

Câu 1 (4 điểm).

Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 2 - m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt A, B, C sao cho tổng hệ số góc của các tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại các điểm A, B, C bằng 3.

Câu 2 (6 điểm).

a. Giải phương trình: $2\sin 2x + \cos 2x + 2 = \sqrt{2}(\sin 2x \cdot \cos x + \sin x + 2\cos x)$.

b. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + (y+2)x^2 + 2xy = 1 \\ x^2 + 3x + y + 2 = 0 \end{cases}.$$

Câu 3 (4 điểm).

Cho dãy số (u_n) xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = \frac{2020}{2019} \\ 2u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n \end{cases}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Đặt $S_n = \frac{1}{u_1 + 2} + \frac{1}{u_2 + 2} + \dots + \frac{1}{u_n + 2}$. Tính $\lim S_n$.

Câu 4 (4 điểm).

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng 1. Gọi M, N là hai điểm thay đổi lần lượt thuộc các cạnh AB, AC sao cho mặt phẳng (SMN) luôn vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Đặt $AM = x, AN = y$.

- Chứng minh rằng $x + y = 3xy$.
- Tìm x, y để ΔSMN có diện tích bé nhất, lớn nhất.

Câu 5 (2 điểm).

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức.

$$P = \frac{2}{3 + ab + bc + ca} + \frac{\sqrt{abc}}{6} + \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}}.$$

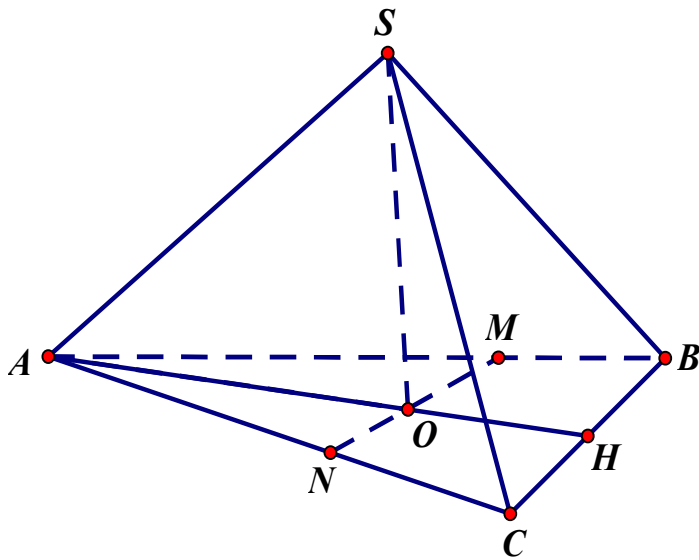
----- HẾT -----

Thí sinh không sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

ĐÁP ÁN ĐỀ KHẢO SÁT CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI 12

CÂU	Ý	NỘI DUNG	ĐIỂM
1		Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 2 - m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt A, B, C sao cho tổng hệ số góc của các tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại các điểm A, B, C bằng 3.	4
		Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $x^3 - 3x^2 + mx + 2 - m = 0$ (1) có 3 nghiệm phân biệt. $x^3 - 3x^2 + mx + 2 - m = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x + m - 2) = 0$	1,0
		Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow x^2 - 2x + m - 2 = 0$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 3 - m > 0 \\ 1 - 2 + m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 3$ (*).	1,0
		Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (2), suy ra tổng hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm A, B, C là: $y'(1) + y'(x_1) + y'(x_2) = 3(x_1 + x_2)^2 - 6x_1x_2 - 6(x_1 + x_2) + 3m - 3 = 9 - 3m$	1,5
		Tổng HSG của các tiếp tuyến bằng 3 $\Leftrightarrow 9 - 3m = 3 \Leftrightarrow m = 2$ (t/m đk (*)). ĐS: $m = 2$	0.5
2	a	Giải phương trình: $2 \sin 2x + \cos 2x + 2 = \sqrt{2} (\sin 2x \cdot \cos x + \sin x + 2 \cos x)$	1,0
		$\Leftrightarrow \cos 2x = (\sqrt{2} \sin 2x \cdot \cos x - \sin 2x) + (\sqrt{2} \sin x - \sin 2x) + (2\sqrt{2} \cos x - 2)$ $\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 = \sin 2x (\sqrt{2} \cos x - 1) - \sqrt{2} \sin x (\sqrt{2} \cos x - 1) + 2(\sqrt{2} \cos x - 1)$	1,0
		$\Leftrightarrow (\sqrt{2} \cos x + 1)(\sqrt{2} \cos x - 1) = (\sqrt{2} \cos x - 1) [\sin 2x - \sqrt{2} \sin x + 2]$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} & (1) \\ \sqrt{2}(\sin x + \cos x) - 2 \sin x \cdot \cos x - 1 = 0 & (2) \end{cases}$	0.5
		+ (1) $\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi$ + (2) $\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$, Kết luận phương trình có 3 họ nghiệm :	0.5

