo quy tắc nhân có : $C_7^2.5! = 2520$ số cần tìm, nhưng trong những số này có những số bắt đầu bằng 12.

*Những số bắt đầu bằng 12:

1	2					
---	---	--	--	--	--	--

Bước 1: Chọn 2 ô trong 5 ô còn lại để xếp 2 chữ số 4, có C_5^2 cách.

Bước 2: Xếp 3 chữ số còn lại gồm $\{3,5,6\}$ vào 3 vị trí còn lại, có 3! Cách.

Vậy có: $C_5^2.3!$ số bắt đầu bởi 12.

Kết luận: có $C_7^2.5! - C_5^2.3! = 2460$ thỏa yêu cầu đề bài.

Ví dụ 13: Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 có thể lập được bao nhiêu số:

a). Có 8 chữ số sao cho chữ số 1 có mặt 3 lần, chữ số 4 có mặt 2 lần, các chữ số còn lại nếu có mặt thì có mặt không quá 1 lần.

b). Có 10 chữ số sao cho chữ số 1 có mặt 1 lần, chữ số 2 có mặt 3 lần, chữ số 3 có mặt 2 lần các chữ số còn lại nếu có mặt thì có mặt không quá 1 lần.

Lời giải

a). Gọi số cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$.

Bước 1: Chọn 3 vị trí trong 8 vị trí để xếp ba chữ số 1, có C_8^3 cách.

Bước 2: Chọn 2 vị trí trong 5 vị trí còn lại để xếp hai chữ số 4, có C_5^2 cách.

Bước 3: Chọn 3 chữ số trong 7 chữ số $\{2,3,5,6,7,8,9\}$ để xếp vào 3 vị trí còn lại, có A_7^3 cách.

Theo quy tắc nhân có: $C_8^3.C_5^2.A_7^3 = 117600$ số thỏa yêu cầu đề.

b). Gọi số cần tìm có dạng: $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}}$.

Bước 1: Chọn 1 vị trí trong 10 vị trí để xếp chữ số 1, có 10 cách chọn.

Bước 2: Chọn 3 vị trí trong 9 vị trí còn lại để xếp 3 chữ số 2, có C_9^3 cách.

Bước 3: Chọn 2 vị trí trong 6 vị trí còn lại để xếp hai chữ số 3, có C_6^2 cách.

Bước 4: Chọn 4 chữ số trong 6 chữ số $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ để xếp vào 4 vị trí còn lại, có A_6^4 cách.

Theo quy tắc nhân có: $10.C_9^3.C_6^2.A_6^4 = 4536000$ số thỏa yêu cầu đề.

Ví dụ 14: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có bao nhiêu số gồm 6 chữ số phân biệt mà :

a. Các chữ số chẵn đứng cạnh nhau.

b. Các chữ số chẵn đứng cạnh nhau và các chữ số lẻ đứng cạnh nhau.

Lời giải

a. Đặt $a = 024$; $b = 042$; $c = 204$; $d = 240$; $e = 420$; $f = 402$.

Từ $\{a; 1; 3; 5\}$ ta lập được $3.3! = 18$ số ;

Từ $\{b; 1; 3; 5\}$ ta lập được $3.3! = 18$ số ;

Từ $\{c; 1; 3; 5\}$ ta lập được $4! = 24$ số ;

Từ $\{d; 1; 3; 5\}$ ta lập được $4! = 24$ số ;

Từ $\{e; 1; 3; 5\}$ ta lập được $4! = 24$ số ;

Từ $\{f; 1; 3; 5\}$ ta lập được $4! = 24$ số .

Vậy ta có tất cả là $2.18 + 4.4! = 132$ số có 6 chữ số phân biệt mà các chữ số chẵn ở cạnh nhau.

b. Gọi số cần lập là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$. Ta có các trường hợp sau :

TH1 : $a_1; a_2; a_3$ là số chẵn, ba số sau là các số lẻ :

* a_1 có 2 cách chọn ;

* $\overline{a_2a_3}$ có 2! cách chọn ;

* $\overline{a_4a_5a_6}$ có 3! cách chọn.

$\Rightarrow$ ta được $2.2!.3! = 24$ số.

TH2 : $a_1; a_2; a_3$ là số lẻ, ba số sau là các số chẵn :

* $\overline{a_1a_2a_3}$ có 3! cách chọn ;

* $\overline{a_4a_5a_6}$ có 3! cách chọn.

$\Rightarrow$ ta được $3!.3! = 36$ số.

Vậy ta có tất cả $24 + 36 = 60$ số thỏa bài toán.

§) TÌM TẤT CẢ CÁC SỐ TỰ NHIÊN THỎA ĐIỀU KIỆN BÀI TOÁN VÀ TÍNH TỔNG TẤT CẢ CÁC SỐ TỰ NHIÊN VỪA TÌM ĐƯỢC

Ví dụ 1: Tính tổng tất cả các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau đôi một được lập từ 6 chữ số 1, 3, 4, 5, 7, 8.

Lời giải

Gọi X là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau đôi một lập từ 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8. Xét $x = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5} \in X$.

Nếu chọn $a_5 = 1$ thì $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$ ứng với một chỉnh hợp chập 4 của 5 phần tử 3, 4, 5, 7, 8 $\Rightarrow$ có A_5^4 số có chữ số hàng đơn vị là 1.

Tương tự có A_5^4 số có chữ số hàng đơn vị là 3, có A_5^4 số có chữ số hàng đơn vị là 4, ...

Suy ra tổng tất cả chữ số hàng đơn vị của các phần tử $x \in X$ là: $(1+3+4+5+7+8).A_5^4 = 3360$

Lập luận tương tự, tổng tất cả chữ số hàng chục của các phần tử $x \in X$ là: $3360.10, \dots$

Vậy tổng tất cả các phần tử của X là :

$$S = 3360 + 3360.10 + 3360.100 + 3360.1000 + 3360.10000 = 3360.11111 = 3732960.$$

Ví dụ 2: Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số phân biệt, các chữ số đều lớn hơn 4. Tính tổng các số tự nhiên đó.

Lời giải

Mỗi số thỏa bài toán là một hoán vị của 5 chữ số 5, 6, 7, 8, 9 $\Rightarrow$ có $5! = 120$ số thỏa bài toán.

Gọi E là tập gồm 120 số lập được. Ta có: $x = \overline{abcde} \in E$ thì $y = \overline{a'b'c'd'e'}$ cũng thuộc E , trong đó $a' = 14 - a; b' = 14 - b; \dots; e' = 14 - e$. Vậy trong E có tất cả 60 cặp $(x; y)$ thỏa :

$$x + y = 155554.$$

$\Rightarrow$ tổng các số thuộc E là $S = 155554.60 = 9333240$.

Ví dụ 3: Tính tổng của tất cả các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau đôi một được thành lập từ các số 1, 3, 4, 5, 7, 8.

Lời giải

Từ 6 chữ số trên ta lập được $A_6^5 = 720$ số có 5 chữ số khác nhau. Ta có :

- Số có dạng $\overline{abcd1}$: có A_5^4 số ;
- Số có dạng $\overline{abcd3}$: có A_5^4 số ;
- Số có dạng $\overline{abcd4}$: có A_5^4 số ;
- Số có dạng $\overline{abcd5}$: có A_5^4 số ;
- Số có dạng $\overline{abcd7}$: có A_5^4 số ;
- Số có dạng $\overline{abcd8}$: có A_5^4 số ;

$\Rightarrow$ tổng các chữ số ở hàng đơn vị của 720 số trên là : $(1+3+4+5+7+8).A_5^4 = 3360$

Tương tự ta cũng có :

- Tổng các chữ số hàng chục của 720 số trên là : $(1+3+4+5+7+8).A_5^4 = 3360$
- Tổng các chữ số hàng trăm của 720 số trên là: $(1+3+4+5+7+8).A_5^4 = 3360$
- Tổng các chữ số hàng ngàn của 720 số trên là: $(1+3+4+5+7+8).A_5^4 = 3360$
- Tổng các chữ số hàng chục ngàn của 720 số trên là: $(1+3+4+5+7+8).A_5^4 = 3360$

Vậy tổng của 720 số lập được là $S = 3360(1+10+10^2+10^3+10^4) = 37332960$

Ví dụ 4: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số phân biệt ? Tính tổng các số này.

Lời giải

Số các số có 5 chữ số phân biệt lập được là $5! = 120$ số. Gọi E là tập hợp 120 số trên.

Ta có : nếu $x = \overline{abcde} \in E$ thì $y = \overline{(6-a)(6-b)(6-c)(6-d)(6-e)} \in E$. Do đó trong E có 60 cặp $(x; y)$ thỏa $x + y = 66666$. Vậy tổng 120 số trong E là $66666.60 = 3999960$.

Tính tổng của các số có 4 chữ số phân biệt.

Lời giải

Gọi A là tập các số lập được. Trong đó :

- Có A_9^3 số có dạng $\overline{abc0}$, $8A_8^2$ số có dạng $\overline{abc1}$, ... , $8A_8^2$ số có dạng $\overline{abc9} \Rightarrow$ tổng các chữ số ở hàng đơn vị trong các số thuộc A là

$$S_0 = 8A_8^2(1+2+\dots+8+9) = 20160 \text{ (đơn vị)}$$

- Có A_9^3 số có dạng $\overline{ab0d}$, $8A_8^2$ số có dạng $\overline{ab1d}$, ... , $8A_8^2$ số có dạng $\overline{ab9d} \Rightarrow$ tổng các chữ số ở hàng chục trong các số thuộc A là

$$S_1 = 8A_8^2(1+2+\dots+8+9) = 20160 \text{ (chục)}$$

- Có A_9^3 số có dạng $\overline{a0cd}$, $8A_8^2$ số có dạng $\overline{a1cd}$, ... , $8A_8^2$ số có dạng $\overline{a9cd} \Rightarrow$ tổng các chữ số ở hàng trăm trong các số thuộc A là

$$S_2 = 8A_8^2(1+2+\dots+8+9) = 20160 \text{ (trăm)}$$

- Có A_9^3 số có dạng $\overline{1bcd}$, ... , A_9^3 số có dạng $\overline{9bcd} \Rightarrow$ tổng các chữ số ở hàng ngàn trong các số thuộc A là

$$S_3 = A_9^3(1+2+\dots+8+9) = 22680 \text{ (ngàn)}$$

Vậy tổng cần tìm là $22680.10^3 + 20160.(10^2 + 10 + 1) = 24917760$.

Ví dụ 5: Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm hai chữ số khác nhau? Tính tổng của tất cả các số đó.

Lời giải

• Gọi $\overline{ab}$ là số tự nhiên phải tìm $\Rightarrow a \neq 0$

Do $\overline{ab}$ chẵn nên $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$

Có 2 trường hợp:

* Nếu $b = 0$ thì $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \Rightarrow$ có 9 cách chọn a.

$\Rightarrow$ có 9 số $\overline{a0}$

* Nếu $b \neq 0$ thì $b \in \{2, 4, 6, 8\} \Rightarrow$ có 4 cách chọn b. Khi đó có 8 cách chọn a.

$\Rightarrow$ có $4.8 = 32$ số $\overline{ab}$

Vậy tất cả có: $9 + 32 = 41$ số cần tìm.

• Đặt S là tổng của 41 số đó.

$$S = (10 + 12 + 14 + \dots + 96 + 98) - (22 + 44 + 66 + 88)$$

$$= 45 \cdot \frac{10+98}{2} - 10 \cdot 22 = 45 \cdot 54 - 220 = 2210.$$

g) TÌM SỐ ƯỚC SỐ CỦA MỘT SỐ TỰ NHIÊN

Công thức tổng quát tìm ước số dương của một số X

Phân tích X về thừa số nguyên tố giả sử: $X = A^a B^b C^c D^d E^e$ (A, B, C, D, E là các số nguyên tố). **Tổng tất cả các ước số của X là** $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)(e+1)$

Ví dụ 1: a. Tìm số các ước số dương của số $A = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^7 \cdot 7^6$.

b. Tìm số các ước số dương của số 490000.

Lời giải

a. Mỗi ước số dương của A có dạng $U = 2^m \cdot 3^n \cdot 5^p \cdot 7^q$ trong đó $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$,

$0 \leq m \leq 3, 0 \leq n \leq 4, 0 \leq p \leq 7, 0 \leq q \leq 6$. Do đó : m có 4 cách chọn, n có 5 cách chọn, p có 8 cách chọn, q có 7 cách chọn. Suy ra có $4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7 = 1120$ ước số dương của A.

b. Vì $B = 490000 = 7^2 \cdot 10^4 = 2^4 \cdot 5^4 \cdot 7^2$. Vì các ước số dương của B có dạng $U = 2^m \cdot 5^n \cdot 7^p$ trong đó $m, n, p \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq 4, 0 \leq n \leq 4, 0 \leq p \leq 2$. Tương tự câu a, ta suy ra có $5 \cdot 5 \cdot 3 = 75$ ước số dương của B.

Ví dụ 2: Số 35280 có bao nhiêu ước số?

Lời giải

Ta có: $35280 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 5^1$

Do đó các ước số của 35280 phải có dạng $2^x \cdot 3^y \cdot 7^z \cdot 5^t$

Nên:

5 cách chọn số thứ nhất 2^x (vì $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$)

3 cách chọn số thứ hai 3^y (vì $y \in \{0, 1, 2\}$)

3 cách chọn số thứ ba 7^z (vì $z \in \{0, 1, 2\}$)

2 cách chọn số thứ tư 5^t (vì $t \in \{0, 1\}$)

Vậy ta có: $5 \times 3 \times 3 \times 2 = 90$ ước số của 35280.

Ví dụ 3: Số $A = 1078000$ có bao nhiêu ước số?

Lời giải

Ta có: $1078000 = 11 \cdot 7^2 \cdot 2^4 \cdot 5^3$

Mỗi ước số dương của A có dạng $U = 11^x \cdot 7^y \cdot 2^z \cdot 5^t$ trong đó $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$ và

$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 4, 0 \leq t \leq 3$. Do đó :

x có 2 cách chọn, y có 3 cách chọn, z có 5 cách chọn, t có 4 cách chọn. Suy ra có $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ ước số dương của A .

Có bao nhiêu số tự nhiên X có 5 chữ số khác nhau và nhất thiết phải có chữ số 1 và X chia hết cho 2.

Lời giải

Gọi số cần tìm $\overline{abcde}, (a \neq 0)$

Trường hợp 1: $e = 0$

Bước 1: Chọn 1 trong 4 vị trí $\overline{abcd}$ để xếp chữ số 1, có 4 cách.

Bước 2: Chọn 3 chữ số trong các chữ số $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ để xếp vào 3 vị trí còn lại, có A_8^3 cách.

Vậy có $4 \cdot A_8^3$ số.

Trường hợp 2: $e \in \{2, 4, 6, 8\}$ vậy e có 4 cách chọn.

• Xét $a = 1$: Chọn 3 chữ số trong 8 chữ số còn lại (bỏ 1 số e chọn và chữ số 1), để xếp vào 3 vị trí b, c, d có A_8^3 . Vậy có $4 \cdot A_8^3$ số.

• Xét $a \neq 1$: Vậy a có 7 cách chọn (bỏ chữ số 1, 0 và 1 số e đã chọn). Chọn 1 trong 3 vị trí b, c, d để xếp chữ số 1, có 3 cách chọn. sau đó chọn 2 chữ số trong 7 chữ số còn lại (bỏ 1 chữ số a đã chọn, và chữ số 1 và một chữ số e đã chọn) để xếp vào 2 vị trí còn lại, có A_7^2 cách.

Vậy có $4 \cdot 7 \cdot 3 \cdot A_7^2$ cách.

Kết luận có $4 \cdot A_8^4 + 4 \cdot A_8^3 + 4 \cdot 7 \cdot 3 \cdot A_7^2 = 11592$ số cần tìm.

Ví dụ 4: Cho tập hợp $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

a). Tìm số tập hợp con của A chứa 0 và không chứa 1.

b). Tìm các số tự nhiên chẵn có chứa 4 chữ số đôi một khác nhau lấy từ A .

c). Tìm các số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau lấy từ A và chia hết cho 3.

Lời giải

a). Gọi $B = A \setminus \{0, 1\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Số tập hợp con của B không có phần tử nào là: $C_5^0 = 1$; Số tập hợp con của B có 1 phần tử là:

$$C_5^1 = 5$$

Số tập hợp con của B có 2 phần tử là: $C_5^2 = 10$; Số tập hợp con của B có 3 phần tử là: $C_5^3 = 10$

Số tập hợp con của B có 4 phần tử là: $C_5^4 = 5$; Số tập hợp con của B có 5 phần tử là: $C_5^5 = 1$

Mỗi tập hợp con của B ta thêm phần tử 0 thì được tập hợp con của A chứa 0 và không chứa 1.

Vậy: Số tập hợp con của A chứa 0 và không chứa 1 là: $1+5+10+10+5+1=32$.

b). Gọi số tự nhiên chẵn có 4 chữ số lấy từ A là: $x = \overline{abcd}$ ($a, b, c, d \in A$). Vì x chẵn nên

$$d \in \{0; 2; 4; 6\}$$

. Trường hợp I: $d=0$: có 1 cách chọn;

Có A_6^3 cách chọn $a, b, c, d \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ theo thứ tự $\Rightarrow$ số các số chẵn trong TH này là:

$$1.A_6^3 = 120 \text{ số}$$

. Trường hợp II: $d \neq 0$: $d \in \{2; 4; 6\}$ có 3 cách chọn. Có 5 cách chọn a (vì $a \neq 0$ và $a \neq d$)

Có A_5^2 cách chọn $b, c \in A \setminus \{a; d\}$ theo thứ tự $\Rightarrow$ số các số chẵn trong TH này là: $3.5.A_5^2 = 300$

Vậy: số các số chẵn có 4 chữ số khác nhau lấy từ A là: $120+300=420$ số.

c). Gọi số có 3 chữ số lấy từ A là: $x = \overline{abc}$ ($a, b, c \in A$). Số có 3 chữ số chia hết cho 3 có tổng 3 chữ số chia hết cho 3. Các tập con 3 phần tử của A có tổng chia hết cho 3 là:

$$\{0; 1; 2\}; \{0; 1; 5\}; \{0; 2; 4\}; \{0; 3; 6\}; \{0; 4; 5\};$$

$$\{1; 2; 3\}; \{1; 2; 6\}; \{1; 3; 5\}; \{1; 5; 6\}; \{2; 3; 4\}; \{2; 4; 6\}; \{3; 4; 5\}; \{4; 5; 6\}$$

. Xét các tập có chữ số 0: có 5 tập hợp. Số cách chọn a là 2 (vì $a \neq 0$). Số cách chọn b, c là $2!=2$ (còn 2 chữ số $\neq 0$)

$$\Rightarrow \text{số các số có 3 chữ số lấy từ mỗi tập 3 chữ số có chữ số 0 là } 2 \times 2 = 4$$

$$\Rightarrow \text{số các số chia hết cho 3 trong TH này là: } 5 \times 4 = 20$$

. Xét các tập không có chữ số 0: có 8 tập hợp. Số các số có 3 chữ số lấy từ tập 3 chữ số không có

$$\text{chữ số 0 là } 3!=6$$

$$\Rightarrow \text{số các số chia hết cho 3 trong TH này là: } 8 \times 6 = 48$$

Vậy: số các số có 3 chữ số khác nhau lấy từ A và chia hết cho 3 là: $20+48=68$

Ví dụ 5: Từ các chữ số 0;1;2;3;4;5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên x, biết rằng x khác 0; x chia hết cho 6 và $x < 3.10^7$ (một số tự nhiên không bắt đầu bằng chữ số 0).

Lời giải

Ta có $x < 3.10^7 = 30.000.000$ nên x có tối đa 8 chữ số. Để dễ đếm, nếu x có chữ số nhỏ hơn 8, ta thêm các chữ số 0 vào bên trái của x cho đủ 8 chữ số, như thế ta xem x là 1 số có 8 chữ số lấy từ 0;1;2;3;4;5.

X chia hết cho 6 nên x là số chẵn và chia hết cho 3.

$x = \overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_7 a_8}$. Trước hết ta đếm từ a_1 đến a_6 và a_8 là chữ số chẵn; chừa lại a_7 sẽ đếm sau

Có 3 cách chọn a_1 ($a_1 < 3$); có 3 cách chọn a_8 ($a_8 \in \{0; 2; 4\}$); có 6 cách chọn $a_2 \dots$; có 6 cách chọn a_6

Xét tổng: $a_1 + a_2 + \dots + a_6 + a_8$, ta có 3 trường hợp:

Trường hợp 1: $a_1 + a_2 + \dots + a_6 + a_8$ chia hết cho 3: chọn a_7 là 0 hay 3: có 2 cách chọn;

Trường hợp 2: $a_1 + a_2 + \dots + a_6 + a_8$ chia hết cho 3 dư 1: chọn a_7 là 2 hay 5: có 2 cách chọn;

Trường hợp 3: $a_1 + a_2 + \dots + a_6 + a_8$ chia hết cho 3 dư 2: chọn a_7 là 1 hay 4: có 2 cách chọn;

Như vậy a_7 luôn luôn có 2 cách chọn.

Vậy: số các số x chia hết cho 6 và $x < 3.10^7$ là: $3.3.6^5.2 = 139968$ số

Mà: $x \neq 0$ nên số các số x cần tìm là: $139968 - 1 = 139967$ số.

BÀI TẬP TỰ LUẬN HOÁN VỊ-CHỈNH HỢP-TỔ HỢP

Bài 1. Cần xếp 3 nam và 2 nữ vào 1 hàng ghế có 7 chỗ ngồi sao cho 3 nam ngồi kề nhau và 2 nữ ngồi kề nhau. Hỏi có bao nhiêu cách.

Bài 2. Xét đa giác đều có n cạnh, biết số đường chéo gấp đôi số cạnh. Tính số cạnh của đa giác đều đó.

Bài 3. Tính số các số tự nhiên đôi một khác nhau có 6 chữ số tạo thành từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 sao cho 2 chữ số 3 và 4 đứng cạnh nhau.

Bài 4. Tính số các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau được thành lập từ 0, 1, 2, 3, 4, 5 sao cho trong mỗi số đó đều có mặt ít nhất chữ số 1 hoặc 2.

Bài 5. Hai nhóm người cần mua nền nhà, nhóm thứ nhất có 2 người và họ muốn mua 2 nền kề nhau, nhóm thứ hai có 3 người và họ muốn mua 3 nền kề nhau. Họ tìm được một lô đất chia thành 7 nền đang rao bán (các nền như nhau và chưa có người mua). Tính số cách chọn nền của mỗi người thỏa yêu cầu trên.

Bài 6. Từ 4 chữ số 0, 1, 2, 3 lập thành các số tự nhiên có 3 chữ số phân biệt. Tính tổng các số được thành lập.

Bài 7. Tính số hình chữ nhật được tạo thành từ 4 trong 20 đỉnh của đa giác đều có 20 cạnh nội tiếp đường tròn tâm O.

Bài 8. Cho đa giác đều có $2n$ cạnh nội tiếp đường tròn tâm O. Biết số tam giác có các đỉnh là 3 trong $2n$ đỉnh của đa giác nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong $2n$ đỉnh của đa giác. Tính số hình chữ nhật.

Bài 9. Đội tuyển học sinh giỏi của một trường gồm 18 em, trong đó có 7 em khối 12, 6 em khối 11 và 5 em khối 10. Tính số cách chọn 6 em trong đội đi dự trại hè sao cho mỗi khối có ít nhất 1 em được chọn.

Bài 10. Cho tập hợp X gồm 10 phần tử khác nhau. Tính số tập hợp con khác rỗng chứa một số chẵn các phần tử của X .

Bài 11. Một hộp đựng 15 viên bi khác nhau gồm 4 bi đỏ, 5 bi trắng và 6 bi vàng. Tính số cách chọn 4 viên bi từ hộp đó sao cho không có đủ 3 màu.

Bài 12. Giải vô địch bóng đá Quốc gia có 14 đội tham gia thi đấu vòng tròn 1 lượt, biết rằng trong 1 trận đấu: đội thắng được 3 điểm, hòa 1 điểm, thua 0 điểm và có 23 trận hòa. Tính số điểm trung bình của 1 trận trong toàn giải.

Bài 13. Tính số các số tự nhiên gồm 7 chữ số được chọn từ 1, 2, 3, 4, 5 sao cho chữ số 2 có mặt đúng 2 lần, chữ số 3 có mặt đúng 3 lần và các chữ số còn lại có mặt không quá 1 lần.

Bài 14. Tính số các số tự nhiên gồm 5 chữ số phân biệt và một trong 3 chữ số đầu tiên là 1 được thành lập từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Bài 15. Từ một nhóm 30 học sinh gồm 15 học sinh khối A, 10 học sinh khối B và 5 học sinh khối C chọn ra 15 học sinh sao cho có ít nhất 5 học sinh khối A và có đúng 2 học sinh khối C. Tính số cách chọn.

Bài 16. Từ một nhóm 12 học sinh gồm 4 học sinh khối A, 4 học sinh khối B và 4 học sinh khối C chọn ra 5 học sinh sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh. Tính số cách chọn.

Bài 17. Tính số tập hợp con của $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ chứa 1 mà không chứa 0.

Bài 18. Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Tính số cách chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên.

Bài 19. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập thành số tự nhiên chẵn có 5 chữ số phân biệt nhỏ hơn 25000. Tính số các số lập được.

Bài 20. Tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 4$). Biết rằng số tập hợp con chứa 4 phần tử của A bằng 20 lần số tập hợp con chứa 2 phần tử của A, tìm số $k \in \{1; 2; \dots; n\}$ sao cho số tập hợp con chứa k phần tử của A là lớn nhất.

C. HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Xét 3 loại ghế gồm 1 ghế có 3 chỗ, 1 ghế có 2 chỗ và 2 ghế có 1 chỗ ngồi.

+ Bước 1: do 2 ghế có 1 chỗ không phân biệt nên chọn 2 trong 4 vị trí để sắp ghế 2 và 3 chỗ ngồi có $A_4^2 = 12$ cách.

+ Bước 2: sắp 3 nam vào ghế 3 chỗ có $3! = 6$ cách.

+ Bước 3: sắp 2 nữ vào ghế 2 chỗ có $2! = 2$ cách.

Vậy có $12.6.2 = 144$ cách sắp.

Bài 2. Chọn 2 trong n đỉnh của đa giác ta lập được 1 cạnh hoặc đường chéo.

Số cạnh và đường chéo là C_n^2 . Suy ra số đường chéo là $C_n^2 - n$.

Ta có: $C_n^2 - n = 2n \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} - n = 2n$

$$\Leftrightarrow n(n-1) = 6n \Leftrightarrow n = 7.$$

Vậy có 7 cạnh.

Bài 3. Xét số có 5 chữ số gồm 0, 1, 2, 5 và chữ số “kép” là (3, 4).

+ Loại 1: chữ số hàng trăm ngàn có thể là 0.

- Bước 1: sắp 5 chữ số vào 5 vị trí có $5! = 120$ cách.

- Bước 2: với mỗi cách sắp chữ số kép có 2 hoán vị chữ số 3 và 4.

Suy ra có $120.2 = 240$ số.

+ Loại 2: chữ số hàng trăm ngàn là 0.

- Bước 1: sắp 4 chữ số vào 4 vị trí còn lại có $4! = 24$ cách.

- Bước 2: với mỗi cách sắp chữ số kép có 2 hoán vị chữ số 3 và 4.

Suy ra có $24.2 = 48$ số.

Vậy có $240 - 48 = 192$ số.

Bài 4.

+ Loại 1: chữ số a_1 có thể là 0.

Sắp 4 trong 6 chữ số vào 4 vị trí có $A_6^4 = 360$ cách. Sắp 4 chữ số 0, 3, 4, 5 vào 4 vị trí có $4! = 24$ cách. Suy ra có $360 - 24 = 336$ số.

+ Loại 2: chữ số a_1 là 0 (vị trí a_1 đã có chữ số 0).

Sắp 3 trong 5 chữ số vào 3 vị trí có $A_5^3 = 60$ cách. Sắp 3 chữ số 3, 4, 5 vào 3 vị trí có $3! = 6$ cách. Suy ra có $60 - 6 = 54$ số.

Vậy có $336 - 54 = 282$ số.

Cách khác:

+ Loại 1: Số tự nhiên có 4 chữ số tùy ý.

- Bước 1: Chọn 1 trong 5 chữ số khác 0 sắp vào a_1 có 5 cách.

- Bước 2: Chọn 3 trong 5 chữ số khác a_1 sắp vào 3 vị trí còn lại có $A_5^3 = 60$ cách.

Suy ra có $5.60 = 300$ số.

+ Loại 2: Số tự nhiên có 4 chữ số gồm 0, 3, 4, 5 (không có 1 và 2).

- Bước 1: Chọn 1 trong 3 chữ số khác 0 sắp vào a_1 có 3 cách.

- Bước 2: Sắp 3 chữ số còn lại vào 3 vị trí $3! = 6$ cách.

Suy ra có $3.6 = 18$ số.

Vậy có $300 - 18 = 282$ số.

Bài 5. Xem lô đất có 4 vị trí gồm 2 vị trí 1 nền, 1 vị trí 2 nền và 1 vị trí 3 nền.

+ Bước 1: nhóm thứ nhất chọn 1 vị trí cho 2 nền có 4 cách và mỗi cách có $2! = 2$ cách chọn nền cho mỗi người. Suy ra có $4.2 = 8$ cách chọn nền.

+ Bước 2: nhóm thứ hai chọn 1 trong 3 vị trí còn lại cho 3 nền có 3 cách và mỗi cách có $3! = 6$ cách chọn nền cho mỗi người. Suy ra có $3.6 = 18$ cách chọn nền.

Vậy có $8.18 = 144$ cách chọn nền cho mỗi người.

Bài 6.

+ Xét số A có 3 chữ số phân biệt và chữ số hàng trăm có thể là 0.

Từ $A_4^3 = 24$ số A ta lập được 12 cặp số có tổng là 333. Ví dụ $012 + 321 = 333$.

Suy ra tổng các số A là $12.333 = 3996$.

+ Xét số B có 3 chữ số phân biệt và chữ số hàng trăm là 0.

Từ $A_3^2 = 6$ số B ta lập được 3 cặp số có tổng là 44. Ví dụ $032 + 012 = 44$.

Suy ra tổng các số B là $3.44 = 132$.

Vậy tổng các số thỏa yêu cầu là $3996 - 132 = 3864$.

Cách khác:

+ Xét số A có 3 chữ số phân biệt và chữ số hàng trăm có thể là 0.

- Số các số A là $A_4^3 = 24$ số. Số lần các chữ số có mặt ở hàng trăm, hàng chục và đơn vị là như nhau và bằng $24 : 4 = 6$ lần.

- Tổng các chữ số hàng trăm (hàng chục, đơn vị) của 24 số là:

$$6.(0 + 1 + 2 + 3) = 36.$$

Suy ra tổng các số A là $36.(100 + 10 + 1) = 3996$.

+ Xét số B có 3 chữ số phân biệt và chữ số hàng trăm là 0.

- Số các số B là $A_3^2 = 6$ số. Số lần các chữ số 1, 2, 3 có mặt ở hàng chục và đơn vị là như nhau và bằng $6 : 3 = 2$ lần.

- Tổng các chữ số hàng chục (đơn vị) của 6 số là $2.(1 + 2 + 3) = 12$.

Suy ra tổng các số B là $12.(10 + 1) = 132$.

Vậy tổng các số thỏa yêu cầu là $3996 - 132 = 3864$.

Bài 7. Nhận thấy các hình chữ nhật được tạo thành có 2 đường chéo là đường kính của đường tròn. Vẽ đường thẳng d qua tâm O và không qua đỉnh của đa giác đều thì d chia đa giác thành 2 phần, mỗi phần có 10 đỉnh. Suy ra số đường chéo của đa giác đi qua tâm O là 10. Chọn 2 trong 10 đường chéo thì lập được 1 hình chữ nhật.

Vậy có $C_{10}^2 = 45$ hình chữ nhật.

Bài 8. + Lý luận tương tự câu 65 ta có C_n^2 hình chữ nhật.

+ Số tam giác tạo thành từ 3 trong $2n$ đỉnh của đa giác là C_{2n}^3 .

$$\begin{aligned} + \text{Từ giả thiết ta có: } C_{2n}^3 &= 20C_n^2 \Leftrightarrow \frac{(2n)!}{3!(2n-3)!} = 20 \frac{n!}{2!(n-2)!} \\ &\Leftrightarrow \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} = 20 \frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow n = 8. \end{aligned}$$

Vậy có $C_8^2 = 28$ hình chữ nhật.

Bài 9.

Cách giải sai:

+ Chọn tùy ý 6 em trong đội có $C_{18}^6 = 18564$ cách.

+ Chọn 6 em trong đội thuộc khối 12 hoặc khối 11 có $C_{13}^6 = 1716$ cách.

+ Chọn 6 em trong đội thuộc khối 12 hoặc khối 10 có $C_{12}^6 = 924$ cách.

+ Chọn 6 em trong đội thuộc khối 11 hoặc khối 10 có $C_{11}^6 = 462$ cách.

Vậy có $18564 - 1716 - 924 - 462 = 15462$ cách chọn!

Sai ở chỗ lớp 12 và lớp 11 ta đã tính lặp lại.

Cách giải đúng:

- + Chọn tùy ý 6 em trong đội có $C_{18}^6 = 18564$ cách.
- + Chọn 6 em trong đội thuộc khối 12 hoặc khối 11 có $C_{13}^6 = 1716$ cách.
- + Chọn 6 em trong đội thuộc khối 12 và khối 10 có $C_{12}^6 - C_7^6 = 917$ cách.
- + Chọn 6 em trong đội thuộc khối 11 và khối 10 có $C_{11}^6 - C_6^6 = 461$ cách.

Vậy có $18564 - 1716 - 917 - 461 = 15454$ cách chọn.

Bài 10.

- + Số tập hợp con chứa 2 phần tử của X là $C_{10}^2 = 45$.
- + Số tập hợp con chứa 4 phần tử của X là $C_{10}^4 = 210$.
- + Số tập hợp con chứa 6 phần tử của X là $C_{10}^6 = 210$.
- + Số tập hợp con chứa 8 phần tử của X là $C_{10}^8 = 45$.
- + Số tập hợp con chứa 10 phần tử của X là 1.

Vậy có $45 + 210 + 210 + 45 + 1 = 511$ tập hợp.

Bài 11.

- + Trường hợp 1: chọn 4 bi đỏ hoặc trắng có $C_9^4 = 126$ cách.
- + Trường hợp 2: chọn 4 bi đỏ và vàng hoặc 4 bi vàng có $C_{10}^4 - C_4^4 = 209$ cách.
- + Trường hợp 3: chọn 4 bi trắng và vàng có $C_{11}^4 - (C_5^4 + C_6^4) = 310$ cách.

Vậy có $126 + 209 + 310 = 645$ cách.

Cách khác:

- + Loại 1: chọn tùy ý 4 trong 15 viên bi có $C_{15}^4 = 1365$ cách.
- + Loại 2: chọn đủ cả 3 màu có 720 cách gồm các trường hợp sau:
 - Chọn 2 bi đỏ, 1 bi trắng và 1 bi vàng có 180 cách.
 - Chọn 1 bi đỏ, 2 bi trắng và 1 bi vàng có 240 cách.
 - Chọn 1 bi đỏ, 1 bi trắng và 2 bi vàng có 300 cách.

Vậy có $1365 - 720 = 645$ cách.

Bài 12. + Do thi đấu vòng tròn 1 lượt nên 2 đội bất kỳ chỉ đấu với nhau đúng 1 trận. Số trận đấu của giải là $C_{14}^2 = 91$.

- + Tổng số điểm của 2 đội trong 1 trận hòa là 2 nên tổng số điểm của 23 trận hòa là $2.23 = 46$.
- + Tổng số điểm của 2 đội trong 1 trận không hòa là 3 nên tổng số điểm của 68 trận không hòa là $3.68 = 204$.

Vậy số điểm trung bình của 1 trận là $\frac{46 + 204}{91} = \frac{250}{91}$ điểm.

Bài 13. Xem số có 7 chữ số như 7 vị trí thẳng hàng.

+ Bước 1: chọn 2 trong 7 vị trí để sắp 2 chữ số 2 (không hoán vị) có $C_7^2 = 21$ cách.

+ Bước 2: chọn 3 trong 5 vị trí còn lại để sắp 3 chữ số 3 (không hoán vị) có $C_5^3 = 10$ cách.

+ Bước 3: chọn 2 trong 3 chữ số 1, 4, 5 để sắp vào 2 vị trí còn lại (có hoán vị) có $A_3^2 = 6$ cách.

Vậy có $21 \cdot 10 \cdot 6 = 1260$ số.

Bài 14.

+ Loại 1: chữ số a_1 có thể là 0.

- Bước 1: chọn 1 trong 3 vị trí đầu để sắp chữ số 1 có 3 cách.

- Bước 2: chọn 4 trong 7 chữ số (trừ chữ số 1) để sắp vào các vị trí còn lại có $A_7^4 = 840$ cách. Suy ra có $3 \cdot 840 = 2520$ số.

+ Loại 2: chữ số a_1 là 0.

- Bước 1: chọn 1 trong 2 vị trí thứ 2 và 3 để sắp chữ số 1 có 2 cách.

- Bước 2: chọn 3 trong 6 chữ số (trừ 0 và 1) để sắp vào các vị trí còn lại có $A_6^3 = 120$ cách. Suy ra có $2 \cdot 120 = 240$ số.

Vậy có $2520 - 240 = 2280$ số.

Bài 15.

+ Loại 1: Chọn 2 học sinh khối C, 13 học sinh khối B hoặc khối A có $C_5^2 C_{25}^{13}$ cách.

+ Loại 2: Chọn 2 học sinh khối C, 13 học sinh khối B và khối A không thỏa yêu cầu.

- Trường hợp 1: Chọn 2 học sinh khối C, 10 học sinh khối B và 3 học sinh khối A có $C_5^2 C_{10}^{10} C_{15}^3$ cách.

- Trường hợp 2: Chọn 2 học sinh khối C, 9 học sinh khối B và 4 học sinh khối A có $C_5^2 C_{10}^9 C_{15}^4$ cách.

Vậy có $C_5^2 (C_{25}^{13} - C_{10}^{10} C_{15}^3 - C_{10}^9 C_{15}^4) = 51861950$ cách.

Bài 16.

+ Trường hợp 1: 1 khối có 3 học sinh và 2 khối còn lại mỗi khối có 1 học sinh.

- Bước 1: chọn 1 khối có 3 học sinh có 3 cách.

- Bước 2: trong khối đã chọn ta chọn 3 học sinh có $C_4^3 = 4$ cách.

- Bước 3: 2 khối còn lại mỗi khối có 4 cách chọn.

Suy ra có $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 192$ cách.

+ Trường hợp 2: 2 khối có 2 học sinh và khối còn lại có 1 học sinh.

- Bước 1: chọn 2 khối có 2 học sinh có $C_3^2 = 3$ cách.

- Bước 2: trong 2 khối đã chọn ta chọn 2 học sinh có $C_4^2 = 6$ cách.

- Bước 3: khối còn lại có 4 cách chọn.

Suy ra có $3.6.6.4 = 432$ cách.

Vậy có $192 + 432 = 624$ cách.

Cách khác:

+ Chọn 5 học sinh tùy ý có $C_{12}^5 = 792$ cách.

+ Chọn 5 học sinh khối A và B (tương tự khối A và C, B và C) có $C_8^5 = 56$ cách.

Vậy có $792 - 3.56 = 624$ cách.

Bài 17.

+ Số tập hợp con không chứa phần tử nào của $X \setminus \{0; 1\}$ là C_5^0 .

+ Số tập hợp con chứa 1 phần tử của $X \setminus \{0; 1\}$ là C_5^1 .

+ Số tập hợp con chứa 2 phần tử của $X \setminus \{0; 1\}$ là C_5^2 .

+ Số tập hợp con chứa 3 phần tử của $X \setminus \{0; 1\}$ là C_5^3 .

+ Số tập hợp con chứa 4 phần tử của $X \setminus \{0; 1\}$ là C_5^4 .

+ Số tập hợp con chứa 5 phần tử của $X \setminus \{0; 1\}$ là C_5^5 .

Suy ra số tập hợp con của $X \setminus \{0; 1\}$ là $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 32$. Ta hợp các tập hợp con này với $\{1\}$ thì được 32 tập hợp thỏa bài toán.

Bài 18.

Cách giải sai:

+ Trường hợp 1: chọn 4 học sinh lớp A hoặc lớp B có C_9^4 cách.

+ Trường hợp 2: chọn 4 học sinh lớp A hoặc lớp C có C_8^4 cách.

+ Trường hợp 3: chọn 4 học sinh lớp B hoặc lớp C có C_7^4 cách.

Vậy có $C_9^4 + C_8^4 + C_7^4 = 231$ cách!

Sai do ta đã tính lặp lại trường hợp chỉ chọn 4 học sinh lớp A và trường hợp chỉ chọn 4 học sinh lớp B.

Cách giải sai khác:

+ Loại 1: chọn tùy ý 4 trong 12 học sinh có $C_{12}^4 = 495$ cách.

+ Loại 2: chọn 4 học sinh có mặt cả 3 lớp.

- Bước 1: chọn 1 học sinh lớp A, 1 học sinh lớp B và 1 học sinh lớp C có:

$5.4.3 = 60$ cách.

- Bước 2: chọn 1 học sinh trong 9 học sinh còn lại của 3 lớp có 9 cách.

Suy ra có $9 \cdot 60 = 540$ cách chọn loại 2 (lớn hơn số cách chọn loại 1!).

Sai là do khi thực hiện bước 1 và bước 2, vô tình ta đã tạo ra thứ tự trong cách chọn. Có nghĩa là từ tổ hợp chuyển sang chỉnh hợp!

Cách giải đúng:

+ Loại 1: chọn tùy ý 4 trong 12 học sinh có $C_{12}^4 = 495$ cách.

+ Loại 2: chọn 4 học sinh có mặt cả 3 lớp, ta có 3 trường hợp sau:

- Chọn 2 học sinh lớp A, 1 học sinh lớp B và 1 học sinh lớp C có $C_5^2 \cdot 4 \cdot 3 = 120$ cách.

- Chọn 1 học sinh lớp A, 2 học sinh lớp B và 1 học sinh lớp C có $5 \cdot C_4^2 \cdot 3 = 90$ cách.

- Chọn 1 học sinh lớp A, 1 học sinh lớp B và 2 học sinh lớp C có $5 \cdot 4 \cdot C_3^2 = 60$ cách.

Vậy có $495 - (120 + 90 + 60) = 225$ cách.

Bài 19. Gọi số cần lập là $A = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$ với $1 \leq a_1 \leq 2$.

+ Trường hợp 1: $a_1 = 1$.

Có 4 cách chọn a_5 và A_5^3 cách chọn các chữ số còn lại nên có $4 \cdot A_5^3 = 240$ số.

+ Trường hợp 2: $a_1 = 2, a_2$ lẻ.

Có 2 cách chọn a_2 , 3 cách chọn a_5 và A_4^2 cách chọn các chữ số còn lại nên có $2 \cdot 3 \cdot A_4^2 = 72$ số.

+ Trường hợp 3: $a_1 = 2, a_2$ chẵn.

Có 2 cách chọn a_2 , 2 cách chọn a_5 và A_4^2 cách chọn các chữ số còn lại nên có $2 \cdot 2 \cdot A_4^2 = 48$ số.

Vậy có $240 + 72 + 48 = 360$ số.

Bài 20. Số tập hợp con chứa k phần tử của A là C_n^k . Ta có:

$$C_n^4 = 20C_n^2 \Leftrightarrow \frac{n!}{4!(n-4)!} = 20 \frac{n!}{2!(n-2)!}$$

$$\Leftrightarrow (n-2)(n-3) = 240 \Leftrightarrow n = 18$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_{18}^k \geq C_{18}^{k-1} \\ C_{18}^k \geq C_{18}^{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{18!}{k!(18-k)!} \geq \frac{18!}{(k-1)!(19-k)!} \\ \frac{18!}{k!(18-k)!} \geq \frac{18!}{(k+1)!(17-k)!} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 19-k \geq k \\ k+1 \geq 18-k \end{cases} \Leftrightarrow \frac{17}{2} \leq k \leq \frac{19}{2}.$$

Vậy $k = 9$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM HOÁN VỊ-CHỈNH HỢP-TỔ HỢP

Câu 1. Cho $A = \{a; b; c\}$. Số hoán vị của ba phần tử của A là:

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

Câu 2. Số hoán vị của n phần tử là:

- A. n^2 B. n^n C. $2n$ D. $n!$

Câu 3. Có bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau được tạo thành từ các số 1, 2, 3, 4, 5?

- A. P_4 B. P_5 C. A_5^4 D. C_5^4

Câu 4. Cho 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Từ 5 chữ số này ta lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau?

- A. 120 B. 60 C. 30 D. 40

Câu 5. Một tổ học sinh có 5 nam và 5 nữ xếp thành một hàng dọc thì số các cách xếp khác nhau là:

- A. 25 B. 10 C. 10! D. 40

Câu 6. Cho 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Từ 5 chữ số này, ta lập các số chẵn có 5 chữ số khác nhau. Số các số có thể lập được là:

- A. 120 B. 48 C. 32 D. 40

Câu 7. Có bao nhiêu số lẻ có 4 chữ số khác nhau được tạo thành từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5?

- A. 15 B. 120 C. 72 D. 12

Câu 8. Cho $n, k \in \mathbb{N}$ với $0 < k \leq n$. Mệnh đề nào có giá trị sai?

- A. $P_0 = 1$ B. $P_n = C_n^n$ C. $C_n^k = C_n^{n-k}$ D. $A_n^k = k! \cdot C_n^k$

Câu 9. Từ 6 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 ta lập được bao nhiêu số chẵn, mỗi số gồm 5 chữ số khác nhau?

- A. 120 B. 192 C. 312 D. 216

Câu 10. Trong một trường có 4 học sinh giỏi lớp 12, 3 học sinh giỏi lớp 11 và 5 học sinh giỏi lớp 10. Cần chọn 5 học sinh giỏi để tham gia một cuộc thi với các trường khác sao cho khối 12 có 3 em và mỗi khối 10, 11 có đúng 1 em. Vậy số tất cả các cách chọn là:

- A. 60 B. 180 C. 330 D. 90

Câu 11. Trong một bình đựng 4 viên bi đỏ và 3 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên ra 2 viên. Có bao nhiêu cách lấy được 2 viên cùng màu?

- A. 18 B. 9 C. 22 D. 4

Câu 12. Một tổ học sinh có 5 nam và 5 nữ xếp thành 1 hàng dọc sao cho không có học sinh cùng giới tính đứng kề nhau. Số cách xếp là:

- A. $5! \cdot 5!$ B. $2 \cdot (5!)^2$ C. $10!$ D. $2 \cdot 5!$

Câu 13. Cho 5 chữ số 0, 1, 2, 3, 4. Có bao nhiêu số gồm 5 chữ số khác nhau được tạo thành từ 5 chữ số trên?

- A. 120 B. 96 C. 24 D. 28

Câu 14. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau và chia hết cho 9?

- A. 16 B. 18 C. 20 D. 14

Câu 15. Dũng có 8 người bạn. Dũng muốn mời 4 trong 8 người bạn đó về quê chơi vào cuối tuần. Nhưng trong 8 người bạn đó, có 2 bạn là Hùng và Tuấn không thích đi chơi với nhau. Như vậy số cách chọn nhóm 4 người để về quê của Dũng là?

- A. C_8^4 B. $C_6^4 + C_6^3$ C. $C_6^4 + 2C_6^3$ D. $C_6^4 + C_7^3$

Câu 16. Một tổ có 6 học sinh, trong đó có 3 học sinh nam và 3 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp các học sinh trong tổ thành một hàng dọc sao cho nam, nữ đứng xen kẽ nhau?

- A. 36 B. 42 C. 102 D. 72

Câu 17. Hai đơn vị thi đấu cờ tướng A và B lần lượt có 5 người và 6 người. Cần chọn ra mỗi đơn vị 3 người để ghép cặp thi đấu với nhau. Hỏi có bao nhiêu cách thực hiện như thế?

- A. 1200 B. $C_5^3 \cdot C_6^3$ C. $A_5^3 \cdot C_6^3$ D. $C_5^3 \cdot A_6^3$

Câu 18. Một hội đồng gồm 5 nam và 4 nữ được tuyển vào một ban quản trị gồm 4 người. Hỏi có bao nhiêu cách tuyển chọn?

- A. 240 B. 260 C. 126 D. Kết quả khác

Câu 19. Có bao nhiêu cách chọn và sắp thứ tự 5 cầu thủ để đá bóng luân lưu 11m. Biết rằng cả 11 cầu thủ đều có khả năng như nhau.

- A. 55440 B. 20680 C. 32456 D. 41380

Câu 20. Một hội đồng gồm 5 nam và 4 nữ được tuyển vào một ban quản trị gồm 4 người. Biết rằng ban quản trị có ít nhất một nam và một nữ. Hỏi có bao nhiêu cách tuyển chọn?

- A. 240 B. 260 C. 126 D. Kết quả khác

Câu 21. Một lớp có 50 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách phân công 3 học sinh để làm vệ sinh lớp học trong một ngày?

- A. 117600 B. 128500 C. 376 D. 436

Câu 22. Có 3 tem thư khác nhau và 6 bì thư khác nhau. Người ta muốn chọn từ đó ra 3 tem thư, 3 bì thư và dán 3 tem thư đó lên 3 bì thư đã chọn, mỗi bì thư chỉ dán 1 tem thư. Hỏi có bao nhiêu cách làm như vậy?

- A. 200 B. 30 C. 300 D. 120

Câu 23. Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số có 7 chữ số khác nhau mà hai chữ số chẵn đứng kề nhau?

- A. $6!$ B. $2.6!$ C. $7!$ D. $2.7!$

Câu 24. Có 3 môn thi Toán, Lí, Hóa cần xếp vào 3 buổi thi, mỗi buổi 1 môn sao cho môn Toán không thi buổi đầu thì số cách xếp là:

- A. $3!$ B. $2!$ C. $3! - 2!$ D. 5

Câu 25. Có 12 tay đua xe đạp cùng xuất phát trong một cuộc đua để chọn ra 3 người về đích đầu tiên. Số kết quả có thể xảy ra là:

- A. 1250 B. 1320 C. 220 D. 240

Câu 26. Từ 12 người, người ta thành lập một ban kiểm tra gồm 2 người lãnh đạo và 3 ủy viên. Hỏi có bao nhiêu cách thành lập ban kiểm tra?

- A. $C_{12}^2 C_{10}^3$ B. $C_{10}^2 C_{12}^5$ C. $C_{12}^2 C_{12}^5$ D. Kết quả khác

Câu 27. Có 4 cuốn sách toán khác nhau, 3 sách lý khác nhau, 2 sách hóa khác nhau. Muốn sắp và một kệ dài các cuốn sách cùng môn kề nhau, 2 loại toán và lý phải kề nhau thì số cách sắp là:

- A. $4!.3!.2!$ B. $2.4!.3!.2!$ C. $3.4!.3!.2!$ D. $4.4!.3!.2!$

Câu 28. Có 18 đội bóng đá tham gia thi đấu. Mỗi đội chỉ có thể nhận nhiều nhất là một huy chương và đội nào cũng có thể đoạt huy chương. Khi đó, số cách trao 3 loại huy chương vàng, bạc, đồng cho ba đội nhất nhì ba là:

- A. 51 B. 4896 C. 125 D. 12070

Câu 29. Cho số $M = 2^5.3^3.5^4$. M có tất cả bao nhiêu ước số dương?

- A. 60 B. 13 C. 140 D. 120

Câu 30. Có bao nhiêu số là ước dương của $2^{10}.3^6.5^8$ và chia hết cho $2^5.3^2.5^4$?

- A. 30 B. 150 C. 60 D. 120

Câu 31. Một lớp học có 30 học sinh, trong đó có 18 em giỏi Toán, 14 em giỏi văn và 10 em không giỏi môn nào. Số tất cả các em giỏi cả văn lẫn toán là:

- A. 20 B. 12 C. 24 D. 48

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Chọn đáp án C

Số hoán vị của ba phần tử của A là $3! = 6$.

Câu 2. Chọn đáp án D

Số hoán vị của n phần tử là $n!$

Câu 3. Chọn đáp án C

Số có 4 chữ số khác nhau tạo thành từ tập trên là A_5^4 .

Câu 4. Chọn đáp án A

Số có 5 chữ số khác nhau dc tạo thành từ tập trên là $5! = 120$.

Câu 5. Chọn đáp án C

Số cách xếp là $10!$.

Câu 6. Chọn đáp án B

Giả sử số đó là $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$. Chọn a_5 có 2 cách, chọn $a_1 a_2 a_3 a_4$ có 4! cách

Do đó có $2.4! = 48$ số thỏa mãn.

Câu 7. Chọn đáp án C

Giả sử số đó là $\overline{a_1a_2a_3a_4}$. Chọn a_4 có 3 cách, chọn $\overline{a_1a_2a_3}$ có A_4^3 cách

Do đó có $3.A_4^3 = 72$ số thỏa mãn.

Câu 8. Chọn đáp án A

Ta có $P_0 = 0$ nên A sai.

Câu 9. Chọn đáp án C

Giả sử số đó là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$.

Trường hợp 1: $a_5 = 0$ chọn $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ có A_5^4 cách $\Rightarrow$ có A_5^4 số thỏa mãn

Trường hợp 2: $a_5 \in \{2; 4\}$ chọn a_1 có 4 cách chọn, chọn $\overline{a_2a_3a_4}$ có A_4^3 cách $\Rightarrow$ có $2.4.A_4^3$ cách

Do đó có $A_5^4 + 2.4.A_4^3 = 312$ số thỏa mãn.

Câu 10. Chọn đáp án A

Chọn 3 học sinh lớp 12 có C_4^3 cách, chọn 1 học sinh lớp 11 có C_3^1 cách, chọn 1 học sinh lớp 10 có C_5^1 cách. Do đó có $C_4^3.C_3^1.C_5^1 = 60$ cách chọn.

Câu 11. Chọn đáp án B

Số cách lấy hai viên bi cùng màu đỏ là C_4^2 .

Số cách lấy hai viên bi cùng màu xanh là C_3^2 .

Như vậy số cách lấy dc hai viên bi cùng màu là $C_4^2 + C_3^2 = 9$ cách.

Câu 12. Chọn đáp án B

Theo bài ra, ta thấy cách sắp xếp chính là việc nam nữ đứng xen kẽ nhau.

Như vậy sẽ có hai trường hợp, hoặc là bạn nam đứng đầu hàng hoặc là bạn nữ đứng đầu hàng.

Và 5 bạn nam thay đổi vị trí cho nhau tương ứng với $5!$ cách.

Tương tự với 5 bạn nữ thay đổi vị trí tương ứng với $5!$ cách.

Vậy số cách sắp xếp cần tìm $2.(5!)^2$.

Câu 13. Chọn đáp án B

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcde}$, khi đó

+) Có 4 cách chọn chữ số a (trừ chữ số 0).

+) Có 4 cách chọn chữ số b .

+) Có 3 cách chọn chữ số c .

+) Có 2 cách chọn chữ số d .

+) Có 1 cách chọn chữ số e .

Vậy có tất cả $4.4.3.2.1 = 96$ số cần tìm.

Câu 14. Chọn đáp án A

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abc}$ với $a, b, c \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

Vì $\overline{abc}:9$ nên suy ra tổng các chữ số $a + b + c:9$. Khi đó $a, b, c \in \{(0; 4; 5), (2; 3; 4), (1; 3; 5)\}$.

TH1. Với $a, b, c \in \{0; 4; 5\}$ suy ra có $2.2 = 4$ số thỏa mãn yêu cầu.

TH2. Với $a, b, c \in \{2; 3; 4\}$ suy ra có $3! = 6$ số thỏa mãn yêu cầu.

TH3. Với $a, b, c \in \{1; 3; 5\}$ suy ra có $3! = 6$ số thỏa mãn yêu cầu.

Vậy có thể lập được 16 số tự nhiên thỏa mãn bài toán.

Câu 15. Chọn đáp án C

TH1. Trong 4 bạn được mời, có Hùng nhưng không có Tuấn.

→ Số cách chọn nhóm 4 người trong trường hợp này là C_6^3 cách.

TH2. Tương tự **TH1**, có Tuấn nhưng không có Hùng nên số cách chọn là C_6^3 cách.

TH3. Trong 4 bạn được mời, không có cả Hùng và Tuấn.

→ Số cách chọn nhóm 4 người trong trường hợp này là C_6^4 cách.

Vậy số cách chọn cần tìm là $C_6^4 + 2C_6^3$ cách.

Câu 16. Chọn đáp án D

Ta xét hai trường hợp:

TH1. Bạn nam đứng đầu hàng, khi đó số cách sắp xếp là $3.2.3! = 36$ cách.

TH2. Bạn nữ đứng đầu hàng, tương tự **TH1**, suy ra có 36 cách sắp xếp.

Vậy có 72 cách sắp xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 17. Chọn đáp án A

Số cách chọn 3 người từ đơn vị A là C_5^3 cách.

Số cách chọn 3 người từ đơn vị B là C_6^3 cách.

Lấy 1 người trong đơn vị A đi ghép cặp đầu với 1 trong 3 người ở đơn vị B, ta được 3 cách.

Lấy 1 người trong 2 người còn lại ở đơn vị A đi ghép cặp đầu với 1 trong 2 người còn lại ở đơn vị B, ta được 2 cách.

Vậy có $C_5^3.C_6^3.3.2 = 1200$ cách thực hiện việc ghép cặp thi đấu.

Câu 18. Chọn đáp án C

Số cách chọn ban quản trị gồm 1 nam và 3 nữ là $C_5^1.C_4^3$ cách.

Số cách chọn ban quản trị gồm 2 nam và 2 nữ là $C_5^2.C_4^2$ cách.

Số cách chọn ban quản trị gồm 3 nam và 1 nữ là $C_5^3.C_4^1$ cách.

Số cách chọn ban quản trị gồm 4 nam là C_5^4 cách.

Số cách chọn ban quản trị gồm 4 nữ là C_4^4 cách.

Vậy tổng số cách chọn cần tìm là $C_5^1.C_4^3 + C_5^2.C_4^2 + C_5^3.C_4^1 + C_5^4 + C_4^4 = 126$.

Câu 19. Chọn đáp án A

Số cách chọn 5 cầu thủ trong 11 cầu thủ và sắp xếp có thứ tự là $A_{11}^5 = 55440$.

Câu 20. Chọn đáp án D

Số cách chọn ban quản trị gồm 1 nam và 3 nữ là $C_5^1.C_4^3$ cách.

Số cách chọn ban quản trị gồm 2 nam và 2 nữ là $C_5^2.C_4^2$ cách.

Số cách chọn ban quản trị gồm 3 nam và 1 nữ là $C_5^3.C_4^1$ cách.

Vậy tổng số cách chọn cần tìm là $C_5^1.C_4^3 + C_5^2.C_4^2 + C_5^3.C_4^1 = 120$ cách.

Câu 21. Chọn đáp án A

Số cách phân công 3 học sinh để làm vệ sinh lớp học là $A_{50}^3 = 117600$.

Câu 22. Chọn đáp án D

Cố định 3 tem thư xếp theo hàng ngang từ trái sang phải là các vị trí 1, 2, 3.

Rõ ràng nếu có 3 bì thư thì mỗi thứ tự xếp 3 bì thư này từ trái sang phải cũng chính là cách dán.

Số cách làm cần tìm là: $A_6^3 = 120$.

Câu 23. Chọn đáp án B

Số số có 7 chữ số khác nhau lập từ các chữ số đã cho: $7!$

Xếp 4 chữ số lẻ trên 1 hàng ngang với vị trí bất kì: $4!$ Cách.

Ở đây giữa sẽ tạo thành 5 khoảng trống (bao gồm 3 khoảng trống giữa hai chữ số lẻ và 2 khoảng trống tại vị trí đầu và cuối). Ở mỗi khoảng trống, ta sẽ điền các chữ số chẵn 2, 4, 6 vào không kể thứ tự sao cho mỗi khoảng trống chỉ có 1 chữ số chẵn: A_5^3

Cách xếp này cũng chính là số thỏa yêu cầu đề: $A_5^3 \cdot 4! = 2 \cdot 6!$.

Câu 24. Chọn đáp án C

Số cách xếp bất kì 3 môn vào 3 buổi thi bất kì là: $3!$

Giả sử môn Toán luôn thi buổi đầu, thì số cách xếp 2 môn còn lại vào bất kì 2 buổi còn lại là: $2!$

Vậy số cách xếp cần tìm: $3! - 2!$.

Câu 25. Chọn đáp án C

Ở đây yêu cầu 3 người về đích đầu tiên, nên giữa 3 người này không cần phải phân định thứ tự nhất nhì ba. Số kết quả xảy ra là: $C_{12}^3 = 220$.

Câu 26. Chọn đáp án A

Số cách chọn 2 lãnh đạo từ 12 người đã cho: C_{12}^2

Số cách chọn 3 ủy viên từ 10 người còn lại: C_{10}^3

Tổng số cách thành lập ban kiểm tra: $C_{12}^2 \cdot C_{10}^3$.

Câu 27. Chọn đáp án D

Đối với 3 vị trí của 3 loại sách thì sách hóa chỉ có thể đứng ở đầu hoặc cuối: 2 cách chọn.

Tương ứng mỗi vị trí của loại sách hóa thì số cách xếp các cuốn sách hóa là: $2!$

Tương tự, số cách xếp toán và lý là: $2 \cdot 4! \cdot 3!$

Vậy tổng số cách xếp cần tìm: $2 \cdot 4! \cdot 3! \cdot (2! \cdot 2) = 4 \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2!$.

Câu 28. Chọn đáp án B

Ta có 3 đội bất kì trong 18 đội đều có khả năng đạt huy chương, và thứ tự của 3 đội này sẽ cho biết loại huy chương mà mỗi đội nhận, do đó số cách trao cần tìm: $A_{18}^3 = 4896$.

Câu 29. Chọn đáp án D

Số ước dương là: $(5+1)(3+1)(4+1) = 120$.

Câu 30. Chọn đáp án B

Đề ý rằng $2^{10} \cdot 3^6 \cdot 5^8 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^4 (2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^4)$.

Với mỗi ước dương của $2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^4$ khi nhân với $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^4$ đều là ước dương của $2^{10} \cdot 3^6 \cdot 5^8$ thỏa mãn yêu cầu đề. Số ước dương cần tìm là: $(5+1)(4+1)(4+1) = 150$.

Câu 31. Chọn đáp án B

Số học sinh giỏi ít nhất 1 môn là: $30 - 10 = 20$

Số học sinh giỏi cả văn lẫn toán là: $18 + 14 - 20 = 12$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM –HOÁN VỊ-CHỈNH HỢP-TỔ HỢP

Câu 1: Tính số chỉnh hợp chập 4 của 7 phần tử?

A. 24 .

B. 720 .

C. 840 .

D. 35 .

Lời giải

$$\text{Ta có: } A_7^4 = \frac{7!}{3!} = 840.$$

Câu 2: Công thức tính số chỉnh hợp chập k của n phần tử là:

A. $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

B. $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

C. $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

D. $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Lời giải

Câu hỏi lí thuyết.

Câu 3: Công thức tính số tổ hợp chập k của n phần tử là:

A. $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

B. $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

C. $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

D. $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Lời giải

Câu hỏi lí thuyết.

Câu 4: Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau:

A. $A_n^k = k!C_n^{n-k}$.

B. $C_n^k = k.A_n^k$.

C. $A_n^k = k.C_n^k$.

D. $C_n^k = k!A_n^k$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \\ C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \end{cases} \Rightarrow A_n^k = k!C_n^{n-k}; \forall n, k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n.$$

Câu 5: Cho k, n ($k < n$) là các số nguyên dương. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $A_n^k = k!.C_n^k$.

B. $C_n^k = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$.

C. $C_n^k = C_n^{n-k}$.

D. $A_n^k = n!.C_n^k$.

Lời giải

$$\text{Theo định nghĩa về tổ hợp, chỉnh hợp và hoán vị, } A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = k! \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = k!C_n^k \neq n!C_n^k$$

Câu 6: Có bao nhiêu số có ba chữ số dạng $\overline{abc}$ với $a, b, c \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ sao cho $a < b < c$.

A. 30.

B. 20.

C. 120.

D. 40.

Lời giải

Chọn B

Nhận xét $a, b, c \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Số các số tự nhiên thỏa mãn bài ra bằng số các tổ hợp chập 3 của 6 phần tử thuộc tập hợp

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Vậy có $C_6^3 = 20$ số.

Câu 7: Có n phần tử lấy ra k phần tử đem đi sắp xếp theo một thứ tự nào đó, mà khi thay đổi thứ tự ta được cách sắp xếp mới. Khi đó số cách sắp xếp là:

- A. C_n^k B. A_n^k C. A_n^n D. P_n .

Lời giải

Do mỗi cách lấy k trong n phần tử rồi sắp thứ tự ta được một chỉnh hợp chập k của n phần tử nên tất cả các chỉnh hợp là A_n^k

Câu 8: Từ các chữ số 1; 2; 3; 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau?

- A. 12. B. 24. C. 42. D. 4^4 .

Lời giải

Mỗi số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau được tạo thành từ các chữ số 1; 2; 3; 4 là một hoán vị của 4 phần tử. Vậy số các số cần tìm là: $4! = 24$ số.

Câu 9: Cho tập hợp M có 10 phần tử. Số tập con gồm 2 phần tử của M là

- A. A_{10}^8 . B. A_{10}^2 . C. C_{10}^2 . D. 10^2 .

Lời giải

Số tập con gồm 2 phần tử của M là số cách chọn 2 phần tử bất kì trong 10 phần tử của M . Do đó số tập con gồm 2 phần tử của M là C_{10}^2 .

Câu 10: Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 học sinh thành một hàng dọc?

- A. 5^5 . B. $5!$. C. $4!$. D. 5.

Lời giải

Số cách sắp xếp 5 học sinh thành một hàng dọc là $5!$.

Câu 11: Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Từ A lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau?

- A. 32. B. 24. C. 256. D. 18.

Lời giải

Mỗi số tự nhiên tự nhiên có 4 chữ số khác nhau được lập từ tập A là hoán vị của 4 phần tử.

Vậy có $4! = 24$ số cần tìm.

Câu 12: Từ các số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau đôi một?

- A. 60. B. 120. C. 24. D. 48.

Lời giải

Mỗi cách lập số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau đôi một hoán vị của 5 phần tử.

Vậy có $5! = 120$ số cần tìm.

Câu 13: Từ tập $X = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số mà các chữ số đôi một khác nhau?

- A. 60. B. 125. C. 10. D. 6.

Lời giải

Số các số tự nhiên có ba chữ số mà các chữ số đôi một khác nhau được lập từ tập X là số

chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử $\Rightarrow$ số các số cần lập là $A_5^3 = 60$.

Câu 14: Nhân dịp lễ sơ kết học kì I, để thưởng cho ba học sinh có thành tích tốt nhất lớp cô An đã mua 10 cuốn sách khác nhau và chọn ngẫu nhiên ra 3 cuốn để phát thưởng cho 3 học sinh đó mỗi học sinh nhận 1 cuốn. Hỏi cô An có bao nhiêu cách phát thưởng.

- A. C_{10}^3 . B. A_{10}^3 . C. 10^3 . D. $3.C_{10}^3$.

Lời giải

Chọn ngẫu nhiên 3 cuốn sách rồi phát cho 3 học sinh có: A_{10}^3 cách.

Câu 15: Cần chọn 3 người đi công tác từ một tổ có 30 người, khi đó số cách chọn là

- A. A_{30}^3 . B. 3^{30} . C. 10 . D. C_{30}^3 .

Lời giải

Số cách chọn 3 người bất kì trong 30 là: C_{30}^3 .

Câu 16: Số vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu, điểm cuối là hai trong 6 đỉnh của lục giác $ABCDEF$ là

- A. P_6 . B. C_6^2 . C. A_6^2 . D. 36.

Lời giải

Số véc-tơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu, điểm cuối là hai trong 6 đỉnh của lục giác $ABCDEF$ là A_6^2 .

Câu 17: Số tập hợp con có 3 phần tử của một tập hợp có 7 phần tử là

- A. A_7^3 . B. C_7^3 . C. 7. D. $\frac{7!}{3!}$.

Lời giải

Chọn ba phần tử trong tập hợp bảy phần tử để tạo thành một tập hợp mới là tổ hợp chập ba của bảy phần tử C_7^3 .

Câu 18: Số hoán vị của n phần tử là

- A. $n!$. B. $2n$. C. n^2 . D. n^n .

Lời giải

Số hoán vị của tập có n phần tử bằng $n!$.

Câu 19: Tập A gồm n phần tử ($n > 0$). Hỏi A có bao nhiêu tập con?

- A. A_n^2 . B. C_n^2 . C. 2^n . D. 3^n .

Lời giải

Số tập con gồm k phần tử của tập A là C_n^k .

Số tất cả các tập con của tập A là $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^k + \dots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$.

Câu 20: Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số, các chữ số khác 0 và đôi một khác nhau?

- A. $5!$. B. 9^5 . C. C_9^5 . D. A_9^5 .

Lời giải

Mỗi số tự nhiên có 5 chữ số, các chữ số khác 0 và đôi một khác nhau là một chỉnh hợp chập 5 của 9 phần tử.

Vậy số các số tự nhiên thỏa đề bài là A_9^5 số.

Câu 21: Trong một buổi khiêu vũ có 20 nam và 18 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một đôi nam nữ để khiêu vũ?

- A.** C_{38}^2 . **B.** A_{38}^2 . **C.** $C_{20}^2 C_{18}^1$. **D.** $C_{20}^1 C_{18}^1$.

Lời giải

Chọn một nam trong 20 nam có C_{20}^1 cách.

Chọn một nữ trong 18 nữ có C_{18}^1 cách.

Theo quy tắc nhân, số cách chọn một đôi nam nữ là $C_{20}^1 C_{18}^1$.

Câu 22: Cho tập hợp A có 20 phần tử, số tập con có hai phần tử của A là

- A.** $2C_{20}^2$. **B.** $2A_{20}^2$. **C.** C_{20}^2 . **D.** A_{20}^2 .

Lời giải

Số tập con có hai phần tử của A là C_{20}^2 .

Câu 23: Có bao nhiêu cách chọn 5 cầu thủ từ 11 trong một đội bóng để thực hiện đá 5 quả luân lưu 11 m, theo thứ tự quả thứ nhất đến quả thứ năm.

- A.** A_{11}^5 . **B.** C_{11}^5 . **C.** $A_{11}^2 \cdot 5!$. **D.** C_{10}^5 .

Lời giải

Số cách chọn 5 cầu thủ từ 11 trong một đội bóng để thực hiện đá 5 quả luân lưu 11 m, theo thứ tự quả thứ nhất đến quả thứ năm là số chỉnh hợp chập 5 của 11 phần tử nên số cách chọn là A_{11}^5 .

Câu 24: Cho 8 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu tam giác mà ba đỉnh của nó được chọn từ 8 điểm trên?

- A.** 336. **B.** 56. **C.** 168. **D.** 84.

Lời giải

Có $C_8^3 = 56$ tam giác.

Câu 25: Một hộp đựng hai viên bi màu vàng và ba viên bi màu đỏ. Có bao nhiêu cách lấy ra hai viên bi trong hộp?

- A.** 10. **B.** 20. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Số cách lấy ra hai viên bi là $C_5^2 = 10$.

Câu 26: Số giao điểm tối đa của 10 đường thẳng phân biệt là

- A.** 50. **B.** 100. **C.** 120. **D.** 45.

Lời giải

Số giao điểm tối đa của 10 đường thẳng phân biệt là $C_{10}^2 = 45$.

Câu 27: Cho tập hợp S có 10 phần tử. Tìm số tập con gồm 3 phần tử của S .

- A.** A_{10}^3 . **B.** C_{10}^3 . **C.** 30. **D.** 10^3 .

Lời giải

Số tập con gồm 3 phần tử được lấy ra từ tập hợp gồm 10 phần tử ban đầu là tổ hợp chập 3 của 10. Đáp án C_{10}^3 .

- Câu 28:** Trong trận chung kết bóng đá phải phân định thắng thua bằng đá luân lưu 11 mét. Huấn luyện viên của mỗi đội cần trình với trọng tài một danh sách sắp thứ tự 5 cầu thủ trong 11 cầu thủ để đá luân lưu 5 quả 11 mét. Hỏi huấn luyện viên của mỗi đội sẽ có bao nhiêu cách chọn?
- A.** 55440. **B.** 120. **C.** 462. **D.** 39916800.

Lời giải

Số cách chọn của huấn luyện viên của mỗi đội là $A_{11}^5 = 55440$.

- Câu 29:** Cho tập hợp $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số khác nhau lấy từ tập hợp S ?
- A.** 360. **B.** 120. **C.** 15. **D.** 20.

Lời giải

Từ tập S lập được $A_6^4 = 360$ số tự nhiên gồm bốn chữ số khác nhau.

- Câu 30:** Cần phân công ba bạn từ một tổ có 10 bạn để làm trực nhật. Hỏi có bao nhiêu cách phân công khác nhau?
- A.** 720. **B.** 10^3 . **C.** 120. **D.** 210.

Lời giải

Số cách phân công là $C_{10}^3 = 120$.

- Câu 31:** Cho tập $M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Số các số tự nhiên gồm 4 chữ số phân biệt lập từ M là.
- A.** $4!$. **B.** A_9^4 . **C.** 4^9 . **D.** C_9^4 .

Lời giải

Số các số tự nhiên gồm 4 chữ số phân biệt lập từ M là A_9^4 .

- Câu 32:** Số cách chọn 3 học sinh từ 5 học sinh là
- A.** C_5^3 . **B.** A_5^3 . **C.** $3!$. **D.** 15.

Lời giải

Số cách chọn 3 học sinh từ 5 học sinh là C_5^3 .

- Câu 33:** Một tổ có 10 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 2 học sinh từ tổ đó để giữ hai chức vụ tổ trưởng và tổ phó.
- A.** A_{10}^2 . **B.** C_{10}^2 . **C.** A_{10}^8 . **D.** 10^2 .

Lời giải

Chọn ra 2 học sinh từ một tổ có 10 học sinh và phân công giữ chức vụ tổ trưởng, tổ phó là một chỉnh hợp chập 2 của 10 phần tử. Số cách chọn là A_{10}^2 cách.

- Câu 34:** Trong mặt phẳng cho 15 điểm phân biệt trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Số tam giác có đỉnh là 3 trong số 15 điểm đã cho là.
- A.** A_{15}^3 . **B.** $15!$. **C.** C_{15}^3 . **D.** 15^3 .

Lời giải

Số tam giác có đỉnh là 3 trong số 15 điểm đã cho là: C_{15}^3 .

- Câu 35:** Số cách chọn 5 học sinh trong một lớp có 25 học sinh nam và 16 học sinh nữ là

A. $C_{25}^5 + C_{16}^5$.

B. C_{25}^5 .

C. A_{41}^5 .

D. C_{41}^5 .

Lời giải

Chọn 5 học sinh trong lớp có 41 học sinh là số tập con có 5 phần tử chọn trong 41 phần tử nên số cách chọn là C_{41}^5 .

Câu 36: Một nhóm học sinh có 10 người. Cần chọn 3 học sinh trong nhóm để làm 3 công việc là tưới cây, lau bàn và nhặt rác, mỗi người làm một công việc. Số cách chọn là

A. 10^3 .

B. 3×10 .

C. C_{10}^3 .

D. A_{10}^3 .

Lời giải

Số cách chọn 3 em học sinh là số cách chọn 3 phần tử khác nhau trong 10 phần tử có phân biệt thứ tự nên số cách chọn thỏa yêu cầu là A_{10}^3 .

Câu 37: Cho tập hợp $M = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ có 10 phần tử. Số tập hợp con gồm 2 phần tử của M và không chứa phần tử 1 là

A. C_{10}^2 .

B. A_9^2 .

C. 9^2 .

D. C_9^2 .

Lời giải

Câu 38: Từ tập $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau

A. $5!$.

B. C_7^5 .

C. A_7^5 .

D. 7^5 .

Lời giải

Số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau có thể lập được là: A_7^5 số.

Câu 39: Cho A là tập hợp gồm 20 điểm phân biệt. Số đoạn thẳng có hai đầu mút phân biệt thuộc tập A là

A. 170.

B. 160.

C. 190.

D. 360.

Lời giải

Số đoạn thẳng là $C_{20}^2 = 190$.

Câu 40: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau?

A. 15.

B. 4096.

C. 360.

D. 720.

Lời giải

Số các số tự nhiên thỏa yêu cầu là một chỉnh hợp chập 4 của 6 phần tử. Do đó, số các số tự nhiên cần tìm bằng $A_6^4 = 360$.

Câu 41: Có bao nhiêu cách sắp xếp 6 học sinh theo một hàng dọc?

A. 46656.

B. 4320.

C. 720.

D. 360.

Lời giải

Số cách sắp xếp 6 học sinh theo một hàng dọc là số hoán vị của 6 phần tử.

Vậy có $P_6 = 6! = 720$ cách.

Câu 42: Một tổ có 6 học sinh nam và 9 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 5 học sinh đi lao động trong đó có 2 học sinh nam?

A. $C_9^2 \cdot C_6^3$.

B. $C_6^2 + C_9^3$.

C. $A_6^2 \cdot A_9^3$.

D. $C_6^2 \cdot C_9^3$.

Lời giải

Cách chọn 5 học sinh đi lao động trong đó có 2 học sinh nam là $C_6^2.C_9^3$.

Câu 43: Số cách sắp xếp 5 học sinh ngồi vào một bàn dài có 5 ghế là:

- A. $4!$. B. 5 . C. 1 . D. $5!$.

Lời giải

Số cách sắp xếp là hoán vị của 5 phần tử $\rightarrow 5!$.

Câu 44: Có bao nhiêu số có ba chữ số đôi một khác nhau mà các chữ số đó thuộc tập hợp $\{1; 2; 3; \dots; 9\}$?

- A. C_9^3 . B. 9^3 . C. A_9^3 . D. 3^9 .

Lời giải

Số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau mà các chữ số đó thuộc tập hợp $\{1; 2; 3; \dots; 9\}$ là A_9^3 .

Câu 45: Cho tập hợp M có 10 phần tử. Số cách chọn ra hai phần tử của M và sắp xếp thứ tự hai phần tử đó là.

- A. C_{10}^2 . B. A_{10}^2 . C. $C_{10}^2 + 2!$. D. $A_{10}^2 + 2!$.

Lời giải

Mỗi cách chọn 2 phần tử từ 10 phần tử và sắp xếp theo một thứ tự là một chỉnh hợp chập 2 của 10 phần tử.

Vậy có A_{10}^2 cách chọn.

Câu 46: Trong một dạ hội cuối năm ở một cơ quan, ban tổ chức phát ra 100 vé xổ số đánh số từ 1 đến 100 cho 100 người. Xổ số có 4 giải: 1 giải nhất, 1 giải nhì, 1 giải ba, 1 giải tư. Kết quả là việc công bố ai trúng giải nhất, giải nhì, giải ba, giải tư. Hỏi có bao nhiêu kết quả có thể nếu biết rằng người giữ vé số 47 trúng một trong bốn giải?

- A. 3766437. B. 3764637. C. 3764367. D. 3764376.

Lời giải.

Nếu người giữ vé số 47 trúng một trong bốn giải thì:

- Người giữ vé số 47 có 4 cách chọn giải.
- Ba giải còn lại ứng với một chỉnh hợp chập 3 của 99 phần tử, do đó ta có $A_{99}^3 = 941094$ cách.

Vậy số kết quả bằng $4 \times A_{99}^3 = 4 \times 941094 = 3764376$ kết quả.

Câu 47: Cho tập $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Số các số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau lấy ra từ tập A là?

- A. 30420. B. 27162. C. 27216. D. 30240.

Lời giải.

Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}, a \neq 0$.

- Chọn a có 9 cách.
- Chọn b, c, d, e từ 9 số còn lại có $A_9^4 = 3024$ cách.

Vậy có $9 \times 3024 = 27216$.

Câu 48: Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số khác nhau đôi một, trong đó chữ số 2 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 3?

A. 249.

B. 7440.

C. 3204.

D. 2942.

Lời giải.

Ta chia thành các trường hợp sau:

- TH1: Nếu số 123 đứng đầu thì có A_7^4 số.
- TH2: Nếu số 321 đứng đầu thì có A_7^4 số.
- TH3: Nếu số 123;321 không đứng đầu

Khi đó có 6 cách chọn số đứng đầu, khi đó còn 6 vị trí có 4 cách xếp 3 số 321 hoặc 123, còn lại 3 vị trí có A_6^3 cách chọn các số còn lại. Do đó trường hợp này có $6.2.4.A_6^3 = 5760$

Suy ra tổng các số thoả mãn yêu cầu là $2A_7^4 + 5760 = 7440$.

Câu 49: Cho 10 điểm phân biệt $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ trong đó có 4 điểm A_1, A_2, A_3, A_4 thẳng hàng, ngoài ra không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh được lấy trong 10 điểm trên?

A. 96 tam giác.

B. 60 tam giác.

C. 116 tam giác.

D. 80 tam giác.

Lời giải.

Số cách lấy 3 điểm từ 10 điểm phân biệt là $C_{10}^3 = 120$.

Số cách lấy 3 điểm bất kì trong 4 điểm A_1, A_2, A_3, A_4 là $C_4^3 = 4$.

Khi lấy 3 điểm bất kì trong 4 điểm A_1, A_2, A_3, A_4 thì sẽ không tạo thành tam giác.

Như vậy, số tam giác tạo thành $120 - 4 = 116$ tam giác.

Câu 50: Cho mặt phẳng chứa đa giác đều (H) có 20 cạnh. Xét tam giác có 3 đỉnh được lấy từ các đỉnh của (H) . Hỏi có bao nhiêu tam giác có đúng 1 cạnh là cạnh của (H) .

A. 1440.

B. 360.

C. 1120.

D. 816.

Lời giải.

Lấy một cạnh bất kỳ của (H) làm cạnh của một tam giác có 20 cách.

Lấy một điểm bất kỳ trong 18 đỉnh còn lại của (H) có 18 cách. Vậy số tam giác cần tìm là $20.18 = 360$.

Câu 51: Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2 . Trên d_1 lấy 17 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 20 điểm phân biệt. Tính số tam giác mà có các đỉnh được chọn từ 37 điểm này.

A. 5690.

B. 5960.

C. 5950.

D. 5590.

Lời giải.

Một tam giác được tạo bởi ba điểm phân biệt nên ta xét:

TH1. Chọn 1 điểm thuộc d_1 và 2 điểm thuộc $d_2 \longrightarrow$ có $C_{17}^1 \cdot C_{20}^2$ tam giác.

TH2. Chọn 2 điểm thuộc d_1 và 1 điểm thuộc $d_2 \longrightarrow$ có $C_{17}^2 \cdot C_{20}^1$ tam giác.

Như vậy, ta có $C_{17}^1 \cdot C_{20}^2 + C_{17}^2 \cdot C_{20}^1 = 5950$ tam giác cần tìm.

Câu 52: Số giao điểm tối đa của 5 đường tròn phân biệt là:

A. 10.

B. 20.

C. 18.

D. 22.

Lời giải.

Hai đường tròn cho tối đa hai giao điểm. Và 5 đường tròn phân biệt cho số giao điểm tối đa khi 2 đường tròn bất kỳ trong 5 đường tròn đôi một cắt nhau.

Vậy số giao điểm tối đa của 5 đường tròn phân biệt là $2 \cdot C_5^2 = 20$.

Câu 53: Với đa giác lồi 10 cạnh thì số đường chéo là

A. 90.

B. 45.

C. 35.

D. 55.

Lời giải.

Đa giác lồi 10 cạnh thì có 10 đỉnh. Lấy hai điểm bất kỳ trong 10 đỉnh của đa giác lồi ta được số đoạn thẳng gồm cạnh và đường chéo của đa giác lồi.

Vậy số đường chéo cần tìm là $C_{10}^2 - 10 = \frac{10!}{8! \cdot 2!} - 10 = 35$.

Câu 54: Cho đa giác đều n đỉnh, $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 3$. Tìm n biết rằng đa giác đã cho có 135 đường chéo.

A. $n = 15$.

B. $n = 27$.

C. $n = 8$.

D. $n = 18$.

Lời giải.

Đa giác lồi n đỉnh thì có n cạnh. Nếu vẽ tất cả các đoạn thẳng nối từng cặp trong n đỉnh này thì có một bộ gồm các cạnh và các đường chéo.

Vậy để tính số đường chéo thì lấy tổng số đoạn thẳng dựng được trừ đi số cạnh, với

- ☉ Tất cả đoạn thẳng dựng được là bằng cách lấy ra 2 điểm bất kỳ trong n điểm, tức là số đoạn thẳng chính là số tổ hợp chập 2 của n phần tử.

Như vậy, tổng số đoạn thẳng là C_n^2 .

- ☉ Số cạnh của đa giác lồi là n .

Suy ra số đường chéo của đa giác đều n đỉnh là $C_n^2 - n = \frac{n(n-3)}{2}$.

$$\text{Theo bài ra, ta có } \begin{cases} n \geq 3 \\ \frac{n(n-3)}{2} = 135 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 3 \\ n^2 - 3n - 270 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow n = 18.$$

Câu 55: Trong mặt phẳng có bao nhiêu hình chữ nhật được tạo thành từ bốn đường thẳng phân biệt song song với nhau và năm đường thẳng phân biệt vuông góc với bốn đường thẳng song song đó.

A. 60.

B. 48.

C. 20.

D. 36.

Lời giải.

Cứ 2 đường thẳng song song với 2 đường thẳng vuông góc với chúng cắt nhau tại bốn điểm là 4 đỉnh của hình chữ nhật.

Vậy lấy 2 đường thẳng trong 4 đường thẳng song song và lấy 2 đường thẳng trong 5 đường thẳng vuông góc với 4 đường đó ta được số hình chữ nhật là $C_4^2 \cdot C_5^2 = 60$.

Câu 56: Một lớp có 15 học sinh nam và 20 học sinh nữ. Có bao nhiêu cách chọn 5 bạn học sinh sao cho trong đó có đúng 3 học sinh nữ?

A. 110790.

B. 119700.

C. 117900.

D. 110970.

Lời giải.

Số cách chọn 3 học sinh nữ là: $C_{20}^3 = 1140$ cách.

Số cách chọn 2 bạn học sinh nam là: $C_{15}^2 = 105$ cách.

Số cách chọn 5 bạn thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $1140 \times 105 = 119700$.

Câu 57: Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau và khác 0 mà trong mỗi số luôn luôn có mặt hai chữ số chẵn và hai chữ số lẻ?

A. $4!C_4^1C_5^1$.

B. $3!C_3^2C_5^2$.

C. $4!C_4^2C_5^2$.

D. $3!C_4^2C_5^2$.

Lời giải.

Số cách chọn 2 số chẵn trong tập hợp $\{2; 4; 6; 8\}$ là: C_4^2 cách.

Số cách chọn 2 số lẻ trong tập hợp $\{1; 3; 5; 7; 9\}$ là: C_5^2 cách.

Số cách hoán vị 4 chữ số đã chọn lập thành 1 số tự nhiên là: $4!$ cách.

Vậy có $4! \times C_4^2 \times C_5^2$ số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 58: Đội văn nghệ của nhà trường gồm 4 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 2 học sinh lớp 12C. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh từ đội văn nghệ để biểu diễn trong lễ bế giảng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho lớp nào cũng có học sinh được chọn?

A. 120.

B. 98.

C. 150.

D. 360.

Lời giải

✎ Số cách chọn ngẫu nhiên 5 học sinh C_9^5 cách.

✎ Số cách chọn 5 học sinh chỉ có 2 lớp: $C_7^5 + C_6^5 + C_5^5$

Vậy số cách chọn 5 học sinh có cả 3 lớp là $C_9^5 - (C_7^5 + C_6^5 + C_5^5) = 98$.

Câu 59: Có bao nhiêu số chẵn mà mỗi số có 4 chữ số đôi một khác nhau?

A. 2520.

B. 50000.

C. 4500.

D. 2296.

Lời giải

✎ Số có 4 chữ số khác nhau đôi một: $9.A_9^3$.

✎ Số có 4 chữ số lẻ khác nhau đôi một: $5.8.A_8^2$.

Vậy số có 4 chữ số chẵn khác nhau đôi một: $9.A_9^3 - 5.8.A_8^2 = 2296$.

Câu 60: Có bao nhiêu số tự nhiên có sáu chữ số khác nhau từng đôi một, trong đó chữ số 5 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 4?

A. 249.

B. 1500.

C. 3204.

D. 2942.

Lời giải

Chữ số 5 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 4 nên ta có thể có 154 hoặc 451

Gọi số cần tìm là $\overline{abc}$, sau đó ta chèn thêm 154 hoặc 451 để có được số gồm 6 chữ số cần tìm.

TH1: $a \neq 0$, số cách chọn a là 6, số cách chọn b và c là A_6^2 , sau đó chèn 154 hoặc 451 vào 4 vị trí còn lại nên có $6 \cdot A_6^2 \cdot 4 \cdot 2$ cách

TH2: $a = 0$, số cách chọn a là 1, số cách chọn b và c là A_6^2 , sau đó chèn 154 hoặc 451 vào vị trí trước a có duy nhất 1 cách nên có $A_6^2 \cdot 2$ cách

Vậy có $6 \cdot A_6^2 \cdot 4 \cdot 2 + A_6^2 \cdot 2 = 1500$.

Câu 61: Có 5 nhà toán học nam, 3 nhà toán học nữ và 4 nhà vật lý nam. Lập một đoàn công tác gồm 3 người cần có cả nam và nữ, có cả nhà toán học và vật lý thì có bao nhiêu cách.

A. 120.

B. 90.

C. 80.

D. 220.

Lời giải

Ta có các trường hợp sau:

TH1: Chọn được 1 nhà vật lý nam, hai nhà toán học nữ có $C_4^1 C_3^2 = 12$ cách chọn.

TH2: Chọn được 1 nhà vật lý nam, một nhà toán học nữ và một nhà toán học nam có $C_4^1 C_3^1 C_5^1 = 60$ cách chọn.

TH3: Chọn được 2 nhà vật lý nam, một nhà toán học nữ có $C_4^2 C_3^1 = 18$ cách chọn.

Vậy, có $12 + 60 + 18 = 90$ cách chọn thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 62: Trong mặt phẳng có 2017 đường thẳng song song với nhau và 2018 đường thẳng song song khác cùng cắt nhóm 2017 đường thẳng đó. Đếm số hình bình hành nhiều nhất được tạo thành có đỉnh là các giao điểm nói trên.

A. 2017.2018.

B. $C_{2017}^4 + C_{2018}^4$.

C. $C_{2017}^2 \cdot C_{2018}^2$.

D. 2017 + 2018.

Lời giải

Mỗi hình bình hành tạo thành từ hai cặp cạnh song song nhau. Vì vậy số hình bình hành tạo thành chính là số cách chọn 2 cặp đường thẳng song song trong hai nhóm đường thẳng trên.

Chọn 2 đường thẳng song song từ 2017 đường thẳng song song có C_{2017}^2 .

Chọn 2 đường thẳng song song từ 2018 đường thẳng song song có C_{2018}^2 .

Vậy có $C_{2017}^2 \cdot C_{2018}^2$.

Câu 63: Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số dạng $\overline{abc}$ với $a, b, c \in \{0;1;2;3;4;5;6\}$ sao cho $a < b < c$.

A. 120.

B. 30.

C. 40.

D. 20.

Lời giải

Vì số tự nhiên có ba chữ số dạng $\overline{abc}$ với $a, b, c \in \{0;1;2;3;4;5;6\}$ sao cho $a < b < c$ nên $a, b, c \in \{1;2;3;4;5;6\}$. Suy ra số các số có dạng $\overline{abc}$ là $C_6^3 = 20$.