	b	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + (y+2)x^2 + 2xy = 1 \\ x^2 + 3x + y = -2 \end{cases}$	3
		Viết lại hệ: $\begin{cases} (x^2 + 2x)(x + y) = 1 \\ x^2 + 2x + x + y = -2 \end{cases}$	1,0
		Đặt $u = x^2 + 2x, v = x + y$. Dễ có: $u \geq -1$. Hệ trở thành: $\begin{cases} u.v = 1 \\ u + v = -2 \end{cases}$	0.5
		Suy ra: $\begin{cases} u = -1 \\ v = -1 \end{cases}$	0.5
		Ta có $\begin{cases} x^2 + 2x = -1 \\ x + y = -1 \end{cases}$	0.5
		$\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$	0.5
3		Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = \frac{2020}{2019} \\ 2u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n \end{cases}, n \in \mathbb{N}^*$ Đặt $S_n = \frac{1}{u_1 + 2} + \frac{1}{u_2 + 2} + \dots + \frac{1}{u_n + 2}$. Tính: $\lim S_n$.	4
		Ta chứng minh $u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (1) bằng phương pháp qui nạp toán học. Với $n = 1, u_1 = \frac{2020}{2019} > 1 \Rightarrow (1)$ đúng với $n = 1$. Giả sử (1) đúng với $n = k$ ($k \geq 1$) ta có $u_k > 1$ (gtqn). Ta phải chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$ tức là phải chứng minh $u_{k+1} > 1$. Thật vậy $u_{k+1} - 1 = \frac{u_k^2 + 2u_k}{2} - 1 = \frac{u_k^2 + 2(u_k - 1)}{2} > \frac{u_k^2}{2} > \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow u_{k+1} - 1 > 0 \Rightarrow u_{k+1} > 1$. Theo nguyên lý qui nạp toán học ta có $u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ Mặt khác $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ vì dãy số $u_n > 1$ nên dãy số (u_n) là dãy số tăng.	1,0

4		Với mọi $k \in \mathbb{N}^*$, ta có : $2u_{k+1} = u_k(u_k + 2) \Leftrightarrow \frac{2}{u_k(u_k + 2)} = \frac{1}{u_{k+1}} \Leftrightarrow \frac{(u_k + 2) - u_k}{u_k(u_k + 2)} = \frac{1}{u_{k+1}} \Leftrightarrow \frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_k + 2} = \frac{1}{u_{k+1}}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{u_k + 2} = \frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}} \Rightarrow S_n = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{n+1}}$	1,0
		Ta chứng minh dãy số (u_n) là dãy số không bị chặn. Giả sử phản chứng dãy số (u_n) bị chặn . Do dãy số (u_n) là dãy tăng (cmt) nên ta có dãy (u_n) tăng và bị chặn thì dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn. Giả sử $\lim(u_n) = a$. Vì $u_n > 1$ Nên ta có $a \geq 1$. Từ định nghĩa $2u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n$. Chuyển qua giới hạn ta có: $\Rightarrow 2a = a^2 + 2a \Rightarrow a = 0. \text{ Mâu thuẫn với } a \geq 1.$	1,0
		Vậy giả sử sai, suy ra dãy (u_n) không bị chặn trên . do (u_n) là dãy tăng nên $\lim(u_n) = +\infty \Rightarrow \lim \frac{1}{u_n} = 0 \Rightarrow \lim S_n = \lim \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{n+1}} \right) = \frac{1}{u_1} = \frac{2019}{2020}$	1,0
			
	a.	Chứng minh $x + y = 3xy$ Kẻ $SO \perp MN, O \in MN$ do $(SMN) \perp (ABC) \Rightarrow SO \perp (ABC)$ Do hình chóp $S.ABC$ là hình chóp đều nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .	1,0
		Gọi H là trung điểm của BC . Và O là trọng tâm của tam giác ABC .	