Câu 64: Một tổ có 6 học sinh nam và 9 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 6 học sinh đi lao động, trong đó có đúng 2 học sinh nam?

A. $C_6^2 + C_9^4$.

B. $C_6^2 C_{13}^4$.

C. $A_6^2 A_9^4$.

D. $C_6^2 C_9^4$.

Lời giải

Chọn 2 học sinh nam, có C_6^2 cách.

Chọn 4 học sinh nữ, có C_9^4 cách.

Vậy có $C_6^2 C_9^4$ cách chọn thỏa yêu cầu bài toán.

Các phương án A, B, C, D chỉ gõ mò nên không được chính xác do ảnh mờ quá không nhìn rõ được.

Câu 65: Một tổ công nhân có 12 người. Cần chọn 3 người, một người làm tổ trưởng, một tổ phó và một thành viên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

A. 220.

B. $12!$.

C. 1320.

D. 1230.

Lời giải

Số cách chọn 3 người, một người làm tổ trưởng, một tổ phó và một thành viên là

$$C_{12}^1 C_{11}^1 C_{10}^1 = 1320$$

Câu 66: Bình A chứa 3 quả cầu xanh, 4 quả cầu đỏ và 5 quả cầu trắng. Bình B chứa 4 quả cầu xanh, 3 quả cầu đỏ và 6 quả cầu trắng. Bình C chứa 5 quả cầu xanh, 5 quả cầu đỏ và 2 quả cầu trắng. Từ mỗi bình lấy ra một quả cầu. Có bao nhiêu cách lấy để cuối cùng được 3 quả có màu giống nhau.

A. 180.

B. 150.

C. 120.

D. 60.

Lời giải

Trường hợp 1: Lấy được 3 quả cầu xanh từ 3 bình: Số cách lấy: $C_3^1 C_4^1 C_5^1 = 60$

Trường hợp 2: Lấy được 3 quả cầu đỏ từ 3 bình: Số cách lấy: $C_4^1 C_3^1 C_5^1 = 60$

Trường hợp 3: Lấy được 3 quả cầu trắng từ 3 bình: Số cách lấy: $C_5^1 C_6^1 C_2^1 = 60$

Vậy có $60.3 = 180$ cách lấy được 3 quả cùng màu từ 3 bình.

Câu 67: Tổ 1 lớp 11A có 6 học sinh nam và 5 học sinh nữ. Giáo viên chủ nhiệm cần chọn ra 4 học sinh của tổ 1 để lao động vệ sinh cùng cả trường. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 4 học sinh trong đó có ít nhất một học sinh nam?

A. 600.

B. 25.

C. 325.

D. 30.

Lời giải

Trường hợp 1: Chọn 1 nam và 3 nữ.

Trường hợp 2: Chọn 2 nam và 2 nữ.

Trường hợp 3: Chọn 3 nam và 1 nữ.

Trường hợp 4: Chọn 4 nam.

Số cách chọn cần tìm là $C_6^1 C_5^3 + C_6^2 C_5^2 + C_6^3 C_5^1 + C_6^4 = 325$ cách chọn.

Câu 68: Một câu lạc bộ có 25 thành viên. Số cách chọn một ban quản lý gồm 1 chủ tịch, 1 phó chủ tịch và 1 thư ký là:

A. 13800.

B. 5600.

C. Một kết quả khác.

D. 6900.

Lời giải

Mỗi cách chọn 3 người ở 3 vị trí là một chỉnh hợp chập 3 của 25 thành viên.

Số cách chọn là: $A_{25}^3 = 13800$.

Câu 69: Một nhóm gồm 6 học sinh nam và 7 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn từ đó ra 3 học sinh tham gia văn nghệ sao cho luôn có ít nhất một học sinh nam.

A. 245.

B. 3480.

C. 336.

D. 251.

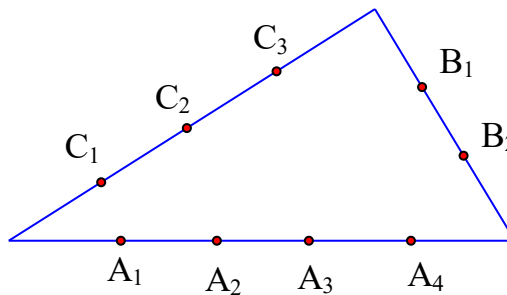
Lời giải

Chọn ra 3 học sinh tham gia văn nghệ trong 13 học sinh tùy ý có C_{13}^3 cách.

Chọn ra 3 học sinh tham gia văn nghệ trong 7 học sinh nữ có C_7^3 cách.

Vậy chọn ra 3 học sinh tham gia văn nghệ sao cho luôn có ít nhất một học sinh nam có $C_{13}^3 - C_7^3 = 251$.

Câu 70: Cho một tam giác, trên ba cạnh của nó lấy 9 điểm như hình vẽ. Có tất cả bao nhiêu tam giác có ba đỉnh thuộc 9 điểm đã cho?



A. 79.

B. 48.

C. 55.

D. 24.

Lời giải

Bộ 3 điểm bất kỳ được chọn từ 9 điểm đã cho có C_9^3 bộ.

Bộ 3 điểm không tạo thành tam giác có $C_3^3 + C_4^3$ bộ.

Vậy số tam giác tạo thành từ 9 điểm đã cho có: $C_9^3 - (C_3^3 + C_4^3) = 79$.

Câu 71: Có 14 người gồm 8 nam và 6 nữ. Số cách chọn 6 người trong đó có đúng 2 nữ là

A. 1078.

B. 1414.

C. 1050.

D. 1386.

Lời giải

Số cách chọn 6 người trong đó có đúng 2 nữ là $C_6^2 \cdot C_8^4 = 1050$ cách.

Câu 72: Ngân hàng đề thi gồm 15 câu hỏi trắc nghiệm khác nhau và 8 câu hỏi tự luận khác nhau. Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề thi sao cho mỗi đề thi gồm 10 câu hỏi trắc nghiệm khác nhau và 4 câu hỏi tự luận khác nhau.

A. $C_{15}^{10} \cdot C_8^4$.

B. $C_{15}^{10} + C_8^4$.

C. $A_{15}^{10} \cdot A_8^4$.

D. $A_{15}^{10} + A_8^4$.

Lời giải

Để lập được một đề thi gồm 10 câu hỏi trắc nghiệm khác nhau và 4 câu hỏi tự luận khác nhau ta thực hiện qua 2 giai đoạn.

Giai đoạn 1: Chọn 10 câu hỏi trắc nghiệm khác nhau từ 15 câu hỏi trắc nghiệm khác nhau có C_{15}^{10} cách chọn.

Giai đoạn 2: Chọn 4 câu hỏi tự luận khác nhau từ 8 câu hỏi tự luận khác nhau có C_8^4 cách chọn.

Theo quy tắc nhân có $C_{15}^{10} \cdot C_8^4$ cách lập đề thi.

Câu 73: Một tổ có 5 học sinh nữ và 6 học sinh nam. Số cách chọn ngẫu nhiên 5 học sinh của tổ trong đó có cả học sinh nam và học sinh nữ là?

A. 545.

B. 462.

C. 455.

D. 456.

Lời giải

Chọn 5 học sinh bất kỳ từ tổ 11 học sinh có số cách chọn là C_{11}^5 .

Số cách chọn 5 học sinh mà chỉ toàn nữ hoặc toàn nam là $C_5^5 + C_6^5$.

Số cách chọn ngẫu nhiên 5 học sinh của tổ trong đó có cả học sinh nam và học sinh nữ là $C_{11}^5 - (C_5^5 + C_6^5) = 455$.

Câu 74: Từ các chữ số 2, 3, 4 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 9 chữ số, trong đó chữ số 2 có mặt 2 lần, chữ số 3 có mặt 3 lần, chữ số 4 có mặt 4 lần?

A. 1260.

B. 40320.

C. 120.

D. 1728.

Lời giải

Cách 1: dùng tổ hợp

Chọn vị trí cho 2 chữ số 2 có C_9^2 cách.

Chọn vị trí cho 3 chữ số 3 có C_7^3 cách.

Chọn vị trí cho 4 chữ số 4 có C_4^4 cách.

Vậy số các số tự nhiên thỏa yêu cầu bài toán là $C_9^2 C_7^3 C_4^4 = 1260$ số.

Cách 2: dùng hoán vị lặp

Số các số tự nhiên thỏa yêu cầu bài toán là $\frac{9!}{2!3!4!} = 1260$ số.

Câu 75: Trong mặt phẳng cho tập hợp P gồm 10 điểm phân biệt trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Số tam giác có 3 đỉnh đều thuộc P là

A. 10^3 .

C. A_{10}^3 .

C. C_{10}^3 .

D. A_{10}^7 .

Lời giải

Với 3 điểm phân biệt không thẳng hàng, tạo thành duy nhất 1 tam giác.

Vậy, với 10 điểm phân biệt trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng, số tam giác tạo thành là C_{10}^3 .

Câu 76: Có 15 học sinh giỏi gồm 6 học sinh khối 12, 4 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 6 học sinh sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh?

A. 4249.

B. 4250.

C. 5005.

D. 805.

Lời giải

Số cách chọn 6 học sinh bất kỳ trong 15 học sinh là $C_{15}^6 = 5005$.

Số cách chọn 6 học sinh chỉ có khối 12 là $C_6^6 = 1$ cách.

Số cách chọn 6 học sinh chỉ có khối 10 và 11 là $C_9^6 = 84$ cách.

Số cách chọn 6 học sinh chỉ có khối 10 và 12 là $C_{11}^6 - C_6^6 = 461$ cách.

Số cách chọn 6 học sinh chỉ có khối 11 và 12 là $C_{10}^6 - C_6^6 = 209$ cách.

Do đó số cách chọn 6 học sinh sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh là $5005 - 1 - 84 - 461 - 209 = 4250$ cách.

Câu 77: Từ một tập gồm 10 câu hỏi, trong đó có 4 câu lý thuyết và 6 câu bài tập, người ta cấu tạo thành các đề thi. Biết rằng trong một đề thi phải gồm 3 câu hỏi trong đó có ít nhất 1 câu lý thuyết và 1 câu hỏi bài tập. Hỏi có thể tạo được bao nhiêu đề như trên?

A. 60 .

B. 96 .

C. 36 .

D. 100 .

Lời giải

TH1: chọn 2 câu lý thuyết và 1 câu bài tập có: $C_4^2 \cdot C_6^1$ cách.

TH1: chọn 1 câu lý thuyết và 2 câu bài tập có: $C_4^1 \cdot C_6^2$ cách.

Vậy số cách lập đề thỏa điều kiện bài toán là 96 cách.

Câu 78: Cho hai dãy ghế được xếp như sau:

Dãy 1	Ghế số 1	Ghế số 2	Ghế số 3	Ghế số 4
Dãy 2	Ghế số 1	Ghế số 2	Ghế số 3	Ghế số 4

Xếp 4 bạn nam và 4 bạn nữ vào hai dãy ghế trên. Hai người được gọi là ngồi đối diện với nhau nếu ngồi ở hai dãy và có cùng vị trí ghế. Số cách xếp để mỗi bạn nam ngồi đối diện với một bạn nữ bằng

A. $4! \cdot 4! \cdot 2$.

B. $4! \cdot 4! \cdot 2^4$.

C. $4! \cdot 2$.

D. $4! \cdot 4!$.

Lời giải

Chọn 1 bạn ngồi vào ghế số 1: 8 cách. Có 4 cách chọn 1 bạn ngồi vào ghế số 1.

Chọn 1 bạn ngồi vào ghế số 2: 6 cách. Có 3 cách chọn 1 bạn ngồi vào ghế số 2.

Chọn 4 bạn ngồi vào ghế số 3: 4 cách. Có 2 cách chọn 1 bạn ngồi vào ghế số 3.

Chọn 1 bạn ngồi vào ghế số 4: 2 cách. Có 1 cách chọn 1 bạn ngồi vào ghế số 4.

Câu 79: Giải bóng đá V-LEAGUE 2018 có tất cả 14 đội bóng tham gia, các đội bóng thi đấu vòng tròn 2 lượt. Hỏi giải đấu có tất cả bao nhiêu trận đấu?

A. 182 .

B. 91 .

C. 196 .

D. 140 .

Lời giải

Số trận đấu là $A_{14}^2 = 182$.

Câu 80: Cho tập A gồm 20 phần tử. Có bao nhiêu tập con của A khác rỗng và số phần tử là số chẵn?

A. $2^{19} - 1$.

B. $2^{20} - 1$.

C. 2^{20} .

D. 2^{19} .

Lời giải

Xét khai triển $(1+x)^{20} = C_{20}^0 + C_{20}^1 x + C_{20}^2 x^2 + C_{20}^3 x^3 + \dots + C_{20}^{19} x^{19} + C_{20}^{20} x^{20}$.

Khi $x = 1$ ta có $2^{20} = C_{20}^0 + C_{20}^1 + C_{20}^2 + C_{20}^3 + \dots + C_{20}^{19} + C_{20}^{20}$ (1)

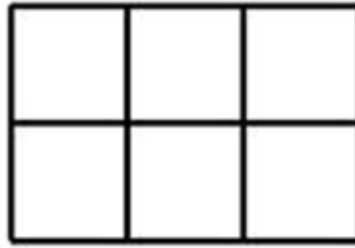
Khi $x = -1$ ta có $0 = C_{20}^0 - C_{20}^1 + C_{20}^2 - C_{20}^3 + \dots - C_{20}^{19} + C_{20}^{20}$ (2)

Cộng vế theo vế (1) và (2) ta được:

$$2^{20} = 2(C_{20}^0 + C_{20}^2 + \dots + C_{20}^{20}) \Rightarrow 2^{19} - 1 = C_{20}^2 + C_{20}^4 + \dots + C_{20}^{20}.$$

Vậy số tập con của A khác rỗng và số phần tử là số chẵn là $2^{19} - 1$ phần tử.

Câu 81: Bé Minh có một bảng hình chữ nhật gồm 6 hình vuông đơn vị, cố định không xoay như hình vẽ. Bé muốn dùng 3 màu để tô tất cả các cạnh của các hình vuông đơn vị, mỗi cạnh tô một lần sao cho mỗi hình vuông đơn vị được tô bởi đúng 2 màu, trong đó mỗi màu tô đúng 2 cạnh. Hỏi bé Minh có tất cả bao nhiêu cách tô màu bảng?



A. 4374.

B. 139968.

C. 576.

D. 15552.

Lời giải

Tô màu theo nguyên tắc:

Tô 1 ô vuông 4 cạnh: chọn 2 trong 3 màu, ứng với 2 màu được chọn có 6 cách tô. Do đó, có $6.C_3^2$ cách tô.

Tô 3 ô vuông 3 cạnh: ứng với 1 ô vuông có 3 cách tô màu 1 trong 3 cạnh theo màu của cạnh đã tô trước đó, chọn 1 trong 2 màu còn lại tô 2 cạnh còn lại, có $3.C_2^1 = 6$ cách tô. Do đó có 6^3 cách tô.

Tô 2 ô vuông 2 cạnh: ứng với 1 ô vuông có 2 cách tô màu 2 cạnh. Do đó có 2^2 cách tô.

Vậy có: $6.C_3^2.6^3.4 = 15552$ cách tô.

Câu 82: Có bao nhiêu số tự nhiên có bảy chữ số khác nhau từng đôi một, trong đó chữ số 2 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 3.

A. 3204 số.

B. 249 số.

C. 2942 số.

D. 7440 số.

Lời giải

Vì chữ số 2 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 3 nên số cần lập có bộ ba số 123 hoặc 321.

TH1: Số cần lập có bộ ba số 123.

Nếu bộ ba số 123 đứng đầu thì số có dạng $\overline{123abcd}$.

Có $A_7^4 = 840$ cách chọn bốn số a, b, c, d nên có $A_7^4 = 840$ số.

Nếu bộ ba số 123 không đứng đầu thì số có 4 vị trí đặt bộ ba số 123.

Có 6 cách chọn số đứng đầu và có $A_6^3 = 120$ cách chọn ba số b, c, d .

Theo quy tắc nhân có $6.4.A_6^3 = 2880$ số

Theo quy tắc cộng có $840 + 2880 = 3720$ số.

TH2: Số cần lập có bộ ba số 321.

Do vai trò của bộ ba số 123 và 321 như nhau nên có $2(840 + 2880) = 7440$

Câu 83: Có 3 viên bi đen khác nhau, 4 viên bi đỏ khác nhau, 5 viên bi xanh khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp các viên bi trên thành dãy sao cho các viên bi cùng màu ở cạnh nhau?

A. 345600.

B. 518400.

C. 725760.

D. 103680.

Lời giải.

Số cách xếp 3 viên bi đen khác nhau thành một dãy bằng: $3!$.

Số cách xếp 4 viên bi đỏ khác nhau thành một dãy bằng: $4!$.

Số cách xếp 5 viên bi đen khác nhau thành một dãy bằng: $5!$.

Số cách xếp 3 nhóm bi thành một dãy bằng: $3!$.

Vậy số cách xếp thỏa yêu cầu đề bài bằng $3! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 3! = 103680$ cách.

Câu 84: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ có 6 chữ số khác nhau và trong mỗi số đó tổng của ba chữ số đầu lớn hơn tổng của ba chữ số cuối một đơn vị

A. 32.

B. 72.

C. 36.

D. 24.

Lời giải

Gọi $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6}$ là số cần tìm

Ta có $a_6 \in \{1; 3; 5\}$ và $(a_1 + a_2 + a_3) - (a_4 + a_5 + a_6) = 1$

○ Với $a_6 = 1$ thì $(a_1 + a_2 + a_3) - (a_4 + a_5) = 2 \Rightarrow \begin{cases} a_1, a_2, a_3 \in \{2, 3, 6\} \\ a_4, a_5 \in \{4, 5\} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1, a_2, a_3 \in \{2, 4, 5\} \\ a_4, a_5 \in \{3, 6\} \end{cases}$

○ Với $a_6 = 3$ thì $(a_1 + a_2 + a_3) - (a_4 + a_5) = 4 \Rightarrow \begin{cases} a_1, a_2, a_3 \in \{2; 4; 5\} \\ a_4, a_5 \in \{1, 6\} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1, a_2, a_3 \in \{1, 4, 6\} \\ a_4, a_5 \in \{2, 5\} \end{cases}$

○ Với $a_6 = 5$ thì $(a_1 + a_2 + a_3) - (a_4 + a_5) = 6 \Rightarrow \begin{cases} a_1, a_2, a_3 \in \{2, 3, 6\} \\ a_4, a_5 \in \{1, 4\} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1, a_2, a_3 \in \{1, 4, 6\} \\ a_4, a_5 \in \{2, 3\} \end{cases}$

Mỗi trường hợp có $3! \cdot 2! = 12$ số thỏa mãn yêu cầu

Vậy có tất cả $6 \cdot 12 = 72$ số cần tìm.

Câu 85: Có 10 quyển sách toán giống nhau, 11 quyển sách lý giống nhau và 9 quyển sách hóa giống nhau. Có bao nhiêu cách trao giải thưởng cho 15 học sinh có kết quả thi cao nhất của khối A trong kì thi thử lần hai của trường THPT A, biết mỗi phần thưởng là hai quyển sách khác loại?

A. $C_{15}^7 C_9^3$.

B. $C_{15}^6 C_9^4$.

C. $C_{15}^3 C_9^4$.

D. C_{30}^2 .

Lời giải

Có duy nhất một cách chia 30 quyển sách thành 15 bộ, mỗi bộ gồm hai quyển sách khác loại, trong đó có:

+ 4 bộ giống nhau gồm 1 toán và 1 hóa.

+ 5 bộ giống nhau gồm 1 hóa và 1 lí.

+ 6 bộ giống nhau gồm 1 lí và toán.

Số cách trao phần thưởng cho 15 học sinh được tính như sau:

+ Chọn ra 4 người để trao bộ sách toán và hóa $\Rightarrow$ có C_{15}^4 cách.

+ Chọn ra 5 người để trao bộ sách hóa và lí $\Rightarrow$ có C_{11}^5 cách.

+ Còn lại 6 người trao bộ sách toán và lí $\Rightarrow$ có 1 cách.

Vậy số cách trao phần thưởng là $C_{15}^4.C_{11}^5 = C_{15}^6.C_9^4 = 630630$.

Câu 86: Một trường cấp 3 của tỉnh Đồng Tháp có 8 giáo viên Toán gồm có 3 nữ và 5 nam, giáo viên Vật lý thì có 4 giáo viên nam. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một đoàn thanh tra công tác ôn thi THPTQG gồm 3 người có đủ 2 môn Toán và Vật lý và phải có giáo viên nam và giáo viên nữ trong đoàn?

A. 60.

B. 120.

C. 12960.

D. 90.

Lời giải

Vì chọn ra 3 người mà yêu cầu phải có giáo viên nam và giáo viên nữ trong đoàn nên số giáo viên nữ được chọn chỉ có thể bằng 1 hoặc 2. Ta xét hai trường hợp:

* Trường hợp 1: Chọn 1 giáo viên nữ: Có C_3^1 cách. Khi đó:

- Chọn 1 giáo viên nam môn Toán và 1 nam môn Vật lý: Có $C_5^1 \times C_4^1$ cách.

- Chọn 2 giáo viên nam môn Vật lý: Có C_4^2 cách.

Trường hợp này có $C_3^1 (C_5^1 \times C_4^1 + C_4^2)$ cách chọn.

* Trường hợp 2: Chọn 2 giáo viên nữ: Có C_3^2 cách chọn. Khi đó chọn thêm 1 giáo viên nam môn Vật lý: Có C_4^1 cách. Trường hợp này có $C_3^2 \times C_4^1$ cách chọn.

Vậy tất cả có $C_3^1 (C_5^1 \times C_4^1 + C_4^2) + C_3^2 \times C_4^1 = 90$ cách chọn.

Câu 87: Một túi có 14 viên bi gồm 5 viên bi màu trắng được đánh số từ 1 đến 5; 4 viên bi màu đỏ được đánh số từ 1 đến 4; 3 viên bi màu xanh được đánh số từ 1 đến 3 và 2 viên màu vàng được đánh số từ 1 đến 2. Có bao nhiêu cách chọn 3 viên bi từng đôi khác số?

A. 243.

B. 190.

C. 120.

D. 184.

Lời giải

Có C_{14}^3 cách chọn 3 viên bi tùy ý.

Chọn 3 viên bi cùng số 1 có $C_4^3 = 4$ cách chọn.

Chọn 3 viên bi cùng số 2 có $C_4^3 = 4$ cách chọn.

Chọn 3 viên bi cùng số 3 có 1 cách chọn.

Chọn 2 viên số 1 và 1 viên khác số 1 có $C_4^2.C_{10}^1 = 60$.

Chọn 2 viên số 2 và 1 viên khác số 2 có $C_4^2.C_{10}^1 = 60$.

Chọn 2 viên số 3 và 1 viên khác số 3 có $C_3^2.C_{11}^1 = 33$.

Chọn 2 viên số 4 và 1 viên khác số 4 có $C_2^2.C_{12}^1 = 12$.

Như vậy số cách chọn theo yêu cầu là $C_{14}^3 - 4 - 4 - 1 - 60 - 60 - 33 - 12 = 190$.

Câu 88: Thầy A có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu khó, 10 câu trung bình và 15 câu dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho trong mỗi đề nhất thiết phải có đủ cả 3 câu và số câu dễ không ít hơn 2?

A. 56875 .

B. 42802 .

C. 41811 .

D. 32023 .

Lời giải

TH1: Trong 5 câu có 2 câu dễ, 2 câu trung bình và 1 câu khó, có : $C_{15}^2 \cdot C_{10}^2 \cdot C_5^1 = 23625$ đề.

TH2: Trong 5 câu có 2 câu dễ, 1 câu trung bình và 2 câu khó, có : $C_{15}^2 \cdot C_{10}^1 \cdot C_5^2 = 10500$ đề.

TH3: Trong 5 câu có 3 câu dễ, 1 câu trung bình và 1 câu khó, có : $C_{15}^3 \cdot C_{10}^1 \cdot C_5^1 = 22750$ đề.

Vậy tất cả có số đề là : $23625 + 10500 + 22750 = 56875$ đề.

Câu 89: Có 15 học sinh giỏi gồm 6 học sinh khối 12, 4 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 6 học sinh sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh?

A. 4249 .

B. 4250 .

C. 5005 .

D. 805 .

Lời giải

Số cách chọn 6 học sinh bất kỳ trong 15 học sinh là $C_{15}^6 = 5005$.

Số cách chọn 6 học sinh chỉ có khối 12 là $C_6^6 = 1$ cách.

Số cách chọn 6 học sinh chỉ có khối 10 và 11 là $C_9^6 = 84$ cách.

Số cách chọn 6 học sinh chỉ có khối 10 và 12 là $C_{11}^6 - C_6^6 = 461$ cách.

Số cách chọn 6 học sinh chỉ có khối 11 và 12 là $C_{10}^6 - C_6^6 = 209$ cách.

Do đó số cách chọn 6 học sinh sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh là $5005 - 1 - 84 - 461 - 209 = 4250$ cách.

Câu 90: Trong một giải cờ vua gồm nam và nữ vận động viên. Mỗi vận động viên phải chơi hai ván với mỗi động viên còn lại. Cho biết có 2 vận động viên nữ và cho biết số ván các vận động viên chơi nam chơi với nhau hơn số ván họ chơi với hai vận động viên nữ là 84. Hỏi số ván tất cả các vận động viên đã chơi?

A. 168 .

B. 156 .

C. 132 .

D. 182 .

Lời giải

Gọi số vận động viên nam là n .

Số ván các vận động viên nam chơi với nhau là $2.C_n^2 = n(n-1)$.

Số ván các vận động viên nam chơi với các vận động viên nữ là $2.2.n = 4n$.

Vậy ta có $n(n-1) - 4n = 84 \Rightarrow n = 12$.

Vậy số ván các vận động viên chơi là $2C_{14}^2 = 182$.

Câu 91: Một lớp học có 30 bạn học sinh trong đó có 3 cán sự lớp. Hỏi có bao nhiêu cách cử 4 bạn học sinh đi dự đại hội đoàn trường sao cho trong 4 học sinh đó có ít nhất một cán sự lớp.

A. 23345 .

B. 9585 .

C. 12455 .

D. 9855 .

Lời giải

* Số cách cử 4 bạn học sinh trong 30 bạn là: $C_{30}^4 = 27405$.

* Số cách cử 4 bạn học sinh trong 27 bạn trong đó không có cán sự lớp là: $C_{27}^4 = 17550$.

* Vậy số cách cử 4 bạn học sinh trong đó có ít nhất một cán sự lớp là: $27405 - 17550 = 9855$.

Câu 92: Có 3 bạn nam và 3 bạn nữ được xếp vào một ghế dài có 6 vị trí. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho nam và nữ ngồi xen kẽ lẫn nhau?

A. 48.

B. 72.

C. 24.

D. 36.

Lời giải

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

Giả sử ghế dài được đánh số như hình vẽ.

Có hai trường hợp: Một nữ ngồi ở vị trí số 1 hoặc một nam ngồi ở vị trí số 1. Ứng với mỗi trường hợp sắp xếp 3 bạn nam và 3 bạn nữ ngồi xen kẽ lẫn nhau có $3!.3!$.

Vậy có $2.3!.3! = 72$.

Câu 93: Có 6 học sinh và 3 thầy giáo A, B, C . Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ 9 người đó ngồi trên một hàng ngang có 9 chỗ sao cho mỗi thầy giáo ngồi giữa hai học sinh.

A. 4320.

B. 90.

C. 43200.

D. 720.

Lời giải

Sắp 6 học sinh thành một hàng ngang, giữa 6 học sinh có 5 khoảng trống, ta chọn 3 khoảng trống và đưa 3 giáo viên vào được cách sắp thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy tất cả có : $6!.A_5^3 = 43200$ cách.

Câu 94: Từ 2 chữ số 1 và 8 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 8 chữ số sao cho không có 2 chữ số 1 đứng cạnh nhau?

A. 54.

B. 110.

C. 55.

D. 108

Lời giải

TH1: Có 8 chữ số 8.

Có 1 số

TH2: Có 1 chữ số 1, 7 chữ số 8.

Có 8 cách xếp chữ số 1 nên có 8 số.

TH3: Có 2 chữ số 1, 6 chữ số 8.

Xếp 6 số 8 ta có 1 cách.

Từ 6 số 8 ta có có 7 chỗ trống để xếp 2 số 1.

Nên ta có: $C_7^2 = 21$ số.

TH4: Có 3 chữ số 1, 5 chữ số 8.

Tương tự **TH3**, từ 5 chữ số 8 ta có 6 chỗ trống để xếp 3 chữ số 1.

Nên có: $C_6^3 = 20$ số.

TH5: Có 4 chữ số 1, 4 chữ số 8.

Từ 4 chữ số 8 ta có 5 chỗ trống để xếp 4 chữ số 1.

Nên có: $C_5^4 = 5$.

Vậy có: $1 + 8 + 21 + 20 + 5 = 55$ số.

Câu 95: Có hai học sinh lớp A , ba học sinh lớp B và bốn học sinh lớp C xếp thành một hàng ngang sao cho giữa hai học sinh lớp A không có học sinh nào lớp B . Hỏi có bao nhiêu cách xếp hàng như vậy ?

A. 80640

B. 108864

C. 145152

D. 217728

Lời giải

Xét các trường hợp sau :

TH1: Hai học sinh lớp A đứng cạnh nhau có $2!.8!$ cách.

TH2: Giữa hai học sinh lớp A có một học sinh lớp C có $2!.A_4^1.7!$ cách.

TH3: Giữa hai học sinh lớp A có hai học sinh lớp C có $2!.A_4^2.6!$ cách.

TH4: Giữa hai học sinh lớp A có ba học sinh lớp C có $2!.A_4^3.5!$ cách.

TH5: Giữa hai học sinh lớp A có bốn học sinh lớp C có $2!.A_4^4.4!$ cách.

Vậy theo quy tắc cộng có $2!(8! + A_4^1 7! + A_4^2 6! + A_4^3 5! + A_4^4 4!) = 145152$ cách.

Câu 96: Có 4 cặp vợ chồng được xếp ngồi trên một chiếc ghế dài có 8 chỗ. Biết rằng mỗi người vợ chỉ ngồi cạnh chồng của mình hoặc ngồi cạnh một người phụ nữ khác. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi thỏa mãn.

A. 816 .

B. 18 .

C. 8! .

D. 604 .

Lời giải

TH1: Chỉ có một cặp vợ chồng ngồi cạnh nhau, khi đó buộc các bà vợ phải ngồi cùng một bên, các ông chồng ngồi cùng một bên so với cặp vợ chồng đó.

$\Rightarrow$ có $(2.3!.3!).A_4^1 = 288$.

TH2: Có đúng hai cặp vợ chồng ngồi cạnh nhau $\Rightarrow$ có $2.A_4^2.2.6 = 288$.

TH3: Có đúng ba cặp vợ chồng ngồi cạnh nhau $\Rightarrow$ có $2.A_4^3.2.2 = 192$.

TH4: Tất cả 4 cặp vợ chồng ngồi cạnh nhau $\Rightarrow$ có $2.A_4^4 = 48$.

Vậy có tất cả là $288 + 288 + 192 + 48 = 816$ thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 97: Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số 5,6,7,8,9. Tính tổng tất cả các số thuộc tập S .

A. 9333420.

B. 46666200.

C. 9333240.

D. 46666240.

Lời giải

Số các số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau được lập từ 5,6,7,8,9 là $5! = 120$ số.

Vì vai trò các chữ số như nhau nên mỗi chữ số 5,6,7,8,9 xuất hiện ở hàng đơn vị là $4! = 24$ lần.

Tổng các chữ số ở hàng đơn vị là $24(5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 840$.

Tương tự thì mỗi lần xuất hiện ở các hàng chục, trăm, nghìn, chục nghìn của mỗi chữ số là 24 lần.

Vậy tổng các số thuộc tập S là $840(1+10+10^2+10^3+10^4)=9333240$.

Câu 98: Cho đa giác đều 2018 đỉnh. Hỏi có bao nhiêu tam giác có đỉnh là đỉnh của đa giác và có một góc lớn hơn 100° ?

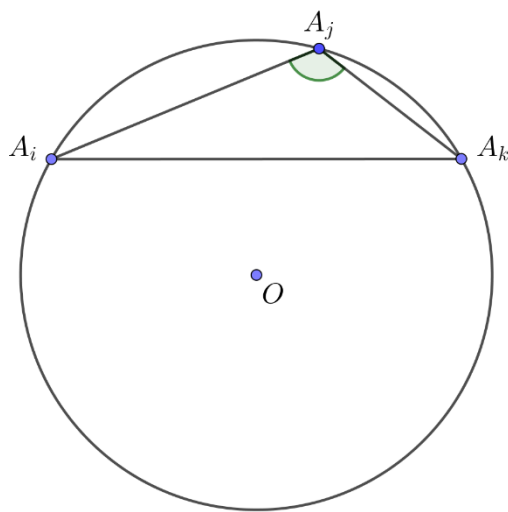
A. $2018.C_{897}^3$.

B. C_{1009}^3 .

C. $2018.C_{895}^3$.

D. $2018.C_{896}^2$.

Lời giải



Gọi $A_1, A_2, \dots, A_{2018}$ là các đỉnh của đa giác đều 2018 đỉnh.

Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp đa giác đều $A_1 A_2 \dots A_{2018}$.

Các đỉnh của đa giác đều chia (O) thành 2018 cung tròn bằng nhau, mỗi cung tròn có số đo bằng $\frac{360^\circ}{2018}$.

Vì tam giác cần đếm có đỉnh là đỉnh của đa giác nên các góc của tam giác là các góc nội tiếp của (O) .

Suy ra góc lớn hơn 100° sẽ chắn cung có số đo lớn hơn 200° .

Cố định một đỉnh A_i . Có 2018 cách chọn A_i .

Gọi A_i, A_j, A_k là các đỉnh sắp thứ tự theo chiều kim đồng hồ sao cho cung nhỏ $\widehat{A_i A_k} < 160^\circ$ thì cung lớn $\widehat{A_i A_k} > 360 - 160 = 200^\circ \Rightarrow \widehat{A_i A_j A_k} > 100^\circ$ và tam giác $A_i A_j A_k$ là tam giác cần đếm.

Khi đó $\widehat{A_i A_k}$ là hợp liên tiếp của nhiều nhất $\left\lfloor \frac{\frac{160}{360}}{\frac{1}{2018}} \right\rfloor = 896$ cung tròn nói trên.

896 cung tròn này có 897 đỉnh. Trừ đi đỉnh A_i thì còn 896 đỉnh. Do đó có C_{896}^2 cách chọn hai đỉnh A_j, A_k .

Vậy có tất cả $2018.C_{896}^2$ tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán.

🔗 **Chú ý:** Phân tích sai lầm khi giải bài tập này:

Giả sử $\widehat{A_m A_n A_p} > 100^\circ$ thì cung $\widehat{A_m A_p}$ sẽ có số đo lớn hơn 200° .

Tức là cung $\widehat{A_m A_p}$ sẽ là hợp liên tiếp của ít nhất $\left\lceil \frac{\frac{200}{360}}{2018} \right\rceil + 1 = 1122$ cung tròn bằng nhau nói trên.

Từ đó ta có cách dựng tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán như sau:

+ Bước 1: Đánh dấu một cung tròn là hợp liên tiếp của 1122 cung tròn bằng nhau nói trên. Có 2018 cách đánh dấu.

+ Bước 2: Trong $2018 - 1121 = 897$ điểm không thuộc cung tròn ở bước 1, chọn ra 3 điểm bất kì, có C_{897}^3 cách chọn, 3 điểm này sẽ tạo thành tam giác có một góc lớn hơn 100° .

Vậy có tất cả $2018 \cdot C_{897}^3$ tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách lập luận này là không chính xác, vì ta chưa trừ đi các trường hợp trùng nhau!



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM QUY TẮC ĐẾM-HOÁN VỊ-CHỈNH HỢP-TỔ HỢP 1

1. Trắc nghiệm Bài toán Đếm (Đề 01)

Câu 1. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số có bốn chữ số chia hết cho 2? Kết quả cần tìm là:

- A. 1792 B. 2240 C. 2304 D. 2048

Câu 2. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau và chia hết cho 5? Kết quả cần tìm là:

- A. 60 B. 280 C. 78 D. 55

Câu 3. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau và không chia hết cho 2? Kết quả cần tìm là:

- A. 2048 B. 2560 C. 1680 D. 2304

Câu 4. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau và không chia hết cho 5? Kết quả cần tìm là:

- A. 3584 B. 1900 C. 2240 D. 1680

Câu 5. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số có ba chữ số không chia hết cho 3? Kết quả cần tìm là:

- A. 60 B. 20 C. 50 D. 78

Câu 6. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau và chia hết cho 3? Kết quả cần tìm là:

- A. 930 B. 20 C. 50 D. 78

Câu 7. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số có bốn chữ số và chia hết cho 4? Kết quả cần tìm là:

- A. 930 B. 120 C. 150 D. 288

Câu 8. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số có ba chữ số và chia hết cho 9? Kết quả cần tìm là:

- A. 930 B. 120 C. 150 D. 81

Câu 9. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau từng đôi một, đồng thời chia hết cho 4? Kết quả cần tìm là:

- A. 30 B. 20 C. 50 D. 74

Câu 10. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số có ba chữ số và chia hết cho 8? Kết quả cần tìm là:

- A. 30 B. 24 C. 50 D. 38

Câu 11. Từ các chữ số 0, 1, 5, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau và không chia hết cho 9? Kết quả cần tìm là:

- A. 30 B. 20 C. 50 D. 38

Câu 12. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau từng đôi một và chia hết cho 6. Kết quả cần tìm là:

- A. 12 B. 20 C. 10 D. 8

Câu 13. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau từng đôi một và chia hết cho 6. Kết quả cần tìm là:

- A. 12 B. 20 C. 10 D. 8

Câu 14. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau từng đôi một và chia hết cho 15. Kết quả cần tìm là:

- A. 12 B. 14 C. 10 D. 8

Câu 15. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số có bốn chữ số chia hết cho 15. Kết quả cần tìm là:

- A. 145 B. 163 C. 87 D. 108

Câu 16. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số có bốn chữ số chia hết cho 20. Kết quả cần tìm là:

- A. 500 B. 180 C. 270 D. 450

Câu 17. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số có bốn chữ số chia hết cho 25. Kết quả cần tìm là:

- A. 300 B. 360 C. 105 D. 150

Câu 18. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau từng đôi một và chia hết cho 25. Kết quả cần tìm là:

- A. 105 B. 120 C. 154 D. 178

Câu 19. Cho các chữ số: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Từ các chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số thỏa mãn số đó chia hết cho 2 và chữ số 4, 5 phải luôn đứng cạnh nhau?

- A. 300 số B. 114 số C. 225 số D. 120 số

Câu 20. Có bao nhiêu chữ số có 5 chữ số khác nhau chia hết cho 5 mà trong biểu diễn thập phân của nó không có các chữ số 7, 8, 9?

- A. 660 số B. 500 số C. 626 số D. 520 số

Câu 21. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số **đôi một** khác nhau chia hết cho 2 và thỏa mãn điều kiện một trong hai chữ số đầu tiên phải là 7?

- A. 55 số B. 56 số C. 57 số D. 66 số

Câu 22. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu chữ số có 3 chữ số chia hết cho 3 và thỏa mãn điều kiện đó phải nhỏ hơn 620?

- A. 60 số B. 69 số C. 62 số D. 61 số

Câu 23. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được:

- (a) 52 số tự nhiên có ba chữ số khác nhau chia hết cho 2.
(b) 40 số tự nhiên có ba chữ số khác nhau chia hết cho 3.
(c) 35 số tự nhiên có ba chữ số khác nhau chia hết cho 5.

Trong các phát biểu trên, số phát biểu **sai** là:

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

Câu 24. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau chia hết cho 5? Kết quả cần tìm là

- A. 105 B. 220 C. 336 D. 448

Câu 25. Từ các chữ số 2, 4, 6, 8 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số khác nhau chia hết cho 3?

- A. 12 B. 20 C. 8 D. 4

Câu 26. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 có thể lập được:

- (a) 1512 số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau chia hết cho 2.
(b) 1745 số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau chia hết cho 3.
(c) 630 số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau chia hết cho 5.

Trong các phát biểu trên, số phát biểu **đúng** là:

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

Câu 27. Từ các chữ số 0, 1, 3, 5, 7, 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số khác nhau chia hết cho 2? Kết quả cần tìm là

- A. 20 B. 30 C. 40 D. 50

Câu 28. Có bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số đôi một khác nhau thỏa mãn chữ số đầu tiên là chữ số lẻ?

A. 1400

B. 8400

C. 2520

D. 15120

Câu 29. Cho tập $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$. Từ A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau thỏa mãn điều kiện: Số đó bắt buộc phải có chữ số 5 và không chia hết cho 5?

A. 12600

B. 15120

C. 33600

D. 105

Câu 30. Cho tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$. Từ A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số và không chia hết cho 5?

A. 2352

B. 392

C. 3584

D. 4536

Câu 31. Cho tập $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 3 chữ số đôi một khác nhau sao cho số đó không lớn hơn 788?

A. 171

B. 172

C. 165

D. 166

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Chọn đáp án A

Gọi số cần tìm là số dạng $\overline{abcd}$. Vì $\overline{abcd}$ chia hết cho 2 suy ra $d = \{0; 2; 4; 6\}$.

TH1. Với $d = 0$, suy ra có 7 cách chọn a , 8 cách chọn b , 8 cách chọn c .

Khi đó, có $7 \times 8 \times 8 = 448$ số cần tìm.

TH2. Với $d = \{2; 4; 6\}$, suy ra có 7 cách chọn a , 8 cách chọn b , 8 cách chọn c .

Khi đó, có $3 \times 7 \times 8 \times 8 = 1344$ số cần tìm.

Vậy có 1792 số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2. Chọn đáp án B

Gọi số cần tìm là số dạng $\overline{abc}$. Vì $\overline{abcd}$ chia hết cho 5 suy ra $d = \{0; 5\}$.

TH1. Với $d = 0$, suy ra có 6 cách chọn a , 6 cách chọn b , 5 cách chọn c .

Khi đó, có $6 \times 6 \times 5 = 180$ số cần tìm.

TH2. Với $d = 5$, suy ra có 5 cách chọn a , 5 cách chọn b , 4 cách chọn c .

Khi đó, có $5 \times 5 \times 4 = 100$ số cần tìm.

Vậy có tất cả 280 số cần tìm.

Câu 3. Chọn đáp án C

Gọi $\overline{abcd}$ là số có bốn chữ số khác nhau và chia hết cho 2.

Khi đó $d = \{2; 4; 6; 8\} \Rightarrow d$ có 4 cách chọn suy ra có 8 cách chọn a , 7 cách chọn b , 6 cách chọn c .

Suy ra có $4 \times 7 \times 8 \times 6 = 1344$ số chia hết cho 2.

Số có bốn chữ số khác nhau được lập từ tập ban đầu là 3024 số.

Vậy có tất cả $3024 - 1344 = 1680$ số cần tìm.

Câu 4. Chọn đáp án A

Gọi $\overline{abcd}$ là số có bốn chữ số khác nhau và chia hết cho 5.

Khi đó $d = \{0; 5\}$, ta xét hai trường hợp:

TH1. Với $d = 0$, suy ra có 9 cách chọn a , 8 cách chọn b , 7 cách chọn c .

Khi đó, có $9 \times 8 \times 7 = 504$ số cần tìm.

TH2. Với $d = 5$, suy ra có 8 cách chọn a , 8 cách chọn b , 7 cách chọn c .

Khi đó, có $8 \times 8 \times 7 = 448$ số cần tìm. Suy ra có 952 số chia hết cho 5.

Và có $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$ số có bốn chữ số khác nhau được lập từ tập đã cho.

Vậy có tất cả $4536 - 952 = 3584$ số cần tìm.

Câu 5. Chọn đáp án A

Gọi $\overline{abc}$ là số chia hết cho 3. Khi đó $a + b + c : 3$.

Từ tập số $\{0; 1; 2; 3; 4\}$ suy ra $(a; b; c) = \left\{ (0; 1; 2), (0; 0; 3), (0; 3; 3), (3; 3; 3), (1; 2; 3), \right. \\ \left. (1; 1; 4), (0; 2; 4), (2; 3; 4), (1; 4; 4), (2; 2; 2), (1; 1; 1) \right\}$

Khi đó, có tất cả 40 số chia hết cho 3

Và có 100 số được lập từ tập số đã cho. Vậy có tất cả $100 - 40 = 60$ số cần tìm.

Câu 6. Chọn đáp án B

Gọi $\overline{abc}$ là số có ba chữ số và chia hết cho 3. Khi đó $a + b + c : 3$.

Từ tập số $\{0; 1; 2; 3; 4\}$ suy ra $(a; b; c) = \{(0; 1; 2), (1; 2; 3), (2; 3; 4), (0; 2; 4)\}$.

Do đó có tất cả $4 + 6 + 6 + 4 = 20$ số cần tìm.

Câu 7. Chọn đáp án D

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$. Vì $\overline{abcd}$ chia hết cho 4 suy ra $\overline{cd}$ chia hết cho 4.

Khi đó, bộ số $\overline{cd} = \{12, 16, 24, 32, 36, 44, 56, 64\}$.

Và với mỗi bộ số có $6 \times 6 = 36$ cách chọn hai chữ số $\overline{ab}$.

Vậy có tất cả $36 \times 8 = 288$ số cần tìm.

Câu 8. Chọn đáp án D

Gọi $\overline{abc}$ là số chia hết cho 9 suy ra $(a + b + c) : 9$.

Khi đó, bộ ba số $(a; b; c) = \{(0; 2; 7), (0; 3; 6), (0; 4; 5), (1; 1; 7), (1; 2; 6)\}$

Suy ra có $4 + 6 = 10$ số cần tìm.

Câu 9. Chọn đáp án D

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abc}$. Vì $\overline{abc}$ chia hết cho 4 suy ra $\overline{bc}$ chia hết cho 4.

Khi đó $\overline{bc} = \{04, 12, 16, 20, 24, 32, 36, 40, 52, 56, 60, 64, 72, 76\}$.

Suy ra có tất cả 74 số cần tìm.

Câu 10. Chọn đáp án B

Sử dụng phép đếm, ta có được 24 số chia hết cho 8.

Câu 11. Chọn đáp án D

Gọi $\overline{abc}$ là số chia hết cho 9 suy ra $(a + b + c) : 9$.

Khi đó, bộ ba số $(a; b; c) = \{(0; 1; 8), (1; 8; 9)\}$ suy ra có $4 + 6 = 10$ số cần tìm.

Mặt khác, có tất cả $4 \times 4 \times 3 = 48$ số có ba chữ số khác nhau được lập từ tập hợp đã cho.

Vậy có $48 - 10 = 38$ số cần tìm.

Câu 12. Chọn đáp án D

$$\text{Ta có } \overline{abc}:6 \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{abc}:2 \Rightarrow \begin{cases} c=2 \\ c=4 \end{cases} \\ \overline{abc}:3 \Leftrightarrow (a+b+c):3 \end{cases}$$

$$+) \text{ TH1. } c=2 \Rightarrow (a;b) = \{(1;3), (3;1), (3;4), (4;3)\}.$$

$$+) \text{ TH2. } c=4 \Rightarrow (a;b) = \{(2;3), (3;2), (3;5), (5;3)\}.$$

Câu 13. Chọn đáp án D

$$\text{Ta có } \overline{abc}:6 \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{abc}:2 \Rightarrow \begin{cases} c=2 \\ c=4 \end{cases} \\ \overline{abc}:3 \Leftrightarrow (a+b+c):3 \end{cases}$$

$$+) \text{ TH1. } c=2 \Rightarrow (a;b) = \{(1;3), (3;1), (3;4), (4;3)\}.$$

$$+) \text{ TH2. } c=4 \Rightarrow (a;b) = \{(2;3), (3;2), (3;5), (5;3)\}.$$

Câu 14. Chọn đáp án B

$$\text{Ta có } \overline{abc}:15 \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{abc}:3 \Leftrightarrow (a+b+c):3 \\ \overline{abc}:5 \Rightarrow \begin{cases} c=0 \\ c=5 \end{cases} \end{cases}$$

$$+) \text{ TH1. } c=0 \Rightarrow (a;b) = \{(1;2), (1;5), (2;1), (2;4), (4;2), (4;5), (5;1), (5;4)\}.$$

$$+) \text{ TH2. } c=5 \Rightarrow (a;b) = \{(1;0), (4;0), (1;3), (3;1), (3;4), (4;3)\}.$$

Tóm lại có tất cả 14 số thỏa mãn.

Câu 15. Chọn đáp án D

$$\text{Ta có } \overline{abcd}:15 \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{abcd}:5 \Rightarrow \begin{cases} d=0 \\ d=5 \end{cases} \\ \overline{abcd}:3 \Leftrightarrow (a+b+c+d):3 \end{cases}$$

$$+) \text{ TH1. } d=0 \Rightarrow (a+b+c):3, \text{ ta chọn được}$$

$$(3;0;0) \rightarrow 1$$

$$(1;0;2), (1;0;5), (2;0;4), (3;0;3), (4;0;5) \rightarrow 4.4+2=18$$

$$(1;1;1), (2;2;2), (3;3;3), (4;4;4), (5;5;5) \rightarrow 5$$

$$(1;1;4), (2;2;5), (4;4;1), (5;5;2) \rightarrow 3.4=12$$

$$(1;2;3), (1;3;5), (2;3;4) \rightarrow 6.3=18$$

$$+) \text{ TH2. } d=5 \Rightarrow (a+b+c+2):3, \text{ ta chọn được}$$

$$(1;0;0),(4;0;0) \rightarrow 2$$

$$(1;0;3),(2;0;2),(2;0;5),(3;0;4),(5;0;5) \rightarrow 4.3 + 2.2 = 16$$

$$(1;1;2),(1;1;5),(2;2;3),(3;3;1),(3;3;4),(4;4;2),(4;4;5),(5;5;3) \rightarrow 3.8 = 24$$

$$(1;2;4),(1;4;5) \rightarrow 6.2 = 12$$

Tóm lại có tất cả 108 số thỏa mãn.

Câu 16. Chọn đáp án D

$$\text{Ta có } \overline{abcd}:20 \Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ \overline{abcd}:4 \Leftrightarrow \overline{cd}:4 \end{cases} \Rightarrow c \in \{0;2;4;6;8\}.$$

Chọn a có 9 cách, chọn b có 10 cách nên có tất cả $5.9.10 = 450$ số thỏa mãn.

Câu 17. Chọn đáp án B

$$\text{Ta có } \overline{abcd}:25 \Rightarrow \overline{cd} \in \{00;25;50;75\}.$$

Chọn a có 9 cách, chọn b có 10 cách nên có tất cả $4.9.10 = 360$ số thỏa mãn.

Câu 18. Chọn đáp án C

$$\text{Ta có } \overline{abcd}:25 \Rightarrow \overline{cd} \in \{25;50;75\}.$$

Với $\overline{cd} = 25$, chọn a có 7 cách, chọn b có 7 cách nên có $7.7 = 49$ số thỏa mãn

Tương tự với $\overline{cd} = 75$.

Với $\overline{cd} = 50$, chọn a có 8 cách, chọn b có 7 cách nên có $8.7 = 56$ số thỏa mãn.

Tóm lại có tất cả $49 + 49 + 56 = 154$ số thỏa mãn.

Câu 19. Chọn đáp án B

$$\text{Ta có } \overline{abcd}:2 \Rightarrow c \in \{2;4;6;8\}.$$

Với $d = 4 \Rightarrow c = 5$, chọn a có 7 cách, chọn b có 7 cách nên có $7.7 = 49$ số thỏa mãn.

Với $d = 2$

+) Dạng $\overline{45c2}$ chọn c có 6 cách nên có 6 số thỏa mãn.

+) Dạng $\overline{a452}$ chọn a có 6 cách nên có 6 số thỏa mãn.

Đổi chỗ 4 và 5 thì có $2.(6+6) = 24$ số thỏa mãn.

Tương tự với $d = 6, d = 8 \Rightarrow$ có tất cả $42 + 3.24 = 114$ số thỏa mãn.

Câu 20. Chọn đáp án A

$$\text{Ta có } \overline{abcde}:5 \Rightarrow \begin{cases} e=0 \\ e=5 \end{cases}$$

+) TH1. $e = 0 \Rightarrow$ có $6.5.4.3 = 360$ số thỏa mãn.

+) TH2. $e = 5 \Rightarrow$ có $5.5.4.3 = 300$ số thỏa mãn.

Tóm lại có tất cả $360 + 300 = 660$ số thỏa mãn.

Câu 21. Chọn đáp án D

Ta xét hai trường hợp sau:

+) TH1. $\overline{7bcd}:2$, chọn d có 3 cách, b có 4 cách, c có 3 cách nên có $3.4.3 = 36$ số thỏa mãn.

+) TH2. $\overline{a7cd}:2$

Với $d = 0 \Rightarrow$ chọn a có 4 cách, c có 3 cách nên có $4.3 = 12$ số thỏa mãn.

Với $d \neq 0$, chọn d có 2 cách, a có 3 cách, c có 3 cách nên có $2.3.3 = 18$ số thỏa mãn.

Tóm lại có tất cả $36 + 12 + 18 = 66$ số thỏa mãn.

Câu 22. Chọn đáp án D

Ta có $\overline{abc}:3 \Leftrightarrow (a+b+c):3$, ta chọn được

$$(3;0;0), (6;0;0) \rightarrow 2$$

$$(1;0;2), (1;0;5), (2;0;4), (3;0;3), (3;0;6), (4;0;5), (6;0;6) \rightarrow 5.4 + 2.2 = 24$$

$$(1;1;1), (2;2;2), (3;3;3), (4;4;4), (5;5;5), (6;6;6) \rightarrow 6$$

$$(1;1;4), (2;2;5), (4;4;1), (5;5;2) \rightarrow 3.4 = 12$$

$$(1;2;3), (1;3;5), (2;3;4) \rightarrow 6.3 = 18$$

Tóm lại có tất cả 62 số thỏa mãn.

Câu 23. Chọn đáp án A

Các bộ số chia hết cho 3 là $\{0;1;2\}, \{0;1;5\}, \{0;2;4\}, \{1;2;3\}, \{2;3;4\}, \{3;4;5\}$.

Số lượng số chia hết cho 3 là $6.3! - 3.2! = 30$ số.

Có 52 số chia hết cho 2 và 35 số chia hết cho 5.

Câu 24. Chọn đáp án B

Chữ số cuối là 5, ta có $5.5.4$ tức là 100 số.

Chữ số cuối là 0 ta có $6.5.4$ tức là 120 số. Vậy có 220 số.

Câu 25. Chọn đáp án A

Tổng các chữ số chia hết cho 3 ta có $\{2;4;6\}, \{4;6;8\}$.

Hoán vị 3 chữ số trong từng bộ ta có $3! + 3! = 12$ số.

Câu 26. Chọn đáp án B

+) $\overline{abcd}$ chẵn: $d = 0 \Rightarrow A_8^3$ cách và $d \in \{2;4;6;8\} \Rightarrow 7.7.6$, suy ra 1512 số.

+) $\overline{abcd}$ chia hết cho 5 khi: $d = 0 \Rightarrow A_8^3$ cách và $d = 5 \Rightarrow 7.7.6$ cách, suy ra 630 số.

+) $\overline{abcd}$ chia hết cho 3 khi:

$$a, b, c, d \in \{0;1;2;3\}, \{0;1;3;8\}, \{0;1;4;7\}, \{0;1;2;6\}, \{0;2;3;4\}, \{0;5;6;7\}, \{0;4;6;8\}, \{0;4;5;6\}, \\ \{0;2;3;7\}, \{0;3;4;8\}, \{1;2;3;6\}, \{1;3;4;7\}, \{1;3;5;6\}, \{1;3;6;8\}, \{1;4;5;8\}, \{1;4;6;7\}, \{1;5;7;8\}$$

Trường hợp số 0 đứng đầu có $10.3!$ số nên ta có $17.4! - 10.3! = 348$ số.

Câu 27. Chọn đáp án A

Chữ số cuối là 0, hai chữ số còn lại có 5.4 tức là 20 số.

Câu 28. Chọn đáp án B

Chữ số đầu tiên có 5 cách chọn. Chữ số cuối có 5 cách chọn.

Chọn 3 chữ số còn lại có $A_8^3 = 336 \Rightarrow 336.5.5 = 8400$.

Câu 29. Chọn đáp án A

Chữ số cuối khác 5 có 7 cách. Chọn vị trí cho chữ số 5 có 5 vị trí.

Chọn 4 chữ số còn lại trong 6 chữ số còn lại có $A_6^4 = 360 \Rightarrow 360.7.5 = 12600$.

Câu 30. Chọn đáp án D

Chữ số cuối có 7 cách chọn. Chọn 3 chữ số còn lại có $8.9.9$ cách. Vậy có $7.8.9.9 = 4536$ cách chọn.

Câu 31. Chọn đáp án A

+) $a \in \{1; 3; 5\}$, c có 4 cách chọn. Chọn chữ số còn lại có 7 cách chọn.

+) $a \in \{2; 4; 6\}$, c có 3 cách chọn. Chọn chữ số còn lại có 7 cách chọn.

+) $a = 7; c \in \{2; 4; 6\}$, b khác 9, b có 6 cách chọn.

+) $a = 7; c = 8, b$ có 6 cách chọn.

Vậy có $3.4.7 + 3.3.7 + 3.6 + 6 = 171$ số.

2. Bài tập - Trắc nghiệm Bài toán Đếm (Đề 02)

Câu 1. Cho tập $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 5 chữ số đôi một khác nhau sao cho số đó không bắt đầu bởi 125?

- A. 265 B. 262 C. 6702 D. 6705

Câu 2. Cho tập $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 7 chữ số sao cho chữ số 1 đứng ở vị trí chính giữa?

- A. 360 B. 9375 C. 3125 D. 120

Câu 3. Cho tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Hỏi từ tập A lập được tất cả bao nhiêu số có 5 chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 2?

- A. 360 B. 312 C. 288 D. 336

Câu 4. Cho tập $B = \{0; 1; 2; 4; 5; 7\}$. Hỏi từ B lập được tất cả bao nhiêu số có 5 chữ số khác nhau và chia hết cho 3?

- A. 408 B. 192 C. 360 D. 288

Câu 5. Từ các chữ số 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số có năm chữ số khác nhau và không chia hết cho 2?

- A. 3360 B. 720 C. 1680 D. 1024

Câu 6. Cho các chữ số 0; 1; 2; 4; 5; 6; 8. Hỏi từ các chữ số trên lập được tất cả bao nhiêu số có 5 chữ số khác nhau chia hết cho 5 mà trong mỗi số chữ số 1 luôn xuất hiện?

- A. 444 B. 480 C. 420 D. 468

Câu 7. Cho các chữ số 0; 1; 4; 5; 6; 7; 9. Hỏi từ các chữ số đó ta lập được bao nhiêu số có 4 chữ số chia hết cho 10 và nhỏ hơn 5430?

- A. 114 B. 145 C. 729 D. 737

Câu 8. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 7 có thể lập được bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau chia hết cho 2?

- A. 24 B. 60 C. 12 D. 36

Câu 9. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 lập được bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau lớn hơn 240?

- A. 36 B. 42 C. 12 D. 48

Câu 10. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8 lập được bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau luôn có mặt chữ số 3?

A. 100 B. 180 C. 80 D. 125

Câu 11. Từ các chữ số 0, 1, 2, 5, 7, 9 lập được bao nhiêu số có năm chữ số khác nhau chia hết cho 6?

A. 24 B. 42 C. 16 D. 66

Câu 12. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số có hai chữ số khác nhau chia hết cho 3?

A. 10 B. 18 C. 12 D. 27

Câu 13. Số các số có năm chữ số khác nhau nhỏ hơn 46000 là:

A. 10752 B. 9072 C. 1660 D. 27216

Câu 14. Số các số có năm chữ số khác nhau thỏa mãn chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng liền trước nó là:

A. 216 B. 126 C. 272 D. 907

Câu 15. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 lập được bao nhiêu số có bốn chữ số chia hết cho 2?

A. 540 số B. 468 số C. 310 số D. 396 số

Câu 16. Từ các chữ số 0, 1, 2, 4, 5, 7 lập được bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau và chia hết cho 4?

A. 84 số B. 144 số C. 72 số D. 96 số

Câu 17. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7 lập được bao nhiêu số có bốn chữ số chia hết cho 5?

A. 588 số B. 330 số C. 432 số D. 620 số

Câu 18. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9 lập được bao nhiêu số có bốn chữ số chia hết cho 2?

A. 1216 số B. 1120 số C. 1344 số D. 1326 số

Câu 19. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 5 lập được bao nhiêu số có năm chữ số chia hết cho 4?

A. 398 số B. 420 số C. 310 số D. 400 số

Câu 20. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 8 lập được bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau, chia hết cho 3 và 5?

A. 17 số B. 20 số C. 19 số D. 18 số

Câu 21. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 8 lập được bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau, chia hết cho 2 và 3?

A. 33 số B. 34 số C. 35 số D. 36 số

Câu 22. Từ các chữ số 0, 1, 2, 4, 6, 7, 8 lập được bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau và chia hết cho 3?

A. 66 số B. 46 số C. 48 số D. 54 số

Câu 23. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7 lập được bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau và chia hết cho 5?

A. 588 số B. 220 số C. 280 số D. 316 số

Câu 24. Có bao nhiêu số có 5 chữ số khác nhau mà biểu diễn thập phân không có các chữ số 6, 7, 8, 9?

A. 652 số B. 512 số C. 600 số D. 426 số

Câu 25. Có bao nhiêu số có ba chữ số mà biểu diễn thập phân không có các chữ số 7, 8, 9 và chia hết cho 2?

A. 144 số B. 180 số C. 168 số D. 210 số

Câu 26. Có bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số và chia hết cho 5?

A. 1296 số B. 1620 số C. 1526 số D. 1800 số

Câu 27. Có bao nhiêu số nguyên dương không lớn hơn 1000 mà chia hết cho 4 hoặc cho 7?

A. 392 số B. 357 số C. 410 số D. 250 số

Câu 28. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số có năm chữ số khác nhau chia hết cho 5?

A. 660 số

B. 521 số

C. 760 số

D. 315 số

Câu 29. Có bao nhiêu số nguyên dương không vượt quá 1000 mà chia hết cho 3 hoặc chia hết cho 5?

A. 531 số

B. 533 số

C. 332 số

D. 467 số

Câu 30. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 ta lập được bao nhiêu số có 3 chữ số đôi một khác nhau chia hết cho 5?

A. 12

B. 24

C. 36

D. 48

Câu 31. Cho tập hợp $A = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7\}$. Trong các nhận định sau, nhận định nào **sai**?

(1) có thể lập được 320 số có 4 chữ số đôi một khác nhau chia hết cho 2

(2) có thể lập được 55 số có 3 chữ số đôi một khác nhau chia hết cho 5

(3) có thể lập được 360 số có 5 chữ số đôi một khác nhau chia hết cho cả 2 và 5

(4) có thể lập được 240 số có 4 chữ số chia hết cho 3

(5) có thể lập được 1800 số có 4 chữ số chia hết cho 2 và 3

A. (1), (3), (4)

B. (1), (4), (5)

C. (3), (5)

D. (4), (5)

Câu 32. Cho tập $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Từ các chữ số thuộc tập A lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số và số đó chia hết cho 3

A. 2160

B. 1800

C. 2020

D. 1920

Câu 33. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau và chia hết cho 2:

A. 1512

B. 2568

C. 2120

D. 1680

Câu 34. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau chứa chữ số 2 và chia hết cho 5?

A. 20

B. 21

C. 22

D. 23

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Chọn đáp án D

Gọi $\overline{125ab}$ là số bắt đầu bởi 125 và có 5 chữ số đôi một khác nhau.

Suy ra b có 3 cách chọn, a có 5 cách chọn $\rightarrow$ có $3 \times 5 = 15$ số.

Số các số chẵn có 5 chữ số đôi một khác nhau được lập từ tập A là $4 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 6720$ số.

Suy ra có tất cả $6720 - 15 = 6705$ số cần tìm.

Câu 2. Chọn đáp án B

Gọi số cần tìm là số dạng $\overline{abc1mnp}$ với $p = \{2; 4; 6\}$.

Khi đó, có 3 cách chọn e và 5 cách chọn mỗi số $\{a; b; c; m; n\}$.

Vậy có tất cả $3 \times 5^5 = 9375$ số cần tìm.

Câu 3. Chọn đáp án B

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcde}$. Vì $\overline{abcde}$ chia hết cho 2 suy ra $e = \{0; 2; 4\}$.

TH1. Với $e = 0$, khi đó $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ số.

TH2. Với $e = \{2; 4\}$, khi đó có 4 cách chọn a , 4 cách chọn b , 3 cách chọn c , 2 cách chọn d .

Suy ra có $4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 192$ số. Vậy có tất cả $120 + 192 = 312$ số cần tìm.

Câu 4. Chọn đáp án D

Gọi số cần tìm là số dạng $\overline{abcde}$. Vì $\overline{abcde}$ chia hết cho 3 suy ra $a + b + c + d + e \equiv 3$.

Khi đó bộ $(a, b, c, d, e) = \{(0; 1; 2; 4; 5), (0; 2; 4; 5; 7), (0; 1; 2; 5; 7)\}$.

Với bộ $(a, b, c, d, e) = (0; 1; 2; 4; 5)$ suy ra có $4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96$ số cần tìm.

Câu 5. Chọn đáp án A

Giả sử số đó là $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$ chọn a_5 có 4 cách chọn, chọn $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$ có A_7^4 cách chọn

Do đó có $4 \cdot A_7^4 = 3360$ số thỏa mãn.

Câu 6. Chọn đáp án A

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcde}$. Vì $\overline{abcde}$ chia hết cho 5 suy ra $e = \{0; 5\}$.

TH1. Với $e = 0$ suy ra có $4 \times 5 \times 4 \times 3 = 240$ số cần tìm.

TH2. Với $e = 5$, suy ra có $5 \times 4 \times 3 + 3 \times 4 \times 4 \times 3 = 204$ số cần tìm.

Vậy có tất cả 444 số cần tìm.

Câu 7. Chọn đáp án D

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$. Vì $\overline{abcd}$ chia hết cho 10 suy ra $d = 0$.

TH1. Với $a = 5$, ta có

- Nếu $b = 4$ suy ra $c = \{0; 1\}$, do đó có 2 số cần tìm.
- Nếu $b < 4$ suy ra $b = \{0; 1\}$ và $c = \{0; 1; 4; 5; 6; 7; 9\}$, do đó có 14 số cần tìm.

TH2. Với $a < 5 \Rightarrow a = \{1; 4\}$ suy ra có 2 cách chọn a , 7 cách chọn b , 7 cách chọn c .

Suy ra có $2 \times 7 \times 7 = 98$ số cần tìm. Vậy có tất cả 114 số cần tìm.

Câu 8. Chọn đáp án A

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abc}$. Vì $\overline{abc}$ chia hết cho 2 suy ra $c = \{2; 4\}$.

Khi đó c có 2 cách chọn, a có 4 cách chọn và b có 3 cách chọn.

Vậy có tất cả $2 \times 4 \times 3 = 24$ số cần tìm.

Câu 9. Chọn đáp án B

Số các số có ba chữ số lập từ tập ban đầu là $5 \times 4 \times 3 = 60$ số.

Gọi $\overline{abc}$ là số nhỏ hơn 240 nên ta xét các trường hợp sau:

TH1. Với $a = 2$ suy ra $b < 4 \Rightarrow b = \{1; 3\}$ và có 3 cách chọn $c \longrightarrow$ có $2 \times 3 = 6$ số.

TH2. Với $a = 1$ suy ra $b = \{2; 3; 4; 5\}$ và có 3 cách chọn $c \longrightarrow$ có $4 \times 3 = 12$ số.

Vậy có tất cả $60 - (6 + 12) = 42$ số cần tìm.

Câu 10. Chọn đáp án C

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abc}$.

TH1. Với $a = 3$, suy ra có 6 cách chọn b , 5 cách chọn $c \longrightarrow$ có $6 \times 5 = 30$ số.

TH2. Với $b = 3$, suy ra có 5 cách chọn a , 5 cách chọn $c \longrightarrow$ có $5 \times 5 = 25$ số.

TH3. Với $c = 3$, tương tự với **TH2**.

Vậy có tất cả $30 + 25 + 25 = 80$ số cần tìm.

Câu 11. Chọn đáp án D

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcde}$. Vì $\overline{abcd}$ chia hết cho 6 suy ra $\begin{cases} e = \{0; 2\} \\ (a + b + c + d + e) : 3 \end{cases}$

TH1. Với $e = 0$ suy ra $a + b + c + d : 3$, do đó gồm các bộ $(1; 2; 5; 7)$ suy ra có 24 số.

TH2. Với $e = 2$ suy ra $a + b + c + d + 2 : 3$, do đó gồm các bộ $(0; 1; 5; 7)$, $(1; 5; 7; 9)$ suy ra có 42 số.

Vậy có tất cả $24 + 42 = 66$ số cần tìm.

Câu 12. Chọn đáp án C

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{ab}$. Vì $\overline{ab}$ chia hết cho 3 suy ra tổng $(a + b) : 3$.

TH1. Với $b = 0$ suy ra $a = \{3; 6\} \longrightarrow$ có 2 số cần tìm.

TH2. Với $b \neq 0$, ta có bộ các số $(a; b) = \{12, 15, 21, 24, 36, 42, 45, 51, 54, 63\}$.

Vậy có tất cả 12 số cần tìm.

Câu 13. Chọn đáp án A

Từ tập số $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcde}$. Vì $\overline{abcde} < 46000$ nên ta xét các trường hợp sau:

TH1. Với $\begin{cases} a = 4 \\ b < 6 \Rightarrow b = \{0; 1; 2; 3; 5\} \end{cases} \rightarrow$ có 8 cách chọn c , 7 cách chọn d , 6 cách chọn e .

Suy ra có $5 \times 8 \times 7 \times 6 = 1680$ số cần tìm.

TH2. Với $a < 4 \Rightarrow a = \{1; 2; 3\} \rightarrow$ có 9 cách chọn b , 8 cách chọn c , 7 cách chọn d , 6 cách chọn e . Suy ra có $3 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 9072$ số cần tìm.

Vậy có tất cả $1680 + 9072 = 10752$ số cần tìm.

Câu 14. Chọn đáp án B

Ta có C_{10}^5 cách chọn ra 5 chữ số phân biệt, với mỗi cách chọn ấy chỉ có duy nhất 1 số thỏa mãn điều kiện đề bài. Suy ra tổng có 252 số.

Mà ở đây tính cả chữ số 0 đứng đầu. Vậy nên ta phải trừ trường hợp chữ số 0 đứng đầu. Lập luận tương tự trường hợp này có $C_9^4 = 126$.

Vậy, số có 5 chữ số trong mỗi số chữ số sau lớn hơn chữ số liền trước là $252 - 126 = 126$ số.

Câu 15. Chọn đáp án A

Chữ số cuối có 3 cách chọn. 3 chữ số còn lại có 5.6.6 số, vậy có $3.5.6.6 = 540$ số.

Câu 16. Chọn đáp án C

Các bộ 2 chữ số có thể xảy ra là 20, 40, 12, 52, 72, 24.

Với 20 và 40 ta có 4.3 cách chọn 2 chữ số còn lại; Với 12, 52, 72, 24 ta có 4.3 cách.

Vậy có $4.3.2 + 4.3.4 = 72$ số.

Câu 17. Chọn đáp án A

Chữ số cuối cùng bằng 0 có 6.7.7 cách chọn. Chữ số cuối cùng bằng 5 có 6.7.7 cách chọn.

Vậy có 588 số.

Câu 18. Chọn đáp án C

Chữ số cuối có 3 cách chọn. 3 chữ số còn lại có 7.8.8 cách chọn. Vậy có $3.7.8.8 = 1344$ số.

Câu 19. Chọn đáp án D

Hai chữ số cuối cùng có các khả năng 20; 12; 52; 32

3 chữ số còn lại có 4.5.5 suy ra có $4.4.5.5 = 400$ số.

Câu 20. Chọn đáp án B

Chữ số cuối cùng bằng 0, các khả năng với 2 chữ số là $(1; 2), (1; 8), (4; 5), (1; 5), (2; 4), (4; 8)$.

Chữ số cuối cùng bằng 5, các khả năng xảy ra với 2 chữ số là $(1; 0), (4; 0), (1; 3), (2; 8), (3; 4)$.

Hoán vị các bộ 2 chữ số không tồn tại số 0, như vậy có $6.2 + 2 + 3.2 = 20$ số.

Câu 21. Chọn đáp án C

Chữ số cuối cùng bằng 0; các cặp số có thể xảy ra là $(1; 2), (1; 5), (1; 8), (2; 4), (4; 5), (4; 8)$.

Trường hợp này có $2!.6$ số.

Chữ số cuối bằng 2 ta có các bộ $(1; 0), (4; 0), (1; 3), (3; 4), (5; 8)$, hoán vị được $2!.3 + 2$ số.

Chữ số cuối bằng 4 ta có các bộ $(2; 0), (2; 3), (3; 5), (3; 8)$, hoán vị được $2!.3 + 1$ số.

Chữ số cuối bằng 8 ta có các bộ $(0; 1), (0; 4), (1; 3), (2; 5), (3; 4)$, hoán vị được $2!.3 + 2$ số.

Kết hợp lại ta có 35 số.

Câu 22. Chọn đáp án C

Các bộ chia hết cho 3 gồm:
 $(0; 1; 2), (0; 1; 8), (0; 2; 4), (0; 2; 7), (0; 4; 8), (0; 7; 8), (1; 2; 6), (2; 4; 6), (4; 6; 8), (6; 7; 8)$. Như vậy ta có $3!10$ số có 3 chữ số, loại đi $2!.6$ số do chữ số 0 đứng đầu. Kết quả $3!.10 - 2!.6 = 48$ số.

Câu 23. Chọn đáp án B

Chữ số cuối bằng 0 ta có 6.5.4 số. Chữ số cuối bằng 5 ta có 5.5.4 số. Vậy có $6.5.4 + 5.5.4 = 220$ số.

Câu 24. Chọn đáp án C

Chữ số đầu tiên có 5 cách chọn. Sau đó ta có 5.4.3.2 cách chọn 4 chữ số còn lại.

Như vậy có $5.5.4.3.2 = 600$ số.

Câu 25. Chọn đáp án C

Chữ số cuối chẵn có 4 cách chọn. Chữ số đầu tiên có 6 cách chọn, chữ số ở giữa có 7 cách chọn.

Như vậy có $4.6.7 = 168$ số.

Câu 26. Chọn đáp án D

Chữ số cuối là 0 hoặc 5. 3 chữ số còn lại có 9.10.10 suy ra $2.9.10.10 = 1800$ số.

Câu 27. Chọn đáp án B

Chú ý không tính số 0, ta xét các số dạng $4k, 7l$ và $28p$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} 7k \leq 1000 \Rightarrow k \leq 142 \\ 4l \leq 1000 \Rightarrow l \leq 250 \\ 28p \leq 1000 \Rightarrow p \leq 35 \end{cases}$$

Có 142 số chia hết cho 7, 250 số chia hết cho 4, 35 số đồng thời chia hết cho 4 và 7.

Vậy ta có $142 + 250 - 35 = 357$ số cần tìm.

Câu 28. Chọn đáp án A

Trường hợp 1: Số đó có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_40}$ chọn $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ có A_6^4 cách nên có A_6^4 số thỏa mãn

Trường hợp 2: Số đó có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_45}$ chọn a_1 có 5 cách, chọn $\overline{a_2a_3a_4}$ có A_5^3 cách nên có $5.A_5^3$ số thỏa mãn. Do đó có $A_6^4 + 5.A_5^3 = 660$ số thỏa mãn.

Câu 29. Chọn đáp án D

Số chia hết cho 3 có dạng $3a$ ta có $0 < 3a \leq 1000 \Leftrightarrow 0 < a \leq 333,3$ nên có 333 số thỏa mãn

Số chia hết cho 5 có dạng $5b$ ta có $0 < 5b \leq 1000 \Leftrightarrow 0 < b \leq 200$ nên có 200 số thỏa mãn

Số chia hết cho cả 3 và 5 có dạng $15c$ ta có $0 < 15c \leq 1000 \Leftrightarrow 0 < c \leq 66,6$ nên có 66 số thỏa mãn

Do đó số các số thỏa mãn đề bài là $333 + 200 - 66 = 467$.

Câu 30. Chọn đáp án C

Trường hợp 1: Số đó có dạng $\overline{a_1a_20}$ chọn $\overline{a_1a_2}$ có A_5^2 cách nên có A_5^2 số thỏa mãn

Trường hợp 2: Số đó có dạng $\overline{a_1a_25}$ chọn a_1 có 4 cách, chọn a_2 có 4 cách nên có 4.4 số thỏa mãn

Do đó có $A_5^2 + 4.4 = 36$ số thỏa mãn.

Câu 31. Chọn đáp án D

(1) Giả sử số đó là $\overline{a_1a_2a_3a_4}$.

Trường hợp 1: $a_4 = 0$ chọn $\overline{a_1a_2a_3}$ có A_6^3 cách chọn nên có A_6^3 số thỏa mãn

Trường hợp 2: $a_4 \neq 0$ chọn a_4 có 2 cách chọn, chọn a_1 có 5 cách chọn, chọn $\overline{a_2a_3}$ có A_5^2 cách chọn nên có $2.5.A_5^2$ số thỏa mãn. Do đó có $A_6^3 + 2.5.A_5^2 = 320$ số thỏa mãn $\longrightarrow$ (1) đúng

(2) Giả sử số đó là $\overline{a_1a_2a_3}$

A. 53856 **B.** 90576 **C.** 28800 **D.** 14400

Câu 4. Một nhóm học sinh gồm 5 nữ, 5 nam. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 10 bạn thành một hàng dọc sao cho các bạn cùng phái thì đứng cạnh nhau?

- A. 86400 B. 43200 C. 28800 D. 14400

Câu 5. Cho một hộp 10 viên bi gồm 6 bi xanh và 4 bi vàng (mỗi viên bi có kích thước khác nhau). Hỏi có bao nhiêu cách xếp 10 viên bi vào hộp thành một hàng ngang sao cho không có bi vàng nào cạnh nhau?

- A. 604800 B. 86400 C. 34560 D. 3594240

Câu 6. Cho 2 đường thẳng $a \parallel b$, trên đường thẳng a lấy 7 điểm phân biệt, trên đường thẳng b lấy 5 điểm phân biệt. Hỏi có thể dựng được bao nhiêu tam giác từ 12 điểm đã cho?

- A. 1320 B. 220 C. 210 D. 175

Câu 7. An có 6 ảnh EXO, 5 ảnh BTS, 4 ảnh SNSD. An muốn chọn ra 4 ảnh để tặng cho Hà. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn sao cho số ảnh EXO bằng số ảnh SNSD?

- A. 240 B. 330 C. 335 D. 480

Câu 8. Trên giá có 15 cuốn sách gồm 5 sách Toán, 7 sách Tiếng Anh và 3 sách Văn. Hỏi có bao nhiêu cách xếp thành một hàng sao cho sách cùng loại thì xếp cạnh nhau và sách Văn nằm giữa sách Toán, sách tiếng Anh?

- A. 7257600 B. 3628800 C. 1814400 D. 907200

Câu 9. Cho 4 ô tô khác nhau và 3 xe máy giống nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 7 xe vào 8 chỗ trống sao cho ô tô cạnh nhau và xe máy cạnh nhau?

- A. 48 B. 144 C. 288 D. 432

Câu 10. Cho 5 thẻ đen khác nhau và 3 thẻ trắng khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp thành một hàng sao cho không có 2 thẻ trắng nào cạnh nhau?

- A. 2880 B. 4320 C. 5760 D. 14400

Câu 11. Một cửa hàng có 3 gói bim bim và 5 cốc mì ăn liền cần xếp vào giá. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho đầu hàng và cuối hàng cùng một loại?

- A. 14400 B. 17620 C. 37440 D. 40320

Câu 12. Có 5 học sinh nam và 3 học sinh nữ xếp thành một hàng dọc. Hỏi có bao nhiêu cách xếp để 2 học sinh nam xen giữa 3 học sinh nữ? (đôi 2 học sinh bất kì được cách mới)

- A. 2880 B. 5760 C. 1440 D. 4320

Câu 13. Trong một buổi giao lưu, có 5 học sinh trường X và 5 học sinh trường Y ngồi và o2 bàn đối diện nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho 2 người ngồi đối diện và ngồi cạnh thì khác trường nhau.

- A. 3628800 B. 864000 C. 57600 D. 28800

Câu 14. Có 8 nhà khoa học Toán (6 nam, 2 nữ) và 5 nhà khoa học Vật Lí (toàn nam). Hỏi có bao nhiêu cách lập một đội gồm 4 nhà khoa học trong đó có cả nam, nữ, cả Toán, Vật Lí?

- A. 270 B. 300 C. 375 D. 570

Câu 15. Có 7 nam 5 nữ xếp thành một hàng ngang. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho 2 vị trí đầu và cuối là nam và không có 2 nữ nào đứng cạnh nhau?

- A. 118540800 B. 152409600 C. 12700800 D. 3628800

Câu 16. Một rổ có 10 loại quả khác nhau trong đó có 1 mít và 1 bưởi. Hỏi có bao nhiêu cách xếp thành một hàng sao cho mít và bưởi cách nhau đúng 2 quả khác?

- A. 2257920 B. 645120 C. 564480 D. 282240

Câu 17. Một nhóm sinh viên có 4 nam 2 nữ ngồi và 9 ghế hàng ngang. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho nam ngồi liền nhau, nữ ngồi liền nhau và giữa 2 nhóm có ít nhất 2 ghế?

A. 576

B. 672

C. 288

D. 144

Câu 18. Trong một buổi chụp ảnh của trường A, có 5 giáo viên Toán, 3 giáo viên Hóa và 1 giáo viên Vật Lý xếp thành một hàng ngang. Hỏi có bao nhiêu cách xếp để 3 giáo viên Hóa và 1 giáo viên Vật Lý không ai cạnh nhau?

A. 43200

B. 356640

C. 357120

D. Đáp án

khác

Câu 19. Một tổ gồm 7 nam 4 nữ xếp thành một hàng dọc trong giờ thể dục. Hỏi có bao nhiêu cách xếp để nữ luôn đứng thành 2 cặp không cạnh nhau?

A. 101606400

B. 3386880

C. 1128960

D.

6773760

Câu 20. Có 5 nam và 6 nữ xếp thành một hàng dọc sao cho đầu hàng và cuối hàng luôn là nam. Hỏi có bao nhiêu cách xếp?

A. 3628800

B. 806400

C. 7257600

D. 151200

Câu 21. Có 8 bạn nam và 2 bạn nữ. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các bạn trên thành một hàng ngang sao cho hai bạn nữ đứng cách nhau đúng hai bạn nam?

A. 725760

B. 564480

C. 757260

D. 546640

Câu 22. Có 4 bạn nam và 2 bạn nữ. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các bạn trên vào một ghế dài có 8 chỗ sao cho các bạn nam ngồi cạnh nhau thành một nhóm, các bạn nữ ngồi cạnh nhau thành một nhóm và hai nhóm này cách nhau đúng một chỗ ngồi?

A. 144

B. 192

C. 152

D. 164

Câu 23. Có 10 quyển sách Toán, 8 quyển sách Lí, 5 quyển sách Văn. Cần chọn ra 8 quyển có ở cả ba môn sao cho số quyển Toán ít nhất là bốn và số quyển Văn nhiều nhất là hai. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

A. 181440

B. 146580

C. 164420

D. 152280

Câu 24. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7 lập được bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau và chia hết cho 15?

A. 76

B. 82

C. 96

D. 72

Câu 25. Từ các chữ số 0, 2, 3, 4, 5, 7, 8 lập được bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau, chia hết cho 20 và luôn xuất hiện chữ số 4?

A. 36

B. 24

C. 32

D. 40

Câu 26. Từ các chữ số 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7 lập được bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau và chia hết cho 25?

A. 36

B. 60

C. 52

D. 38

Câu 27. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7 lập được bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau và chia hết cho 20?

A. 60

B. 52

C. 46

D. 64

Câu 28. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 5, 7, 8, 9 lập được bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau và chia hết cho 25?

A. 72

B. 68

C. 80

D. 96

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Chọn đáp án B

Xếp 30 quyển truyện khác nhau có số cách là 30!

Xếp 4 quyển 1, 3, 5, 7 cạnh nhau:

+) Hoán vị 1, 3, 5, 7 ta được 4! Cách.

+) Khi đã xếp 1, 3, 5, 7 cạnh nhau thì còn 26 vị trí, ứng với 26 vị trí này thì có 26! cách xếp.

Do đó xếp 4 quyển 1, 3, 5, 7 cạnh nhau có số cách là $4!.26!$

Tóm lại có $30! - 4!26!$ cách xếp thỏa mãn.

Câu 2. Chọn đáp án D

Chọn 5 cuốn tự nhiên có C_{13}^5 cách, chọn 4 cuốn xã hội có C_8^4 cách, chọn 4 cuốn còn lại có C_4^4 cách. Do đó có $C_{13}^5 \cdot C_8^4 \cdot C_4^4 = 90090$ cách.

Câu 3. Chọn đáp án B

Trường hợp 1: Chọn 3 nữ, 2 nam $\Rightarrow$ có $C_{18}^3 \cdot C_{12}^2$ cách chọn

Trường hợp 2: Chọn 4 nữ, 1 nam $\Rightarrow$ có $C_{18}^4 \cdot C_{12}^1$ cách chọn

Do đó có $C_{18}^3 \cdot C_{12}^2 + C_{18}^4 \cdot C_{12}^1 = 90576$ cách chọn.

Câu 4. Chọn đáp án C

Số cách sắp xếp là $2.5!.5! = 28800$.

Câu 5. Chọn đáp án A

Xếp 6 viên bi xanh có 6! cách xếp, khi đó 6 viên bi xanh sẽ tạo thành 7 chỗ trống. Xếp 4 viên bi vàng vào 7 chỗ trống đó là A_7^4 cách. Do đó có $A_7^4 \cdot 6! = 604800$ cách xếp.

Câu 6. Chọn đáp án D

Số tam giác có đỉnh nằm trên a và cạnh nằm trên b là $C_7^1 \cdot C_5^2$

Số tam giác có đỉnh nằm trên b và cạnh nằm trên a là $C_7^2 \cdot C_5^1$

Do đó số tam giác có thể dựng được là $C_7^1 \cdot C_5^2 + C_7^2 \cdot C_5^1 = 175$.

Câu 7. Chọn đáp án C

Trường hợp 1: Tặng 0 thẻ EXO, 0 thẻ SNSD, 4 thẻ BTS $\Rightarrow$ có C_5^4 cách

Trường hợp 2: Tặng 1 ảnh EXO, 1 ảnh SNSD, 2 ảnh BTS $\Rightarrow$ có $C_6^1 \cdot C_5^2 \cdot C_4^1$ cách

Trường hợp 3: Tặng 2 ảnh EXO, 2 ảnh SNSD $\Rightarrow$ có $C_6^2 \cdot C_4^2$ cách

Do đó số cách chọn là $C_5^4 + C_6^1 \cdot C_5^2 \cdot C_4^1 + C_6^2 \cdot C_4^2 = 335$.

Câu 8. Chọn đáp án A

Số cách sắp xếp là $2.5!.7!.3! = 7257600$.

Câu 9. Chọn đáp án B

Số cách xếp là $3!.4! = 144$.

Câu 10. Chọn đáp án D

Xếp 5 thẻ đen có 5! cách xếp, khi đó 5 thẻ đen tạo thành 6 chỗ trống. Xếp 3 thẻ trắng vào 6 chỗ trống có A_6^3 cách. Do đó có $A_6^3 \cdot 5! = 14400$ cách xếp.

Câu 11. Chọn đáp án B

Đối với bài toán ta xét 2 trường hợp:

+) Đầu hàng và cuối hàng đều là gói bim bim: Số cách chọn 2 gói bim bim xếp ở vị trí đầu hàng và cuối hàng là: A_3^2 (ở đây ta xem cách xếp 1 gói bim bim A ở đầu hàng, gói bim bim B ở cuối hàng với cách xếp gói bim bim A ở cuối hàng còn gói bim bim B ở đầu hàng là khác nhau). Lúc này, ta còn lại 1 gói bim bim và 5 cốc mì ăn liền, số cách xếp 6 món đồ này vào 1 hàng là: 6!.

Vậy số cách xếp thỏa yêu cầu đề là: $A_3^2 \cdot 6!$

+) Đầu hàng và cuối hàng đều là cốc mì ăn liền: Số cách chọn 2 cốc mì ăn liền xếp ở vị trí đầu hàng và cuối hàng là: A_5^2 . Lúc này, còn lại 3 cốc mì ăn liền và 3 gói bim bim, số cách xếp 6 người này vào 1 hàng là: $6!$.

Vậy số cách xếp thỏa yêu cầu đề là: $A_6^2 \cdot 6!$

Số cách xếp tất cả là: $6!(A_3^2 + A_5^2) = 18720$.

Câu 12. Chọn đáp án A

Xếp cố định 3 học sinh nữ vào hàng trước, có $3!$ cách xếp. Chọn 2 học sinh nam bất kì cho vào 2 khoảng trống nằm giữa 2 học sinh nữ, số cách chọn là A_5^2 . Xem nhóm 5 học sinh này là 1 học sinh, lúc này còn 3 học sinh nam vậy là ta đang có 4 học sinh. Số cách xếp 4 học sinh này thành hàng dọc là $4!$. Vậy số cách xếp cần tìm là: $3! \cdot A_5^2 \cdot 4! = 2880$.

Câu 13. Chọn đáp án D

Đánh số 10 vị trí ngồi từ 1 đến 10 trong đó 1 đến 5 là hàng 1 thuộc bàn 1, còn 6 đến 10 là hàng 2 thuộc bàn 2. Giả sử 1 học sinh thường X ngồi vị trí số 1, thì các học sinh còn lại của trường X chỉ ngồi ở vị trí số lẻ, còn 5 học sinh của trường Y chỉ ngồi vị trí số chẵn. Số cách xếp lúc này là: $5! \cdot 5!$. Tương tự với trường hợp học sinh trường X ngồi vị trí số chẵn, vậy số cách xếp cần tìm: $2 \cdot 5! \cdot 5! = 28800$.

Câu 14. Chọn đáp án C

Nếu đã có nữ thì rõ ràng có nhà khoa học Toán, nếu đã có nhà khoa học Vật Lí thì chắc chắn có nam. Do đó ta chỉ cần xét các trường hợp sau:

+) Có đúng 1 nữ nhà khoa học Toán, có 2 cách chọn. Lúc này chỉ cần có nhà khoa học Vật Lí là thỏa mãn đề bài, có thể có hoặc không nhà khoa học Toán nam nào khác, số cách chọn 3 nhà khoa học còn lại là $C_5^1 \cdot C_6^2 + C_5^2 \cdot C_6^1 + C_5^3$. Vậy số cách lập nhóm trong trường hợp này là: $2 \cdot (C_5^1 \cdot C_6^2 + C_5^2 \cdot C_6^1 + C_5^3)$

+) Có đúng 2 nữ nhà khoa học Toán, có 1 cách chọn. Cũng với ý tưởng như trên, chỉ cần có nhà khoa học Vật Lí là thỏa mãn, số cách chọn 2 nhà khoa học còn lại là $C_5^1 \cdot C_6^1 + C_5^2$. Vậy số cách lập nhóm trong trường hợp này là: $C_5^1 \cdot C_6^1 + C_5^2$.

Vậy số cách lập cần tìm là: $2 \cdot (C_5^1 \cdot C_6^2 + C_5^2 \cdot C_6^1 + C_5^3) + C_5^1 \cdot C_6^1 + C_5^2 = 375$.

Câu 15. Chọn đáp án D

Số cách chọn 2 nam đứng ở đầu và cuối là: A_7^2 . Lúc này còn lại 5 nam và 5 nữ, để đưa 10 người này vào hàng thì trước tiên sẽ cho 5 nam đứng riêng thành hàng ngang, số cách đứng là $5!$. Sau đó lần lượt “nhét” 5 nữ vào các khoảng trống ở giữa hoặc đầu, hoặc cuối của hàng 5 nam này, mỗi khoảng trống chỉ “nhét” 1 nữ hoặc không “nhét”, có tất cả 6 khoảng trống nên số cách xếp vào là A_6^5 . Số cách xếp 10 người này thành hàng ngang mà 2 nữ bất kì không đứng cạnh nhau là: $5! \cdot A_6^5$

Đưa 10 người này vào giữa 2 nam đầu và cuối đã chọn, số cách xếp là: $A_7^2 \cdot 5! \cdot A_6^5 = 3628800$.

Câu 16. Chọn đáp án C

Xếp cố định 8 quả khác mít và bưởi vào hàng, có $8!$ cách xếp. Lúc này trên hàng có 9 khoảng trống, gồm khoảng trống giữa 2 quả khác bất kì và vị trí đầu, cuối hàng. Trong đó ta có 7 cặp

khoảng trống mà khoảng cách giữa khoảng có đúng 2 quả khác. Mỗi cặp khoảng trống đó ta sẽ cho vào đó quả mít và quả bưởi, có cách xếp mít và bưởi tương ứng là: $7.2!$.

Vậy số cách xếp cần tìm: $8!.7.2! = 564480$.

Câu 17. Chọn đáp án B

Gọi nhóm I là nhóm ghế của 4 bạn nam, số cách xếp là $4!$, tương tự với 2 bạn nữ là nhóm II với số cách xếp là $2!$. Rõ ràng khi xếp 6 bạn này và hàng 9 ghế thì ta còn 3 ghế trống. Chia 9 hàng ghế này thành 5 phần có thứ tự, trong đó 2 phần bất kì nào dành cho nhóm I và nhóm II thì 3 phần còn lại sẽ là 3 chiếc ghế trống. Số cách xếp 2 nhóm vào 9 hàng ghế sao cho nam ngồi liền nhau, nữ ngồi liền nhau là: A_5^2 . Xem nhóm I, nhóm II và 1 ghế trống ở giữa 2 nhóm này là 1 nhóm đại diện, số nhóm đại diện là $2!$. Lúc này 9 ghế hàng ngang thì còn lại 2 ghế trống. Tương tự chia 9 hàng ghế làm 3 phần với ý tưởng khi nhóm đại diện rơi vào 1 phần nào đó thì 2 phần còn lại sẽ là ghế trống, khi đó số cách xếp nam ngồi liền nhau, nữ ngồi liền nhau và giữa 2 nhóm có đúng 1 ghế trống là: $2!.A_3^1$

Vậy số cách xếp cần tìm là: $4!.2!.(A_5^2 - 2!.A_3^1) = 672$.

Câu 18. Chọn đáp án A

Xếp cố định 5 giáo viên Toán trên hàng, có $5!$ cách xếp. Có tất cả 6 khoảng trống gồm khoảng trống giữa 2 giáo viên Toán và vị trí đầu hàng, cuối hàng. Xếp 4 giáo viên còn lại vào các khoảng trống sao cho mỗi khoảng trống chỉ chứa 1 giáo viên. Số cách xếp 4 giáo viên này là A_6^4 .

Vậy số cách xếp cần tìm là:

$$5!.A_6^4 = 43200.$$

Câu 19. Chọn đáp án D

Xếp 7 nam cố định theo hàng dọc, có $7!$ cách xếp. Có 8 vị trí để đưa nữ vào là vị trí giữa 2 nam bất kì hoặc đầu hàng hay cuối hàng. Chọn 2 nữ bất kì bỏ vào 1 trong 8 vị trí đó, số cách xếp nữ lúc này là $8.A_4^2$. Lúc này còn 7 vị trí để xếp 2 nữ còn lại vào, số cách xếp 2 nữ còn lại vào là $7.2!$.

Vậy số cách xếp cần tìm là: $7!.8.A_4^2.7.2! = 6773760$.

Câu 20. Chọn đáp án C

Số cách chọn 2 bạn nam xếp ở vị trí đầu hàng và cuối hàng là: A_5^2 (ở đây ta xem cách xếp 1 bạn nam A ở đầu hàng, bạn nam B ở cuối hàng với cách xếp bạn nam A ở cuối hàng, bạn nam B ở đầu hàng là khác nhau). Lúc này, còn lại 3 bạn nam và 6 bạn nữ, số cách xếp 9 người này vào 1 hàng là: $9!$. Vậy số cách xếp thỏa yêu cầu đề là: $A_5^2.9! = 7257600$.

Câu 21. Chọn đáp án B

Đề 2 bạn nữ đứng trước, số cách là $2!$. Sau đó chọn 2 bạn nam chen vào giữa 2 bạn nữ, số cách xếp 2 bạn nam và là A_8^2 . Xem 4 bạn này là 1 bạn, khi đó ta còn lại 6 bạn nam. Số cách xếp 7 bạn này là $7!$. Vậy số cách xếp tất cả là: $2!.A_8^2.7! = 564480$.

Câu 22. Chọn đáp án B

Nam a_1, a_2, a_3, a_4 và nữ b_1, b_2 .

+) Xếp a_1, a_2, a_3, a_4 có $4.4!$ cách (1, 2, 7, 8)

+) Xếp b_1, b_2 có $1.2!$ cách. Tóm lại có tất cả $4.4!.1.2 = 192$ cách.

Câu 23. Chọn đáp án A

Chọn 4 Toán, 2 Văn, 2 Lí có $C_{10}^4 C_5^2 C_8^2$ cách.

Chọn 4 Toán, 1 Văn, 3 Lí có $C_{10}^4 C_5^1 C_8^3$ cách.

Chọn 5 Toán, 2 Văn, 1 Lí có $C_{10}^5 C_5^2 C_8^1$ cách.

Chọn 5 Toán, 1 Văn, 2 Lí có $C_{10}^5 C_5^1 C_8^2$ cách.

Chọn 6 Toán, 1 Văn, 1 Lí có $C_{10}^6 C_5^1 C_8^1$ cách.

Tổng lại ta được 181440 cách thỏa mãn.

Câu 24. Chọn đáp án B

$$\text{Ta có } \overline{abcd}:15 \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{abcd}:5 \Rightarrow \begin{cases} d=0 \\ d=5 \end{cases} \\ \overline{abcd}:3 \Leftrightarrow (a+b+c+d):3 \end{cases}$$

• TH1. $d=0 \Rightarrow (a+b+c):3$

Mỗi bộ sau đều lập được 6 số: $(1;2;3), (1;2;6), (1;3;5), (1;5;6), (2;3;7), (2;6;7), (3;5;7), (5;6;7)$.

• TH2. $d=5 \Rightarrow (a+b+c+2):3$

Mỗi bộ sau đều lập được 4 số: $(0;1;3), (0;1;6), (0;3;7), (0;6;7)$.

Mỗi bộ sau đều lập được 6 số: $(1;2;7), (1;3;6), (3;6;7)$

Tóm lại có tất cả $6.8 + 4.4 + 6.3 = 82$ số thỏa mãn.

Câu 25. Chọn đáp án A

$$\text{Ta có } \overline{abcd}:20 \Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ \overline{abcd}:4 \Leftrightarrow \overline{cd}:4 \end{cases} \Rightarrow c \in \{2;4;8\}.$$

+ Dạng $\overline{4bc0}$, chọn c có 2 cách, b có 4 cách nên có $2.4 = 8$ số thỏa mãn.

+ Dạng $\overline{a4c0}$, chọn c có 2 cách, a có 4 cách nên có $2.4 = 8$ số thỏa mãn.

+ Dạng $\overline{ab40}$, chọn a có 5 cách, b có 4 cách nên có $5.4 = 20$ số thỏa mãn.

Tóm lại có tất cả $8 + 8 + 20 = 36$ số thỏa mãn.

Câu 26. Chọn đáp án C

$$\text{Ta có } \overline{abcd}:25 \Rightarrow \overline{cd} \in \{25;50;75\}.$$

Với $\overline{cd} = 50$, chọn a có 5 cách, b có 4 cách nên có $5.4 = 20$ số thỏa mãn.

Với $\overline{cd} = 25$, chọn a có 4 cách, b có 4 cách nên có $4.4 = 16$ số thỏa mãn.

Với $\overline{cd} = 75$, chọn a có 4 cách, b có 4 cách nên có $4.4 = 16$ số thỏa mãn.

Tóm lại có tất cả $20 + 16 + 16 = 52$ số thỏa mãn.

Câu 27. Chọn đáp án A

$$\text{Ta có } \overline{abcd}:20 \Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ \overline{abcd}:4 \Leftrightarrow \overline{cd}:4 \end{cases} \Rightarrow c \in \{2;4;6\}.$$

Chọn c có 3 cách, a có 5 cách, b có 4 cách nên có $3.5.4 = 60$ số thỏa mãn.

Câu 28. Chọn đáp án C

$$\text{Ta có } \overline{abcd}:25 \Rightarrow \overline{cd} \in \{25;50;75\}.$$

Với $\overline{cd} = 50$, chọn a có 6 cách, b có 5 cách nên có $6.5 = 30$ số thỏa mãn.

Với $\overline{cd} = 25$, chọn a có 5 cách, b có 5 cách nên có $5.5 = 25$ số thỏa mãn.

Với $\overline{cd} = 75$, chọn a có 5 cách, b có 5 cách nên có $5.5 = 25$ số thỏa mãn.

Tóm lại có tất cả $30 + 25 + 25 = 80$ số thỏa mãn.

QUY TẮC ĐẾM, HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP

A – LÝ THUYẾT CHUNG

I. QUY TẮC ĐẾM

- ✓ **Quy tắc cộng:** Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động X hoặc Y . Nếu hành động X có m cách thực hiện, hành động Y có n cách thực hiện và không trùng với bất cứ cách nào của hành động X thì công việc đó có $m + n$ cách thực hiện
- ✓ Nếu A và B là hai tập hợp hữu hạn, không giao nhau thì
- ✓ $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
- ✓ Nếu A và B là hai tập hợp hữu hạn bất kì thì
- ✓ $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
- ✓ Mở rộng: Nếu $A_1, A_2, \dots, A_n$ là các tập hợp hữu hạn, đôi một không giao nhau thì
- ✓ $n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = n(A_1) + n(A_2) + \dots + n(A_n)$
- ✓ **Quy tắc nhân:** Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp X và Y . Nếu hành động X có m cách thực hiện và ứng với mỗi cách thực hiện đó có n cách thực hiện hành động Y thì có $m.n$ cách hoàn thành công việc.
- ✓ **Chú ý:** Quy tắc nhân có thể mở rộng cho nhiều hành động liên tiếp.

II. HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP – TỔ HỢP

Hoán vị: Cho tập A có n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi kết quả của sự sắp xếp n phần tử của tập A theo một thứ tự nào đó được gọi là một hoán vị của n phần tử đó.

Kí hiệu: P_n là số các hoán vị của n phần tử thì:

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2) \dots 2.1 \quad (1)$$

Chỉnh hợp: cho tập A có n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi kết quả của sự việc lấy k phần tử từ n phần tử của tập A ($1 \leq k \leq n$) và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử đã cho.

Kí hiệu: A_n^k là số các chỉnh hợp chập k của n phần tử thì:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) \quad (2)$$

Nhận xét:

Ta có $A_n^n = n! = P_n$. Quy ước $0! = 1$ và $A_n^0 = 1$ thì công thức (2) đúng với $0 \leq k \leq n$ và

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Tổ hợp: Cho tập A có n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi tập con gồm k phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử đã cho.

Kí hiệu: C_n^k là số các tổ hợp chập k của n phần tử thì:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!} \quad (3)$$

Nhận xét: Quy ước $C_n^0 = 1$, công thức (3) đúng với $0 \leq k \leq n$ và ta có

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Tính chất cơ bản của tổ hợp: $C_n^k = C_n^{k-n}$ với $n, k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$

$$C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k \text{ với } 1 \leq k \leq n$$

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

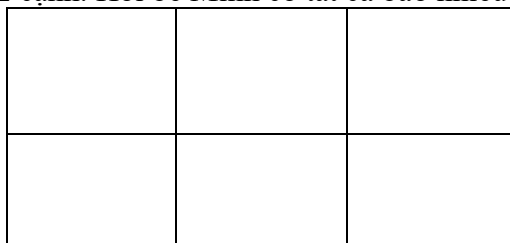
Câu 1: Số 6303268125 có bao nhiêu ước số nguyên?

- A. 420. B. 630. C. 240. D. 720.

Câu 2: Đề cương ôn tập chương I môn lịch sử lớp 12 có 30 câu. Trong đề thi chọn ngẫu nhiên 10 câu trong 30 câu đó. Một học sinh chỉ nắm được 25 câu trong đề cương đó. Xác suất để trong đề thi có ít nhất 9 câu hỏi nằm trong 25 câu mà học sinh đã nắm được là. (Kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

- A. $P = 0,449$. B. $P = 0,448$. C. $P = 0,34$. D. $P = 0,339$.

Câu 3: Bé Minh có một bảng hình chữ nhật gồm 6 hình vuông đơn vị, cố định không xoay như hình vẽ. Bé muốn dùng 3 màu để tô tất cả các cạnh của các hình vuông đơn vị, mỗi cạnh tô một lần sao cho mỗi hình vuông đơn vị được tô bởi đúng 2 màu, trong đó mỗi màu tô đúng 2 cạnh. Hỏi bé Minh có tất cả bao nhiêu cách tô màu bảng?



- A. 4374. B. 139968. C. 576. D. 15552.

Câu 4: Cho đa giác đều 100 đỉnh nội tiếp một đường tròn. Số tam giác tù được tạo thành từ 3 trong 100 đỉnh của đa giác là

- A. 44100. B. 78400. C. 117600. D. 58800.

Câu 5: Cho đa giác đều $2n$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{Z}$) đỉnh nội tiếp một đường tròn. Số tam giác tù được tạo thành từ 3 trong $2n$ đỉnh của đa giác là

- A. $2n(2n-1)(2n-2)$. B. $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. C. $n(n-1)(n-2)$. D. $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$.

Câu 6: Cho đa giác đều 100 đỉnh nội tiếp một đường tròn. Số tam giác vuông được tạo thành từ 3 trong 100 đỉnh của đa giác là

- A. 2450. B. 98. C. 4900. D. 9800.

Câu 7: Cho đa giác đều $2n$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{Z}$) đỉnh nội tiếp một đường tròn. Biết rằng số tam giác có các đỉnh là 3 trong $2n$ điểm $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong $2n$ điểm $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$. Số cạnh của đa giác là

- A. 14. B. 16. C. 18. D. 20.

- Câu 8:** Có 6 học sinh và 3 thầy giáo A, B, C. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ 9 người đó trên một hàng ngang có 9 chỗ sao cho mỗi thầy giáo ngồi giữa hai học sinh.
A. 4320. **B.** 90. **C.** 43200. **D.** 720.
- Câu 9:** các chữ số 0,1,2,3,5,8 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ có bốn chữ số đôi một khác nhau và phải có mặt chữ số 3.
A. 36 số. **B.** 108 số. **C.** 228 số. **D.** 144 số.
- Câu 10:** Một nhóm 9 người gồm ba đàn ông, bốn phụ nữ và hai đứa trẻ đi xem phim. Hỏi có bao nhiêu cách xếp họ ngồi trên một hàng ghế sao cho mỗi đứa trẻ ngồi giữa hai phụ nữ và không có hai người đàn ông nào ngồi cạnh nhau?
A. 288. **B.** 864. **C.** 24. **D.** 576.
- Câu 11:** Với các chữ số 0,1,2,3,4,5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số, trong đó chữ số 1 có mặt 3 lần, mỗi chữ số khác có mặt đúng một lần?
A. 6720 số. **B.** 40320 số. **C.** 5880 số. **D.** 840 số.
- Câu 12:** Một thầy giáo có 10 cuốn sách khác nhau trong đó có 4 cuốn sách Toán, 3 cuốn sách Lí, 3 cuốn sách Hóa. Thầy muốn lấy ra 5 cuốn và tặng cho 5 em học sinh A, B, C, D, E mỗi em một cuốn. Hỏi thầy giáo có bao nhiêu cách tặng cho các em học sinh sao cho sau khi tặng xong, mỗi một trong ba loại sách trên đều còn ít nhất một cuốn.
A. 204 cách. **B.** 24480 cách. **C.** 720 cách. **D.** 2520 cách.
- Câu 13:** Trong kì thi tuyển nhân viên chuyên môn cho công ty cổ phần Giáo dục trực tuyến VEDU, ở khối A có 51 thí sinh đạt điểm giỏi môn Toán, 73 thí sinh đạt điểm giỏi môn Vật lí, 73 thí sinh đạt điểm giỏi môn Hóa học, 32 thí sinh đạt điểm giỏi cả hai môn Toán và Vật lí, 45 thí sinh đạt điểm giỏi cả hai môn Vật lí và Hóa học, 21 thí sinh đạt điểm giỏi cả hai môn Toán và Hóa học, 10 thí sinh đạt điểm giỏi cả ba môn Toán, Vật lí và Hóa học. Có 767 thí sinh mà cả ba môn đều không có điểm giỏi. Hỏi có bao nhiêu thí sinh tham dự tuyển nhân viên chuyên môn cho công ty?
A. 867. **B.** 776. **C.** 264. **D.** 767.
- Câu 14:** Người ta phỏng vấn 100 người về ba bộ phim A, B, C đang chiếu thì thu được kết quả như sau:
 Bộ phim A: có 28 người đã xem.
 Bộ phim B: có 26 người đã xem.
 Bộ phim B: có 14 người đã xem.
 Có 8 người đã xem hai bộ phim A và B
 Có 4 người đã xem hai bộ phim B và C
 Có 3 người đã xem hai bộ phim A và C
 Có 2 người đã xem cả ba bộ phim A, B và C.
 Số người không xem bất cứ phim nào trong cả ba bộ phim A, B, C là:
A. 55. **B.** 45. **C.** 32. **D.** 51.
- Câu 15:** Sắp xếp 5 học sinh lớp A và 5 học sinh lớp B vào hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy 5 ghế sao cho 2 học sinh ngồi đối diện nhau thì khác lớp. Khi đó số cách xếp là:
A. 460000. **B.** 460500. **C.** 460800. **D.** 460900.
- Câu 16:** Trong mặt phẳng cho n điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng và trong tất cả các đường thẳng nối hai điểm bất kì không có hai đường thẳng nào song song, trùng nhau hoặc vuông góc. Qua mỗi điểm vẽ các đường thẳng vuông góc với các đường

thẳng được xác định bởi 2 trong $n-1$ điểm còn lại. Số giao điểm của các đường thẳng vuông góc giao nhau nhiều nhất là bao nhiêu?

- A. $2C_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}^2 - [n(C_{n-1}^2 - 1) + 5C_n^3]$.
 B. $2C_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}^2 - 2[n(C_{n-1}^2 - 1) + 5C_n^3]$.
 C. $3C_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}^2 - 2[nC_{n-1}^2 - 1 + 5C_n^3]$.
 D. $C_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}^2 - [n(C_{n-1}^2 - 1) + 5C_n^3]$.

Câu 17: Cho tập hợp $A = \{2; 5\}$. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số có 10 chữ số sao cho không có chữ số 2 nào đứng cạnh nhau?

- A. 144 số. B. 143 số. C. 1024 số. D. 512 số.

Câu 18: Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{2n}$ nội tiếp trong đường tròn tâm O . Biết rằng số tam giác có đỉnh là 3 trong $2n$ điểm $A_1; A_2; ...; A_{2n}$ gấp 20 lần so với số hình chữ nhật có đỉnh là 4 trong $2n$ điểm $A_1; A_2; ...; A_{2n}$. Vậy giá trị của n là:

- A. $n = 10$. B. $n = 12$. C. $n = 8$. D. $n = 14$.

Câu 19: Biển đăng kí xe ô tô có 6 chữ số và hai chữ cái trong số 26 chữ cái (không dùng các chữ I và O). Chữ đầu tiên khác 0. Hỏi số ô tô được đăng kí nhiều nhất có thể là bao nhiêu?

- A. 5184.10^5 . B. 576.10^6 . C. 33384960. D. 4968.10^5 .

Câu 20: Từ 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng và 4 bông hồng đỏ (các bông hoa xem như đôi một khác nhau), người ta muốn chọn một bó hồng gồm 7 bông, hỏi có bao nhiêu cách chọn bó hoa trong đó có ít nhất 3 bông hồng vàng và 3 bông hồng đỏ?

- A. 10 cách. B. 20 cách. C. 120 cách. D. 150 cách.

Câu 21: Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A , 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C . Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

- A. 120. B. 90. C. 270. D. 255.

Câu 22: Có bao nhiêu cách sắp xếp 8 viên bi đỏ khác nhau và 8 viên bi đen khác nhau thành một dãy sao cho hai viên bi cùng màu thì không được ở cạnh nhau?

- A. 3251404800. B. 1625702400. C. 72. D. 36.

Câu 23: Trong một túi đựng 10 viên bi đỏ, 20 viên bi xanh, 15 viên bi vàng. Các viên bi có cùng kích cỡ. Số cách lấy ra 5 viên bi và sắp xếp chúng vào 5 ô sao cho 5 ô bi đỏ có ít nhất một viên bi đỏ.

- A. 146611080. B. 38955840. C. 897127. D. 107655240

Câu 24: Một bộ bài có 52 lá, có 4 loại: cơ, rô, chuồn, bích mỗi loại có 13 lá. Muốn lấy ra 8 lá bài phải có đúng 1 lá cơ, đúng 3 lá rô và không quá 2 lá bích. Hỏi có mấy cách chọn?

- A. 39102206. B. 22620312. C. 36443836. D. 16481894.

Câu 25: Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số trong đó các chữ số cách đều chữ số đứng giữa thì giống nhau?

- A. 900. B. 9000. C. 90000. D. 27216.

Câu 26: Một lớp có n học sinh ($n > 3$). Thầy chủ nhiệm cần chọn ra một nhóm và cần cử ra một học sinh làm nhóm trưởng. Số học sinh trong mỗi nhóm phải lớn hơn 1 và nhỏ hơn n . Gọi T là số cách chọn, lúc này:

$$\text{A. } T = \sum_{k=2}^{n-1} kC_n^k. \quad \text{B. } T = n(2^{n-1} - 1). \quad \text{C. } T = n2^{n-1}. \quad \text{D.}$$

$$T = \sum_{k=1}^n kC_n^k.$$

Câu 27: Trong một căn phòng có 36 người trong đó có 25 người họ Nguyễn, 11 người họ Trần. Trong số những người họ Nguyễn có 8 cặp là anh em ruột (anh trai và em gái), 9 người còn lại (gồm 4 nam và 5 nữ) không có quan hệ họ hàng với nhau. Trong 11 người họ Trần, có 3 cặp là anh em ruột (anh trai và em gái), 5 người còn lại (gồm 2 nam và 3 nữ) không có quan hệ họ hàng với nhau. Chọn ngẫu nhiên 2 người.

a) Hỏi có bao nhiêu cách chọn hai người cùng họ và khác giới tính?

A. 156. **B.** 30. **C.** 186. **D.** 126.

Câu 28: Một bữa tiệc bàn tròn của các câu lạc bộ trong trường Đại học Sư Phạm Hà Nội trong đó có 3 thành viên từ câu lạc bộ Máu Sư Phạm, 5 thành viên từ câu lạc bộ Truyền thông và 7 thành viên từ câu lạc bộ Kỹ năng. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi cho các thành viên sao cho những người cùng câu lạc bộ thì ngồi cạnh nhau?

A. 7257600. **B.** 7293732. **C.** 3174012. **D.** 1418746.

Câu 29: Có 7 bông hồng đỏ, 8 bông hồng vàng, 10 bông hồng trắng, các bông hồng khác nhau từng đôi một. Hỏi có bao nhiêu cách lấy 3 bông hồng có đủ ba màu?

A. 560. **B.** 310. **C.** 3014. **D.** 319.

Câu 30: Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 9 mà mỗi số 2011 chữ số và trong đó có ít nhất hai chữ số 9.

$$\text{A. } \frac{9^{2011} - 2019 \cdot 9^{2010} + 8}{9}$$

$$\text{B. } \frac{9^{2011} - 2 \cdot 9^{2010} + 8}{9}$$

$$\text{C. } \frac{9^{2011} - 9^{2010} + 8}{9}$$

$$\text{D. } \frac{9^{2011} - 19 \cdot 9^{2010} + 8}{9}$$

Câu 31: Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số có 6 chữ số đồng thời thỏa điều kiện: sáu số của mỗi số là khác nhau và trong mỗi số đó tổng của 3 chữ số đầu nhỏ hơn tổng của 3 số sau một đơn vị.

A. 104 **B.** 106 **C.** 108 **D.** 112

Câu 32: Có m nam và n nữ. Có bao nhiêu cách chọn ra k người trong đó có ít nhất a nam và ít nhất b nữ ($k \leq m, n; a + b < k; a, b \geq 1$) với S_1 là số cách chọn có ít hơn a nam, S_2 là số cách chọn có ít hơn b nữ.

A. Số cách chọn thỏa mãn điều kiện bài toán là: $C_{m+n}^k - 2(S_1 + S_2)$.

B. Số cách chọn thỏa mãn điều kiện bài toán là: $2C_{m+n}^k - (S_1 + S_2)$.

C. Số cách chọn thỏa mãn điều kiện bài toán là: $3C_{m+n}^k - 2(S_1 + S_2)$.

D. Số cách chọn thỏa mãn điều kiện bài toán là: $C_{m+n}^k - (S_1 + S_2)$.

Câu 33: Nếu một đa giác đều có 44 đường chéo, thì số cạnh của đa giác là:

A. 11. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 8.

Câu 34: Một đa giác đều có số đường chéo gấp đôi số cạnh. Hỏi đa giác đó có bao nhiêu cạnh?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

- Câu 35:** Cho đa giác đều n đỉnh, $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 3$. Tìm n biết rằng đa giác đã cho có 135 đường chéo.
A. $n = 15$. **B.** $n = 27$. **C.** $n = 8$. **D.** $n = 18$.
- Câu 36:** Trong mặt phẳng cho n điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng và trong tất cả các đường thẳng nối hai điểm bất kì, không có hai đường thẳng nào song song, trùng nhau hoặc vuông góc. Qua mỗi điểm vẽ các đường thẳng vuông góc với các đường thẳng được xác định bởi 2 trong $n-1$ điểm còn lại. Số giao điểm của các đường thẳng vuông góc giao nhau là bao nhiêu?
A. $2C_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}^2 - [n(C_{n-1}^2 - 1) + 5C_n^3]$. **B.** $C_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}^2 - 2[n(C_{n-1}^2 - 1) + 5C_n^3]$.
C. $3C_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}^2 - 2[n(C_{n-1}^2 - 1) + 5C_n^3]$. **D.** $C_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}^2 - [n(C_{n-1}^2 - 1) + 5C_n^3]$.
- Câu 37:** Cho đa giác đều n đỉnh, $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 3$. Tìm n biết rằng đa giác đã cho có 135 đường chéo.
A. $n = 15$. **B.** $n = 27$. **C.** $n = 8$. **D.** $n = 18$.
- Câu 38:** Cho đa giác đều n đỉnh, $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 3$. Tìm n biết rằng đa giác đã cho có 135 đường chéo.
A. $n = 15$. **B.** $n = 27$. **C.** $n = 8$. **D.** $n = 18$.
- Câu 39:** Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $C_{2n}^n = (2n)^k$, trong đó k là một ước nguyên tố của C_{2n}^n .
A. $n=1$ **B.** $n=2$ **C.** $n=3$ **D.** $n=4$
- Câu 40:** Cho tập hợp A có n phần tử ($n \geq 4$). Biết rằng số tập con của A có 8 phần tử nhiều gấp 26 lần số tập con của A có 4 phần tử. Hãy tìm $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ sao cho số tập con gồm k phần tử của A là nhiều nhất.
A. $k = 20$ **B.** $k = 11$ **C.** $k = 14$ **D.** $k = 10$
- Câu 41:** Cho khối lập phương $3 \times 3 \times 3$ gồm 27 khối lập phương đơn vị. Một mặt phẳng vuông góc với đường chéo của khối lập phương lớn tại trung điểm của nó. Mặt phẳng này cắt ngang (không đi qua đỉnh) bao nhiêu khối lập phương đơn vị?
A. 16 **B.** 17 **C.** 18 **D.** 19
- Câu 42:** Cho S là tập các số nguyên trong đoạn $[1; 2002]$ và T là tập hợp các tập con khác rỗng của S . Với mỗi $X \in T$, kí hiệu $m(X)$ là trung bình cộng các phần tử của X . Tính

$$m = \frac{\sum_{X \in T} m(X)}{|T|}.$$
A. $m = \frac{3003}{2}$ **B.** $m = \frac{2003}{21}$ **C.** $m = \frac{4003}{2}$ **D.** $m = \frac{2003}{2}$

C. HƯỚNG DẪN GIẢI

QUY TẮC ĐẾM, HOÁN VỊ, CHÍNH HỢP VÀ TỔ HỢP

- Câu 1:** Số 6303268125 có bao nhiêu ước số nguyên?
A. 420. **B.** 630. **C.** 240. **D.** 720.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Cách 1:

Áp dụng công thức: Nếu số N được phân tích thành thừa số các số nguyên tố dạng $N = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$ thì số các ước nguyên dương bằng $k = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_n + 1)$. Do đó số các ước nguyên của N là $2k$.

Với $N = 6303268125 = 3^5 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11^2$ thì có $2 \cdot (5+1)(4+1)(3+1)(2+1) = 720$ ước số nguyên.

Cách 2: Áp dụng hàm sinh.

Do $N = 6303268125 = 3^5 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11^2$ nên

+ Hàm sinh để chọn số 3 là: $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$

+ Hàm sinh để chọn số 5 là: $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

+ Hàm sinh để chọn số 7 là: $1 + x + x^2 + x^3$

+ Hàm sinh để chọn số 11 là: $1 + x + x^2$

Suy ra hàm sinh các ước nguyên dương của 6303268125 có dạng:

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + x^2)$$

Tổng số các ước nguyên dương của N là tổng tất cả các hệ số của các số hạng trong khai triển trên, do đó số các ước nguyên dương của N là $f(1) = 360$ nên số ước nguyên của N là 720.

Câu 2: Đề cương ôn tập chương I môn lịch sử lớp 12 có 30 câu. Trong đề thi chọn ngẫu nhiên 10 câu trong 30 câu đó. Một học sinh chỉ nắm được 25 câu trong đề cương đó. Xác suất để trong đề thi có ít nhất 9 câu hỏi nằm trong 25 câu mà học sinh đã nắm được là. (Kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

A. $P = 0,449$.

B. $P = 0,448$.

C. $P = 0,34$.

D. $P = 0,339$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Chọn 10 câu bất kỳ từ 30 câu có C_{30}^{10} cách. Vậy số phần tử của không gian mẫu là:

$$n(\Omega) = C_{30}^{10}.$$

Gọi A là biến cố “trong đề thi có ít nhất 9 câu hỏi nằm trong 25 câu mà học sinh đã nắm được”

$$n(A) = C_{25}^9 \cdot C_5^1 + C_{25}^{10}$$

Vậy xác suất của biến cố A là: $P(A) = \frac{C_{25}^9 C_5^1 + C_{25}^{10}}{C_{30}^{10}} \approx 0,449$.

Câu 3: Bé Minh có một bảng hình chữ nhật gồm 6 hình vuông đơn vị, cố định không xoay như hình vẽ. Bé muốn dùng 3 màu để tô tất cả các cạnh của các hình vuông đơn vị, mỗi cạnh tô một lần sao cho mỗi hình vuông đơn vị được tô bởi đúng 2 màu, trong đó mỗi màu tô đúng 2 cạnh. Hỏi bé Minh có tất cả bao nhiêu cách tô màu bảng?



--	--	--

A. 4374.

B. 139968.

C. 576.

D. 15552.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta tô màu theo thứ tự sau:

1) Tô 1 ô vuông 4 cạnh: chọn 2 trong 3 màu, ứng với 2 màu được ta tô vào ô như sau: chọn 2 cạnh trong hình vuông đơn vị để tô màu thứ nhất có $C_4^2 = 6$ cách (màu thứ 2 tô

2 cạnh còn lại). Do đó, có $6.C_3^2$ cách tô.

2) Tô 3 ô vuông 3 cạnh (có một cạnh đã được tô trước đó): ứng với 1 ô vuông có 3 cách tô màu 1 trong 3 cạnh theo màu của cạnh đã tô trước đó, chọn 1 trong 2 màu còn lại tô 2 cạnh còn lại, có $3.C_2^1 = 6$ cách tô. Do đó có 6^3 cách tô.

3) Tô 2 ô vuông 2 cạnh (có 2 cạnh đã được tô trước đó): ứng với 1 ô vuông có 2 cách tô màu 2 cạnh (2 cạnh tô trước cùng màu hay khác màu không ảnh hưởng số cách tô). Do đó có 2^2 cách tô.

Vậy có $6.C_3^2.6^3.4 = 15552$ cách tô.

Câu 4: Cho đa giác đều 100 đỉnh nội tiếp một đường tròn. Số tam giác tù được tạo thành từ 3 trong 100 đỉnh của đa giác là

A. 44100.

B. 78400.

C. 117600.

D. 58800.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đánh số các đỉnh là $A_1, A_2, \dots, A_{100}$.

Xét đường chéo A_1A_{51} của đa giác là đường kính của đường tròn ngoại tiếp đa giác đều chia đường tròn ra làm 2 phần mỗi phần có 49 điểm từ A_2 đến A_{50} và A_{52} đến A_{100} .

+ Khi đó, mỗi tam giác có dạng $A_1A_iA_j$ là tam giác tù nếu A_i và A_j cùng nằm trong nửa đường tròn, chọn nửa đường tròn: có 2 cách chọn.

+ Chọn hai điểm A_i, A_j là hai điểm tùy ý được lấy từ 49 điểm A_2, A_3 đến A_{50} , có $C_{49}^2 = 1176$ cách chọn. Giả sử tam A_i nằm giữa A_1 và A_j thì tam giác tù tại đỉnh A_i .

+ Khi xét tại đỉnh A_j thì tam giác $A_jA_iA_1 \equiv A_1A_iA_j$.

+ Vì đa giác có 100 đỉnh nên số tam giác tù là $\frac{2.1176.100}{2} = 117600$ tam giác tù.

Câu 5: Cho đa giác đều $2n$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{Z}$) đỉnh nội tiếp một đường tròn. Số tam giác tù được tạo thành từ 3 trong $2n$ đỉnh của đa giác là

A. $2n(2n-1)(2n-2)$. B. $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. C. $n(n-1)(n-2)$. D. $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đánh số các đỉnh là $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$.

Xét đường chéo A_1A_{n+1} của đa giác là đường kính của đường tròn ngoại tiếp đa giác đều chia đường tròn ra làm 2 phần mỗi phần có $n-1$ điểm từ A_2 đến A_n và A_{n+2} đến A_{2n} .

+ Khi đó, mỗi tam giác có dạng $A_1A_iA_j$ là tam giác tù nếu A_i và A_j cùng nằm trong nửa đường tròn, chọn nửa đường tròn: có 2 cách chọn.

+ Chọn hai điểm A_i, A_j là hai điểm tùy ý được lấy từ từ $n-1$ điểm A_2, A_3 đến A_n , có

$$C_{n-1}^2 = \frac{(n-2)(n-1)}{2} \text{ cách chọn.}$$

+ Giả sử tam A_i nằm giữa A_1 và A_j thì tam giác tù tại đỉnh A_i . Khi xét tại đỉnh A_j thì tam giác $A_jA_iA_1 \equiv A_1A_iA_j$.

+ Vì đa giác có $2n$ đỉnh nên số tam giác tù là $\frac{2(n-2)(n-1)}{2 \cdot 2} \cdot 2n = n(n-1)(n-2)$.

Câu 6: Cho đa giác đều 100 đỉnh nội tiếp một đường tròn. Số tam giác vuông được tạo thành từ 3 trong 100 đỉnh của đa giác là

A. 2450. B. 98. C. 4900. D. 9800.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đánh số các đỉnh là $A_1, A_2, \dots, A_{100}$.

+ Mỗi tam giác vuông thì có một cạnh là đường kính của đường tròn (cũng là một đường chéo đi qua tâm của đa giác), có 50 đường kính.

+ Xét đường kính A_1A_{51} của đường tròn ngoại tiếp đa giác đều chia đường tròn ra làm 2 phần mỗi phần có 49 điểm từ A_2 đến A_{50} và A_{52} đến A_{100} . Chọn một đỉnh cho tam giác vuông $A_1A_iA_{51}$, có 98 cách chọn.

+ Vậy số tam giác vuông là $50 \cdot 98 = 4900$ tam giác.

Câu 7: Cho đa giác đều $2n$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{Z}$) đỉnh nội tiếp một đường tròn. Biết rằng số tam giác có các đỉnh là 3 trong $2n$ điểm $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong $2n$ điểm $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$. Số cạnh của của đa giác là

A. 14. B. 16. C. 18. D. 20.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

+ Số tam giác là C_{2n}^3 .

+ Mỗi đa giác đều $2n$ đỉnh thì có n đường chéo đi qua tâm của đường tròn. Hai đường chéo đi qua tâm của đường tròn thì sẽ tạo ra một hình chữ nhật thỏa yêu cầu bài toán. Nên số hình chữ nhật là C_n^2 .

+ Theo giả thuyết ta có : $C_{2n}^3 = 20C_n^2 \ (n \geq 2)$

$$\Leftrightarrow \frac{(2n)!}{(2n-3)! \cdot 3!} = 20 \frac{n!}{2!(n-2)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(2n-1)(2n-2)}{3} = 10n(n-1)$$

$$\Leftrightarrow 2n-1=15 \ (\text{do } n(n-1) > 0, \forall n \geq 2)$$

$$\Leftrightarrow n=8.$$

Vậy đa giác có 16 cạnh.

Câu 8: Có 6 học sinh và 3 thầy giáo A, B, **C**. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ 9 người đó trên một hàng ngang có 9 chỗ sao cho mỗi thầy giáo ngồi giữa hai học sinh.

A. 4320 .

B. 90 .

C. 43200 .

D. 720 .

Hướng dẫn giải

Chọn C

Có 6! cách xếp chỗ cho các học sinh.

Khi đó, với mỗi cách xếp chỗ cho các học sinh thì giữa các học sinh có 5 "khoảng trống" để xếp chỗ cho 3 thầy giáo nên có $C_5^3 \cdot 3!$ cách xếp chỗ cho các thầy giáo.

Vậy có $6! \cdot C_5^3 \cdot 3! = 43200$ cách xếp thỏa mãn.

Câu 9: các chữ số 0,1,2,3,5,8 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ có bốn chữ số đôi một khác nhau và phải có mặt chữ số 3 .

A. 36 số.

B. 108 số.

C. 228 số.

D. 144 số.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi số cần lập là $\overline{abcd}$

+ TH1:

Chọn $d=3$ có 1 cách

Chọn a có 4 cách.

Chọn b, c có A_4^2 cách

$$\Rightarrow \text{Vậy có tất cả } 4 \cdot A_4^2 = 48 \text{ (số)}$$

+ TH2:

Chọn $d \neq 3 \Rightarrow d \in \{1; 5\}$ có 2 cách.

Chọn $a=3$ có 1 cách.

Chọn b, c có A_4^2 cách

$$\Rightarrow \text{Vậy có tất cả } 2 \cdot A_4^2 = 24 \text{ (số)}$$

+) TH3: Chọn $d \neq 3 \Rightarrow d \in \{1; 5\}$ có 2 cách

Chọn $a \neq 3$

*) Có thể giải cách khác:

• $x = \overline{abcd}$ là số lẻ:

+) Chọn d có 3 cách

+) Chọn a : có 4 cách

+) Chọn b, c có A_4^2 cách

Suy ra có $3.4.A_4^2 = 144$ số lẻ.

• $x = \overline{abcd}$ là số lẻ không có chữ số 3.

Tương tự như trên ta có $2.3.A_3^2 = 36$.

Vậy có $144 - 36 = 108$ số.

Câu 10: Một nhóm 9 người gồm ba đàn ông, bốn phụ nữ và hai đứa trẻ đi xem phim. Hỏi có bao nhiêu cách xếp họ ngồi trên một hàng ghế sao cho mỗi đứa trẻ ngồi giữa hai phụ nữ và không có hai người đàn ông nào ngồi cạnh nhau?

A. 288.

B. 864.

C. 24.

D. 576.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Kí hiệu T là ghế đàn ông ngồi, N là ghế cho phụ nữ ngồi, C là ghế cho trẻ con ngồi.

Ta có các phương án sau:

PA1: $TNCNTNCNT$

PA2: $TNTNCNCNT$

PA3: $TNCNCNTNT$

Xét phương án 1: Ba vị trí ghế cho đàn ông có $3!$ cách.

Bốn vị trí ghế cho phụ nữ có thể có $4!$ cách.

Hai vị trí ghế trẻ con ngồi có thể có $2!$ cách.

Theo quy tắc nhân thì ta có $3!.4!.2! = 288$ cách.

Lập luận tương tự cho phương án 2 và phương án 3.

Theo quy tắc cộng thì ta có $288 + 288 + 288 = 864$ cách.

Câu 11: Với các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5$ có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số, trong đó chữ số 1 có mặt 3 lần, mỗi chữ số khác có mặt đúng một lần?

A. 6720 số.

B. 40320 số.

C. 5880 số.

D. 840 số.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Giả sử các số tự nhiên gồm 8 chữ số tương ứng với 8 ô.

--	--	--	--	--	--	--	--

Do chữ số 1 có mặt 3 lần nên ta sẽ coi như tìm số các số thỏa mãn đề bài được tạo nên từ 8 số $0, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5$.

Số hoán vị của 8 số $0, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5$ trong 8 ô trên là $8!$

Mặt khác chữ số 1 lặp lại 3 lần nên số cách xếp là $\frac{8!}{3!}$ kể cả trường hợp số 0 đứng đầu.

Xét trường hợp ô thứ nhất là chữ số 0, thì số cách xếp là $\frac{7!}{3!}$.

Câu 12: Một thầy giáo có 10 cuốn sách khác nhau trong đó có 4 cuốn sách Toán, 3 cuốn sách Lí, 3 cuốn sách Hóa. Thầy muốn lấy ra 5 cuốn và tặng cho 5 em học sinh A, B, C, D, E mỗi em một cuốn. Hỏi thầy giáo có bao nhiêu cách tặng cho các em học

sinh sao cho sau khi tặng xong, mỗi một trong ba loại sách trên đều còn ít nhất một cuốn.

A. 204 cách. **B.** 24480 cách. **C.** 720 cách. **D.** 2520 cách.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta thấy với bài toán này nếu làm trực tiếp thì sẽ khá khó, nên ta sẽ làm theo cách gián tiếp. Tìm bài toán đối đó là tìm số cách sao cho sau khi tặng sách xong có 1 môn hết sách.

TH1: Môn Toán hết sách:

Số cách chọn 4 cuốn sách Toán là 1 cách.

Số cách chọn 1 cuốn trong 6 cuốn còn lại là 6 cách.

Vậy có 6 cách chọn sách.

Số cách tặng 5 cuốn sách đó cho 5 em học sinh là $A_5^5 = 120$ cách.

Vậy có $6.120 = 720$ cách.

TH2: Môn Lí hết sách:

Số cách chọn 3 cuốn sách Lí là 1 cách.

Số cách chọn 2 cuốn trong 7 cuốn còn lại là C_7^2 cách.

Vậy có 21 cách chọn sách.

Số cách tặng 5 cuốn sách đó cho 5 em học sinh là $A_5^5 = 120$ cách.

Vậy có $21.120 = 2520$ cách.

TH3: Môn Hóa hết sách: Tương tự trường hợp 2 thì có 2520 cách.

Số cách chọn 5 cuốn bất kì trong 10 cuốn và tặng cho 5 em là $C_{10}^5.A_5^5 = 30240$ cách.

Vậy số cách chọn sao cho sau khi tặng xong, mỗi loại sách trên đều còn lại ít nhất một cuốn là $30240 - 720 - 2520 - 2520 = 24480$ cách.

Câu 13: Trong kì thi tuyển nhân viên chuyên môn cho công ty cổ phần Giáo dục trực tuyến VEDU, ở khối A có 51 thí sinh đạt điểm giỏi môn Toán, 73 thí sinh đạt điểm giỏi môn Vật lí, 73 thí sinh đạt điểm giỏi môn Hóa học, 32 thí sinh đạt điểm giỏi cả hai môn Toán và Vật lí, 45 thí sinh đạt điểm giỏi cả hai môn Vật lí và Hóa học, 21 thí sinh đạt điểm giỏi cả hai môn Toán và Hóa học, 10 thí sinh đạt điểm giỏi cả ba môn Toán, Vật lí và Hóa học. Có 767 thí sinh mà cả ba môn đều không có điểm giỏi. Hỏi có bao nhiêu thí sinh tham dự tuyển nhân viên chuyên môn cho công ty?

A. 867. **B.** 776. **C.** 264. **D.** 767.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Kí hiệu A, B, C tương ứng là tập hợp các thí sinh đạt điểm giỏi ở ít nhất một trong ba môn là Toán, Vật lí, Hóa học.

$$|A| = 51; |B| = 73; |C| = 64; |A \cap B| = 32; |B \cap C| = 45; |A \cap C| = 21; |A \cap B \cap C| = 10.$$

Lúc này ta có $A \cup B \cup C$ là tập hợp các học sinh đạt điểm giỏi ở ít nhất một trong ba môn là Toán, Vật lí, Hóa học. Ta có:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$= 51 + 73 + 64 - 32 - 45 - 21 + 10 = 100.$$

Vậy số thí sinh dự tuyển vào công ty VEDU là $100 + 767 = 867$.

Câu 14: Người ta phỏng vấn 100 người về ba bộ phim A, B, C đang chiếu thì thu được kết quả như sau:

Bộ phim A: có 28 người đã xem.

Bộ phim B: có 26 người đã xem.

Bộ phim C: có 14 người đã xem.

Có 8 người đã xem hai bộ phim A và B

Có 4 người đã xem hai bộ phim B và C

Có 3 người đã xem hai bộ phim A và C

Có 2 người đã xem cả ba bộ phim A, B và **C.**

Số người không xem bất cứ phim nào trong cả ba bộ phim A, B, C là:

A. 55.

B. 45.

C. 32.

D. 51.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Theo quy tắc tính số phần tử của ba tập hợp hữu hạn bất kì, ta có số người xem ít nhất một bộ phim là $28 + 26 + 14 - 8 - 4 - 3 + 2 = 55$ người.

Vậy số người không xem bất cứ bộ phim nào là $100 - 55 = 45$ người.

Câu 15: Sắp xếp 5 học sinh lớp A và 5 học sinh lớp B vào hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy 5 ghế sao cho 2 học sinh ngồi đối diện nhau thì khác lớp. Khi đó số cách xếp là:

A. 460000.

B. 460500.

C. 460800.

D. 460900.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Cách 1:

Bước 1: Học sinh đầu tiên, giả sử đó là học sinh lớp A có 10 cách chọn ghế.

Bước 2: Có 5 cách chọn ra một học sinh lớp B ngồi vào ghế đối diện.

Bước 3: Có 8 cách chọn ra một học sinh lớp A vào ghế tiếp theo.

Bước 4: Có 4 cách chọn ra học sinh lớp B vào ghế đối diện.

Bước 5: Có 6 cách chọn ra học sinh lớp A.

Bước 6: Có 3 cách chọn học sinh lớp B vào ghế đối diện.

Bước 7: Có 4 cách chọn học sinh lớp A vào ghế tiếp.

Bước 8: Có 2 cách chọn học sinh lớp B vào ghế đối diện.

Bước 9: Có 2 cách chọn học sinh lớp A vào ghế kế tiếp.

Bước 10: Có 1 cách chọn học sinh lớp B vào ghế đối diện.

Theo quy tắc nhân thì có $10.5.8.4.6.3.4.2.2.1 = (5!)^2 \cdot 2^5 = 460800$ cách.

Cách 2:

Vì 2 học sinh ngồi đối diện nhau thì khác lớp nên mỗi cặp ghế đối diện nhau sẽ được xếp bởi 1 học sinh lớp A và 1 học sinh lớp B.

Số cách xếp 5 học sinh lớp A vào 5 cặp ghế là $5!$ cách. Số cách xếp 5 học sinh lớp B vào 5 cặp ghế là $5!$ cách. Số cách xếp chỗ ở mỗi cặp ghế là 2 cách.

Theo quy tắc nhân thì có $(5!)^2 \cdot 2^5 = 460800$ cách.

Câu 16: Trong mặt phẳng cho n điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng và trong tất cả các đường thẳng nối hai điểm bất kì không có hai đường thẳng nào song song, trùng nhau hoặc vuông góc. Qua mỗi điểm vẽ các đường thẳng vuông góc với các đường thẳng được xác định bởi 2 trong $n-1$ điểm còn lại. Số giao điểm của các đường thẳng vuông góc giao nhau nhiều nhất là bao nhiêu?

A. $2C_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}^2 - [n(C_{n-1}^2 - 1) + 5C_n^3]$.

B. $2C_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}^2 - 2[n(C_{n-1}^2 - 1) + 5C_n^3]$.

C. $3C_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}^2 - 2[nC_{n-1}^2 - 1 + 5C_n^3]$.

D. $C_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}^2 - [n(C_{n-1}^2 - 1) + 5C_n^3]$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

*Gọi n điểm đã cho là $A_1, A_2, \dots, A_n$. Xét một điểm cố định, khi đó có C_{n-1}^2 đường thẳng được xác định bởi 2 trong $n-1$ điểm còn lại nên sẽ có C_{n-1}^2 đường thẳng vuông góc đi qua điểm cố định đó.

*Do đó có tất cả $nC_{n-1}^2 = \frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ đường thẳng vuông góc nên có $C_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}^2$

giao điểm (tính cả những giao điểm trùng nhau)

*Ta chia các điểm trùng nhau thành 3 loại

- Qua một điểm có $C_{n-1}^2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ đường thẳng vuông góc nên ta phải trừ đi

$n(C_{n-1}^2 - 1)$ điểm.

- Qua ba điểm A_1, A_2, A_3 của 1 tam giác có 3 đường thẳng cùng vuông góc với A_4A_5 và 3 đường thẳng này song song với nhau nên ta mất 3 giao điểm, do đó trong TH này ta phải loại đi $3C_n^3$

- Trong mỗi tam giác thì ba đường cao chỉ có một giao điểm, nên ta mất 2 điểm cho mỗi tam giác, do đó trường hợp này ta phải trừ đi $2C_n^3$.

Vậy số giao điểm nhiều nhất có được là: $C_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}^2 - [n(C_{n-1}^2 - 1) + 5C_n^3]$.

Câu 17: Cho tập hợp $A = \{2; 5\}$. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số có 10 chữ số sao cho không có chữ số 2 nào đứng cạnh nhau?

A. 144 số.

B. 143 số.

C. 1024 số.

D. 512 số.

Hướng dẫn giải

Chọn A

TH1: Số có 10 chữ số 5: chỉ có 1 số duy nhất.

TH2: Số có 9 chữ số 5 và 1 chữ số 2.

Xếp 9 số 5 thành hàng có 1 cách. Khi đó tạo nên 10 "vách ngăn" để xếp số 2.

Xếp số 2 có C_{10}^1 cách. Vậy có C_{10}^1 số.

TH3: Số có 8 chữ số 5 và 2 chữ số 2.

Tương tự sử dụng phương pháp tạo vách ngăn như TH2 thì tìm được C_9^2 số.

TH4: Số có 7 chữ số 5 và 3 chữ số 2: có C_8^3 số.

TH5: Số có 6 chữ số 5 và 4 chữ số 2: có C_7^4 số.

TH6: Có 5 chữ số 5 và 5 chữ số 2: có C_6^5 số.

Vậy theo quy tắc cộng thì có $1 + C_{10}^1 + C_9^2 + C_8^3 + C_7^4 + C_6^5 = 144$ số.

Câu 18: Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{2n}$ nội tiếp trong đường tròn tâm O . Biết rằng số tam giác có đỉnh là 3 trong $2n$ điểm $A_1; A_2; ...; A_{2n}$ gấp 20 lần so với số hình chữ nhật có đỉnh là 4 trong $2n$ điểm $A_1; A_2; ...; A_{2n}$. Vậy giá trị của n là:

- A.** $n = 10$. **B.** $n = 12$. **C.** $n = 8$. **D.** $n = 14$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Số tam giác có 3 đỉnh là 3 trong $2n$ điểm $A_1; A_2; ...; A_{2n}$ là C_{2n}^3 .

Ứng với hai đường chéo đi qua tâm của đa giác $A_1A_2...A_{2n}$ cho tương ứng một hình chữ nhật có 4 đỉnh

là 4 điểm trong $2n$ điểm $A_1; A_2; ...; A_{2n}$ và ngược lại mỗi hình chữ nhật như vậy sẽ cho ra 2 đường chéo đi qua tâm O của đa giác.

Mà số đường chéo đi qua tâm của đa giác đều $2n$ đỉnh là n nên số hình chữ nhật có đỉnh là 4 trong $2n$ điểm là C_n^2

$$\text{Theo đề bài ta có: } C_{2n}^3 = 20C_n^2 \Leftrightarrow \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3!} = \frac{20n(n-1)}{2} \Leftrightarrow n = 8.$$

Câu 19: Biển đăng kí xe ô tô có 6 chữ số và hai chữ cái trong số 26 chữ cái (không dùng các chữ I và O). Chữ đầu tiên khác 0. Hỏi số ô tô được đăng kí nhiều nhất có thể là bao nhiêu?

- A.** 5184.10^5 . **B.** 576.10^6 . **C.** 33384960 . **D.** 4968.10^5 .

Hướng dẫn giải

Chọn A

Theo quy tắc nhân ta thực hiện từng bước.

Chữ cái đầu tiên có 24 cách chọn.

Chữ cái tiếp theo cũng có 24 cách chọn.

Chữ số đầu tiên có 9 cách chọn.

Chữ số thứ hai có 10 cách chọn.

Chữ số thứ ba có 10 cách chọn.

Chữ số thứ tư có 10 cách chọn.

Chữ số thứ năm có 10 cách chọn.

Chữ số thứ sáu có 10 cách chọn.

Vậy theo quy tắc nhân ta có $24.24.9.10^5 = 5184.10^5$ là số ô tô nhiều nhất có thể đăng kí.

Câu 20: Từ 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng và 4 bông hồng đỏ (các bông hoa xem như đôi một khác nhau), người ta muốn chọn một bó hồng gồm 7 bông, hỏi có bao nhiêu cách chọn bó hoa trong đó có ít nhất 3 bông hồng vàng và 3 bông hồng đỏ?

- A.** 10 cách. **B.** 20 cách. **C.** 120 cách. **D.** 150 cách.

Phân tích

Ta thấy do chỉ chọn 7 bông hồng mà có ít nhất 3 bông hồng vàng và ít nhất 3 bông hồng đỏ nên chỉ có 3 trường hợp sau:

TH1: Chọn được 3 bông hồng vàng và 4 bông hồng đỏ.

TH2: Chọn được 4 bông hồng vàng và 3 bông hồng đỏ.

TH3: Chọn được 3 bông hồng vàng, 3 bông hồng đỏ và 1 bông hồng trắng.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

TH1: Số cách chọn 3 bông hồng vàng là C_5^3 cách.

Số cách chọn 4 bông hồng đỏ là C_4^4 cách.

Theo quy tắc nhân thì có $C_5^3.C_4^4 = 10$ cách.

TH2: Tương tự TH1 thì ta có $C_5^4.C_4^3 = 20$ cách.

TH3: Tương tự thì có $C_5^3.C_4^3.C_3^1 = 120$ cách.

Vậy theo quy tắc cộng thì có $10 + 20 + 120 = 150$ cách.

Câu 21: Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A , 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C . Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

A. 120.

B. 90.

C. 270.

D. 255.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Số cách chọn 4 học sinh bất kì từ 12 học sinh là $C_{12}^4 = 495$ cách.

Số cách chọn 4 học sinh mà mỗi lớp có ít nhất một em được tính như sau:

* **TH1:** Lớp A có hai học sinh, các lớp B, C mỗi lớp có 1 học sinh:

Chọn 2 học sinh trong 5 học sinh lớp A có C_5^2 cách.

Chọn 1 học sinh trong 4 học sinh lớp B có C_4^1 cách.

Chọn 1 học sinh trong 3 học sinh lớp C có C_3^1 cách.

Suy ra số cách chọn là $C_5^2.C_4^1.C_3^1 = 120$ cách.

* **TH2:** Lớp B có 2 học sinh, các lớp A, C mỗi lớp có 1 học sinh:

Tương tự ta có số cách chọn là $C_5^1.C_4^2.C_3^1 = 90$ cách.

* **TH3:** Lớp C có 2 học sinh, các lớp A, B mỗi lớp có 1 học sinh:

Tương tự ta có số cách chọn là $C_5^1.C_4^1.C_3^2 = 60$ cách.

Vậy số cách chọn 4 học sinh mà mỗi lớp có ít nhất một học sinh là $120 + 90 + 60 = 270$ cách.

Số cách chọn ra 4 học sinh thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên là $495 - 270 = 225$ cách.

Câu 22: Có bao nhiêu cách sắp xếp 8 viên bi đỏ khác nhau và 8 viên bi đen khác nhau thành một dãy sao cho hai viên bi cùng màu thì không được ở cạnh nhau?

A. 3251404800.

B. 1625702400.

C. 72.

D. 36.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Nhận xét: Bài toán là sự kết hợp giữa quy tắc cộng và quy tắc nhân.

Do hai viên bi cùng màu không được ở cạnh nhau nên ta có trường hợp sau:

Phương án 1: Các bi đỏ ở vị trí lẻ. Có 8 cách chọn bi đỏ ở vị trí số 1.

Có 7 cách chọn bi đỏ ở vị trí số 3.

....

Có 1 cách chọn bi đỏ ở vị trí số 15.

Suy ra có $8.7.6...3.2.1$ cách xếp 8 bi đỏ. Tương tự có $8.7.6...3.2.1$ cách xếp 8 bi xanh.

Vậy có $(8.7...3.2.1)^2$ cách xếp.

Phương án 2: Các bi đỏ ở vị trí chẵn ta cũng có cách xếp tương tự.

Vậy theo quy tắc cộng ta có $(8!)^2 + (8!)^2 = 3251404800$.

Câu 23: Trong một túi đựng 10 viên bi đỏ, 20 viên bi xanh, 15 viên bi vàng. Các viên bi có cùng kích cỡ. Số cách lấy ra 5 viên bi và sắp xếp chúng vào 5 ô sao cho 5 ô bi đỏ có ít nhất một viên bi đỏ.

A. 146611080. **B.** 38955840. **C.** 897127. **D.** 107655240.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Bước 1: Chọn bi

- Số cách chọn ra 5 viên bi bất kì là C_{45}^5 cách.

- Số cách chọn ra 5 viên bi trong đó không có viên bi đỏ nào là C_{35}^5 cách.

- Số cách chọn ra 5 viên bi trong đó có ít nhất một viên bi màu đỏ là $C_{45}^5 - C_{35}^5$ cách.

Bước 2: Sắp xếp các viên bi.

Số cách xếp 5 viên bi vào 5 ô là $5!$

Theo quy tắc nhân thì có $5!.(C_{45}^5 - C_{35}^5) = 107655240$.

Câu 24: Một bộ bài có 52 lá, có 4 loại: cơ, rô, chuồn, bích mỗi loại có 13 lá. Muốn lấy ra 8 lá bài phải có đúng 1 lá cơ, đúng 3 lá rô và không quá 2 lá bích. Hỏi có mấy cách chọn?

A. 39102206. **B.** 22620312. **C.** 36443836. **D.** 16481894.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Xét các trường hợp sau:

- Lấy được 1 lá cơ, 3 lá rô và 4 chuồn thì có $C_3^1 C_{13}^3 C_{13}^1 C_{13}^3 = 22620312$ cách lấy.

Theo quy tắc cộng thì có tất cả $22620312 + 13823524 + 2658370 = 39102206$ cách lấy.

Câu 25: Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số trong đó các chữ số cách đều chữ số đứng giữa thì giống nhau?

A. 900. **B.** 9000. **C.** 90000. **D.** 27216.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi số cần tìm là $\overline{abcab}$.

Có 9 cách chọn a.

Có 10 cách chọn b.

Có 10 cách chọn c.

Vậy có tất cả $9.10.10 = 900$ số.

Câu 26: Một lớp có n học sinh ($n > 3$). Thầy chủ nhiệm cần chọn ra một nhóm và cử ra một học sinh làm nhóm trưởng. Số học sinh trong mỗi nhóm phải lớn hơn 1 và nhỏ hơn n . Gọi T là số cách chọn, lúc này:

$$\text{A. } T = \sum_{k=2}^{n-1} kC_n^k.$$

$$\text{B. } T = n(2^{n-1} - 1).$$

$$\text{C. } T = n2^{n-1}.$$

D.

$$T = \sum_{k=1}^n kC_n^k.$$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi A_k là phương án: Chọn nhóm có k học sinh và chỉ định nhóm trưởng của nhóm. Thầy chủ nhiệm có các phương án $A_2, A_3, A_4, \dots, A_{n-1}$. Ta tính xem có bao nhiêu cách thực hiện.

Phương án A_k có hai công đoạn:

- Công đoạn 1: Chọn k học sinh có C_n^k cách chọn.
- Công đoạn 2: Chỉ định nhóm trưởng: có k cách chọn.

Theo quy tắc nhân thì phương án A_k có kC_n^k cách thực hiện.

Vậy theo quy tắc cộng thì $T = \sum_{k=2}^{n-1} kC_n^k$.

Câu 27: Trong một căn phòng có 36 người trong đó có 25 người họ Nguyễn, 11 người họ Trần. Trong số những người họ Nguyễn có 8 cặp là anh em ruột (anh trai và em gái), 9 người còn lại (gồm 4 nam và 5 nữ) không có quan hệ họ hàng với nhau. Trong 11 người họ Trần, có 3 cặp là anh em ruột (anh trai và em gái), 5 người còn lại (gồm 2 nam và 3 nữ) không có quan hệ họ hàng với nhau. Chọn ngẫu nhiên 2 người.

a) Hỏi có bao nhiêu cách chọn hai người cùng họ và khác giới tính?

A. 156.

B. 30.

C. 186.

D. 126.

b) Hỏi có bao nhiêu cách chọn hai người sao cho không có cặp anh em ruột nào?

A. 619.

B. 630.

C. 11.

D. 25.

Hướng dẫn giải

a) Chọn C.

Chọn C.

* Có $8 + 4 = 12$ nam họ Nguyễn và có $8 + 5 = 13$ nữ họ Nguyễn. Vậy có $12 \cdot 13 = 156$ cặp cùng họ Nguyễn mà khác giới tính.

* Tương tự có $5 \cdot 6 = 30$ cách chọn cặp cùng họ Trần mà khác giới tính.

Vậy có $156 + 30 = 186$ cách chọn hai người cùng họ và khác giới tính.

b) Chọn A.

Ta có $8 + 3 = 11$ cặp anh em trong đó 8 cặp họ Nguyễn và 3 cặp họ Trần.

Chọn bất kì 2 người trong số 36 người thì có $C_{36}^2 = 630$ cách chọn.

Vậy có tất cả $630 - 11 = 619$ cách chọn các cặp sao cho không có cặp anh em nào.

Câu 28: Một bữa tiệc bàn tròn của các câu lạc bộ trong trường Đại học Sư Phạm Hà Nội trong đó có 3 thành viên từ câu lạc bộ Máu Sư Phạm, 5 thành viên từ câu lạc bộ Truyền thông và 7 thành viên từ câu lạc bộ Kỹ năng. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi cho các thành viên sao cho những người cùng câu lạc bộ thì ngồi cạnh nhau?

A. 7257600.

B. 7293732.

C. 3174012.

D. 1418746.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Do các thành viên cùng câu lạc bộ thì ngồi cạnh nhau nên ta sử dụng phương pháp “buộc” các phần tử để giải quyết bài toán.

Lúc này ta có 3 phần tử đó là 3 câu lạc bộ. Theo công thức hoán vị vòng quanh được giới thiệu ở phần ví dụ thì ta có $2!$ cách xếp 3 câu lạc bộ vào bàn tròn. Với mỗi cách xếp thì có:

$3!$ cách xếp các thành viên CLB Máu Sứ phạm.

$5!$ cách xếp các thành viên CLB Truyền thông.

$7!$ cách xếp các thành viên CLB Kỹ năng.

Vậy theo quy tắc nhân thì có tất cả: $2! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 7! = 7257600$ cách xếp.

Câu 29: Có 7 bông hồng đỏ, 8 bông hồng vàng, 10 bông hồng trắng, các bông hồng khác nhau từng đôi một. Hỏi có bao nhiêu cách lấy 3 bông hồng có đủ ba màu?

A. 560.

B. 310.

C. 3014.

D. 319.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Cách 1: Số cách lấy 3 bông hồng bất kì: $C_{25}^3 = 2300$

Số cách lấy 3 bông hồng chỉ có một màu: $C_7^3 + C_8^3 + C_{10}^3 = 211$

Số cách lấy 3 bông hồng có đúng hai màu: $C_{15}^3 + C_{17}^3 + C_{18}^3 - 2(C_7^3 + C_8^3 + C_{10}^3) = 1529$

Vậy số cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán là $2300 - 211 - 1529 = 560$.

Cách 2: Có 7 cách chọn bông hồng màu đỏ. Có 8 cách chọn bông hồng màu vàng.

Có 10 cách chọn bông hồng màu trắng. $\Rightarrow$ Có $7 \cdot 8 \cdot 10 = 560$ cách.

Câu 30: Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 9 mà mỗi số 2011 chữ số và trong đó có ít nhất hai chữ số 9.

A. $\frac{9^{2011} - 2019 \cdot 9^{2010} + 8}{9}$

B. $\frac{9^{2011} - 2 \cdot 9^{2010} + 8}{9}$

C. $\frac{9^{2011} - 9^{2010} + 8}{9}$

D.

$\frac{9^{2011} - 19 \cdot 9^{2010} + 8}{9}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt X là các số tự nhiên thỏa yêu cầu bài toán.

$A = \{ \text{các số tự nhiên không vượt quá 2011 chữ số và chia hết cho 9} \}$

Với mỗi số thuộc A có m chữ số ($m \leq 2008$) thì ta có thể bổ sung thêm 2011 - m số

0 vào phía trước thì số có được không đổi khi chia cho 9. Do đó ta xét các số thuộc A

có dạng $\overline{a_1 a_2 \dots a_{2011}}$; $a_i \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$

$A_0 = \{a \in A \mid \text{mà trong } a \text{ không có chữ số 9}\}$

$A_1 = \{a \in A \mid \text{mà trong } a \text{ có đúng 1 chữ số 9}\}$

• Ta thấy tập A có $1 + \frac{9^{2011} - 1}{9}$ phần tử

• Tính số phần tử của A_0

Với $x \in A_0 \Rightarrow x = \overline{a_1 \dots a_{2011}}; a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 8\} \quad i = \overline{1, 2010}$ và $a_{2011} = 9 - r$ với

$r \in [1; 9], r \equiv \sum_{i=1}^{2010} a_i$. Từ đó ta suy ra A_0 có 9^{2010} phần tử

- Tính số phần tử của A_1

Để lập số của thuộc tập A_1 ta thực hiện liên tiếp hai bước sau

Bước1: Lập một dãy gồm 2010 chữ số thuộc tập $\{0, 1, 2, \dots, 8\}$ và tổng các chữ số chia hết cho 9. Số các dãy là 9^{2009}

Bước2: Với mỗi dãy vừa lập trên, ta bổ sung số 9 vào một vị trí bất kì ở dãy trên, ta có 2010 các bổ sung số 9

Do đó A_1 có $2010 \cdot 9^{2009}$ phần tử.

Vậy số các số cần lập là:

$$1 + \frac{9^{2011} - 1}{9} - 9^{2010} - 2010 \cdot 9^{2009} = \frac{9^{2011} - 2019 \cdot 9^{2010} + 8}{9}.$$

Câu 31: Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số có 6 chữ số đồng thời thỏa điều kiện: sáu số của mỗi số là khác nhau và trong mỗi số đó tổng của 3 chữ số đầu nhỏ hơn tổng của 3 số sau một đơn vị.

A. 104

B. 106

C. 108

D. 112

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Cách1: Gọi $x = \overline{a_1 a_2 \dots a_6}$, $a_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ là số cần lập

Theo bài ra ta có: $a_1 + a_2 + a_3 + 1 = a_4 + a_5 + a_6$ (1)

Mà $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ và đôi một khác nhau nên

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra: $a_1 + a_2 + a_3 = 10$

Phương trình này có các bộ nghiệm là: $(a_1, a_2, a_3) = (1, 3, 6); (1, 4, 5); (2, 3, 5)$

Với mỗi bộ ta có $3!.3! = 36$ số.

Vậy có $3 \cdot 36 = 108$ số cần lập.

Cách2: Gọi $x = \overline{abcdef}$ là số cần lập

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a + b + c + d + e + f = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 \\ a + b + c = d + e + f + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b + c = 11. \text{ Do } a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Suy ra ta có các cặp sau: $(a, b, c) = (1, 4, 6); (2, 3, 6); (2, 4, 5)$

Với mỗi bộ như vậy ta có 3! cách chọn a, b, c và 3! cách chọn d, e, f

Do đó có: $3 \cdot 3!.3! = 108$ số thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 32: Có m nam và n nữ. Có bao nhiêu cách chọn ra k người trong đó có ít nhất a nam và ít nhất b nữ ($k \leq m, n; a + b < k; a, b \geq 1$) với S_1 là số cách chọn có ít hơn a nam, S_2 là số cách chọn có ít hơn b nữ.

- A.** Số cách chọn thoả mãn điều kiện bài toán là: $C_{m+n}^k - 2(S_1 + S_2)$.
- B.** Số cách chọn thoả mãn điều kiện bài toán là: $2C_{m+n}^k - (S_1 + S_2)$.
- C.** Số cách chọn thoả mãn điều kiện bài toán là: $3C_{m+n}^k - 2(S_1 + S_2)$.
- D.** Số cách chọn thoả mãn điều kiện bài toán là: $C_{m+n}^k - (S_1 + S_2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Số cách chọn k người trong $m+n$ người là: C_{m+n}^k .

*Số cách chọn có ít hơn a nam là: $S_1 = \sum_{i=0}^{a-1} C_m^{a-i-1} \cdot C_n^{k-a+i+1}$.

*Số cách chọn có ít hơn b nữ là: $S_2 = \sum_{i=0}^{b-1} C_n^{b-i-1} \cdot C_m^{k-b+i+1}$.

Số cách chọn thoả mãn điều kiện bài toán là: $C_{m+n}^k - (S_1 + S_2)$.

Câu 33: Nếu một đa giác đều có 44 đường chéo, thì số cạnh của đa giác là:

- A.** 11. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Cứ hai đỉnh của đa giác n ($n \in \mathbb{N}, n \geq 3$) đỉnh tạo thành một đoạn thẳng (bao gồm cả cạnh đa giác và đường chéo).

Khi đó số đường chéo là: $C_n^2 - n = 44 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} - n = 44$

$$\Leftrightarrow n(n-1) - 2n = 88 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 11 \\ n = -8 \end{cases} \Leftrightarrow n = 11 \text{ (vì } n \in \mathbb{N}).$$

Câu 34: Một đa giác đều có số đường chéo gấp đôi số cạnh. Hỏi đa giác đó có bao nhiêu cạnh?

- A.** 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đa giác có n cạnh ($n \in \mathbb{N}, n \geq 3$).

Số đường chéo trong đa giác là: $C_n^2 - n$.

Ta có: $C_n^2 - n = 2n \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = 3n \Leftrightarrow n(n-1) = 6n \Leftrightarrow \begin{cases} n = 7 \\ n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow n = 7$.

Câu 35: Cho đa giác đều n đỉnh, $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 3$. Tìm n biết rằng đa giác đã cho có 135 đường chéo.

- A.** $n = 15$. **B.** $n = 27$. **C.** $n = 8$. **D.** $n = 18$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

+ Tìm công thức tính số đường chéo: Số đoạn thẳng tạo bởi n đỉnh là C_n^2 , trong đó có n cạnh, suy ra số đường chéo là $C_n^2 - n$.

+ Đa giác đã cho có 135 đường chéo nên $C_n^2 - n = 135$.

+ Giải PT: $\frac{n!}{(n-2)!2!} - n = 135, (n \in \mathbb{N}, n \geq 2) \Leftrightarrow (n-1)n - 2n = 270$

$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 270 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 18 \text{ (nhân)} \\ n = -15 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow n = 18.$

Câu 36: Trong mặt phẳng cho n điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng và trong tất cả các đường thẳng nối hai điểm bất kì, không có hai đường thẳng nào song song, trùng nhau hoặc vuông góc. Qua mỗi điểm vẽ các đường thẳng vuông góc với các đường thẳng được xác định bởi 2 trong $n-1$ điểm còn lại. Số giao điểm của các đường thẳng vuông góc giao nhau là bao nhiêu?

A. $2C_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}^2 - [n(C_{n-1}^2 - 1) + 5C_n^3].$ B. $C_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}^2 - 2[n(C_{n-1}^2 - 1) + 5C_n^3].$
C. $3C_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}^2 - 2[n(C_{n-1}^2 - 1) + 5C_n^3].$ D. $C_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}^2 - [n(C_{n-1}^2 - 1) + 5C_n^3].$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Gọi n điểm đã cho là $A_1, A_2, \dots, A_n$. Xét một điểm cố định, khi đó có C_{n-1}^2 đường thẳng nên sẽ có C_{n-1}^2 đường thẳng vuông góc đi qua điểm cố định đó.

Do đó có $nC_{n-1}^2 = \frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ đường thẳng vuông góc nên có

$C_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}^2$ giao điểm (tính cả những giao điểm trùng nhau).

Ta chia các điểm trùng nhau thành 3 loại:

* Qua một điểm có $C_{n-1}^2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ nên ta phải trừ đi $n(C_{n-1}^2 - 1)$ điểm.

* Qua A_1, A_2, A_3 có 3 đường thẳng cùng vuông góc với A_4A_5 và 3 đường thẳng này song song với nhau, nên ta mất 3 giao điểm, do đó trong TH này ta phải loại đi: $3C_n^3$.

* Trong mỗi tam giác thì ba đường cao chỉ có một giao điểm, nên ta mất 2 điểm cho mỗi tam giác, do đó trường hợp này ta phải trừ đi $2C_n^3$.

Vậy số giao điểm nhiều nhất có được là: $C_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}^2 - [n(C_{n-1}^2 - 1) + 5C_n^3].$

Câu 37: Cho đa giác đều n đỉnh, $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 3$. Tìm n biết rằng đa giác đã cho có 135 đường chéo

A. $n = 15.$ B. $n = 27.$ C. $n = 8.$ D. $n = 18.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

+ Tìm công thức tính số đường chéo: Số đoạn thẳng tạo bởi n đỉnh là C_n^2 , trong đó có n cạnh, suy ra số đường chéo là $C_n^2 - n$.

+ Đa giác đã cho có 135 đường chéo nên $C_n^2 - n = 135$.

+ Giải PT: $\frac{n!}{(n-2)!2!} - n = 135, (n \in \mathbb{N}, n \geq 2) \Leftrightarrow (n-1)n - 2n = 270$

$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 270 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 18(\text{nhan}) \\ n = -15(\text{loai}) \end{cases} \Leftrightarrow n = 18.$

Câu 38: Cho đa giác đều n đỉnh, $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 3$. Tìm n biết rằng đa giác đã cho có 135 đường chéo

A. $n = 15$.

B. $n = 27$.

C. $n = 8$.

D. $n = 18$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

+ Tìm công thức tính số đường chéo: Số đoạn thẳng tạo bởi n đỉnh là C_n^2 , trong đó có n cạnh, suy ra số đường chéo là $C_n^2 - n$.

+ Đa giác đã cho có 135 đường chéo nên $C_n^2 - n = 135$.

+ Giải PT: $\frac{n!}{(n-2)!2!} - n = 135, (n \in \mathbb{N}, n \geq 2) \Leftrightarrow (n-1)n - 2n = 270$

$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 270 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 18(\text{nhan}) \\ n = -15(\text{loai}) \end{cases} \Leftrightarrow n = 18.$

Câu 39: Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $C_{2n}^n = (2n)^k$, trong đó k là một ước nguyên tố của C_{2n}^n .

A. $n=1$

B. $n=2$

C. $n=3$

D. $n=4$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Giả sử p là một ước nguyên tố của C_{2n}^n và m là số mũ của p trong phân tích tiêu chuẩn C_{2n}^n . Ta chứng minh: $p^m \leq 2n$

Giả sử $p^m > 2n \Rightarrow \left\lfloor \frac{2n}{p^m} \right\rfloor = 0$

Và $m = \left(\left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \right) + \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^2} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor \right) + \dots + \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^{m-1}} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^{m-1}} \right\rfloor \right)$

Mặt khác: $2[x] + 2 > 2x \geq [2x] \Rightarrow [2x] - 2[x] \leq 1$

Do đó: $m \leq \underbrace{1+1+\dots+1}_{m-1 \text{ số}} = m-1$ vô lí

Từ đó suy ra $C_{2n}^n = (2n)^k \Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ C_{2n}^n = 2n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ n=1 \end{cases}$.

Câu 40: Cho tập hợp A có n phần tử ($n \geq 4$). Biết rằng số tập con của A có 8 phần tử nhiều gấp 26 lần số tập con của A có 4 phần tử. Hãy tìm $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ sao cho số tập con gồm k phần tử của A là nhiều nhất.

A. $k = 20$

B. $k = 11$

C. $k = 14$

D. $k = 10$

Hướng dẫn giải:

Ta có

$$C_n^8 = 26C_n^4 \Leftrightarrow \frac{n!}{8!(n-8)!} = 26 \frac{n!}{4!(n-4)!} \Leftrightarrow (n-7)(n-6)(n-5)(n-4) = 13.14.15.16$$

$\Leftrightarrow n-7=13 \Leftrightarrow n=20$. Số tập con gồm k phần tử của A là: $C_{20}^k \Rightarrow k=10$ thì C_{20}^k nhỏ nhất.

Câu 41: Cho khối lập phương $3 \times 3 \times 3$ gồm 27 khối lập phương đơn vị. Một mặt phẳng vuông góc với đường chéo của khối lập phương lớn tại trung điểm của nó. Mặt phẳng này cắt ngang (không đi qua đỉnh) bao nhiêu khối lập phương đơn vị?

A. 16

B. 17

C. 18

D. 19

Hướng dẫn giải

Đưa vào hệ tọa độ $Oxyz$, xét mặt phẳng đi qua trung điểm OA và vuông góc OA với

$A(3;3;3)$ là $(P): x + y + z - \frac{9}{2} = 0$. Mặt phẳng này cắt hình lập phương đơn vị nếu

điểm $(i; j; k)$ và $(i+1; j+1; k+1)$ nằm về hai phía (P) . Vậy

$$\begin{cases} i+j+k - \frac{9}{2} < 0 \\ i+1+j+1+k+1 - \frac{9}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2} < i+j+k < \frac{9}{2}$$

Các họ không thỏa mãn là $i+j+k \leq \frac{3}{2}$ hoặc $i+j+k \geq \frac{9}{2}$ tức

$$S = \{(0;0;0), (0;0;1), (0;1;0), (1;0;0), (1;2;2), (2;1;2), (2;2;1), (2;2;2)\}.$$

Vậy có $27 - 8 = 19$ khối lập phương bị cắt.

Chọn D.

Câu 42: Cho S là tập các số nguyên trong đoạn $[1; 2002]$ và T là tập hợp các tập con khác rỗng của S. Với mỗi $X \in T$, kí hiệu $m(X)$ là trung bình cộng các phần tử của X. Tính

$$m = \frac{\sum_{X \in T} m(X)}{|T|}.$$

A. $m = \frac{3003}{2}$

B. $m = \frac{2003}{21}$

C. $m = \frac{4003}{2}$

D. $m = \frac{2003}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Với mỗi $k \in \{1, 2, \dots, 2002\}$ ta đặt $m_k = \sum m(X)$ ở đây lấy tổng theo $X \in T$ mà

$$|X| = k.$$

Xét phần tử a bất kì ta có a thuộc vào C_{2001}^{k-1} tập con $X \in T$ mà $|X| = k$

$$\text{Do đó: } km_k = (1 + 2 + \dots + 2002) C_{2001}^{k-1} = 2001.2001.C_{2001}^{k-1}$$

$$\text{Suy ra } \sum_{X \in T} m(X) = \sum_{k=1}^{2002} m_k = 1001.2003. \sum_{k=1}^{2002} \frac{C_{2001}^{k-1}}{k} = \frac{2003(2^{2002} - 1)}{2}$$

Mặt khác $|T| = 2^{2002} - 1$, do đó: $m = \frac{2003}{2}$.

CHUYÊN ĐỀ: ĐẠI SỐ TỔ HỢP

BÀI 3: NHỊ THỨC NEWTON

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT:

1. Các hằng đẳng thức

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

...

2. Nhị thức Newton (Niuton)

Khai triển $(a+b)^n$ được cho bởi công thức sau:

Với a, b là các số thực và n là số nguyên dương, ta có

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n. (1)$$

$$\text{Quy ước } a^0 = b^0 = 1$$

Công thức trên được gọi là công thức nhị thức Newton (viết tắt là Nhị thức Newton).

Trong biểu thức ở VP của công thức (1)

a) Số các hạng tử là $n+1$.

b) Số các hạng tử có số mũ của a giảm dần từ n đến 0 , số mũ của b tăng dần từ 0 đến n , nhưng tổng các số mũ của a và b trong mỗi hạng tử luôn bằng n .

c) Các hệ số của mỗi hạng tử cách đều hai hạng tử đầu và cuối thì bằng nhau.

d) Số hạng thứ k (số hạng tổng quát) của khai triển là: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$.

HỆ QUẢ

Với $a = b = 1$, thì ta có $2^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$.

Với $a = 1; b = -1$, ta có $0 = C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n$

3. Các dạng khai triển cơ bản:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$$

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n$$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \dots + C_n^n x^0$$

$$(1-x)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k x^{n-k} = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + \dots + (-1)^n C_n^n x^0$$

$$(x-1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k x^{n-k} = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + \dots + (-1)^n C_n^n x^0$$

Các tính chất của hệ số nhị thức:

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}, (n \geq 1)$$

$$k \cdot C_n^k = \frac{k \cdot n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = n C_{n-1}^{k-1}$$

$$\frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{k \cdot n!}{(k+1)(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)!}{(n+1)(n-k)!(k+1)!} = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{k+1}$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN:

1. Dạng 1: Viết khai triển nhị thức:

a) Phương pháp:

Dùng công thức $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$

Bấm máy tìm các hệ số

b) Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Khai triển các biểu thức sau

a) $(2x+1)^4$.

b) $(x-2)^4$

c) $(x+3)^5$

d) $(3x-2)^5$

Lời giải

a) Thay $a = 2x$ và $b = 1$ trong công thức khai triển của $(a+b)^4$, ta được:

$$\begin{aligned} (2x+1)^4 &= (2x)^4 + 4 \cdot (2x)^3 \cdot 1 + 6 \cdot (2x)^2 \cdot 1^2 + 4 \cdot (2x) \cdot 1^3 + 1^4 \\ &= 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1 \end{aligned}$$

b) Thay $a = x$ và $b = -2$ trong công thức khai triển của $(a+b)^4$, ta được:

$$\begin{aligned} (x-2)^4 &= x^4 + 4 \cdot x^3 \cdot (-2) + 6 \cdot x^2 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot x \cdot (-2)^3 + (-2)^4 \\ &= x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+b)^5 &= C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4 b + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 a b^4 + C_5^5 b^5 \\ &= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5a b^4 + b^5 \end{aligned}$$

c) Thay $a = x$ và $b = 3$ trong công thức khai triển của $(a+b)^5$, ta được:

$$\begin{aligned} (x+3)^5 &= x^5 + 5 \cdot x^4 \cdot 3 + 10 \cdot x^3 \cdot 3^2 + 10 \cdot x^2 \cdot 3^3 + 5 \cdot x \cdot 3^4 + 3^5 \\ &= x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } (3x-2)^5 &= C_5^0 (3x)^5 + C_5^1 (3x)^4 (-2) + C_5^2 (3x)^3 (-2)^2 + C_5^3 (3x)^2 (-2)^3 + C_5^4 (3x) (-2)^4 + C_5^5 (-2)^5 \\ &= 243x^5 - 2430x^4 + 1080x^3 - 720x^2 + 240x - 32 \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Khai triển các đa thức:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (x-3)^4; & \text{b) } (3x-2y)^4; \\ \text{c) } (x+5)^4 + (x-5)^4; & \text{d) } (x-2y)^5 \end{array}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } (x-3)^4 &= C_4^0 x^4 + C_4^1 x^3 (-3) + C_4^2 x^2 (-3)^2 + C_4^3 x (-3)^3 + C_4^4 (-3)^4 \\ &= x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (3x-2y)^4 &= C_4^0 (3x)^4 + C_4^1 (3x)^3 (-2y)^1 + C_4^2 (3x)^2 (-2y)^2 + C_4^3 3x (-2y)^3 + C_4^4 (-2y)^4 \\ &= 81x^4 - 216x^3y + 216x^2y^2 - 96xy^3 + 16y^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (x+5)^4 + (x-5)^4 &= C_4^0 x^4 + C_4^1 x^3 5 + C_4^2 x^2 5^2 + C_4^3 x 5^3 + C_4^4 5^4 + C_4^0 x^4 \\ &\quad - C_4^1 x^3 5 + C_4^2 x^2 5^2 - C_4^3 x 5^3 + C_4^4 5^4 \\ &= 2(C_4^0 x^4 + C_4^2 x^2 5^2 + C_4^4 5^4) = 2(x^4 + 150x^2 + 625) = 2x^4 + 300x^2 + 1250 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } (x-2y)^5 &= C_5^0 x^5 + C_5^1 x^4 (-2y) + C_5^2 x^3 (-2y)^2 + C_5^3 x^2 (-2y)^3 + C_5^4 x (-2y)^4 + C_5^5 (-2y)^5 \\ &= x^5 - 10x^4y + 40x^3y^2 - 80x^2y^3 + 80xy^4 - 32y^5 \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Khai triển và rút gọn các biểu thức sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (2+\sqrt{2})^4 & \\ \text{b) } (2+\sqrt{2})^4 + (2-\sqrt{2})^4 & \\ \text{c) } (1-\sqrt{3})^5 & \end{array}$$

Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} (2+\sqrt{2})^4 &= C_4^0 2^4 + C_4^1 2^3 (\sqrt{2}) + C_4^2 2^2 (\sqrt{2})^2 + C_4^3 2 (\sqrt{2})^3 + C_4^4 (\sqrt{2})^4 \\ &= 16 + 32\sqrt{2} + 48 + 16\sqrt{2} + 4 \\ &= 68 + 48\sqrt{2}. \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$(2+\sqrt{2})^4 = 68 + 48\sqrt{2}. \text{ (theo câu a)}$$

$$\begin{aligned}
(2-\sqrt{2})^4 &= C_4^0 2^4 + C_4^1 2^3 (-\sqrt{2}) + C_4^2 2^2 (-\sqrt{2})^2 + C_4^3 2 (-\sqrt{2})^3 + C_4^4 (-\sqrt{2})^4 \\
&= 16 - 32\sqrt{2} + 48 - 16\sqrt{2} + 4 \\
&= 68 - 48\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } (2+\sqrt{2})^4 + (2-\sqrt{2})^4 = 68 + 48\sqrt{2} + 68 - 48\sqrt{2} = 136$$

c) Ta có:

$$\begin{aligned}
(1-\sqrt{3})^5 &= C_5^0 + C_5^1 (-\sqrt{3}) + C_5^2 (-\sqrt{3})^2 + C_5^3 (-\sqrt{3})^3 + C_5^4 (-\sqrt{3})^4 + C_5^5 (-\sqrt{3})^5 \\
&= 1 - 5\sqrt{3} + 30 - 30\sqrt{3} + 45 - 9\sqrt{3} \\
&= 76 - 44\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Ví dụ 4: Biểu diễn $(3+\sqrt{2})^5 - (3-\sqrt{2})^5$ dưới dạng $a+b\sqrt{2}$ với a, b là các số nguyên.

Lời giải

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } (a+b)^5 - (a-b)^5 &= C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4 b + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 a b^4 + C_5^5 b^5 \\
&\quad - (C_5^0 a^5 - C_5^1 a^4 b + C_5^2 a^3 b^2 - C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 a b^4 - C_5^5 b^5) \\
&= 2(C_5^1 a^4 b + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^5 b^5)
\end{aligned}$$

$$\text{Do đó } (a+b)^5 - (a-b)^5 = 2(C_5^1 3^4 \sqrt{2} + C_5^3 3^2 (\sqrt{2})^3 + C_5^5 (\sqrt{2})^5) = 2(405\sqrt{2} + 180\sqrt{2} + 4\sqrt{2}) = 1178\sqrt{2}$$

Ví dụ 5: Biểu diễn $(2+\sqrt{3})^5 + (2-\sqrt{3})^5$ dưới dạng $a+b\sqrt{3}$ với a, b là các số nguyên. Tìm $a+2b$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
(2+\sqrt{3})^5 &= C_5^0 \cdot 2^5 + C_5^1 2^4 (\sqrt{3}) + C_5^2 2^3 (\sqrt{3})^2 + C_5^3 2^2 (\sqrt{3})^3 + C_5^4 2 (\sqrt{3})^4 + C_5^5 (\sqrt{3})^5 \\
(2-\sqrt{3})^5 &= C_5^0 \cdot 2^5 + C_5^1 2^4 (-\sqrt{3}) + C_5^2 2^3 (-\sqrt{3})^2 + C_5^3 2^2 (-\sqrt{3})^3 + C_5^4 2 (-\sqrt{3})^4 + C_5^5 (-\sqrt{3})^5
\end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned}
(2+\sqrt{3})^5 + (2-\sqrt{3})^5 &= 2C_5^0 \cdot 2^5 + 2C_5^2 2^3 (-\sqrt{3})^2 + 2C_5^4 2 (-\sqrt{3})^4 = 580 \\
a &= 580, b = 0 \Rightarrow a + 2b = 580.
\end{aligned}$$

Ví dụ 6: Khai triển nhị thức Newton

a) $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^4.$

b) $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^4$

$$c) \left(3x + \frac{1}{2}\right)^4$$

$$d) \left(x - \frac{1}{2}\right)^5$$

$$e) (a-b)^5$$

$$f) (2x-3y)^5$$

Lời giải

$$\begin{aligned} a) \text{Ta có } \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^4 &= C_4^0 (x^2)^4 + C_4^1 (x^2)^3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right) + C_4^2 (x^2)^2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 + C_4^3 (x^2) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3 + C_4^4 \left(\frac{1}{x}\right)^4 \\ &= C_4^0 x^8 + C_4^1 x^6 \cdot \left(\frac{1}{x}\right) + C_4^2 x^4 \cdot \frac{1}{x^2} + C_4^3 (x^2) \cdot \left(\frac{1}{x^3}\right) + C_4^4 \left(\frac{1}{x^4}\right) = x^8 + 4x^5 + 6x^2 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \text{Ta có } \left(x - \frac{1}{x^2}\right)^4 &= C_4^0 x^4 + C_4^1 x^3 \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) + C_4^2 x^2 \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right)^2 + C_4^3 x \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right)^3 + C_4^4 \left(\frac{-1}{x^2}\right)^4 \\ &= C_4^0 x^4 + C_4^1 x^3 \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) + C_4^2 x^2 \cdot \frac{1}{x^4} + C_4^3 x \cdot \left(\frac{-1}{x^6}\right) + C_4^4 \left(\frac{1}{x^8}\right) = x^4 - 4x + \frac{6}{x^2} - \frac{4}{x^5} + \frac{1}{x^8}. \end{aligned}$$

c) Ta có :

$$\begin{aligned} \left(3x + \frac{1}{2}\right)^4 &= C_4^0 (3x)^4 + C_4^1 (3x)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + C_4^2 (3x)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + C_4^3 (3x) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + C_4^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ &= 81x^4 + 54x^3 + \frac{27}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

d) Ta có:

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{1}{2}\right)^5 &= C_5^0 x^5 + C_5^1 x^4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + C_5^2 x^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + C_5^3 x^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + C_5^4 x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + C_5^5 \left(-\frac{1}{2}\right)^5 \\ &= x^5 - \frac{5}{2}C_5^1 x^4 + \frac{5}{2}x^3 - \frac{5}{4}C_5^3 x^2 + \frac{5}{16}x^4 - \frac{1}{32}. \end{aligned}$$

$$e) \text{Ta có: } (a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5.$$

$$\begin{aligned} f) \text{Ta có: } (2x-3y)^5 &= (2x)^5 - 5(2x)^4(3y) + 10(2x)^3(3y)^2 - 10(2x)^2(3y)^3 + 5(2x)(3y)^4 - (3y)^5 \\ &= 32x^5 - 240x^4y + 720x^3y^2 - 1080x^2y^3 + 810xy^4 - 243y^5. \end{aligned}$$

Ví dụ 7:

a) Dùng hai số hạng đầu tiên trong khai triển của $(1+0,05)^4$ để tính giá trị gần đúng của $1,05^4$.

b) Dùng máy tính cầm tay tính giá trị của $1,05^4$ và tính sai số tuyệt đối của giá trị gần đúng nhận được ở câu a

Lời giải

$$a) (1+0,05)^4 \approx C_4^0 1^4 + C_4^1 1^3 \cdot 0,05 = 1 + 0,2 = 1,2$$

b) Cách bấm: $1.05^4=$

Hiện thị



Sai số tuyệt đối của giá trị gần đúng nhận được ở câu a là 0,01550625.