4	Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2.\overrightarrow{AH} \Leftrightarrow \frac{AB}{AM} \overrightarrow{AM} + \frac{AC}{AN} \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AH} \Leftrightarrow \frac{1}{x}.\overrightarrow{AM} + \frac{1}{y}.\overrightarrow{AN} = 2.\frac{3}{2}\overrightarrow{AO}$. Vì $(M \in AB, N \in AC)$ $x.\overrightarrow{AM} + y.\overrightarrow{AN} = 3xy.\overrightarrow{AO}$. Do M, N, O thẳng hàng nên $x + y = 3xy$. (đpcm).	1,0
	$S_{\Delta SMN} = \frac{1}{2} SO.MN \Rightarrow S_{\Delta SMN}$ nhỏ nhất khi MN nhỏ nhất và $S_{\Delta SMN} = \frac{1}{2} SO.MN \Rightarrow S_{\Delta SMN}$ lớn nhất khi MN lớn nhất Ta có $MN^2 = x^2 + y^2 - 2xy.\cos 60^\circ = x^2 + y^2 - xy = (x+y)^2 - 3xy = 9(xy)^2 - 3xy$	1,0
	Từ giả thiết ta có $0 < x; y \leq 1$ Từ (1) ta có $3xy = x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow xy \geq \frac{4}{9}$ $(x-1)(y-1) \geq 0 \Rightarrow xy + 1 \geq x + y \Rightarrow xy + 1 \geq 3xy \Rightarrow xy \leq \frac{1}{2}$	0,5
	Đặt $t = xy, t \in \left[\frac{4}{9}; \frac{1}{2}\right] \Rightarrow MN^2 = 9t^2 - 3t$ Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t) = 9t^2 - 3t; t \in \left[\frac{4}{9}; \frac{1}{2}\right]$ ta được MN nhỏ nhất khi $t = \frac{4}{9}$ khi $x = y = \frac{2}{3}$ MN lớn nhất khi $t = \frac{1}{2}$ khi $\begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=1 \end{cases}$	0,5
	Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng: $\frac{2}{3+ab+bc+ca} + \frac{\sqrt{abc}}{6} + \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}} \leq 1$	2
	Đặt : $P = \frac{2}{3+ab+bc+ca} + \frac{\sqrt{abc}}{6} + \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}}$	0,5

5	Áp dụng bất đẳng thức: $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ Với $a, b, c > 0$ ta có: $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c) = 9abc > 0 \Rightarrow ab + bc + ca \geq 3\sqrt{abc}$ Ta có: $(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq (1 + \sqrt[3]{abc})^3 \quad \forall a, b, c > 0$. Thật vậy: $(1 + a)(1 + b)(1 + c) = 1 + (a + b + c) + (ab + bc + ca) + abc$ $\geq 1 + 3\sqrt{abc} + 3\sqrt{(abc)^2} + abc = (1 + \sqrt[3]{abc})^3$	0.5
	Khi đó: $P \leq \frac{2}{3(1 + \sqrt{abc})} + \frac{\sqrt[3]{abc}}{1 + \sqrt[3]{abc}} + \frac{\sqrt{abc}}{6}$ Đặt: $\sqrt[6]{abc} = t \Rightarrow \sqrt[3]{abc} = t^2, \sqrt{abc} = t^3$. Vì $a, b, c > 0$ nên $0 < abc \leq \left(\frac{a + b + c}{3}\right)^3 = 1 \Rightarrow 0 < t \leq 1$	0.5
	Xét hàm số $f(t) = \frac{2}{3(1 + t^3)} + \frac{t^2}{1 + t^2} + \frac{1}{6}t^3, t \in (0; 1]$ $f'(t) = \frac{-2t^2}{(1 + t^3)^2} + \frac{2t}{(1 + t^2)^2} + \frac{t^2}{2} = 2t \cdot \left(\frac{-t}{(1 + t^3)^2} + \frac{1}{(1 + t^2)^2} \right) + \frac{t^2}{2}$ $= 2t \cdot \frac{(1 - t)(1 - t^5)}{(1 + t^2)^2 \cdot (1 + t^3)^2} + \frac{t^2}{2} > 0, \forall t \in (0; 1]$ Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $f(t)$ trên $(0; 1]$ ta có $f(t) \leq f(1) = 1, \forall t \in (0; 1]$.	0.5
	$\Rightarrow \frac{2}{3 + ab + bc + ca} + \frac{\sqrt{abc}}{6} + \sqrt[3]{\frac{abc}{(1 + a)(1 + b)(1 + c)}} \leq 1$ Dấu '=' xảy ra khi $a = b = c = 1$. Vậy $MaxP = 1$ khi $a = b = c = 1$	0.5

Lưu ý: Học sinh giải cách khác mà đúng vẫn cho điểm tối đa