Ví dụ 8:a) Dùng hai số hạng đầu tiên trong khai triển của $(1+0,02)^5$ để tính giá trị gần đúng của $1,02^5$.

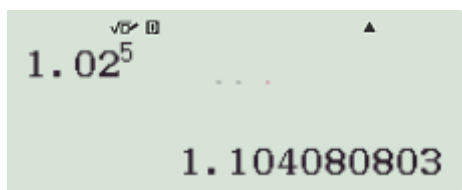
b) Dùng máy tính cầm tay tính giá trị của $1,02^5$ và tính sai số tuyệt đối của giá trị gần đúng nhận được ở câu a.

Lời giải

a) $(1+0,02)^5 \approx C_5^0 1^5 + C_5^1 \cdot 1^4 \cdot 0,02 = 1+0,1=1,1$

b) Cách bấm máy: $C1.02^5=$

Hiện thị:



Sai số tuyệt đối: $\Delta = |1,104080803 - 1,1| = 0,004080803$

c) Bài tập luyện tập:

Bài tập Tự luận:

Câu 1: (NB) Khi khai triển nhị thức Newton $(x+y)^4$ ta thu được bao nhiêu hạng tử.

Lời giải

Áp dụng công thức khai triển nhị thức Newton ta được

$$(x+y)^4 = C_4^0 x^4 + C_4^1 x^3 y + C_4^2 x^2 y^2 + C_4^3 x y^3 + C_4^4 y^4$$

Vì không có hạng tử nào có phần biến giống nhau để thu gọn nên có tất cả 5 hạng tử.

Câu 2: (NB) Khai triển nhị thức Newton $(1+x)^4$.

Lời giải

$$\text{Ta có } (1+x)^4 = C_4^0 1^4 + C_4^1 1^3 x + C_4^2 1^2 x^2 + C_4^3 1x^3 + C_4^4 x^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4.$$

Câu 3: (NB) Khai triển nhị thức Newton $(x+2)^4$.

Lời giải

$$\text{Ta có } (x+2)^4 = C_4^0 x^4 + C_4^1 x^3 \cdot 2 + C_4^2 x^2 \cdot 2^2 + C_4^3 x \cdot 2^3 + C_4^4 2^4 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16.$$

Câu 4: (NB) Khai triển nhị thức Newton $(x-1)^4$.

Lời giải

$$\text{Ta có } (x-1)^4 = C_4^0 x^4 + C_4^1 x^3 \cdot (-1) + C_4^2 x^2 \cdot (-1)^2 + C_4^3 x \cdot (-1)^3 + C_4^4 (-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1.$$

Câu 5: (TH) Khai triển nhị thức Newton $(2x + y)^4$.

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có } (2x + y)^4 &= C_4^0 (2x)^4 + C_4^1 (2x)^3 \cdot y + C_4^2 (2x)^2 \cdot y^2 + C_4^3 (2x) \cdot y^3 + C_4^4 y^4 \\ &= 16x^4 + 32x^3y + 24x^2y^2 + 8xy^3 + y^4.\end{aligned}$$

Câu 6: (TH) Khai triển nhị thức Newton $(x - 3y)^4$.

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có } (x - 3y)^4 &= C_4^0 x^4 + C_4^1 x^3 \cdot (-3y) + C_4^2 x^2 \cdot (-3y)^2 + C_4^3 x \cdot (-3y)^3 + C_4^4 (-3y)^4 \\ &= x^4 - 12x^3y + 54x^2y^2 - 108xy^3 + 81y^4.\end{aligned}$$

Câu 7: Khai triển biểu thức $(x + 1)^5$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } (x + 1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1.$$

Câu 8: Khai triển biểu thức $(x - 1)^5$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } (x - 1)^5 = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1.$$

Câu 9: Khai triển biểu thức $(x + 2)^5$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } (x + 2)^5 = x^5 + 5x^4 \cdot 2^1 + 10x^3 \cdot 2^2 + 10x^2 \cdot 2^3 + 5x \cdot 2^4 + 2^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32.$$

Câu 10: Khai triển biểu thức $(2x + y)^5$.

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } (2x + y)^5 &= (2x)^5 + 5(2x)^4 y^1 + 10(2x)^3 y^2 + 10(2x)^2 y^3 + 5(2x)^1 y^4 + y^5 \\ &= 32x^5 + 80x^4y + 80x^3y^2 + 40x^2y^3 + 10xy^4 + y^5.\end{aligned}$$

Câu 11: Khai triển biểu thức $(x - 3y)^5$.

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } (x - 3y)^5 &= x^5 - 5x^4 (3y)^1 + 10x^3 (3y)^2 - 10x^2 (3y)^3 + 5x^1 (3y)^4 - (3y)^5 \\ &= x^5 - 15x^4y + 90x^3y^2 - 270x^2y^3 + 405xy^4 - 243y^5.\end{aligned}$$

Câu 12: Khai triển biểu thức $(2x + 3y)^5$.

Lời giải

Ta có: $(2x+3y)^5 = (2x)^5 + 5(2x)^4(3y)^1 + 10(2x)^3(3y)^2 + 10(2x)^2(3y)^3 + 5(2x)^1(3y)^4 + (3y)^5$
 $= 32x^5 + 240x^4y + 720x^3y^2 + 1080x^2y^3 + 810xy^4 + 243y^5.$

Bài tập Trắc nghiệm:

Câu 1: Viết khai triển theo công thức nhị thức newton $(x+1)^5$.

A. $x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1.$

B. $x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x + 1.$

C. $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1.$

D. $5x^5 + 10x^4 + 10x^3 + 5x^2 + 5x + 1.$

Lời giải

Chọn A

$$(x+1)^5 = C_5^0 x^5 + C_5^1 x^4 + C_5^2 x^3 + C_5^3 x^2 + C_5^4 x + C_5^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1.$$

Câu 2: Viết khai triển theo công thức nhị thức newton $(x-y)^5$.

A. $x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$

B. $x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

C. $x^5 - 5x^4y - 10x^3y^2 - 10x^2y^3 - 5xy^4 + y^5$

D. $x^5 + 5x^4y - 10x^3y^2 + 10x^2y^3 - 5xy^4 + y^5.$

Lời giải

Chọn A

$$(x-y)^5 = C_5^0 x^5 + C_5^1 x^4(-y) + C_5^2 x^3(-y)^2 + C_5^3 x^2(-y)^3 + C_5^4 x(-y)^4 + C_5^5 (-y)^5$$

$$= x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5.$$

Câu 3: Khai triển của nhị thức $(x-2)^5$.

A. $x^5 - 100x^4 + 400x^3 - 800x^2 + 800x - 32.$

B. $5x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32.$

C. $x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32.$

D. $x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32.$

Lời giải

Chọn C

$$(x-2)^5 = C_5^0 x^5 + C_5^1 x^4(-2) + C_5^2 x^3(-2)^2 + C_5^3 x^2(-2)^3 + C_5^4 x(-2)^4 + C_5^5 (-2)^5$$

$$= x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32.$$

Câu 4: Khai triển của nhị thức $(3x+4)^5$ là

- A. $x^5 + 1620x^4 + 4320x^3 + 5760x^2 + 3840x + 1024$.
- B. $243x^5 + 405x^4 + 4320x^3 + 5760x^2 + 3840x + 1024$.
- C. $243x^5 - 1620x^4 + 4320x^3 - 5760x^2 + 3840x - 1024$.
- D. $243x^5 + 1620x^4 + 4320x^3 + 5760x^2 + 3840x + 1024$.**

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned}(3x+4)^5 &= C_5^0 (3x)^5 + C_5^1 (3x)^4 \cdot 4 + C_5^2 (3x)^3 \cdot 4^2 + C_5^3 (3x)^2 \cdot 4^3 + C_5^4 (3x) \cdot 4^4 + C_5^5 \cdot 4^5 \\ &= 243x^5 + 1620x^4 + 4320x^3 + 5760x^2 + 3840x + 1024.\end{aligned}$$

Câu 5: Khai triển của nhị thức $(1-2x)^5$ là

- A. $5 - 10x + 40x^2 - 80x^3 - 80x^4 - 32x^5$.
- B. $1 + 10x + 40x^2 - 80x^3 - 80x^4 - 32x^5$.
- C. $1 - 10x + 40x^2 - 80x^3 - 80x^4 - 32x^5$.**
- D. $1 + 10x + 40x^2 + 80x^3 + 80x^4 + 32x^5$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned}(1-2x)^5 &= C_5^0 + C_5^1 (-2x)^1 + C_5^2 (-2x)^2 + C_5^3 (-2x)^3 + C_5^4 (-2x)^4 + C_5^5 (-2x)^5 \\ &= 1 - 10x + 40x^2 - 80x^3 - 80x^4 - 32x^5.\end{aligned}$$

Câu 6: Đa thức $P(x) = 32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1$ là khai triển của nhị thức nào dưới đây?

- A. $(1-2x)^5$.
- B. $(1+2x)^5$.
- C. $(2x-1)^5$.**
- D. $(x-1)^5$.

Lời giải

Chọn C

Nhận thấy $P(x)$ có dấu đan xen nên loại đáp án B.

Hệ số của x^5 bằng 32 nên loại đáp án D và còn lại hai đáp án A và C thì chỉ có C phù hợp (vì khai triển số hạng đầu tiên của đáp án C là $32x^5$.)

Câu 7: Khai triển nhị thức $(2x+y)^5$. Ta được kết quả là

- A. $32x^5 + 16x^4y + 8x^3y^2 + 4x^2y^3 + 2xy^4 + y^5$.
- B. $32x^5 + 80x^4y + 80x^3y^2 + 40x^2y^3 + 10xy^4 + y^5$.**
- C. $2x^5 + 10x^4y + 20x^3y^2 + 20x^2y^3 + 10xy^4 + y^5$.
- D. $32x^5 + 10000x^4y + 80000x^3y^2 + 400x^2y^3 + 10xy^4 + y^5$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned}(2x+y)^5 &= C_5^0 (2x)^5 + C_5^1 (2x)^4 y + C_5^2 (2x)^3 y^2 + C_5^3 (2x)^2 y^3 + C_5^4 (2x) y^4 + C_5^5 y^5 \\ &= 32x^5 + 80x^4 y + 80x^3 y^2 + 40x^2 y^3 + 10xy^4 + y^5.\end{aligned}$$

Câu 8: Đa thức $P(x) = x^5 - 5x^4 y + 10x^3 y^2 - 10x^2 y^3 + 5xy^4 - y^5$ là khai triển của nhị thức nào dưới đây?

- A.** $(x-y)^5$. **B.** $(x+y)^5$. **C.** $(2x-y)^5$. **D.** $(x-2y)^5$.

Lời giải

Chọn A

Nhận thấy $P(x)$ có dấu đan xen nên loại đáp án B.

Hệ số của x^5 bằng 1 nên loại đáp án C và còn lại hai đáp án A và D thì chỉ có A phù hợp (vì khai triển số hạng cuối của đáp án A là $-y^5$).

Câu 9: Khai triển của nhị thức $\left(x - \frac{1}{x}\right)^5$ là

A. $x^5 + 5x^3 + 10x + \frac{10}{x} + \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^5}$.

B. $x^5 - 5x^3 + 10x - \frac{10}{x} + \frac{5}{x^3} - \frac{1}{x^5}$.

C. $5x^5 - 10x^3 + 10x - \frac{10}{x} + \frac{5}{x^3} - \frac{1}{x^5}$.

D. $5x^5 + 10x^3 + 10x + \frac{10}{x} + \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^5}$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned}\left(x - \frac{1}{x}\right)^5 &= C_5^0 x^5 + C_5^1 x^4 \cdot \left(\frac{-1}{x}\right) + C_5^2 x^3 \left(\frac{-1}{x}\right)^2 + C_5^3 x^2 \left(\frac{-1}{x}\right)^3 + C_5^4 x^1 \left(\frac{-1}{x}\right)^4 + C_5^5 \left(\frac{-1}{x}\right)^5 \\ &= x^5 - 5x^3 + 10x - \frac{10}{x} + \frac{5}{x^3} - \frac{1}{x^5}.\end{aligned}$$

Câu 10: Khai triển của nhị thức $(xy + 2)^5$ là

A. $x^5 y^5 + 10x^4 y^4 + 40x^3 y^3 + 80x^2 y^2 + 80xy + 32$.

B. $5x^5 y^5 + 10x^4 y^4 + 40x^3 y^3 + 80x^2 y^2 + 80xy + 32$.

C. $x^5 y^5 + 100x^4 y^4 + 400x^3 y^3 + 80x^2 y^2 + 80xy + 32$.

D. $x^5 y^5 - 10x^4 y^4 + 40x^3 y^3 - 80x^2 y^2 + 80xy - 32$.

Lời giải

Chọn A

$$(xy+2)^5 = C_5^0(xy)^5 + C_5^1(xy)^4 \cdot 2^1 + C_5^2(xy)^3 \cdot 2^2 + C_5^3(xy)^2 \cdot 2^3 + C_5^4(xy)^1 \cdot 2^4 + C_5^5 \cdot 2^5 \\ = x^5y^5 + 10x^4y^4 + 40x^3y^3 + 80x^2y^2 + 80xy + 32.$$

Câu 11: Trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $(a+b)^4$ có bao nhiêu số hạng?

A. 6.

B. 3.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $(a+b)^4$ có $4+1=5$ số hạng.

Câu 12: Trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $(2x-3)^4$ có bao nhiêu số hạng?

A. 6.

B. 3.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $(2x-3)^4$ có $4+1=5$ số hạng.

Câu 13: Trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $(a+b)^4$, số hạng tổng quát của khai triển là

A. $C_4^{k-1}a^kb^{5-k}$.

B. $C_4^ka^{4-k}b^k$.

C. $C_4^{k+1}a^{5-k}b^{k+1}$.

D. $C_4^ka^{4-k}b^{4-k}$.

Lời giải

Chọn B

Số hạng tổng quát của khai triển $(a+b)^4$ là $C_n^ka^{n-k}b^k = C_4^ka^{4-k}b^k$.

Câu 14: Trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $(2x-3)^4$, số hạng tổng quát của khai triển là

A. $C_4^k2^k3^{4-k} \cdot x^{4-k}$.

B. $C_4^k2^{4-k}(-3)^k \cdot x^{4-k}$.

C. $C_4^k2^{4-k}3^k \cdot x^{4-k}$.

D. $C_4^k2^k(-3)^{4-k} \cdot x^{4-k}$.

Lời giải

Chọn B

Số hạng tổng quát của khai triển $(2x-3)^4$ là $C_4^k(2x)^{4-k}(-3)^k = C_4^k2^{4-k}(-3)^k \cdot x^{4-k}$.

Câu 15: Khai triển theo công thức nhị thức Newton $(x-y)^4$.

A. $x^4 - 4x^3y + 4x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$.

B. $x^4 - 4x^3y + 4x^2y^2 - 4x^1y^3 - y^4$.

C. $x^4 + 4x^3y + 4x^2y^2 - 4x^1y^3 + y^4$.

D. $x^4 - 4x^3y - 4x^2y^2 - 4x^1y^3 + y^4$.

Lời giải

Chọn A

$$(x-y)^4 = x^4 - 4x^3y + 4x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$$

Câu 16: Đa thức $P(x) = 32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1$ là khai triển của nhị thức nào?

A. $(1-2x)^5$.

B. $(1+2x)^5$.

C. $(2x-1)^5$.

D. $(x-1)^5$.

Lời giải

Chọn C

Vì hệ số của x^5 là 32 và dấu trong khai triển đan xen nên chọn đáp án C.

Câu 17: Trong khai triển nhị thức Niu-Ton $(a+b)^n$, (mọi cặp số a,b và mọi số nguyên dương n) số hạng tổng quát của khai triển là:

A. $C_n^k a^{n-k} b^k$. B. $C_n^k a^{n-k} b^{n-k}$. C. $C_n^{k+1} a^{n+1} b^{n-k+1}$. D. $C_n^{k+1} a^{n-k+1} b^{k+1}$.

Câu 18: Với mọi cặp số a,b và mọi số n nguyên dương, khẳng định nào sau đây đúng.

A. $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$.

B. $(a+b)^n = C_n^0 a b + C_n^1 a b + C_n^2 a b + \dots + C_n^{n-1} a b + C_n^n a b$.

C. $(a+b)^n = C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$.

D. $(a+b)^n = C_n^n a^n + C_n^n a^{n-1} b + C_n^n a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n a b^{n-1} + C_n^n b^n$.

Câu 19: Trong khai triển $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$ thì số các hạng tử ở vế phải là

A. $n+1$. B. n. C. $n-1$. D. $2n$.

Câu 20: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 a b^2 + C_3^3 b^3$. B. $(a+b)^3 = C_3^1 a^2 b + C_3^2 a b^2 + C_3^3 b^3$.

C. $(a+b)^3 = a^3 + a^2 b + a b^2 + b^3$ D. $(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 a b^2$.

Câu 21: Với n là số nguyên dương, x là số bất kì khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n$. B. $(1+x)^n = x + x^2 + \dots + x^{n-1} + x^n$.

C. $(1+x)^n = C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^{n-1} x^{n-1}$. D. $(1+x)^n = C_n^0 - C_n^1 x - C_n^2 x^2 - \dots - C_n^{n-1} x^{n-1} - C_n^n x^n$.

Câu 22: Với n là số nguyên dương, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$. B. $2^n = C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$.

C. $2^n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \dots + (-1)^n C_n^n$. D. $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1}$.

2. Dạng 2: Tìm hệ số, số hạng trong khai triển thành đa thức của nhị thức Niuton

a) Phương pháp:

b) Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Tìm số hạng chứa x^3 trong khai triển $(2x-1)^4$.

Lời giải

Ta xét khai triển $(2x-1)^4$ có số hạng tổng quát là

$$T_{k+1} = C_4^k (2x)^{4-k} (-1)^k = (-1)^k C_4^k 2^{4-k} x^{4-k}$$

Số hạng chứa x^3 trong khai triển ứng với giá trị k thỏa mãn : $4 - k = 3 \Rightarrow k = 1$.

Vậy số hạng chứa x^3 trong khai triển là: $C_4^1 (-1)^1 2^3 x^3 = -32x^3$.

Ví dụ 2: Tìm hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển $(2 + 3x)^5$.

Lời giải

Ta xét khai triển $(2 + 3x)^5$ có số hạng tổng quát là

$$T_{k+1} = C_5^k 2^{5-k} (3x)^k = C_5^k 2^{5-k} 3^k x^k.$$

Số hạng chứa x^4 trong khai triển ứng với giá trị k thỏa mãn : $k = 4$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển là: $C_5^4 2^{5-4} 3^4 = 810$.

Ví dụ 3: Tìm số hạng chứa x trong khai triển $(3x - 2)^4$.

Ta xét khai triển $(3x - 2)^4$ có số hạng tổng quát là

$$T_{k+1} = C_4^k (3x)^{4-k} (-2)^k = C_4^k 3^{4-k} (-2)^k x^{4-k}.$$

Số hạng chứa x trong khai triển ứng với giá trị k thỏa mãn : $4 - k = 1 \Rightarrow k = 3$.

Vậy số hạng chứa x trong khai triển là: $C_4^3 3^{4-3} (-2)^3 x = -96x$.

Ví dụ 4: Tìm hệ số của x^4 trong khai triển của $(3x - 1)^5$

Lời giải

Số hạng thứ 4 của khai triển là $C_5^3 (3x)^2 (-1)^3 = -90x^2$. Vậy hệ số của x^4 trong khai triển là -90 .

Ví dụ 5: Tìm hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^5$ (với $x \neq 0$).

Lời giải

Ta xét khai triển $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^5$ (với $x \neq 0$) có số hạng tổng quát là

$$T_{k+1} = C_5^k \left(\frac{1}{x}\right)^k \cdot (x^3)^{5-k} = C_5^k \cdot x^{15-4k}.$$

Số hạng chứa x^3 tương ứng với giá trị k thỏa mãn: $15 - 4k = 3 \Leftrightarrow k = 3$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^3 là $C_5^3 = 10$.

Ví dụ 6: Tìm hệ số của số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\frac{x}{2} + \frac{4}{x}\right)^4$ với $x \neq 0$.

Lời giải

Ta xét khai triển $\left(\frac{x}{2} + \frac{4}{x}\right)^4$ (với $x \neq 0$) có số hạng tổng quát là

$$T_{k+1} = C_4^k \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{4-k} \left(\frac{4}{x}\right)^k = C_4^k \cdot (2)^{3k-4} (x)^{4-2k}.$$

Số hạng không chứa x trong khai triển tương ứng với giá trị k thỏa mãn: $4 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 2$.

Vậy hệ số của số hạng không chứa x trong khai triển là $C_4^2 \cdot (2)^{3 \cdot 2 - 4} = 24$.

Ví dụ 7: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\frac{3}{x} + 2x\right)^4$ với $x \neq 0$.

Lời giải

Ta xét khai triển $\left(\frac{3}{x} + 2x\right)^4$ (với $x \neq 0$) có số hạng tổng quát là

$$T_{k+1} = C_4^k (2x)^k \left(\frac{3}{x}\right)^{4-k} = C_4^k 2^k 3^{4-k} x^{2k-4}$$

Số hạng không chứa x trong khai triển tương ứng với giá trị k thỏa mãn: $2k - 4 = 0 \Leftrightarrow k = 2$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là $C_4^2 2^2 3^2 = 216$.

Ví dụ 8: Tìm số hạng chứa $\frac{1}{x^2}$ trong khai triển $\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^4$, $x \neq 0$.

Lời giải

Ta xét khai triển $\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^4$ (với $x \neq 0$) có số hạng tổng quát là

$$T_{k+1} = (-1)^k C_4^k 2^{4-k} x^{4-3k}.$$

Số hạng chứa $\frac{1}{x^2}$ trong khai triển tương ứng với giá trị k thỏa mãn: $4 - 3k = -2 \Leftrightarrow k = 2$.

Vậy số hạng chứa $\frac{1}{x^2}$ trong khai triển là $(-1)^2 C_4^2 2^{4-2} x^{4-3 \cdot 2} = \frac{24}{x^2}$.

Ví dụ 9: (VD). Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(2x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^4$.

Lời giải

$$\text{Xét số hạng tổng quát } T_{k+1} = C_4^k (2x^2)^{4-k} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k = C_4^k 2^{4-k} x^{8-2k} (-1)^k \frac{1}{x^{2k}} = C_4^k 2^{4-k} x^{8-4k} (-1)^k$$

(với $0 \leq k \leq 4$).

Số hạng không chứa x ứng với $8 - 4k = 0 \Leftrightarrow k = 2$.

Vậy số hạng không chứa x là $T_3 = C_4^2 2^2 (-1)^2 = 24$.

Ví dụ 10: Cho $(1 - 2x)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$

a) Tìm a_3

b) Tìm $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_5$

Lời giải

a) Ta có a_3 là hệ số của x^3 trong khai triển.

$$\text{Do đó } a_3 = C_5^3(-2)^3 = -80$$

b) Cho $x = 1$ ta có tổng các hệ số $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_5 = (1-2)^5 = -1$.

Ví dụ 11: Cho $\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$

a) Tìm a_3

b) Tìm $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_5$

Lời giải

a) Ta có a_3 là hệ số của x^3 trong khai triển.

$$\text{Do đó } a_3 = C_5^3\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{5}{4}$$

b) Cho $x = 1$ ta có tổng các hệ số $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_5 = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$.

Ví dụ 12: Khai triển và rút gọn đa thức: $Q(x) = (1+x)^9 + (1+x)^{10} + \dots + (1+x)^{14}$

Ta được đa thức: $Q(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{14}x^{14}$

Xác định hệ số a_9 .

Lời giải

Trong khai triển $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$ thì hệ số của x^k là C_n^k

Do đó hệ số x^9 trong các đa thức $(1+x)^9, (1+x)^{10}, \dots, (1+x)^{14}$ lần lượt là: $C_9^9, C_{10}^9, \dots, C_{14}^9$

Vậy

$$\begin{aligned} a_9 &= C_9^9 + C_{10}^9 + \dots + C_{14}^9 = 1 + 10 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11 + \frac{1}{6} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 + \frac{1}{24} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 + \frac{1}{20} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \\ &= 11 + 55 + 220 + 715 + 2002 = 3003 \end{aligned}$$

Ví dụ 13: Tìm hệ số của x^8 trong khai triển của $\left[1 + x^2(1-x)\right]^8$

Giải:

$$\begin{aligned} \left[1 + x^2(1-x)\right]^8 &= \sum_{k=0}^8 C_8^k x^{2k} (1-x)^k = \sum_{k=0}^8 C_8^k x^{2k} \left(\sum_{l=0}^k (-1)^l C_k^l x^l\right) \\ &= \sum_{k=0}^8 \sum_{l=0}^k (-1)^l C_8^k C_k^l x^{2k+l} \end{aligned}$$

Heã soá của x^8 trong vôi $2k+l=8$ ($0 \leq l \leq k \leq 8$)

Ta có hai trường hợp

$$k=3; l=2 \Rightarrow a_1=168$$

$$k=4; l=0 \Rightarrow a_2 = (-1)^0 C_8^4 C_4^0 = 70. \text{ Vậy heã soá của } x^8 \text{ là } a_1 + a_2 = 238$$

Ví dụ 14: Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^1 + C_n^2 = 15$. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x + \frac{2}{x^4}\right)^n$.

Lời giải

Điều kiện: $n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$ (1)

$$C_n^1 + C_n^2 = 15 \Leftrightarrow n + \frac{n(n-1)}{2} = 15 \Leftrightarrow n^2 + n - 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 5 \\ n = -6 \end{cases} \Rightarrow n = 5.$$

$$\text{Khi đó, } \left(x + \frac{2}{x^4}\right)^5 = \sum_{k=0}^5 C_5^k \cdot 2^k x^{5-k} \cdot \left(\frac{1}{x^4}\right)^k = \sum_{k=0}^5 C_5^k \cdot 2^k x^{5-5k}$$

Số hạng không chứa x tương ứng $5-5k=0 \Leftrightarrow k=1$

Suy ra số hạng không chứa x là: $C_5^1 \cdot 2^1 = 10$

Ví dụ 15: Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển thành đa thức của $(1+x+x^2+x^3)^5$

Lời giải

$$\text{Ta có } (1+x+x^2+x^3)^5 = [(1+x)+x^2(1+x)]^5 = [(1+x) \cdot (1+x^2)]^5 = (1+x)^5 \cdot (1+x^2)^5.$$

$$\text{Xét khai triển } (1+x)^5 \cdot (1+x^2)^5 = \sum_{k=0}^5 C_5^k x^k \cdot \sum_{l=0}^5 C_5^l x^{2l} = \sum_{k=0}^5 (C_5^k \cdot \sum_{l=0}^5 C_5^l x^{k+2l}).$$

Số hạng chứa x^{10} tương ứng với k, l thỏa mãn $k+2l=10 \Leftrightarrow k=10-2l$.

Kết hợp với điều kiện, ta có hệ:

$$\begin{cases} k = 10 - 2l \\ 0 \leq k \leq 5, k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (k, l) \in \{(0; 5), (2; 4), (4; 3)\}. \\ 0 \leq l \leq 5, l \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Vậy hệ số của x^{10} bằng tổng các $C_5^k \cdot C_5^l$ thỏa mãn $C_5^0 \cdot C_5^5 + C_5^2 \cdot C_5^4 + C_5^4 \cdot C_5^3 = 101$.

Ví dụ 16: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $P(x) = x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}$.

Lời giải.

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$x(1-2x)^5 = x \cdot \sum_{k=0}^5 C_5^k \cdot (-2x)^{5-k} = \sum_{k=0}^5 C_5^k \cdot (-2)^{5-k} \cdot x^{6-k}.$$

số hạng chứa x^5 tương ứng với $6-k=5 \Leftrightarrow k=1$.

$$\text{Tương tự, ta có } x^2(1+3x)^{10} = x^2 \cdot \sum_{l=0}^{10} C_{10}^l \cdot (3x)^{10-l} = \sum_{l=0}^{10} C_{10}^l \cdot 3^{10-l} \cdot x^{12-l}.$$

số hạng chứa x^5 tương ứng với $12-l=5 \Leftrightarrow l=7$.

Vậy hệ số của x^5 cần tìm $P(x)$ là $C_5^1.(2)^4 + C_{10}^7.3^3 = 3320$.

Ví dụ 17: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $P(x) = (1+x) + 2(1+x)^2 + \dots + 8(1+x)^8$.

Lời giải.

Các biểu thức $(1+x), (1+x)^2, \dots, (1+x)^4$ không chứa số hạng chứa x^5 .

Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $5(1+x)^5$ là $5C_5^5$.

Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $6(1+x)^6$ là $6C_6^5$.

Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $7(1+x)^7$ là $7C_7^5$.

Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $8(1+x)^8$ là $8C_8^5$.

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển $P(x)$ là $5C_5^5 + 6C_6^5 + 7C_7^5 + 8C_8^5 = 636$.

c) Bài tập trắc nghiệm:

Câu 1: Tính tổng các hệ số trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $(1-2x)^4$.

A. 1.

B. -1.

C. 81.

D. -81.

Lời giải

Chọn A

Tổng các hệ số trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $(2x-3)^4$ chính là giá trị của biểu thức $(2x-3)^4$ tại $x=1$.

Vậy $S = (1-2.1)^4 = 1$.

Câu 2: Trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $(1+3x)^4$, số hạng thứ 2 theo số mũ tăng dần của x là

A. $108x$.

B. $54x^2$.

C. 1.

D. $12x$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $(1+3x)^4 = \sum_{k=0}^4 C_4^k (3x)^k = \sum_{k=0}^4 C_4^k 3^k x^k$.

Do đó số hạng thứ 2 theo số mũ tăng dần của x ứng với $k=1$, tức là $C_4^1 3^1 x = 12x$.

Câu 3: Tìm hệ số của $x^2 y^2$ trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $(x+2y)^4$.

A. 32.

B. 8.

C. 24.

D. 16.

Lời giải

Chọn C

Ta có $(x+2y)^4 = \sum_{k=0}^4 C_4^k x^{4-k} (2y)^k = \sum_{k=0}^4 C_4^k .2^k .x^{4-k} y^k$.

Số hạng chứa $x^2 y^2$ trong khai triển trên ứng với $\begin{cases} 4-k=2 \\ k=2 \end{cases} \Leftrightarrow k=2$.

Vậy hệ số của $x^2 y^2$ trong khai triển của $(x+2y)^4$ là $C_4^2 .2^2 = 24$.

Câu 4: Tìm số hạng chứa x^2 trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $P(x) = 4x^2 + x(x-2)^4$.

A. $28x^2$.

B. $-28x^2$.

C. $-24x^2$.

D. $24x^2$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } P(x) = 4x^2 + x(x-2)^4 = 4x^2 + x \sum_{k=0}^4 C_4^k x^{4-k} (-2)^k = 4x^2 + \sum_{k=0}^4 C_4^k (-2)^k x^{5-k}.$$

$$\text{Số hạng chứa } x^2 \text{ (ứng với } k=3) \text{ trong khai triển } P(x) \text{ là } \left[4 + C_4^3 (-2)^3 \right] x^2 = -28x^2.$$

Câu 5: Gọi n là số nguyên dương thỏa mãn $A_n^3 + 2A_n^2 = 48$. Tìm hệ số của x^3 trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $(1-3x)^n$.

A. -108 .

B. 81.

C. 54.

D. -12 .

Lời giải

Chọn A

$$\text{ĐK: } n \geq 3; n \in \mathbb{N}.$$

$$A_n^3 + 2A_n^2 = 48 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-3)!} + 2 \cdot \frac{n!}{(n-2)!} = 48 \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) + 2 \cdot n(n-1) = 48$$

$$\Leftrightarrow n^3 - n^2 - 48 = 0 \Leftrightarrow n = 4 \text{ (thỏa)}.$$

$$\text{Ta có } (1-3x)^4 = \sum_{k=0}^4 C_4^k (-3x)^k = \sum_{k=0}^4 C_4^k (-3)^k x^k.$$

Hệ số của x^3 trong khai triển trên ứng với $k=3$.

$$\text{Vậy hệ số của } x^3 \text{ trong khai triển } (1-3x)^4 \text{ là } C_4^3 \cdot (-3)^3 = -108.$$

Câu 6: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $\left(\frac{1}{x} + x^3\right)^4$.

A. 1.

B. 4.

C. 6.

D. 12.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } \left(\frac{1}{x} + x^3\right)^4 = \sum_{k=0}^4 C_4^k \left(\frac{1}{x}\right)^{4-k} (x^3)^k = \sum_{k=0}^4 C_4^k x^{4k-4}.$$

Số hạng không chứa x trong khai triển trên ứng với $4k-4=0 \Leftrightarrow k=1$.

$$\text{Vậy số hạng không chứa } x \text{ trong khai triển } \left(\frac{1}{x} + x^3\right)^4 \text{ là } C_4^1 = 4.$$

Câu 7: Trong khai triển $(2a-b)^5$, hệ số của số hạng thứ 3 bằng:

A. -80 .

B. 80.

C. -10 .

D. 10.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} (2a-b)^5 &= (2a)^5 - 5(2a)^4 b + 10(2a)^3 b^2 - 10(2a)^2 b^3 + 5(2a)b^4 - b^5 \\ &= 32a^5 - 80a^4 b + 80a^3 b^2 - 40a^2 b^3 + 10ab^4 - b^5 \end{aligned}$$

Câu 8: Tìm hệ số của đơn thức $a^3 b^2$ trong khai triển nhị thức $(a+2b)^5$.

A. 160.

B. 80.

C. 20.

D. 40.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\begin{aligned}(a+2b)^5 &= a^5 + 5a^4(2b) + 10a^3(2b)^2 + 10a^2(2b)^3 + 5a(2b)^4 + (2b)^5 \\ &= a^5 + 10a^4b + 40a^3b^2 + 80a^2b^3 + 80ab^4 + 32b^5\end{aligned}$$

Suy ra hệ số của a^3b^2 trong khai triển trên là: 40.

Câu 9: Số hạng chính giữa trong khai triển $(3x+2y)^4$ là:

A. $C_4^2x^2y^2$.

B. $6(3x)^2(2y)^2$.

C. $6C_4^2x^2y^2$.

D. $36C_4^2x^2y^2$.

Lời giải

Chọn D

$$(3x+2y)^4 = (3x)^4 + 4(3x)^3(2y) + 6(3x)^2(2y)^2 + 4(3x)(2y)^3 + (2y)^4$$

Suy ra hệ số chính giữa trong khai triển trên là: $6(3x)^2(2y)^2 = 36C_4^2x^2y^2$.

Câu 10: Biết $(1+\sqrt[3]{2})^4 = a_0 + a_1\sqrt[3]{2} + a_2\sqrt[3]{4}$. Tính (a_1a_2)

A. $a_1a_2 = 24$.

B. $a_1a_2 = 8$.

C. $a_1a_2 = 54$.

D. $a_1a_2 = 36$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned}\text{Ta có } (1+\sqrt[3]{2})^4 &= 1^4 + 4.1^3(\sqrt[3]{2})^1 + 6.1^2(\sqrt[3]{2})^2 + 4.1^1(\sqrt[3]{2})^3 + (\sqrt[3]{2})^4 \\ &= 1 + 4\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{4} + 8 + 2\sqrt[3]{2} \\ &= 9 + 6\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{4}.\end{aligned}$$

Suy ra $(a_1a_2) = 6.6 = 36$.

Câu 11: Số hạng chứa $\sqrt{x}$ trong khai triển $\left(\sqrt{x} + \frac{2}{x}\right)^4, x > 0$ là số hạng thứ mấy ?

A. 5.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \left(\sqrt{x} + \frac{2}{x}\right)^4 &= (\sqrt{x})^4 + 4(\sqrt{x})^3\left(\frac{2}{x}\right) + 6(\sqrt{x})^2\left(\frac{2}{x}\right)^2 + 4(\sqrt{x})\left(\frac{2}{x}\right)^3 + \left(\frac{2}{x}\right)^4 \\ &= x^2 + 8\sqrt{x} + 24\frac{1}{x} + 32\frac{\sqrt{x}}{x^3} + 16\frac{1}{x^4}.\end{aligned}$$

Số hạng chứa $\sqrt{x}$ trong khai triển trên ứng với số hạng thứ 2.

Câu 12: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của nhị thức $\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^5$.

Lời giải

A. -10.

B. -5.

C. 10.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$\begin{aligned}\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^5 &= (x^3)^5 - 5(x^3)^4 \left(\frac{1}{x^2}\right) + 10(x^3)^3 \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 - 10(x^3)^2 \left(\frac{1}{x^2}\right)^3 + 5(x^3) \left(\frac{1}{x^2}\right)^4 - \left(\frac{1}{x^2}\right)^5 \\ &= x^{15} - 5x^{10} + 10x^5 - 10 + 5\frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^{10}}\end{aligned}$$

Số hạng không chứa x trong khai triển là (-10) .

Câu 13: Cho a là một số thực bất kì. Rút gọn

$$M = C_4^0 a^4 + C_4^1 a^3 (1-a) + C_4^2 a^2 (1-a)^2 + C_4^3 a (1-a)^3 + C_4^4 (1-a)^4.$$

A. $M = a^4$.

B. $M = a$.

C. $M = 1$.

D. $M = -1$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } M = C_4^0 a^4 + C_4^1 a^3 (1-a) + C_4^2 a^2 (1-a)^2 + C_4^3 a (1-a)^3 + C_4^4 (1-a)^4 = [a + (1-a)]^4 = 1.$$

Câu 14: Giả sử có khai triển $(1-2x)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$. Tìm a_4 biết $a_0 + a_1 + a_2 = 31$.

A. 80.

B. -80.

C. 40.

D. -40.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } (1-2x)^n = C_n^0 1^n (-2x)^0 + C_n^1 1^{n-1} (-2x) + C_n^2 1^{n-2} (-2x)^2 + \dots = 1 - 2C_n^1 x + 4C_n^2 x^2 + \dots$$

$$\text{Vậy } a_0 = 1; a_1 = -2C_n^1; a_2 = 4C_n^2.$$

Theo bài ra $a_0 + a_1 + a_2 = 31$ nên ta có:

$$1 - 2C_n^1 + 4C_n^2 = 31 \Leftrightarrow 1 - 2 \frac{n!}{1!(n-1)!} + 4 \frac{n!}{2!(n-2)!} = 31 \Leftrightarrow 1 - 2n + 2n(n-1) = 31$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 - 4n - 30 = 0 \Leftrightarrow n^2 - 2n - 15 = 0 \Rightarrow n = 5.$$

$$\text{Từ đó ta có } a_4 = C_5^4 (-2)^4 = 80.$$

Câu 15: Biết hệ số của x^2 trong khai triển của $(1-3x)^n$ là 90. Khi đó ta có $3n^4$ bằng

A. 7203.

B. 1875.

C. 1296.

D. 6561.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Số hạng tổng quát khai triển của } (1-3x)^n \text{ là } T_{k+1} = C_n^k (-3x)^k = (-3)^k C_n^k x^k.$$

$$\Rightarrow \text{hệ số của } x^2 \text{ trong khai triển của } (1-3x)^n \text{ ứng với } k = 2.$$

$$\text{Khi đó } (-3)^2 C_n^2 = 90 \Leftrightarrow 9 \frac{n(n-1)}{2} = 90 \Leftrightarrow n(n-1) = 20 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -4 \\ n = 5 \end{cases} \Rightarrow 3n^4 = 1875.$$

Bài tập trắc nghiệm luyện tập:

Câu 1: Hệ số của x^7 trong khai triển của $(3-x)^9$ là

- A.** C_9^7 . **B.** $-C_9^7$. **C.** $9C_9^7$. **D.** $-9C_9^7$.
- Câu 2:** Hệ số chứa x^6 trong khai triển $(2-3x)^{10}$ là
A. $C_{10}^6 \cdot 2^4 \cdot 3^6$. **B.** $-C_{10}^6 \cdot 2^4 \cdot 3^6$. **C.** C_{10}^6 . **D.** $C_{10}^6 \cdot 2^4 \cdot (-3x)^6$.
- Câu 3:** Hệ số chứa x^5 trong khai triển $(2x+3)^8$ là
A. $C_8^5 \cdot 2^5 \cdot 3^3$. **B.** $C_8^5 \cdot (2x)^5 \cdot 3^3$. **C.** $C_8^3 \cdot 2^5 \cdot 3^3$. **D.** $-C_8^5 \cdot 2^5 \cdot 3^3$.
- Câu 4:** Hệ số chứa x^4 trong khai triển $(x^2+2)^{10}$ là
A. $C_{10}^8 \cdot (x^2)^2 \cdot 2^8$. **B.** $C_{10}^6 \cdot x^4 \cdot 2^6$. **C.** $C_{10}^8 \cdot x^2 \cdot 2^8$. **D.** $C_{10}^8 \cdot 2^8$.
- Câu 5:** Hệ số chứa x^7 trong khai triển $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{13}$ là
A. $C_{13}^3 \cdot (x)^{10} \cdot \frac{1}{x^3}$. **B.** $-C_{13}^3 \cdot (x)^{10} \cdot \frac{1}{x^3}$. **C.** C_{13}^3 . **D.** $-C_{13}^3$.
- Câu 6:** Số hạng thứ 3 trong khai triển $\left(x + \frac{1}{2x}\right)^9$ là
A. $C_9^3 \cdot x^6 \cdot \frac{1}{(2x)^3}$. **B.** $C_9^3 \cdot x^6 \cdot \frac{1}{2x^3}$. **C.** $C_9^2 \cdot x^6 \cdot \frac{1}{x^3}$. **D.** $C_9^2 \cdot x^7 \cdot \frac{1}{(2x)^2}$.
- Câu 7:** Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^6$ là
A. $C_6^2 \cdot x^4 \cdot \frac{1}{x^4}$. **B.** $C_6^2 \cdot x^4 \cdot \frac{16}{x^4}$. **C.** C_6^2 . **D.** $C_6^4 \cdot x^4 \cdot \frac{1}{x^4}$.
- Câu 8:** Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{10}$ là
A. 252. **B.** -252. **C.** 525. **D.** -525.
- Câu 9:** Hệ số của $x^3 \cdot y^3$ trong khai triển biểu thức $(2x-y)^6$ là
A. $2^3 C_6^3$. **B.** $-2^2 C_6^3$. **C.** $-2^3 C_6^3$. **D.** $2^2 C_6^3$.
- Câu 10:** Hệ số của x^7 trong khai triển biểu thức $(x+2)^9$ là
A. $4 \cdot C_9^7$. **B.** $-4 \cdot C_9^2$. **C.** C_9^7 . **D.** $-C_9^2$.
- Câu 11:** Biết hệ số của x^2 trong khai triển biểu thức $(1+4x)^n$ là 3040. Số nguyên n bằng bao nhiêu?
A. 28. **B.** 24. **C.** 26. **D.** 20.
- Câu 12:** Biết $2A_n^2 + A_n^3 = 100$. Hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $(1+2x)^{2n}$ là
A. $-2^5 C_{10}^5$. **B.** $-2C_{10}^5$. **C.** $2C_{10}^5$. **D.** $2^5 C_{10}^5$.
- Câu 13:** Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^8$ là
A. -70. **B.** -28. **C.** 28. **D.** 70.
- Câu 14:** Hệ số của x^5 trong khai triển $(1-x)^{12}$ là?
A. 792. **B.** -792. **C.** -924. **D.** 495.
- Câu 15:** Trong khai triển $(a+b)^n$, số hạng tổng quát của khai triển là
A. $C_n^k a^{n-k} b^{n-k}$. **B.** $C_n^k a^{n-k} b^k$. **C.** $C_n^{k+1} a^{k+1} b^{n-k+1}$. **D.** $C_n^{k+1} a^{n-k+1} b^{k+1}$.

- Câu 16:** Hệ số x^2 trong khai triển $(1-2x)^{10}$ là
A. 45. **B.** 120. **C.** 180. **D.** -180.
- Câu 17:** Hệ số của x^{31} trong khai triển $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40}$ là
A. 1000. **B.** 9880. **C.** 9870. **D.** 9680.
- Câu 18:** Số hạng thứ tư của khai triển $(x-a)^5$ là
A. -10. **B.** $-10x^4a$. **C.** $-10x^3a^2$. **D.** $-10x^2a^3$.
- Câu 19:** Số hạng đứng giữa của khai triển $\left(x - \frac{1}{x}\right)^8$ là
A. $70x$. **B.** $-70x$. **C.** 70. **D.** -70.
- Câu 20:** Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển biểu thức $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^{10}$
A. 252. **B.** $252x^{10}$. **C.** 225. **D.** 522.
- Câu 21:** Tổng các hệ số trong khai triển $(y-3)^5$ bằng
A. -16. **B.** 32. **C.** -32. **D.** 16.
- Câu 22:** Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển sau $f(x) = \left(4x^5 + \frac{6}{7x^9}\right)^{17}$.
A. $C_{17}^3 \cdot 4^{14} \cdot 6^3 \cdot 7^3 x^{24}$. **B.** $C_{17}^3 \cdot 4^{14} \cdot 6^3 \cdot 7^3$. **C.** $C_{17}^3 \cdot 4^{14} \cdot 6^3 \cdot 7^{-3} x^{42}$. **D.** $C_{17}^3 \cdot 4^{14} \cdot 6^3 \cdot 7^{-3}$.
- Câu 23:** Giải phương trình $3.C_x^3 + A_{x+1}^2 = 1040$.
A. $x = 12$. **B.** $x = 11$. **C.** $x = 13$. **D.** $x = 14$.
- Câu 24:** Tìm số hạng chứa x^{16} trong khai triển nhị thức sau $f(x) = \left(3x^2 + \frac{1}{6x^3}\right)^{18}$
A. $C_{18}^4 \cdot 3^4 \cdot 6^{-4} \cdot x^{16}$. **B.** $C_{18}^4 \cdot 3^{14} \cdot 6^{-4}$. **C.** $C_{18}^4 \cdot 3^{14} \cdot 6^4$. **D.** $C_{18}^4 \cdot 3^{10} \cdot 2^{-4} \cdot x^{16}$.
- Câu 25:** Hệ số của x^7 trong khai triển của $(3-x)^9$ là
A. C_9^7 . **B.** $-C_9^7$. **C.** $9C_9^7$. **D.** $-9C_9^7$.
- Câu 26:** Hệ số của x^2 trong khai triển $(1+2x)^{12}$ là
A. 264. **B.** 180. **C.** 66. **D.** 220.
- Câu 27:** Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{10}$ là
A. C_{10}^4 . **B.** C_{10}^5 . **C.** $-C_{10}^5$. **D.** $-C_{10}^4$.
- Câu 28:** Hệ số của x^{12} trong khai triển $(2x-x^2)^{10}$ là
A. C_{10}^8 . **B.** $C_{10}^2 2^8$. **C.** C_{10}^2 . **D.** $-C_{10}^2 2^8$.
- Câu 29:** Hệ số của x^{12} trong khai triển $(x^2+x)^{10}$ là
A. C_{10}^8 . **B.** C_{10}^6 . **C.** $-C_{10}^2$. **D.** $C_{10}^6 2^6$.
- Câu 30:** Tìm số hạng chứa x^{16} trong khai triển nhị thức sau $f(x) = \left(3x^2 + \frac{1}{6x^3}\right)^{18}$.
A. $C_{18}^4 \cdot 3^{10} \cdot 2^{-4} \cdot x^{16}$. **B.** $C_{18}^4 \cdot 3^{14} \cdot 6^{-4}$. **C.** $C_{18}^4 \cdot 3^{14} \cdot 6^4$. **D.** $C_{18}^4 \cdot 3^4 \cdot 6^{-4} \cdot x^{16}$.

- Câu 31:** Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^8$ là:
A. 28. **B. 10.** **C. 70.** **D. 56.**
- Câu 32:** Số hạng thứ 3 trong khai triển $(2x+1)^5$ bằng
A. $20x^3$. **B. $80x^2$.** **C. $20x^2$.** **D. $80x^3$.**
- Câu 33:** Cho khai triển $\left(x + \frac{1}{3}\right)^n$. Tìm n , biết hệ số của số hạng thứ 3 bằng 5.
A. $n = 8$. **B. $n = 12$.** **C. $n = 10$.** **D. $n = 6$.**
- Câu 34:** Hệ số của x^5 trong khai triển $(1-x)^{11}$ là
A. 462. **B. -462.** **C. 264.** **D. -264.**
- Câu 35:** Hệ số của x^7 trong khai triển của $(3-x)^9$ là
A. C_9^7 . **B. $-C_9^7$.** **C. $9C_9^7$.** **D. $-9C_9^7$.**
- Câu 36:** Cho khai triển: $(x-2)^{100}$. Hệ số của x^{95} là
A. $C_{100}^5 (-2)^5$. **B. $-C_{100}^7 (-2)^5$.** **C. $C_{100}^8 (-2)^8$.** **D. $C_{100}^6 (-2)^6$.**
- Câu 37:** Tìm hệ số của x^3 trong khai triển: $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^9$ là:
A. 3671. **B. 6330.** **C. 4600.** **D. 4608.**
- Câu 38:** Hệ số lớn nhất của khai triển: $(3x-5)^{20}$ là
A. $C_{20}^{12} 3^8 (-5)^{11}$. **B. $C_{20}^{12} 3^{10} (-5)^{12}$.** **C. $C_{20}^{11} 3^9 (-5)^{11}$.** **D. $C_{20}^{12} 3^8 (-5)^{12}$.**
- Câu 39:** Tìm hệ số của x^4 trong khai triển: $(1+3x+2x^3)^{10}$
A. 21130. **B. 6160.** **C. 16758.** **D. 17550.**
- Câu 40:** Tính tổng các hệ số của khai triển: $(5-4x)^{20}$
A. 1. **B. 46.** **C. 63.** **D. 36.**
- Câu 41:** Tìm hệ số độc lập với x trong khai triển: $\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^{15}$
A. $C_{15}^{10} 3^{10}$. **B. $C_{15}^9 3^9$.** **C. $C_{15}^{12} 3^{10}$.** **D. $C_{15}^{11} 3^{11}$.**

3. Dạng 3: Các bài toán liên quan đến hệ số của nhị thức NiuTon

- $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$
- $0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n$

Ví dụ 1: Tính tổng sau $S = C_{10}^0 + C_{10}^1 + \dots + C_{10}^{10}$.

Lời giải

Xét khai triển $(a+b)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k a^{10-k} b^k$.

Ta chọn $a=b=1$, thu được $(1+1)^{10} = C_{10}^0 + C_{10}^1 + \dots + C_{10}^{10}$.

Vậy $S = 2^{10} = 1024$.

Ví dụ 2: Tính tổng sau $S = C_6^1 + C_6^2 + \dots + C_6^5$.

Lời giải

Xét khai triển $(a+b)^6 = \sum_{k=0}^6 C_6^k a^{6-k} b^k$.

Ta chọn $a=b=1$, thu được $(1+1)^6 = C_6^0 + C_6^1 + \dots + C_6^6$.

Do đó $S = 2^6 - C_6^0 - C_6^6 = 62$.

Vậy $S = 62$.

Ví dụ 3: Cho tập hợp A có 5 phần tử. Số tập hợp con của tập A là bao nhiêu?

Lời giải

Số tập con của tập hợp A là $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = (1+1)^5 = 2^5 = 32$.

Ví dụ 4: Tính tổng sau $S = C_6^0 + 2.C_6^1 + 2^2.C_6^2 + \dots + 2^6.C_6^6$.

Lời giải

Xét khai triển $(a+b)^6 = \sum_{k=0}^6 C_6^k a^{6-k} b^k$.

Ta chọn $a=1; b=2$, thu được $(1+2)^6 = C_6^0 + 2.C_6^1 + 2^2.C_6^2 + \dots + 2^6.C_6^6$.

Vậy $S = 3^6 = 729$.

Ví dụ 5: Cho tập hợp $A = \{a_1; a_2; a_3; a_4; a_5\}$ có 5 phần tử. Chứng minh rằng số tổ hợp con có số lẻ (1,3,5) phần tử của A bằng số tổ hợp con có số chẵn (0,2,4) phần tử của tập A.

Lời giải

Số tập hợp con gồm x phần tử của tập A là C_5^x

Số tổ hợp con có số lẻ (1,3,5) phần tử của A là $C_5^1 + C_5^3 + C_5^5 = 5 + 10 + 1 = 16$

Số tổ hợp con có số chẵn (2,4,6) phần tử của A là $C_5^0 + C_5^2 + C_5^4 = 1 + 10 + 5 = 16$

Vậy $C_5^1 + C_5^3 + C_5^5 = C_5^0 + C_5^2 + C_5^4$

Ví dụ 5: Chứng minh rằng $C_5^0 - C_5^1 + C_5^2 - C_5^3 + C_5^4 - C_5^5 = 0$

Lời giải

Ta có:

$$(1-1)^5 = C_5^0 + C_5^1(-1) + C_5^2(-1)^2 + C_5^3(-1)^3 + C_5^4(-1)^4 + C_5^5(-1)^5$$

$$\Leftrightarrow 0 = C_5^0 - C_5^1 + C_5^2 - C_5^3 + C_5^4 - C_5^5$$

Vậy $C_5^0 - C_5^1 + C_5^2 - C_5^3 + C_5^4 - C_5^5 = 0$

Ví dụ 6: Cho tập hợp $A = \{a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6; a_7; a_8; a_9; a_{10}\}$ có 10 phần tử. Chứng minh rằng số tổ hợp con có số lẻ (1,3,5;7;9) phần tử của A bằng số tổ hợp con có số chẵn (0;2,4,6;8;10) phần tử của tập A.

Lời giải

Số tập hợp con gồm x phần tử của tập A là C_5^x

Số tổ hợp con có số lẻ (1,3,5;7;9) phần tử của A là $C_{10}^1 + C_{10}^3 + C_{10}^5 + C_{10}^7 + C_{10}^9$

Số tổ hợp con có số chẵn (0;2,4,6;8) phần tử của A là $C_{10}^0 + C_{10}^2 + C_{10}^4 + C_{10}^6 + C_{10}^8 + C_{10}^{10}$

Ta có

$$(1-1)^{10} = C_{10}^0 - C_{10}^1 + C_{10}^2 - C_{10}^3 + C_{10}^4 - C_{10}^5 + C_{10}^6 - C_{10}^7 + C_{10}^8 - C_{10}^9 + C_{10}^{10}$$

$$\Leftrightarrow 0 = C_{10}^0 + C_{10}^2 + C_{10}^4 + C_{10}^6 + C_{10}^8 + C_{10}^{10} - (C_{10}^1 + C_{10}^3 + C_{10}^5 + C_{10}^7 + C_{10}^9)$$

$$\Leftrightarrow C_{10}^1 + C_{10}^3 + C_{10}^5 + C_{10}^7 + C_{10}^9 = C_{10}^0 + C_{10}^2 + C_{10}^4 + C_{10}^6 + C_{10}^8 + C_{10}^{10}$$

Vậy $C_{10}^1 + C_{10}^3 + C_{10}^5 + C_{10}^7 + C_{10}^9 = C_{10}^0 + C_{10}^2 + C_{10}^4 + C_{10}^6 + C_{10}^8 + C_{10}^{10}$

Dùng hai số hạng đầu tiên trong khai

Ví dụ 7: Tính tổng sau $S = C_{12}^0 - C_{12}^1 + C_{12}^2 - \dots - C_{12}^{11} + C_{12}^{12}$.

Lời giải

Xét khai triển $(a+b)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k a^{12-k} b^k$.

Ta chọn $a=1; b=-1$, thu được $(1-1)^{12} = C_{12}^0 - C_{12}^1 + C_{12}^2 - \dots - C_{12}^{11} + C_{12}^{12}$.

Vậy $S = 0^{12} = 0$.

Ví dụ 8: Cho n là số tự nhiên thỏa mãn $n^2 - 6n - 7 = 0$. Tính tổng $S = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$.

Lời giải

Ta có $n^2 - 6n - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 7 \\ n = -1. \end{cases}$

Do $n \in \mathbb{N}$ nên $n = 7$. Khi đó $S = C_7^0 + C_7^1 + \dots + C_7^7$.

Xét khai triển $(a+b)^7 = \sum_{k=0}^7 C_7^k a^{7-k} b^k$.

Ta chọn $a=b=1$, thu được $(1+1)^7 = C_7^0 + C_7^1 + \dots + C_7^7$.

Vậy $S = 2^7 = 128$.

Ví dụ 9: Cho đa thức $P(x) = (1-x)^8$. Tính tổng các hệ số của đa thức $P(x)$.

Lời giải

Ta có $P(x) = (1-x)^8 = \sum_{k=0}^8 C_8^k (-1)^k x^k$. Khi đó tổng các hệ số của đa thức $P(x)$ là

$$S = C_8^0 - C_8^1 + \dots - C_8^7 + C_8^8.$$

Xét khai triển $(a+b)^8 = \sum_{k=0}^8 C_8^k a^{8-k} b^k$.

Ta chọn $a=1; b=-1$, thu được $(1-1)^8 = C_8^0 - C_8^1 + C_8^2 - \dots - C_8^7 + C_8^8$.

Vậy tổng các hệ số của đa thức $P(x)$ bằng 0.

Ví dụ 10: Tính tổng sau $S = C_{20}^1 + 2C_{20}^2 + 2^2.C_{20}^3 + \dots + 2^{19}C_{20}^{20}$.

Lời giải

Ta có $2S = 2.C_{20}^1 + 2^2.C_{20}^2 + 2^3.C_{20}^3 + \dots + 2^{20}.C_{20}^{20}$.

Xét khai triển $(a+b)^{20} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k a^{20-k} b^k$.

Ta chọn $a=1; b=2$, thu được $(1+2)^{20} = C_{20}^0 + 2.C_{20}^1 + \dots + 2^{20}.C_{20}^{20}$.

Do đó $2S = (1+2)^{20} - C_{20}^0 = 3^{20} - 1$.

Vậy $S = \frac{3^{20} - 1}{2}$.

Ví dụ 11: Tính tổng sau $S = C_{20}^0 + C_{20}^2 + C_{20}^4 + \dots + C_{20}^{20}$.

Lời giải

Xét khai triển $(a+b)^{20} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k a^{20-k} b^k$.

Chọn $a=b=1$, ta thu được $(1+1)^{20} = C_{20}^0 + C_{20}^1 + C_{20}^2 + C_{20}^3 + \dots + C_{20}^{20}$.

Chọn $a=1; b=-1$, ta thu được $(1-1)^{20} = C_{20}^0 - C_{20}^1 + C_{20}^2 - C_{20}^3 + \dots + C_{20}^{20}$.

Cộng theo về hai phương trình ta được

$$2^{20} = 2.(C_{20}^0 + C_{20}^2 + C_{20}^4 + \dots + C_{20}^{20})$$

$$\Leftrightarrow 2S = 2^{20}$$

$$\Leftrightarrow S = 2^{19}.$$

Ví dụ 12: Tính tổng: $S = C_{2019}^1.3^{2018}.2 - C_{2019}^2.3^{2017}.2^2 + C_{2019}^3.3^{2016}.2^3 - \dots - C_{2019}^{2018}.3^1.2^{2018} + C_{2019}^{2019}.2^{2019}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Xét } A &= (a+b)^{2019} = \sum_{k=0}^{2019} C_{2019}^k a^{2019-k} b^k \\ &= C_{2019}^0 \cdot a^{2019} + C_{2019}^1 \cdot a^{2018} \cdot b + C_{2019}^2 \cdot a^{2017} \cdot b^2 + C_{2019}^3 \cdot a^{2016} \cdot b^3 + \dots + C_{2019}^{2018} \cdot a^1 \cdot b^{2018} + C_{2019}^{2019} \cdot b^{2019} \end{aligned}$$

Ta chọn $a = -3, b = 2$, khi đó

$$\begin{aligned} (-3+2)^{2019} &= -C_{2019}^0 \cdot 3^{2019} + \underbrace{C_{2019}^1 \cdot 3^{2018} \cdot 2 - C_{2019}^2 \cdot 3^{2017} \cdot 2^2 + C_{2019}^3 \cdot 3^{2016} \cdot 2^3 + \dots - C_{2019}^{2018} \cdot 3^1 \cdot 2^{2018} + C_{2019}^{2019} \cdot 2^{2019}}_S \\ \Rightarrow S &= (-3+2)^{2019} + C_{2019}^0 \cdot 3^{2019} = (-1)^{2019} + 3^{2019} = \boxed{3^{2019} - 1}. \end{aligned}$$

Ví dụ 13: Tính tổng: $S = C_{2021}^0 \cdot 4^{2021} - C_{2021}^1 \cdot 4^{2020} \cdot 2 + C_{2021}^2 \cdot 4^{2019} \cdot 2^2 - C_{2021}^3 \cdot 4^{2018} \cdot 2^3 - \dots + C_{2021}^{2020} \cdot 4^1 \cdot 2^{2020}$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= (a+b)^{2021} = \sum_{k=0}^{2021} C_{2021}^k a^{2021-k} b^k \\ &= C_{2021}^0 \cdot a^{2021} + C_{2021}^1 \cdot a^{2020} \cdot b + C_{2021}^2 \cdot a^{2019} \cdot b^2 + C_{2021}^3 \cdot a^{2018} \cdot b^3 + \dots + C_{2021}^{2020} \cdot a^1 \cdot b^{2020} + C_{2021}^{2021} \cdot b^{2021} \end{aligned}$$

Ta chọn $a = 4, b = -2$, khi đó

$$\begin{aligned} (4-2)^{2021} &= \underbrace{C_{2021}^0 \cdot 4^{2021} - C_{2021}^1 \cdot 4^{2020} \cdot 2 + C_{2021}^2 \cdot 4^{2019} \cdot 2^2 - C_{2021}^3 \cdot 4^{2018} \cdot 2^3 + \dots + C_{2021}^{2020} \cdot 4 \cdot 2^{2020}}_S - C_{2021}^{2021} \cdot 2^{2021} \\ \Rightarrow S &= (4-2)^{2021} + C_{2021}^{2021} \cdot 2^{2021} = 2^{2021} + 2^{2021} = \boxed{2^{2022}} \end{aligned}$$

Ví dụ 14: Cho $n \in \mathbb{N}^*$, tính tổng $S = 2^7 C_{2n}^0 - 2^8 C_{2n}^1 + 2^9 C_{2n}^2 - 2^{10} C_{2n}^3 + \dots - 2^{2n+6} C_{2n}^{2n-1} + 2^{2n+7} C_{2n}^{2n}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } S = 2^7 [C_{2n}^0 - 2^1 C_{2n}^1 + 2^2 C_{2n}^2 - 2^3 C_{2n}^3 + \dots - 2^{2n-1} C_{2n}^{2n-1} + 2^{2n} C_{2n}^{2n}].$$

Xét khai triển Newton

$$(x-2)^{2n} = C_{2n}^0 x^{2n} (-2)^0 + C_{2n}^1 x^{2n-1} \cdot (-2)^1 + C_{2n}^2 x^{2n-2} \cdot (-2)^2 + \dots + C_{2n}^{2n-1} x^1 (-2)^{2n-1} + C_{2n}^{2n} (-2)^{2n}$$

$$\text{Tại } x=1 \text{ ta có } 1 = (-1)^{2n} = C_{2n}^0 - 2^1 C_{2n}^1 + 2^2 C_{2n}^2 - 2^3 C_{2n}^3 + \dots - 2^{2n-1} C_{2n}^{2n-1} + 2^{2n} C_{2n}^{2n}$$

$$\text{Vậy } \boxed{S = 2^7 \cdot (-1)^{2n} = 2^7}$$

Ví dụ 15: Cho n là số tự nhiên. Hãy tính tổng sau: $S = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n$

Lời giải

$$S = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n$$

$$\Rightarrow 2S = [C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \dots + C_{2n+1}^n] + [C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \dots + C_{2n+1}^n]$$

Ta có $C_n^k = C_n^{n-k}$ (tính chất tổ hợp).

$$\Rightarrow 2S = [C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \dots + C_{2n+1}^n] + [C_{2n+1}^{2n+1} + C_{2n+1}^{2n} + \dots + C_{2n+1}^{n+1}]$$

$$\Rightarrow 2S = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \dots + C_{2n+1}^n + C_{2n+1}^{n+1} + \dots + C_{2n+1}^{2n} + C_{2n+1}^{2n+1}$$

$$\text{Xét khai triển } (x+1)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 x^0 + C_{2n+1}^1 x^1 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} x^{2n+1}$$

$$\text{Khi } x=1 \Rightarrow 2S = 2^{2n+1} \Rightarrow S = 2^{2n} = 4^n.$$

Ví dụ 16: Cho n là số tự nhiên. Thu gọn biểu thức $S = 3C_n^0 + 7C_n^1 + 11C_n^2 + \dots + (4n+3)C_n^n$ theo n .

Lời giải

$$\text{Ta có } S = (0.4+3)C_n^0 + (1.4+3)C_n^1 + (2.4+3)C_n^2 + \dots + (n.4+3)C_n^n.$$

$$\Rightarrow S = 4(C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + n.C_n^n) + 3(C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n).$$

$$\text{Xét khai triển } (x+1)^n = C_n^0 x^0 + C_n^1 x^1 + \dots + C_n^n x^n.$$

$$\text{Khi } x=1 \Rightarrow C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

$$\text{Mặt khác ta lại có: } k.C_n^k = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n.C_{n-1}^{k-1}$$

$$\text{Do đó: } C_n^1 + 2.C_n^2 + 3.C_n^3 + \dots + n.C_n^n = n(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \dots + C_{n-1}^{n-1})$$

$$\text{Tương tự xét khai triển } (x+1)^{n-1} = C_{n-1}^0 x^0 + C_{n-1}^1 x^1 + \dots + C_{n-1}^{n-1} x^{n-1}$$

$$\text{Khi } x=1 \Rightarrow C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \dots + C_{n-1}^{n-1} = 2^{n-1}.$$

$$\text{Vậy } S = 4n.2^{n-1} + 3.2^n = (2n+3).2^n.$$

Ví dụ 17: Rút gọn biểu thức $S = \frac{1}{1.0!.2019!} + \frac{1}{2.1!.2018!} + \frac{1}{3.2!.2017!} + \dots + \frac{1}{2020.2019!.0!}$

Lời giải

$$\text{Ta có } S = \sum_{k=0}^{2019} \frac{1}{(k+1)k!(2019-k)!} = \sum_{k=0}^{2019} \frac{2020!}{2020!(k+1)!(2020-(k+1))!} = \frac{1}{2020!} \sum_{k=0}^{2019} C_{2020}^{k+1}$$

$$\text{Xét nhị thức } (x+1)^{2020} = \sum_{k=0}^{2020} C_{2020}^k x^k = 1 + \sum_{k=1}^{2020} C_{2020}^k x^k$$

$$\text{Cho } x=1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{2020} C_{2020}^k = \sum_{k=0}^{2019} C_{2020}^{k+1} = 2^{2020} - 1.$$

$$\text{Vậy: } S = \frac{2^{2020} - 1}{2020!}.$$

c) Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: (NB) Tổng $T = C_n^0 + C_n^1 + C_n^3 + C_n^4 + \dots + C_n^n$ bằng

A. 2^{n+1}

B. 2^{n-1}

C. 2^n

D. 0

Lời giải

Chọn C

$$\text{Theo khai triển nhị thức Niuton } (a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k \quad (*)$$

$$\text{Với } a=b=1, \text{ ta có } (*) \Rightarrow 2^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n.$$

Câu 2: (NB) Với $n \geq 4$, tổng $T = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots$ bằng

A. 2^{2n-1}

B. 2^{n-1}

C. 2^n

D. $2^n - 1$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Theo khai triển nhị thức Niuton } (a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k \quad (*)$$

$$\text{Với } a=b=1, \text{ ta có } (*) \Rightarrow 2^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n. \quad (1)$$

$$\text{Với } a=1; b=-1, \text{ ta có } (*) \Rightarrow 0 = C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n. \quad (2)$$

$$\text{Lấy } (1) + (2) \Rightarrow 2^n = 2T$$

$$\text{Vậy } T = 2^{n-1}.$$

Câu 3: (NB) Tổng $T = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n$ bằng

A. 2^{n+1}

B. 2^{n-1}

C. 2^n

D. 0.

Lời giải

Chọn D

Theo khai triển nhị thức Newton $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$ (*)

Với $a=1; b=-1$, ta có $(*) \Rightarrow 0 = C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n$.

Câu 4: (NB) Với $n \geq 4$, tổng $T = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots$ bằng

A. 2^{2n-1}

B. 2^{n-1}

C. 2^n

D. $2^n - 1$.

Lời giải

Chọn D

Theo khai triển nhị thức Newton $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$ (*)

Với $a=b=1$, ta có $(*) \Rightarrow 2^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n$. (1)

Với $a=1; b=-1$, ta có $(*) \Rightarrow 0 = C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n$. (2)

Lấy (1) - (2) $\Rightarrow 2^n = 2T$

Vậy $T = 2^{n-1}$.

Câu 5: (NB) Biểu thức $P = C_n^k + C_n^{k+1}$ bằng

A. C_{n+1}^{k+1}

B. C_{n+1}^k

C. C_{n+1}^k

D. C_n^k .

Lời giải

Chọn C

Áp dụng $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$

Câu 6: (TH) Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^7 + C_n^8 = C_{n+1}^9$. Giá trị của số n bằng

A. 16

B. 24.

C. 18.

D. 17.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $n \geq 8; n \in \mathbb{N}$.

Áp dụng $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$

Ta có $C_n^7 + C_n^8 = C_{n+1}^9 \Leftrightarrow C_{n+1}^8 = C_{n+1}^9 \Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{8!(n-7)!} = \frac{(n+1)!}{9!(n-8)!}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n-7} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow n = 16$.

Câu 7: (TH) Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 8(n+2)$.

A. 14

B. 13

C. 16

D. 15

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}$.

Ta có $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 8(n+2) \Leftrightarrow (C_{n+3}^n + C_{n+3}^{n+1}) - C_{n+3}^n = 8(n+2)$

$\Leftrightarrow C_{n+3}^{n+1} = 8(n+2) \Leftrightarrow \frac{(n+2)(n+3)}{2!} = 8(n+2)$

$$\Leftrightarrow n+3=8.2! \Leftrightarrow n+3=16 \Leftrightarrow n=13.$$

Câu 8: (TH) Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 4095$. Giá trị của n bằng

A. 14

B. 16

C. 13

D. 12

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 4095 \Rightarrow C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 4096$$

$$\text{Mà } C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n \text{ nên suy ra}$$

$$2^n = 4096 \Leftrightarrow n = 12$$

Câu 9: (TH) Tổng $T = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \dots + C_{2n}^{2k} + \dots + C_{2n}^{2n}$ bằng

A. 2^{n-1}

B. 2^{2n-1}

C. $2^{2n} - 1$

D. 2^{2n}

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = 2^{n-1}$$

$$\text{Áp dụng hệ thức trên, ta có } T = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \dots + C_{2n}^{2k} + \dots + C_{2n}^{2n} = 2^{2n-1}.$$

Câu 10: (TH) Cho $T = C_{2022}^1 + C_{2022}^3 + C_{2022}^5 + \dots + C_{2022}^{2021}$. Tính biểu thức $T = 2^n$ thì n bằng

A. 2023

B. 2022

C. 2021

D. 2020

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots + C_n^n = 2^{n-1}$$

$$\text{Áp dụng } T = C_{2022}^1 + C_{2022}^3 + C_{2022}^5 + \dots + C_{2022}^{2021} = 2^{2021}$$

$$\text{Do đó } n = 2021.$$

Câu 11: Tính tổng $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$. ta được kết quả là:

A. 3^n

B. 2^n

C. $n!$

D. 2^{n+1}

Lời giải

Chọn B

$$\text{Xét khai triển: } (a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n b^n.$$

$$\text{Chọn } \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \text{ ta được : } (1+1)^n = C_n^0 \cdot 1^n + C_n^1 \cdot 1^{n-1} \cdot 1 + C_n^2 \cdot 1^{n-2} \cdot 1^2 + \dots + C_n^n \cdot 1^n$$

$$\Leftrightarrow 2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n.$$

Câu 12: Tính tổng $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \dots + (-1)^n C_n^n$. ta được kết quả là:

A. 0

B. 2^n

C. 2^{n-1}

D. 2^{n+1}

Lời giải

Chọn A

$$\text{Xét khai triển: } (a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n b^n.$$

$$\text{Chọn } \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases} \text{ ta được : } (1-1)^n = C_n^0 \cdot 1^n + C_n^1 \cdot 1^{n-1} \cdot (-1) + C_n^2 \cdot 1^{n-2} \cdot (-1)^2 + \dots + C_n^n \cdot (-1)^n$$

$$\Leftrightarrow 0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \dots + (-1)^n C_n^n.$$

Câu 13: Tính tổng $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \dots + C_{2n}^{2n}$ ta được kết quả là:

A. 2^{n-1}

B. 2^n

C. 2^{2n-1}

D. 2^{2n+1}

Lời giải

Chọn A

Xét khai triển: $(a+b)^{2n} = C_{2n}^0 a^{2n} + C_{2n}^1 a^{2n-1}b + C_{2n}^2 a^{2n-2}b^2 + \dots + C_{2n}^{2n} b^{2n}$.

Chọn $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$ ta được: $2^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n}$ (1)

Chọn $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$ ta được: $0 = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + C_{2n}^4 - \dots - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \dots + C_{2n}^{2n} = 2^{2n-1}$.

Câu 14: Xét khai triển $(1+2x+x^2)^{20} = a_0 + a_1x + \dots + a_{40}x^{40}$. Tổng $S = a_0 + a_1 + \dots + a_{40}$ là:

A. 4^{40}

B. 2^{20}

C. 2^{40}

D. 4^{10}

Lời giải

Chọn C

Xét khai triển: $(1+2x+x^2)^{20} = (1+x)^{40} = C_{40}^0 + C_{40}^1x + C_{40}^2x^2 + \dots + C_{40}^{40}x^{40}$.

Chọn $x=1$ ta được $S = a_0 + a_1 + \dots + a_{40} = 2^{40}$.

Câu 15: Tính tổng $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2$ ta được kết quả là:

A. C_{2n}^n

B. C_{2n}^{2n-2}

C. 2^{2n+1}

D. 2^{2n}

Lời giải

Chọn A

Xét khai triển: $(1+x)^m \cdot (1+x)^n = (1+x)^{m+n}$ ta có:

$$C_m^0 \cdot C_n^k + C_m^1 \cdot C_n^{k-1} + C_m^2 \cdot C_n^{k-2} + \dots + C_m^m \cdot C_n^{k-m} = C_{m+n}^k, \quad m \leq k \leq n. \quad (\text{hệ số chứa } x^k \text{ ở cả hai vế}).$$

Áp dụng với khai triển $(1+x)^n \cdot (1+x)^n = (1+x)^{2n}$ ta có hệ số chứa x^n bằng nhau nên:

$$C_n^0 \cdot C_n^n + C_n^1 \cdot C_n^{n-1} + \dots + C_n^n \cdot C_n^0 = C_{2n}^n \Leftrightarrow (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$$

Câu 16: Tính tổng $n \cdot 2^{n-1} \cdot C_n^0 + (n-1) \cdot 2^{n-2} \cdot 3 \cdot C_n^1 + (n-2) \cdot 2^{n-3} \cdot 3^2 \cdot C_n^2 + \dots + 3^{n-1} \cdot C_n^{n-1}$ ta được kết quả là:

A. 5^n

B. $n \cdot 5^n$

C. $n \cdot 5^{n-1}$

D. 5^{n-1}

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$\begin{aligned} & n \cdot 2^{n-1} \cdot C_n^0 + (n-1) \cdot 2^{n-2} \cdot 3 \cdot C_n^1 + (n-2) \cdot 2^{n-3} \cdot 3^2 \cdot C_n^2 + \dots + 3^{n-1} \cdot C_n^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \cdot 2^{n-k-1} \cdot 3^k \cdot C_n^k = \sum_{k=0}^{n-1} n \cdot 2^{n-k-1} \cdot 3^k \cdot C_{n-1}^{n-k-1} = n \cdot (2+3)^{n-1} = n \cdot 5^{n-1} \end{aligned}$$

Câu 17: Tính tổng $C_n^1 + 2 \frac{C_n^2}{C_n^1} + 3 \frac{C_n^3}{C_n^2} + \dots + n \frac{C_n^n}{C_n^{n-1}}$ ta được kết quả là:

A. 3^n

B. 2^n

C. $\frac{n(n-1)}{2}$

D. $\frac{n(n+1)}{2}$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} = \frac{n-k+1}{k}$.

Suy ra:

$$C_n^1 + 2 \frac{C_n^2}{C_n^1} + 3 \frac{C_n^3}{C_n^2} + \dots + n \frac{C_n^n}{C_n^{n-1}} = n + 2 \cdot \frac{n-1}{2} + 3 \frac{n-2}{3} + \dots + n \cdot \frac{1}{n}$$

$$= n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

4. Dạng 4. Dùng hai số hạng đầu tiên trong khai triển của $(x + \Delta x)^4$, $(x + \Delta x)^5$ để tính gần đúng và ứng dụng (nếu có).

Ví dụ 1: Viết khai triển lũy thừa $(x + \Delta x)^5$

Lời giải

Ta có: $(x + \Delta x)^5 = C_5^0 \cdot x^5 + C_5^1 \cdot x^4 \cdot \Delta x + C_5^2 \cdot x^3 \cdot (\Delta x)^2 + C_5^3 \cdot x^2 \cdot (\Delta x)^3 + C_5^4 \cdot x \cdot (\Delta x)^4 + C_5^5 \cdot (\Delta x)^5$

Ví dụ 2: Dùng hai số hạng đầu tiên trong khai triển của lũy thừa $(x + \Delta x)^n$ để tính gần đúng số $(6,01)^4$

Lời giải

Ta có:

$$(6,01)^4 = (6 + 0,01)^4 = C_4^0 \cdot 6^4 + C_4^1 \cdot 6^3 \cdot 0,01 + C_4^2 \cdot 6^2 \cdot (0,01)^2 + C_4^3 \cdot 6 \cdot (0,01)^3 + C_4^4 \cdot (0,01)^4$$

$$\approx C_4^0 \cdot 6^4 + C_4^1 \cdot 6^3 \cdot 0,01 \approx 1304,64$$

Vậy: $(6,01)^4 \approx 1304,64$.

Ví dụ 3: Dùng hai số hạng đầu tiên trong khai triển của lũy thừa $(x + \Delta x)^n$ để tính gần đúng số $(2022,02)^5$

Lời giải

Ta có:

$$(2022,02)^5 = (2022 + 0,02)^5 = C_5^0 \cdot 2022^5 + C_5^1 \cdot 2022^4 \cdot 0,02 + C_5^2 \cdot 2022^3 \cdot 0,02^2 + C_5^3 \cdot 2022^2 \cdot 0,02^3$$

$$+ C_5^4 \cdot 2022 \cdot 0,02^4 + C_5^5 \cdot 0,02^5$$

$$\approx C_5^0 \cdot 2022^5 + C_5^1 \cdot 2022^4 \cdot 0,02 \approx 3,38 \cdot 10^{16}$$

Vậy: $2022,02^5 \approx 3,38 \cdot 10^{16}$.

Ví dụ 4: Dùng hai số hạng đầu tiên trong khai triển của lũy thừa $(x + \Delta x)^n$ để tính gần đúng số $(4,98)^5$

Lời giải

Ta có:

$$(4,98)^5 = (5 + (-0,02))^5 = C_5^0 \cdot 5^5 \cdot (-0,02)^0 + C_5^1 \cdot 5^4 \cdot (-0,02) + C_5^2 \cdot 5^3 \cdot (-0,02)^2 + C_5^3 \cdot 5^2 \cdot (-0,02)^3$$

$$+ C_5^4 \cdot 5 \cdot (-0,02)^4 + C_5^5 \cdot (-0,02)^5$$

$$\approx C_5^0 \cdot 5^5 + C_5^1 \cdot 5^4 \cdot (-0,02) \approx 3062,5$$

Vậy: $4,98^5 \approx 3062,5$

Ví dụ 5: Dùng hai số hạng đầu tiên trong khai triển của lũy thừa $(x + \Delta x)^n$ để tính gần đúng số $(1999,99)^4$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}(1999,99)^4 &= (2000 + (-0,01))^4 = C_4^0 \cdot 2000^4 \cdot (-0,01)^0 + C_4^1 \cdot 2000^3 \cdot (-0,01) + C_4^2 \cdot 2000^2 \cdot (-0,01)^2 \\ &\quad + C_4^3 \cdot 2000 \cdot (-0,01)^3 + C_4^4 \cdot (-0,01)^4 \\ &\approx C_4^0 \cdot 2000^4 + C_4^1 \cdot 2000^3 \cdot (-0,01) \approx 1,599968 \cdot 10^{13}\end{aligned}$$

Vậy: $(1999,99)^4 \approx 1,599968 \cdot 10^{13}$

Ví dụ 6: Tìm giá trị gần đúng của x , biết $(9+x)^5 \approx 59705,1$ khi ta dùng 2 số hạng đầu tiên trong khai triển $(9+x)^5$.

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } (9+x)^5 &= C_5^0 \cdot 9^5 + C_5^1 \cdot 9^4 \cdot x + C_5^2 \cdot 9^3 \cdot x^2 + C_5^3 \cdot 9^2 \cdot x^3 + C_5^4 \cdot 9 \cdot x^4 + C_5^5 \cdot x^5 \\ &\approx C_5^0 9^5 + C_5^1 9^4 x \approx 59705,1 \Rightarrow x \approx 0,02\end{aligned}$$

Vậy $x \approx 0,02$

Ví dụ 7: Dùng hai số hạng đầu tiên trong khai triển của lũy thừa $(x + \Delta x)^n$ để so sánh $(3,01)^4$ và $(2,1)^5$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}(3,01)^4 &= (3 + 0,01)^4 = C_4^0 \cdot 3^4 + C_4^1 \cdot 3^3 \cdot 0,01 + C_4^2 \cdot 3^2 \cdot (0,01)^2 + C_4^3 \cdot 3 \cdot (0,01)^3 + C_4^4 \cdot (0,01)^4 \\ &\approx C_4^0 \cdot 3^4 + C_4^1 \cdot 3^3 \cdot 0,01 \approx 82,08 \\ (2,1)^5 &= (2 + 0,1)^5 = C_5^0 \cdot 2^5 + C_5^1 \cdot 2^4 \cdot 0,1 + C_5^2 \cdot 2^3 \cdot (0,1)^2 + C_5^3 \cdot 2^2 \cdot (0,1)^3 + C_5^4 \cdot 2 \cdot (0,1)^4 + C_5^5 \cdot (0,1)^5 \\ &\approx C_5^0 \cdot 2^5 + C_5^1 \cdot 2^4 \cdot 0,1 \approx 40\end{aligned}$$

Vậy: $(3,01)^4 > (2,1)^5$.

Ví dụ 8: Dùng hai số hạng đầu tiên trong khai triển của lũy thừa $(2-3x)^4$ để ước lượng giá trị gần đúng của x (làm tròn sau dấu phẩy hai chữ số), biết $(2-3x)^4 \approx 12,8$.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}(2-3x)^4 &= C_4^0 \cdot 2^4 + C_4^1 \cdot 2^3 \cdot (-3x) + C_4^2 \cdot 2^2 \cdot (-3x)^2 + C_4^3 \cdot 2 \cdot (-3x)^3 + C_4^4 \cdot (-3x)^4 \\ &\approx C_4^0 \cdot 2^4 + C_4^1 \cdot 2^3 \cdot (-3x) \approx 16 - 96x\end{aligned}$$

Khi đó: $(2-3x)^4 \approx 12,8 \Leftrightarrow 16 - 96x \approx 12,8 \Leftrightarrow x \approx 0,03$.

Vậy: $x \approx 0,03$.

Ví dụ 9: Dùng hai số hạng đầu tiên trong khai triển của lũy thừa $T = (\sqrt{1-a} - 2)^5$ để ước lượng giá trị gần đúng của T theo a .

Lời giải

Ta có:

$$T = (-2 + \sqrt{1-a})^5 = C_5^0 (-2)^5 + C_5^1 \sqrt{1-a} \cdot (-2)^4 + C_5^2 (\sqrt{1-a})^2 \cdot (-2)^3 \\ + C_5^3 (\sqrt{1-a})^3 \cdot (-2)^2 + C_5^4 (\sqrt{1-a})^4 \cdot (-2) + C_5^5 (\sqrt{1-a})^5 \\ \approx C_5^0 (-2)^5 + C_5^1 \sqrt{1-a} \cdot (-2)^4 \approx -32 + 80\sqrt{1-a}.$$

Vậy: $T \approx -32 + 80\sqrt{1-a}$

Bài tập trắc nghiệm:

Câu 1: Dùng hai số hạng đầu tiên trong khai triển $(x + \Delta x)^4$ để tính gần đúng số $(1,01)^4$. Tìm số đó?

A. 1,04.

B. 1,0406.

C. 1,040604.

D. 1.04060401.

Lời giải

Chọn A

$$(1,01)^4 = (1 + 0.01)^4 = C_4^0 + C_4^1 \cdot 0,01 + C_4^2 \cdot 0,01^2 + C_4^3 \cdot 0,01^3 + C_4^4 \cdot 0,01^4.$$

Khi đó: $(1,01)^4 \approx C_4^0 + C_4^1 \cdot 0,01 = 1,04.$

Câu 2: Dùng hai số hạng đầu tiên trong khai triển $(x + \Delta x)^5$ để tính gần đúng số $(2,01)^5$. Tìm số đó?

A. 32.808.

B. 32,80804.

C. 32,8.

D. 32,8080401.

Lời giải

Chọn C

$$(2,01)^5 = (2 + 0.01)^5 = C_5^0 \cdot 2^5 + C_5^1 \cdot 2^4 \cdot 0,01 + C_5^2 \cdot 2^3 \cdot 0,01^2 + C_5^3 \cdot 2^2 \cdot 0,01^3 + C_5^4 \cdot 2 \cdot 0,01^4 + C_5^5 \cdot 0,01^5.$$

Khi đó: $(2,01)^5 \approx C_5^0 \cdot 2^5 + C_5^1 \cdot 2^4 \cdot 0,01 = 32,8$

Câu 3: Dùng ba số hạng đầu tiên trong khai triển $(x + \Delta x)^4$ để tính gần đúng số $(1,02)^4$. Tìm số đó?

A. 1,08.

B. 1.0824.

C. 1,08243.

D. 1,082432.

Lời giải

Chọn B

$$(1,02)^4 = (1 + 0.02)^4 = C_4^0 + C_4^1 \cdot 0,02 + C_4^2 \cdot 0,02^2 + C_4^3 \cdot 0,02^3 + C_4^4 \cdot 0,02^4.$$

Khi đó: $(1,02)^4 \approx C_4^0 + C_4^1 \cdot 0,02 + C_4^2 \cdot 0,02^2 = 1,0824.$

Câu 4: Dùng ba số hạng đầu tiên trong khai triển $(x + \Delta x)^5$ để tính gần đúng số $(2,03)^5$. Tìm số đó?

A. 34,473.

B. 34,47.

C. 34,47308.

D. 34,473088.

Lời giải

Chọn A

$$(2,03)^5 = (2 + 0.03)^5 = C_5^0 \cdot 2^5 + C_5^1 \cdot 2^4 \cdot 0,03 + C_5^2 \cdot 2^3 \cdot 0,03^2 + C_5^3 \cdot 2^2 \cdot 0,03^3 + C_5^4 \cdot 2 \cdot 0,03^4 + C_5^5 \cdot 0,03^5.$$

Khi đó: $(2,03)^5 \approx C_5^0 \cdot 2^5 + C_5^1 \cdot 2^4 \cdot 0,03 + C_5^2 \cdot 2^3 \cdot 0,03^2 = 34,473$

Câu 5: Dùng bốn số hạng đầu tiên trong khai triển $(x + \Delta x)^5$ để tính gần đúng số $(1,03)^5$. Tìm số đó?

A. 1,15.

B. 1,1592.

C. 1,159274.

D. 1,15927407.

Lời giải

Chọn C

$$(1,03)^5 = (1+0.03)^5 = C_5^0 + C_5^1 \cdot 0,03 + C_5^2 \cdot 0,03^2 + C_5^3 \cdot 0,03^3 + C_5^4 \cdot 0,03^4 + C_5^5 \cdot 0,03^5.$$

$$\text{Khi đó: } (1,03)^5 \approx C_5^0 + C_5^1 \cdot 0,03 + C_5^2 \cdot 0,03^2 + C_5^3 \cdot 0,03^3 = 1,159274$$

Câu 6: Dùng bốn số hạng đầu tiên trong khai triển $(x + \Delta x)^4$ để tính gần đúng số $(4,001)^4$. Tìm số đó?

- A.** 256,2560963. **B.** 256,25. **C.** 256,256. **D.** 256,256096.

Lời giải

Chọn A

$$(4,001)^4 = (4 + 0.001)^4 = C_4^0 \cdot 4^4 + C_4^1 \cdot 4^3 \cdot 0,001 + C_4^2 \cdot 4^2 \cdot 0,001^2 + C_4^3 \cdot 4 \cdot 0,001^3 + C_4^4 \cdot 0,001^4.$$

$$\text{Khi đó: } (4,001)^4 \approx C_4^0 \cdot 4^4 + C_4^1 \cdot 4^3 \cdot 0,001 + C_4^2 \cdot 4^2 \cdot 0,001^2 + C_4^3 \cdot 4 \cdot 0,001^3 = 256,2560963.$$

Câu 7: Dùng ba số hạng đầu tiên trong khai triển $(x + \Delta x)^5$ để tính gần đúng số $(1,0002)^5$. Tìm số đó?

- A.** 32,02. **B.** 32,024. **C.** 32,0240072. **D.** 32,024007.

Lời giải

Chọn C

$$(2,0003)^5 = (2 + 0.0003)^5 = 2^5 \cdot C_5^0 + 2^4 \cdot C_5^1 \cdot 0,0003 + 2^3 \cdot C_5^2 \cdot 0,0003^2 + 2^2 \cdot C_5^3 \cdot 0,0003^3 + 2 \cdot C_5^4 \cdot 0,0003^4 + C_5^5 \cdot 0,0003^5.$$

$$\text{Khi đó: } (2,0003)^5 \approx C_5^0 \cdot 2^5 + C_5^1 \cdot 2^4 \cdot 0,0003 + C_5^2 \cdot 2^3 \cdot 0,0003^2 + C_5^3 \cdot 2^2 \cdot 0,0003^3 = 32,0240072.$$

Câu 8: Dùng bốn số hạng đầu tiên trong khai triển $(x + \Delta x)^5$ để tính gần đúng số $(4,0002)^5$. Tìm số đó?

- A.** 1024,25. **B.** 1024,256026. **C.** 1024,25602. **D.** 1024,256.

Lời giải

Chọn C

$$(4,0002)^5 = (4 + 0.0002)^5 = 4^5 \cdot C_5^0 + 4^4 \cdot C_5^1 \cdot 0,0002 + 4^3 \cdot C_5^2 \cdot 0,0002^2 + 4^2 \cdot C_5^3 \cdot 0,0002^3 + 4 \cdot C_5^4 \cdot 0,0002^4 + C_5^5 \cdot 0,0002^5.$$

Khi

đó:

$$(4,0002)^5 \approx C_5^0 \cdot 4^5 + C_5^1 \cdot 4^4 \cdot 0,0002 + C_5^2 \cdot 4^3 \cdot 0,0002^2 + C_5^3 \cdot 4^2 \cdot 0,0002^3 = 1024,256026.$$

5. Dạng 5: Bài toán thực tế

Ví dụ 1: Số dân của một tỉnh ở thời điểm hiện tại là khoảng 800 nghìn người. Giả sử rằng tỉ lệ tăng dân số hằng năm của tỉnh đó là $r\%$

- a) Viết công thức tính số dân của tỉnh đó sau 1 năm, sau 2 năm. Từ đó suy ra công thức tính số dân của tỉnh đó sau 5 năm nữa là $P = 800 \left(1 + \frac{r}{100} \right)^5$ (nghìn người).

b) Với $r = 15\%$, dùng hai số hạng đầu trong khai triển của $(1 + 0,015)^5$, hãy ước tính số dân của tỉnh đó sau 5 năm nữa (theo đơn vị nghìn người).

Lời giải

Số dân của tỉnh đó sau 1 năm là $800 + 800.r\% = 800\left(1 + \frac{r}{100}\right)$ (nghìn người)

Số dân của tỉnh đó sau 2 năm là

$$800(1 + r\%) + 800.(1 + r\%).r\% = 800(1 + r\%)(1 + r\%) = 800\left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 \text{ (nghìn người).}$$

Lập luận hoàn toàn tương tự ta có số dân của tỉnh đó sau 5 năm là $P = 800\left(1 + \frac{r}{100}\right)^5$ (nghìn người)

b) Số dân của tỉnh đó ước tính sau 5 năm nữa là

$$P = 800\left(1 + \frac{15}{100}\right)^5 \approx 800 \cdot \left(C_5^0 \cdot 1^5 + C_5^1 \cdot 1^4 \cdot \left(\frac{15}{100}\right)\right) = 1400 \text{ (nghìn người)}$$

Ví dụ 2: Một người có 500 triệu đồng gửi tiết kiệm ngân hàng với lãi suất $7,2\%$ / năm. Với giả thiết sau mỗi tháng người đó không rút tiền thì số tiền lãi được nhập vào số tiền ban đầu. Đây được gọi là hình thức lãi kép. Biết số tiền cả vốn lẫn lãi T sau n tháng được tính bởi công thức $T = T_0(1 + r)^n$, trong đó T_0 là số tiền gửi lúc đầu và r là lãi suất của một tháng. Dùng hai số hạng đầu tiên trong khai triển của nhị thức Niu – ton, tính gần đúng số tiền người đó nhận được (cả gốc lẫn lãi) sau 6 tháng

Lời giải

Lãi suất của một tháng $r = \frac{7,2}{12}\% = 0,6\%$ / tháng.

Ta có: $T = T_0(1 + r)^n$.

Suy ra: $T = 500.10^6(1 + 0,006)^6 \approx 500.10^6(C_6^0 + C_6^1 \cdot 0,006) \approx 518000000$ đồng

Vậy: sau 6 tháng người đó nhận được hơn 518000 000 đồng.

Ví dụ 3: Một người có T_0 triệu đồng gửi tiết kiệm ngân hàng với lãi suất $7,2\%$ / năm. Với giả thiết sau mỗi năm người đó không rút tiền thì số tiền lãi được nhập vào số tiền ban đầu. Đây được gọi là hình thức lãi kép. Biết số tiền cả vốn lẫn lãi T sau n năm được tính bởi công thức $T = T_0(1 + r)^n$, trong đó T_0 là số tiền gửi lúc đầu và r là lãi suất của một năm. Sau 4 năm người đó nhận được số tiền cả gốc lẫn lãi số tiền 386400000 đồng khi dùng hai số hạng đầu tiên trong khai triển của nhị thức Niu – ton. Tính gần đúng số tiền người đó đã gửi lúc đầu.

Lời giải

Ta có: $T = T_0(1 + r)^n$.

Suy ra: $T = T_0(1 + 0,072)^4 \approx T_0(C_4^0 + C_4^1 \cdot 0,072) \Rightarrow T_0 \approx 300\ 000\ 000$ đồng

Vậy lúc đầu người đó gửi vào khoảng 300 000 000 đồng

Ví dụ 4: Một người có 100 triệu đồng gửi tiết kiệm ngân hàng với lãi suất $6,8\%$ / năm. Với giả thiết sau mỗi năm người đó không rút tiền thì số tiền lãi được nhập vào số tiền ban đầu. Dùng hai số hạng đầu tiên trong khai triển của nhị thức Niu – ton, tính số tiền người đó thu được (cả gốc lẫn lãi) sau 4 năm.

Lời giải

Gọi P là số tiền ban đầu người đó gửi vào, r là lãi suất, P_n là số tiền nhận được sau n năm.

Khi đó: $P_n = P(1+r)^n$.

Theo giả thiết:

$$P_4 = 10^8 \left(1 + \frac{6,8}{100}\right)^4 = 10^8 \left(1 + \frac{6,8}{100}\right)^4 = 10^8 \left[C_4^0 + C_4^1 \cdot \left(\frac{6,8}{100}\right) + C_4^2 \cdot \left(\frac{6,8}{100}\right)^2 + C_4^3 \cdot \left(\frac{6,8}{100}\right)^3 + C_4^4 \cdot \left(\frac{6,8}{100}\right)^4 \right]$$
$$\approx 10^8 \left[C_4^0 + C_4^1 \cdot \frac{6,8}{100} \right] \approx 127\,200\,000 \text{ (đồng)}$$

Vậy: sau 4 năm người đó nhận được hơn 127 200 000 đồng.

Ví dụ 5: Số dân ở thời điểm hiện tại của một tỉnh là 1 triệu người. Tỷ lệ tăng dân số hàng năm của tỉnh đó là 5%. Sử dụng hai số hạng đầu tiên trong khai triển của lũy thừa $(a+b)^n$, hỏi sau bao nhiêu năm thì số dân của tỉnh đó là 1,2 triệu người?

Lời giải

Gọi A là số dân ban đầu, r là tỷ lệ tăng dân số hàng năm, A_n là số dân của tỉnh đó sau n năm.

Khi đó: $A_n = A(1+r)^n$.

Theo giả thiết:

$$1,2 = \left(1 + \frac{5}{100}\right)^n \Leftrightarrow 1,2 = \left[C_n^0 + C_n^1 \cdot \left(\frac{5}{100}\right) + C_n^2 \cdot \left(\frac{5}{100}\right)^2 + \dots + C_n^{n-1} \cdot \left(\frac{5}{100}\right)^{n-1} + C_n^n \cdot \left(\frac{5}{100}\right)^n \right]$$
$$\Leftrightarrow 1,2 \approx C_n^0 + C_n^1 \cdot \frac{5}{100} \Leftrightarrow 1,2 \approx 1 + 0,05n \Leftrightarrow n \approx 4 \text{ (năm)}$$

Vậy: Sau khoảng 4 năm thì số dân của tỉnh đó là 1,2 triệu người.

Ví dụ 6: Ông A có 800 triệu đồng và ông B có 950 triệu đồng gửi hai ngân hàng khác nhau với lãi suất lần lượt là 7%/năm và 5%/năm. Dùng hai số hạng đầu tiên trong khai triển của nhị thức Niu – ton, ước lượng sau bao nhiêu năm thì số tiền của hai ông thu được là bằng nhau và mỗi người nhận được bao nhiêu tiền?

Lời giải

Gọi P là số tiền ban đầu gửi vào ngân hàng, r là lãi suất, P_n lần lượt là số tiền nhận được sau n năm.

Khi đó: $P_n = P(1+r)^n$.

Theo giả thiết:

$$800 \left(1 + \frac{7}{100}\right)^n = 950 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^n$$
$$\Leftrightarrow C_n^0 + C_n^1 \cdot \frac{7}{100} = \frac{19}{16} \left(C_n^0 + C_n^1 \cdot \frac{5}{100} \right) \Leftrightarrow 1 + \frac{7n}{100} = \frac{19}{16} + \frac{19n}{320} \Leftrightarrow \frac{17n}{1600} = \frac{3}{16} \Leftrightarrow n \approx 17,6.$$
$$P_{17} \approx 800\,000\,000 \left(C_{17}^0 + C_{17}^1 \cdot \frac{7}{100} \right) \approx 1\,192\,000\,000 \text{ (đồng)}$$

Vậy: Sau hơn 17 năm mỗi người nhận được hơn 1 192 000 000 đồng.

5. Dạng 5: Bài toán khác về Nhị thức Niu Ton

Ví dụ 1: Cho khai triển $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ thỏa mãn $a_0 + 8a_1 = 2a_2 + 1$. Tìm giá trị của số nguyên dương n .

Lời giải

Ta có: $(1+2x)^n = \sum_{k=0}^n 2^k C_n^k x^k; (k \in \mathbb{N})$. Suy ra: $a_k = 2^k C_n^k$. Thay $a_0 = 2^0 C_n^0 = 1$, $a_1 = 2C_n^1$,

$a_2 = 4C_n^2$ vào giả thiết ta có: $1 + 16C_n^1 = 8C_n^2 + 1 \Leftrightarrow 2C_n^1 = C_n^2$

$$\Leftrightarrow 2 \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n!}{(n-2)!2!} \Leftrightarrow 2n = \frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow n^2 - 5n = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n=0 \\ n=5 \end{cases}.$$

Do n là số nguyên dương nên $n = 5$.

Ví dụ 2: (VDC). Tìm số hạng có hệ số nguyên trong khai triển thành đa thức của $\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}x^2\right)^n$ biết n là số nguyên dương thỏa mãn: $C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^4 + \dots + C_{2n+1}^{2n} = 1024$

Lời giải

Ta có $(x+1)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 x^{2n+1} + C_{2n+1}^1 x^{2n} + \dots + C_{2n+1}^{2n} x + C_{2n+1}^{2n+1}$ (1).

Thay $x=1$ vào (1) ta được $2^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \dots + C_{2n+1}^{2n} + C_{2n+1}^{2n+1}$ (2).

Thay $x=-1$ vào (1) ta được $0 = -C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 - \dots - C_{2n+1}^{2n} + C_{2n+1}^{2n+1}$ (3).

Lấy (2) - (3) vế theo vế ta được $2^{2n+1} = 2(C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^{2n})$.

Theo đề $2^{2n+1} = 2.1024 \Leftrightarrow n = 5$.

Số hạng tổng quát của khai triển $\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}x^2\right)^n$ là

$$T_{k+1} = C_n^k \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-k} \cdot \left(-\frac{2}{3}x^2\right)^k = C_n^k \cdot (-1)^k \cdot 3^{5-2k} \cdot 2^{2k-5} x^{2k}.$$

Ta có bảng sau

k	0	1	2	3	4	5
$C_n^k \cdot (-1)^k \cdot 3^{5-2k} \cdot 2^{2k-5}$	$\frac{243}{32}$	$-\frac{135}{8}$	15	$-\frac{20}{3}$	$\frac{40}{27}$	$-\frac{32}{243}$

Vậy số hạng có hệ số nguyên là $15x^4$.

Ví dụ 3: (VDC) Tìm số hạng chứa x^2 trong khai triển của biểu thức $P(x) = (3+x-x^2)^n$ với n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^2 + \frac{A_n^3}{n} = 12$.

Lời giải

Xét $C_n^2 + \frac{A_n^3}{n} = 12$ (1) (Điều kiện: $n \in \mathbb{Z}, n \geq 3$).

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} + \frac{n!}{n.(n-3)!} = 12 \\
&\Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} + (n-1)(n-2) = 12 \\
&\Leftrightarrow 3n^2 - 7n - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 4 \text{ (tm)} \\ n = \frac{-5}{3} \text{ (L)} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\text{Với } n = 4 \text{ thì } P(x) = (3 + x - x^2)^4 = \sum_{k=0}^4 C_4^k 3^{4-k} [x(1-x)]^k = \sum_{k=0}^4 C_4^k 3^{4-k} x^k \left(\sum_{i=0}^k C_k^i (-1)^i x^i \right)$$

$$\Rightarrow P(x) = \sum_{k=0}^4 \sum_{i=0}^k C_4^k C_k^i 3^{4-k} (-1)^i x^{i+k}$$

$$\text{Theo đề bài số hạng chứa } x^2 \text{ thỏa mãn với } i+k=2 \text{ (} i, k \in \mathbb{Z}, 0 \leq i \leq k \leq 4 \text{)} \Rightarrow \begin{cases} i=0, k=2 \\ i=1, k=1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy số hạng chứa } x^2 \text{ là } [C_4^2 C_2^0 3^2 (-1)^0 + C_4^1 C_1^1 3^3 (-1)^1] x^2 = -54x^2.$$

Ví dụ 4: Giải bất phương trình: $\frac{1}{2} A_{2x}^2 - A_x^2 \leq \frac{6}{x} C_x^3 + 10$

Lời giải

Điều kiện: x là số nguyên dương và $x \geq 3$

Ta có: bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{aligned}
\frac{(2x-1)2x}{2} - (x-1)x &\leq \frac{6(x-2)(x-1)}{3!x} + 10 \\
\Leftrightarrow 2x(2x-1) - x(x-2) &\leq (x-2)(x-1) + 10 \\
\Leftrightarrow 3x &\leq 12 \Leftrightarrow x \leq 4
\end{aligned}$$

Vì x là nghiệm nguyên dương và $x \geq 3$ nên $x \in \{3; 4\}$

Ví dụ 5: Cho biết tổng tất cả các hệ số của khai triển nhị thức $(x^2 + 1)^n$ bằng 1024. Hãy tìm hệ số a ($a \in \mathbb{N}^*$) của số hạng ax^{12} trong khai triển đó.

Lời giải

$$\text{Ta có: } (1 + x^2)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{2k} = C_n^0 + C_n^1 x^2 + \dots + C_n^k x^{12-2k}$$

$$\text{Với } x=1 \text{ thì: } 2^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 1024 \Leftrightarrow 2^n = 2^{10} \Leftrightarrow n = 10$$

$$\text{Do đó hệ số } a \text{ (của } x^{12}) \text{ là: } C_{10}^6 = 210$$

Ví dụ 6: Khai triển đa thức:

$$P(x) = (1 + 2x)^{12} = a_0 + a_1 x + \dots + a_{12} x^{12}$$

$$\text{Tìm } \max(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{12})$$

Lời giải

Gọi a_k là hệ số lớn nhất của khai triển suy ra: $a_k > a_{k-1}$

Từ đây ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2^k C_{12}^k \geq 2^{k-1} C_{12}^{k-1} \\ 2^k C_{12}^k \geq 2^{k+1} C_{12}^{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{k} \geq \frac{1}{12-k+1} \\ \frac{1}{12-k} \geq \frac{2}{k+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \max(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{12}) = a_8 = C_{12}^8 2^{18} = 126720$$

Ví dụ 7: Tìm số hạng thứ 21 trong khai triển: $(2-3x)^{25}$ theo lũy thừa bậc tăng dần của x

Lời giải

Số hạng thứ 21 trong khai triển là: $C_{25}^{20} 2^5 (-3x)^{20} = C_{25}^{20} 2^5 3^{20} x^{20}$

Ví dụ 8: Cho khai triển nhị thức:

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{10} = a_0 + a_1x + \dots + a_9x^9 + a_{10}x^{10}.$$

Hãy tìm số hạng a_k lớn nhất.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{10} = \frac{1}{3^{10}} (1+2x)^{10} = \frac{1}{3^{10}} \sum_{k=0}^n C_{10}^k (2x)^k \Rightarrow a_k = \frac{1}{3^{10}} C_{10}^k 2^k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_k \geq a_{k+1} \\ a_k \geq a_{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_{10}^k 2^k \geq C_{10}^{k+1} 2^{k+1} \\ C_{10}^k 2^k \geq C_{10}^{k-1} 2^{k-1} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } a_k \text{ đạt được max} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2^k 10!}{k!(10-k)!} \geq \frac{2^{k+1} 10!}{(k+1)!(9-k)!} \\ \frac{2^k 10!}{k!(10-k)!} \geq \frac{2^{k-1} 10!}{(k-1)!(11-k)!} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{10-k} \geq \frac{2}{k+1} \\ \frac{2}{k} \geq \frac{2}{11-k} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{19}{3} \leq k \leq \frac{22}{3}$$

$$\Rightarrow k = 7 (k \in \mathbb{N}, k \in [0, 10])$$

$$\text{Vậy } \max a_k = a_7 = \frac{2^7}{3^{10}} C_{10}^7$$

Ví dụ 9: Chứng minh rằng: $C_{2n}^0 + 3^2 C_{2n}^2 + 3^4 C_{2n}^4 + \dots + 3^{2n} C_{2n}^{2n} = 2^{2n-1} (2^{2n} + 1)$

Lời giải

$$(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \dots + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1} + C_{2n}^{2n} x^{2n} \quad (1)$$

$$(1-x)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 - \dots - C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1} + C_{2n}^{2n} x^{2n} \quad (2)$$

Lấy (1) + (2) ta được:

$$(1+x)^{2n} + (1-x)^{2n} = 2 \left[C_{2n}^0 + C_{2n}^2 x^2 + \dots + C_{2n}^{2n} x^{2n} \right]$$

$$(4)^{2n} + (-2)^{2n} = 2 \left[C_{2n}^0 + C_{2n}^2 3^2 + \dots + C_{2n}^{2n} 3^{2n} \right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{4n} + 2^{2n}}{2} = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 3^2 + \dots + C_{2n}^{2n} 3^{2n}$$

Chọn x=3 suy ra: $\Leftrightarrow \frac{2^{2n}(2^{2n}+1)}{2} = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 3^2 + \dots + C_{2n}^{2n} 3^{2n}$

$$\Leftrightarrow 2^{2n-1}(2^{2n}+1) = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 3^2 + \dots + C_{2n}^{2n} 3^{2n}$$

$$\Rightarrow \text{ĐPCM}$$

Ví dụ 10: Cho $\begin{cases} 0 \leq m \leq k \leq n \\ k, m, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Chứng minh: $C_n^k \cdot C_m^0 + C_n^{k-1} C_m^1 + \dots + C_n^{k-m} C_m^m = C_{n+m}^k$

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} (1+x)^m = C_m^0 + C_m^1 x + \dots + C_m^m x^m \\ (1+x)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \dots + C_n^n \\ (1+x)^{m+n} = C_{m+n}^0 + C_{m+n}^1 x + \dots + C_{m+n}^{m+n} x^{m+n} \end{cases}$

Suy ra hệ số x^k trong $(1+x)^n \cdot (1+x)^m$ là $C_m^0 C_n^k + C_m^1 C_n^{k-1} + \dots + C_m^m C_n^{k-m}$

Và hệ số x^k trong khai $(1+x)^{m+n}$ là C_{m+n}^k

Đồng nhất thức: $(1+x)^n \cdot (1+x)^m = (1+x)^{n+m}$

Ta được: $C_n^k \cdot C_m^0 + C_n^{k-1} C_m^1 + \dots + C_n^{k-m} C_m^m = C_{n+m}^k \Rightarrow \text{ĐPCM}$

Ví dụ 11: $S_2 = (C_n^1)^2 + 2(C_n^2)^2 + \dots + n(C_n^n)^2$ với n là số tự nhiên lẻ

Lời giải

Ta có:

$$S = \left((C_n^1)^2 + (n-1)(C_n^{n-1})^2 \right) + \dots + \left(\left(\frac{n-1}{2} \right) \left(C_n^{\frac{n-1}{2}} \right) \right)^2 + \left(\left(\frac{n+1}{2} \right) \left(C_n^{\frac{n+1}{2}} \right) \right)^2 + n(C_n^n)^2$$

$$n \left((C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^{n-1})^2 \right) + n$$

$$= n \left((C_n^{n+1})^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^{n-1})^2 \right) + n$$

$$\Rightarrow 2S_n = n \left[(C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 \right] + n$$

Mặt khác ta có: $(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + \dots + C_{2n}^{2n} x^{2n} \Rightarrow$ hệ số của x^n là: $C_{2n}^n (*)$

Trong khi đó: $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^n x^n$

Nên hệ số của x^n là $(C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 (**)$

Từ (*) và (**) $\Rightarrow C_{2n}^n - 1 = n \left[(C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 \right]$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2} C_{2n}^n \Rightarrow \text{DPCM}$$

Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tìm hệ số của x^2 trong khai triển : $f(x) = \left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^n$, với $x > 0$, biết: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 11$.

A. 20.

B. 6.

C. 7.

D. 15.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có : } C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 11 \Leftrightarrow 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 11 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 4 \\ n = -5 \end{cases}.$$

Số hạng tổng quát của khai triển $f(x) = \left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^4$ là $T_{k+1} = C_4^k (x^3)^{4-k} \left(\frac{1}{x^2}\right)^k = C_4^k x^{12-5k}$.

Số hạng chứa x^2 trong khai triển ứng với số mũ của x là: $12 - 5k = 2 \Leftrightarrow k = 2$.

Vậy hệ số của x^2 trong khai triển là: $C_4^2 = 6$.

Câu 2: Tìm hệ số của x^2 trong khai triển : $f(x) = \left(x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^n$, với $x > 0$, biết tổng ba hệ số đầu của x trong khai triển bằng 33.

A. 34.

B. 24.

C. 6.

D. 12.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có : } C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 = 33 \Rightarrow n = 4$$

Số hạng tổng quát của khai triển $f(x) = \left(x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^4$ là $T_{k+1} = C_4^k (x^3)^{4-k} \left(\frac{2}{x^2}\right)^k = 2^k C_4^k x^{12-5k}$.

Số hạng chứa x^2 trong khai triển ứng với số mũ của x là: $12 - 5k = 2 \Leftrightarrow k = 2$.

Vậy hệ số của x^2 trong khai triển là : $2^2 C_4^2 = 24$.

Câu 3: Tìm hệ số của x^7 trong khai triển : $f(x) = \left(x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^n$, với $x > 0$, biết tổng ba hệ số đầu của x trong khai triển bằng 33.

A. 34.

B. 24.

C. 6.

D. 12.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có : } C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 = 33 \Rightarrow n = 4$$

Số hạng tổng quát của khai triển $f(x) = \left(x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^4$ là $T_{k+1} = C_4^k (x^3)^{4-k} \left(\frac{2}{x^2}\right)^k = 2^k C_4^k x^{12-5k}$.

Số hạng chứa x^2 trong khai triển ứng với số mũ của x là: $12 - 5k = 2 \Leftrightarrow k = 2$.

Vậy hệ số của x^2 trong khai triển là : $2^2 C_4^2 = 24$.

Câu 4: Cho khai triển: $(3x-5)^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$. Tính tổng $S = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$.

$$\text{Biết : } C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n = 243.$$

A. 3093.

B. -3157.

C. 3157.

D. -3093.

Lời giải

Chọn A

Ta có : $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n = 243 \Leftrightarrow (1+2)^n = 243 \Leftrightarrow 3^n = 3^5 \Leftrightarrow n = 5$.

Ta có : $f(x) = (3x - 5)^5$

$$= C_5^0 (3x)^5 + C_5^1 (3x)^4 (-5) + C_5^2 (3x)^3 (-5)^2 + C_5^3 (3x)^2 (-5)^3 + C_5^4 (3x) (-5)^4 + C_5^5 (-5)^5$$

Tổng là:

$$\begin{aligned} S &= C_5^0 3^5 + C_5^1 3^4 (-5) + C_5^2 3^3 (-5)^2 + C_5^3 3^2 (-5)^3 + C_5^4 3 \cdot (-5)^4 + C_5^5 (-5)^5 \\ &= (3 - 5)^5 + 5^5 = 3093. \end{aligned}$$

Câu 5: Với n là số nguyên dương, gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $f(x) = (x^2 + 1)^n (x + 2)^n$. Tìm n để $a_{3n-3} = 26n$.

A. $n = 11$.

B. $n = 5$.

C. $n = 12$.

D. $n = 10$

Lời giải

Chọn B

$$f(x) = (x^2 + 1)^n (x + 2)^n = \left(\sum_{k=0}^n C_n^k x^{2n-2k} \right) \left(\sum_{i=0}^n C_n^i x^{n-i} 2^i \right) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=0}^n C_n^k C_n^i 2^i x^{3n-2k-i} \right), \quad (0 \leq i, k \leq n)$$

$$\text{Yêu cầu } \Leftrightarrow 3n - (2k + i) = 3n - 3 \Leftrightarrow 2k + i = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} k = i = 1 \\ k = 0, i = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{3n-3} = 2C_n^1 C_n^1 + 2^3 C_n^0 C_n^3 = 26n \Leftrightarrow n = 5.$$

Câu 6: Cho khai triển: $(1 + 2x)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$, biết n thỏa mãn $a_0 + 8a_1 = 2a_2 + 1$. Tìm hệ số lớn nhất của khai triển.

A. 160.

B. 80.

C. 60.

D. 105.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } (1 + 2x)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (2x)^k = \sum_{k=0}^n C_n^k 2^k x^k.$$

$$\Rightarrow a_k = C_n^k 2^k \Rightarrow a_0 = C_n^0, a_1 = 2C_n^1, a_2 = 2^2 C_n^2.$$

$$\text{Nên } a_0 + 8a_1 = 2a_2 + 1 \Leftrightarrow C_n^0 + 16C_n^1 = 8C_n^2 + 1 \Leftrightarrow 1 + 16n = \frac{8n(n-1)}{2!} + 1 \Leftrightarrow n = 5.$$

$$\text{Suy ra ta có khai triển: } (1 + 2x)^5 = \sum_{k=0}^5 C_5^k 2^k x^k \Rightarrow \text{Hệ số của khai triển là: } a_k = C_5^k 2^k.$$

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } a_k \text{ là hệ số lớn nhất} &\Leftrightarrow \begin{cases} a_k \geq a_{k+1} \\ a_k \geq a_{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_5^k 2^k \geq C_5^{k+1} 2^{k+1} \\ C_5^k 2^k \geq C_5^{k-1} 2^{k-1} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5!}{k!(5-k)!} 2^k \geq \frac{5!}{(k+1)!(5-k-1)!} 2^{k+1} \\ \frac{5!}{k!(5-k)!} 2^k \geq \frac{5!}{(k-1)!(5-k+1)!} 2^{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{5-k} \geq \frac{2}{k+1} \\ \frac{2}{k} \geq \frac{1}{5-k+1} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} k+1 \geq 10-2k \\ 12-2k \geq k \end{cases} \Leftrightarrow 11 \leq 3k \leq 12 \\
&\Leftrightarrow \frac{11}{3} \leq k \leq 4 \Rightarrow \begin{cases} k=3 \\ k=4 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Vậy hệ số lớn nhất của khai triển là : $a_3 = C_5^3 2^3 = 80 = a_4 = C_5^4 2^4 = 80$.

Câu 9: Tính giá trị của $H = C_{15}^0 - 2C_{15}^1 + 2^2 C_{15}^2 - \dots + 2^{14} C_{15}^{14} - 2^{15} C_{15}^{15}$

A. -3^{15} .

B. 3^{15} .

C. 1.

D. -1.

Lời giải

Chọn D.

$$(1+x)^{15} = C_{15}^0 + C_{15}^1 x + C_{15}^2 x^2 + \dots + C_{15}^{14} x^{14} + C_{15}^{15} x^{15}.$$

$$\text{Chọn } x = -2, \text{ ta được } C_{15}^0 - 2C_{15}^1 + 2^2 C_{15}^2 - \dots + 2^{14} C_{15}^{14} - 2^{15} C_{15}^{15} = (1-2)^{15} = -1$$

Câu 10: Tính giá trị của $K = 3^{20} C_{20}^0 - 3^{19} \cdot 4 \cdot C_{20}^1 + 3^{18} \cdot 4^2 \cdot C_{20}^2 - \dots - 3 \cdot 4^{19} \cdot C_{20}^{19} + 4^{20} \cdot C_{20}^{20}$.

A. 7^{20} .

B. -7^{20} .

C. -1.

D. 1

Lời giải

Chọn D.

$$(3+x)^{20} = 3^{20} C_{20}^0 + 3^{19} C_{20}^1 x + 3^{18} C_{20}^2 x^2 + \dots + 3 C_{20}^{19} x^{19} + C_{20}^{20} x^{20}.$$

$$\text{Chọn } x = -4, \text{ ta được } 3^{20} C_{20}^0 - 3^{19} \cdot 4 \cdot C_{20}^1 + 3^{18} \cdot 4^2 \cdot C_{20}^2 - \dots - 3 \cdot 4^{19} \cdot C_{20}^{19} + 4^{20} \cdot C_{20}^{20} = (3-4)^{20} = 1$$

Câu 11: Trong khai triển biểu thức $F = (\sqrt{3} + \sqrt[3]{2})^5$ số hạng nguyên có giá trị lớn nhất là

A. 8

B. 60

C. 58

D. 20

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có số hạng tổng quát } T_{k+1} = C_5^k (\sqrt{3})^{5-k} (\sqrt[3]{2})^k$$

Ta thấy bậc hai của căn thức là 2 và 3 là hai số nguyên tố, do đó để T_{k+1} là một số nguyên thì

$$\begin{cases} k \in \mathbb{N} \\ 0 \leq k \leq 5 \\ (5-k):2 \\ k:3 \end{cases} \Leftrightarrow k=3 \Rightarrow T_4 = C_5^3 (\sqrt{3})^2 (\sqrt[3]{2})^3$$

Vậy trong khai triển có giá trị lớn nhất là số hạng nguyên là $T_4 = 60$.

Câu 12: Nếu một người gửi số tiền A vào ngân hàng theo thể thức lãi kép (đến kỳ hạn mà người gửi không rút lãi ra thì tiền lãi được tính vào vốn của kỳ kế tiếp) với lãi suất r mỗi kì thì sau N kì, số tiền người ấy thu được cả vốn lẫn lãi là $C = A(1+r)^N$ (triệu đồng). Ông An gửi 20 triệu

đồng vào ngân hàng X theo thể thức lãi kép với lãi suất 8,65% một quý. Hãy dùng ba số hạng đầu trong khai triển $(1+0,0865)^5$ tính sau 5 quý (vẫn tính lãi suất kì hạn theo quý), ông An sẽ thu được số tiền cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu (giả sử lãi suất hằng năm của ngân hàng X là không đổi) ?

A. 30.15645 triệu đồng.

B. 30.14645 triệu đồng.

C. 30.14675 triệu đồng.

D. 31.14645 triệu đồng.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $C = A(1+r)^5$ với $A = 20$ triệu $r = 8,65\%$, $n = 5$ quý.

$$(1+x)^5 = C_5^0 + C_5^1 x + C_5^2 x^2 + C_5^3 x^3 + C_5^4 x^4 + C_5^5 x^5$$

$$(1+0,0865)^5 \approx C_5^0 + C_5^1 \cdot 0,0865 + C_5^2 (0,0865)^2 = 1 + 5 \cdot 0,0865 + 10 \cdot (0,0865)^2 = 1,5073225 =$$

Vậy số tiền thu được sau 5 quý là: $C = 20 \cdot 1,5073225 = 30.14645$ triệu đồng.

Câu 13: Để dự báo dân số của một quốc gia người ta sử dụng công thức $S = A(1+r)^n$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc, S là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm, $r = 1,5\%$. Năm 2015 dân số của một quốc gia là 212.942.000 người. Dùng ba số hạng đầu trong khai triển $(1+0,015)^5$ ta ước tính được số dân của quốc gia đó vào năm 2020 gần số nào sau đây nhất ?

A. 229391769 nghìn người.

B. 329391769 nghìn người.

C. 229391759 nghìn người.

D. 228391769 nghìn người.

Lời giải

Chọn A

Lấy năm 2015 làm mốc và tính dân số năm 2020 thì $n = 2020 - 2015 = 5$

Áp dụng công thức $S = A(1+r)^n$ với $A = 212.942.000$, $r = 1,5\%$.

$$(1+x)^5 = C_5^0 + C_5^1 x + C_5^2 x^2 + C_5^3 x^3 + C_5^4 x^4 + C_5^5 x^5$$

$$(1+0,015)^5 \approx C_5^0 + C_5^1 \cdot 0,015 + C_5^2 (0,015)^2 = 1 + 5 \cdot 0,015 + 10 \cdot (0,015)^2 = 1,07725$$

Ước tính dân số của quốc gia đó vào năm 2020 là: $212.942.000 \times 1,07725 = 229391769,5$.

Vậy dân số quốc gia đó là 229391769 nghìn người.

**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM
NHỊ THỨC NIU TƠN**

1-BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 1

Câu 1. Tổng $C_{2016}^1 + C_{2016}^2 + C_{2016}^3 + \dots + C_{2016}^{2016}$ bằng:

- A. 2^{2016} B. $2^{2016} + 1$ C. $2^{2016} - 1$ D. 4^{2016}

Câu 2. Trong khai triển $(1+30)^{20}$ với số mũ tăng dần, hệ số của số hạng đứng chính giữa là:

- A. $3^9 C_{20}^9$ B. $3^{12} C_{20}^{12}$ C. $3^{11} C_{20}^{11}$ D. $3^{10} C_{20}^{10}$

Câu 3. Tổng các hệ số nhị thức Niu – ton trong khai triển $(1+x)^{3n}$ bằng 64. Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(2nx + \frac{1}{2nx^2}\right)^{3n}$ là:

- A. 360 B. 210 C. 250 D. 240

Câu 4. Trong khai triển $(x-y)^{11}$, hệ số của số hạng chứa $x^8 y^3$ là:

- A. $-C_{11}^3$ B. C_{11}^8 C. C_{11}^3 D. $-C_{11}^5$

Câu 5. Tổng của số hạng thứ 4 trong khai triển $(5a-1)^5$ và số hạng thứ 5 trong khai triển $(2a-3)^6$ là:

- A. $4160a^2$ B. $-4610a^2$ C. $4610a^2$ D. $4620a^2$

Câu 6. Tổng số $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n$ có giá trị bằng:

- A. 0 nếu n chẵn B. 0 nếu n lẻ
C. 0 nếu n hữu hạn D. 0 trong mọi trường hợp

Câu 7. Trong khai triển nhị thức $(1+x)^6$ xét các khẳng định sau:

- I. Gồm có 7 số hạng. II. Số hạng thứ 2 là $6x$. III. Hệ số của x^5 là 5.

Trong các khẳng định trên

- A. Chỉ I và III đúng B. Chỉ II và III đúng
C. Chỉ I và II đúng D. Cả ba đúng

Câu 8. Tìm số hạng chính giữa của khai triển $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^8$ với $x > 0$:

- A. $56x^{-\frac{1}{4}}$ B. $70x^{\frac{1}{3}}$ C. $70x^{\frac{1}{3}}$ và $56x^{-\frac{1}{4}}$ D. $70.\sqrt[3]{x}.\sqrt[4]{x}$.

Câu 9. Xét khai triển $\left(\frac{\sqrt{2^{x-1}}}{\sqrt[3]{2}} + \sqrt[4]{4.2^{\frac{x}{2}}}\right)^m$. Gọi C_m^1, C_m^3 là hệ số của số hạng thứ 2 và thứ 4. Tìm m sao

cho: $\lg(3C_m^3) - \lg(C_m^1) = 1$. A. 7 B. 6 C. 1 D. 2

Câu 10. Nếu bốn số hạng đầu của một hàng trong tam giác Pascal được ghi lại là:

1 16 120 560

Khi đó 4 số hạng đầu của hàng kế tiếp là:

- | | | | | | | | |
|------|----|-----|------|------|----|-----|-----|
| A. 1 | 32 | 360 | 1680 | B. 1 | 18 | 123 | 564 |
| C. 1 | 17 | 137 | 697 | D. 1 | 17 | 136 | 680 |

Câu 11. Trong khai triển $\left(3x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ hệ số của x^3 là: $3^4 C_n^5$ giá trị của n là:

- A. 15 B. 12 C. 9 D. Kết quả khác

Câu 12. Giá trị của tổng $A = C_7^1 + C_7^2 + \dots + C_7^7$ bằng:

- A. 255 B. 63 C. 127 D. 31

Câu 13. Nếu $A_x^2 = 110$ thì:

- A. $x = 11$ B. $x = 10$ C. $x = 11$ và $x = 10$ D. $x = 0$

Câu 14. Trong khai triển $(x-2)^{100} = a_0 + a_1x^1 + \dots + a_{100}x^{100}$. Tổng hệ số: $a_0 + a_1 + \dots + a_{100}$.

- A. -1 B. 1 C. 3^{100} D. 2^{100}

Câu 15. Trong khai triển $(2a-b)^5$, hệ số của số hạng thứ 3 bằng:

- A. 80 B. -10 C. 10 D. -80

Câu 16. Cho $A = C_n^0 + 5C_n^1 + 5^2C_n^2 + \dots + 5^nC_n^n$. Vậy $A =$

- A. 7^n B. 5^n C. 6^n D. 4^n

Câu 17. Trong khai triển $(x-2)^{100} = a_0 + a_1x^1 + \dots + a_{100}x^{100}$. Hệ số a_{97} là:

- A. $1.293.600$ B. $-1.293.600$ C. $-2^{97}C_{100}^{97}$ D. $(-2)^{98}C_{100}^{98}$

Câu 18. Trong khai triển $(0,2 + 0,8)^5$, số hạng thứ tư là:

- A. $0,2048$ B. $0,0064$ C. $0,0512$ D. $0,4096$

Câu 19. Trong khai triển nhị thức $(a+2)^{n+6}$ ($n \in \mathbb{N}$). Có tất cả 17 số hạng. Vậy n bằng:

- A. 10 B. 17 C. 11 D. 12

Câu 20. Tìm hệ số chứa x^9 trong khai triển

$$(1+x)^9 + (1+x)^{10} + (1+x)^{11} + (1+x)^{12} + (1+x)^{13} + (1+x)^{14} + (1+x)^{15}.$$

- A. 3000 B. 8008 C. 3003 D. 8000

Câu 21. Trong khai triển $(x-\sqrt{y})^{16}$, hai số hạng cuối là:

- A. $-16x\sqrt{y^{15}} + y^8$ B. $-16x\sqrt{y^{15}} + y^4$ C. $-16xy^{15} + y^4$ D. $-16xy^{15} + y^8$

Câu 22. Tìm số nguyên dương bé nhất n sao cho trong khai triển $(1+x)^n$ có hai hệ số liên tiếp có tỉ số là

$\frac{7}{15}$. A. 20 B. 21 C. 22 D. 23

Câu 23. Trong khai triển $(2x-1)^{10}$, hệ số của số hạng chứa x^8 là

- A. 11520 B. -11520 C. 256 D. 45

Câu 24. Số hạng thứ 3 trong khai triển $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^n$ không chứa x . Tìm x biết rằng số hạng này bằng số

hạng thứ hai của khai triển $(1+x^3)^{30}$.

- A. -2 B. 1 C. -1 D. 2

Câu 25. Trong khai triển $(1+x)^n$ biết tổng các hệ số $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1} = 126$. Hệ số của x^3 bằng:

- A. 15 B. 21 C. 35 D. 20

Câu 26. Có bao nhiêu số hạng hữu tỉ trong khai triển $(\sqrt{10} + \sqrt[8]{3})^{300}$.

- A. 37 B. 38 C. 36 D. 39

Câu 27. Hệ số của x^7 trong khai triển của $(3-x)^9$ là

- A. C_9^7 B. $9C_9^7$ C. $-9C_9^7$ D. $-C_9^7$

Câu 28. Hệ số của x^5 trong khai triển của $(1+x)^{12}$ là

- A. 820 B. 210 C. 792 D. 220

Câu 29. Trong khai triển $(a - 2b)^8$, hệ số của số hạng chứa $a^4.b^4$ là

A. 1120

B. 560

C. 140

D. 70

Câu 30. Hệ số của x^7 trong khai triển của $(2 - 3x)^{15}$ là

A. $C_{15}^7 \cdot 2^7 \cdot 3^7$

B. C_{15}^8

C. $C_{15}^8 \cdot 2^8$

D. $-C_{15}^8 \cdot 2^8 \cdot 3^7$

Câu 31. $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \dots + C_{2n}^{2n}$. Bằng:

A. 2^{n-2}

B. 2^{n-1}

C. 2^{2n-2}

D. 2^{2n-1}

Câu 32. Cho khai triển $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 3\right)^n$. Tìm n biết tỉ số giữa số hạng thứ tư và thứ ba bằng $3\sqrt{2}$.

A. 8

B. 10

C. 6

D. 7

Câu 33. Trong bảng khai triển của nhị thức $(x - y)^{11}$, hệ số của $x^8 y^3$ là:

A. C_{11}^8

B. C_{11}^3

C. $C_{10}^7 + C_{10}^8$

D. $-C_{11}^3$

Câu 34. Tổng $T = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n$ bằng:

A. $T = 2^n$

B. $T = 4^n$

C. $T = 2^n + 1$

D. $T = 2^n - 1$

Câu 35. Nghiệm của phương trình $A_x^{10} + A_x^9 = 9A_x^8$ là

A. $x = 5$

B. $x = 11$

C. $x = 11$ và $x = 5$

D. $x = 10$ và $x = 2$

Câu 36. Ba số hạng đầu tiên theo lũy thừa tăng dần của x trong khai triển của $(1 + 2x)^{10}$ là:

A. $1, 45x, 120x^2$

B. $1, 4x, 4x^2$

C. $1, 20x, 180x^2$

D. $10, 45x, 120x^2$

Câu 37. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $P(x) = (x + 1)^6 + (x + 1)^7 + \dots + (x + 1)^{12}$.

A. 1711

B. 1287

C. 1716

D. 1715

Câu 38. Cho khai triển $(1 + 2x)^n = a_0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n$, trong đó $n \in \mathbb{N}^*$ các hệ số thỏa mãn hệ thức

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 4096. \text{ Tìm hệ số lớn nhất.}$$

A. 1293600

B. 126720

C. 924

D. 792

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Chọn đáp án C

Xét khai triển $(x + 1)^{2016} = C_{2016}^0 + C_{2016}^1 x + C_{2016}^2 x^2 + \dots + C_{2016}^{2016} x^{2016}$.

Cho $x = 1$ ta có: $C_{2016}^0 (1)^0 + C_{2016}^1 (1)^1 + \dots + C_{2016}^{2016} (1)^{2016} = 2^{2016}$

$$\Rightarrow C_{2016}^1 + C_{2016}^2 + C_{2016}^3 + \dots + C_{2016}^{2016} = 2^{2016} - C_{2016}^0 = 2^{2016} - 1.$$

Câu 2. Chọn đáp án D

$$\text{Ta có } (1 + 3x)^{20} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k (3x)^k (1)^{20-k} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k \cdot 3^k \cdot x^k$$

Số hạng đứng chính giữa ứng với $k = 10$.

Suy ra hệ số của số hạng đứng chính giữa là $C_{30}^{10} \cdot 3^{10}$.

Câu 3. Chọn đáp án D

$$\text{Ta có: } (1 + x)^{3n} = \sum_{k=0}^{3n} C_{3n}^k x^k.$$

Chọn $x = 1$. Ta có tổng hệ số bằng: $C_{3n}^0 + C_{3n}^1 + \dots + C_{3n}^{3n} = 2^{3n} = 64 \Rightarrow n = 2$.

Ta có: $\left(2nx + \frac{1}{2nx^2}\right)^{3n} = \sum_{k=0}^{3n} C_{3n}^k (2nx)^{3n-k} \left(\frac{1}{2nx^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{3n} C_{3n}^k (2n)^{3n-2k} x^{3n-3k}$

Số hạng không chứa x suy ra $x^{3n-3k} = x^0 \Leftrightarrow n = k = 2$.

Do đó số hạng không chứa x là: $C_6^2 \cdot (4)^2 = 240$.

Câu 4. Chọn đáp án A

Ta có $(x - y)^{11} = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k x^{11-k} (-y)^k = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k (-1)^k x^{11-k} y^k$.

Số hạng chứa $x^8 y^3$ ứng với $\begin{cases} 11-k=8 \\ k=3 \end{cases} \Leftrightarrow k=3$.

Suy ra hệ số của số hạng chứa $x^8 y^3$ là $C_{11}^3 \cdot (-1)^3 = -C_{11}^3$.

Câu 5. Chọn đáp án C

Ta có $(5a - 1)^5 = \sum_{k=0}^5 C_5^k (5a)^{5-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^5 C_5^k (-1)^k 5^{5-k} a^{5-k}$. Số hạng thứ tư trong khai triển $(5a - 1)^5$

ứng với $k=3 \Rightarrow$ Số hạng thứ tư sẽ là $C_5^3 (-1)^3 5^{5-3} a^{5-3} = -250a^2$.

Mặt khác $(2a - 3)^6 = \sum_{k=0}^6 C_6^k (2a)^{6-k} (-3)^k = \sum_{k=0}^6 C_6^k 2^{6-k} (-3)^k a^{6-k}$. Số hạng thứ 5 trong khai triển

$(2a - 3)^6$ ứng với $k=4 \Rightarrow$ Số hạng thứ năm sẽ là $C_6^4 \cdot 2^{6-4} \cdot (-3)^4 a^{6-4} = 4860a^2$.

Suy ra tổng hai số hạng sẽ bằng $-250a^2 + 4860a^2 = 4610a^2$.

Câu 6. Chọn đáp án D

Ta có $(x - 1)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - \dots + (-1)^n C_n^n x^n$

Cho $x = 1 \Rightarrow 0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n$.

Câu 7. Chọn đáp án C

Ta có $(1 + x)^6 = \sum_{k=0}^6 C_6^k (1)^{6-k} x^k = \sum_{k=0}^6 C_6^k x^k$. Suy ra

- Nhị thức $(1 + x)^6$ gồm 7 số hạng.
- Số hạng thứ 2 là $C_6^1 x^1 = 6x$.
- Hệ số của x^5 là $C_6^5 = 6$.

Suy ra I và II đúng.

Câu 8. Chọn đáp án B

Ta có $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^8 = \sum_{k=0}^8 C_8^k \left(\sqrt[3]{x}\right)^{8-k} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^k = \sum_{k=0}^8 C_8^k (x)^{\frac{8}{3} - \frac{7k}{12}}$.

Số hạng chính giữa ứng với $k=4 \Rightarrow$ Số hạng chính giữa là $C_8^4 (x)^{\frac{8}{3} - \frac{4 \cdot 7}{12}} = 70x^{\frac{1}{3}}$.

Câu 9. Chọn đáp án B

Ta có $\log(3C_m^3) - \log(C_m^1) = 1 \Leftrightarrow \log \frac{3C_m^3}{C_m^1} = 1 \Leftrightarrow \frac{3C_m^3}{C_m^1} = 10 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{m(m-1)(m-2)}{6m} = 10 \Leftrightarrow m = 6$.

Câu 10. Chọn đáp án D

4 số hạng tiếp theo của tam giác Pascal là:

1

1 + 16 = 17

16 + 120 = 126

120 + 560 = 680

Câu 11. Chọn đáp án C

$$\text{Xét khai triển } \left(3x^2 + \frac{1}{x}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot (3x^2)^k \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot 3^k \cdot x^{2k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot 3^k \cdot x^{3k-n}$$

$$\text{Vì hệ số của } x^3 \text{ trong khai triển là } 3^4 C_n^5 \text{ suy ra } \begin{cases} 3^k C_n^k = 3^4 C_n^5 \\ 3k - n = 3 \end{cases} \Leftrightarrow 3^{\frac{n+3}{3}} C_n^{\frac{n+3}{3}} = 3^4 C_n^5 \xrightarrow{\text{casio}} n = 9.$$

Câu 12. Chọn đáp án C

$$\text{Xét khai triển } (x+1)^n = C_n^0 + x.C_n^1 + x^2.C_n^2 + \dots + x^n.C_n^n \quad (*).$$

$$\text{Với } x=1, n=7 \text{ thay vào biểu thức } (*) \text{ ta được } 2^7 = C_7^0 + C_7^1 + C_7^2 + \dots + C_7^7 \rightarrow A = 2^7 - 1 = 127.$$

Câu 13. Chọn đáp án A

$$\text{Ta có } A_x^2 = 100 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \frac{x!}{(x-2)!} = 110 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x(x-1) = 110 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - x - 110 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 11.$$

Câu 14. Chọn đáp án B

$$\text{Cho } x=1, \text{ ta được } (1-2)^{100} = a_0 + a_1 + \dots + a_{100} \rightarrow a_0 + a_1 + \dots + a_{100} = (-1)^{100} = 1.$$

Câu 15. Chọn đáp án A

$$\text{Ta có } (2a-b)^5 = \sum_{k=0}^5 C_5^k \cdot (2a)^k \cdot (-b)^{5-k}.$$

$$\text{Hệ số của số hạng thứ 3 } \Rightarrow k=3 \Rightarrow \text{hệ số cần tìm là } C_5^3 \cdot 2^3 \cdot (-1)^2 = 80.$$

Câu 16. Chọn đáp án C

$$\text{Xét khai triển } (x+1)^n = \sum_n C_n^k \cdot x^k \cdot 1^{n-k} = \sum_n C_n^k \cdot x^k = C_n^0 + x.C_n^1 + x^2.C_n^2 + \dots + x^n.C_n^n \quad (*).$$

$$\text{Với } x=5, \text{ thay vào biểu thức } (*) \text{ ta được } A = (5+1)^n = 6^n.$$

Câu 17. Chọn đáp án A

$$\text{Xét khai triển } (x-2)^{100} = \sum_{100} C_{100}^k \cdot x^k \cdot (-2)^{100-k}.$$

$$\text{Hệ số của } a_{97} \text{ ứng với } k=97 \text{ suy ra } a_{97} = C_{100}^{97} \cdot (-2)^3 = 1\,293\,600.$$

Câu 18. Chọn đáp án C

$$\text{Xét khai triển } (0,2+0,8)^5 = \sum_5 C_5^k \cdot (0,2)^k \cdot (0,8)^{5-k}.$$

$$\text{Số hạng thứ 4 của khai triển ứng với } k=3 \Rightarrow a_4 = C_5^3 \cdot (0,2)^3 \cdot (0,8)^2 = 0,0512.$$

Câu 19. Chọn đáp án C

Chú ý: Số các số hạng của khai triển mũ m là $m+1$.

$$\text{Vậy khai triển } (a+2)^{n+6} \text{ có tất cả 17 số hạng suy ra } n+6=17 \Leftrightarrow n=11.$$

Câu 20. Chọn đáp án B

$$\text{Hệ số chứa } x^9 \text{ là } C_9^9 + C_{10}^9 + C_{11}^9 + C_{12}^9 + C_{13}^9 + C_{14}^9 + C_{15}^9 = 8008.$$

Câu 21. Chọn đáp án A

$$(x-\sqrt{y})^{16} = \sum_{k=0}^{16} C_{16}^k x^{16-k} (-1)^k y^{\frac{k}{2}} \Rightarrow -C_{16}^{15} x y^{\frac{15}{2}} + C_{16}^{16} y^8 = -16x\sqrt{y^{15}} + y^8 \text{ là hai số hạng cuối cùng.}$$

Câu 22. Chọn đáp án B

$$(1+x)^n \Rightarrow \frac{C_n^{k+1}}{C_n^k} = \frac{7}{15} \Rightarrow \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \cdot \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{7}{15}$$

$$\Rightarrow 15(k+1) = 7(n-k) \Rightarrow 7n = 15 + 22k. \text{ Ta có: } k+1 \vdots 7 \Rightarrow k_{\min} = 6 \Rightarrow n_{\min} = 21.$$

Câu 23. Chọn đáp án A

$$(2x-1)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (2x)^{10-k} (-1)^k \Rightarrow 10-k=8 \Rightarrow k=2 \Rightarrow 2^8 C_{10}^2 = 11520.$$

Câu 24. Chọn đáp án D

$$\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (2x)^{n-k} (x^{-2})^k.$$

$$\text{Số hạng thứ ba tương ứng với } k=2 \Rightarrow n-2-2 \cdot 2=0 \Rightarrow n=6 \Rightarrow C_6^2 2^4.$$

$$\text{Số hạng này bằng số hạng thứ hai của } (1+x^3)^{30} \text{ suy ra } (1+x^3)30 \Rightarrow C_{30}^1 x^3 = C_6^2 2^4 \Rightarrow x=2.$$

Câu 25. Chọn đáp án C

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \Rightarrow 2^n = 1 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1} + 1 \Rightarrow 2^n - 2 = 126 \Rightarrow n=7.$$

$$\text{Hệ số cần tìm là } C_7^3 = 35.$$

Câu 26. Chọn đáp án A

$$(\sqrt{10} + \sqrt[8]{3})^{300} = \sum_{k=0}^{300} C_{300}^k 10^{\frac{k}{2}} \cdot 3^{\frac{300-k}{8}}.$$

$$\text{Số hạng hữu tỷ cần có } k=2t, t \in \mathbb{N}; 300-2t \vdots 8 \Rightarrow 150-t \vdots 4 \Rightarrow \begin{cases} 158-t=4l \\ 150-t \vdots 4 \end{cases} \Rightarrow 4l \leq 150 \Rightarrow l \leq 37.$$

Câu 27. Chọn đáp án C

$$(3-x)^9 = \sum_{k=0}^9 C_9^k 3^{9-k} (-x)^k \Rightarrow k=7 \Rightarrow C_9^7 \cdot 3^2 \cdot (-1)^7 = -324 \text{ là hệ số cần tìm.}$$

Câu 28. Chọn đáp án C

$$\text{Hệ số cần tìm là } C_{12}^5 = 792.$$

Câu 29. Chọn đáp án D

$$(a-2b)^8 = \sum_{k=0}^8 C_8^k a^{8-k} (-2b)^k \Rightarrow 8-k=k=4 \Rightarrow k=4 \Rightarrow C_8^4 = 70.$$

Câu 30. Chọn đáp án D

$$\text{Ta có } (2-3x)^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k 2^k \cdot (-3x)^{15-k}.$$

$$\text{Hệ số của } x^7 \Rightarrow 15-k=7 \Rightarrow k=8 \Rightarrow \text{hệ số cần tìm là } C_{15}^8 \cdot 2^8 \cdot (-3)^7 = -C_{15}^8 \cdot 2^8 \cdot 3^7.$$

Câu 31. Chọn đáp án D

$$\text{Ta có } (1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \dots + C_{2n}^{2n} x^{2n}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1+1)^{2n} = 2^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n} \\ (1-1)^{2n} = 0 = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - \dots + C_{2n}^{2n} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n}) = 2^{2n} + 0 \Rightarrow C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n} = 2^{2n-1}.$$

Câu 32. Chọn đáp án D

Ta có $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 3\right)^n = \left(3 + 2^{\frac{1}{2}}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot 3^k \cdot \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{n-k}$.

Bài ra thì $\frac{C_n^4 \cdot 3^4 \cdot \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{n-4}}{C_n^3 \cdot 3^3 \cdot \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{n-3}} = 3\sqrt{2} \Rightarrow \frac{3n!}{(n-4)! \cdot 4!} \cdot \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = 3\sqrt{2} \Rightarrow \frac{3(n-3)}{4} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow n = 7$.

Câu 33. Chọn đáp án A

Ta có $(x-y)^{11} = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k x^k \cdot (-y)^{11-k}$.

Hệ số của $x^8 y^3 \Rightarrow k=8 \Rightarrow$ hệ số cần tìm là C_{11}^8 .

Câu 34. Chọn đáp án A

Ta có $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n \Rightarrow (1+1)^n = 2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$.

Câu 35. Chọn đáp án C

Ta có $\frac{x!}{(x-10)!} + \frac{x!}{(x-9)!} = 9 \cdot \frac{x!}{(x-8)!} \Rightarrow (n-8)(n-9) + (n-8) = 9 \Rightarrow \begin{cases} n=11 \\ n=5 \end{cases}$.

Câu 36. Chọn đáp án C

Ta có $(1+2x)^{10} = C_{10}^0 + C_{10}^1 (2x) + C_{10}^2 (2x)^2 + \dots + C_{10}^{10} (2x)^{10}$.

Ba số hạng cần tìm là $C_{10}^0; C_{10}^1 (2x); C_{10}^2 (2x)^2$.

Câu 37. Chọn đáp án D

Ta có $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$.

Hệ số cần tìm là $C_6^5 + C_7^5 + \dots + C_{12}^5 = 1715$.

Câu 38. Chọn đáp án B

Chọn $x = \frac{1}{2}$, ta có $\left(1 + 2 \cdot \frac{1}{2}\right)^n = a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 4096 \Leftrightarrow 2^n = 4096 \Leftrightarrow n = 12$.

Xét khai triển $(1+2x)^{12} = (2x+1)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k (2x)^k = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k (2x)^k = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \cdot 2^k \cdot x^k$

Suy ra hệ số của x^k trong khai triển là $a_k = C_{12}^k \cdot 2^k$.

Hệ số lớn nhất khi và chỉ khi $\begin{cases} a_k > a_{k+1} \\ a_k > a_{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_{12}^k \cdot 2^k > C_{12}^{k+1} \cdot 2^{k+1} \\ C_{12}^k \cdot 2^k > C_{12}^{k-1} \cdot 2^{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_{12}^k > 2 \cdot C_{12}^{k+1} \\ 2 \cdot C_{12}^k > C_{12}^{k-1} \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

Giải (1), ta có $C_{12}^k > 2 \cdot C_{12}^{k+1} \Leftrightarrow \frac{12!}{(12-k)! \cdot k!} > \frac{2 \cdot 12!}{(11-k)! \cdot (k+1)!} \Leftrightarrow \frac{1}{12-k} > \frac{2}{k+1} \Leftrightarrow k > \frac{23}{3}$.

Giải (2), ta có $2 \cdot C_{12}^k > C_{12}^{k-1} \Leftrightarrow \frac{2 \cdot 12!}{(12-k)! \cdot k!} > \frac{12!}{(13-k)! \cdot (k-1)!} \Leftrightarrow \frac{2}{k} > \frac{1}{13-k} \Leftrightarrow k < \frac{26}{3}$.

Vậy $k \in \left(\frac{23}{3}; \frac{26}{3}\right) \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 8$, suy ra hệ số lớn nhất là $a_8 = C_{12}^8 \cdot 2^8 = 126720$.

2-Bài tập - Trắc nghiệm Nhị thức Niu-ton 2 :

Câu 1. Tìm hệ số của x^{12} trong khai triển $(2x-x^2)^{10}$.

A. C_{10}^8 .

B. $C_{10}^2 2^8$.

C. C_{10}^2 .

D. $-C_{10}^2 2^8$.

Câu 2. Khai triển đa thức $P(x) = (5x-1)^{2007}$ ta được

$$P(x) = a_{2007}x^{2007} + a_{2006}x^{2006} + \dots + a_1x + a_0.$$

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a_{2000} = -C_{2007}^7 \cdot 5^7$.

B. $a_{2000} = C_{2007}^7 \cdot 5^7$.

C. $a_{2000} = -C_{2007}^{2000} \cdot 5^{2000}$.

D. $a_{2000} = C_{2007}^{2000} \cdot 5^{2000}$.

Câu 3. Đa thức $P(x) = 32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1$ là khai triển của nhị thức nào dưới đây?

A. $(1-2x)^5$.

B. $(1+2x)^5$.

C. $(2x-1)^5$.

D. $(x-1)^5$.

Câu 4. Tìm số hạng chứa x^7 trong khai triển $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{13}$.

A. $-C_{13}^4 x^7$.

B. $-C_{13}^3$.

C. $-C_{13}^3 x^7$.

D. $C_{13}^3 x^7$.

Câu 5. Tìm số hạng chứa x^3 trong khai triển $\left(x + \frac{1}{2x}\right)^9$.

A. $-\frac{1}{8}C_9^3 x^3$.

B. $\frac{1}{8}C_9^3 x^3$.

C. $-C_9^3 x^3$.

D. $C_9^3 x^3$.

Câu 6. Tìm số hạng chứa x^{31} trong khai triển $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40}$.

A. $-C_{40}^{37} x^{31}$.

B. $C_{40}^{37} x^{31}$.

C. $C_{40}^2 x^{31}$.

D. $C_{40}^4 x^{31}$.

Câu 7. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^6$.

A. $2^4 C_6^2$.

B. $2^2 C_6^2$.

C. $-2^4 C_6^4$.

D. $-2^2 C_6^4$.

Câu 8. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(xy^2 - \frac{1}{xy}\right)^8$.

A. $70y^4$.

B. $60y^4$.

C. $50y^4$.

D. $40y^4$.

Câu 9. Tìm số hạng chứa $x^3 y$ trong khai triển $\left(xy + \frac{1}{y}\right)^5$.

A. $3x^3 y$.

B. $5x^3 y$.

C. $10x^3 y$.

D. $4x^3 y$.

Câu 10. Tìm hệ số của x^6 trong khai triển $\left(\frac{1}{x} + x^3\right)^{3n+1}$ với $x \neq 0$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn

$$3C_{n+1}^2 + nP_2 = 4A_n^2.$$

A. $210x^6$.

B. $120x^6$.

C. 120 .

D. 210 .

Câu 11. Tìm hệ số của x^9 trong khai triển $(1 - \sqrt{3}x)^{2n}$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn $\frac{2}{C_n^2} + \frac{14}{3C_n^3} = \frac{1}{n}$.

A. $-C_{18}^9 (\sqrt{3})^9$.

B. $-C_{18}^9 (\sqrt{3})^9 x^9$.

C. $C_{18}^9 (\sqrt{3})^9 x^9$.

D. $C_{18}^9 (\sqrt{3})^9$.

Câu 12. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(2x - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{2n}$ với $x \neq 0$, biết n là số nguyên dương thỏa

$$\text{mãn } C_n^3 + 2n = A_{n+1}^2.$$

A. $-C_{16}^{12} \cdot 2^4 \cdot 3^{12}$.

B. $C_{16}^0 \cdot 2^{16}$.

C. $C_{16}^{12} \cdot 2^4 \cdot 3^{12}$.

D. $C_{16}^{16} \cdot 2^0$.

Câu 13. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển $\left(3x^2 - \frac{2}{x}\right)^n$ với $x \neq 0$, biết hệ số của số hạng thứ ba trong khai triển bằng 1080.

A. 1080.

B. -810.

C. 810.

D. 1080.

Câu 14. Tìm số tự nhiên n , biết hệ số của số hạng thứ 3 theo số mũ giảm dần của x trong khai triển $\left(x - \frac{1}{3}\right)^n$ bằng 4.

A. 8.

B. 17.

C. 9.

D. 4.

Câu 15. Tìm số hạng đứng giữa trong khai triển $(x^3 + xy)^{21}$.

A. $C_{21}^{10} x^{40} y^{10}$.

B. $C_{21}^{10} x^{43} y^{10}$.

C. $C_{21}^{11} x^{41} y^{11}$.

D. $C_{21}^{10} x^{43} y^{10}; C_{21}^{11} x^{41} y^{11}$.

Câu 16. Tính tổng S tất cả các hệ số trong khai triển $(3x - 4)^{17}$.

A. $S = 1$.

B. $S = -1$.

C. $S = 0$.

D. $S = 8192$.

Câu 17. Khai triển đa thức $P(x) = (2x - 1)^{1000}$ ta được

$$P(x) = a_{1000} x^{1000} + a_{999} x^{999} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a_{1000} + a_{999} + \dots + a_1 = 2^n$.

B. $a_{1000} + a_{999} + \dots + a_1 = 2^n - 1$.

C. $a_{1000} + a_{999} + \dots + a_1 = 1$.

D. $a_{1000} + a_{999} + \dots + a_1 = 0$.

Câu 18. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $P(x) = x(1 - 2x)^5 + x^2(1 + 3x)^{10}$.

A. 80.

B. 3240.

C. 3320.

D. 259200.

Câu 19. Tìm hệ số chứa x^{10} trong khai triển $f(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + x + 1\right)^2 (x + 2)^{3n}$ với n là số tự nhiên thỏa mãn hệ thức $A_n^3 + C_n^{n-2} = 14n$.

A. $2^5 C_{19}^{10}$.

B. $2^5 C_{19}^{10} x^{10}$.

C. $2^9 C_{19}^{10}$.

D. $2^9 C_{19}^{10} x^{10}$.

Câu 20. Tìm hệ số của x^4 trong khai triển $P(x) = (1 - x - 3x^3)^n$ với n là số tự nhiên thỏa mãn hệ thức $C_n^{n-2} + 6n + 5 = A_{n+1}^2$.

A. 210.

B. 840.

C. 480.

D. 270.

Câu 21. Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển $(1 + x + x^2 + x^3)^5$.

A. 5.

B. 50.

C. 101.

D. 105.

Câu 22. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $P(x) = (1 + x) + 2(1 + x)^2 + \dots + 8(1 + x)^8$.

A. 630.

B. 635.

C. 636.

D. 637.

Câu 23. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \dots + C_{2n}^n = C_{2n}^{n+1} + C_{2n}^{n+2} + \dots + C_{2n}^{2n}$.

B. $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \dots + C_{2n}^{n-1} = C_{2n}^{n+1} + C_{2n}^{n+2} + \dots + C_{2n}^{2n}$.

C. $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \dots + C_{2n}^{n-2} = C_{2n}^{n+1} + C_{2n}^{n+2} + \dots + C_{2n}^{2n}$.

D. $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \dots + C_{2n}^{n+1} = C_{2n}^{n+1} + C_{2n}^{n+2} + \dots + C_{2n}^{2n}$.

Câu 24. Tính tổng $S = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$.

A. $S = 2^n - 1$.

B. $S = 2^n$.

C. $S = 2^{n-1}$.

D. $S = 2^n + 1$.

Câu 25. Tính tổng $S = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n}$.

A. $S = 2^{2n}$.

B. $S = 2^{2n} - 1$.

C. $S = 2^n$.

D. $S = 2^{2n} + 1$.

Câu 26. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$.

A. $n = 8$.

B. $n = 9$.

C. $n = 10$.

D. $n = 11$.

Câu 27. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024$.

A. $n = 5$.

B. $n = 9$.

C. $n = 10$.

D. $n = 4$.

Câu 28. Tính tổng $S = C_n^0 + 3C_n^1 + 3^2 C_n^2 + \dots + 3^n C_n^n$.

A. $S = 3^n$.

B. $S = 2^n$.

C. $S = 3 \cdot 2^n$.

D. $S = 4^n$.

Câu 29. Khai triển đa thức $P(x) = (1 + 2x)^{12} = a_0 + a_1 x + \dots + a_{12} x^{12}$. Tìm hệ số a_k ($0 \leq k \leq 12$) lớn nhất trong khai triển trên.

A. $C_{12}^8 2^8$.

B. $C_{12}^9 2^9$.

C. $C_{12}^{10} 2^{10}$.

D. $1 + C_{12}^8 2^8$.

Câu 30. Khai triển đa thức $P(x) = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{10} = a_0 + a_1 x + \dots + a_9 x^9 + a_{10} x^{10}$. Tìm hệ số a_k ($0 \leq k \leq 10$) lớn nhất trong khai triển trên.

A. $1 + \frac{2^7}{3^{10}} C_{10}^7$. B. $\frac{2^7}{3^{10}} C_{10}^7$. C. $\frac{2^6}{3^{10}} C_{10}^6$. D. $\frac{2^8}{3^{10}} C_{10}^8$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Tìm hệ số của x^{12} trong khai triển $(2x - x^2)^{10}$.

A. C_{10}^8 . B. $C_{10}^2 2^8$. C. C_{10}^2 . D. $-C_{10}^2 2^8$.

Lời giải. Theo khai triển nhị thức Niu-ơn, ta có

$$(2x - x^2)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (2x)^{10-k} \cdot (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (2)^{10-k} \cdot x^{10-k+2k} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (2)^{10-k} \cdot x^{10+k}.$$

Hệ số của x^{12} ứng với $10 + k = 12 \Leftrightarrow k = 2 \longrightarrow$ hệ số cần tìm $C_{10}^2 2^8$. **Chọn B.**

Câu 2. Khai triển đa thức $P(x) = (5x - 1)^{2007}$ ta được

$$P(x) = a_{2007} x^{2007} + a_{2006} x^{2006} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a_{2000} = -C_{2007}^7 \cdot 5^7$. B. $a_{2000} = C_{2007}^7 \cdot 5^7$.
C. $a_{2000} = -C_{2007}^{2000} \cdot 5^{2000}$. D. $a_{2000} = C_{2007}^7 \cdot 5^7$.

Lời giải. Theo khai triển nhị thức Niu-ơn, ta có

$$(5x - 1)^{2007} = \sum_{k=0}^{2007} C_{2007}^k (5x)^{2007-k} \cdot (-1)^k = \sum_{k=0}^{2007} C_{2007}^k (5)^{2007-k} \cdot (-1)^k \cdot x^{2007-k}.$$

Hệ số của x^{2000} ứng với $2007 - k = 2000 \Leftrightarrow k = 7$

$\longrightarrow$ hệ số cần tìm $-C_{2007}^7 (5)^{2000} = -C_{2007}^{2000} \cdot 5^{2000}$. **Chọn C.**

Câu 3. Đa thức $P(x) = 32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1$ là khai triển của nhị thức nào dưới đây?

A. $(1 - 2x)^5$. B. $(1 + 2x)^5$. C. $(2x - 1)^5$. D. $(x - 1)^5$.

Lời giải. Nhận thấy $P(x)$ có dấu đan xen nên loại đáp án B.

Hệ số của x^5 bằng 32 nên loại đáp án D và còn lại hai đáp án A và C thì chỉ có C phù hợp (vì khai triển số hạng đầu tiên của đáp án C là $32x^5$.) **Chọn C.**

Câu 4. Tìm số hạng chứa x^7 trong khai triển $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{13}$.

A. $-C_{13}^4 x^7$. B. $-C_{13}^3$. C. $-C_{13}^3 x^7$. D. $C_{13}^3 x^7$.

Lời giải. Theo khai triển nhị thức Niu-ơn, ta có

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^{13} = \sum_{k=0}^{13} C_{13}^k x^{13-k} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{13} C_{13}^k (-1)^k x^{13-2k}.$$

Hệ số của x^7 ứng với $13 - 2k = 7 \Leftrightarrow k = 3 \longrightarrow$ số hạng cần tìm $-C_{13}^3 x^7$. **Chọn C.**

Câu 5. Tìm số hạng chứa x^3 trong khai triển $\left(x + \frac{1}{2x}\right)^9$.

A. $-\frac{1}{8} C_9^3 x^3$. B. $\frac{1}{8} C_9^3 x^3$. C. $-C_9^3 x^3$. D. $C_9^3 x^3$.

Lời giải. Theo khai triển nhị thức Niu-ơn, ta có

$$\left(x + \frac{1}{2x}\right)^9 = \sum_{k=0}^9 C_9^k x^{9-k} \cdot \left(\frac{1}{2x}\right)^k = \sum_{k=0}^9 C_9^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k x^{9-2k}.$$

Hệ số của x^3 ứng với $9 - 2k = 3 \Leftrightarrow k = 3 \longrightarrow$ số hạng cần tìm $\frac{1}{8} C_9^3 x^3$. **Chọn B.**

Câu 6. Tìm số hạng chứa x^{31} trong khai triển $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40}$.

A. $-C_{40}^{37} x^{31}$. B. $C_{40}^{37} x^{31}$. C. $C_{40}^2 x^{31}$. D. $C_{40}^4 x^{31}$.

Lời giải. Theo khai triển nhị thức Niu-ơn, ta có

$$\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40} = \sum_{k=0}^{40} C_{40}^k x^{40-k} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{40} C_{40}^k x^{40-3k}.$$

Hệ số của x^{31} ứng với $40 - 3k = 31 \Leftrightarrow k = 3 \longrightarrow$ số hạng cần tìm $C_{40}^{37} x^{31}$. **Chọn B.**

Câu 7. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^6$.

- A. $2^4 C_6^2$. B. $2^2 C_6^2$. C. $-2^4 C_6^4$. D. $-2^2 C_6^4$.

Lời giải. Theo khai triển nhị thức Niu-ơn, ta có

$$\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^6 = \sum_{k=0}^6 C_6^k \cdot (x^2)^{6-k} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^6 C_6^k \cdot (2)^k \cdot x^{12-3k}.$$

Số hạng không chứa x ứng với $12 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 4$

$\longrightarrow$ số hạng cần tìm $C_6^4 \cdot 2^4 = 2^4 C_6^2$. **Chọn A.**

Câu 8. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(xy^2 - \frac{1}{xy}\right)^8$.

- A. $70y^4$. B. $60y^4$. C. $50y^4$. D. $40y^4$.

Lời giải. Theo khai triển nhị thức Niu-ơn, ta có

$$\left(xy^2 - \frac{1}{xy}\right)^8 = \sum_{k=0}^8 C_8^k \cdot (xy^2)^{8-k} \cdot \left(-\frac{1}{xy}\right)^k = \sum_{k=0}^8 C_8^k \cdot (-1)^k \cdot x^{8-2k} \cdot y^{16-3k}.$$

Số hạng không chứa x ứng với $8 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 4$

$\longrightarrow$ số hạng cần tìm $C_8^4 y^4 = 70y^4$. **Chọn A.**

Câu 9. Tìm số hạng chứa $x^3 y$ trong khai triển $\left(xy + \frac{1}{y}\right)^5$.

- A. $3x^3 y$. B. $5x^3 y$. C. $10x^3 y$. D. $4x^3 y$.

Lời giải. Theo khai triển nhị thức Niu-ơn, ta có

$$\left(xy + \frac{1}{y}\right)^5 = \sum_{k=0}^5 C_5^k \cdot (xy)^{5-k} \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^k = \sum_{k=0}^5 C_5^k \cdot x^{5-k} \cdot y^{5-2k}.$$

Hệ số của $x^3 y$ ứng với $\begin{cases} 5-k=3 \\ 5-2k=1 \end{cases} \Leftrightarrow k=2 \longrightarrow$ số hạng cần tìm $C_5^2 x^3 y = 10x^3 y$.

Chọn C.

Câu 10. Tìm hệ số của x^6 trong khai triển $\left(\frac{1}{x} + x^3\right)^{3n+1}$ với $x \neq 0$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn

$$3C_{n+1}^2 + nP_2 = 4A_n^2.$$

- A. $210x^6$. B. $120x^6$. C. 120 . D. 210 .

Lời giải. Từ phương trình $3C_{n+1}^2 + nP_2 = 4A_n^2 \longrightarrow n = 3$.

Với $n = 3$, ta có $\left(\frac{1}{x} + x^3\right)^{3n+1} = \left(\frac{1}{x} + x^3\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{10-k} \cdot (x^3)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot x^{4k-10}$.

Hệ số của x^6 ứng với $4k - 10 = 6 \Leftrightarrow k = 4 \longrightarrow$ hệ số cần tìm $C_{10}^4 = 210$. **Chọn D.**

Câu 11. Tìm hệ số của x^9 trong khai triển $(1 - \sqrt{3}x)^{2n}$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn $\frac{2}{C_n^2} + \frac{14}{3C_n^3} = \frac{1}{n}$.

- A. $-C_{18}^9 (\sqrt{3})^9$. B. $-C_{18}^9 (\sqrt{3})^9 x^9$. C. $C_{18}^9 (\sqrt{3})^9 x^9$. D. $C_{18}^9 (\sqrt{3})^9$.

Lời giải. Từ phương trình $\frac{2}{C_n^2} + \frac{14}{3C_n^3} = \frac{1}{n} \longrightarrow n = 9$.

Với $n = 9$, ta có $(1 - \sqrt{3}x)^{2n} = (1 - \sqrt{3}x)^{18} = \sum_{k=0}^{18} C_{18}^k \cdot (-\sqrt{3}x)^k = \sum_{k=0}^{18} C_{18}^k \cdot (-\sqrt{3})^k \cdot x^k$.

Hệ số của x^9 ứng với $k = 9 \longrightarrow$ hệ số cần tìm $-C_{18}^9 (\sqrt{3})^9$. **Chọn A.**

Câu 12. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(2x - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^{2n}$ với $x \neq 0$, biết n là số nguyên dương

thỏa mãn $C_n^3 + 2n = A_{n+1}^2$. A. $-C_{16}^{12} \cdot 2^4 \cdot 3^{12}$. B. $C_{16}^0 \cdot 2^{16}$. C. $C_{16}^{12} \cdot 2^4 \cdot 3^{12}$. D. $C_{16}^{16} \cdot 2^0$.

Lời giải. Từ phương trình $C_n^3 + 2n = A_{n+1}^2 \longrightarrow n = 8$.

Với $n = 8$, ta có

$$\left(2x - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{2n} = \left(2x - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16} = \sum_{k=0}^{16} C_{16}^k (2x)^{16-k} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^k = \sum_{k=0}^{16} C_{16}^k \cdot 2^{16-k} \cdot (-3)^k \cdot x^{16-\frac{4k}{3}}.$$

Số hạng không chứa x ứng với $16 - \frac{4k}{3} = 0 \Leftrightarrow k = 12$

—> số hạng cần tìm $C_{16}^{12} \cdot 2^4 \cdot 3^{12}$. **Chọn C.**

Câu 13. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển $\left(3x^2 - \frac{2}{x}\right)^n$ với $x \neq 0$, biết hệ số của số hạng thứ ba trong khai triển bằng 1080. **A.** 1080. **B.** -810. **C.** 810. **D.** 1080.

Lời giải. Theo khai triển nhị thức Niu-ơn, ta có

$$\left(3x^2 - \frac{2}{x}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (3x^2)^{n-k} \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot 3^{n-k} \cdot (-2)^k \cdot x^{2n-3k}.$$

Số hạng thứ 3 ứng với $k = 2$, kết hợp với giả thiết ta có

$$C_n^2 \cdot 3^{n-2} \cdot 4 = 1080 \Leftrightarrow n(n-1) \cdot 3^n = 4 \cdot 5 \cdot 3^5 \Leftrightarrow n = 5.$$

Hệ số của x^7 ứng với $2n - 3k = 7 \Leftrightarrow 10 - 3k = 7 \Leftrightarrow k = 1$

—> hệ số cần tìm $C_5^1 \cdot 3^4 \cdot (-2) = -810$. **Chọn B.**

Câu 14. Tìm số tự nhiên n , biết hệ số của số hạng thứ 3 theo số mũ giảm dần của x trong khai triển $\left(x - \frac{1}{3}\right)^n$ bằng 4. **A.** 8. **B.** 17. **C.** 9. **D.** 4.

Lời giải. Theo khai triển nhị thức Niu-ơn, ta có

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 \left(-\frac{1}{3}\right) x^{n-1} + C_n^2 \left(-\frac{1}{3}\right)^2 x^{n-2} + \dots + C_n^n \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

—> số hạng thứ 3 theo số mũ giảm dần của x là $C_n^2 \left(-\frac{1}{3}\right)^2 x^{n-2}$.

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow C_n^2 \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot \frac{1}{9} = 4 \longrightarrow n = 9.$$

Do $n \in \mathbb{N}$ nên ta chọn $n = 9$ thỏa mãn. **Chọn C.**

Câu 15. Tìm số hạng đứng giữa trong khai triển $(x^3 + xy)^{21}$.

$$\text{A. } C_{21}^{10} x^{40} y^{10}. \quad \text{B. } C_{21}^{10} x^{43} y^{10}. \quad \text{C. } C_{21}^{11} x^{41} y^{11}. \quad \text{D. } C_{21}^{10} x^{43} y^{10}; C_{21}^{11} x^{41} y^{11}.$$

Lời giải. Theo khai triển nhị thức Niu-ơn, ta có

$$(x^3 + xy)^{21} = \sum_{k=0}^{21} C_{21}^k (x^3)^{21-k} \cdot (xy)^k = \sum_{k=0}^{21} C_{21}^k \cdot x^{63-2k} \cdot y^k.$$

Suy ra khai triển $(x^3 + xy)^{21}$ có 22 số hạng nên có hai số hạng đứng giữa là số hạng thứ 11 (ứng với $k = 10$) và số hạng thứ 12 (ứng với $k = 11$).

Vậy hai số hạng đứng giữa cần tìm là $C_{21}^{10} x^{43} y^{10}; C_{21}^{11} x^{41} y^{11}$. **Chọn D.**

Câu 16. Tính tổng S tất cả các hệ số trong khai triển $(3x - 4)^{17}$.

$$\text{A. } S = 1. \quad \text{B. } S = -1. \quad \text{C. } S = 0. \quad \text{D. } S = 8192.$$

Lời giải. Tính tổng các hệ số trong khai triển —> cho $x = 1$.

Khi đó $S = (3 \cdot 1 - 4)^{17} = -1$. **Chọn B.**

Câu 17. Khai triển đa thức $P(x) = (2x - 1)^{1000}$ ta được

$$P(x) = a_{1000} x^{1000} + a_{999} x^{999} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

$$\text{A. } a_{1000} + a_{999} + \dots + a_1 = 2^n. \quad \text{B. } a_{1000} + a_{999} + \dots + a_1 = 2^n - 1. \\ \text{C. } a_{1000} + a_{999} + \dots + a_1 = 1. \quad \text{D. } a_{1000} + a_{999} + \dots + a_1 = 0.$$

Lời giải. Ta có $P(x) = a_{1000} x^{1000} + a_{999} x^{999} + \dots + a_1 x + a_0$.

Cho $x = 1$ ta được $P(1) = a_{1000} + a_{999} + \dots + a_1 + a_0$.

Mặt khác $P(x) = (2x-1)^{1000} \longrightarrow P(1) = (2 \cdot 1 - 1)^{1000} = 1$.

Từ đó suy ra $a_{1000} + a_{999} + \dots + a_1 + a_0 = 1 \longrightarrow a_{1000} + a_{999} + \dots + a_1 = 1 - a_0$.

Mà là số hạng không chứa x trong khai triển $P(x) = (2x-1)^{1000}$ nên

$$a_0 = C_{1000}^{1000} (2x)^0 (-1)^{1000} = C_{1000}^{1000} = 1.$$

Vậy $a_{1000} + a_{999} + \dots + a_1 = 0$. **Chọn D.**

Câu 18. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $P(x) = x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}$.

A. 80.

B. 3240.

C. 3320.

D. 259200.

Lời giải. Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$x(1-2x)^5 = x \cdot \sum_{k=0}^5 C_5^k \cdot (-2x)^{5-k} = \sum_{k=0}^5 C_5^k \cdot (-2)^{5-k} \cdot x^{6-k}.$$

$\longrightarrow$ số hạng chứa x^5 tương ứng với $6-k=5 \Leftrightarrow k=1$.

Tương tự, ta có $x^2(1+3x)^{10} = x^2 \cdot \sum_{l=0}^{10} C_{10}^l \cdot (3x)^{10-l} = \sum_{l=0}^{10} C_{10}^l \cdot 3^{10-l} \cdot x^{12-l}$.

$\longrightarrow$ số hạng chứa x^5 tương ứng với $12-l=5 \Leftrightarrow l=7$.

Vậy hệ số của x^5 cần tìm $P(x)$ là $C_5^1 \cdot (2)^4 + C_{10}^7 \cdot 3^3 = 3320$. **Chọn C.**

Câu 19. Tìm hệ số chứa x^{10} trong khai triển $f(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + x + 1\right)^2 (x+2)^{3n}$ với n là số tự nhiên thỏa mãn hệ

thức $A_n^3 + C_n^{n-2} = 14n$. A. $2^5 C_{19}^{10}$.

B. $2^5 C_{19}^{10} x^{10}$.

C. $2^9 C_{19}^{10}$.

D. $2^9 C_{19}^{10} x^{10}$.

Lời giải. Từ phương trình $A_n^3 + C_n^{n-2} = 14n \longrightarrow n = 5$.

Với $n = 5$, ta có $f(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + x + 1\right)^2 (x+2)^{3n} = \frac{1}{16}(x+2)^4 (x+2)^{15} = \frac{1}{16}(x+2)^{19}$.

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có $f(x) = \frac{1}{16}(x+2)^{19} = \frac{1}{16} \sum_{k=0}^{19} C_{19}^k \cdot 2^k \cdot x^{19-k}$.

Số hạng chứa x^{10} trong khai triển tương ứng với $19-k=10 \Leftrightarrow k=9$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển là $\frac{1}{16} C_{19}^{10} 2^9 = 2^5 C_{19}^{10}$. **Chọn A.**

Câu 20. Tìm hệ số của x^4 trong khai triển $P(x) = (1-x-3x^3)^n$ với n là số tự nhiên thỏa mãn hệ thức

$C_n^{n-2} + 6n + 5 = A_{n+1}^2$. A. 210.

B. 840.

C. 480.

D. 270.

Lời giải. Từ phương trình $C_n^{n-2} + 6n + 5 = A_{n+1}^2 \longrightarrow n = 10$.

Với $n = 10$, khi đó $P(x) = (1-x-3x^3)^n = (1-x-3x^3)^{10}$.

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$P(x) = (1-x-3x^3)^{10} = [1 - (x+3x^3)]^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (-1)^k (x+3x^3)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (-1)^k x^k (1+3x^2)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \sum_{l=0}^k C_k^l (-1)^l 3^l x^{k+2l}.$$

Số hạng chứa x^4 trong khai triển tương ứng với $\begin{cases} k+2l=4 \\ 0 \leq k \leq 10 \Leftrightarrow (k;l) = \{(4;0), (2;1)\} \\ 0 \leq l \leq k \end{cases}$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển là $C_{10}^4 C_4^0 + C_{10}^2 C_2^1 3 = 480$. **Chọn C.**

Câu 21. Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển $(1+x+x^2+x^3)^5$.

A. 5.

B. 50.

C. 101.

D. 105.

Lời giải. Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$(1+x+x^2+x^3)^5 = (1+x)^5 (1+x^2)^5 = \sum_{k=0}^5 C_5^k x^k \cdot \sum_{l=0}^5 C_5^l (x^2)^l = \sum_{k=0}^5 C_5^k \cdot \sum_{l=0}^5 C_5^l x^{k+2l}.$$

Số hạng chứa x^{10} trong khai triển tương ứng với $k+2l=10 \Leftrightarrow k=10-2l$.

$$\text{Kết hợp với điều kiện ta có hệ } \begin{cases} k+2l=10 \\ 0 \leq k \leq 5, 0 \leq l \leq 5 \Leftrightarrow (k;l) = \{(0;5), (2;4), (4;3)\} \\ k, l \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Vậy hệ số cần tìm là $C_5^0.C_5^5 + C_5^2.C_5^4 + C_5^4.C_5^3 = 101$. **Chọn C.**

Câu 22. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $P(x) = (1+x) + 2(1+x)^2 + \dots + 8(1+x)^8$.

- A. 630. B. 635. C. 636. D. 637.

Lời giải. Các biểu thức $(1+x), (1+x)^2, \dots, (1+x)^4$ không chứa số hạng chứa x^5 .

Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $5(1+x)^5$ là $5C_5^5$.

Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $6(1+x)^6$ là $6C_6^5$.

Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $7(1+x)^7$ là $7C_7^5$.

Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $8(1+x)^8$ là $8C_8^5$.

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển $P(x)$ là $5C_5^5 + 6C_6^5 + 7C_7^5 + 8C_8^5 = 636$. **Chọn C.**

Câu 23. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \dots + C_{2n}^n = C_{2n}^n + C_{2n}^{n+1} + \dots + C_{2n}^{2n}$. B. $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \dots + C_{2n}^{n-1} = C_{2n}^{n+1} + C_{2n}^{n+2} + \dots + C_{2n}^{2n}$.
C. $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \dots + C_{2n}^{n-2} = C_{2n}^{n+1} + C_{2n}^{n+2} + \dots + C_{2n}^{2n}$. D. $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \dots + C_{2n}^{n+1} = C_{2n}^{n+1} + C_{2n}^{n+2} + \dots + C_{2n}^{2n}$.

Lời giải. Áp dụng công thức $C_n^k = C_n^{n-k}$, ta có $\begin{cases} C_{2n}^0 = C_{2n}^{2n} \\ C_{2n}^1 = C_{2n}^{2n-1} \\ \dots \\ C_{2n}^{n-1} = C_{2n}^{n+1} \end{cases}$.

Cộng vế theo vế, ta được $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \dots + C_{2n}^{n-1} = C_{2n}^{n+1} + C_{2n}^{n+2} + \dots + C_{2n}^{2n}$. **Chọn B.**

Câu 24. Tính tổng $S = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$.

- A. $S = 2^n - 1$. B. $S = 2^n$. C. $S = 2^{n-1}$. D. $S = 2^n + 1$.

Lời giải. Khai triển nhị thức Niu-ton của $(1+x)^n$, ta có

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n.$$

Cho $x=1$, ta được $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$. **Chọn B.**

Câu 25. Tính tổng $S = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n}$.

- A. $S = 2^{2n}$. B. $S = 2^{2n} - 1$. C. $S = 2^n$. D. $S = 2^{2n} + 1$.

Lời giải. Khai triển nhị thức Niu-ton của $(1+x)^{2n}$, ta có

$$(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \dots + C_{2n}^{2n} x^{2n}.$$

Cho $x=1$, ta được $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n} = (1+1)^{2n} = 2^{2n}$. **Chọn A.**

Câu 26. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$.

- A. $n=8$. B. $n=9$. C. $n=10$. D. $n=11$.

Lời giải. Ta có $(1+1)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1}$. (1)

Lại có $C_{2n+1}^0 = C_{2n+1}^{2n+1}$; $C_{2n+1}^1 = C_{2n+1}^{2n}$; $C_{2n+1}^2 = C_{2n+1}^{2n-1}$; $\dots$; $C_{2n+1}^n = C_{2n+1}^{n+1}$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \dots + C_{2n+1}^n = \frac{2^{2n+1}}{2}$

$$\Leftrightarrow C_{2n+1}^1 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{2n} - 1 \Leftrightarrow 2^{20} - 1 = 2^{2n} - 1 \Leftrightarrow n = 10.$$

Vậy $n=10$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn C.**

Câu 27. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024$.

- A. $n=5$. B. $n=9$. C. $n=10$. D. $n=4$.

Lời giải. Xét khai triển $(x+1)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 x^{2n+1} + C_{2n+1}^1 x^{2n} + \dots + C_{2n+1}^{2n+1}$.

Cho $x=1$, ta được $2^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1}$. (1)

Cho $x=-1$, ta được $0 = -C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 - \dots + C_{2n+1}^{2n+1}$. (2)

Cộng (1) và (2) về theo về, ta được

$$2^{2n+1} = 2(C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1}) \Leftrightarrow 2^{2n+1} = 2.1024 \Leftrightarrow n = 5. \text{ Chọn A.}$$

Câu 28. Tính tổng $S = C_n^0 + 3C_n^1 + 3^2C_n^2 + \dots + 3^nC_n^n$.

- A. $S = 3^n$. B. $S = 2^n$. C. $S = 3.2^n$. D. $S = 4^n$.

Lời giải. Khai triển nhị thức Niu-ơn của $(1+x)^n$, ta có

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \dots + C_n^nx^n.$$

Cho $x = 3$, ta được $C_n^0 + 3C_n^1 + 3^2C_n^2 + \dots + 3^nC_n^n = (1+3)^n = 4^n$. **Chọn D.**

Câu 29. Khai triển đa thức $P(x) = (1+2x)^{12} = a_0 + a_1x + \dots + a_{12}x^{12}$. Tìm hệ số a_k ($0 \leq k \leq 12$) lớn nhất trong khai triển trên.

- A. $C_{12}^8 2^8$. B. $C_{12}^9 2^9$. C. $C_{12}^{10} 2^{10}$. D. $1 + C_{12}^8 2^8$.

Lời giải. Khai triển nhị thức Niu-ơn của $(1+2x)^{12}$, ta có

$$(1+2x)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k (2x)^k = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k 2^k x^k.$$

Suy ra $a_k = C_{12}^k 2^k$.

$$\text{Hệ số } a_k \text{ lớn nhất khi } \begin{cases} a_k \geq a_{k+1} \\ a_k \geq a_{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^k C_{12}^k \geq 2^{k+1} C_{12}^{k+1} \\ 2^k C_{12}^k \geq 2^{k-1} C_{12}^{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{12-k} \geq \frac{2}{k+1} \\ \frac{2}{k} \geq \frac{1}{12-k+1} \end{cases}$$

$\xrightarrow[0 \leq k \leq 12]{k \in \mathbb{N}} k = 8$. Vậy hệ số lớn nhất là $a_8 = C_{12}^8 2^8$. **Chọn A.**

Câu 30. Khai triển đa thức $P(x) = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{10} = a_0 + a_1x + \dots + a_9x^9 + a_{10}x^{10}$. Tìm hệ số a_k ($0 \leq k \leq 10$) lớn nhất

trong khai triển trên. A. $1 + \frac{2^7}{3^{10}} C_{10}^7$. B. $\frac{2^7}{3^{10}} C_{10}^7$. C. $\frac{2^6}{3^{10}} C_{10}^6$. D. $\frac{2^8}{3^{10}} C_{10}^8$.

Lời giải. Khai triển nhị thức Niu-ơn của $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{10}$, ta có

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} \left(\frac{2}{3}x\right)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} \left(\frac{2}{3}\right)^k x^k.$$

Suy ra $a_k = C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} \left(\frac{2}{3}\right)^k$.

Giả sử a_k là hệ số lớn nhất, khi đó $\begin{cases} a_k \geq a_{k+1} \\ a_k \geq a_{k-1} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \geq C_{10}^{k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{10-(k+1)} \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} \\ C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \geq C_{10}^{k-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{10-(k-1)} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq \frac{19}{3} \\ k \leq \frac{22}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{19}{3} \leq k \leq \frac{22}{3} \xrightarrow[0 \leq k \leq 10]{k \in \mathbb{N}} k = 7.$$

Vậy hệ số lớn nhất là $a_7 = \frac{2^7}{3^{10}} C_{10}^7$. **Chọn B.**

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP

Câu 1: Hệ số của x^7 trong khai triển của $(3-x)^9$ là

- A. C_9^7 . B. $-C_9^7$. C. $9C_9^7$. D. $-9C_9^7$.

Câu 2: Hệ số chứa x^6 trong khai triển $(2-3x)^{10}$ là

- A. $C_{10}^6 \cdot 2^4 \cdot 3^6$. B. $-C_{10}^6 \cdot 2^4 \cdot 3^6$. C. C_{10}^6 . D. $C_{10}^6 \cdot 2^4 \cdot (-3x)^6$.

- Câu 3:** Hệ số chứa x^5 trong khai triển $(2x+3)^8$ là
A. $C_8^5 \cdot 2^5 \cdot 3^3$. **B.** $C_8^5 \cdot (2x)^5 \cdot 3^3$. **C.** $C_8^3 \cdot 2^5 \cdot 3^3$. **D.** $-C_8^5 \cdot 2^5 \cdot 3^3$.
- Câu 4:** Hệ số chứa x^4 trong khai triển $(x^2+2)^{10}$ là
A. $C_{10}^8 \cdot (x^2)^2 \cdot 2^8$. **B.** $C_{10}^6 \cdot x^4 \cdot 2^6$. **C.** $C_{10}^8 \cdot x^2 \cdot 2^8$. **D.** $C_{10}^8 \cdot 2^8$.
- Câu 5:** Hệ số chứa x^7 trong khai triển $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{13}$ là
A. $C_{13}^3 \cdot (x)^{10} \cdot \frac{1}{x^3}$. **B.** $-C_{13}^3 \cdot (x)^{10} \cdot \frac{1}{x^3}$. **C.** C_{13}^3 . **D.** $-C_{13}^3$.
- Câu 6:** Số hạng thứ 3 trong khai triển $\left(x + \frac{1}{2x}\right)^9$ là
A. $C_9^3 \cdot x^6 \cdot \frac{1}{(2x)^3}$. **B.** $C_9^3 \cdot x^6 \cdot \frac{1}{2x^3}$. **C.** $C_9^2 \cdot x^6 \cdot \frac{1}{x^3}$. **D.** $C_9^2 \cdot x^7 \cdot \frac{1}{(2x)^2}$.
- Câu 7:** Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^6$ là
A. $C_6^2 \cdot x^4 \cdot \frac{1}{x^4}$. **B.** $C_6^2 \cdot x^4 \cdot \frac{16}{x^4}$. **C.** C_6^2 . **D.** $C_6^4 \cdot x^4 \cdot \frac{1}{x^4}$.
- Câu 8:** Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{10}$ là
A. 252. **B.** -252. **C.** 525. **D.** -525.
- Câu 9:** Hệ số của $x^3 \cdot y^3$ trong khai triển biểu thức $(2x-y)^6$ là
A. $2^3 C_6^3$. **B.** $-2^2 C_6^3$. **C.** $-2^3 C_6^3$. **D.** $2^2 C_6^3$.
- Câu 10:** Hệ số của x^7 trong khai triển biểu thức $(x+2)^9$ là
A. $4 \cdot C_9^7$. **B.** $-4 \cdot C_9^2$. **C.** C_9^7 . **D.** $-C_9^2$.
- Câu 11:** Biết hệ số của x^2 trong khai triển biểu thức $(1+4x)^n$ là 3040. Số nguyên n bằng bao nhiêu?
A. 28. **B.** 24. **C.** 26. **D.** 20.
- Câu 12:** Biết $2A_n^2 + A_n^3 = 100$. Hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $(1+2x)^{2n}$ là
A. $-2^5 C_{10}^5$. **B.** $-2 C_{10}^5$. **C.** $2 C_{10}^5$. **D.** $2^5 C_{10}^5$.
- Câu 13:** Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^8$ là
A. -70. **B.** -28. **C.** 28. **D.** 70.
- Câu 14:** Hệ số của x^5 trong khai triển $(1-x)^{12}$ là?
A. 792. **B.** -792. **C.** -924. **D.** 495.
- Câu 15:** Trong khai triển $(a+b)^n$, số hạng tổng quát của khai triển là
A. $C_n^k a^{n-k} b^{n-k}$. **B.** $C_n^k a^{n-k} b^k$. **C.** $C_n^{k+1} a^{k+1} b^{n-k+1}$. **D.** $C_n^{k+1} a^{n-k+1} b^{k+1}$.
- Câu 16:** Hệ số x^2 trong khai triển $(1-2x)^{10}$ là

- A.** 45. **B.** 120. **C.** 180. **D.** -180.
- Câu 17:** Hệ số của x^{31} trong khai triển $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40}$ là
A. 1000. **B.** 9880. **C.** 9870. **D.** 9680.
- Câu 18:** Số hạng thứ tư của khai triển $(x-a)^5$ là
A. -10 . **B.** $-10x^4a$. **C.** $-10x^3a^2$. **D.** $-10x^2a^3$.
- Câu 19:** Số hạng đứng giữa của khai triển $\left(x - \frac{1}{x}\right)^8$ là
A. $70x$. **B.** $-70x$. **C.** 70 . **D.** -70 .
- Câu 20:** Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển biểu thức $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^{10}$
A. 252. **B.** $252x^{10}$. **C.** 225. **D.** 522.
- Câu 21:** Tổng các hệ số trong khai triển $(y-3)^5$ bằng
A. -16 . **B.** 32. **C.** -32 . **D.** 16.
- Câu 22:** Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển sau $f(x) = \left(4x^5 + \frac{6}{7x^9}\right)^{17}$.
A. $C_{17}^3 \cdot 4^{14} \cdot 6^3 \cdot 7^3 x^{24}$. **B.** $C_{17}^3 \cdot 4^{14} \cdot 6^3 \cdot 7^3$. **C.** $C_{17}^3 \cdot 4^{14} \cdot 6^3 \cdot 7^{-3} x^{42}$. **D.** $C_{17}^3 \cdot 4^{14} \cdot 6^3 \cdot 7^{-3}$.
- Câu 23:** Giải phương trình $3.C_x^3 + A_{x+1}^2 = 1040$.
A. $x = 12$. **B.** $x = 11$. **C.** $x = 13$. **D.** $x = 14$.
- Câu 24:** Tìm số hạng chứa x^{16} trong khai triển nhị thức sau $f(x) = \left(3x^2 + \frac{1}{6x^3}\right)^{18}$
A. $C_{18}^4 \cdot 3^4 \cdot 6^{-4} \cdot x^{16}$. **B.** $C_{18}^4 \cdot 3^{14} \cdot 6^{-4}$. **C.** $C_{18}^4 \cdot 3^{14} \cdot 6^4$. **D.** $C_{18}^4 \cdot 3^{10} \cdot 2^{-4} \cdot x^{16}$.
- Câu 25:** Hệ số của x^7 trong khai triển của $(3-x)^9$ là
A. C_9^7 . **B.** $-C_9^7$. **C.** $9C_9^7$. **D.** $-9C_9^7$.
- Câu 26:** Hệ số của x^2 trong khai triển $(1+2x)^{12}$ là
A. 264 . **B.** 180. **C.** 66 . **D.** 220 .
- Câu 27:** Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{10}$ là
A. C_{10}^4 . **B.** C_{10}^5 . **C.** $-C_{10}^5$. **D.** $-C_{10}^4$.
- Câu 28:** Hệ số của x^{12} trong khai triển $(2x-x^2)^{10}$ là
A. C_{10}^8 . **B.** $C_{10}^2 2^8$. **C.** C_{10}^2 . **D.** $-C_{10}^2 2^8$.
- Câu 29:** Hệ số của x^{12} trong khai triển $(x^2+x)^{10}$ là
A. C_{10}^8 . **B.** C_{10}^6 . **C.** $-C_{10}^2$. **D.** $C_{10}^6 2^6$.
- Câu 30:** Hệ số của x^8 trong khai triển $(x^2+2)^{10}$ là
A. C_{10}^4 . **B.** $2^6 C_{10}^4$. **C.** $2^8 C_{10}^6$. **D.** C_{10}^6 .

- Câu 31:** Tìm số hạng chứa x^{16} trong khai triển nhị thức sau $f(x) = \left(3x^2 + \frac{1}{6x^3}\right)^{18}$.
- A.** $C_{18}^4 \cdot 3^{10} \cdot 2^{-4} \cdot x^{16}$. **B.** $C_{18}^4 \cdot 3^{14} \cdot 6^{-4}$. **C.** $C_{18}^4 \cdot 3^{14} \cdot 6^4$. **D.** $C_{18}^4 \cdot 3^4 \cdot 6^{-4} \cdot x^{16}$.
- Câu 32:** Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển sau $f(x) = \left(4x^5 + \frac{6}{7x^9}\right)^{17}$.
- A.** $C_{17}^3 \cdot 4^{14} \cdot 6^3 \cdot 7^{-3} \cdot x^{42}$. **B.** $C_{17}^3 \cdot 4^{14} \cdot 6^3 \cdot 7^{-3}$. **C.** $C_{17}^3 \cdot 4^{14} \cdot 6^3 \cdot 7^3$. **D.** $C_{17}^3 \cdot 4^{14} \cdot 6^3 \cdot 7^3 \cdot x^{24}$.
- Câu 33:** Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^8$ là:
- A.** 28. **B.** 10. **C.** 70. **D.** 56.
- Câu 34:** Số hạng thứ 3 trong khai triển $(2x+1)^5$ bằng
- A.** $20x^3$. **B.** $80x^2$. **C.** $20x^2$. **D.** $80x^3$.
- Câu 35:** Cho khai triển $\left(x + \frac{1}{3}\right)^n$. Tìm n , biết hệ số của số hạng thứ 3 bằng 5.
- A.** $n = 8$. **B.** $n = 12$. **C.** $n = 10$. **D.** $n = 6$.
- Câu 36:** Hệ số của x^5 trong khai triển $(1-x)^{11}$ là
- A.** 462. **B.** -462. **C.** 264. **D.** -264.
- Câu 37:** Hệ số của x^7 trong khai triển của $(3-x)^9$ là
- A.** C_9^7 . **B.** $-C_9^7$. **C.** $9C_9^7$. **D.** $-9C_9^7$.
- Câu 38:** Cho khai triển: $(x-2)^{100}$. Hệ số của x^{95} là
- A.** $C_{100}^5 (-2)^5$. **B.** $-C_{100}^7 (-2)^5$. **C.** $C_{100}^8 (-2)^8$. **D.** $C_{100}^6 (-2)^6$.
- Câu 39:** Tìm hệ số của x^3 trong khai triển: $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^9$ là:
- A.** 3671. **B.** 6330. **C.** 4600. **D.** 4608.
- Câu 40:** Hệ số lớn nhất của khai triển: $(3x-5)^{20}$ là
- A.** $C_{20}^{12} 3^8 (-5)^{11}$. **B.** $C_{20}^{12} 3^{10} (-5)^{12}$. **C.** $C_{20}^{11} 3^9 (-5)^{11}$. **D.** $C_{20}^{12} 3^8 (-5)^{12}$.
- Câu 41:** Tìm hệ số của x^4 trong khai triển: $(1+3x+2x^3)^{10}$
- A.** 21130. **B.** 6160. **C.** 16758. **D.** 17550.
- Câu 42:** Tính tổng các hệ số của khai triển: $(5-4x)^{20}$
- A.** 1. **B.** 46. **C.** 63. **D.** 36.
- Câu 43:** Tìm hệ số độc lập với x trong khai triển: $\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^{15}$
- A.** $C_{15}^{10} 3^{10}$. **B.** $C_{15}^9 3^9$. **C.** $C_{15}^{12} 3^{10}$. **D.** $C_{15}^{11} 3^{11}$.

Câu 44: Tổng $S = C_5^0 2^5 + C_5^1 2^4 + C_5^2 2^3 + C_5^3 2^2 + C_5^4 2^1 + C_5^5$

- A.** 243. **B.** 461. **C.** 631. **D.** 362.

Câu 45: Cho khai triển: $(1+2x)^n = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$, trong đó $n \in \mathbb{N}^*$ và các hệ số thỏa mãn hệ thức: $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 4096$. Hệ số lớn nhất của khai triển là:

- A.** 126720 **B.** 112640 **C.** 253440 **D.** 506880

Câu 46: Hệ số của x^4 trong khai triển $(2x-3)^6$ là:

- A.** 2160. **B.** 9240. **C.** 480. **D.** - 2160.

Câu 47: Cho biểu thức $A = (3-x)^6$. Khai triển của biểu thức A là.

- A.** $A = C_6^0 x^6 - C_6^1 x^5 \cdot 3 + C_6^2 x^4 \cdot 3^2 - C_6^3 x^3 \cdot 3^3 + C_6^4 x^2 \cdot 3^4 - C_6^5 x \cdot 3^5 + C_6^6 3^6$.
B. $A = C_6^0 x^6 - C_6^1 x^5 \cdot 3 + C_6^2 x^3 \cdot 3^3 - C_6^4 x^2 \cdot 3^4 + C_6^4 x^2 \cdot 3^4 - C_6^5 x \cdot 3^5 + C_6^6 3^6$.
C. $A = C_6^0 x^6 - C_6^1 x^5 \cdot 3 + C_6^2 x^3 \cdot 3^3 - C_6^4 x^2 \cdot 3^4 + C_6^4 x^4 \cdot 3^4 - C_6^5 x \cdot 3^5 + C_6^6 3^6$.
D. $A = C_6^0 x^6 - C_6^1 x^5 \cdot 3 + C_6^2 x^4 \cdot 3^2 - C_6^3 x^3 \cdot 3^3 + C_6^4 x^2 \cdot 3^4 - C_6^5 x \cdot 3^5 + C_6^6 3^6$.

Câu 48: Cho biểu thức $A = (4-x)^6$. Khai triển của biểu thức A là.

- A.** $A = C_6^0 x^6 - C_6^1 x^5 \cdot 4 + C_6^2 x^4 \cdot 4^2 - C_6^3 x^2 \cdot 4^3 + C_6^4 x^2 \cdot 4^4 - C_6^5 x \cdot 4^5 + C_6^6 4^6$.
B. $A = C_6^0 x^6 - C_6^5 x^5 \cdot 4 + C_6^4 x^4 \cdot 4^2 - C_6^3 x^3 \cdot 4^3 + C_6^2 x^2 \cdot 4^4 - C_6^1 x \cdot 4^5 + C_6^0 4^6$.
C. $A = -C_6^0 4^6 + C_6^1 x \cdot 4^5 - C_6^2 x^2 \cdot 4^4 + C_6^3 x^3 \cdot 4^3 - C_6^4 x^4 \cdot 4^2 + C_6^5 x^5 \cdot 4 - C_6^6 x^6$.
D. $A = C_6^0 4^6 + C_6^1 x \cdot 4^5 + C_6^2 x^2 \cdot 4^4 + C_6^3 x^3 \cdot 4^3 + C_6^4 x^4 \cdot 4^2 + C_6^5 x^5 \cdot 4 + C_6^6 x^6$.

Câu 49: Cho biểu thức $P = \left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right)^{12}$. Số hạng tổng quát trong khai triển biểu thức trên là.

- A.** $C_{12}^k \cdot 2^k x^{6-\frac{5}{6}k} \cdot (-1)^k$. **B.** $C_{12}^k \cdot 2^k x^{6-\frac{5}{6}k}$. **C.** $C_{12}^k \cdot 2^k x^{6+\frac{5}{6}k} \cdot (-1)^k$. **D.** $-C_{12}^k \cdot 2^k x^{6-\frac{5}{6}k}$.

Câu 50: Cho biểu thức $P = (x+2)^{15}$. số hạng chứa x^{10} là.

- A.** $x^{10} C_{15}^{10}$. **B.** $32x^{10} C_{15}^5$. **C.** $-x^{10} C_{15}^{10}$. **D.** $x^{10} C_{15}^5$.

Câu 51: Cho biểu thức $P = (x-1)^{20}$. Hệ số của số hạng thứ 5 là

- A.** C_{20}^3 . **B.** $-C_{20}^4$. **C.** C_{20}^4 . **D.** C_{20}^5 .

Câu 52: Cho biểu thức $P = (2+x)^{20}$. Số hạng chứa x^{14} là.

- A.** $64x^{14} C_{20}^{14}$. **B.** $x^{14} C_{20}^{14}$. **C.** $32x^{14} C_{20}^{14}$. **D.** $-64x^{14} C_{20}^{14}$.

Câu 53: Cho biểu thức $P = (x-2)^{18}$. số hạng chứa x^9 là.

- A.** $2^9 x^9 C_{18}^9$. **B.** $2^9 x^9 C_{18}^7$. **C.** $-2^9 x^9 C_{18}^7$. **D.** $-2^9 x^9 C_{18}^9$.

Câu 54: Cho biểu thức $P = (1+x)^{20}$. số hạng chứa x^{14} là.

A. $-x^{14}C_{20}^{14}$.

B. $x^{14}C_{20}^3$.

C. $x^{14}C_{20}^{14}$.

D. $-x^{14}C_{20}^{16}$.

Câu 55: Tìm số hạng chứa x^{16} trong khai triển nhị thức sau $f(x) = \left(3x^2 + \frac{1}{6x^3}\right)^{18}$.

A. $C_{18}^4 \cdot 3^{10} \cdot 2^{-4} \cdot x^{16}$.

B. $C_{18}^4 \cdot 3^{14} \cdot 6^{-4}$.

C. $C_{18}^4 \cdot 3^{14} \cdot 6^4$.

D. $C_{18}^4 \cdot 3^4 \cdot 6^{-4} \cdot x^{16}$.

Câu 56: Hệ số của x^7 trong khai triển biểu thức $(x+2)^9$ là

A. $4 \cdot C_9^7$.

B. $-4 \cdot C_9^2$.

C. C_9^7 .

D. $-C_9^2$.

Câu 57: Hệ số của $x^3 \cdot y^3$ trong khai triển biểu thức $(2x-y)^6$ là

A. $2^3 C_6^3$.

B. $-2^2 C_6^3$.

C. $-2^3 C_6^3$.

D. $2^2 C_6^3$.

Câu 58: Cho biểu thức $P = (x+2)^{18}$. Hệ số của số hạng thứ 19 là.

A. 2^{19} .

B. 2^{16} .

C. 2^{17} .

D. 2^{18} .

Câu 59: Biết hệ số của x^2 trong khai triển biểu thức $(1+4x)^n$ là 3040. Số nguyên n bằng bao nhiêu?

A. 28.

B. 24.

C. 26.

D. 20.

Câu 60: Khai triển $(2x+1)^n = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$; ($n \in \mathbb{N}^*$).

Biết tổng các hệ số là 2187. Khi đó $a_0 + 2a_1 + a_2$ là

A. $1696x^2$.

B. -1696 .

C. 1696 .

D. 1248 .

Câu 61: Tìm hệ số chứa x^9 trong khai triển $(1+x)^9 + (1+x)^{10} + (1+x)^{11} + (1+x)^{12} + (1+x)^{14}$.

A. 8008.

B. 8000.

C. 3003.

D. 3000.

Câu 62: Tính tổng của biểu thức

$$S = 2^{10} + C_{10}^1 \cdot 2^9 \cdot 5 + C_{10}^2 \cdot 2^8 \cdot 5^2 + C_{10}^3 \cdot 2^7 \cdot 5^3 + C_{10}^4 \cdot 2^6 \cdot 5^4 + C_{10}^5 \cdot 2^5 \cdot 5^5 + C_{10}^6 \cdot 2^4 \cdot 5^6 + \\ + C_{10}^7 \cdot 2^3 \cdot 5^7 + C_{10}^8 \cdot 2^2 \cdot 5^8 + C_{10}^9 \cdot 2 \cdot 5^9 + 5^{10}$$

A. 7^{10} .

B. -3^{10} .

C. 3^{10} .

D. -7^{10} .

Câu 63: Tính tổng của biểu thức

$$S = 2^{10} - C_{10}^1 \cdot 2^9 \cdot 5 + C_{10}^2 \cdot 2^8 \cdot 5^2 - C_{10}^3 \cdot 2^7 \cdot 5^3 + C_{10}^4 \cdot 2^6 \cdot 5^4 - C_{10}^5 \cdot 2^5 \cdot 5^5 + C_{10}^6 \cdot 2^4 \cdot 5^6 + \\ - C_{10}^7 \cdot 2^3 \cdot 5^7 + C_{10}^8 \cdot 2^2 \cdot 5^8 - C_{10}^9 \cdot 2 \cdot 5^9 + 5^{10}$$

A. 23^{10} .

B. -3^{10} .

C. 3^{10} .

D. -23^{10} .

Câu 64: Tổng $S = C_{2016}^0 + C_{2016}^1 + \dots + C_{2016}^{2016}$ có kết quả bằng.

A. 2^{2014} .

B. 2^{2015} .

C. 2^{2017} .

D. 2^{2016} .

Câu 65: Tính tổng của biểu thức

$$S = 2^{10} - C_{10}^1 \cdot 2^9 \cdot 5^2 + C_{10}^2 \cdot 2^8 \cdot 5^4 - C_{10}^3 \cdot 2^7 \cdot 5^6 + C_{10}^4 \cdot 2^6 \cdot 5^8 - C_{10}^5 \cdot 2^5 \cdot 5^{10} + C_{10}^6 \cdot 2^4 \cdot 5^{12} + \\ - C_{10}^7 \cdot 2^3 \cdot 5^{14} + C_{10}^8 \cdot 2^2 \cdot 5^{16} - C_{10}^9 \cdot 2 \cdot 5^{18} + 5^{20}$$

A. $27^9 - 1$.

B. $27^9 + 1$.

C. 3^{30} .

D. 23^{10} .

Câu 66: Tìm số hạng hữu tỉ trong khai triển $(\sqrt[3]{2} + \sqrt{7})^{15}$ là

A. 27090504 và 10704020.

B. 1537402 và 1256314.

C. 13733270 và 107060590.

D. 23470380 và 2547490.

Câu 67: Tổng của biểu thức

$$S = C_{10}^0 \cdot 2^{10} + C_{10}^1 \cdot 2^9 + C_{10}^2 \cdot 2^8 + C_{10}^3 \cdot 2^7 + C_{10}^4 \cdot 2^6 + C_{10}^5 \cdot 2^5 + C_{10}^6 \cdot 2^4 + C_{10}^7 \cdot 2^3 + C_{10}^8 \cdot 2^2 + C_{10}^9 \cdot 2 \text{ là}$$

A. $3^{10} - 1$.

B. $2^{10} - 1$.

C. $3^{10} + 1$.

D. 3^{10} .

Câu 68: Cho khai triển nhị thức: $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{10} = a_0 + a_1x + \dots + a_9x^9 + a_{10}x^{10}$.

Hệ số a_k lớn nhất trong khai triển trên khi k bằng :

A. 3.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

NHỊ THỨC NEWTON

A. NHỊ THỨC NIU – TƠN

Nhi thức Niu – tơ:

$$(a+b)^n = C_n^0 + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n \quad (1)$$

Nhận xét: Ở công thức (1) ta có:

Số các hàng tử là $n + 1$

Số hạng thứ $k+1$ là $C_n^k a^{n-k} b^k$; $k=0,...,n$

Số mũ của a giảm dần từ n đến 0. Số mũ của b tăng dần từ 0 đến n nhưng tổng các số mũ của a và b trong mỗi hạng tử luôn bằng n .

Các hàng tử cách đều hàng tử đầu và hàng tử cuối có hệ số bằng nhau

Các trường hợp đặc biệt:

Khi $a = b = 1$ ta có $C_n^0 - C_n^1 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$

Khi $a=1; b=-1$ ta có $C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$

Khi $a = 1, b = x$ thì (1) có thể viết thành:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^k x^k + C_n^n x^n$$

Tam giác Pa – xcan:

$$\begin{array}{ccccccc}
 n=0 & & & & & & 1 \\
 n=1 & & & & 1 & & 1 \\
 n=2 & & & 1 & & 2 & & 1 \\
 n=3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 n=4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
 \end{array}$$

Các hệ số của tam giác Pa – xcan thỏa mãn hệ thức $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 43: Giá trị của $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn đẳng thức $C_n^6 + 3C_n^7 + 3C_n^8 + C_n^9 = 2C_{n+2}^8$ là

A. $n = 18$.

B. $n = 16$.

C. $n = 15$.

D. $n = 14$.

Câu 44: Tính giá trị của $H = C_{13}^0 - 2C_{13}^1 + 2^2 C_{13}^2 - - 2^{13} C_{13}^{13}$.

A. $H = 729$.

B. $H = 1$.

C. $H = -729$.

D. $H = -1$.

Câu 45: Tính tổng $S = 1 + 2.2 + 3.2^2 + 4.2^3 + \dots + 2018.2^{2017}$.

A. $S = 2017.2^{2018} + 1$.

B. $S = 2017.2^{2018}$.

C. $S = 2018.2^{2018} + 1$.

D. $S = 2019.2^{2018} + 1$.

Câu 46: $S_2 = C_{2011}^0 + 2^2 C_{2011}^2 + \dots + 2^{2010} C_{2011}^{2010}$

A. $\frac{3^{2011} + 1}{2}$

B. $\frac{3^{211} - 1}{2}$

C. $\frac{3^{2011} + 12}{2}$

D. $\frac{3^{2011} - 1}{2}$

- Câu 47:** Số hạng thứ 3 của khai triển $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^n$ không chứa x . Tìm x biết rằng số hạng này bằng số hạng thứ hai của khai triển $(1+x^3)^{30}$.
- A. -2 . B. 1 . C. -1 . D. 2 .
- Câu 48:** Trong khai triển $(1+x)^n$ biết tổng các hệ số $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1} = 126$. Hệ số của x^3 bằng
- A. 15 . B. 21 . C. 35 . D. 20 .
- Câu 49:** Có bao nhiêu số hạng hữu tỉ trong khai triển $(\sqrt{10} + \sqrt[8]{3})^{300}$?
- A. 37 . B. 38 . C. 36 . D. 39 .
- Câu 50:** Trong khai triển biểu thức $F = (\sqrt{3} + \sqrt[3]{2})^9$ số hạng nguyên có giá trị lớn nhất là
- A. 8 . B. 4536 . C. 4528 . D. 4520 .
- Câu 51:** Tìm hệ số có giá trị lớn nhất trong khai triển đa thức $P(x) = (2x+1)^{13} = a_0x^{13} + a_1x^{12} + \dots + a^{13}$.
- A. 8 . B. 4536 . C. 4528 . D. 4520 .
- Câu 52:** Hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển $P(x) = (3x^2 + x + 1)^{10}$ là:
- A. 1695 . B. 1485 . C. 405 . D. 360 .
- Câu 53:** Tìm số hạng chứa x^{13} trong khai triển thành các đa thức của $(x + x^2 + x^3)^{10}$ là:
- A. 135 . B. 45 . C. $135x^{13}$. D. $45x^{13}$.
- Câu 54:** Trong các đẳng thức sau đẳng thức nào sai?
- A. $S_1 = 1C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n = n2^{n-1}$.
- B. $S_2 = 1.2.C_n^1 + 2.3.C_n^2 + \dots + (n-1).n.C_n^n = (n-1).n.C_{n-2}^{k-2}$.
- C. $S_3 = 1^2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \dots + (n-1)^2C_n^{n-1} + n^2C_n^n = n(n+1)2^{n-2}$.
- D. $S_4 = \frac{C_n^0}{1} + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \dots + \frac{C_n^{n-1}}{n} + \frac{C_n^n}{n+1} = \frac{1}{n+1}(2^n - 1)$.
- Câu 55:** Tổng của ba số hạng liên tiếp lập thành cấp số cộng trong dãy số sau $C_{23}^0; C_{23}^1; \dots; C_{23}^{13}$ có giá trị là
- A. 2451570 . B. 3848222 . C. 836418 . D. 1307527 .
- Câu 56:** Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2 + \frac{1}{x} - 1\right)^{10}$ là
- A. 1951 . B. 1950 . C. 3150 . D. -360 .
- Câu 57:** Số hạng chứa x^8 trong khai triển $(x^3 - x^2 - 1)^8$ là
- A. $168x^8$. B. 168 . C. $238x^8$. D. 238 .
- Câu 58:** Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(1 + x + \frac{1}{x}\right)^n$ biết $n \geq 2$ là số nguyên dương thỏa mãn $A_n^2 - C_{n+1}^{n-2} = 14 - 14n$.

A. 73789. B. 73788. C. 72864. D. 56232.

Câu 59: Cho khai triển: $(1+x+x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n}$, $n \geq 2$ với $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ là các hệ số. Tính tổng $S = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}$ biết $\frac{a_3}{14} = \frac{a_4}{41}$.

A. $S = 3^{10}$. B. $S = 3^{12}$. C. $S = 2^{10}$. D. $S = 2^{12}$.

Câu 60: Số lớn nhất trong các số $C_{16}^0; C_{16}^1; C_{16}^2; \dots; C_{16}^{15}; C_{16}^{16}$ là

A. C_{16}^7 . B. C_{16}^6 . C. C_{16}^9 . D. C_{16}^8 .

Câu 61: Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $A_n^2 - 3C_n^{n-1} = 11n$.

Xét khai triển $P(x) = (x+2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Hệ số lớn nhất của $P(x)$ là

A. $C_{15}^5 \cdot 2^{11}$. B. $C_{15}^5 \cdot 2^{10}$. C. 252. D. 129024.

Câu 62: Giả sử $P(x) = (2x+1)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ thỏa mãn

$a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 2^{12}$. Hệ số lớn nhất trong các hệ số $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$ là

A. 126720. B. 495. C. 256. D. 591360.

Câu 63: Cho khai triển $(x+2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Tìm tất cả các giá trị của n để $\max\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\} = a_{10}$.

A. $\{29; 30; 31; 32\}$. B. 12. C. $\{12; 13; 14; 15\}$. D. 16.

Câu 64: Cho n là số nguyên dương. Gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $(x^2+1)^n(x+2)^n$. Tìm n sao cho $a_{3n-3} = 26n$.

A. $n = 10$. B. $n = 3$. C. $n = 4$. D. $n = 5$.

Câu 65: Tính tổng $S = \frac{1}{2!2017!} + \frac{1}{4!2015!} + \frac{1}{6!2013!} + \dots + \frac{1}{2016!3!} + \frac{1}{2018!}$ theo n ta được

A. $S = \frac{2^{2018} - 1}{2017!}$. B. $S = \frac{2^{2018} - 1}{2017}$. C. $S = \frac{2^{2018}}{2017!}$. D. $S = \frac{2^{2018}}{2017}$.

Câu 66: Cho số nguyên $n \geq 3$. Giả sử ta có khai triển

$(x-1)^{2n} + x(x+1)^{2n-1} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n}$. Biết $T = a_0 + a_2 + \dots + a_{2n} = 768$.

Tính a_5 .

A. $126x^5$. B. $-126x^5$. C. 126. D. -126.

Câu 67: Tìm số nguyên dương n thỏa mãn

$\frac{C_n^1}{2} - \frac{2C_n^2}{2^2} + \frac{3C_n^3}{2^3} - \dots + (-1)^{n-2} \frac{(n-1)C_n^{n-1}}{2^{n-1}} + (-1)^{n-1} \frac{nC_n^n}{2^n} = \frac{1}{32}$

A. $n = 10$. B. $n = 9$. C. $n = 8$. D. $n = 7$.

Câu 68: Cho $S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + n(n+1)(n+2)$. Kết quả biểu diễn S theo n là

A. $S = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

B. $S = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$.

C. $S = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$.

D. $S = n(n+1)(n+2)(n+3)$.

Câu 69: Trong khai triển của $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{10}$ thành đa thức

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_9x^9 + a_{10}x^{10}$, hãy tìm hệ số a_k lớn nhất ($0 \leq k \leq 10$).

A. $a_{10} = 3003 \frac{2^{10}}{3^{15}}$

B. $a_5 = 3003 \frac{2^{10}}{3^{15}}$

C. $a_4 = 3003 \frac{2^{10}}{3^{15}}$

D.

$a_9 = 3003 \frac{2^{10}}{3^{15}}$

Câu 70: Cho khai triển $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, trong đó $n \in \mathbb{N}^*$ và các hệ số thỏa

mãn hệ thức $a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 4096$. Tìm hệ số lớn nhất?

A. 1293600.

B. 126720.

C. 924.

D. 792.

Câu 71: Cho khai triển $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, trong đó $n \in \mathbb{N}^*$ và các hệ số thỏa

mãn hệ thức $a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 4096$. Tìm hệ số lớn nhất?

A. 1293600.

B. 126720.

C. 924.

D. 792.

Câu 72: Tính tổng $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2$

A. C_{2n}^n .

B. C_{2n}^{n-1} .

C. $2C_{2n}^n$.

D. C_{2n-1}^{n-1} .

Câu 73: $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \dots + C_{2n}^{2n}$ bằng

A. 2^{n-2} .

B. 2^{n-1} .

C. 2^{2n-2} .

D. 2^{2n-1} .

Câu 74: Sau khi khai triển và rút gọn, biểu thức $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{20} + \left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{10}$ có bao nhiêu số hạng?

A. 27

B. 28

C. 29

D. 32

Câu 75: Cho khai triển $(1-2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Biết

$S = |a_1| + 2|a_2| + \dots + n|a_n| = 34992$, tính giá trị của biểu thức

$P = a_0 + 3a_1 + 9a_2 + \dots + 3^n a_n$?

A. 390625

B. -78125

C. -1953125

D. 9765625

Câu 76: Cho đa thức: $P(x) = (x+1)^8 + (x+1)^9 + (x+1)^{10} + (x+1)^{11} + (x+1)^{12}$. Khai triển và rút

gọn ta được đa thức $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{12}x^{12}$. Tìm hệ số a_8 .

A. 715

B. 720

C. 700

D. 730

Câu 77: Tìm số tất cả tự nhiên n thỏa mãn $\frac{C_n^0}{1.2} + \frac{C_n^1}{2.3} + \frac{C_n^2}{3.4} + \dots + \frac{C_n^n}{(n+1)(n+2)} = \frac{2^{100} - n - 3}{(n+1)(n+2)}$

A. $n = 100$

B. $n = 98$

C. $n = 99$

D. $n = 101$

Câu 78: Một khối lập phương có độ dài cạnh là 2cm được chia thành 8 khối lập phương cạnh 1cm. Hỏi có bao nhiêu tam giác được tạo thành từ các đỉnh của khối lập phương cạnh 1cm.

- A. 2876. B. 2898. C. 2915. D. 2012.

Câu 79: Cho $u_n = -\frac{C_n^1}{2.3} + \frac{2C_n^2}{3.4} - \frac{3C_n^3}{4.5} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot C_n^n \cdot n}{(n+1)(n+2)}$. Tính $\lim(n.u_n) = ?$

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

Câu 80: Tìm n biết rằng $a_n(x-1)^n + a_{n-1}(x-1)^{n-1} + \dots + a_1(x-1) + a_0 = x^n$ đồng thời $a_1 + a_2 + a_3 = 231$.

- A. $n = 9$ B. $n = 10$ C. $n = 11$ D. $n = 12$

C. HƯỚNG DẪN GIẢI

NHỊ THỨC NEWTON

Câu 43: Giá trị của $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn đẳng thức $C_n^6 + 3C_n^7 + 3C_n^8 + C_n^9 = 2C_{n+2}^8$ là

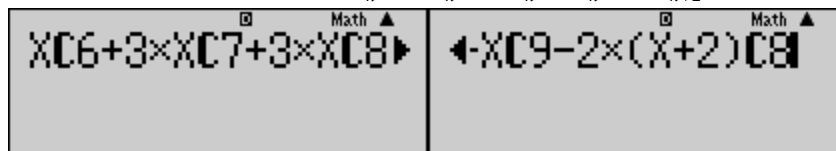
- A. $n = 18$. B. $n = 16$. C. $n = 15$. D. $n = 14$.

Hướng dẫn giải

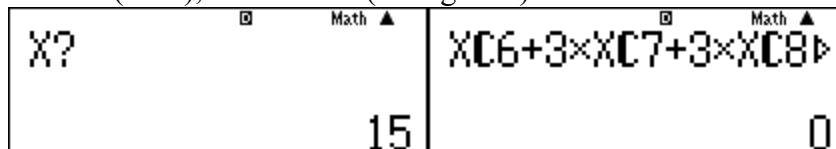
Chọn C

PP sử dụng máy tính để chọn đáp số đúng (PP trắc nghiệm):

+ Nhập PT vào máy tính: $C_n^6 + 3C_n^7 + 3C_n^8 + C_n^9 - 2C_{n+2}^8 = 0$



+ Tính (CALC) lần lượt với $X = 18$ (không thỏa); với $X = 16$ (không thỏa); với $X = 15$ (thỏa), với $X = 14$ (không thỏa)



Câu 44: Tính giá trị của $H = C_{13}^0 - 2C_{13}^1 + 2^2C_{13}^2 - \dots - 2^{13}C_{13}^{13}$.

- A. $H = 729$. B. $H = 1$. C. $H = -729$. D. $H = -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $(1-x)^{13} = C_{13}^0 - C_{13}^1x + C_{13}^2x^2 - \dots - C_{13}^{13}x^{13}$.

Áp dụng với $x = 2$ ta được $(1-2)^{13} = C_{13}^0 - 2^1C_{13}^1 + 2^2C_{13}^2 - \dots - 2^{13}C_{13}^{13}$.

Suy ra $H = -1$.

Câu 45: Tính tổng $S = 1 + 2.2 + 3.2^2 + 4.2^3 + \dots + 2018.2^{2017}$.

- A. $S = 2017.2^{2018} + 1$. B. $S = 2017.2^{2018}$.
C. $S = 2018.2^{2018} + 1$. D. $S = 2019.2^{2018} + 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

*** Phân tích:**

- Có thể làm theo cách trắc nghiệm bằng cách tính $S = 1 + 2.2 + 3.2^2$ và tương ứng với bộ (hệ số, số mũ) $= (3, 2)$ vào các phương án trả lời, suy ra **Chọn A.**

- Bài toán tổng quát: Tính tổng $S = a_0 + a_1.q^1 + a_2.q^2 + a_3.q^3 + \dots + a_n.q^n$ với

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ lập thành một cấp số cộng. Phương pháp để tính S là nhân cả 2 vế với q rồi trừ vế với vế, sử dụng công thức tính tổng n số hạng liên tiếp của một cấp số nhân là xong.

Hướng dẫn giải:

- Ta có: $S = 1 + 2.2^1 + 3.2^2 + 4.2^3 + \dots + 2018.2^{2017}$

$$\Rightarrow 2.S = 1.2^1 + 2.2^2 + 3.2^3 + \dots + 2017.2^{2017} + 2018.2^{2017}$$

- Trừ vế với vế của hai biểu thức trên ta được:

$$S - 2S = 1 + (2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2017}) - 2018.2^{2018}$$

$$= 1 + 2 \frac{2^{2017} - 1}{2 - 1} - 2018.2^{2017} = 1 + 2^{2018} - 2 - 2018.2^{2018}$$

$$= -2017.2^{2018} - 1$$

$$\Rightarrow S = 2017.2^{2018} + 1.$$

Câu 46: $S_2 = C_{2011}^0 + 2^2 C_{2011}^2 + \dots + 2^{2010} C_{2011}^{2010}$

A. $\frac{3^{2011} + 1}{2}$

B. $\frac{3^{211} - 1}{2}$

C. $\frac{3^{2011} + 12}{2}$

D. $\frac{3^{2011} - 1}{2}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Xét khai triển:

$$(1+x)^{2011} = C_{2011}^0 + x C_{2011}^1 + x^2 C_{2011}^2 + \dots + x^{2010} C_{2011}^{2010} + x^{2011} C_{2011}^{2011}$$

Cho $x = 2$ ta có được:

$$3^{2011} = C_{2011}^0 + 2.C_{2011}^1 + 2^2 C_{2011}^2 + \dots + 2^{2010} C_{2011}^{2010} + 2^{2011} C_{2011}^{2011} \quad (1)$$

Cho $x = -2$ ta có được:

$$-1 = C_{2011}^0 - 2.C_{2011}^1 + 2^2 C_{2011}^2 - \dots + 2^{2010} C_{2011}^{2010} - 2^{2011} C_{2011}^{2011} \quad (2)$$

Lấy (1) + (2) ta có:

$$2(C_{2011}^0 + 2^2 C_{2011}^2 + \dots + 2^{2010} C_{2011}^{2010}) = 3^{2011} - 1$$

$$\text{Suy ra: } S_2 = C_{2011}^0 + 2^2 C_{2011}^2 + \dots + 2^{2010} C_{2011}^{2010} = \frac{3^{2011} - 1}{2}.$$

Câu 47: Số hạng thứ 3 của khai triển $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^n$ không chứa x . Tìm x biết rằng số hạng này bằng số hạng thứ hai của khai triển $(1+x^3)^{30}$.

A. $-2.$

B. $1.$

C. $-1.$

D. $2.$

Hướng dẫn giải.

Chọn D

$$\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot (2x)^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^k.$$

Vì số hạng thứ ba của khai triển trên ứng với $k = 2$ nên số hạng thứ ba của khai triển là $C_n^2 \cdot 2^{n-2} \cdot x^{n-6}$.

Mà số hạng thứ ba của khai triển không chứa x nên $n - 6 = 0 \Leftrightarrow n = 6$.

Số hạng thứ 2 của khai triển $(1 + x^3)^{30}$ là $C_{30}^1 \cdot x^3 = 30x^3$.

Khi đó ta có $C_6^2 \cdot 2^4 = 30 \cdot x^3 \Leftrightarrow x = 2$.

Câu 48: Trong khai triển $(1+x)^n$ biết tổng các hệ số $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1} = 126$. Hệ số của x^3 bằng

A. 15.

B. 21.

C. 35.

D. 20.

Hướng dẫn giải.

Chọn C

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot x^k.$$

Thay $x = 1$ vào khai triển ta được

$$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 1 + 126 + 1 = 128 \Leftrightarrow 2^n = 128 \Leftrightarrow n = 7.$$

Hệ số của x^3 bằng $C_7^3 = 35$.

Câu 49: Có bao nhiêu số hạng hữu tỉ trong khai triển $(\sqrt{10} + \sqrt[8]{3})^{300}$?

A. 37.

B. 38.

C. 36.

D. 39.

Hướng dẫn giải.

Chọn B

$$(\sqrt{10} + \sqrt[8]{3})^{300} = \sum_{k=0}^{300} C_{300}^k (\sqrt{10})^{300-k} \cdot (\sqrt[8]{3})^k.$$

$$\text{Các số hạng hữu tỉ sẽ thỏa mãn } \begin{cases} 300-k \div 2 \\ k \div 8 \end{cases} \Leftrightarrow k \div 8.$$

Từ 0 đến 300 có 38 số chia hết cho 8.

Câu 50: Trong khai triển biểu thức $F = (\sqrt{3} + \sqrt[3]{2})^9$ số hạng nguyên có giá trị lớn nhất là

A. 8.

B. 4536.

C. 4528.

D. 4520.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có số hạng tổng quát } T_{k+1} = C_9^k (\sqrt{3})^{9-k} (\sqrt[3]{2})^k$$

Ta thấy bậc hai của căn thức là 2 và 3 là hai số nguyên tố, do đó để T_{k+1} là một số

$$\text{nguyên thì } \begin{cases} k \in \mathbb{N} \\ 0 \leq k \leq 9 \\ (9-k) \div 2 \\ k \div 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=3 \Rightarrow T_4 = C_9^3 (\sqrt{3})^6 (\sqrt[3]{2})^3 = 4536 \\ k=9 \Rightarrow T_{10} = C_9^9 (\sqrt{3})^0 (\sqrt[3]{2})^9 = 8 \end{cases}$$

Vậy trong khai triển có hai số hạng nguyên là $T_4 = 4536$ và $T_{10} = 8$.

Câu 51: Tìm hệ số có giá trị lớn nhất trong khai triển đa thức

$$P(x) = (2x+1)^{13} = a_0x^{13} + a_1x^{12} + \dots + a^{13}.$$

A. 8.

B. 4536.

C. 4528.

D. 4520.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có số hạng tổng quát sau khi khai triển nhị thức $(2x+1)^{13}$ là $a_n = C_{13}^n \cdot 2^{13-n}$.

$$\Rightarrow a_{n-1} = C_{13}^{n-1} \cdot 2^{14-n}, \quad (n=1, 2, 3, \dots, 13)$$

Xét bất phương trình với ẩn số n ta có $a_{n-1} \leq a_n \Leftrightarrow C_{13}^{n-1} \cdot 2^{14-n} \leq C_{13}^{13} \cdot 2^{13-n}$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \cdot 13!}{(n-1)!(14-n)!} \leq \frac{13!}{n!(13-n)!} \Leftrightarrow \frac{2}{14-n} \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow n \leq \frac{14}{3} \notin \mathbb{N}.$$

Do đó bất đẳng thức $a_{n-1} \leq a_n$ đúng với $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ và dấu đẳng thức không xảy ra.

Ta được $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ và $a_4 > a_5 > a_6 > \dots > a_{13}$

Từ đây ta có hệ số có giá trị lớn nhất trong khai triển nhị thức là

$$a_4 = C_{13}^4 \cdot 2^9 = 366080.$$

Câu 52: Hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển $P(x) = (3x^2 + x + 1)^{10}$ là:

A. 1695.

B. 1485.

C. 405.

D. 360.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Với $0 \leq q \leq p \leq 10$ thì số hạng tổng quát của khai triển $P(x) = (3x^2 + x + 1)^{10}$ là:

$$T_p = C_{10}^p \cdot C_p^q \cdot (3x^2)^{10-p} \cdot (x)^{p-q} \cdot 1^q = C_{10}^p \cdot C_p^q \cdot 3^{10-p} \cdot (x)^{p-q+20-2p}$$

Theo đề bài thì $p - q + 20 - 2p = 4 \Leftrightarrow p + q = 16$

Do $0 \leq q \leq p \leq 10$ nên $(p; q) \in \{(8; 8); (9; 7); (10; 6)\}$.

Vậy hệ số của x^4 trong khai triển $P(x) = (3x^2 + x + 1)^{10}$ là:

$$C_{10}^8 \cdot C_8^8 \cdot 3^{10-8} + C_{10}^9 \cdot C_9^7 \cdot 3^{10-9} + C_{10}^{10} \cdot C_{10}^6 \cdot 3^{10-10} = 1695.$$

Câu 53: Tìm số hạng chứa x^{13} trong khai triển thành các đa thức của $(x + x^2 + x^3)^{10}$ là:

A. 135.

B. 45.

C. $135x^{13}$.

D. $45x^{13}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Với $0 \leq q \leq p \leq 10$ thì số hạng tổng quát của khai triển $(x + x^2 + x^3)^{10}$ là:

$$T_p = C_{10}^p \cdot C_p^q \cdot (x)^{10-p} \cdot (x^2)^{p-q} \cdot (x^3)^q = C_{10}^p \cdot C_p^q \cdot 3^{10-p} \cdot (x)^{10+p+q}$$

Theo đề bài thì $10 + p + q = 13 \Leftrightarrow p + q = 3$

Do $0 \leq q \leq p \leq 10$ nên $(p; q) \in \{(2; 1); (3; 0)\}$.

Vậy hệ số của x^{13} trong khai triển là: $C_{10}^2 \cdot C_2^1 + C_{10}^3 \cdot C_3^0 = 210$.

Câu 54: Trong các đẳng thức sau đẳng thức nào sai?

- A.** $S_1 = 1C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n = n2^{n-1}$.
- B.** $S_2 = 1.2.C_n^1 + 2.3.C_n^2 + \dots + (n-1).n.C_n^n = (n-1).n.C_{n-2}^{k-2}$.
- C.** $S_3 = 1^2 C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \dots + (n-1)^2 C_n^{n-1} + n^2 C_n^n = n(n+1)2^{n-2}$.
- D.** $S_4 = \frac{C_n^0}{1} + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \dots + \frac{C_n^{n-1}}{n} + \frac{C_n^n}{n+1} = \frac{1}{n+1}(2^n - 1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có thể sử dụng máy tính để thử trường hợp riêng của đẳng thức trên, tôi xin phép không đưa cách làm cụ thể vì độ giả có thể dễ dàng giải được.

Tôi xin giới thiệu cách chứng minh cụ thể như sau:

Với A: Ta sẽ dùng đẳng thức $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} S_1 &= 1C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n = \sum_{k=1}^n kC_n^k \\ &= \sum_{k=1}^n nC_{n-1}^{k-1} = n(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}) = n(1+1)^{n-1} = n.2^{n-1} \end{aligned}$$

Vậy A đúng.

Với B: Ta sẽ dùng đẳng thức $(k-1)kC_n^k = (n-1)nC_{n-1}^{k-1}$.

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} S_2 &= 1.2C_n^1 + 2.3C_n^2 + \dots + (n-1).nC_n^{n-1} = \sum_{k=2}^n (k-1)kC_n^k = \sum_{k=2}^n (n-1)nC_{n-1}^{k-2} \\ &= (n-1)n(C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1 + \dots + C_{n-2}^{n-3} + C_{n-2}^{n-2}) = (n-1)n.2^{n-2} \end{aligned}$$

Vậy B đúng.

Với C: Ta có $k^2 C_n^k = (n-1)nC_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1}$.

Khi đó ta có: $S_3 = 1^2 C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \dots + (n-1)^2 C_n^{n-1} + n^2 C_n^n$.

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^n k^2 C_n^k = \sum_{k=1}^n [(n-1)nC_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1}] \\ &= (n-1)n(C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1 + C_{n-2}^2 + \dots + C_{n-2}^{n-3} + C_{n-2}^{n-2}) + n(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \dots + C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}) \\ &= (n-1)n.2^{n-2} + n.2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}.. \end{aligned}$$

Vậy C đúng.

Chọn D.

Đọc thêm tính tổng S_4 : Các số hạng của S_4 có dạng $\frac{C_n^k}{k+1}$ nên ta sẽ dùng đẳng thức

$$\frac{C_n^k}{k+1} = \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}.$$

$$\text{Khi đó ta có: } S_4 = \frac{C_n^0}{1} + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \dots + \frac{C_n^{n-1}}{n} + \frac{C_n^n}{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k+1} = \sum_{k=0}^n \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}.$$

$$= \frac{1}{n+1} (C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \dots + C_{n+1}^n + C_{n+1}^{n+1}) = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - C_{n+1}^0) = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1).$$

- Câu 55:** Tổng của ba số hạng liên tiếp lập thành cấp số cộng trong dãy số sau $C_{23}^0; C_{23}^1; \dots; C_{23}^{13}$ có giá trị là
A. 2451570. **B.** 3848222. **C.** 836418. **D.** 1307527.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Giả sử 3 số $C_{23}^n; C_{23}^{n+1}; C_{23}^{n+2}$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi

$$2C_{23}^{n+1} = C_{23}^n + C_{23}^{n+2}.$$

$$\Leftrightarrow 4C_{23}^{n+1} = C_{23}^n + C_{23}^{n+2}$$

$$\Leftrightarrow 4C_{23}^{n+1} = C_{25}^{n+2}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{4 \cdot 23!}{(n+1)!(22-n)!} = \frac{25!}{(n+2)!(23-n)!}.$$

$$\Rightarrow (n+2)(23-n) = 150 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 8 \text{ (tm)} \\ n = 13 \text{ (l)} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } C_{23}^8 + C_{23}^9 + C_{23}^{10} = 2451570.$$

- Câu 56:** Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2 + \frac{1}{x} - 1\right)^{10}$ là
A. 1951. **B.** 1950. **C.** 3150. **D.** -360.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Từ lý thuyết ta có công thức tổng quát như sau: Với $0 \leq q \leq p \leq n$ thì số hạng tổng

quát khi khai triển tam thức $\left(x^2 + \frac{1}{x} - 1\right)^{10}$ là

$$T_p = C_{10}^p C_p^q (x^2)^{10-p} \left(\frac{1}{x}\right)^{p-q} (-1)^q = C_{10}^p C_p^q (-1)^q x^{20+q-3p}$$

Số hạng không chứa x trong khai triển ứng với $20+q-3p=0 \Leftrightarrow 3p-q=20$. Mà

$0 \leq q \leq p \leq n$ và $q, p, n \in \mathbb{N}$ nên $(p; q) \in \{(7; 1), (8; 4), (9; 7), (10; 10)\}$. Lúc này số hạng

không chứa x trong khai triển là

$$(-1)^1 C_{10}^7 C_7^1 + (-1)^4 C_{10}^8 C_8^4 + (-1)^{10} C_{10}^{10} C_{10}^{10} + (-1)^7 C_{10}^9 C_9^7 = 1951$$

- Câu 57:** Số hạng chứa x^8 trong khai triển $(x^3 - x^2 - 1)^8$ là

- A.** $168x^8$. **B.** 168. **C.** $238x^8$. **D.** 238.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Từ lý thuyết ta có công thức tổng quát như sau: Với $0 \leq q \leq p \leq n$ thì số hạng tổng quát khi khai triển tam thức $(x^3 - x^2 - 1)^8$ là

$$T_p = C_8^p C_p^q (x^3)^{8-p} (-x^2)^{p-q} (-1)^q = C_8^p C_p^q x^{24-3p} x^{2p-2q} (-1)^p$$

Ta có: $24 - 3p + 2p - 2q = 8 \Leftrightarrow 24 - p - 2q = 8 \Leftrightarrow p + 2q = 16$. Suy ra

$(p; q) \in \{(8; 4), (6; 5)\}$. Lúc này hệ số của x^8 trong khai triển là

$$C_8^8 C_8^4 (-1)^8 + C_{10}^6 C_6^5 (-1)^6 = 238$$

Câu 58: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(1 + x + \frac{1}{x}\right)^n$ biết $n \geq 2$ là số nguyên dương

thỏa mãn $A_n^2 - C_{n+1}^{n-2} = 14 - 14n$.

A. 73789.

B. 73788.

C. 72864.

D. 56232.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có } A_n^2 - C_{n+1}^{n-2} = 14 - 14n \Leftrightarrow n(n-1) - \frac{(n-1)n(n+1)}{6} = 14 - 14n$$

$$\Leftrightarrow (n-1) \left[n - \frac{n(n+1)}{6} + 14 \right] = 0 \Leftrightarrow (n-1)(n^2 - 5n - 84) = 0 \Leftrightarrow n = 12 \text{ vì } n \geq 2.$$

$$\text{Lúc này ta có } \left(1 + x + \frac{1}{x}\right)^n = \left(1 + x + \frac{1}{x}\right)^{12}$$

Từ công thức tổng quát tam thức Newton ta có với $0 \leq q \leq p \leq 12$ thì số hạng tổng

quát khi khai triển tam thức $\left(1 + x + \frac{1}{x}\right)^{12}$ là

$$T_p = C_{12}^p C_p^q 1^{12-p} (x)^{p-q} \left(\frac{1}{x}\right)^q = C_{12}^p C_p^q x^{p-q-q} = C_{12}^p C_p^q x^{p-2q}$$

Ta có: $p - 2q = 0 \Leftrightarrow p = 2q$. Kết hợp với điều kiện ở trên ta có:

$(p; q) \in \{(0; 0), (2; 1), (4; 2), (6; 3), (8; 4), (10; 5), (12; 6)\}$. Suy ra số hạng không chứa x

$$\text{là } C_{12}^0 C_0^0 + C_{12}^2 C_2^1 + C_{12}^4 C_4^2 + C_{12}^6 C_6^3 + C_{12}^8 C_8^4 + C_{12}^{10} C_{10}^5 + C_{12}^{12} C_{12}^6 = 73789$$

Câu 59: Cho khai triển: $(1 + x + x^2)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{2n} x^{2n}$, $n \geq 2$ với $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ là

các hệ số. Tính tổng $S = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}$ biết $\frac{a_3}{14} = \frac{a_4}{41}$.

A. $S = 3^{10}$.

B. $S = 3^{12}$.

C. $S = 2^{10}$.

D. $S = 2^{12}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Theo giả thiết ta có: } P(x) = (1 + x + x^2)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{2n} x^{2n}$$

Thay $x = 1$ ta được $S = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} = P(1) = 3^n$. Như vậy ta chỉ cần xác định được n

Với $0 \leq q \leq p \leq n$ thì số hạng tổng quát khi khai triển tam thức $(1+x+x^2)^n$ là

$$T_p = C_n^p C_p^q 1^{n-p} x^{p-q} (x^2)^q = C_n^p C_p^q x^{p+q}$$

Hệ số của x^3 ứng với: $\begin{cases} p+q=3 \\ 0 \leq q \leq p \leq n \end{cases} \Rightarrow (p;q) \in \{(3;0), (2;1)\}.$

$$\text{Suy ra } a_3 = C_n^3 C_3^0 + C_n^2 C_2^1 = C_n^3 + 2C_n^2.$$

Hệ số của x^4 ứng với: $\begin{cases} p+q=4 \\ 0 \leq q \leq p \leq n \end{cases} \Rightarrow (p;q) \in \{(4;0), (3;1), (2;2)\}.$

$$\text{Suy ra } a_4 = C_n^4 C_4^0 + C_n^3 C_3^1 + C_n^2 C_2^2 = C_n^4 + 3C_n^3 + C_n^2.$$

$$\frac{a_3}{14} = \frac{a_4}{41} \Leftrightarrow \frac{1}{14} \frac{n(n-1)(n+4)}{6} = \frac{1}{41} \left(\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{14} \frac{(n+4)}{3} = \frac{1}{41} \left(\frac{n^2 - 5n + 6}{12} + n - 1 \right) \Leftrightarrow 7n^2 - 33n - 370 = 0 \Leftrightarrow n = 10.$$

$$\text{Vậy } S = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} = 3^{10}$$

Câu 60: Số lớn nhất trong các số $C_{16}^0; C_{16}^1; C_{16}^2; \dots; C_{16}^{15}; C_{16}^{16}$ là

A. $C_{16}^7.$

B. $C_{16}^6.$

C. $C_{16}^9.$

D. $C_{16}^8.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Vì $C_n^k = C_n^{n-k}$ nên ta có $\{C_{16}^0, C_{16}^1, \dots, C_{16}^8\} = \{C_{16}^{16}, C_{16}^{15}, \dots, C_{16}^8\}$, suy ra ta chỉ cần tìm số lớn nhất trong các số $C_{16}^0, C_{16}^1, \dots, C_{16}^7, C_{16}^8$. Bằng tính toán trực tiếp, ta có

$$C_{16}^0 = 1, C_{16}^1 = 16, C_{16}^2 = 120, C_{16}^3 = 560, C_{16}^4 = 1820, C_{16}^5 = 4368, C_{16}^6 = 8008, C_{16}^7 = 11440, C_{16}^8 = 12870$$

$$\text{Như vậy } C_{16}^0 < C_{16}^1 < C_{16}^2 < \dots < C_{16}^7 < C_{16}^8$$

$$\text{Do đó: } C_{16}^8 = \max \{C_{16}^0; C_{16}^1; C_{16}^2; \dots; C_{16}^{15}; C_{16}^{16}\}$$

Câu 61: Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $A_n^2 - 3C_n^{n-1} = 11n$.

Xét khai triển $P(x) = (x+2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Hệ số lớn nhất của $P(x)$ là

A. $C_{15}^5 \cdot 2^{11}.$

B. $C_{15}^5 \cdot 2^{10}.$

C. 252.

D. 129024.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$A_n^2 - 3C_n^{n-1} = 11n \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} - 3n = 11n.$$

$$\Leftrightarrow n(n-1) - 3n = 11n \Leftrightarrow n = 15.$$

$$(x+2)^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k x^k \cdot 2^{15-k}$$

$$\text{Xét bất phương trình: } a_k \leq a_{k+1} \Leftrightarrow C_{15}^k \cdot 2^{15-k} \leq C_{15}^{k+1} \cdot 2^{14-k} \Leftrightarrow$$

$$2 \frac{15!}{k!.(15-k)!} \leq 2 \frac{15!}{(k+1)!.(14-k)!} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{15-k} \leq \frac{1}{k+1} \Leftrightarrow k \leq \frac{13}{3}, k \in \mathbb{N} \Rightarrow k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$\text{Từ đây ta có: } \begin{cases} a_k \leq a_{k+1} \forall k \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \\ a_k = a_{k+1} \Leftrightarrow k = \frac{13}{3}, k \notin \mathbb{N} \\ a_k > a_{k+1} \forall k \in \{5, 6, \dots, 15\} \end{cases}$$

Do đó: $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 > a_6 > a_7 > \dots > a_{15}$

$$\text{Vậy } a_5 = \max\{a_i \mid i = \overline{0, 15}\} = C_{15}^5 \cdot 2^{10}$$

Câu 62: Giả sử $P(x) = (2x+1)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ thỏa mãn

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 2^{12}. \text{ Hệ số lớn nhất trong các hệ số } \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\} \text{ là}$$

A. 126720.

B. 495.

C. 256.

D. 591360.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$2^{12} = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = a_0 + a_1 \left(\frac{1}{2}\right) + a_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + a_n \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= P\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{2}\right)^n = 2^n$$

$$\Rightarrow n = 12$$

$$(2x+1)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k (2x)^k = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \cdot x^k \cdot 2^k.$$

$$\Rightarrow a_k = C_{12}^k \cdot 2^k \forall k \in \overline{0, 12} \Rightarrow a_k \leq a_{k+1} \Leftrightarrow C_{12}^k \cdot 2^k \leq C_{12}^{k+1} \cdot 2^{k+1}$$

$$\frac{12!}{k!.(12-k)!} \leq \frac{12!}{(k+1)!.(11-k)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{12-k} \leq \frac{2}{k+1}$$

$$\Leftrightarrow k \leq \frac{23}{3}, k \in \mathbb{N} \Rightarrow k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 7\}$$

$$\text{Từ đây ta có: } \begin{cases} a_k \leq a_{k+1} \forall k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 7\} \\ a_k = a_{k+1} \Leftrightarrow k = \frac{23}{3}, k \notin \mathbb{N} \\ a_k > a_{k+1} \forall k \in \{8, 9, \dots, 11\} \end{cases}$$

Do đó: $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < \dots < a_7 > a_8 > \dots > a_{12}$

$$\text{Vậy } a_7 = \max\{a_i \mid i = \overline{0, 12}\} = C_{12}^7 \cdot 2^7$$

Câu 63: Cho khai triển $(x+2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Tìm tất cả các giá trị của n để $\max\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\} = a_{10}$.

- A. $\{29; 30; 31; 32\}$. B. 12. C. $\{12; 13; 14; 15\}$. D. 16.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Giả sử n là số nguyên dương sao cho:

$$\max\{a_0, a_1, \dots, a_n\} = a_{10}$$

Theo công thức khai triển newton ta có:

$$P(x) = (x+2)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k 2^{n-k} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k x^k 2^k.$$

$$\Rightarrow a_k = C_n^k \cdot 2^{n-k} \quad \forall k \in \overline{0, n}$$

$$\text{Ta có: } a_{10} = \max\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \Leftrightarrow \begin{cases} a_9 \leq a_{10} \\ a_{10} \geq a_{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_n^9 \cdot 2^{n-9} \leq C_n^{10} \cdot 2^{n-10} \\ C_n^{10} \cdot 2^{n-10} \geq C_n^{11} \cdot 2^{n-11} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{n-9} \leq \frac{1}{10} \\ \frac{1}{11} \leq \frac{2}{n-10} \end{cases} \Leftrightarrow 29 \leq n \leq 32$$

Các phép biến đổi trên là đương tương nên ta không cần phải thử lại các giá trị trên. Vậy $n \in \{29, 30, 31, 32\}$ là tất cả các giá trị thỏa mãn bài toán (thử lại thấy thỏa mãn).

Câu 64: Cho n là số nguyên dương. Gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $(x^2+1)^n (x+2)^n$. Tìm n sao cho $a_{3n-3} = 26n$.

- A. $n = 10$. B. $n = 3$. C. $n = 4$. D. $n = 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Theo công thức khai triển Newton ta có:

$$(x^2+1)^n (x+2)^n = \left(\sum_{k=0}^n C_n^k x^{2k} \right) \left(\sum_{i=0}^n C_n^i x^i 2^{n-i} \right).$$

Số hạng chứa x^{3n-3} tương ứng với cặp (k, i) thỏa mãn:

$$\begin{cases} 2k+i=3n-3 \\ 0 \leq k; i \leq n \end{cases} \Rightarrow (k; i) \in \{(n, n-3); (n-1, n-1)\}$$

$$\text{Do đó hệ số của } x^{3n-3} \text{ là: } a_{3n-3} = C_n^n \cdot 2^3 \cdot C_n^{n-3} + C_n^{n-1} \cdot 2^1 \cdot C_n^{n-1} = 8C_n^3 + 2n^2 = 26n$$

$$\Leftrightarrow 8 \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + 2n^2 = 26n \Rightarrow 2n^2 - 3n - 35 = 0 \Rightarrow n = 5$$

Câu 65: Tính tổng $S = \frac{1}{2!2017!} + \frac{1}{4!2015!} + \frac{1}{6!2013!} + \dots + \frac{1}{2016!3!} + \frac{1}{2018!}$ theo n ta được

A. $S = \frac{2^{2018} - 1}{2017!}$. **B.** $S = \frac{2^{2018} - 1}{2017}$. **C.** $S = \frac{2^{2018}}{2017!}$. **D.** $S = \frac{2^{2018}}{2017}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Các số hạng của S có dạng:

$$\frac{1}{(2k)!(2019-2k)!} = \frac{1}{2019!} \frac{2019!}{(2k)!(2019-2k)!} = \frac{1}{2019!} C_{2019}^{2k}.$$

Do đó $\Rightarrow 2019!S = C_{2019}^2 + C_{2019}^4 + \dots + C_{2019}^{2016} + C_{2019}^{2018}$.

Nhận thấy C_{2019}^{2k} là hệ số của x^{2k} trong khai triển $(x+1)^{2019}$.

Vì vậy xét $P(x) = (x+1)^{2019}$, theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$$P(x) = (x+1)^{2019} = C_{2019}^0 + C_{2019}^1 x + C_{2019}^2 x^2 + \dots + C_{2019}^{2019} x^{2019}$$

Từ đó ta có:

$$P(1) = C_{2019}^0 + C_{2019}^1 + C_{2019}^2 + \dots + C_{2019}^{2019}.$$

$$P(-1) = C_{2019}^0 - C_{2019}^1 + C_{2019}^2 - \dots + C_{2019}^{2018} - C_{2019}^{2019}$$

Suy ra: $2019!S + 1 = C_{2019}^0 + C_{2019}^2 + C_{2019}^4 + \dots + C_{2019}^{2018} = \frac{P(1) + P(-1)}{2} = 2^{2018}$

$$\Leftrightarrow S = \frac{2^{2018} - 1}{2019!}$$

Câu 66: Cho số nguyên $n \geq 3$. Giả sử ta có khai triển

$$(x-1)^{2n} + x(x+1)^{2n-1} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{2n} x^{2n}. \text{ Biết } T = a_0 + a_2 + \dots + a_{2n} = 768.$$

Tính a_5 .

A. $126x^5$. **B.** $-126x^5$. **C.** 126 . **D.** -126 .

Hướng dẫn giải

Chọn D

Theo giả thiết ta có:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{2n} x^{2n}.$$

Khi đó $P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}$ và $P(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - \dots + a_{2n}$.

Suy ra $T = a_0 + a_2 + \dots + a_{2n} = \frac{P(1) + P(-1)}{2} = \frac{2^{2n-1} + 2^{2n}}{2} = 3 \cdot 2^{2n-2}$

$$\Rightarrow 768 = 3 \cdot 2^{2n-2} \Leftrightarrow n = 5$$

Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)^{2n} + x(x+1)^{2n-1} = \sum_{k=1}^{2n} C_{2n}^k x^k (-1)^{2n-k} + x \sum_{k=1}^{2n-1} C_{2n-k}^k x^k \\ &= \sum_{k=1}^{2n} C_{2n}^k x^k (-1)^{2n-k} + \sum_{k=1}^{2n} C_{2n-k}^{k-1} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{2n} \left(C_{2n}^k (-1)^k + C_{2n-1}^{k-1} \right) x^k = 1 + \sum_{k=1}^{10} \left(C_{10}^k (-1)^k + C_9^{k-1} \right) x^k \end{aligned}$$

Vậy $a_5 = C_{10}^5 (-1)^5 + C_9^4 = -126$.

Câu 67: Tìm số nguyên dương n thỏa mãn

$$\frac{C_n^1}{2} - \frac{2C_n^2}{2^2} + \frac{3C_n^3}{2^3} - \dots + (-1)^{n-2} \frac{(n-1)C_n^{n-1}}{2^{n-1}} + (-1)^{n-1} \frac{nC_n^n}{2^n} = \frac{1}{32}$$

A. $n = 10$.

B. $n = 9$.

C. $n = 8$.

D. $n = 7$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Các số hạng của tổng về trái có dạng:

$$(-1)^{k-1} \frac{kC_n^k}{2^k} = (-1)^{k-1} \frac{nC_{n-1}^{k-1}}{2^k} = \frac{n}{2} C_{n-1}^{k-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

Do đó ta có:

$$\begin{aligned} \frac{C_n^1}{2} - \frac{2C_n^2}{2^2} + \frac{3C_n^3}{2^3} - \dots + (-1)^{n-2} \frac{(n-1)C_n^{n-1}}{2^{n-1}} + (-1)^{n-1} \frac{nC_n^n}{2^n} &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{kC_n^k}{2^k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{n}{2} C_{n-1}^{k-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{n}{2} \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{n}{2} \left(-\frac{1}{2} + 1\right)^{n-1} = \frac{n}{2^n}. \end{aligned}$$

Như vậy ta cần dùng số nguyên dương n thỏa mãn: $\frac{n}{2^n} = \frac{1}{32} \Leftrightarrow 2^{n-5} = n \Leftrightarrow n = 8$.

Câu 68: Cho $S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + n(n+1)(n+2)$. Kết quả biểu diễn S theo n là

A. $S = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

B. $S = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$.

C. $S = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$.

D. $S = n(n+1)(n+2)(n+3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Cách 1: Ta có

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

$$C_{n-1}^k = C_{n-2}^k + C_{n-2}^{k-1}$$

$$C_{n-2}^k = C_{n-3}^k + C_{n-3}^{k-1}$$

.....

$$C_{k+1}^k = C_k^k + C_k^{k-1}$$

$$C_k^k = C_{k-1}^k + C_{k-1}^{k-1}$$

Cộng các đẳng thức trên về theo về ta được:

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \dots + C_k^{k-1} + C_{k-1}^{k-1} (*)$$

Ta có: $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + n(n+1)(n+2) = \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(k+2)!}{(k-1)!} = 6 \sum_{k=1}^n \frac{(k+2)!}{3!(k-1)!} = 6 \sum_{k=1}^n C_{k+2}^3 = 6(C_3^3 + C_4^3 + \dots + C_{n+1}^3 + C_{n+2}^3).$$

Áp dụng câu (*) với $k = 4$, thay n bởi $n + 3$ ta được:

$$C_3^3 + C_4^3 + \dots + C_{n+1}^3 + C_{n+2}^3 = C_{n+3}^4$$

$$\text{Vậy } 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + n(n+1)(n+2) = 6C_{n+3}^4 = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

Cách 2: Với bài toán này ta có thể dùng máy tính để thử trường hợp riêng.

Câu 69: Trong khai triển của $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{10}$ thành đa thức

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_9x^9 + a_{10}x^{10}$, hãy tìm hệ số a_k lớn nhất ($0 \leq k \leq 10$).

A. $a_{10} = 3003 \frac{2^{10}}{3^{15}}$ **B.** $a_5 = 3003 \frac{2^{10}}{3^{15}}$ **C.** $a_4 = 3003 \frac{2^{10}}{3^{15}}$ **D.**

$a_9 = 3003 \frac{2^{10}}{3^{15}}$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

$$\text{Ta có: } \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{15-k} \left(\frac{2}{3}x\right)^k = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k \frac{2^k}{3^{15}} x^k$$

$$\text{Hệ số của } x^k \text{ trong khai triển } a_k = \frac{1}{3^{15}} C_{15}^k 2^k$$

$$\text{Ta có: } a_{k-1} < a_k \Leftrightarrow C_{15}^{k-1} 2^{k-1} < C_{15}^k 2^k \Leftrightarrow C_{15}^{k-1} < 2C_{15}^k$$

$$\Leftrightarrow k < \frac{32}{3} \Rightarrow k \leq 10. \text{ Từ đó: } a_0 < a_1 < \dots < a_{10}$$

Đảo dấu bất đẳng thức trên, ta được:

$$a_{k-1} < a_k \Leftrightarrow k > \frac{32}{3} \Rightarrow a_{10} > a_{11} > \dots > a_{15}$$

$$\text{Vậy hệ số lớn nhất phải tìm là: } a_{10} = \frac{2^{10}}{3^{15}} C_{15}^{10} = 3003 \frac{2^{10}}{3^{15}}.$$

Câu 70: Cho khai triển $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, trong đó $n \in \mathbb{N}^*$ và các hệ số thỏa mãn hệ thức $a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 4096$. Tìm hệ số lớn nhất?

A. 1293600. **B.** 126720. **C.** 924. **D.** 792.

Hướng dẫn giải.

Chọn B.

Số hạng tổng quát trong khai triển $(1+2x)^n$ là $C_n^k \cdot 2^k \cdot x^k$, $0 \leq k \leq n$, $k \in \mathbb{N}$. Vậy hệ số của số hạng chứa x^k là $C_n^k \cdot 2^k \Rightarrow a_k = C_n^k \cdot 2^k$.

Khi đó, ta có

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 4096 \Leftrightarrow C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 4096 \Leftrightarrow (1+1)^n = 4096 \Leftrightarrow n = 12.$$

Dễ thấy a_0 và a_n không phải hệ số lớn nhất. Giả sử a_k ($0 < k < n$) là hệ số lớn nhất trong các hệ số $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_k \geq a_{k+1} \\ a_k \geq a_{k-1} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} C_{12}^k \cdot 2^k \geq C_{12}^{k+1} \cdot 2^{k+1} \\ C_{12}^k \cdot 2^k \geq C_{12}^{k-1} \cdot 2^{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{12!}{k! \cdot (12-k)!} \geq \frac{12! \cdot 2}{(k+1)! \cdot (12-k-1)!} \\ \frac{12!}{k! \cdot (12-k)!} \geq \frac{12!}{(k-1)! \cdot (12-k+1)!} \cdot \frac{1}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{12-k} \geq \frac{2}{k+1} \\ \frac{2}{k} \geq \frac{1}{13-k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+1-2(12-k) \geq 0 \\ 26-3k \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq \frac{23}{3} \\ k \leq \frac{26}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{23}{3} \leq k \leq \frac{26}{3} \end{aligned}$$

Do $k \in \mathbb{N} \Rightarrow k = 8$

Vậy hệ số lớn nhất là $a_8 = C_{12}^8 \cdot 2^8 = 126720$.

Câu 71: Cho khai triển $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, trong đó $n \in \mathbb{N}^*$ và các hệ số thỏa mãn hệ thức $a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 4096$. Tìm hệ số lớn nhất?

A. 1293600.

B. 126720.

C. 924.

D. 792.

Hướng dẫn giải.

Chọn B

Số hạng tổng quát trong khai triển $(1+2x)^n$ là $C_n^k \cdot 2^k \cdot x^k$, $0 \leq k \leq n$, $k \in \mathbb{N}$. Vậy hệ số của số hạng chứa x^k là $C_n^k \cdot 2^k \Rightarrow a_k = C_n^k \cdot 2^k$.

Khi đó, ta có

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 4096 \Leftrightarrow C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 4096$$

$$\Leftrightarrow (1+1)^n = 4096 \Leftrightarrow n = 12$$

Dễ thấy a_0 và a_n không phải hệ số lớn nhất. Giả sử a_k ($0 < k < n$) là hệ số lớn nhất trong các hệ số $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_k \geq a_{k+1} \\ a_k \geq a_{k-1} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} C_{12}^k \cdot 2^k \geq C_{12}^{k+1} \cdot 2^{k+1} \\ C_{12}^k \cdot 2^k \geq C_{12}^{k-1} \cdot 2^{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{12!}{k! \cdot (12-k)!} \geq \frac{12! \cdot 2}{(k+1)! \cdot (12-k-1)!} \\ \frac{12!}{k! \cdot (12-k)!} \geq \frac{12!}{(k-1)! \cdot (12-k+1)!} \cdot \frac{1}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{12-k} \geq \frac{2}{k+1} \\ \frac{2}{k} \geq \frac{1}{13-k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+1-2(12-k) \geq 0 \\ 26-3k \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq \frac{23}{3} \\ k \leq \frac{26}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{23}{3} \leq k \leq \frac{26}{3}. \end{aligned}$$

Do $k \in \mathbb{N} \Rightarrow k = 8$.

Vậy hệ số lớn nhất là $a_8 = C_{12}^8 \cdot 2^8 = 126720$.

Câu 72: Tính tổng $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2$

A. C_{2n}^n .

B. C_{2n}^{n-1} .

C. $2C_{2n}^n$.

D. C_{2n-1}^{n-1} .

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $(x+1)^n (1+x)^n = (x+1)^{2n}$.

Vế trái của hệ thức trên chính là:

$$(C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \dots + C_n^n)(C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^n x^n)$$

Và ta thấy hệ số của x^n trong vế trái là

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2$$

Còn hệ số của x^n trong vế phải $(x+1)^{2n}$ là C_{2n}^n

$$\text{Do đó } (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

Câu 73: $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \dots + C_{2n}^{2n}$ bằng

A. 2^{n-2} .

B. 2^{n-1} .

C. 2^{2n-2} .

D. 2^{2n-1} .

Hướng dẫn giải.

Chọn D

$$\text{Xét khai triển } (x+1)^{2n} = C_{2n}^0 x^{2n} + C_{2n}^1 x^{2n-1} + C_{2n}^2 x^{2n-2} + \dots + C_{2n}^{2n}.$$

$$\text{Thay } x=1 \text{ vào khai triển ta được } 2^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n} \quad (1).$$

Thay $x=-1$ vào khai triển ta được :

$$0 = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - \dots + C_{2n}^{2n} \Leftrightarrow C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \dots + C_{2n}^{2n} = 2^{2n-1}.$$

Câu 74: Sau khi khai triển và rút gọn, biểu thức $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{20} + \left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{10}$ có bao nhiêu số hạng?

A. 27

B. 28

C. 29

D. 32

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } \left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{20} + \left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k (-1)^k x^{20-3k} + \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i (-1)^i x^{30-4i}.$$

Khai triển này bao gồm tất cả $21+11=32$ số hạng. Tuy nhiên ta xét các số hạng bị trùng lũy thừa của nhau.

Ta có: $20-3k = 30-4i \Leftrightarrow 4i-3k=10$ do đó k phải là số chẵn nhưng không chia hết cho 4. Ta có bảng:

k	2	6	10	14	18
i	4	7	10	13 (L)	16 (L)

Vậy có 3 cặp số hạng sau khi khai triển trùng lũy thừa của nhau.

Chọn C.

Câu 75: Cho khai triển $(1-2x)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$. Biết

$$S = |a_1| + 2|a_2| + \dots + n|a_n| = 34992, \text{ tính giá trị của biểu thức}$$

$$P = a_0 + 3a_1 + 9a_2 + \dots + 3^n a_n ?$$

A. 390625

B. -78125

C. -1953125

D. 9765625

Hướng dẫn giải:

Ta có: $(1+2x)^n = |a_0| + |a_1|x + |a_2|x^2 + \dots + |a_n|x^n$ do vậy lấy đạo hàm hai vế ta được:

$$2n(1+2x)^{n-1} = |a_1| + 2|a_2|x + \dots + n|a_n|x^{n-1}$$

Thay $x=1$ vào khai triển trên ta được:

$$2n.3^{n-1} = |a_1| + 2|a_2| + \dots + n|a_n| = 34992 \Rightarrow \boxed{n=8}$$

Vậy với $n=8$ ta có: $P = a_0 + 3a_1 + 9a_2 + \dots + 3^n a_n = (1-2.3)^8 = 390625$.

Chọn A.

Câu 76: Cho đa thức: $P(x) = (x+1)^8 + (x+1)^9 + (x+1)^{10} + (x+1)^{11} + (x+1)^{12}$. Khai triển và rút gọn ta được đa thức $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{12}x^{12}$. Tìm hệ số a_8 .

A. 715

B. 720

C. 700

D. 730

Hướng dẫn giải:

Sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton vào bài toán ta có: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot x^k$

Hệ số của số hạng chứa x^k là: C_n^k . Áp dụng vào bài tập ta thấy hệ số a_8 chính là tổng tất cả hệ số của số hạng chứa x^8 . Vậy hệ số a_8 trong khai triển $P(x)$ là:

$$C_8^8 + C_9^8 + C_{10}^8 + C_{11}^8 + C_{12}^8 = 715.$$

Câu 77: Tìm số tất cả tự nhiên n thỏa mãn $\frac{C_n^0}{1.2} + \frac{C_n^1}{2.3} + \frac{C_n^2}{3.4} + \dots + \frac{C_n^n}{(n+1)(n+2)} = \frac{2^{100} - n - 3}{(n+1)(n+2)}$

A. $n=100$

B. $n=98$

C. $n=99$

D. $n=101$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có } \frac{C_n^0}{1.2} + \frac{C_n^1}{2.3} + \frac{C_n^2}{3.4} + \dots + \frac{C_n^n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{C_{n+1}^1}{2} + \frac{C_{n+1}^2}{3} + \frac{C_{n+1}^3}{4} + \dots + \frac{C_{n+1}^{n+1}}{(n+2)} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{C_n^0}{1.2} + \frac{C_n^1}{2.3} + \frac{C_n^2}{3.4} + \dots + \frac{C_n^n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} (C_{n+2}^2 + C_{n+2}^3 + C_{n+2}^4 + \dots + C_{n+2}^{n+2}) = \frac{2^{n+2} - n - 3}{(n+1)(n+2)}$$

$$\text{Khi đó: } \frac{2^{n+2} - n - 3}{(n+1)(n+2)} = \frac{2^{100} - n - 3}{(n+1)(n+2)} \Rightarrow \boxed{n=98}$$

Câu 78: Một khối lập phương có độ dài cạnh là 2cm được chia thành 8 khối lập phương cạnh 1cm. Hỏi có bao nhiêu tam giác được tạo thành từ các đỉnh của khối lập phương cạnh 1cm.

A. 2876.

B. 2898.

C. 2915.

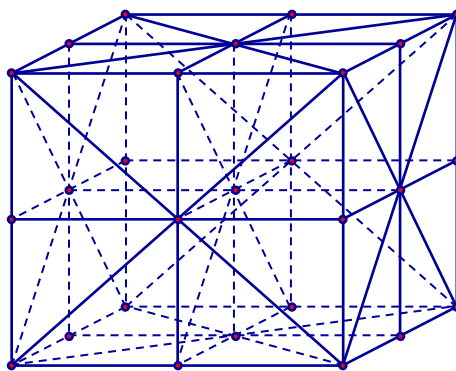
D. 2012.

Hướng dẫn giải:

Có tất cả 27 điểm. Chọn 3 điểm trong 27 có $C_{27}^3 = 2925$.

Có tất cả $(8.2 + 6.2 + 4.2 + 4 + 3 + 2 + 2 + 2) = 49$ bộ ba điểm thẳng hàng. Vậy

$2925 - 49 = 2876$ tam giác.



Câu 79: Cho $u_n = -\frac{C_n^1}{2.3} + \frac{2C_n^2}{3.4} - \frac{3C_n^3}{4.5} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot C_n^n \cdot n}{(n+1)(n+2)}$. Tính $\lim(n.u_n) = ?$

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} \text{Xét } \frac{k.C_n^k}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k.n!}{k!(k+1)(k+2).(n-k)!} \\ &= \frac{k}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{(n+2)!}{(k+2)!(n-k)!} = \frac{k}{(n+1)(n+2)} \cdot C_{n+2}^{k+2} = \frac{(k+2)C_{n+2}^{k+2} - 2C_{n+2}^{k+2}}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1} - \frac{2.C_{n+2}^{k+2}}{(n+1)(n+2)}. \text{ Vậy } u_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \cdot \frac{C_n^k}{(k+1)(k+2)} \\ \Rightarrow u_n &= \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=1}^n (-1)^k \cdot C_{n+1}^{k+1} - \frac{2}{(n+1)(n+2)} \cdot \sum_{k=1}^n (-1)^k \cdot C_{n+2}^{k+2} \\ &= \frac{1}{n+1} \left(-C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 - \dots + (-1)^n C_{n+1}^{n+1} \right) - \frac{2}{(n+1)(n+2)} \cdot \left(-C_{n+2}^3 + C_{n+2}^4 - \dots + (-1)^n C_{n+2}^{n+2} \right) \\ \Rightarrow u_n &= -\frac{n}{(n+1)(n+2)} \Rightarrow \lim(n.u_n) = -1. \text{ Chọn} \end{aligned}$$

Chọn A.

Câu 80: Tìm n biết rằng $a_n(x-1)^n + a_{n-1}(x-1)^{n-1} + \dots + a_1(x-1) + a_0 = x^n$ đồng thời

$$a_1 + a_2 + a_3 = 231.$$

A. $n = 9$

B. $n = 10$

C. $n = 11$

D. $n = 12$

Hướng dẫn giải:

Ta đặt $x-1 = y$ khi đó $a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_1 y + a_0 = (y+1)^n$.

Như vậy $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = 231 \Rightarrow \boxed{n=11}$.

Chọn C.

CHUYÊN ĐỀ

BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TỔ HỢP-XÁC SUẤT-NHỊ THỨC NIU TƠN

Câu 1. Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 4$). Biết rằng số tập con gồm 4 phần tử của A bằng 20 lần số tập con gồm 2 phần tử của A. Tìm $K \in \{1; 2; \dots; n\}$ sao cho số tập con gồm K phần tử của A là lớn nhất?

Hướng dẫn giải

Số tập con gồm 4 phần tử từ n phần tử của A : C_n^4 tập.

Số tập con gồm 2 phần tử từ n phần tử của A : C_n^2 tập.

Theo đề bài, ta có:

$$C_n^4 = 20C_n^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-4)!4!} = 20 \frac{n!}{(n-2)!2!}$$

$$\Leftrightarrow (n-3)(n-2) = 240$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 18(n) \\ n = -13(l) \end{cases}$$

Gọi K là số phần tử có số tập con lớn nhất trong A ($0 \leq K \leq 18, K \in \mathbb{Z}$). Khi đó :

$$K \text{ là giá trị lớn nhất} \Leftrightarrow \begin{cases} C_{18}^K \geq C_{18}^{K+1} \\ C_{18}^K \geq C_{18}^{K-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{18!}{(18-K)!K!} \geq \frac{18!}{(18-K-1)!(K+1)!} \\ \frac{18!}{(18-K)!K!} \geq \frac{18!}{(18-K+1)!(K-1)!} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{(18-K)} \geq \frac{1}{(K+1)} \\ \frac{1}{K} \geq \frac{1}{19-K} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{17}{2} \leq K \leq \frac{19}{2}$$

$$\Rightarrow K = 9$$

Câu 2. Cho k là số tự nhiên thỏa mãn Chứng minh rằng:

$$C_5^0 \cdot C_{2011}^k + C_5^1 \cdot C_{2011}^{k-1} + \dots + C_5^5 \cdot C_{2011}^{k-5} = C_{2016}^k$$

Hướng dẫn giải

Ta có :

$$(1+x)^5(1+x)^{2011} = (1+x)^{2016}$$

$$\text{Đặt } M = (1+x)^5 = C_5^0 + C_5^1 x + C_5^2 x^2 + C_5^3 x^3 + C_5^4 x^4 + C_5^5 x^5.$$

$$N = (1+x)^{2011} = C_{2011}^0 + C_{2011}^1 x + C_{2011}^2 x^2 + \dots + C_{2011}^k x^k + \dots + C_{2011}^{2011} x^{2011}.$$

$$P = (1+x)^{2016} = C_{2016}^0 + C_{2016}^1 x + C_{2016}^2 x^2 + \dots + C_{2016}^k x^k + \dots + C_{2016}^{2016} x^{2016}.$$

mà $P=M.N$ nên phần tử thứ k trong P có dạng:

$$\begin{aligned} C_{2016}^k x^k &= C_5^0 C_{2011}^k x^k + C_5^1 x C_{2011}^{k-1} x^{k-1} + \dots + C_5^5 x^5 C_{2011}^{k-5} x^{k-5} \\ &= C_5^0 C_{2011}^k x^k + C_5^1 C_{2011}^{k-1} x^k + \dots + C_5^5 C_{2011}^{k-5} x^k. \end{aligned}$$

Chọn $x=1$ ta có điều phải chứng minh.

Câu 3. Gọi A là tập hợp các số tự nhiên có chín chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên thuộc vào tập A . Tính xác suất để chọn được một số thuộc A và số đó chia hết cho 3.

Hướng dẫn giải

Gọi phần tử của A có dạng : $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9}$.

$a_1 \neq 0$ nên có 9 cách chọn.

Chọn 8 chữ số còn lại và xếp vào vị trí từ $a_2 \rightarrow a_9$: A_9^8 cách chọn.

Vậy $n(A) = 9A_9^8$.

Giả sử gọi $B = \{0; 1; 2; \dots; 9\}$ có tổng 10 phần tử là $45:3$. Nên nếu muốn tạo thành một số có 9 chữ số và chia hết cho 3, ta cần loại đi phần tử là bội của 3. Như vậy, ta sẽ có các tập :

$B \setminus \{0\}, B \setminus \{3\}, B \setminus \{6\}, B \setminus \{9\}$

TH1: Chọn tập $B \setminus \{0\}$ để tạo số :

Ta còn 9 chữ số để xếp vào 9 vị trí $a_1 \rightarrow a_9$: $9!$ cách.

TH2: Chọn 1 trong ba tập : $B \setminus \{3\}, B \setminus \{6\}, B \setminus \{9\}$: 3 cách.

$a_1 \neq 0$: có 8 cách (vì đã loại đi phần tử là bội của 3).

Còn 8 chữ số xếp vào 8 vị trí còn lại : $8!$ cách.

→ Số cách chọn phần tử thuộc A và chia hết cho 3 là: $9! + 3.8.8!$.

Vậy xác suất cần tìm là : $\frac{9! + 3.8.8!}{9A_9^8} = \frac{11}{27}$.

Câu 4. Gọi A là tập hợp các số tự nhiên có tám chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên thuộc vào tập A . Tính xác suất để chọn được một số thuộc A và số đó chia hết cho 9.

Hướng dẫn giải

Gọi phần tử của A có dạng : $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8}$.

$a_1 \neq 0$ nên có 9 cách chọn.

Chọn 7 chữ số còn lại và xếp vào vị trí từ $a_2 \rightarrow a_8$: A_9^7 cách chọn.

Vậy $n(A) = 9A_9^7$.

Giả sử gọi $B = \{0; 1; 2; \dots; 9\}$ có tổng 10 phần tử là $45:9$. Nên nếu muốn tạo thành một số có 9 chữ số và chia hết cho 3, ta cần loại đi 2 phần tử có tổng là bội của 9. Như vậy, ta sẽ có các tập : $B \setminus \{0; 9\}, B \setminus \{1; 8\}, B \setminus \{2; 7\}, B \setminus \{3; 6\}, B \setminus \{4; 5\}$

TH1: Chọn tập $B \setminus \{0; 3\}$ để tạo số :

Ta còn 8 chữ số để xếp vào 8 vị trí $a_1 \rightarrow a_8$: $8!$ cách.

TH2: Chọn 1 trong bốn tập : $B \setminus \{1; 8\}, B \setminus \{2; 7\}, B \setminus \{3; 6\}, B \setminus \{4; 5\}$: 4 cách.

$a_1 \neq 0$: có 7 cách (vì đã loại đi 2 phần tử có tổng là bội của 9).

Còn 7 chữ số xếp vào 7 vị trí còn lại : $7!$ cách.

→ Số cách chọn phần tử thuộc A và chia hết cho 3 là: $8! + 4.7.7!$.

Vậy xác suất cần tìm là : $\frac{8! + 4 \cdot 7 \cdot 7!}{9A_9^7} = \frac{1}{9}$.

Câu 5. Người ta dùng 18 cuốn sách bao gồm 7 cuốn sách Toán, 6 cuốn sách Lý và 5 cuốn sách Hóa (các cuốn sách cùng loại thì giống nhau) để làm phần thưởng cho 9 học sinh A,B,C,D,E,F,G,H,I, mỗi học sinh nhận được 2 cuốn sách khác thể loại (không tính thứ tự các cuốn sách). Tính xác suất để hai học sinh A và B nhận được phần thưởng giống nhau.

Hướng dẫn giải

Để một học sinh nhận được 2 quyển sách thể loại khác nhau, ta chia phần thưởng thành ba loại : (Toán-Lý) ; (Toán- Hóa) ; (Lý- Hóa).

Gọi x, y, z ($x, y, z \in \mathbb{Z}$) lần lượt là số học sinh nhận được bộ giải thưởng

(Toán-Lý) ; (Toán- Hóa) ; (Lý- Hóa). Khi đó, ta có hệ sau :

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x + z = 6 \\ y + z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

Số cách phát thưởng ngẫu nhiên cho 9 học sinh :

Chọn 4 bạn bất kì trong 9 bạn để nhận bộ (Toán-Lý) : C_9^4 cách.

Chọn 3 bạn bất kì trong 5 bạn còn lại để nhận bộ (Toán-Hóa) : C_5^3 cách.

2 bạn còn lại chỉ có 1 cách phát thưởng là bộ (Lý-Hóa).

Vậy $n(\Omega) = C_9^4 \cdot C_5^3$.

Gọi S là biến cố “ hai học sinh A và B có phần thưởng giống nhau”

TH1 : A và B cùng nhận bộ (Toán-Lý)

Vì A và B đã nhận quà nên bộ (Toán-Lý) còn lại 2 phần. Ta chọn 2 bạn trong 7 bạn để nhận : C_7^2 cách.

Chọn 3 bạn trong 5 bạn còn lại để nhận bộ (Toán-Hóa) : C_5^3 cách.

2 bạn còn lại chỉ có 1 cách phát thưởng là bộ (Lý-Hóa).

Vậy có $C_7^2 \cdot C_5^3$ cách để A và B cùng nhận bộ (Toán-Lý).

TH2: A và B cùng nhận bộ (Toán-Hóa)

Lập luận tương tự, ta được : $C_7^1 \cdot C_6^4$ cách.

TH3 : A và B cùng nhận bộ (Lý-Hóa) có C_7^4 cách.

Vậy có $C_7^2 \cdot C_5^3 + C_7^1 \cdot C_6^4 + C_7^4$

$$P(S) = \frac{C_7^2 C_5^3 + C_7^1 C_6^4 + C_7^4}{C_9^4 C_5^3} = \frac{5}{18}.$$

Câu 6. Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 20\}$. Tính xác suất để ba số được chọn không có 2 số tự nhiên liên tiếp.

Hướng dẫn giải

Số cách chọn ba số đôi một khác nhau từ A : $n(\Omega) = C_{20}^3$.

TH1 : Ta chọn số có 3 chữ số tự nhiên liên tiếp :

Chọn phần tử bất kì trong $A \setminus \{19; 20\}$: 18 cách chọn.

Với mỗi phần tử được chọn, ta lấy hai phần tử liền kề bên phải : 1 cách chọn.

Vậy có 18 cách chọn 3 phần tử liên tiếp nhau.

TH2 : Chọn ba số có đúng hai chữ số liên tiếp :

Chọn 1 trong hai phần tử $\{1;19\}$: 2 cách.

Với mỗi cách chọn phần tử trên, ta có 1 cách chọn phần tử liền sau đó.

Chọn phần tử thứ ba không liên tiếp với 2 phần tử đã chọn : 17 cách (vì phải bỏ đi phần tử liền sau phần tử thứ 2).

Chọn 1 phần tử trong tập $\{2;3;4;...;18\}$: 17 cách.

Với mỗi cách chọn trên, ta có 1 cách chọn phần tử thứ hai liền sau nó.

Để chọn phần tử thứ 3 không liên tiếp, ta cần bỏ đi phần tử liền trước phần tử 1 và liền sau phần tử 2 : 16 cách.

→ Vậy có $17.2+17.6$ cách chọn 3 phần tử có đúng hai chữ số liên tiếp.

$$P = \frac{C_{20}^3 - 18 - 17.2 - 17.16}{C_{20}^3} = \frac{68}{95}$$

Câu 7. Có 1650 học sinh được sắp xếp thành 22 hàng và 75 cột. Biết rằng với hai cột bất kì, số cặp học sinh cùng hàng và cùng giới tính không vượt quá 11. Chứng minh rằng số học sinh nam không vượt quá 920 người

Hướng dẫn giải

Gọi a_i là số học sinh nam hàng thứ i . Vì có 75 cột nên số học sinh nữ của hàng thứ i là $75 - a_i$.

Số cặp học sinh cùng hàng và cùng giới tính :

Chọn 2 nam trong số nam cùng hàng : $C_{a_i}^2$ cách.

Chọn 2 nữ trong số nữ cùng hàng : $C_{75-a_i}^2$ cách.

Chọn 2 bạn học sinh bất kì của một hàng : C_{75}^2 .

Theo đề bài, ta có :

$$\sum_{i=1}^{22} (C_{a_i}^2 + C_{75-a_i}^2) \leq 11C_{75}^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{22} (a_i^2 - 75a_i) \leq -30525 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{22} (2a_i - 75)^2 \leq 1650$$

Theo Cauchy-Swartz :

$$\left[\sum_{i=1}^{22} (2a_i - 75) \right]^2 \leq 22 \sum_{i=1}^{22} (2a_i - 75)^2 < 36300 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{22} a_i < \frac{191+1650}{2} < 921$$

Câu 8. Trong một giải cờ vua gồm nam và nữ vận động viên. Mỗi vận động viên phải chơi hai ván với mỗi động viên còn lại. Cho biết có 2 vận động viên nữ và cho biết số ván các vận động viên chơi với nhau hơn số ván họ chơi với hai vận động viên nữ là 66. Hỏi có bao nhiêu vận động viên tham gia giải và số ván tất cả các vận động viên đã chơi?

Hướng dẫn giải

Gọi n là số vận động viên nam tham gia ($n \geq 2, n \in \mathbb{Z}$).

Chọn 2 trong số n VĐV nam để đấu 2 ván với nhau : $2C_n^2$ cách.

Số ván VĐV nam đấu với VĐV nữ là : $4n$.

Theo đề bài, ta có :

$$2C_n^2 - 4n = 66 \Leftrightarrow \frac{2n!}{(n-2)!2!} - 4n = 66 \Leftrightarrow (n-1)n - 4n = 66 \rightarrow \begin{cases} n = 11(n) \\ n = -6(l) \end{cases}$$

Vậy số VĐV tham gia giải là : $11+2=13$ người.

Số ván các vận động viên chơi với nhau là : $2C_{11}^2 + 4.11 + 2 = 156$ ván.

Câu 9. Cho tập hợp A có 20 phần tử. Hỏi có bao nhiêu tập hợp con của A mà số phần tử là số chẵn ?

Hướng dẫn giải

Gọi S là số tập hợp có số phần tử là số chẵn.

$$S = C_{20}^2 + C_{20}^4 + C_{20}^6 + \dots + C_{20}^{20}$$

Ta xét :

$$(1+x)^{20} = C_{20}^0 + C_{20}^1 x + C_{20}^2 x^2 + C_{20}^3 x^3 \dots + C_{20}^{20}$$

$$(1-x)^{20} = C_{20}^0 - C_{20}^1 x + C_{20}^2 x^2 - C_{20}^3 x^3 \dots + C_{20}^{20}$$

Chọn $x=1$, ta được :

$$2^{20} = C_{20}^0 + C_{20}^1 + C_{20}^2 + C_{20}^3 \dots + C_{20}^{20}$$

$$0 = C_{20}^0 - C_{20}^1 + C_{20}^2 - C_{20}^3 \dots + C_{20}^{20}$$

$$\rightarrow 2^{20} = 2 + 2C_{20}^2 + 2C_{20}^4 \dots + 2C_{20}^{20}$$

$$\Leftrightarrow 2^{19} - 1 = C_{20}^2 + C_{20}^4 \dots + C_{20}^{20}$$

Câu 10. Cho n điểm $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ ($n > 4$) cùng nằm trên một đường tròn. Tìm số cách tô màu n điểm trên bằng 5 màu sao cho 2 điểm kề nhau tô bởi 2 màu khác nhau.

Hướng dẫn giải

Gọi a_n là số cách tô màu n điểm thỏa mãn. Giả sử có một vòng tròn $n+1$ điểm được tô màu theo yêu cầu.

TH1 : Điểm 1 và điểm n khác màu nhau.

➤ Bỏ đi điểm $n+1$, ta có a_n cách.

Ngược lại, nếu thêm điểm $n+1$, ta có 3 lựa chọn màu cho nó.

Vậy có $3.a_n$ cách tô màu vòng tròn $n+1$ điểm theo TH1.

TH2: điểm 1 và điểm n cùng màu :

Bỏ đi điểm $n+1$ và hợp nhất hai điểm 1 và n : a_{n-1} cách.

Ngược lại, nếu có vòng tròn $n-1$ điểm đã được tô màu. Ta tách điểm 1 ra làm hai, và thêm điểm $n+1$ vào. Khi đó nó có 4 lựa chọn màu, vì vậy : $4a_{n-1}$ cách.

Từ hai TH nêu trên, ta có : $a_{n+1} = 3a_n + 4a_{n-1}$ (với $a_5 = 5!$).

Câu 11. Một bảng ô vuông kích thước 3×3 được gọi là bảng “ 2015- hoàn thiện” nếu tất cả các ô của nó được điền bởi các số nguyên không âm (không nhất thiết phân biệt) sao cho tổng các số trên mỗi hàng và mỗi cột đều bằng 2015.

Hỏi có tất cả bao nhiêu bảng “ 2015- hoàn thiện” sao cho số nhỏ nhất trong các số ở các ô trên đường chéo chính nằm ở vị trí tâm của bảng ?

(Đường chéo chính của bảng vuông là đường nối ô vuông ở góc trên cùng bên trái với ô vuông ở góc dưới cùng bên phải.)

Hướng dẫn giải

Gọi số học sinh ban đầu là $2n$ và U_n là số cách chọn ra một số bạn xếp thành 2 hàng ngang thỏa mãn yêu cầu bài toán

Ta bỏ đi một bạn học sinh ở đầu của một hàng, còn $2n-1$ người. Gọi V_n là số cách chọn ra một số bạn từ $2n-1$ người đó thỏa mãn yêu cầu bài toán

Xét số cách chọn từ $2n$ người

1	3					n
2	4					n

TH1: Bạn ở vị trí 1 được chọn. Khi đó bạn ở vị trí 2,3 không được chọn

Vậy có $V_{n-1} + 1$ cách chọn (Thêm 1 cách không chọn ai cả từ $2n-1$ bạn)

TH2: Bạn ở vị trí 2 được chọn. Tương tự có $V_{n-1} + 1$ cách chọn

TH3: Cả 2 bạn ở vị trí 1 và 2 không được chọn. Khi đó có U_{n-1} cách

Vậy ta có $U_n = U_{n-1} + 2V_{n-1} + 2$ (1)

Xét số cách chọn từ $2n-1$ bạn

1	2					n
						n

TH1: Bạn ở vị trí 1 được chọn. khi đó bạn ở vị trí 2 không được chọn. Vậy có $V_{n-1} + 1$ cách

TH2: Bạn ở vị trí 1 không được chọn. Có U_{n-1} cách

Vậy ta có $V_n = V_{n-1} + 1 + U_{n-1}$ (2)

Từ (1) và (2) ta tìm được $U_{n+1} = 2U_n + U_{n-1} + 2$

$$\rightarrow U_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^{n+1} - 2}{2}$$

Với $n=50$ ta có số cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$$U_{50} = \frac{(1 + \sqrt{2})^{51} + (1 - \sqrt{2})^{51} - 2}{2}$$

Câu 12. Cho tập $X = \{1, 2, 3, \dots, 2015\}$, xét tất cả các tập con của X , mỗi tập hợp có 3 phần tử. Trong mỗi tập hợp con ta chọn số bé nhất. Tính trung bình cộng của các số được chọn.

Hướng dẫn giải

• Xét $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ và các tập con gồm r phần tử của X . Các tập hợp con của X có phần tử được chọn là $1, 2, \dots, n-r+1$. Cách cấu tạo các tập hợp như sau:

Lấy $A \subset X \setminus \{1\}$, A có $r-1$ phần tử (vì đã bỏ đi 1), thì $\{1\} \cup A$ là tập hợp có r phần tử trong đó số 1 là phần tử bé nhất. Vậy có: C_{n-1}^{r-1} tập con có phần tử có phần tử nhỏ nhất là 1.

Tương tự ta có:

+ C_{n-2}^{r-1} tập con có r phần tử có phần tử bé nhất là 2.

+ $C_{n-(n-r+1)}^{r-1}$ tập con có r phần tử có phần tử bé nhất là $n-r+1$.

Trung bình cộng các số được chọn :

$$P = \frac{1}{C_n^r} \left(1C_{n-1}^{r-1} + 2C_{n-2}^{r-1} + \dots + (n-r+1)C_{n-(n-r+1)}^{r-1} \right).$$

Ta chứng minh:

$$\frac{1}{C_n^r} \left(1C_{n-1}^{r-1} + 2C_{n-2}^{r-1} + \dots + (n-r+1)C_{n-(n-r+1)}^{r-1} \right) = \frac{n+1}{r+1}.$$

$$\Leftrightarrow \left(1C_{n-1}^{r-1} + 2C_{n-2}^{r-1} + \dots + (n-r+1)C_{n-(n-r+1)}^{r-1} \right) = \frac{n+1}{r+1} C_n^r = C_{n+1}^{r+1}.$$

mà $C_{n+1}^r - C_n^r = C_n^{r-1}$ ta được:

$$1(C_n^r - C_{n-1}^r) + 2(C_{n-1}^r - C_{n-2}^r) + \dots + (n-r)(C_{r+1}^r - C_r^r) = C_n^r + C_{n-1}^r + C_{n-2}^r + \dots + C_{r+1}^r + C_r^r = C_{n+1}^{r+1}$$

Vậy trung bình cộng của các số được chọn là : $\frac{2015+1}{3+1} = \frac{2016}{4}$.

Câu 13. Có bao nhiêu số tự nhiên 7 chữ số khác nhau từng đôi một, trong đó chữ số 2 đứng liền giữa hai số 1 và 3 ?

Hướng dẫn giải

Gọi số cần tìm có dạng : $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7}$.

Vì số cần tìm có 3 số $\{1; 2; 3\}$ nên ta chỉ cần chọn 4 số nữa để điền vào vị trí: C_7^4 cách.

Hoán đổi vị trí 4 số được chọn cùng với cụm $\{1; 2; 3\}$: $5!$ cách.

Hoán đổi vị trí số 3 và 1 trong cụm $\{1; 2; 3\}$: $2!$ cách.

Trong các số tạo thành có TH số 0 đứng đầu :

$a_1 = 0$ có 1 cách.

Chọn 3 số nữa để điền vào vị trí : C_6^3 cách.

Hoán đổi vị trí của cụm $\{1;2;3\}$ và 3 số vừa chọn : $4!$ cách.

Hoán đổi vị trí của số 1 và số 3 trong cụm $\{1;2;3\}$: $2!$ cách.

Vậy số các chữ số thỏa mãn yêu cầu bài toán là : $2!5!C_7^4 - 2!4!C_6^3 = 7440$ số.

Câu 14. Có 2012 con thỏ nhốt trong 1006 chuồng, mỗi chuồng có đúng hai con. Sau mỗi ngày người ta lại thay đổi vị trí của thỏ sao cho không có hai con thỏ nào đã nằm chung chuồng những ngày trước đó lại nằm chung chuồng thêm một lần nữa. Hỏi có tối đa bao nhiêu ngày làm được như vậy?

Câu 15. Cho n điểm trong mặt phẳng, với $n > 4$, trong số đó không có ba điểm nào thẳng hàng. chứng minh rằng có ít nhất $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ tứ giác lồi tạo thành có đỉnh nằm trong số n điểm đã cho.

Câu 16. Cho nhị thức $(1+2x)^n$, biết rằng $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$, (n nguyên dương). Tìm số hạng có hệ số lớn nhất trong nhị thức?

Câu 17. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển đa thức $(2-3x)^{2n}$ trong đó n là số nguyên dương thỏa mãn: $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024$ (C_n^k là số các tổ hợp chập k của n phần tử).

Câu 18. Từ các số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số, trong đó chữ số 3 có mặt đúng 3 lần, các chữ số còn lại có mặt không quá một lần. Trong các số tự nhiên nói trên, chọn ngẫu nhiên một số, tìm xác suất để số được chọn chia hết cho 3.

Câu 19. Trên bảng ô vuông 3×3 , người ta đặt một số viên sỏi sao cho mỗi ô vuông có không quá một viên sỏi. Với mỗi cách đặt ta cho tương ứng với số điểm bằng tổng số : các hàng, các cột, các đường chéo chứa số lẻ các viên sỏi trên đó. Bảng không có sỏi ứng với 0 điểm.

a) Tồn tại hay không cách đặt sỏi sao cho ô chính giữa bảng không có sỏi và số điểm tương ứng với cách đặt đó là 8.

b) Chứng minh rằng số cách đặt sỏi với điểm số là một số chẵn bằng số cách đặt sỏi với điểm số là một số lẻ.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử ô chính giữa không có sỏi và điểm số của cách đặt là 8. Như vậy 3 hàng, 3 cột và hai đường chéo đều có một số lẻ viên sỏi. Gọi a, b, c, d là số sỏi trong các ô như hình vẽ,

$a, b, c, d \in \{0, 1\}$. Khi đó các ô đối xứng với a, b, c, d qua tâm sẽ có số sỏi tương ứng là

a', b', c', d' sao cho $a + a' = b + b' = c + c' = d + d' = 1$

a	b	c
	0	d

Từ đó $(a+b+c) + (a'+b'+c') = 3$ suy ra một trong hai tổng $a+b+c$ hoặc $a'+b'+c'$ là một số chẵn. Khi đó dòng thứ nhất hoặc dòng thứ ba có tổng số sỏi là một số chẵn, mâu thuẫn với giả thiết ban đầu.

Vậy không tồn tại cách đặt sỏi thỏa mãn điều kiện bài toán.

b) Ta gọi hai cách đặt sỏi là liên hợp với nhau nếu ô trên cùng bên trái của chúng có số sỏi khác nhau và các ô còn lại tương ứng có số sỏi như nhau.

a	b	c
f	e	d
g	h	i

a'	b	c
f	0	d
g	h	i

(B) (B')

Như vậy, các cách đặt sỏi chia thành từng cặp đôi một liên hợp với nhau.

Xét hai cách đặt liên hợp với nhau (B) và (B'). Tổng số sỏi ở dòng 1, cột 1 và 1 đường chéo cả hai bảng đôi một khác nhau về tính chẵn lẻ. Các dòng, cột và đường chéo còn lại của hai bảng có số sỏi như nhau. Do đó điểm số của (B) và (B') khác nhau 3 đơn vị, suy ra số điểm của (B) và (B') có tính chẵn lẻ khác nhau.

Vậy hai cách đặt liên hợp với nhau, một cách xếp có điểm số chẵn, cách đặt còn lại có điểm số là một số lẻ suy ra điều phải chứng minh.

Câu 20. Cho các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau từ các chữ số trên.

Tính tổng các chữ số lập được.

Câu 21. Giải phương trình: $C_{14}^k + C_{14}^{k+2} = 2C_{14}^{k+1}$.

Câu 22. Cho tập hợp X có 2016 phần tử. Chọn ra 64 tập con $X_1, X_2, \dots, X_{64}$ của tập X (mỗi tập con đều chứa nhiều hơn 1008 phần tử). Chứng minh tồn tại tập con A của X có số phần tử không vượt quá 6 mà $A \cap X_i \neq \emptyset$, với $i = \overline{1, 64}$.

Câu 23. Những ô của hình vuông kích thước 7×7 được tô bằng hai màu. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 21 hình chữ nhật với đỉnh cùng màu và các cạnh song song với các cạnh của hình vuông.

Hướng dẫn giải

Ta cho màu được tô là trắng và đen. Lấy một hàng bất kỳ, ta giả sử tồn tại k ô đen và $7 - k$ ô trắng. Khi đó tồn tại $C_k^2 + C_{7-k}^2 = k^2 - 7k + 21 \geq 9$

Cặp ô cùng màu. Vậy tồn tại ít nhất $7 \cdot 9 = 63$ cặp ô cùng màu trên cùng hàng.

Tiếp theo tồn tại $C_7^2 = 21$ cặp cột. Suy ra tồn tại $21 \cdot 2 = 42$ tổ hợp của màu và cặp cột.

Với tổ hợp $i = \overline{1; 24}$, giả sử tồn tại j_i cặp trong cùng một tổ hợp, thì tồn tại ít nhất

$j_i - 1$ hình chữ nhật cho tổ hợp này. Vì tổng của j_i ít nhất là 63 nên tồn tại ít nhất

$$\sum_{i=1}^{42} (j_i - 1) \geq 63 - 42 = 21$$

Vậy tồn tại ít nhất 21 hình chữ nhật thỏa mãn yêu cầu của bài toán

Câu 24. Cho tập hợp $A = \{1; 2; \dots; 2013\}$. Cần phải loại khỏi A ít nhất bao nhiêu phần tử để tập hợp còn lại có tính chất: Không phần tử nào bằng tích của hai phần tử khác.

Hướng dẫn giải

Loại khỏi A tập hợp $\{2; 3; \dots; 44\}$, tập này có 43 phần tử. Khi đó tập còn lại là

$\{1; 45; 46; \dots; 2012; 2013\}$. Rõ ràng tập này thỏa mãn yêu cầu: Không có phần tử nào là tích của hai phần tử khác.

Ta sẽ chứng minh mọi cách tách khỏi A một tập hợp có nhiều nhất 42 phần tử đều không thỏa mãn yêu cầu đề bài. 0.5 đ

Thật vậy xét các bộ ba sau (43 bộ ba):

2, 87, 2.87

3, 86, 3.86

4, 85, 4.85

.....

44, 45, 44.45

Xét hàm số $f(x) = x(89 - x)$ với $2 \leq x \leq 44$. Ta có $f'(x) = 89 - 2x > 0, \forall 2 \leq x \leq 44$. Vậy f là hàm đồng biến khi $2 \leq x \leq 44$. Suy ra

$$f(2) < f(3) < \dots < f(44) \Rightarrow 2.87 < 3.86 < \dots < 44.45.$$

Dễ thấy $2 < 3 < \dots < 44 < 45 < 46 < \dots < 87 < 2.87 < 3.86 < \dots < 44.45$. Vì $44.45 = 1980 < 2013$ nên toàn bộ các phần tử của 43 bộ ba đều là khác nhau và đều nằm trong tập hợp A .

Vì ta tách ra khỏi A tối đa 42 phần tử, nên phần còn lại của A (sau khi tách) phải có ít nhất một bộ ba nói trên. Vậy mọi cách tách như thế không thỏa mãn yêu cầu đầu bài. 2.0 đ

Kết luận: Số phần tử ít nhất cần tách khỏi A là 43 phần tử.

Câu 25. Cho 51 điểm bất kì phân biệt nằm trong hình vuông ABCD có cạnh bằng 5, trong đó không có không có 3 điểm nào thẳng hàng. Vẽ các đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$ và có tâm lần lượt là 51 điểm trên. Chứng minh rằng tồn tại 3 điểm trong số 51 điểm nói trên sao cho chúng đều thuộc phần giao của 3 hình tròn có tâm cũng chính là 3 điểm đó.

Hướng dẫn giải

* Chia hình vuông ABCD thành 25 hình vuông đơn vị (có cạnh bằng 1)

Theo nguyên lý Dirichlet, có ít nhất 1 hình vuông đơn vị chứa không ít hơn 3 điểm.

* Mặt khác, khoảng cách giữa hai điểm bất kì trong một hình vuông đơn vị không vượt quá $\sqrt{2}$

* Gọi I_1, I_2, I_3 là 3 điểm nằm trong hình vuông đơn vị nào đó. Vẽ 3 đường tròn có tâm lần lượt là I_1, I_2, I_3 và có bán kính bằng $\sqrt{2}$ thì 3 điểm I_1, I_2, I_3 đều thuộc giao của cả 3 hình tròn này (Đpcm)

Câu 26. Cho 2013 điểm trên đường thẳng, tô các điểm bằng một trong 3 màu màu xanh, đỏ, vàng (mỗi viên bi chỉ tô một màu). Có bao nhiêu cách tô khác nhau sao cho không có 3 điểm liên tiếp nào cùng màu.

Hướng dẫn giải

Gọi S_n là số cách tô màu thỏa mãn cho n ($n \geq 3$) điểm (bài toán của ta là $n = 2013$). Ta sẽ tính S_{n+1} theo S_n , xét hai bi cuối cùng của S_n có hai trường hợp xảy ra:

+Nếu hai bi cuối cùng màu thế thì bi thứ $n+1$ khác màu 2 bi cuối.

+Nếu hai bi cuối khác màu thì bi thứ $n+1$ tô bất kì.

Từ đó sinh ra hai số đặc trưng M_n là số cách tô n bi mà hai bi cuối cùng màu, P_n là số cách tô màu n bi mà hai bi cuối khác màu và cả hai cùng thỏa mãn 3 bi liên tiếp khác màu.

Ta có: $S_{n+1} = 2M_n + 2P_n$, $P_{n+1} = 2S_n$; $M_{n+1} = P_n$.

Thế thì $S_{n+1} = 2P_{n-1} + 6S_n = 4S_{n-2} + 6S_{n-1}$. Vậy ta có hệ thức truy hồi: $S_{n+1} - 6S_{n-1} - 4S_{n-2} = 0$.

Bây giờ ta tính S_3, S_4 thấy ngay $S_3 = 27 - 3 = 24$, $S_4 = 4! - 3 - 12 = 49$. Phương trình đặc trưng

$X^2 - 6X - 4 = 0$ có nghiệm là: $x_1 = 3 + \sqrt{13}, x_2 = 3 - \sqrt{13}$. Công thức xác định $S_n = ax_1^n + bx_2^n$

$$\text{với } a, b \text{ thỏa mãn: } \begin{cases} a(3 + \sqrt{13})^3 + b(3 - \sqrt{13})^3 = 24 \\ a(3 + \sqrt{13})^4 + b(3 - \sqrt{13})^4 = 49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{24\sqrt{13} - 23}{2\sqrt{13}(3 + \sqrt{13})^3} \\ b = \frac{24\sqrt{13} + 23}{2\sqrt{13}(3 - \sqrt{13})^3} \end{cases}$$

Sau đó cho $n = 2013$ ta được kết quả bài toán.

Câu 27. Đối với mỗi giá trị của $n \in \mathbb{N}$, tìm số k lớn nhất thỏa mãn trong tập hợp gồm n phần tử có thể chọn ra k tập con khác nhau sao cho hai tập con bất kỳ đều có giao khác rỗng.

Hướng dẫn giải

Số tập con của X là 2^n . Giả sử chọn được $2^{n-1} + 1$ tập con của X có giao khác rỗng. Ta chia các tập con của X thành 2^{n-1} cặp được tạo bởi một tập con của X và phần bù của tập con đó trong X . Có 2^{n-1} cặp, chọn ra $2^{n-1} + 1$ tập từ 2^{n-1} cặp nên theo nguyên lý Dirichlet phải có ít nhất 2 tập thuộc cùng một cặp, và do đó giao của nó bằng rỗng. Điều này chứng tỏ không thể chọn được lớn hơn hoặc bằng $2^{n-1} + 1$ tập sao cho giao của hai tập bất kỳ trong chúng khác rỗng.

Số tập con của X không chứa phần tử a_i là 2^{n-1} . Số tập con của X chứa a_i là $2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$.

Do đó có 2^{n-1} tập con của X có giao là phần tử a_i nên số k lớn nhất cần tìm là 2^{n-1} .

Câu 28. Với mỗi số tự nhiên $k > 0$, số $(2 + \sqrt{5})^{2k}$ luôn được viết dưới dạng $a_k + b_k\sqrt{5}$ với

a_k, b_k là các số nguyên dương.

a) Tìm hệ thức xác định dãy $(a_k), (b_k)$.

b) Chứng minh: $20b_k b_{k+1} + 16$ là số chính phương.

c) Chứng minh: $a_{k+2}^2 - 1$ chia hết cho 5.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{5})^{2(k+1)} &= (2 + \sqrt{5})^{2k} (2 + \sqrt{5})^2 = (2 + \sqrt{5})^{2k} (9 + 4\sqrt{5}) \\ &= 9a_k + 20b_k + (4a_k + 9b_k)\sqrt{5} = a_{k+1} + b_{k+1}\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a_{k+1} = 9a_k + 20b_k \\ b_{k+1} = 4a_k + 9b_k \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
a_{k+2} &= 9a_{k+1} + 20b_{k+1} = 9a_{k+1} + 20(4a_k + 9b_k) = 9a_{k+1} + 20.4a_k + 20.9b_k \\
&= 9a_{k+1} + 20.4a_k + 9(a_{k+1} - 9a_k) = 18a_{k+1} - a_k
\end{aligned}$$

Vậy dãy (a_k) được xác định:
$$\begin{cases} a_1 = 9, a_2 = 161 \\ a_{k+2} = 18a_{k+1} - a_k, \forall k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Tương tự ta được dãy (b_k) :
$$\begin{cases} b_1 = 4, b_2 = 72 \\ b_{k+2} = 18b_{k+1} - b_k, \forall k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
b) \quad b_{k+1}^2 - b_{k+2}b_k &= b_{k+1}^2 - (18b_{k+1} - b_k)b_k = b_k^2 - b_{k+1}(18b_k - b_{k+1}) = b_k^2 - b_{k+1}b_{k-1} \\
&= \dots = b_2^2 - b_3b_1 = 16
\end{aligned}$$

Mặt khác: $16 = b_{k+1}^2 - b_k b_{k+2} = b_{k+1}^2 + b_k(b_k - 18b_{k+1}) = b_{k+1}^2 + b_k^2 - 18b_k b_{k+1}$

Suy ra $20b_{k+1}b_k + 16 = b_{k+1}^2 + b_k^2 + 2b_{k+1}b_k = (b_{k+1} + b_k)^2$

Do các số hạng của dãy (b_k) là số nguyên nên $20b_k b_{k+1} + 16$ là số chính phương.

c) $a_{k+2} = 18a_{k+1} - a_k \Leftrightarrow a_{k+2} - 9a_{k+1} = 9a_{k+1} - a_k$

Suy ra $(a_{k+2} - 9a_{k+1})^2 = (9a_{k+1} - a_k)^2$ hay $a_{k+2}^2 - 18a_{k+2}a_{k+1} = a_k^2 - 18a_{k+1}a_k$

Thay $k = 1, 2, 3, \dots$ ta được:

$$a_3^2 - 18a_3a_2 = a_1^2 - 18a_2a_1$$

$$a_4^2 - 18a_4a_3 = a_2^2 - 18a_3a_2$$

...

$$a_{k+1}^2 - 18a_{k+1}a_k = a_{k-1}^2 - 18a_k a_{k-1}$$

$$a_{k+2}^2 - 18a_{k+2}a_{k+1} = a_k^2 - 18a_{k+1}a_k$$

Cộng vế theo vế, ta có:

$$a_{k+2}^2 + a_{k+1}^2 - 18a_{k+2}a_{k+1} = a_1^2 - 18a_1a_2 + a_2^2 = -80$$

Khi đó: $a_{k+2}^2 - 1 = \frac{(9a_{k+2} - a_{k+1})^2}{80}$

Do $a_k \in \mathbb{Z}$ nên $(9a_{k+2} - a_{k+1})^2$ chia hết cho $80 = 4^2.5$ nên $9a_{k+2} - a_{k+1}$ chia hết cho 20

Từ đó, ta được: $9a_{k+2} - a_{k+1} = 20m, m \in \mathbb{Z}$ hay $a_{k+2}^2 - 1 = \frac{(20m)^2}{80} = 5m^2$

Vậy $a_{k+2}^2 - 1$ chia hết cho 5.

Câu 29. Gọi A là tập hợp các số tự nhiên có tám chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên thuộc vào tập A . Tính xác suất để chọn được một số thuộc A và số đó chia hết cho 9.

Hướng dẫn giải

Gọi A là tập hợp các số tự nhiên có tám chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên thuộc vào tập A . Tính xác suất để chọn được một số thuộc A và số đó chia hết cho 9.

+) Trước hết ta tính $n(A)$. Với số tự nhiên có tám chữ số đôi một khác nhau thì chữ số đầu tiên có 9 cách chọn và có A_9^7 cho 7 vị trí còn lại. Vậy $n(A) = 9A_9^7$.

+) Giả sử $B = \{0; 1; 2; \dots; 9\}$ ta thấy tổng các phần tử của B bằng $45:9$ nên số có chín chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 9 sẽ được tạo thành từ 8 chữ số đôi một khác nhau của các tập $B \setminus \{0; 9\}; B \setminus \{1; 8\}; B \setminus \{2; 7\}; B \setminus \{3; 6\}; B \setminus \{4; 5\}$

Nên số các số loại này là $A_8^8 + 4.7.A_7^7$.

Vậy xác suất cần tìm là $\frac{A_8^8 + 4.7.A_7^7}{9.A_9^7} = \frac{1}{9}$.

Câu 30. a) Gọi M là tập tất cả các số tự nhiên có sáu chữ số đôi một khác nhau và có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập M . Tính xác suất để số được chọn là một số chẵn, đồng thời thỏa mãn $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6$.

Tính tổng: $S = \frac{-C_n^1}{2.3} + \frac{2C_n^2}{3.4} - \frac{3C_n^3}{4.5} + \dots + \frac{(-1)^n nC_n^n}{(n+1)(n+2)}$.

Hướng dẫn giải

Gọi M là tập tất cả các số tự nhiên có sáu chữ số đôi một khác nhau ...

Ta có: $n(M) = 9.A_9^5$ (số có sáu chữ số đôi một khác nhau thì a_1 có chín cách chọn, $\overline{a_2a_3a_4a_5a_6}$ là chỉnh hợp chập 5 của 9 phần tử nên có A_9^5).

+) Gọi A là biến cố “chọn ra được một số tự nhiên chẵn từ tập M đồng thời thỏa mãn $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6$ ”.

TH1: $a_6 = 0$ thì $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ có C_9^5 cách chọn.

TH2: $a_6 = 2$ thì $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$ có C_7^5 cách chọn.

TH3: $a_6 = 4$ thì $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$ có C_5^5 cách chọn.

$$n(A) = C_9^5 + C_7^5 + C_5^5 = 148$$

$$\text{Do đó } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{148}{9 \cdot A_9^5} = \frac{37}{34020}.$$

$$\text{Tính tổng: } S = \frac{-C_n^1}{2.3} + \frac{2C_n^2}{3.4} - \frac{3C_n^3}{4.5} + \dots + \frac{(-1)^n nC_n^n}{(n+1)(n+2)}.$$

Ta có:

$$\frac{C_n^k}{k+1} = \frac{n!}{k!(k+1)(n-k)!} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1} \quad (3)$$

$$\text{Áp dụng 2 lần công thức (3) ta được: } \frac{(-1)^k kC_n^k}{(k+1)(k+2)} = \frac{(-1)^k kC_{n+2}^{k+2}}{(n+1)(n+2)}$$

Cho k chạy từ 1 đến n rồi cộng về các đẳng thức trên ta có

$$\begin{aligned} (n+1)(n+2)S &= -C_{n+2}^3 + 2C_{n+2}^4 - 3C_{n+2}^5 + \dots + (-1)^n nC_{n+2}^{n+2} \\ &= -(C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3) + 2(C_{n+1}^3 + C_{n+1}^4) - 3(C_{n+1}^4 + C_{n+1}^5) + \dots + (-1)^n nC_{n+1}^{n+1} \\ &= -C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 - C_{n+1}^4 + \dots + (-1)^n C_{n+1}^{n+1} \\ &= C_{n+1}^0 - C_{n+1}^1 - (C_{n+1}^0 - C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 - C_{n+1}^3 + C_{n+1}^4 - C_{n+1}^5 + \dots + (-1)^{n+1} C_{n+1}^{n+1}) = \\ &= 1 - (n+1) - (1-1)^{n-1} = -n \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \frac{-n}{(n+1)(n+2)}$$

Câu 31. Trong 1 cái hộp có 3 bi đỏ, 4 bi vàng, 5 bi xanh cùng chất, cùng kích thước. Một người lấy ngẫu nhiên cùng lúc 4 viên bi. Tính xác suất để số bi đỏ mà người đó lấy được không lớn hơn 2.

Hướng dẫn giải

Lấy ngẫu nhiên, cùng lúc 4 viên bi trong hộp có 3 bi đỏ, 4 bi vàng và 5 bi xanh nên có số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{12}^4$.

Gọi A: “Biến cố trong 4 bi lấy ngẫu nhiên có 3 bi màu đỏ”.

$$n(A) = C_3^3 \cdot C_9^1$$

$$\text{Xác suất của biến cố } A \text{ là: } P(A) = \frac{C_3^3 \cdot C_9^1}{C_{12}^4} = \frac{1}{55}$$

$$\text{Vậy xác suất để số bi đỏ mà người đó lấy được không lớn hơn 2 là } 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{55} = \frac{54}{55}$$

Câu 32. Cho tập S gồm tất cả các số nguyên trên trong đoạn $[1; 2014]$. Gọi T là tập hợp gồm tất cả các tập con không rỗng của S . Với mỗi tập hợp $X \in T$, ký hiệu $m(X)$ là trung bình cộng của tất cả các số thuộc X . Đặt $m = \frac{\sum m(X)}{|T|}$ (ở đây tổng được lấy theo tất cả các tập hợp $X \in T$). Hãy tính giá trị của m .

Hướng dẫn giải

Cho tập S gồm tất cả các số nguyên trên trong đoạn $[1; 2014]$. Gọi T là tập hợp gồm tất cả các tập con không rỗng của S . Với mỗi tập hợp $X \in T$, ký hiệu $m(X)$ là trung bình cộng của tất cả các số thuộc X . Đặt $m = \frac{\sum m(X)}{|T|}$ (ở đây tổng được lấy theo tất cả các tập hợp $X \in T$). Hãy tính giá trị của m .

Với mỗi $x \in [1, 2, \dots, 2014]$, đặt $m_k = \sum m(X)$ ở đây tổng được lấy theo tất cả các tập hợp $X \in T$ mà $|X| = k$.

Xét số a bất kỳ thuộc S , suy ra a có mặt trong C_{2013}^{k-1} tập $X \in T$ mà $|X| = k$.

$$\text{Suy ra } km_k = (1 + 2 + \dots + 2014)C_{2013}^{k-1} = 1007 \cdot 2015 \cdot C_{2013}^{k-1}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } \sum m(X) &= \sum_{k=1}^{2014} m_k = 1007 \cdot 2015 \sum_{k=1}^{2014} \left(\frac{C_{2013}^{k-1}}{k} \right) = \frac{2015}{2} \sum_{k=1}^{2014} C_{2014}^k = \frac{2015}{2} \sum_{k=1}^{2014} C_{2014}^k \\ &= \frac{2015}{2} (2^{2014} - 1) \end{aligned}$$

$$\text{Mà } |T| = (2^{2015} - 1) \Rightarrow m = \frac{2015}{2}$$

Cách 2. Xây dựng song ánh từ T vào T như sau

$$\forall X \in T \Rightarrow f(X) = \{2015 - x / x \in X\} \Rightarrow m(X) + m(f(X)) = 2015$$

$$\text{Suy ra } 2 \sum m(X) = \sum [m(X) + m(f(X))] = |T| \cdot 2015$$

$$\text{Suy ra } m = \frac{\sum m(X)}{|T|} = \frac{2015}{2}$$

Câu 33. Ở các vị trí khác nhau của một đường đua ô tô vòng tròn cùng một thời gian có 25 ô tô xuất phát theo cùng một hướng. Theo thể lệ cuộc đua, các ô tô có thể vượt lẫn nhau, nhưng cấm không được vượt đồng thời hai xe một lúc. Các ô tô đến đích là các điểm mà chúng xuất phát ban đầu cùng một lúc. Chứng minh rằng trong suốt cuộc đua có một số chẵn lần vượt nhau của các ô tô.

Hướng dẫn giải

Ở Ta sơn 1 trong 25 ô tô thành màu vàng, còn các oto khác đánh số từ 1 đến 24 theo thứ tự mà chúng ở thời điểm ban đầu sau ô tô màu vàng (theo chiều chuyển động của các ô tô). Ở tâm của đường đua ta đặt một bảng để ghi số thứ tự của các ô tô sắp xếp sau ô tô vàng sau mỗi lần các ô tô vượt nhau, tức là ta được một hoán vị của $\{1, 2, \dots, 24\}$.

Trường hợp 1:

Mỗi lần 2 ô tô trong các ô tô từ 1 đến 24 vượt nhau thì trên bảng có 2 số liền nhau đổi chỗ cho nhau.

Trường hợp 2:

Nếu trước khi có lần vượt của một ô tô nào với ô tô vàng, các số trên bảng lập thành một hoán vị $a_1, a_2, \dots, a_{24}$ thì sau lần vượt đó sẽ có hoán vị $a_2, a_3, \dots, a_{24}, a_1$.

Từ hoán vị trên có thể chuyển xuống hoán vị dưới bằng 23 phép chuyển vị, tức là phép đổi chỗ 2 số liền nhau.

Trường hợp 3:

Nếu ô tô vàng vượt một ô tô nào đó thì từ hoán vị $a_1, a_2, \dots, a_{24}$ ta có hoán vị $a_{24}, a_1, a_2, \dots, a_{23}$. Lần di chuyển này cũng có thể thay bằng 23 phép chuyển vị như trường hợp 2.

Như vậy mỗi lần các ô tô vượt nhau đều dẫn đến việc thực hiện một số lẻ lần phép chuyển vị. Ta sẽ chứng minh nếu số lần vượt nhau là số lẻ thì khi về đích các ô tô không được sắp xếp như cũ. Thật vậy gs $a_1, a_2, \dots, a_{24}$ là một cách sắp xếp tùy ý của các số $1, 2, \dots, 24$. Ta sẽ nói rằng các số a_i, a_j lập thành một nghịch thế nếu $i < j$ mà $a_i > a_j$. Khi đổi vị trí 2 số đứng liền nhau, tức là thực hiện một phép chuyển vị thì sẽ tăng hay giảm số nghịch thế đi 1. Do đó nếu các oto vượt nhau một số lẻ lần thì từ cách sắp xếp thứ tự của các oto ban đầu, đến cuối cùng ta đã thực hiện một số lẻ các phép chuyển vị, tức là số nghịch thế của lần sắp xếp cuối cùng là số lẻ, nghĩa là các ô tô không thể sắp xếp như cũ. Mâu thuẫn.

Vậy các ô tô vượt nhau một số chẵn lần.

Câu 34. Với n là số nguyên dương, một tập con của tập $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ được gọi là tốt nếu sau khi ta sắp xếp thứ tự tăng các phần tử của nó thì thu được các số lẻ, chẵn, lẻ, ... theo thứ tự.

Ví dụ các tập con tốt là $\{1, 4, 5, 6\}, \{3, 4, 7\}$, tập $\emptyset$. Tập $\{2, 3, 4, 7\}$ không là tập con tốt do nó bắt đầu bởi số chẵn.

Tính số tập con tốt của tập $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Hướng dẫn giải

Gọi f_n là số tập con tốt của $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Ta lập hệ thức truy hồi của f_n .

+ Nếu tập con tốt của $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ không lấy n thì $f_n = f_{n-1}$.

+ Nếu tập con tốt của $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ lấy n thì $f_n = f_{n-2}$.

Vậy ta có $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

Hơn nữa $f_1 = 2, f_2 = 3$

Phương trình đặc trưng $x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Suy ra $f_n = A \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + B \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$

Thay 2 giá trị đầu ta được
$$\begin{cases} A \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + B \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 2 \\ A \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 + B \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{2(2\sqrt{5} - 1)}{\sqrt{5} - 5} \\ B = \frac{2}{5 + \sqrt{5}} \end{cases}$$

Suy ra

$$f_n = \frac{2(2\sqrt{5} - 1)}{\sqrt{5} - 5} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{2}{5 + \sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n = \frac{2\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1}$$

Câu 35. Với mỗi hoán vị $p = (a_1, a_2, \dots, a_9)$ của các chữ số $1, 2, \dots, 9$, kí hiệu $s(p)$ là tổng của ba số có 3 chữ số $\overline{a_1 a_2 a_3}, \overline{a_4 a_5 a_6}, \overline{a_7 a_8 a_9}$. Trong các $s(p)$ có hàng đơn vị bằng 0, gọi m là giá trị nhỏ nhất của nó và n là số các hoán vị p thỏa mãn $s(p) = m$. Tính $|m - n|$.

Hướng dẫn giải

Với mỗi hoán vị $p = (a_1, a_2, \dots, a_9)$ của các chữ số $1, 2, \dots, 9$, kí hiệu $s(p)$ là tổng của ba số có 3 chữ số $\overline{a_1 a_2 a_3}, \overline{a_4 a_5 a_6}, \overline{a_7 a_8 a_9}$. Trong các $s(p)$ có hàng đơn vị bằng 0, gọi m là giá trị nhỏ nhất của nó và n là số các hoán vị p thỏa mãn $s(p) = m$. Tính $|m - n|$.

Với mỗi hoán vị $p = (a_1, a_2, \dots, a_9)$ của các chữ số $1, 2, \dots, 9$, kí hiệu $s(p)$ là tổng của ba số có 3 chữ số $\overline{a_1 a_2 a_3}, \overline{a_4 a_5 a_6}, \overline{a_7 a_8 a_9}$. Trong các $s(p)$ có hàng đơn vị bằng 0, gọi m là giá trị nhỏ nhất của nó và n là số các hoán vị p thỏa mãn $s(p) = m$. Tính $|m - n|$.

Để $s(p)$ đạt giá trị nhỏ nhất thì 3 chữ số hàng trăm là $1, 2, 3$, $s(p)$ có chữ số tận cùng bằng 0 thì các chữ số hàng đơn vị có tổng là bội của 10. Và từ các chữ số $4, 5, 6, 7, 8, 9$ không có ba số nào có tổng bằng 10 và vì $7 + 8 + 9 = 24 < 30$ nên 3 chữ số hàng đơn vị phải có tổng bằng 20, ta thấy $5 + 6 + 9 = 4 + 7 + 9 = 5 + 7 + 8 = 20$, có ba bộ số có thể xếp vào 3 chữ số ở hàng đơn vị, tương ứng các chữ số còn lại sẽ là hàng chục. Do đó giá trị nhỏ nhất của $s(p)$ là $m = (1 + 2 + 3) \times 100 + 19 \times 10 + 20 = 810$

Như vậy có 3 trường hợp, trong mỗi trường hợp có 6 cách chọn 3 chữ số hàng trăm, 6 cách chọn 3 chữ số hàng chục và 6 cách chọn 3 chữ số hàng đơn vị. Vậy số các hoán vị p thỏa mãn yêu cầu bài toán là $n = 3 \times 6 \times 6 \times 6 = 648$.

Vậy $|m - n| = 162$.

Câu 36. Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 4$). Biết rằng số tập con gồm 4 phần tử của A bằng 20 lần số tập con gồm 2 phần tử của A. Tìm $K \in \{1; 2; \dots; n\}$ sao cho số tập con gồm K phần tử của A là lớn nhất?

Hướng dẫn giải (Không có giải)

Câu 37. Một số điện thoại di động là một dãy số gồm 10 chữ số được chọn từ $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, nhưng chữ số đầu tiên phải là 0. Mr. Fat có số điện thoại 0912364587 là một dãy số gồm 10 chữ số có tính chất 9 chữ số sau (không kể chữ số 0 đầu tiên) là phân biệt,

khác 0; đồng thời các chữ số từ 1 đến 5 xuất hiện trong dãy từ trái qua phải theo đúng thứ tự tự nhiên của chúng, còn các chữ số từ 1 đến 6 thì không. Mrs. Fat cũng muốn chọn được một số điện thoại có cùng tính chất như vậy. Hỏi bà ta có bao nhiêu cách chọn (sự lựa chọn)?

Hướng dẫn giải (Không có giải)

Câu 38. Gọi A là tập hợp các số tự nhiên có tám chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên thuộc vào tập A . Tính xác suất để chọn được một số thuộc A và số đó chia hết cho 9.

Hướng dẫn giải

Gọi A là tập hợp các số tự nhiên có tám chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên thuộc vào tập A . Tính xác suất để chọn được một số thuộc A và số đó chia hết cho 9.

+) Trước hết ta tính $n(A)$. Với số tự nhiên có tám chữ số đôi một khác nhau thì chữ số đầu tiên có 9 cách chọn và có A_9^7 cho 7 vị trí còn lại. Vậy $n(A) = 9A_9^7$

+) Giả sử $B = \{0; 1; 2; \dots; 9\}$ ta thấy tổng các phần tử của B bằng $45:9$ nên số có chín chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 9 sẽ được tạo thành từ 8 chữ số đôi một khác nhau của tập $B \setminus \{0; 9\}; B \setminus \{1; 8\}; B \setminus \{2; 7\}; B \setminus \{3; 6\}; B \setminus \{4; 5\}$ nên số các số loại này là $A_8^8 + 4.7.A_7^7$.

Vậy xác suất cần tìm là $\frac{A_8^8 + 4.7.A_7^7}{9.A_9^7} = \frac{1}{9}$.

Câu 39. Có n học sinh ($n \geq 2$) đứng thành hàng dọc, cứ mỗi lần thầy giáo thổi còi thì có đúng 2 học sinh đổi chỗ cho nhau. Hỏi sau 2015 lần thầy giáo thổi còi, ta có thể thấy tất cả các học sinh đều đứng trở lại đúng vị trí ban đầu của mình hay không ?

Hướng dẫn giải

Đánh số từ 1 đến n cho các bạn học sinh trong hàng dọc lúc đầu. Ký hiệu P_n là tập các hoán vị của $\{1, 2, \dots, n\}$.

Gọi $\pi = (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$ là một hoán vị của $\{1, 2, \dots, n\}$. Cặp $(\pi(i), \pi(j))$ của π gọi là 1 nghịch thế của π nếu $i < j$ và $\pi(i) > \pi(j)$.

Xét ánh xạ $f_i: P_n \rightarrow P_n$ mà $f_i(\pi)$ thu được từ π bằng cách đổi chỗ hai vị trí kề nhau $(\pi(i), \pi(i+1))$ và giữ nguyên các vị trí còn lại.

Cho $i, j \in \mathbb{N}^*, i < j \leq n$. Xét ánh xạ $f_{ij}: P_n \rightarrow P_n$

$$f_{ij} = f_{j-1} \circ f_{j-2} \circ f_{j-3} \circ \dots \circ f_{i+2} \circ f_{i+1} \circ f_i \circ \dots \circ f_{j-3} \circ f_{j-2} \circ f_{j-1} \quad (1)$$

Là hợp thành của $2(j-i)-1$ ánh xạ. Dễ thấy $f_{ij}(\pi)$ thu được từ π bằng cách đổi vị trí của $(\pi(i), \pi(j))$ và giữ nguyên các vị trí còn lại.

Gọi $T(\pi)$ là số nghịch thế của hoán vị π .

Ta có $T(f_i(\pi)) = \begin{cases} T(\pi) - 1 & \text{nếu } (\pi(i); \pi(i+1)) \text{ là nghịch thế} \\ T(\pi) + 1 & \text{nếu } (\pi(i); \pi(i+1)) \text{ không là nghịch thế} \end{cases}$

Do vậy $T(f_i(\pi)) \equiv T(\pi) + 1 \pmod{2}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $T(f_{ij}(\pi)) \equiv T(\pi) + 1 \pmod{2}$ (3).

Giả sử π_k là thứ tự của n học sinh sau lần thôi còi thứ k của thầy giáo.

Ta có $\pi_k \in P_n$ và $\pi_{k+1} = f_{ij}(\pi_k)$ với $1 \leq i < j \leq n$ nào đó.

Theo (3) ta có $T(\pi_{k+1}) \equiv T(\pi_k) + 1 \pmod{2}$.

Do đó $T(\pi_k) \equiv T(\pi_0) + k \equiv k \pmod{2}$ (vì $T(\pi_0) = 0$).

Nếu k lẻ thì $T(\pi_k) \not\equiv 0 \pmod{2}$ do đó $\pi_k \neq \pi_0$. Vậy sau 2015 lần thôi còi, tất cả các học sinh không thể đứng trở lại đúng vị trí ban đầu của mình.

Câu 40. Lấy ngẫu nhiên 7 số tự nhiên có 7 chữ số khác nhau. Tìm xác suất để trong đó có đúng 4 số chẵn.

Hướng dẫn giải

Số các stn có 7 chữ số khác nhau là: $9A_9^6 = 544320$ số. Trong đó có số các số lẻ là: $5.8.A_8^5 = 268800$ số, vậy có 275520 số chẵn.

KGM có số phần tử là: C_{544320}^7 .

Số cách lấy 7 stn trong đó có đúng 4 số chẵn là $C_{275520}^4 \times C_{268800}^3 = 74059776000$

$\Rightarrow P \approx 0.27668828$

Câu 41. Lấy ngẫu nhiên 498 số nguyên dương không vượt quá 1000. Chứng minh rằng trong đó có 2 số có tổng chia hết cho 111.

Hướng dẫn giải

Xét tập $S = \{1, 2, \dots, 1000\}$ ta phân hoạch S như sau:

$A = \{1000\}$, $B = \{111; 222; \dots; 999\}$

Và chia tập $T = S \setminus (A \cup B)$ thành các tập con có 2 phần tử mà tổng bằng 999 như sau:

$$T_1=\{1;998\}, T_2=\{2;997\}, T_3=\{3;996\}, \dots, T_{495}=\{499;500\}.$$

Như vậy S được chia thành 497 tập con, vậy 498 số được chọn ngẫu nhiên phải có 2 số rơi vào cùng một tập hợp.

Hai số đó hoặc cùng chia hết cho 111 hoặc có tổng bằng 999 nên tổng của chúng chia hết cho 111

Câu 42. 1. Chứng minh rằng : $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n = 3^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

2. Một bình chứa 9 viên bi chỉ khác nhau về màu gồm 4 bi xanh, 3 bi đỏ, 2 bi vàng. Lấy ngẫu nhiên 2 bi. Tính xác suất để được 2 bi khác màu.

Hướng dẫn giải

$$1. (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \dots + C_n^n x^n$$

$$* \text{ Cho } x = 2 : C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n = 3^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$2. \text{ Không gian mẫu : } C_9^2 = 36$$

$$* \text{ Kết quả thuận lợi của biến cố lấy 2 bi khác màu : } C_4^1 \cdot C_3^1 + C_3^1 \cdot C_2^1 + C_4^1 \cdot C_2^1 = 26$$

$$* \text{ Xác suất cần chọn 2 bi khác màu : } P = \frac{26}{36} \approx 0,72 \quad (72\%)$$

Câu 43. Có bao nhiêu cách chọn ra k người từ n người xếp hàng dọc sao cho không có 2 người liên tiếp được chọn.

Hướng dẫn giải

Giả sử k người được chọn là: $a_1; a_2; \dots; a_k$

Gọi x_1 là số người đứng trước a_1

Gọi x_2 là số người đứng giữa a_1 và a_2

.....

Gọi x_k là số người đứng giữa a_{k-1} và a_k

Và x_{k+1} là số người đứng bên phải a_k

Mỗi cách chọn bộ $(a_1; a_2; \dots; a_k)$ bằng số cách chọn bộ $(x_1; x_2; \dots; x_k; x_{k+1})$ thỏa mãn

$$+) \sum_{i=1}^{k+1} x_i = n - k$$

$$+) x_1 \geq 0; x_{k+1} \geq 0$$

$$+) x_j > 0 \quad \forall i = 2; 3; \dots; k$$

Hàm sinh cho cách chọn x_1 và x_{k+1} giống nhau là: $1 + t + t^2 + \dots = \frac{1}{1-t}$

Hàm sinh cho số cách chọn mỗi x_i ($i = \overline{2; k}$) giống nhau là: $t + t^2 + t^3 + \dots = \frac{t}{1-t}$

Hàm sinh cho số cách chọn bộ $(x_1; x_2; \dots; x_k; x_{k+1})$ là: $f(t) = \frac{1}{1-t} \cdot \frac{1}{1-t} \cdot \left(\frac{t}{1-t}\right)^{k-1} = \frac{t^{k-1}}{(1-t)^{k+1}}$

Số cách chọn bộ số: $(a_1; a_2; \dots; a_k)$ bằng số cách chọn bộ số $(x_1; x_2; \dots; x_k; x_{k+1})$ là: $\frac{f^{(n-k)}(0)}{(n-k)!}$

Câu 44. Các số nguyên được viết vào 441 ô của bảng vuông 21×21 . Mỗi hàng và mỗi cột có nhiều nhất 6 giá trị khác nhau. Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên có mặt ở ít nhất 3 cột và ít nhất 3 hàng.

Hướng dẫn giải

Giả sử các giá trị được ghi vào bảng là $1, 2, \dots, n$. Gọi a_i là số cột khác nhau mà i ($i \in \overline{1, n}$) có mặt và b_i là số hàng khác nhau mà i có mặt. Gọi T_i là số ô được đánh số i , ta có $T_i T_i \leq a_i b_i \Rightarrow 441 = \sum T_i = \sum a_i b_i$.

Mỗi cột và mỗi hàng có không quá 6 giá trị khác nhau, nên

$$\sum a_i \leq 6.21, \sum b_i \leq 6.21.$$

Giả sử với mọi i , ta có $a_i \leq 2, b_i \leq 2$. Khi đó:

$$(a_i - 2)(b_i - 2) \leq 1 \Rightarrow \sum a_i b_i \leq 2 \sum a_i + 2 \sum b_i - 3n \leq 21.24 - 3n$$

Vậy $n \leq 21$.

Mặt khác nếu đặt $A = \{i \mid a_i \leq 2, b_i \geq 3\}, B = \{i \mid b_i \leq 2, a_i \geq 3\}$ thì với mỗi cột có 21 ô và mỗi hàng có không quá 6 giá trị khác nhau nên tồn tại giá trị xuất hiện ở 4 hàng, giá trị này thuộc A nên xuất hiện nhiều nhất là ở hai cột. Do có tất cả 21 cột nên số giá trị như thế không ít hơn

$$\left\lfloor \frac{21+2-1}{2} \right\rfloor = 11 \Rightarrow |A| \geq 11.$$

Tương tự $|B| \geq 11$, nên $n \geq |A| + |B| \geq 22$. Mâu thuẫn nhận được suy ra điều phải chứng minh.

Câu 45. Cho khai triển: $(1+x+x^2+x^3+\dots+x^{2010})^{2011} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{4042110}x^{4042110}$.

a. Tính tổng $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{4042110}$.

b. Chứng minh đẳng thức sau:

$$C_{2011}^0 a_{2011} - C_{2011}^1 a_{2010} + C_{2011}^2 a_{2009} - C_{2011}^3 a_{2008} + \dots + C_{2011}^{2010} a_1 - C_{2011}^{2011} a_0 = -2011.$$

Hướng dẫn giải

a./ Từ khai triển trên lần lượt cho $x = -1; x = 1$ ta được

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{4042110} = 2011^{2011} \\ a_0 - a_1 + a_2 - \dots + a_{4042110} = 1 \end{cases}$$

Cộng từng vế hai đẳng thức trên và chia cả hai vế cho 2 ta được

$$A = a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{4042110} = \frac{2011^{2011} + 1}{2}.$$

b./ Xét $x \neq 1$ từ khai triển trên ta có:

$$(1-x^{2011})^{2011} = (1-x)^{2011} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{4042110}x^{4042110}).$$

Hệ số của x^{2011} trong vế trái bằng $-C_{2011}^1 = -2011$.

Hệ số của x^{2011} trong vế phải bằng

$$C_{2011}^0 a_{2011} - C_{2011}^1 a_{2010} + C_{2011}^2 a_{2009} - C_{2011}^3 a_{2008} + \dots + C_{2011}^{2010} a_1 - C_{2011}^{2011} a_0$$

Từ đó ta có đẳng thức

$$C_{2011}^0 a_{2011} - C_{2011}^1 a_{2010} + C_{2011}^2 a_{2009} - C_{2011}^3 a_{2008} + \dots + C_{2011}^{2010} a_1 - C_{2011}^{2011} a_0 = -2011.$$

Câu 46. Gọi A là tập hợp các số tự nhiên có chín chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên thuộc vào tập A . Tính xác suất để chọn được một số thuộc A và số đó chia hết cho 3.

Hướng dẫn giải

+) Trước hết ta tính $n(A)$. Với số tự nhiên có chín chữ số đôi một khác nhau thì chữ số đầu tiên có 9 cách chọn và có A_8^8 cho 8 vị trí còn lại. Vậy $n(A) = 9A_8^8$.

+) Giả sử $B = \{0; 1; 2; \dots; 9\}$ ta thấy tổng các phần tử của B bằng $45:3$ nên số có chín chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 3 sẽ được tạo thành từ 9 chữ số của các tập $B \setminus \{0\}; B \setminus \{3\}; B \setminus \{6\}; B \setminus \{9\}$ nên số các số loại này là

$$A_8^9 + 3.8.A_8^8. \text{ Vậy xác suất cần tìm là } \frac{A_8^9 + 3.8.A_8^8}{9.A_8^8} = \frac{11}{27}.$$

Câu 47. Tính giá trị của biểu thức: $C = 2009^{2006}.C_{2008}^1 + 2009^{2004}.C_{2008}^3 + \dots + 2009^2.C_{2008}^{2005} + C_{2008}^{2007}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức nhị thức Niuton ta có:

$$(x+1)^{2008} = x^{2008}C_{2008}^0 + x^{2007}C_{2008}^1 + x^{2006}C_{2008}^2 + x^{2005}C_{2008}^3 + \dots + xC_{2008}^{2007} + C_{2008}^{2008},$$

$$(x-1)^{2008} = x^{2008}C_{2008}^0 - x^{2007}C_{2008}^1 + x^{2006}C_{2008}^2 - x^{2005}C_{2008}^3 + \dots - xC_{2008}^{2007} + C_{2008}^{2008}.$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)^{2008} - (x-1)^{2008}}{2} = x^{2007}C_{2008}^1 + x^{2005}C_{2008}^3 + \dots + x^3C_{2008}^{2005} + xC_{2008}^{2007}.$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)^{2008} - (x-1)^{2008}}{2x} = x^{2006} C_{2008}^1 + x^{2004} C_{2008}^3 + \dots + x^2 C_{2008}^{2005} + C_{2008}^{2007}.$$

Từ đẳng thức trên cho $x = 2009$ ta được

$$\frac{(2010)^{2008} - (2008)^{2008}}{2 \cdot 2009} = 2009^{2006} C_{2008}^1 + 2009^{2004} C_{2008}^3 + \dots + 2009^2 C_{2008}^{2005} + C_{2008}^{2007}.$$

$$\text{Vậy } C = \frac{(2010)^{2008} - (2008)^{2008}}{2 \cdot 2009}.$$

Câu 48. Khai triển $P(x) = (1+3x)^{20}$ thành $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{20}x^{20}$.

Tìm $\max(a_1, a_2, \dots, a_{20})$

Hướng dẫn giải.

Ta có $a_k = C_{20}^k \cdot 3^k$, $a_k > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\text{Xét tỉ số } A = \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2(20-k)}{k+1}$$

Khi $k < \frac{59}{4}$ thì $A > 1$ do đó $a_{k+1} > a_k \quad \forall k = 0, 1, \dots, 14$

Khi $k > \frac{59}{4}$ thì $A < 1$ do đó $a_{k+1} < a_k \quad \forall k = 15, 16, \dots, 20$

Mặt khác $a_{15} > a_{14}$. Vậy $\max(a_1, a_2, \dots, a_{20}) = a_{15} = C_{20}^{15} \cdot 3^{15}$

Câu 49. Trong một buổi liên hoan có 9 cặp nam nữ, trong đó có 4 cặp là vợ chồng, cần chọn 3 người đứng ra tổ chức liên hoan. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho trong 3 người được chọn không có cặp vợ chồng nào?

Hướng dẫn giải.

Có C_{18}^3 cách chọn 3 người trong 9 cặp nam nữ

Có $4 \cdot C_{16}^1$ cách chọn 3 người trong đó có 1 cặp vợ chồng

Vậy có $C_{18}^3 - 4 \cdot C_{16}^1 = 752$ cách chọn 3 người thỏa mãn bài toán.

Câu 50. Chứng minh rằng đa thức $P(x) = (x^2 - 12x + 11)^4 + 23$ không thể biểu diễn thành tích của 3 đa thức hệ số nguyên và có bậc không nhỏ hơn 1.

Hướng dẫn giải.

Giả sử phản chứng rằng $P(x) = Q(x)H(x)R(x)$ với $Q(x), H(x), R(x) \in \mathbb{Z}_{[x]}$ và không phải các đa thức hằng.

Từ $P(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, bậc của $Q(x), H(x), R(x)$ là chẵn. Từ đó suy ra rằng hai trong ba đa thức này là đa thức bậc hai. Giả sử rằng $\deg Q(x) = \deg H(x) = 2$.

Từ $P(1) = P(11) = 23$ suy ra rằng $Q(1), Q(11)$ là ước của 23. Có nghĩa là $Q(1), Q(11) \in \{\pm 1; \pm 23\}$. Nhưng bởi vì $[Q(11) - Q(1)] : 10$ nên $Q(11) = Q(1)$. Tương tự, $H(11) = H(1)$.

Mặt khác, $Q(1)H(1)$ là ước của 23 do đó ít nhất một trong số $Q(1)$ hoặc $H(1)$ là ± 1 .

Không mất tính tổng quát giả sử $Q(1) = \pm 1$ thì $Q(11) = Q(1) = \pm 1$. Từ đó suy ra $Q(x) = (x-1)(x-11) \pm 1$. Nhưng điều này kéo theo $Q(x)$ có ít nhất một nghiệm thực trong khi $P(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, mâu thuẫn. Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Câu 51. Hội khỏe Phù Đổng năm 2014 có tổ chức thi đấu 4 môn thể thao **chạy 100m, nhảy xa, nhảy cao, bắn cung** và quy định điều kiện cho mỗi đội tham gia như sau:

- Mỗi vận động viên của một đội chỉ thi đấu duy nhất một môn thể thao.
- Mỗi đội có thể lựa chọn số vận động viên cho mỗi môn tùy ý (nhưng tổng số vận động viên đúng bằng 20).

Tại lễ khai mạc, mỗi đội xếp thành một hàng dọc, các vận động viên chạy 100m cầm cờ đỏ đứng đầu, tiếp theo đến vận động viên nhảy xa cầm cờ vàng rồi đến vận động viên nhảy cao

cầm cò xanh và cuối cùng là vận động viên bắn cung cầm cò tím. Giả sử số đội tham dự là đủ lớn, hỏi có thể có tối đa bao nhiêu loại hàng dọc (phân biệt theo độ dài mỗi màu của hàng).

Hướng dẫn giải

Bài này có thể giải theo phương pháp song ánh để tính số phần tử của tập hợp kết hợp với kỹ thuật dùng dãy nhị phân.

Ta thấy mỗi hàng sẽ tương ứng với một bộ 4 số (a, b, c, d) với $\begin{cases} 0 \leq a, b, c, d \leq 20 \\ a + b + c + d = 20 \end{cases}$ để chỉ số lượng vận động viên thi đấu mỗi môn chạy 100m, nhảy xa, nhảy cao, bắn cung tương ứng. Với mỗi bộ 4 số như thế ta đặt tương ứng với dãy nhị phân $\overbrace{1\dots 1}^a \overbrace{01\dots 10}^b \overbrace{1\dots 101\dots 1}^c \overbrace{1\dots 1}^d$. Dễ thấy tương ứng đó là một song ánh và có C_{23}^3 dãy nhị phân khác nhau do đó có tối đa $C_{23}^3 = 1771$ loại hàng dọc khác nhau.

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , thì phần nguyên của số $(2 + \sqrt{3})^n$ là số lẻ.

Hướng dẫn giải

Theo công thức nhị thức Newton, ta có:

$$(2 + \sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (\sqrt{3})^k 2^{n-k}$$

$$(2 - \sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k (\sqrt{3})^k 2^{n-k}$$

$$\text{Do đó: } (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (1 + (-1)^k) (\sqrt{3})^k 2^{n-k} \quad (1)$$

Chú ý rằng: Khi k chẵn ($k = 2m$) thì $(1 + (-1)^k) (\sqrt{3})^k = 2 \cdot 3^m$

Khi k lẻ ($k = 2m + 1$) thì $(1 + (-1)^k) (\sqrt{3})^k = 0$

Vậy từ (1) suy ra với mọi n thì $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ là số chẵn. (2)

Mặt khác: $0 < (2 - \sqrt{3}) < 1 \Rightarrow 0 < (2 - \sqrt{3})^n < 1; \forall n$

Ta có: $(2 + \sqrt{3})^n = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n - 1 + 1 - (2 - \sqrt{3})^n$

Vì $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n - 1$ là số nguyên và $0 < 1 - (2 - \sqrt{3})^n < 1$, nên theo định nghĩa phần nguyên ta có:

$$\left[(2 + \sqrt{3})^n \right] = \left[(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n - 1 + 1 - (2 - \sqrt{3})^n \right] = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n - 1$$

Từ (2) suy ra với mọi n thì $\left[(2 + \sqrt{3})^n \right]$ là số lẻ, suy ra điều phải chứng minh.

Câu 52. Có 1000 học sinh gồm 499 học sinh nam và 501 học sinh nữ được xếp thành 10 hàng dọc, mỗi hàng 100 học sinh. Người ta muốn chọn từ 1000 học sinh này ra một nhóm 4 học sinh, trong đó số học sinh nữ được chọn là lẻ và thỏa mãn điều kiện sau đây: 4 học sinh này được chọn từ 2 hàng khác nhau và có 2 cặp học sinh có cùng thứ tự đứng trong hàng (tính từ người đứng đầu tiên của hàng đó). Chứng minh rằng số cách chọn các nhóm như vậy là một số lẻ.

Hướng dẫn giải

Gọi mỗi nhóm 4 học sinh lấy từ hai hàng thỏa mãn yêu cầu bài toán là một *đội*. Đặt $S = \{\sigma \mid \sigma \text{ là một đội}\}$, $O = \{\sigma \in S \mid \sigma \text{ có số lẻ học sinh nữ}\}$, $E = \{\sigma \in S \mid \sigma \text{ có số chẵn học sinh nữ}\}$. Ta cần chứng minh rằng $|O|$ là lẻ.

Với mỗi tập con A của S , ta định nghĩa $f(A) = \sum_{\sigma \in A} g(\sigma)$, trong đó $g(\sigma)$ là số học sinh nữ của

σ .

Vì $O \cap E = \emptyset$ và $O \cup E = S$ nên $f(S) = f(O) + f(E)$.

Hơn nữa $f(E)$ là chẵn, suy ra $f(S) \equiv f(O) \pmod{2}$.

Mặt khác, xét một học sinh nữ bất kì. Để tạo thành một đội, học sinh này có thể bắt cặp với một học sinh khác trong hàng bởi 99 cách, sau đó tìm 2 học sinh khác ở hàng khác bởi 9 cách. Suy ra, học sinh nữ này là thành viên của $99 \cdot 9 = 891$ đội. Có nghĩa là học sinh nữ này được tính 891 lần trong $f(S)$. Vì ta có 501 học sinh nữ nên

$$f(S) \equiv 891 \cdot 501 \equiv 1 \pmod{2}.$$

Vì mỗi $\sigma \in O$ chứa một số số lẻ các học sinh nữ nên $f(O) \equiv |O| \pmod{2}$. Suy ra

$$|O| \equiv f(O) \equiv f(S) \equiv 1 \pmod{2}.$$

Như vậy số cách chọn những đội là một số lẻ.

Câu 53. Cho khai triển: $(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{10})^{11} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{110}x^{110}$.

Chứng minh đẳng thức sau:

$$C_{11}^0 a_0 - C_{11}^1 a_1 + C_{11}^2 a_2 - C_{11}^3 a_3 + \dots + C_{11}^{10} a_{10} - C_{11}^{11} a_{11} = 11.$$

Hướng dẫn giải

Xét $x \neq 1$ từ khai triển trên nhân hai vế với $(x-1)^{11}$ ta có:

$$(x^{11} - 1)^{11} = (x-1)^{11} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{110}x^{110}) \quad (2)$$

$$VT(2) = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k x^{11k} (-1)^{11-k} \Rightarrow \text{Hệ số của } x^{11} \text{ trong vế trái bằng } C_{11}^1 = 11$$

$$VP(2) = \left(\sum_{k=0}^{11} C_{11}^k x^{11-k} (-1)^k \right) (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{110}x^{110})$$

$\Rightarrow$ Hệ số của x^{11} trong vế phải bằng

$$C_{11}^0 a_0 - C_{11}^1 a_1 + C_{11}^2 a_2 - C_{11}^3 a_3 + \dots + C_{11}^{10} a_{10} - C_{11}^{11} a_{11}$$

Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh

Câu 54. Tính tổng: $S = \frac{-C_n^1}{2.3} + \frac{2C_n^2}{3.4} - \frac{3C_n^3}{4.5} + \dots + \frac{(-1)^n nC_n^n}{(n+1)(n+2)}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{n!}{k!(k+1)(n-k)!} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(k+1)![(n+1)-(k+1)]!} = \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1} \quad (3)$$

$$\text{Áp dụng 2 lần công thức (3) ta được: } \frac{(-1)^k kC_n^k}{(k+1)(k+2)} = \frac{(-1)^k kC_{n+2}^{k+2}}{(n+1)(n+2)}$$

Cho k chạy từ 1 đến n rồi cộng vế các đẳng thức trên ta có

$$\begin{aligned} (n+1)(n+2)S &= -C_{n+2}^3 + 2C_{n+2}^4 - 3C_{n+2}^5 + \dots + (-1)^n nC_{n+2}^{n+2} \\ &= -(C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3) + 2(C_{n+1}^3 + C_{n+1}^4) - 3(C_{n+1}^4 + C_{n+1}^5) + \dots + (-1)^n nC_{n+1}^{n+1} \\ &= -C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 - C_{n+1}^4 + \dots + (-1)^n C_{n+1}^{n+1} \\ &= C_{n+1}^0 - C_{n+1}^1 - (C_{n+1}^0 - C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 - C_{n+1}^3 + C_{n+1}^4 - C_{n+1}^5 + \dots + (-1)^{n+1} C_{n+1}^{n+1}) = \\ &= 1 - (n+1) - (1-1)^{n-1} = -n \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \frac{-n}{(n+1)(n+2)}.$$

Câu 55. Có bao nhiêu cách chọn ra k người từ n người xếp hàng dọc sao cho không có 2 người liên tiếp được chọn.

Hướng dẫn giải

Giả sử k người được chọn là: $a_1; a_2; \dots; a_k$

Gọi x_1 là số người đứng trước a_1

Gọi x_2 là số người đứng giữa a_1 và a_2

.....

Gọi x_k là số người đứng giữa a_{k-1} và a_k

Và x_{k+1} là số người đứng bên phải a_k

Mỗi cách chọn bộ $(a_1; a_2; \dots; a_k)$ bằng số cách chọn bộ $(x_1; x_2; \dots; x_k; x_{k+1})$ thỏa mãn

$$+) \sum_{i=1}^{k+1} x_i = n - k$$

$$+) x_1 \geq 0; x_{k+1} \geq 0$$

$$+) x_j > 0 \quad \forall j = 2; 3; \dots; k$$

Hàm sinh cho cách chọn x_1 và x_{k+1} giống nhau là: $1 + t + t^2 + \dots = \frac{1}{1-t}$

Hàm sinh cho số cách chọn mỗi x_i ($i = 2; \dots; k$) giống nhau là: $t + t^2 + t^3 + \dots = \frac{t}{1-t}$

Hàm sinh cho số cách chọn bộ $(x_1; x_2; \dots; x_k; x_{k+1})$ là: $f(t) = \frac{1}{1-t} \cdot \frac{1}{1-t} \cdot \left(\frac{t}{1-t}\right)^{k-1} = \frac{t^{k-1}}{(1-t)^{k+1}}$

Số cách chọn bộ số: $(a_1; a_2; \dots; a_k)$ bằng số cách chọn bộ số $(x_1; x_2; \dots; x_k; x_{k+1})$ là: $\frac{f^{(n-k)}(0)}{(n-k)!}$.

Câu 56. Cho các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Có bao nhiêu số có 6 chữ số khác nhau được viết từ các chữ số trên.

Tính tổng các số viết được từ phần a.

Câu 57. Cho 5 người gồm 3 nam, 2 nữ ngồi ngẫu nhiên vào 5 chiếc ghế được xếp thành vòng tròn (Mỗi người một ghế). Tính xác suất để 2 người nữ không ngồi cạnh nhau.

Câu 58. Tính tổng: $S_n = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n$.

Câu 59. Trong mặt phẳng cho đa giác đều $2n$ đỉnh $A_1A_2 \dots A_{2n}$ (với n là số nguyên lớn hơn 1). Hỏi có tất cả bao nhiêu hình chữ nhật với các đỉnh là đỉnh của đa giác đều đã cho.

Câu 60. Tìm hệ số của x^2 trong khai triển: $f(x) = (x^2 - x + 1)^{2010}$.

Câu 61. Tính tổng $S = 1^2 C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \dots + n^2 C_n^n$.

Câu 62. Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người gồm 10 nam và 5 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên đó về 3 tỉnh công tác sao cho mỗi tỉnh có 5 người và có ít nhất một nữ.

Câu 63. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 1$ ta luôn có: $\sqrt{C_n^1} + \sqrt{C_n^2} + \dots + \sqrt{C_n^n} \leq \sqrt{n(2^n - 1)}$.

Câu 64. Tìm n biết: $256(2C_{2n}^1 + 2^3 C_{2n}^3 + \dots + 2^{2n-1} C_{2n}^{2n-1}) - 254(C_{2n}^0 + 2^2 C_{2n}^2 + \dots + 2^{2n} C_{2n}^{2n}) = 474$.

Câu 65. Cho 100 số tự nhiên không lớn hơn 100 có tổng bằng 200. Chứng minh rằng từ các số đó có thể chọn được một số số có tổng bằng 100.

Hướng dẫn giải

Nếu tất cả các số bằng nhau thì tất cả các số là 2. Khi đó ta lấy 50 số 2 sẽ có tổng là 100.

Giả sử $a_1 \neq a_2$ ta xét 100 số có dạng

$$0 < a_1, a_2, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_{99} < 200.$$

Nếu có một số chia hết cho 100 thì số đó bằng 100 vì số đó bé hơn 200.

Nếu không có số nào chia hết cho 100 thì trong 100 số phải có hai số đồng dư trong phép chia cho 100 (vì các số dư nhận giá trị từ 1 đến 99) suy ra hiệu của chúng chia hết cho 100 và hiệu hai số đó chính là tổng cần tìm.

Câu 66. Cho hình vuông có cạnh 6cm và 2014 đường tròn bán kính $\frac{1}{38}$ cm. Đặt tất cả các đường tròn vào trong hình vuông. Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng cắt 18 đường tròn đã cho.

Hướng dẫn giải

+) Chia hình vuông bởi 117 đường thẳng song song cách đều nhau và song song với một cạnh của hình vuông, cách nhau một khoảng $\frac{6}{118}$ cm. Khi đó hình vuông được chia thành 118 dải

hình chữ nhật có chiều rộng bằng $\frac{6}{118}$ cm, chiều dài bằng chiều dài hình vuông.

+) Hình tròn có đường kính $\frac{1}{19}$ cm, $\frac{1}{19} > \frac{6}{118}$ nên mỗi đường tròn đều bị cắt bởi ít nhất một đường thẳng trên.

+) Vì $2014 = 118 \cdot 17 + 8$ nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một đường thẳng cắt 18 đường tròn.

Câu 67. Chứng minh: $C_{2n}^0 \cdot 3^0 + C_{2n}^2 \cdot 3^2 + C_{2n}^4 \cdot 3^4 + \dots + C_{2n}^{2n} \cdot 3^{2n} = 2^{2n-1} (2^{2n} + 1)$

Câu 68. Cho đa giác đều $A_1 A_2 \dots A_{2n}$, ($n \geq 2$, n nguyên) nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng số tam giác có các đỉnh là 3 trong $2n$ điểm $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong $2n$ điểm $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$. Tìm n .

Câu 69. Tính $A = \frac{2^0 C_{2010}^0}{1} - \frac{2^1 C_{2010}^1}{2} + \frac{2^2 C_{2010}^2}{3} - \frac{2^3 C_{2010}^3}{4} + \dots + \frac{2^{2010} C_{2010}^{2010}}{2011}$.

Hướng dẫn giải

$$(-1)^k \frac{2^k C_{2010}^k}{(k+1)} = \frac{(-2)^k 2010!}{k!(2010-k)!(k+1)} = \frac{(-2)^k 2010!}{(2010-k)!(k+1)!}$$

$$= \frac{1}{2011} \cdot \frac{(-2)^k 2011!}{(k+1)!(2011-k-1)!} = -\frac{1}{4022} \cdot (-2)^{k+1} C_{2011}^{k+1}$$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{4022} \left[(-2)^1 C_{2011}^1 + (-2)^2 C_{2011}^2 + \dots + (-2)^{2011} C_{2011}^{2011} \right]$$

$$= -\frac{1}{4022} \left[(-2+1)^{2011} - (-2)^0 C_{2011}^0 \right] = \frac{1}{2011}.$$

Câu 70. a) Tìm hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển: $(1 + 2x + 3x^2)^{10}$.

b) Tính tổng: $S = \frac{C_n^0}{C_{n+2}^1} + \frac{C_n^1}{C_{n+3}^2} + \frac{C_n^2}{C_{n+4}^3} + \dots + \frac{C_n^k}{C_{n+k+2}^{k+1}} + \dots + \frac{C_n^n}{C_{2n+2}^{n+1}}$ (với $n \in \mathbb{N}^*$).

Câu 71. Cho khai triển $S = (1 + 2x)^{10} (x^2 + x + 1)^2 = a_0 + a_1 x + \dots + a_{14} x^{14}$. Tính a_6 .

Câu 72. Chọn ngẫu nhiên ba số đôi một khác nhau từ tập hợp $A = \{1; 2; 3; \dots; 20\}$. Tính xác suất để trong ba số được chọn không có hai số tự nhiên liên tiếp.

Câu 73. 1. Cho 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6. Hỏi có bao nhiêu cách viết số có 3 chữ số khác nhau và không nhỏ hơn 243.

2. Hai hộp có chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất 3 quả cầu đỏ và 2 quả cầu xanh, hộp thứ hai chứa 4 quả cầu đỏ và 6 quả cầu xanh. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp một quả. Tính xác suất sao cho:

a. Cả 2 quả đều đỏ.

b. Hai quả cùng màu.

c. Hai quả khác màu.

Câu 74. Cho các số 1, 2, 3, 4.

1) Hỏi lập được bao nhiêu số có 5 chữ số trong đó có hai chữ số 1 và ba chữ số còn lại khác nhau và khác số 1.

2) Tính tổng các số lập được ở câu 1).

Hướng dẫn giải

1) Mỗi số có 5 chữ số gồm 2 số 1 và 3 số khác là hoán vị 5 phần tử 1, 1, 2, 3, 4; do 2 chữ số 1 khi hoán vị vẫn được 1 số. Vậy các số cần lập là $\frac{P_5}{P_2} = 60$.

2) Số có 5 chữ số dạng $\overline{abcde}$.

$$S = \sum \overline{abcde} = 10^4 \cdot \sum a + 10^3 \cdot \sum b + 10^2 \cdot \sum c + 10 \cdot \sum d + e$$

Mỗi số a có 4! cách chọn $\overline{bcde} \Rightarrow$ Mỗi số $a \in \{1, 1, 2, 3, 4\}$ xuất hiện 4! lần.

$$\Rightarrow \sum a = (1 + 1 + 2 + 3 + 4) \cdot 24 = 264$$

$$\text{Tương tự } \sum b = \sum c = \sum d = \sum e = 264$$

$$\text{Vậy } S = \frac{264 \cdot 11111}{2!} = 1466652.$$

Câu 75. Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người gồm 10 nam và 5 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên đó về 3 tỉnh công tác sao cho mỗi tỉnh có 5 người và có ít nhất một nữ.

Câu 76. Cho khai triển $(1+x)^2(1+3x)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{12}x^{12}$.

Hãy xác định a_5 .

Câu 77. Cho tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

1. Có bao nhiêu cách chia tập A thành hai tập con khác rỗng.

2. Lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau từ tập A . Lấy ngẫu nhiên một số trong các số vừa lập, tính xác suất để số chọn được là số chia hết cho 4.

Câu 78. Tìm số hạng không chứa x của khai triển nhị thức $\left(x^2 + \frac{2}{x^3}\right)^n$. Biết rằng:

$$C_{2n}^0 + 2^2 C_{2n}^2 + 2^4 C_{2n}^4 + \dots + 2^{2(n-1)} C_{2n}^{2(n-1)} + 2^{2n} C_{2n}^{2n} = \frac{3^{20} + 1}{2}.$$

Câu 79. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau trong đó có 3 số chẵn và 3 số lẻ?

Câu 80. Cho k là số tự nhiên thỏa mãn $5 \leq k \leq 2011$.

$$\text{Chứng minh rằng: } C_5^0 \cdot C_{2011}^k + C_5^1 \cdot C_{2011}^{k-1} + \dots + C_5^5 \cdot C_{2011}^{k-5} = C_{2011}^k$$

Câu 81. Giả sử có 20 người, xếp ngồi vào 4 bàn riêng biệt. Cách xếp tốt là những người ngồi cùng bàn đều quen nhau. Giả sử tồn tại cách xếp tốt, đồng thời đối với mọi cách xếp tốt, ta đều có đúng 5 người ngồi mỗi bàn. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu cặp quen nhau ?

Hướng dẫn giải

Xét nhân vật A thuộc bàn 1, suy ra trong mỗi bàn 2, 3, 4 đều có ít nhất một người không quen A. Vì nếu quen hết 5 người trong 1 trong các bàn 2, 3, 4 thì A phải sang bàn đó, nhưng lại là 6 người (trái với giả thiết là 5 người).

Suy ra số người mà A không quen lớn hơn hoặc bằng 3 người.

Do đó mỗi người quen nhiều nhất là 16 người.

Mà số cặp quen nhau nhỏ hơn hoặc bằng $\frac{20 \cdot 16}{2} = 160$.

Giả sử có đúng 160 cặp quen nhau thì có đúng $\frac{3 \cdot 20}{2} = 30$ cặp không quen nhau.

Suy ra có thể xếp thành 5 nhóm, mỗi nhóm 4 người không quen nhau. Mỗi người đều quen với những người thuộc 4 nhóm còn lại. Ghép người đó với mỗi nhóm 1 người vào một bàn, ta được cách xếp tốt.

Câu 82. Cho trước số nguyên dương $n \geq 2$. Trong một giải đấu cờ vua có $2n$ vận động viên tham gia, mỗi người đấu với người khác đúng một ván. Tại một thời điểm trong giải, người ta thấy có n^2+1 ván đấu đã diễn ra. Chứng minh rằng khi đó có thể chọn ra ba vận động viên sao cho hai người bất kỳ đều đã thi đấu với nhau.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh bằng quy nạp theo n .

Với $n = 2$: Giả sử có bốn vận động viên theo dự là A, B, C, D và có 5 ván đấu đã diễn ra.

Nếu hai trong ba người B, C, D đều đã đấu với nhau một ván thì ta có điều phải chứng minh.

Nếu có hai trong ba người B, C, D chưa đấu với nhau thì mỗi người B, C, D đều đã đấu với A một ván. (Nếu không thì số ván sẽ ít hơn 5).

Khi đó ba người A, B, C thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Giả sử bài toán đúng với $n = k$ ($k \in \mathbb{N}^*, k \geq 2$)

Ta chứng minh bài toán đúng với $n = k + 1$.

Giả sử E và F là hai vận động viên đã đấu với nhau.

Nếu tổng ván đấu giữa $2k$ vận động viên còn lại không ít hơn k^2+1 thì theo giả thiết quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Nếu tổng số ván đấu giữa $2k$ vận động viên không vượt quá k^2 tổng số ván mà E và F đã đấu không ít hơn $2k+1$ (không kể ván đấu giữa E và F).

Do đó trong số $2k$ vận động viên còn lại, phải có một người G đã đấu với cả E và F.

Khi đó ta có ba vận động viên E, F, G thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 83. Tìm số hạng không chứa x của khai triển: $A = \left(3x - \frac{1}{x}\right)^{13} \cdot \frac{2}{x^3}$

Hướng dẫn giải

Số hạng tổng quát thứ $k+1$ trong khai triển của A có dạng:

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= C_{13}^k (3x)^{13-k} \left(-\frac{1}{x}\right)^k \frac{2}{x^3} \\ &= 2C_{13}^k 3^{13-k} (-1)^k x^{10-2k} \end{aligned}$$

Số hạng T_{k+1} không chứa x thì $10-2k=0 \Leftrightarrow k=5$

Vậy số hạng không chứa x của khai triển là: $T_6 = 2C_{13}^5 3^8 (-1)^5 = -16888014$.

Câu 84. Từ các chữ số 1, 2, 3 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 2013 chữ số sao cho mỗi chữ số 1, 2, 3 xuất hiện đúng lẻ lần.

Câu 85. Trong mặt phẳng cho $2n+1$ ($n \in \mathbb{N}^*$) đường thẳng phân biệt sao cho không có hai đường nào song song hoặc vuông góc và không có ba đường nào đồng quy. Chúng cắt nhau tạo thành các tam giác. Chứng minh rằng số các tam giác nhọn tạo thành không vượt quá $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Hướng dẫn giải

Gọi số tam giác tạo thành là $f(n)$. Ta phải chứng minh

$$f(n) \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (1), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Với ba đường thẳng bất kỳ trong số các đường thẳng đã cho luôn cắt nhau tạo thành một tam giác hoặc nhọn hoặc tù.

Gọi $g(n)$ là số các tam giác tù. Ta gọi một tam giác tạo bởi ba đường thẳng a, b, c nào đó là:

"giả nhọn cạnh a " nếu các góc chung cạnh a của tam giác đó là các góc nhọn. Chọn một đường thẳng d nào đó và coi nó là trục hoành, các đường thẳng còn lại được chia làm hai tập:

Tập T^+ là các đường thẳng với hệ số góc dương, Tập T^- là tập các đường thẳng với hệ số góc âm. Hai đường thẳng tạo với d một tam giác "giả nhọn" nếu một đường thẳng thuộc tập T^+ và một đường thẳng thuộc tập T^- .

Gọi p là số đường thẳng thuộc T^+ và q là số các đường thẳng thuộc tập T^- . Khi đó

$$p+q=2n \text{ và số tam giác "giả nhọn cạnh } d" \text{ là } pq. \text{ Ta có } pq \leq \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 = n^2$$

Nhưng do d có thể là đường thẳng bất kỳ trong số $2n+1$ đường thẳng đã cho nên ta có số cặp (đường thẳng d ; tam giác "giả nhọn cạnh d ") sẽ nhỏ hơn hoặc bằng $n^2(2n+1)$.

Trong cách tính trên mỗi tam giác nhọn được tính 3 lần (theo 3 cạnh) còn mỗi tam giác tù được tính 1 lần nên

$$3f(n) + g(n) \leq n^2(2n+1) \quad (1)$$

Thế nhưng tổng số các tam giác là:

$$C_{2n+1}^3 = f(n) + g(n) = \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{aligned} 2f(n) &\leq n^2(2n+1) - (f(n) + g(n)) = n^2(2n+1) - \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} \text{ hay } f(n) \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

Câu 86. Cho đa giác đều $2n$ cạnh ($n \geq 4$) nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi x là số tứ giác lồi có 4 cạnh là 4 đường chéo của đa giác đã cho và y là số hình chữ nhật có 4 đỉnh là các đỉnh của đa giác đã cho. Tìm n để: $x - y = 3n$. (Đường chéo của đa giác là đoạn thẳng nối hai đỉnh không liên tiếp)

Hướng dẫn giải

Gọi các đỉnh của đa giác đều $2n$ cạnh là: $A_1; A_2; \dots; A_{2n}$. Trước hết ta tìm x

Ta đếm số các tứ giác thoả mãn yêu cầu bài toán có 1 đỉnh là A_1

Khi đó $A_2; A_{2n}$ không phải là đỉnh của tứ giác vì $A_1 A_2; A_1 A_{2n}$ là các cạnh của đa giác. Ta cần chọn thêm các đỉnh: $A_i; A_j; A_k$ thoả mãn $5 \leq i+2 < j+1 < k \leq 2n-1$ (Vì giữa 2 đỉnh của tứ giác phải có ít nhất 1 đỉnh của đa giác).

Mỗi cách chọn bộ 3 đỉnh trên là 1 cách chọn bộ 3 số phân biệt trong $2n-5$ số tự nhiên từ 5 đến $2n-1$.

Vậy có C_{2n-5}^3 tứ giác có đỉnh A_1 thoả mãn yêu cầu bài toán.

Vì đa giác có $2n$ đỉnh và mỗi tứ giác được đếm lặp lại 4 lần theo 4 đỉnh nên số tứ giác cần tìm

$$\text{là: } \frac{2nC_{2n-5}^3}{4}, \text{ do đó } x = \frac{2nC_{2n-5}^3}{4}$$

Tìm y: do đa giác đều đã cho có $2n$ đỉnh nên nó có n đường chéo đi qua tâm O

Ta thấy cứ hai đường chéo bất kì qua O lập thành một hình chữ nhật, nên số hình chữ nhật có 4 đỉnh là 4 đỉnh của đa giác đều đã cho là C_n^2 , do đó $y = C_n^2$.

$$\text{Từ giả thiết ta có phương trình: } \frac{2nC_{2n-5}^3}{4} - C_n^2 = 3n \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{n}{2} \cdot \frac{(2n-5)!}{(2n-8)!3!} - \frac{n!}{(n-2)!2!} = 3n \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{(2n-7)(2n-6)(2n-5)}{6} - \frac{n-1}{2} = 3$$

$$\Leftrightarrow (n-5)(n^2 - 4n + 6) = 0 \Leftrightarrow n = 5$$

Vậy $n=5$ thoả mãn điều kiện bài toán.

Câu 87. Cho n là số nguyên dương không nhỏ hơn 3. Các điểm $A_1; A_2; \dots; A_n$ cùng thuộc một đường tròn. Có tối đa bao nhiêu tam giác nhọn có đỉnh là 3 trong số các đỉnh trên.

Hướng dẫn giải

Với hai điểm $A_i; A_j$ ta kí hiệu $A_i A_j$ là cung bắt đầu từ A_i và kết thúc là A_j theo chiều kim đồng hồ và kí hiệu $m(A_i A_j)$ là số đo của cung đó. Một cung được gọi là tù nếu $m(A_i A_j) \geq 180^\circ$.

Nhận thấy $m(A_i A_j) + m(A_j A_i) = 360^\circ$ nên có ít nhất 1 trong hai cung này tù.

Kí hiệu x_s là số cung tù mà giữa hai đầu mút có đúng $s-1$ điểm

Nếu $s \neq \frac{n}{2}$ thì mỗi i có ít nhất một cung $A_i A_{i+s}; A_{i+s} A_i$ là tù, tổng theo i ta được

$$x_s + x_{n-s} \geq n$$

Đẳng thức trên xảy ra khi không có đường kính $A_i A_{i+s}$.

Nhận thấy số tam giác không nhọn (tù hoặc vuông) bằng số góc không nhọn.

Mỗi cung tù chứa $s-1$ điểm thì có $n-s-1$ tam giác không nhọn.

(Dùng hai điểm đầu mút của cung kết hợp với 1 điểm ngoài cung)

Số lượng các tam giác không nhọn là

$$N = x_1(n-2) + x_2(n-3) + \dots + x_{n-1} \cdot 2 + x_{n-2}$$

Theo bất đẳng thức trên ta đánh giá được:

$$N \geq \sum_{s=1}^{\frac{n-1}{2}} (s-1)(x_{n-s} + x_s) \geq n \left(1 + 2 + \dots + \frac{n-3}{2} \right) = \frac{n(n-1)(n-3)}{8} \text{ nếu } n \text{ lẻ}$$

$$N \geq \sum_{s=1}^{\frac{n-1}{2}} (s-1)(x_{n-s} + x_s) + \frac{n-2}{2} x_{\frac{n}{2}} \geq n \left(1 + 2 + \dots + \frac{n-4}{2} \right) + \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{n(n-2)^2}{8}$$

Nếu n chẵn.

Dấu bằng xảy ra ở các BĐT trên là không tồn tại 2 điểm đối xứng nhau qua tâm đường tròn.

Số lượng các tam giác có đỉnh là 3 trong các điểm trên là $C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

Vậy số tam giác nhọn là

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \frac{n(n-1)(n-3)}{8} = \frac{(n-1)n(n+1)}{24} \text{ nếu } n \text{ lẻ}$$

$$\text{Và } \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \frac{n(n-2)^2}{8} = \frac{(n-2)n(n+2)}{24} \text{ nếu } n \text{ chẵn.}$$

Câu 88. Cho 2015 điểm trên đường thẳng, tô các điểm bằng một trong 3 màu xanh, đỏ, vàng (mỗi điểm chỉ tô một màu). Có bao nhiêu cách tô khác nhau sao cho không có 3 điểm liên tiếp nào cùng màu.

Hướng dẫn giải

Gọi S_n là số cách tô màu thỏa mãn cho n ($n \geq 3$) điểm (bài toán của ta là $n = 2015$). Ta sẽ tính S_{n+1} theo S_n , xét hai điểm cuối cùng của S_n có hai trường hợp xảy ra:

+Nếu hai điểm cuối cùng màu thế thì điểm thứ $n+1$ khác màu 2 điểm cuối.

+Nếu hai điểm cuối khác màu thì điểm thứ $n+1$ tô bất kì.

Từ đó sinh ra hai số đặc trưng M_n là số cách tô n điểm mà hai điểm cuối cùng màu, P_n là số cách tô màu n điểm mà hai điểm cuối khác màu và cả hai cùng thỏa mãn 3 điểm liên tiếp khác màu.

Ta có: $S_{n+1} = 2M_n + 3P_n$, $P_{n+1} = 2S_n$; $M_{n+1} = P_n$.

Thế thì $S_{n+1} = 2P_{n-1} + 6S_{n-1} = 4S_{n-2} + 6S_{n-1}$. Vậy ta có hệ thức truy hồi: $S_{n+1} - 6S_{n-1} - 4S_{n-2} = 0$.

Bây giờ ta tính S_3, S_4 thấy ngay $S_3 = 27 - 3 = 24$, $S_4 = 4! - 3 - 12 = 49$. Phương trình đặc trưng

$X^2 - 6X - 4 = 0$ có nghiệm là: $x_1 = 3 + \sqrt{13}$, $x_2 = 3 - \sqrt{13}$. Công thức xác định $S_n = ax_1^n + bx_2^n$

$$\text{với } a, b \text{ thỏa mãn: } \begin{cases} a(3 + \sqrt{13})^3 + b(3 - \sqrt{13})^3 = 24 \\ a(3 + \sqrt{13})^4 + b(3 - \sqrt{13})^4 = 49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{24\sqrt{13} - 23}{2\sqrt{13}(3 + \sqrt{13})^3} \\ b = \frac{24\sqrt{13} - 23}{2\sqrt{13}(3 - \sqrt{13})^3} \end{cases}$$

Sau đó cho $n = 2015$ ta được kết quả bài toán.

Câu 89. Một khu rừng có dạng hình vuông với chiều dài là 1km. Trong khu rừng có 4000 cây thông, cây to nhất có đường kính 0,5 m. Chứng minh rằng trong khu rừng đó có ít nhất 560 mảnh đất, diện tích mỗi mảnh 200m^2 không có cây thông nào.

Hướng dẫn giải

+) Vì $1\text{km} = 1000\text{m} = 48.20 + 47.0,6 + 2 \cdot 5,9$

$1000\text{m} = 95.10 + 94.0,52 + 2.0,56$

+) Chia một cạnh hình vuông thành 48 đoạn, mỗi đoạn dài 20m, khoảng cách giữa các đoạn là 0,6m, ở hai đầu là hai đoạn mỗi đoạn dài 5,9m. Chia cạnh còn lại thành 95 đoạn, mỗi đoạn dài 10m, khoảng cách giữa các đoạn là 0,52m, ở hai đầu là hai đoạn mỗi đoạn dài 0,56m. Như vậy có tất cả $48.95 = 4560$ mảnh có diện tích 200m^2 . Vì chỉ có 4000 cây và do đường kính của cây không quá 0,5m nên còn ít nhất 560 mảnh (mỗi mảnh có diện tích 200m^2).

Câu 90. Sắp xếp chín học sinh lớp 11 (hoặc giới Nam hoặc giới Nữ) đứng cách đều nhau trên một đường tròn. Chứng minh rằng tồn tại sáu học sinh cùng giới đứng tại sáu đỉnh của hai tam giác bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Gọi 9 học sinh là $H_1, H_2, \dots, H_9$ đứng tại chín đỉnh của đa giác đều chín cạnh.

Vì có 9 học sinh đứng tại 9 đỉnh nên có ít nhất 5 đỉnh có học sinh cùng giới (hoặc là Nam hoặc là Nữ). Để cho tiện, ta giả sử 5 đỉnh này có 5 học sinh Nam đứng (tương tự nếu là 5 học sinh Nữ).

Gọi một tam giác có 3 đỉnh mà 3 học sinh Nam đứng là tam giác Nam, như vậy có ít nhất $C_5^3 = 10$ tam giác Nam.

Bây giờ ta sẽ chứng minh có hai tam giác Nam bằng nhau:

Chín đỉnh của đa giác chia đường tròn ngoại tiếp nó thành 9 cung bằng nhau $H_i H_{i+1}$, $i = \overline{1, 8}$ và cung $H_9 H_1$; ta gọi mỗi cung này là một “mảnh”.

Không mất tính tổng quát, gọi $H_i H_j H_k$ là tam giác có $H_i H_j \leq H_j H_k \leq H_k H_i$. Hơn nữa số h_{ij} là số mảnh của cung H_{ij} không chứa điểm H_k ($i \neq j \neq k \neq i$); tương tự ta định nghĩa như thế cho số h_{jk}, h_{ki} .

Tương ứng với mỗi tam giác $H_i H_j H_k$ với một bộ ba $(h_{ij}; h_{jk}; h_{ki})$. Ta nhận thấy rằng:

$1 \leq h_{ij} \leq h_{jk} \leq h_{ki} \leq 7$ và $h_{ij} + h_{jk} + h_{ki} = 9$. Chẳng hạn với tam giác với 3 đỉnh H_1, H_3, H_7 ta gọi là tam giác $H_3 H_1 H_7$ tương ứng với một bộ ba $(2; 3; 4)$ theo thứ tự đó.

Như vậy, các tam giác bằng nhau ứng với cùng một bộ ba số như định nghĩa, trong khi các tam giác không bằng nhau ứng với các bộ ba khác nhau. Từ đó, ta xây dựng một song ánh giữa các lớp tam giác bằng nhau với tập hợp các bộ ba số nguyên dương có thứ tự (a, b, c) với $a \leq b \leq c; a+b+c = 9$.

Có tất cả bảy bộ ba số thỏa mãn là: $(1, 1, 7), (1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 4, 4), (2, 2, 5), (2, 3, 4)$ và $(3, 3, 3)$. Tức là có 7 lớp tam giác bằng nhau. Vì có ít nhất 10 tam giác Nam (Ba đỉnh tam giác là 3 học sinh Nam), nên có một lớp có ít nhất hai tam giác Nam; do đó có ít nhất sáu học sinh cùng giới, đứng tại sáu đỉnh của hai tam giác bằng nhau.

Câu 91. Một cửa hàng có 4 loại kem: Kem sữa, kem xoài, kem dừa, kem sô cô la. Một nhóm có 9 người vào ăn kem và gọi 9 cốc kem. Hỏi có tất cả bao nhiêu sự lựa chọn?

Hướng dẫn giải

Gọi số cốc kem Kem sữa, kem xoài, kem dừa, kem sô cô la lần lượt là a, b, c, d ($a, b, c, d \in \mathbb{N}$), theo đầu bài ta có $a + b + c + d = 9$.

Như vậy mỗi sự lựa chọn là một bộ $(a; b; c; d)$ các số nguyên không âm sao cho $a + b + c + d = 9$; với mỗi bộ số này ta đặt tương ứng với một dãy nhị phân theo quy tắc sau: Viết từ trái sang phải a chữ số 1 liên tiếp, 1 chữ số 0, b chữ số 1 liên tiếp, chữ số 0, c chữ số 1 liên tiếp, chữ số 0, rồi d chữ số 1 liên tiếp:

$$\underbrace{11\dots1}_{a \text{ chu số}} \underbrace{011\dots1}_{b \text{ chu số}} \underbrace{011\dots1}_{c \text{ chu số}} \underbrace{011\dots1}_{d \text{ chu số}}$$

Như vậy mỗi bộ $(a; b; c; d)$ được tương ứng với một dãy nhị phân có độ dài 12 ký tự trong đó có 9 ký tự 1 và 3 ký tự 0. hiển nhiên tương ứng này là một song ánh vậy số cách chọn bằng số cách chọn 3 vị trí trong 12 vị trí cho 3 chữ số 0. Thành thử có tất cả là C_{12}^3 sự lựa chọn.

Câu 92. Có bao nhiêu cách phân tích 6^9 thành tích của 3 số nguyên dương, biết các cách phân tích mà các nhân tử chỉ khác nhau về thứ tự thì chỉ được tính 1 lần?

Hướng dẫn giải

Xét phân tích $6^9 = (2^{a_1} \cdot 3^{b_1})(2^{a_2} \cdot 3^{b_2})(2^{a_3} \cdot 3^{b_3})$ với $\begin{cases} a_i, b_i \in \mathbb{N} \\ a_1 + a_2 + a_3 = 9 \\ b_1 + b_2 + b_3 = 9 \end{cases}$

Với mỗi $a_1 \in \mathbb{N}, 0 \leq a_1 \leq 9$, có $10 - a_1$ cách chọn số a_2 , để $a_1 + a_2 \leq 9$ từ đó chọn $a_3 = 9 - a_1 - a_2$.

Vậy số cách chọn các bộ (a_1, a_2, a_3) là $10+9+\dots+1 = 55$ cách

$\Rightarrow$ số cách chọn các bộ (a_1, a_2, a_3) và (b_1, b_2, b_3) là $55 \cdot 55$ cách.

Bây giờ, ta sẽ tính số các cách phân tích bị trùng nhau.

+) TH1: 3 thừa số bằng nhau:

$$6^9 = (2^3 \cdot 3^3)(2^3 \cdot 3^3)(2^3 \cdot 3^3)$$

+) TH2: 2 thừa số bằng nhau:

$$6^9 = (2^a \cdot 3^b)(2^a \cdot 3^b)(2^{9-2a} \cdot 3^{9-2b}) \text{ và } (a; b) \neq (3; 3).$$

Khi đó $a \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$; $b \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ và $(a; b) \neq (3; 3)$

$\rightarrow$ số cặp $(a; b)$ là $5 \cdot 5 - 1 = 24$, và 24 cặp này cho ta 24 cách phân tích thỏa mãn yêu cầu. Tuy nhiên, mỗi cặp sẽ cho 3 lần đếm trong quá trình đếm mà ta vừa nêu ở trên. (1 điểm)

+) TH3: nếu cả 3 thừa số khác nhau, thì mỗi phân tích bị đếm trùng $3! = 6$ lần.

Vậy số cách phân tích là: $1 + 24 + (55 \times 55 - 24 \times 3 - 1) : 6 = 517$ cách

Câu 93. Trên tờ giấy có kẻ một lưới các ô vuông, người ta vẽ một đường gấp khúc khép kín với các đỉnh tại các nút của lưới và tất cả các đoạn của nó có độ dài bằng nhau. Chứng minh rằng, số các đoạn của đường gấp khúc khép kín như vậy là một số chẵn.

Hướng dẫn giải

Giả sử $A_1 A_2 \dots A_n A_1$ là đường gấp khúc đã cho. Ta lấy hệ trục tọa độ vuông góc là các đường biên của lưới và chiều rộng của một ô làm đơn vị. Khi đó tọa độ (x_i, y_i) của đỉnh A_i là nguyên với $i = 1, 2, \dots, n$

$$\text{Đặt } X_i = x_{i+1} - x_i; Y_i = y_{i+1} - y_i; X_n = x_1 - x_n; Y_n = y_1 - y_n$$

Ta có

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n = 0 \quad (1)$$

$$Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = 0 \quad (2)$$

$$X_1^2 + Y_1^2 = X_2^2 + Y_2^2 = \dots = X_n^2 + Y_n^2 = C \quad (3)$$

Đề ý là $X^2 + Y^2$ chia cho 4 dư 0 nếu X, Y đều chẵn, dư 1 nếu có một số lẻ và dư 2 nếu hai số đều lẻ. Có thể giả thiết rằng trong $X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ có ít nhất một số lẻ, nói cách khác là ta chia tất cả các số này cho ước chung của chúng và xét bộ số nhận được.

Như vậy ta chỉ có hai trường hợp xảy ra:

1) C chia cho 4 dư 2, khi đó với mỗi i thì X_i và Y_i đều lẻ nên từ điều kiện (1) suy ra n chẵn.

2) C chia 4 dư 1, khi đó với mỗi i thì hoặc X_i hoặc Y_i là số lẻ, còn số kia chẵn. Từ (1) suy ra số cặp $(X_i; Y_i)$ mà X_i lẻ là một số chẵn. Từ (2) suy ra số các cặp $(X_i; Y_i)$ mà i lẻ là một số chẵn nên số cặp $(X_i; Y_i)$ là chẵn.

Như vậy trong mọi trường hợp n đều chẵn.

Câu 94. Cho $S = \{1, 2, \dots, 2014\}$, với mỗi tập con khác rỗng $T \subset S$, ta chọn một phần tử của nó làm **phần tử đại diện**. Tìm số cách ký hiệu **phần tử đại diện** cho mọi tập con khác rỗng của S thỏa mãn với mỗi tập khác rỗng $T \subset S$ là hợp của các tập khác rỗng không giao nhau $A, B, C \subset S$, thì **phần tử đại diện** của D cũng là **phần tử đại diện** của một trong ba tập A, B, C .

Hướng dẫn giải

+ Với mỗi tập $X \subset S$, ký hiệu $r(X)$ là phần tử đại diện của X. Giả sử $x_1 = r(S)$. Trước hết ta chứng minh khẳng định sau: Nếu $x_1 \in X$ và $X \subset S$ thì $x_1 = r(X)$.

- Nếu $|X| \leq 2012$, ta viết S thành hợp của ba tập không giao nhau gồm X và hai tập con khác nữa của S. Từ giả thiết suy ra $x_1 = r(X)$.

- Nếu $|X| = 2013$, xét phần tử $y \in S, y \neq x_1$. Coi S là giao của ba tập không giao nhau gồm $\{x_1, y\}$ và hai tập khác nữa, áp dụng trường hợp $|X| \leq 2012$, ta suy ra $r(\{x_1, y\}) = x_1$, nên $y \neq r(X)$ (vì theo giả thiết phần tử đại diện của một trong ba tập cũng là phần tử đại diện của X, mà $r(\{x_1, y\}) \neq y$ và hai tập còn lại đều không chứa y). Do y lấy tùy ý nên $r(X) \neq y, \forall y \in X, y \neq x_1$. Từ đó ta có $r(X) = x_1$.

- Chú ý rằng khẳng định trên vẫn còn đúng với mọi tập con của S có từ 5 phần tử trở lên.

+ Ta có 2014 cách chọn $x_1 = r(S)$, với mọi $x_1 \in X \subset S$ thì $r(X) = x_1$. Xét $S_2 = S \setminus \{x_1\}$. Tương tự ta có 2013 cách chọn $x_2 = r(S_2)$, với mọi $x_2 \in X \subset S_2$ thì $r(X) = x_2$.

Lặp lại tương tự quá trình này ta có 2014.2013....5 cách chọn $x_1, x_2, \dots, x_{2010} \in S$ với mỗi $i = 1, 2, \dots, 2010, r(X) = x_i, x_i \in X \subset S \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}\}$.

Bây giờ còn lại 4 phần tử của S ký hiệu là $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$. Ta có 4 cách chọn $r(Y)$, giả sử $y_1 = r(Y)$, chứng minh tương tự trên ta có

$$r(\{y_1, y_2\}) = r(\{y_1, y_3\}) = r(\{y_1, y_4\}) = y_1$$

Còn 7 tập chưa có phần tử đại diện là $\{y_1, y_2, y_3\}, \{y_1, y_3, y_4\}, \{y_1, y_2, y_4\}, \{y_2, y_3, y_4\}, \{y_2, y_3\}, \{y_2, y_4\}, \{y_3, y_4\}$, phần tử đại diện của các tập này được chọn tùy ý nên có $3^4 \cdot 2^3$ cách chọn.

+ Vậy tổng cộng có $2014 \cdot 2013 \cdot \dots \cdot 4 \cdot 3^4 \cdot 2^3 = 2014! \cdot 108$ cách xếp phần tử đại diện cho các tập con.

Câu 95. Trên một mặt phẳng có tất cả các điểm được tô bởi 3 màu đỏ, trắng, vàng.

Chứng minh rằng tồn tại một tam giác cân có 3 đỉnh cùng màu.

Hướng dẫn giải

Nhận xét: Trong một ngũ giác đều, tam giác có 3 đỉnh thuộc 6 điểm gồm 5 đỉnh của ngũ giác và tâm ngũ giác đều là tam giác cân.

Trở lại bài toán: Xét ngũ giác đều ABCDE có tâm O khi đó :

TH1: nếu tồn tại 3 trong 6 điểm A,B,C,D,E,O cùng màu ví dụ như A,B,C thì ta được tam giác A,B,C có 3 đỉnh cùng màu $\Rightarrow$ đpcm.

TH2: không có 3 điểm trong 6 điểm A,B,C,D,E,O cùng màu. Khi đó một màu được tô cho 2 điểm. Giả sử A và O cùng màu khi đó xét đường tròn (O;OA) :

+ nếu tồn tại một điểm F thuộc (O) mà F cùng màu với O và A thì ta có tam giác AOF cân $\Rightarrow$ đpcm.

+ không tồn tại điểm nào trên (O) cùng màu với A và O, khi đó xét ngũ giác đều A'B'C'D'E' ($A \neq A', B' \neq B, C' \neq C, D' \neq D, E' \neq E$) khi đó 5 đỉnh của ngũ giác trên chỉ được tô bởi 2 màu nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại 3 đỉnh cùng một màu, ví dụ A', B', C' khi đó ta được tam giác cân có 3 đỉnh cùng màu $\Rightarrow$ đpcm.

Vậy luôn tồn tại 1 tam giác cân trong mặt phẳng có 3 đỉnh cùng màu (đpcm).

Câu 96. Cho bộ số $(1; 2; 3)$.

1) Chúng ta thực hiện phép biến đổi trên các bộ 3 số như sau: thay hai số trong chúng, ví dụ a và b , bởi $a + b$ và $a - b$. Hỏi có thể nhận được bộ số sau: $(a_1; b_1; c_1)$ thỏa mãn

$$|a_1| + |b_1| + |c_1| = 10 \text{ sau khi thực hiện hữu hạn phép biến đổi từ bộ số ban đầu } (1; 2; 3) ?$$

2) Nếu chúng ta thực hiện phép biến đổi trên các bộ 3 số như sau: thay hai số trong chúng, ví dụ a và b , bởi $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ và $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$. Hỏi có thể nhận được bộ số $(28; 4; 2014)$ sau khi thực hiện

hữu hạn phép biến đổi từ bộ số ban đầu $(1; 2; 3)$

Hướng dẫn giải

Ta thực hiện theo cấu hình sau

$$(1; 2; 3) \rightarrow (3; -1; 3) \rightarrow (3; 2; -4) \rightarrow (3; 2; -4) \rightarrow (-7; 2; -1) = (a_1; b_1; c_1)$$

Dễ thấy: $|a_1| + |b_1| + |c_1| = 10$.

Câu 97. Tồn tại hay không một tập hợp gồm 2014 số nguyên dương với tính chất: loại bất cứ số nào ra khỏi tập hợp đó thì tập hợp 2013 số còn lại có thể chia thành hai tập con với tổng các số (thuộc mỗi tập con đó) là bằng nhau?

Hướng dẫn giải

Giả sử tồn tại một tập F với tính chất đã cho.

Nếu mọi số $a \in F$ đều chẵn, ta xét tập $F' = \left\{ \frac{a}{2} \mid a \in F \right\}$.

Hiển nhiên tập F' cũng có tính chất nêu trong bài toán. Do đó ta có thể coi rằng tồn tại một tập F thỏa mãn bài toán và F chứa ít nhất một số lẻ a .

Gọi $a_1, a_2, \dots, a_{2014}$ là các phần tử của tập F .

Đặt $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{2014}$

Theo giả thiết, $\forall i (1 \leq i \leq 2014)$ tập $F \setminus \{a_i\}$ được chia thành hai tập con với tổng các số là bằng nhau nên tổng $S - a_i$ của tập $F \setminus \{a_i\}$ là một số chẵn với $\forall i = 1, \dots, 2014$.

Từ đó suy ra: $\sum_{i=1}^{2014} (S - a_i) = 2013S$ là một số chẵn $\Rightarrow S$ là số chẵn.

Khi đó $S - a$ là một số lẻ mâu thuẫn với $S - a_i$ là một số chẵn với $\forall i = 1, \dots, 2014$.

Vậy không tồn tại tập hợp với tính chất đã nêu.

Câu 98. Một lớp học có 17 học sinh nam và 20 học sinh nữ. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp 37 học sinh đó thành một hàng dọc sao cho xuất hiện đúng một cặp nam - nữ thỏa mãn nam đứng trước nữ?

Hướng dẫn giải

Xét dãy nhị phân sau: $\underbrace{1\dots1}_{x_1 \text{ số } 1} \underbrace{0\dots0}_{x_2 \text{ số } 0} 011 \underbrace{1\dots1}_{x_3 \text{ số } 1} \underbrace{0\dots0}_{x_4 \text{ số } 0}$ trong đó: có duy nhất một cặp $(0; 1)$, 17 chữ số 1 và

20 chữ số 0. Số các dãy nhị phân thỏa mãn là số nghiệm nguyên của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 35 \\ x_1 + x_3 = 16 \\ x_i \geq 0, (i = 1, 2, 3, 4) \end{cases}$$

Số nghiệm nguyên không âm của hệ phương trình là: $C_{17}^1 \cdot C_{20}^1 = 340$.

Trở lại bài toán:

Coi mỗi chữ số 0 là một học sinh nam, mỗi chữ số 1 là một học sinh nữ.

Do vậy: số cách xếp 37 học sinh thành một hàng dọc sao cho xuất hiện đúng một cặp nam - nữ thỏa mãn nam đứng trước nữ là $C_{17}^1 \cdot C_{20}^1 \cdot 17! \cdot 20!$.

Câu 99. Lấy ngẫu nhiên 498 số nguyên dương không vượt quá 1000. Chứng minh rằng trong đó có 2 số có tổng chia hết cho 111.

Hướng dẫn giải

Xét tập $S = \{1, 2, \dots, 1000\}$ ta phân hoạch S như sau:

$A = \{1000\}$, $B = \{111; 222; \dots; 999\}$

Và chia tập $T = S \setminus (A \cup B)$ thành các tập con có 2 phần tử mà tổng bằng 999 như sau:

$T_1 = \{1; 998\}$, $T_2 = \{2; 997\}$, $T_3 = \{3; 996\}$, ..., $T_{495} = \{499; 500\}$.

Như vậy S được chia thành 497 tập con, vậy 498 số được chọn ngẫu nhiên phải có 2 số rơi vào cùng một tập hợp.

Hai số đó hoặc cùng chia hết cho 111 hoặc có tổng bằng 999 nên tổng của chúng chia hết cho 111

Câu 100. Cho tập hợp $S = \{1, 2, \dots, 2016\}$.

a) Hỏi có bao nhiêu tập con 3 phần tử của S mà chúng là độ dài 3 cạnh của một tam giác có cạnh lớn nhất có độ dài bằng 1000?

b) Chọn ngẫu nhiên 3 phần tử của S , tính xác suất để 3 số được chọn là độ dài 3 cạnh của một tam giác có cạnh lớn nhất có độ dài là một số chẵn.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $1000 = 2k$ và gọi T là tập chứa các tập con thỏa mãn đề bài, theo BĐT tam giác và không mất tính tổng quát, ta có

$$T = \{\{x, y, 2k\} \subset S \mid x < y < 2k, x + y > 2k\}.$$

$$\text{Rõ ràng } T = \{\{x, y\} \subset S \mid x < y < 2k, x + y > 2k\}.$$

Từ điều kiện của x và y ta có $x + y > 2k$ và $x + y > 2x$. Ta xét hai trường hợp, đó là trường hợp $2x < 2k$ và trường hợp $2x \geq 2k$.

Trường hợp 1, $2x < 2k$. Ta cũng có $x \geq 2$ (do $y \leq 2k - 1$), suy ra $x \in \{2, 3, \dots, k - 1\}$. Lúc này, với mỗi giá trị của x , ta có thể chọn y tùy ý thuộc tập $\{2k - x + 1, 2k - x + 2, \dots, 2k - 1\}$ (tập này có $x - 1$ phần tử). Dẫn đến số cách chọn các tập $\{x, y\}$ thỏa mãn là

$$\sum_{x=2}^{k-1} (x - 1) = \sum_{x=1}^{k-2} x$$

Trường hợp 2, $2x \geq 2k$. Hiển nhiên ta cũng phải có $x \leq 2k - 2$, suy ra $k \leq x \leq 2k - 2$. Khi đó, với mỗi x thuộc tập $\{k, k + 1, \dots, 2k - 2\}$, ta có thể chọn y tùy ý thuộc tập

$\{x + 1, x + 2, \dots, 2k - 1\}$ (tập này có $2k - 1 - x$ phần tử). Do đó, số cách chọn các tập $\{x, y\}$ thỏa mãn là

$$\sum_{x=k}^{2k-2} (2k - 1 - x) = \sum_{x=1}^{k-1} x$$

Vậy

$$|T| = \sum_{x=1}^{k-2} x + \sum_{x=1}^{k-1} x = (k - 1)^2 = 499^2 = 249001.$$

b) Với mỗi số nguyên dương chẵn $z = 2k$, kí hiệu $T_k = \{\{x, y, z\} \subset S \mid x < y < z, x + y > z\}$.

Khi đó, số cách chọn 3 phần tử thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$\sum_{k=1}^{1008} |T_{2k}|.$$

Theo câu a), ta có $|T_{2k}| = (k-1)^2$. Suy ra

$$\sum_{k=1}^{1008} |T_{2k}| = \sum_{k=1}^{1008} (k-1)^2 = \sum_{k=0}^{1007} k^2 = \frac{1007 \cdot 1008 \cdot (2 \cdot 1007 + 1)}{6}.$$

Và do số cách chọn 3 phần tử bất kì thuộc S là C_{2016}^3 , suy ra xác suất cần tính là

$$\frac{1007 \cdot 1008 \cdot (2 \cdot 1007 + 1)}{6C_{2016}^3} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Câu 101. Cho 10 người ngồi thành một hàng ngang. Có bao nhiêu cách chia những người này thành 3 nhóm sao cho không có 2 người ngồi cạnh nhau thuộc cùng một nhóm.

Hướng dẫn giải

Đặt $S(n, k)$ là số cách chia nhóm n người thành k nhóm mà trong mỗi nhóm không có 2 người liên tiếp.

Sử dụng truy hồi ta được: $S(n, k) = S(n-1, k-1) + (k-1)S(n-1, k) \quad (*)$.

(Xét nhóm có $n-1$ người trước đó, với $S(n-1, k)$ và $S(n-1, k-1)$ tương ứng là số cách phân chia thành k và $k-1$ nhóm thỏa mãn, ta thêm 1 người, sẽ được nhóm n người.

Xét cách chia nhóm này thành k nhóm thỏa mãn.

Người này có thể đứng 1 mình 1 nhóm, số cách là $S(n-1, k-1)$

Người này có thể thêm vào nhóm không có người thứ $n-1$, có $k-1$ nhóm như vậy, trong trường hợp này có $(k-1)S(n-1, k)$ cách

Áp dụng (*) với $n=10, k=3$, vào bài toán ta được:

$$S(10, 3) = S(9, 2) + 2S(9, 3) = 1 + 2[S(8, 2) + 2S(8, 3)] = 1 + 2 + 4[S(7, 2) + 2S(7, 3)]$$

$$= 1 + 2 + 4 + 8S(7, 3) = 1 + 2 + 4 + 8 + 16S(6, 3) = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32S(5, 3)$$

$$= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64S(4, 3) = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128S(3, 3)$$

$$= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 = 2^8 - 1$$

(Chú ý rằng: $S(n, 2) = 1$, do chỉ có 1 cách chia 2 nhóm xen kẽ nhau)

Câu 102. Cho m, n, k là các số nguyên dương thỏa mãn $m > 1, 1 < k \leq n - (k-1)m$. Xét tập hợp $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Gọi X là tập hợp tất cả các tập con A của S thỏa mãn đồng thời hai tính chất sau:

$$|A| = k;$$

$$|a_i - a_j| > m, \forall a_i, a_j \in A, i \neq j; i, j = \overline{1, k}.$$

Hãy xác định số phần tử của tập hợp X .

Hướng dẫn giải

Giả sử $A \in X, A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ với $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n; a_i - a_j > m, \forall 1 \leq j < i \leq k$.

Đặt $b_1 = a_1, b_2 = a_2 - m, \dots, b_i = a_i - (i-1)m, \dots, b_k = a_k - (k-1)m$.

Vì $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n; a_i - a_j > m, \forall 1 \leq j < i \leq k$ nên $1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_k \leq n - (k-1)m$

Suy ra tập $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ là một tập con có k phần tử của tập $\{1, 2, \dots, n - (k-1)m\}$. Gọi Y là tập tất cả các tập con có k phần tử của tập hợp $\{1, 2, \dots, n - (k-1)m\}$.

Khi đó ánh xạ

$$\begin{aligned} f: X &\rightarrow Y \\ A &\mapsto B \end{aligned}$$

Khi đó f là một song ánh. Thật vậy

- f là đơn ánh: Vì với $A_1, A_2 \in X, A_1 \neq A_2 \Rightarrow B_1, B_2 \in Y, B_1 \neq B_2 \Rightarrow f(A_1) \neq f(A_2)$
- f là toàn ánh: Giả sử $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\} \in Y$.

Đặt $A = \{b_1, b_2 + m, \dots, b_k + (k-1)m\} = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Ta có

$$a_{i+1} - a_i = (b_{i+1} + im) - (b_i + (i-1)m) \geq m+1 \text{ nên } A \in X \text{ và } f(A) = B.$$

Vì vậy ta có $|X| = |Y| = C_{n-(k-1)m}^k$.

Câu 103. Cho tập hợp $A = \{0, 1, 2, \dots, 2006\}$. Một tập con T của A được gọi là tập con “ngonan ngoãn” nếu với bất kì $x, y \in T$ (có thể $x = y$) thì $|x - y| \in T$.

Tìm tập con “ngonan ngoãn” lớn nhất và khác A .

Tìm tập con “ngonan ngoãn” bé nhất rằng $2002 \in T$ và $2005 \in T$.

Câu 104. Trên mặt phẳng có 25 điểm, không có 3 điểm nào trong chúng thẳng hàng. Tìm số màu k nhỏ nhất sao cho ta có thể tô màu tất cả các đoạn thẳng nối hai điểm trong mặt phẳng bởi k màu (mỗi đoạn thẳng được tô đúng một màu) và các cạnh của một tam giác bất kì tạo bởi 3 điểm trong chúng được tô bởi đúng hai màu.

Hướng dẫn giải

Dùng định lý Ramsey chứng minh được: Tô màu các cạnh của đồ thị K_{17} (đồ thị đầy đủ 17 đỉnh) bằng 3 màu một cách tùy ý thì luôn có một K_3 có ba cạnh cùng màu. (trong các cuốn sách về đồ thị đều trình bày chứng minh, học sinh phải chứng minh lại). Khi đó $k \geq 4$.

Ta đi chứng minh: bằng 4 màu ta có thể tô được các cạnh của K_{25} thỏa mãn bài ra.

Thật vậy, chia 25 điểm thành 5 tập hợp 5 điểm $A_1, \dots, A_5$. Trong mỗi A_i lấy các đỉnh trên một ngũ giác đều. Cạnh của ngũ giác con này tô màu 1 và các đường chéo của nó tô màu 2.

Sau đó mỗi tập hợp A_i coi là đỉnh một ngũ giác và thực hiện việc tô màu nối các đoạn thẳng của các nhóm A_i, A_j cũng theo cách tương tự với 2 màu còn lại. Ta đi chứng minh cách tô màu này thỏa mãn bài toán

Câu 105. Tìm số các hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_{2009})$ của $(1, 2, 3, \dots, 2009)$ thỏa mãn tính chất: tồn tại đúng một chỉ số $i \in \{1, 2, 3, \dots, 2008\}$ sao cho $a_i > a_{i+1}$.

Hướng dẫn giải

Câu 106. Cho một bảng ô vuông có 100×100 ô vuông, mỗi ô đều điền một dấu +. Ta thực hiện phép biến đổi như sau: đổi dấu toàn bộ một hàng hoặc một cột của bảng (dấu + thành dấu -, dấu - thành dấu +). Hỏi sau một số lần thực hiện phép biến đổi như trên thì bảng có thể có đúng 98 dấu - được không?

Hướng dẫn giải

Giả sử sau một số lần biến đổi bảng có đúng 98 dấu -

Gọi x_i là số lần đổi dấu ở hàng thứ i ($i = 1, 2, \dots, 100$, tính từ trên xuống)

Gọi y_j là số lần đổi dấu ở cột thứ j ($j = 1, 2, \dots, 100$, tính từ trái sang phải)

Gọi m là các số lẻ trong các số $x_1; x_2; \dots; x_{100}$ và n là các số lẻ trong các số $y_1; y_2; \dots; y_{100}$.

Ta có $m, n \in \{0, 1, 2, \dots, 100\}$

Ta có số lượng các dấu - trên bảng là $m(100-n) + n(100-m) = 100m + 100n - 2mn$

Bảng có đúng 98 dấu - nên ta có $100m + 100n - 2mn = 98$

$$\Rightarrow (m-50)(n-50) = 50^2 - 7^2$$

$$\Leftrightarrow (m-50)(n-50) = 43.57 (*)$$

$$\Rightarrow (m-50)(n-50):57$$

mà 57 là số nguyên tố nên $m-50 : 57$ hoặc $n-50 : 57$

Ta có $m-50, n-50 \in \{-50; -49; \dots; 49; 50\}$ nên $m-50 = 0$ hoặc $n-50 = 0$ mâu thuẫn với (*).

Vậy bảng không thể có đúng 98 dấu -

Câu 107. Một ngân hàng câu hỏi Toán có 30 câu hỏi khác nhau gồm: 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình và 15 câu hỏi dễ. Từ ngân hàng này lập một đề thi gồm 5 câu hỏi khác nhau. Tính xác suất để sao cho trong mỗi đề được chọn nhất thiết phải có đủ cả 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2?

Hướng dẫn giải

Số đề thi thỏa mãn yêu cầu bài toán là: 56875.

Tổng số đề thi có thể có là: 142506.

Xác suất cần tìm là: $P = \frac{625}{1566}$.

Câu 108. Xếp 10 học sinh ngồi quanh một bàn tròn. Ngân hàng đề có tất cả 5 loại đề thi. Hỏi có bao nhiêu cách phát đề cho học sinh sao cho không có 2 học sinh nào ngồi cạnh nhau có cùng đề thi?

Hướng dẫn giải

Gọi S_n là số cách phát đề cho học sinh sao cho không có 2 học sinh nào ngồi cạnh nhau có cùng đề thi

Cố định một học sinh làm vị trí đầu tiên và các học sinh bên tay phải của học sinh đó là vị trí thứ 2, thứ 3, ..., thứ n. (học sinh ở vị trí thứ n ngồi cạnh học sinh ở vị trí thứ nhất) **(1 điểm)**

Ta thấy:

Nếu học sinh ở vị trí thứ nhất và học sinh ở vị trí thứ n-1 có đề thi khác nhau thì sẽ có 3 cách phát đề cho học sinh ở vị trí thứ n.

Nếu học sinh ở vị trí thứ nhất và học sinh ở vị trí thứ n-1 có đề thi giống nhau thì có 4 cách phát đề cho học sinh ở vị trí thứ n.

Do đó ta có hệ thức:

$$S_n = 3S_{n-1} + 4S_{n-2} \quad (n \geq 4)$$

Sử dụng phương pháp sai phân để tính S_n . Xét phương trình đặc trưng:

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_n = a(-1)^n + b4^n$$

Do $S_2 = 5.4 = 20, S_3 = 5.4.3 = 60$ Ta có:

$$\begin{cases} a + 16b = 20 \\ -a + 64b = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S_n = 4(-1)^n + 4^n \Rightarrow S_{10} = 4 + 4^{10}$$

Câu 109. Điền 29 số nguyên dương đầu tiên vào các ô vuông con của bảng 6 x 5 bằng cách sau: Cho phép thay đổi vị trí của các số trong bảng theo quy tắc: Mỗi lần, lấy một số nằm ở ô kề với ô trống rồi chuyển số đó sang ô trống. Hỏi bằng cách thực hiện liên tiếp một số hữu hạn lần phép chuyển số nói trên đối với bảng số ban đầu ta có thể nhận được bảng số sau đó hay không?

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12		13	14
15	16	17	18	19

29	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12		13	14
15	16	17	18	19

Bảng 1

Bảng 2

Hướng dẫn giải

Giả sử nhờ phép chuyển số theo qui tắc của đề bài, từ Bảng 1 ta có thể nhận được Bảng 2 (*)

Ta coi ô trống của mỗi bảng là ô được điền số 0. Với mỗi bảng số nhận được trong quá trình chuyển số, ta liệt kê tất cả các số trong bảng theo thứ tự từ hàng trên xuống hàng dưới và trong mỗi hàng thì từ trái qua phải. Khi đó ứng với mỗi bảng số ta sẽ có một **hoán vị** của 30 số tự nhiên đầu tiên. Và do đó, điều giả sử (*) tương đương với: Từ hoán vị $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 0, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29)$ (gọi là **hoán vị a**) có thể nhận được hoán vị $(29, 2, 3, 4, \dots, 11, 12, 0, 13, 14, 15, \dots, 27, 28, 1)$ (gọi là **hoán vị b**) nhờ việc thực hiện liên tiếp một số hữu hạn lần phép đổi chỗ hai số trong hoán vị theo qui tắc: Mỗi lần, lấy hai số 0 của hoán vị rồi đổi vị trí của số 0 đó cho một số liền kề với số 0 đó. (1)

+) Giả sử $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{30})$ là một hoán vị của 30 số tự nhiên đầu tiên. Ta gọi cặp số $(a_i; a_j)$ là cặp số ngược của hoán vị vừa nêu nếu $a_i > a_j$ và $i < j$. Dễ thấy, sau một lần thực hiện phép đổi chỗ hai số kề nhau đối với hoán vị $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{30})$ thì số cặp số ngược của hoán vị đó sẽ tăng hoặc giảm đi một đơn vị.

+) Khi chuyển chỗ hai số a_i và a_{i+n} ($n \geq 1$ tùy ý) trong một hoán vị, cũng tức là chuyển a_i liên tiếp qua n số kề với nó và chuyển a_{i+n} liên tiếp qua $n - 1$ số kề với nó, nghĩa là chuyển $2n - 1$ (một số lẻ lần) hai số kề nhau, do đó cặp số ngược của hoán vị đó sẽ tăng hoặc giảm một số lẻ đơn vị. (2)

+) Ta có: Số cặp số ngược của của hoán vị **a** là 12 và số cặp số ngược của hoán vị **b** là 67. Từ đó, kết hợp với (2), suy ra từ hoán vị **a** ta chỉ có thể nhận được hoán vị **b** sau một số lẻ lần thực hiện phép đổi chỗ hai số nào đó. Điều này cho thấy, nếu từ Bảng 1 ta nhận được Bảng 2 thì số lần đổi chỗ hai số ở hai ô nào đó phải là số lẻ. (3)

+) Tô màu tất cả các ô vuông con của bảng 6×5 bởi hai màu xanh, đỏ sao cho hai ô kề nhau có màu khác nhau. Sau mỗi lần đổi chỗ hai số ở hai ô kề nhau, trong đó có số 0 ở ô trống, theo cột hay theo hàng thì số 0 được chuyển từ ô có màu này sang ô có màu kia. Và vì thế do số 0 ở bảng 1 và số 0 ở bảng 2 nằm ở hai ô cùng màu nên từ bảng 1 ta chỉ nhận được bảng 2 sau một số chẵn lần đổi chỗ hai số ở hai ô kề nhau, trong đó có số 0. Điều này mâu thuẫn với (3) và mâu thuẫn đó cho thấy: Từ Bảng 1 ta không thể nhận được Bảng 2 nhờ một số hữu hạn lần đổi chỗ ở hai ô kề nhau, trong đó có số 0 ở ô trống, theo quy

Câu 110. Cho bộ số $(1; 2; 3)$.

1) Chúng ta thực hiện phép biến đổi trên các bộ 3 số như sau: thay hai số trong chúng, ví dụ a và b , bởi $a + b$ và $a - b$. Hỏi có thể nhận được bộ số sau: $(a_1; b_1; c_1)$ thỏa mãn

$|a_1| + |b_1| + |c_1| = 10$ sau khi thực hiện hữu hạn phép biến đổi từ bộ số ban đầu $(1; 2; 3)$?

2) Nếu chúng ta thực hiện phép biến đổi trên các bộ 3 số như sau: thay hai số trong chúng, ví dụ a và b , bởi $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ và $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$. Hỏi có thể nhận được bộ số $(28; 4; 2014)$ sau khi thực hiện hữu hạn phép biến đổi từ bộ số ban đầu $(1; 2; 3)$

Hướng dẫn giải

Ta thực hiện theo cấu hình sau $(1; 2; 3) \rightarrow (3; -1; 3) \rightarrow (3; 2; -4) \rightarrow (3; 2; -4) \rightarrow (-7; 2; -1) = (a_1; b_1; c_1)$

Dễ thấy: $|a_1| + |b_1| + |c_1| = 10$

Trong mọi cấu hình ta luôn có: Tổng bình phương các số là không đổi

Lại có: $1^2 + 2^2 + 3^2 \neq 28^2 + 4^2 + 2014^2$

Vậy câu trả lời là phủ định.

Ta có: $2^3 + 1 \vdots 3$

Ta chỉ ra rằng với mọi số nguyên dương m , ta có: $2^{3^m} + 1 \vdots 3^m$

Với $m = 1$, khẳng định đúng.

Giả sử khẳng định đúng với m nguyên dương nào đó, tức là tồn tại k nguyên dương sao cho

$$2^{3^m} = k \cdot 3^m - 1.$$

Ta có:

$$2^{3^{m+1}} = (3^m \cdot k - 1)^3 = 3^{3m} \cdot k^3 - 3^{2m+1} \cdot k^2 + 3^{m+1} \cdot k - 1 = 3^{m+1} \cdot t - 1 \text{ với } t \text{ là một số nguyên}$$

dương nào đó.

Như vậy, khẳng định được chứng minh

Câu 111. Mỗi điểm trong mặt phẳng được tô bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng luôn tồn tại một tam giác mà ba đỉnh và trọng tâm cùng màu.

Hướng dẫn giải

Lấy 5 điểm tùy ý sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng trong mặt phẳng. Khi đó vì chỉ dùng hai màu để tô các điểm nên theo nguyên lý Dirichlet phải tồn tại ba điểm trong số đó cùng màu.

Giả sử đó là 3 điểm A, B, C màu đỏ. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC .

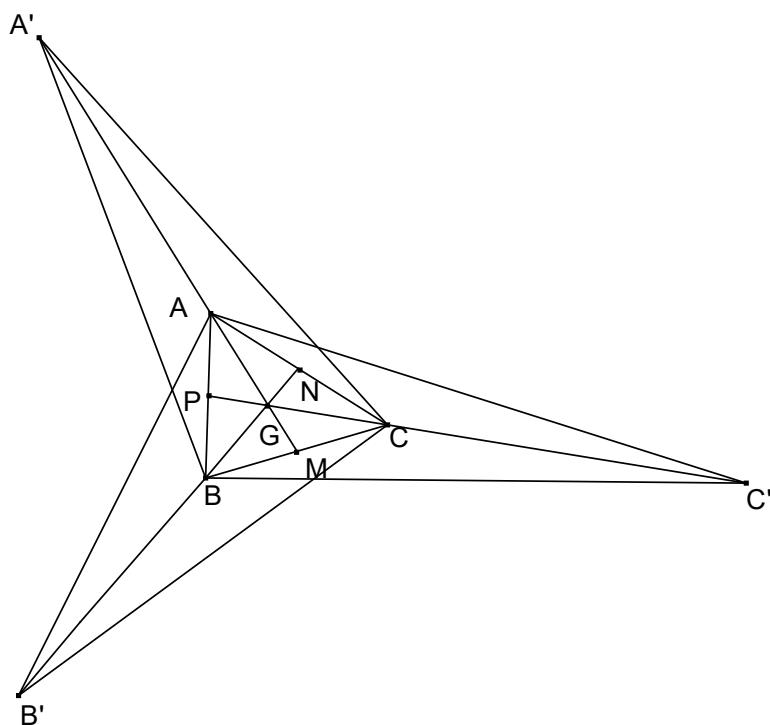
Nếu G có màu đỏ thì ta được tam giác có 3 đỉnh và trọng tâm màu đỏ.

Nếu G có màu xanh. Kéo dài GA, GB, GC các đoạn AA', BB', CC' sao cho $AA' = 3GA, BB' = 3GB, CC' = 3GC$. Gọi M, N, P tương ứng trung điểm BC, CA, AB thì $AA' = 3GA = 6GM$, suy ra

$AA' = 2AM$. Tương tự $BB' = 2BN, CC' = 2CP$. Do đó tam giác $A'BC, B'CA, C'AB$ tương ứng nhận A, B, C làm trọng tâm. Mặt khác ta cũng có tam giác $ABC, A'B'C'$ có cùng trọng tâm G . Có hai trường hợp có thể xảy ra

a) Nếu A', B', C' có cùng màu xanh, khi đó tam giác $A'B'C'$ và trọng tâm G có màu xanh.

b) Nếu ít nhất một trong các điểm A', B', C' màu đỏ. Không giảm tổng quát, giả sử A' đỏ. Khi đó tam giác $A'BC$ và trọng tâm A có màu đỏ.



Câu 112. Các số nguyên dương $1, 2, 3, \dots, 2014$ được sắp xếp trên một hàng theo một thứ tự nào đó. Ta thực hiện quy tắc đổi chỗ các số như sau: nếu số đầu tiên là k thì ta đổi k số đầu tiên theo thứ tự ngược lại. Chứng minh rằng sau một số hữu hạn lần thực hiện quy tắc trên thì số 1 sẽ xuất hiện ở vị trí đầu tiên.

Hướng dẫn giải

Giả sử $k, 1 \leq k \leq 2014$ là số lớn nhất xuất hiện ở vị trí đầu tiên trong tất cả các quá trình đổi chỗ. Giả sử số k xuất hiện ở lần thứ h . Khi đó ở lần thực hiện sau lần thứ h thì số k sẽ giữ nguyên vị trí. Trong các quá trình đổi chỗ sau đó ta gọi k_1 là số lớn nhất xuất hiện ở vị trí đầu tiên. Giả sử số k_1 xuất hiện ở lần thứ h_1 . Khi đó sau lần thứ h_1 thì số k_1 sẽ giữ nguyên vị trí, ... cứ tiếp tục như vậy thì sau một số hữu hạn bước phải dừng lại. Khi không thực hiện việc thực hiện quy tắc đổi chỗ của bài toán tức là số ở vị trí đầu tiên sẽ là số 1. Bài toán được chứng minh

Câu 113. Trong một cuộc hội nghị, mỗi đại biểu bắt tay ít nhất 6 đại biểu khác. Người ta đếm được tất cả 97 lần bắt tay. Hỏi hội nghị đó có tối đa bao nhiêu đại biểu.

Hướng dẫn giải

Gọi n là số đại biểu.

Ta xây dựng đồ thị G với đỉnh là các đại biểu, còn hai đỉnh bất kỳ được nối với nhau bằng cạnh khi và chỉ khi hai đại biểu tương ứng của hai đỉnh đó bắt tay với nhau.

Khi đó đồ thị G có 97 cạnh.

Theo bổ đề bắt tay, trong một đồ thị, tổng số bậc của các đỉnh bằng hai lần số cạnh, do đó $97 \times 2 \geq 6n \Rightarrow n \leq 32$

Vậy hội nghị có tối đa 32 đại biểu.

Câu 114. Gọi $a_1 a_2 \dots a_n$ với $a_i \in \{2; 0\}$ là một xâu có độ dài n .

Gọi xâu 20 là xâu OLIMPIC nếu 2 và 0 là hai phần tử liên tiếp theo thứ tự đó ở trong xâu có độ dài n đã cho (ví dụ như xâu 2220022 có độ dài là 7 và trong đó có 1 xâu OLIMPIC). Xét các xâu có độ dài 30 và chứa k xâu OLIMPIC, biết rằng có C_{31}^9 xâu như thế. Tìm k ?

Hướng dẫn giải

Gọi H là số là xâu chứa toàn là số 2 có độ dài lớn hơn hay bằng 1

Gọi K là số là xâu chứa toàn là số 0 có độ dài lớn hơn hay bằng 1.

Ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1. HKHKHK...HK (*) (có k xâu loại H, k xâu loại K)

Trường hợp 2. HKHKHK...HKH (có k+1 xâu loại H, k xâu loại K)

Trường hợp 3. KHKHK...KHK (có k xâu loại H, k+1 xâu loại K)

Trường hợp 4. KHKHK...KHKH (có k+1 xâu loại H, k+1 xâu loại K)

Xét trường hợp 1.

Gọi x_1 là số phần tử ở xâu H (H ở vị trí đầu tiên trong (*)), $x_1 \geq 1$

Gọi x_2 là số phần tử ở xâu K (K ở vị trí thứ hai trong (*)), $x_2 \geq 1$.

...

Gọi x_{2k} là số phần tử ở xâu K (K ở vị trí cuối trong (*)), $x_{2k} \geq 1$

Ta có : $x_1 + x_2 + \dots + x_{2k} = 30$

Theo bài toán chia kẹo Euler : Số xâu có độ dài 30 và chứa k xâu OLIMPIC trong trường hợp 1 là C_{29}^{2k-1} .

Tương tự như vậy ta có các trường hợp còn lại và kết hợp với quy tắc cộng ta có :

$$C_{29}^{2k-1} + C_{29}^{2k} + C_{29}^{2k} + C_{29}^{2k+1} = C_{31}^9$$

$$\Leftrightarrow C_{31}^{2k+1} = C_{31}^9 \Rightarrow \begin{cases} 9 = 2k + 1 \\ 9 = 31 - (2k + 1) \end{cases} \Rightarrow k = 4$$

Vậy k=4.

Câu 115. Cho khai triển:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2010})^{2011} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{4042110}x^{4042110}$$

. Tính tổng $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{4042110}$.

Hướng dẫn giải

Thay x=1

Câu 116. Từ các chữ số 0,1,2,3,4,5 lập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một số vừa lập. Tính xác suất để lấy được số không chia hết cho 3.

Hướng dẫn giải

Từ các chữ số 0,1,2,3,4,5 lập các số có ba chữ số đôi một khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một số vừa lập. Tính xác suất để lấy được số không chia hết cho 3.

+ Tìm số có ba chữ số khác nhau lập được từ tập $E = \{0,1,2,3,4,5\}$

Số cần tìm có dạng $\overline{abc}$. Chọn $a \in E, a \neq 0$ có 5 cách.

Chọn 2 trong 5 số còn lại của $E \setminus \{a\}$ xếp vào hai vị trí b, c có A_5^2 cách.

Vậy có $5 \cdot A_5^2 = 100$ (số)

+ Tính số lập được chia hết cho 3.

Số cần tìm có dạng $\overline{abc}$, $a + b + c \vdots 3$

Xét các tập con gồm 3 phần tử của tập $E = \{0,1,2,3,4,5\}$, ta thấy chỉ có các tập sau thỏa mãn điều kiện tổng các chữ số chia hết cho 3 là:

$$A_1 = \{0,1,2\}, A_2 = \{0,1,5\}, A_3 = \{0,2,4\}, A_4 = \{0,4,5\}$$

$$A_5 = \{1,2,3\}, A_6 = \{1,3,5\}, A_7 = \{2,3,4\}, A_8 = \{3,4,5\}$$

Khi $a, b, c \in A_1, A_2, A_3, A_4$ mỗi trường hợp lập được 4 số thỏa mãn yêu cầu.

Khi $a, b, c \in A_5; A_6; A_7; A_8$ mỗi trường hợp lập được 6 số thỏa mãn yêu cầu.

Vậy có $4.4 + 4.6 = 40$ (số)

Suy ra số không chia hết cho 3 là $100 - 40 = 60$ (số)

Xác suất cần tính là $P = \frac{60}{100} = 0,6$.

Câu 117. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho trong mặt phẳng tồn tại n đường thẳng mà mỗi đường thẳng cắt đúng 2014 đường khác

Hướng dẫn giải

Xét n đường trong mặt phẳng, mà mỗi đường thẳng cắt đúng 2014 đường khác

Nếu a là một đường thẳng trong n đường và có đúng k đường song song với nó ($0 \leq k < n$).

Cho b là đường thẳng bất kỳ cắt a , khi đó b cắt tất cả các đường không song song với a và b với số giao điểm bằng số giao điểm của a với các đường thẳng đó đồng thời b cắt các đường thẳng song song với a mà mỗi đường thẳng cắt đúng 2014 đường khác

Suy ra có đúng k đường song song với b .

Vậy n đường được chia thành S nhóm, mỗi nhóm gồm $k + 1$ đường thẳng song song với nhau

$\Rightarrow$ Số giao điểm của mỗi đường với các đường khác là $(k+1)(S-1) = 2014$

Mà $2014 = 2.19.53$ và $k + 1$ là ước nguyên dương của 2014

$\Rightarrow k + 1 \in \{1; 2; 19; 53; 38; 106; 1007; 2014\}$

$n = (k + 1)S = 2014 + (k + 1)$

$\Rightarrow n \in \{2015; 2016; 2033; 2067; 2120; 2510; 3021; 4028\}$

Câu 118. Với mỗi số nguyên dương m , kí hiệu $C(m)$ là số nguyên dương k lớn nhất sao cho luôn tồn tại một tập S gồm m số nguyên dương để mỗi số nguyên chạy từ 1 đến k hoặc thuộc S hoặc là tổng hai phân tử thuộc S (hai phân tử này không nhất thiết phân biệt). Chứng minh:

$$\frac{m(m+6)}{4} \leq C(m) \leq \frac{m(m+3)}{2}$$

Hướng dẫn giải

Trước tiên ta tính thử một vài giá trị ban đầu của $C(m)$ để cảm nhận bài toán.

Dễ thấy: $C(1)=2; C(2)=4; C(3)=8$

Nhận xét: Việc tính $C(m)$ quy về việc đếm số phân tử của tập A xác định bởi:

$$A = S \cup (S + S); S + S = \{x + y \mid x, y \in S\}$$

+) Chứng minh: $C(m) \leq \frac{m(m+3)}{2}$

$$|A| \leq |S| + |S + S| \leq |S| + |S| + C_{|S|}^2 = \frac{|S|(|S|+3)}{2} = \frac{m(m+3)}{2}$$

Chú ý : Để đánh giá số phân tử của tập $S+S$ ta chia hai trường hợp x trùng y và x khác y .

Rõ ràng $\{1;2;3;\dots;k\}$ là một tập con của A nên ta được đpcm.

+) Chứng minh: $\frac{m(m+6)}{4} \leq C(m)$

Ta sẽ chỉ ra một tập B sao cho với mọi số nguyên chạy từ 1 đến $m(m+6)/4$ hoặc thuộc B hoặc là tổng hai số (không nhất thiết phân biệt) thuộc $S(m)$. Khi đó $C(m) \geq m(m+6)/4$.

Xét hai trường hợp sau:

TH1: $m = 2n$.

Xét tập $B(m) = \{1; 2; 3; \dots; n; 2n+1; 3n+2; \dots; (n+1)n+n\}$ gồm m phân tử và dễ thấy tập

$B \cup (B+B)$ chứa dãy số liên tiếp từ 1 đến $(n+1)n + 2n$ và rõ ràng $(n+1)n + 2n = 2n(2n+6)/4$

TH2: $m = 2n+1$

Khi đó ta xây dựng tập $B(m) = \{1; 2; 3; \dots; n+1; 2n+3; 3n+5; \dots; (n+1)n+2n+1\}$ gồm m phân tử và tập $B \cup (B+B)$

chứa dãy số liên tiếp từ 1 đến $(n+1)n+3n+2$ và rõ ràng $(n+1)n+3n+2 > (2n+1)(2n+7)/4$

Từ hai TH trên ta được đpcm.

Câu 119. Gọi X là tập hợp các số tự nhiên gồm sáu chữ số đôi một khác nhau được tạo thành từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp X . Tính xác suất để số được chọn chứa đúng ba chữ số lẻ.

Hướng dẫn giải

Gọi X là tập hợp các số tự nhiên gồm sáu chữ số đôi một khác nhau được tạo thành từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp X . Tính xác suất để số được chọn chứa đúng ba chữ số lẻ.

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega) = A_9^6$

Gọi A là biến cố số được có đúng ba chữ số lẻ.

Ta có: Số cách chọn 3 chữ số lẻ từ 1,3,5,7,9 là C_5^3

Số cách chọn 3 chữ số chẵn từ 2,4,6,8 là C_4^3

Số các số có 6 chữ số được lập từ 6 chữ số trên là: $6!$

Từ đó suy ra: $n(A) = C_5^3 \cdot C_4^3 \cdot 6!$

Vậy xác suất biến cố A là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_5^3 \cdot C_4^3 \cdot 6!}{A_9^6} = \frac{30}{63}$

Câu 120. Quần đảo Hoàng Sa có 3 loài chim bồ câu đang sinh sống, mỗi loài mang một màu sắc khác nhau, loài màu xám có 133 con, loài màu nâu 155 con và loài màu xanh có 177 con. Giả sử cứ hai con bồ câu khác màu gặp nhau thì chúng đồng thời đổi sang màu thứ ba và hai con bồ câu cùng màu gặp nhau thì chúng giữ nguyên không đổi màu. Có xảy ra tình trạng tất cả loài chim bồ câu đang sống trên đảo trở thành cùng một màu hay không?

Hướng dẫn giải

Khi chia các số 133; 155; 177 cho 3 được lần lượt các số dư là: 1; 2; 0

Ta xét:

Nếu 1 con bồ câu xám gặp 1 con bồ câu nâu, thì chúng đồng thời đổi thành màu xanh. Khi đó ta có 132 con xám, 154 con nâu, và 179 con xanh. Những số dư của 132; 154; 179 cho 3 tương ứng là 0; 1 và 2, nghĩa là lại gặp lại đầy đủ các số dư đã có.

Nếu 1 con bồ câu xám gặp con bồ câu màu xanh thì chúng đồng thời đổi sang màu nâu. Khi đó ta có 132 con bồ câu xám, 157 con bồ câu nâu, và 176 con bồ câu xanh. Lấy những số trên chia cho 3 cho số dư tương ứng là 0, 1 và 2, nghĩa là lại gặp cả 3 khả năng của số dư. Nếu bồ câu nâu và bồ câu xanh gặp nhau, thì chúng cùng đổi thành màu xám. Khi đó có 135 con bồ câu xám, 154 con ồ câu nâu và 176 con ồ câu xanh. Số dư củ những con bồ câu trên chia cho 3 tương ứng là 0, 1 và 2, vẫn có đầy đủ các số dư khi chia cho 3..

Bất biến ở đây là dù thay đổi màu như thế nào thì số dư của các số lượng bồ câu chia cho 3 đều có đầy đủ 0, 1, 2.

Số lượng tất cả thằn lằn trên đảo là $133 + 155 + 177 = 465$ là một số chia hết cho 3. Nếu tất cả các con bồ câu đều cùng một màu thì số dư của số lượng bồ câu màu xám, nâu và đỏ chia cho 3 tương ứng là 0, 0, 0. Điều này vô lý vì các số dư phải có đầy đủ các số dư này khi chia cho 3.

Như vậy câu trả lời là không thể được.

Câu 121. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số có 6 chữ số khác nhau trong đó có ba chữ số chẵn và ba chữ số lẻ. Trong các số trên có bao nhiêu số mà các chữ số được sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

Hướng dẫn giải

Có 5 số lẻ và 4 số chẵn từ chín số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Suy ra có C_5^3 cách chọn 3 số lẻ từ năm số 1, 3, 5, 7, 9

và có C_4^3 cách chọn 3 số chẵn từ bốn số 2, 4, 6, 8

Cứ ba chữ số lẻ ghép với ba chữ số chẵn ta được một tập gồm 6 phần tử. Theo quy tắc nhân có $C_4^3 \cdot C_5^3$ cách chọn các tập hợp mà mỗi tập có 3 số chẵn và 3 số lẻ từ các số trên

Ứng với mỗi tập có 6! cách sắp xếp thứ tự các phần tử và mỗi cách sắp xếp thứ tự đó ta được một số thỏa mãn bài toán

Do đó theo quy tắc nhân có $C_4^3 \cdot C_5^3 \cdot 6! = 28800$ số có 6 chữ số khác nhau gồm 3 chữ số chẵn và 3 chữ số lẻ từ các số trên.

* Có $C_4^3 \cdot C_5^3$ tập hợp gồm ba chữ số lẻ và ba chữ số chẵn. Ứng với mỗi tập có duy nhất một cách sắp xếp các phần tử theo thứ tự tăng dần

Do đó mỗi tập hợp tương ứng với một số. Vậy có $C_4^3 \cdot C_5^3 = 40$ số thỏa mãn

Câu 122. Có 1000 học sinh gồm 499 học sinh nam và 501 học sinh nữ được xếp thành 10 hàng dọc, mỗi hàng 100 học sinh. Người ta muốn chọn từ 1000 học sinh này ra một nhóm 4 học sinh, trong đó số học sinh nữ được chọn là lẻ và thỏa mãn điều kiện sau đây: 4 học sinh này được chọn từ 2 hàng khác nhau và có 2 cặp học sinh có cùng thứ tự đứng trong hàng (tính từ người đứng đầu tiên của hàng đó). Chứng minh rằng số cách chọn các nhóm như vậy là một số lẻ.

Hướng dẫn giải

Gọi mỗi nhóm 4 học sinh lấy từ hai hàng thỏa mãn yêu cầu bài toán là một *đội*. Đặt $S = \{\sigma \mid \sigma \text{ là một đội}\}$, $O = \{\sigma \in S \mid \sigma \text{ có số lẻ học sinh nữ}\}$, $E = \{\sigma \in S \mid \sigma \text{ có số chẵn học sinh nữ}\}$. Ta cần chứng minh rằng $|O|$ là lẻ.

Với mỗi tập con A của S , ta định nghĩa $f(A) = \sum_{\sigma \in A} g(\sigma)$, trong đó $g(\sigma)$ là số học sinh nữ

của σ .

Vì $O \cap E = \emptyset$ và $O \cup E = S$ nên $f(S) = f(O) + f(E)$.

Hơn nữa $f(E)$ là chẵn, suy ra $f(S) \equiv f(O) \pmod{2}$.

Mặt khác, xét một học sinh nữ bất kì. Để tạo thành một đội, học sinh này có thể bắt cặp với một học sinh khác trong hàng bởi 99 cách, sau đó tìm 2 học sinh khác ở hàng khác bởi 9 cách. Suy ra, học sinh nữ này là thành viên của $99 \cdot 9 = 891$ đội. Có nghĩa là học sinh nữ này được tính 891 lần trong $f(S)$. Vì ta có 501 học sinh nữ nên

$$f(S) \equiv 891 \cdot 501 \equiv 1 \pmod{2}.$$

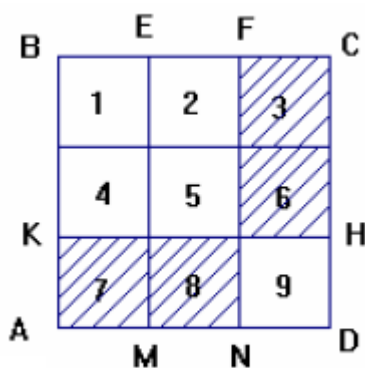
Vì mỗi $\sigma \in O$ chứa một số số lẻ các học sinh nữ nên $f(O) \equiv |O| \pmod{2}$. Suy ra

$$|O| \equiv f(O) \equiv f(S) \equiv 1 \pmod{2}.$$

Như vậy số cách chọn những đội là một số lẻ

Câu 123. Trên mặt phẳng, kẻ vô hạn các ô vuông (dạng bàn cờ) và mỗi ô vuông được điền một trong hai số 0 hoặc 1 sao cho bất cứ hình chữ nhật nào có kích thước 2×3 thì có đúng hai ô điền số 1. Xét một hình chữ nhật bất kì có kích thước 2016×2017 . Tính tổng các số có trong các ô của nó.

Hướng dẫn giải



Thật vậy, giả sử tồn tại hình chữ nhật có kích thước 1×3 có số ô có số 1 khác 1. Không mất tính tổng quát ta giả sử đó là hình chữ nhật AKHD kích thước 1×3 có đúng hai ô điền số 1 (nếu không thì không có ô nào chứa số 1 nhưng không thể là ba ô điền số 1 vì trong mọi hình chữ nhật có kích thước 2×3 có đúng 2 ô điền số 1).

Có thể cho coi hai ô chứa số 1 của AKHD là ô 7 và ô 8 (Nếu ở các ô khác thì lập luận tương tự).

Xét hình chữ nhật BFNA có kích thước $2 \times 3 \Rightarrow$ nó có đúng hai ô chứa số 1 $\Rightarrow$ các ô 1,2,4,5 là các ô điền số 0.

Xét hình chữ nhật BCHK, từ giả thiết và do các ô 1,2,4,5 đều điền số 0 nên các ô 3,6 phải điền số 1.

Xét hình chữ nhật ECDM kích thước 2×3 , ta thấy do ô 3,6,8 điền số 1 nên dẫn đến mâu thuẫn.

Trường hợp AKHD không có ô nào điền số 1, lập luận tương tự ta cũng dẫn đến mâu thuẫn.

Vậy giả thiết phản chứng là sai hay ta có điều phải chứng minh.

Vì $2016 = 3 \times 672$ nên hình chữ nhật kích thước 2016×2017 chia thành 672×2017 hình chữ nhật có kích thước 1×3 .

Vậy tổng các số điền trong ô của hình chữ nhật này là: $672 \cdot 2017 = 1355424$.

Câu 124. Tô các số từ 1 đến 2017 bằng các màu khác nhau sao cho không có hai số nào cùng màu chia hết cho nhau. Cần ít nhất bao nhiêu màu ?

Hướng dẫn giải

Thật vậy, với 11 màu khác nhau mà ta gọi là màu 1, màu 2,..., màu 11, xét cách tô màu sau:

Số 1 tô màu 1

Các số 2 và 3 tô màu 2

Các số từ 4 đến 7 tô màu 3

Các số từ 8 đến 15 tô màu 4

Các số từ 16 đến 31 tô màu 5

Các số từ 32 đến 63 tô màu 6

Các số từ 64 đến 127 tô màu 7

Các số từ 128 đến 255 tô màu 8

Các số từ 256 đến 511 tô màu 9

Các số từ 512 đến 1023 tô màu 10

Các số từ 1024 đến 2017 tô màu 11.

Dễ thấy cách tô màu trên thỏa mãn không có hai số nào cùng màu chia hết cho nhau. Vậy cần ít nhất 11 màu.

Câu 125. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mà trong mỗi số này các chữ số không lặp lại.

Hướng dẫn giải

Đếm các số tự nhiên có 1 chữ số, 2 chữ số,, 7 chữ số rồi tìm tổng.

Câu 126. Cho $m, n \geq 3$ là hai số nguyên dương. Trong bảng kích thước $m \times n$ có dán k ngôi sao (mỗi ô có nhiều nhất là một ngôi sao). Ta thực hiện một công việc là nếu có một hình 2×3 hoặc 3×2 mà có 5 ngôi sao thì ta sẽ dán thêm một ngôi sao vào ô còn lại. Tìm giá trị nhỏ nhất của k sao cho ban đầu trong bảng có k ngôi sao thì sau hữu hạn bước thực hiện việc dán thêm sao như trên thì mọi ô trong bảng đều có ngôi sao.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh giá trị nhỏ nhất của k là $m+n$.

Sau mỗi một lần thực hiện thuật toán thì ít nhất một hình 2×2 với 4 ngôi sao được hình thành.

Nếu ban đầu không có hình 2×2 nào với 4 ngôi sao thì sau bước thực hiện sẽ có ít nhất hai hình 2×2 với đầy đủ 4 ngôi sao được hình thành.

Do đó sau $mn-k$ bước thực hiện sẽ có ít nhất $mn-k+1$ hình 2×2 với 4 ngôi sao được hình thành hoặc ít nhất có 1 hình 2×2 với 4 ngôi sao đã có ban đầu và $mn-k$ hình 2×2 có đủ 4 sao được hình thành.

Mặt khác, tồn tại đúng $(m-1)(n-1)$ hình 2×2 ở trong bảng, do đó

$$(m-1)(n-1) \geq mn-k+1$$

Từ đó $k \geq m+n$.

Hình vẽ sau đây chỉ ra một ví dụ $k = m+n$

*	*	*	*	*	*
*	*				
*					
*					

Câu 127. Trên bàn cờ 10×10 người ta viết các số từ 1 đến 100. Mỗi hàng chọn ra số lớn thứ ba. Chứng minh rằng tồn tại một hàng có tổng các số trong hàng đó nhỏ hơn tổng các số lớn thứ ba được chọn.

Hướng dẫn giải

Sắp xếp thứ tự của 10 số lớn thứ ba của các hàng là $a_1 > a_2 > \dots > a_{10}$. Ta thấy tối đa là 20 số có thể lớn hơn a_1 (là các số lớn thứ nhất và thứ hai ở mỗi hàng).

Vì vậy $a_1 \geq 80$. Tương tự có tối đa 28 số có thể lớn hơn a_2 . Vì vậy $a_2 \geq 72$. Từ đó

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{10} \geq 80 + 72 + (a_{10} + 7) + (a_{10} + 6) + \dots + a_{10} = 8a_{10} + 180.$$

Trong khi đó, tổng các số ở hàng chứa a_{10} không lớn hơn

$$100 + 99 + a_{10} + (a_{10} - 1) + \dots + (a_{10} - 7) = 8a_{10} + 171.$$

Do $8a_{10} + 171 < 8a_{10} + 180$ nên hàng chứa a_{10} là hàng thỏa mãn yêu cầu.

Câu 128. Một ngân hàng câu hỏi Toán có 30 câu hỏi khác nhau gồm: 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình và 15 câu hỏi dễ. Từ ngân hàng này lập một đề thi gồm 5 câu hỏi khác nhau. Tính xác suất để sao cho trong mỗi đề được chọn nhất thiết phải có đủ cả 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2?

Hướng dẫn giải

Số đề thi thỏa mãn yêu cầu bài toán là: 56875.

Tổng số đề thi có thể có là: 142506.

$$\text{Xác suất cần tìm là: } P = \frac{56875}{142506}.$$

Câu 129. Cho 100 số tự nhiên không lớn hơn 100 có tổng bằng 200. Chứng minh rằng từ các số đó có thể chọn được ít nhất một bộ các số có tổng bằng 100.

Hướng dẫn giải

Câu 130. Một túi đựng 11 viên bi cùng kích thước nhưng khác nhau về màu sắc gồm: 4 viên bi xanh, 7 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 2 viên. tính xác suất để:

a. Lấy được 2 viên bi cùng màu.

b. Lấy được 2 viên bi khác màu.

Hướng dẫn giải

Mỗi cách lấy ngẫu nhiên 2 viên bi từ 11 viên bi là một tổ hợp chập 2 của 11 viên bi. Do đó :

$$N(\Omega) = C_{11}^2$$

Gọi A là biến cố lấy được 2 viên bi xanh, B là biến cố lấy được 2 viên bi đỏ thì $N(A) = C_4^2$ và $N(B) = C_7^2$.

$$\text{Do đó : } P(A) = \frac{C_4^2}{C_{11}^2} = \frac{6}{55}, P(B) = \frac{C_7^2}{C_{11}^2} = \frac{21}{55}$$

$$\text{Biến cố lấy được 2 viên bi cùng màu là } C = A \cup B, \text{ vì } A, B \text{ là 2 biến cố xung khắc nên: } P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{27}{55}$$

b) Biến cố lấy được 2 viên bi khác màu là $\bar{C}$.

$$\text{Từ đó ta có: } P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{27}{55} = \frac{28}{55}$$

Câu 131. Có bao nhiêu cách phân tích 6^9 thành tích của 3 số nguyên dương, biết các cách phân tích mà các nhân tử chỉ khác nhau về thứ tự thì chỉ được tính 1 lần?

Hướng dẫn giải

Có bao nhiêu cách phân tích 6^9 thành tích của 3 số nguyên dương, biết các cách phân tích mà các nhân tử chỉ khác nhau về thứ tự thì chỉ được tính 1 lần?

$$\text{Xét phân tích } 6^9 = (2^{a_1} \cdot 3^{b_1})(2^{a_2} \cdot 3^{b_2})(2^{a_3} \cdot 3^{b_3}) \text{ với } \begin{cases} a_i, b_i \in \mathbb{N} \\ a_1 + a_2 + a_3 = 9 \\ b_1 + b_2 + b_3 = 9 \end{cases}$$

Với mỗi $a_1 \in \mathbb{N}, 0 \leq a_1 \leq 9$, có $10 - a_1$ cách chọn số a_2 , để $a_1 + a_2 \leq 9$ từ đó chọn $a_3 = 9 - a_1 - a_2$. (1 điểm)

Vậy số cách chọn các bộ (a_1, a_2, a_3) là $10 + 9 + \dots + 1 = 55$ cách

$\Rightarrow$ số cách chọn các bộ (a_1, a_2, a_3) và (b_1, b_2, b_3) là $55 \cdot 55$ cách.

Bây giờ, ta sẽ tính số các cách phân tích bị trùng nhau.

+) TH1: 3 thừa số bằng nhau:

$$6^9 = (2^3 \cdot 3^3)(2^3 \cdot 3^3)(2^3 \cdot 3^3) \quad (1 \text{ điểm})$$

+) TH2: 2 thừa số bằng nhau:

$$6^9 = (2^a \cdot 3^b)(2^a \cdot 3^b)(2^{9-2a} \cdot 3^{9-2b}) \text{ và } (a; b) \neq (3; 3).$$

Khi đó $a \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$; $b \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ và $(a; b) \neq (3; 3)$

$\rightarrow$ số cặp $(a; b)$ là $5 \cdot 5 - 1 = 24$, và 24 cặp này cho ta 24 cách phân tích thỏa mãn yêu cầu. Tuy nhiên, mỗi cặp sẽ cho 3 lần đếm trong quá trình đếm mà ta vừa nêu ở trên. (1 điểm)

+) TH3: nếu cả 3 thừa số khác nhau, thì mỗi phân tích bị đếm trùng $3! = 6$ lần.

Vậy số cách phân tích là: $1 + 24 + (55 \times 55 - 24 \times 3 - 1) : 6 = 517$ cách (1 điểm)

Trong đề không có câu 2 - về dãy số, vì tôi không nghiên cứu được câu nào mới và phù hợp ☺

Câu 132. Hội khỏe Phù Đổng năm 2014 có tổ chức thi đấu 4 môn thể thao *chạy 100m, nhảy xa, nhảy cao, bắn cung* và quy định điều kiện cho mỗi đội tham gia như sau:

Mỗi vận động viên của một đội chỉ thi đấu duy nhất một môn thể thao.

Mỗi đội có thể lựa chọn số vận động viên cho mỗi môn tùy ý (nhưng tổng số vận động viên đúng bằng 20).

Tại lễ khai mạc, mỗi đội xếp thành một hàng dọc, các vận động viên chạy 100m cầm cờ đỏ đứng đầu, tiếp theo đến vận động viên nhảy xa cầm cờ vàng rồi đến vận động viên nhảy cao

cầm cò xanh và cuối cùng là vận động viên bắn cung cầm cò tím. Giả sử số đội tham dự là đủ lớn, hỏi có thể có tối đa bao nhiêu loại hàng dọc (phân biệt theo độ dài mỗi màu của hàng).

Hướng dẫn giải

Bài này có thể giải theo phương pháp song ánh để tính số phần tử của tập hợp kết hợp với kỹ thuật dùng dãy nhị phân.

Ta thấy mỗi hàng sẽ tương ứng với một bộ 4 số (a, b, c, d) với $\begin{cases} 0 \leq a, b, c, d \leq 20 \\ a + b + c + d = 20 \end{cases}$ để chỉ số

lượng vận động viên thi đấu mỗi môn chạy 100m, nhảy xa, nhảy cao, bắn cung tương ứng. Với mỗi bộ 4 số như thế ta đặt tương ứng với dãy nhị phân $\overbrace{1\dots 101\dots 101\dots 101\dots 1}^{23}$. Dễ thấy tương

ứng đó là một song ánh và có C_{23}^3 dãy nhị phân khác nhau do đó có tối đa $C_{23}^3 = 1771$ loại hàng dọc khác nhau.

Câu 133. Cho p là số nguyên tố lẻ. Tìm số tập con X của tập $\{1; 2; \dots; 2p\}$ biết rằng X chứa đúng p phần tử và tổng tất cả các phần tử của X chia hết cho p .

Hướng dẫn giải

Đặt $A = \{c \subset \{1; 2; \dots; 2p\} : |c| = p\} \Rightarrow |A| = C_{2p}^p$

Và $A_j = \{x \subset A : S(x) \equiv j \pmod{p}\}$ với $j = 0, 1, 2, \dots, p-1$

Vì $A = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{p-1}$ và $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$ nên:

$$|A| = |A_0| + |A_1| + \dots + |A_{p-1}|$$

Xét đa thức: $P(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$, đa thức này có $p-1$ nghiệm phức $\{\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{p-1}\}$ và $\alpha^p = 1$

Và $x^p = 1$ có p nghiệm phức phân biệt: $\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{p-1}, \alpha^p = 1$, nên ta có:

$$x^p - 1 = \prod_{k=1}^p (x - \alpha^k)$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{2p} (x - \alpha^k) &= \prod_{k=1}^p (x - \alpha^k) \cdot \prod_{k=1}^p (x - \alpha^{p+k}) \\ &= \prod_{k=1}^p (x - \alpha^k) \prod_{k=1}^p (x - \alpha^k) = \left[\prod_{k=1}^p (x - \alpha^k) \right]^2 = (x^p - 1)^2 \end{aligned}$$

So sánh hệ số x^p của 2 vế đẳng thức:

$$\prod_{k=1}^p (x - \alpha^k) = (x^p - 1)^2$$

$$\text{ta có: } (-1)^p \sum_{x \in A} \alpha^{S(x)} = -2$$

Do p lẻ và $\alpha^{S(x)} = \alpha^k$ nếu $x \in A_k$ ta có:

$$\sum_{k=0}^{p-1} |A_k| \cdot \alpha^k - 2 = 0$$

Do vậy x là nghiệm của đa thức: $Q(x) = \sum_{k=1}^{p-1} |A_k| x^k + |A_0| - 2$

Vì x là 1 nghiệm bất kì của đa thức: $P(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$

nên $|A_1| = |A_2| = \dots = |A_{p-1}| = |A_0| - 2$

$$\Rightarrow |A_0| - 2 = \frac{|A_1| + |A_2| + \dots + |A_{p-1}|}{p} = \frac{|A_0| - 2}{p}$$

$$\Rightarrow |A_0| = \frac{C_{2p}^p - 2}{p} + 2 \text{ là số tập con thỏa mãn bài toán.}$$

Câu 134. Một quân cờ di chuyển trên bàn cờ 2016×2016 theo một trong ba cách: đi lên một ô, sang bên phải một ô, đi xuống về bên trái một ô. Hỏi quân cờ có thể đi qua tất cả các ô, mỗi ô đúng một lần và quay lại ô kề bên phải ô xuất phát được không?

Hướng dẫn giải

Sau mỗi bước, tổng thứ tự của hàng và cột chứa quân cờ hoặc giảm đi 2 hoặc tăng lên 1.

Như vậy, khi xét theo modulo 3 thì tổng này tăng 1 mỗi bước.

Do có $2016^2 - 1$ bước, nếu kết thúc ở ô kề bên phải ô xuất phát thì tổng này tăng 1 đơn vị.

Do đó, $2016^2 - 2$ chia hết cho 3. Vậy quân cờ không thể đi qua tất cả các ô, mỗi ô đúng một lần và quay lại ô kề bên phải ô xuất phát.

Chúng minh hệ thức :
$$\sum_{k=1}^n k(C_n^k)^2 = nC_{2n-1}^{n-1}$$

Hướng dẫn giải

Ta sẽ giải bài toán sau bằng hai cách “Có n nhà vật lý và n nhà toán học tham gia một Hội nghị khoa học. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một nhóm làm việc gồm n người, trong đó có 1 nhà vật lý làm nhóm trưởng”.

Cách 1: Chọn nhóm trưởng vật lý, sau đó chọn $n-1$ thành viên còn lại từ $2n-1$ người còn lại.

+) Chọn nhóm trưởng là một nhà vật lý có n cách.

+) Ứng với mỗi cách chọn nhóm trưởng có C_{2n-1}^{n-1} cách chọn $n-1$ thành viên trong $2n-1$ thành viên còn lại.

Áp dụng quy tắc nhân có tất cả nC_{2n-1}^{n-1} cách chọn một nhóm n người thỏa mãn bài toán. (1)

Cách 2: Chọn k nhà vật lý, chọn nhóm trưởng là nhà vật lý sau đó chọn $n-k$ nhà toán học với $k = 1, 2, \dots, n$.

Với mỗi giá trị k cố định :

+) Chọn k nhà vật lý trong n nhà vật lý có C_n^k cách

+) Ứng với mỗi cách chọn k nhà vật lý ở trên có k cách chọn một nhóm trưởng là nhà vật lý

+) Ứng với mỗi cách chọn k nhà vật lý và một nhóm trưởng vật lý có $C_n^{n-k} = C_n^k$ cách chọn $n-k$ nhà toán học trong n nhà toán học.

Áp dụng quy tắc nhân có tất cả $k(C_n^k)^2$ cách.

Cho k chạy từ 1 đến n ta được tất cả $\sum_{k=1}^n k(C_n^k)^2$ cách chọn nhóm n người thỏa mãn bài toán

(2).

Từ (1) và (2) suy ra $\sum_{k=1}^n k(C_n^k)^2 = nC_{2n-1}^{n-1}$ (đpcm)

Câu 135. Các số nguyên dương $1, 2, 3, \dots, 2014$ được sắp xếp trên một hàng theo một thứ tự nào đó. Ta thực hiện quy tắc đổi chỗ các số như sau: nếu số đầu tiên là k thì ta đổi k số đầu tiên theo thứ tự ngược lại. Chứng minh rằng sau một số hữu hạn lần thực hiện quy tắc trên thì số 1 sẽ xuất hiện ở vị trí đầu tiên

Hướng dẫn giải

Giả sử $k, 1 \leq k \leq 2014$ là số lớn nhất xuất hiện ở vị trí đầu tiên trong tất cả các quá trình đổi chỗ. Giả sử số k xuất hiện ở lần thứ h . Khi đó ở lần thực hiện sau lần thứ h thì số k sẽ giữ nguyên vị trí. Trong các quá trình đổi chỗ sau đó ta gọi k_1 là số lớn nhất xuất hiện ở vị trí đầu tiên. Giả sử số k_1 xuất hiện ở lần thứ h_1 . Khi đó sau lần thứ h_1 thì số k_1 sẽ giữ nguyên vị trí, ... cứ tiếp tục như vậy thì sau một số hữu hạn bước phải dừng lại. Khi không thực hiện việc thực hiện quy tắc đổi chỗ của bài toán tức là số ở vị trí đầu tiên sẽ là số 1. Bài toán được chứng minh.