

GV. TRẦN QUỐC NGHĨA

ĐT: 098 373 4349



TÀI LIỆU HỌC TẬP

- Tóm tắt lí thuyết
- Phân dạng bài tập
- Bài tập minh họa
- Bài tập tự luyện

TÓÁN 11

HỌC KÌ II

LƯU HÀNH NỘI BỘ

TÀI **LIỆU HỌC TẬP** TOÁN 11 **HỌC** KÌ II

NĂM HỌC 2020-2021

Chủ đề 4. GIỚI HẠN – LIÊN TỤC

Vấn đề 1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ	1
Dạng 1. Dãy có giới hạn 0.....	2
Dạng 2. Khử dạng vô định ∞/∞	2
Dạng 3. Khử dạng vô định $\infty - \infty$	8
Dạng 4. Cấp số nhân lùi vô hạn	11
BÀI TẬP CƠ BẢN NÂNG CAO VẤN ĐỀ 1.....	12
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VẤN ĐỀ 1	14
Vấn đề 2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ	21
Dạng 1. Định nghĩa giới hạn	22
Dạng 2. Giới hạn một bên	25
Dạng 3. Khử dạng vô định ∞/∞	28
Dạng 4. Khử dạng vô định.....	31
Dạng 5. Khử dạng vô định $\infty - \infty, 0 \cdot \infty$	35
Dạng 6. Sử dụng đồ thị để tìm giá trị của giới hạn	37
BÀI TẬP CƠ BẢN NÂNG CAO VẤN ĐỀ 2	40
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VẤN ĐỀ 2	47
Vấn đề 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC	51
Dạng 1. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm	52
Dạng 2. Xét tính liên tục của hàm số trên khoảng, đoạn	57
Dạng 3. Chứng minh phương trình có nghiệm	63
Dạng 4. Xét dấu biểu thức.....	67
BÀI TẬP CƠ BẢN NÂNG CAO VẤN ĐỀ 3	69
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VẤN ĐỀ 3.....	73
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG 4	75
CÁC ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG 4	83
ĐỀ SỐ 1 – THPT Nguyễn Trãi, Thanh Hóa	83
ĐỀ SỐ 2 – THPT Hoàng Thái Hiếu, Vĩnh Long	84
ĐỀ SỐ 3 – THPT Nguyễn Trung Trực, Bình Định	86
ĐỀ SỐ 4 – THPT Như Xuân, Thanh Hóa.....	89

ĐỀ SỐ 5 – THPT Nho Quan A, Ninh Bình	91
ĐỀ SỐ 6 – THPT An Hải, Hải Phòng	92
ĐỀ SỐ 7 – THPT Đoàn Thượng, Hải Dương	93
ĐỀ SỐ 8 – Nguồn Internet	95
ĐỀ SỐ 9 – THPT Thị xã Quảng Trị	96
ĐỀ SỐ 10 – THPT Đoàn Thượng, Hải Dương (18-19)	98

Chủ đề 5. ĐẠO HÀM

Vấn đề 1. ĐẠO HÀM VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM	101
Dạng 1. Tìm số gia của hàm số	103
Dạng 2. Tính đạo hàm bằng định nghĩa	104
Dạng 3. Quan hệ giữa liên tục và đạo hàm	106
Dạng 4. Ý nghĩa hình học của đạo hàm: Bài toán tiếp tuyến	108
Dạng 5. Ý nghĩa Vật lí của đạo hàm cấp 1	113
Vấn đề 2. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM	114
Dạng 1. Tìm đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương của các hàm số	115
Dạng 2. Tìm đạo hàm của các hàm số lượng giác	117
Dạng 3. Phương trình, bất phương trình chứa đạo hàm	120
Dạng 4. Sử dụng đạo hàm chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức.....	122
Vấn đề 3. VI PHÂN – ĐẠO HÀM CẤP CAO	124
Dạng 1. Tìm vi phân của hàm số	125
Dạng 2. Tính gần đúng giá trị của hàm số	127
Dạng 3. Tính đạo hàm cấp cao của hàm số	128
Dạng 4. Ý nghĩa của đạo hàm cấp hai	129
Dạng 5. Tìm công thức đạo hàm cấp n	130
Dạng 6. Chứng minh đẳng thức có chứa đạo hàm	131
Vấn đề 4. SỬ DỤNG ĐẠO HÀM TRONG CÁC BÀI TOÁN CÓ CHỨA C_n^k	133
Vấn đề 5. DÙNG ĐỊNH NGHĨA ĐẠO HÀM ĐỂ TÌM GIỚI HẠN	136
Vấn đề 6. MỘT SỐ DẠNG TOÁN NÂNG CAO VỀ TIẾP TUYẾN	139
BÀI TẬP CƠ BẢN NÂNG CAO CHỦ ĐỀ 5	147
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHỦ ĐỀ 5	156
1. ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM	156
2. QUI TẮC TÍNH ĐẠO HÀM	161

3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC	165
4. VI PHÂN	170
5. ĐẠO HÀM CẤP CAO	172
CÁC ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG 5	178
ĐỀ SỐ 1 – THPT Chương Mỹ B, Hà Nội	178
ĐỀ SỐ 2 – THPT Hoàng Văn Thụ , Hòa Bình	80
ĐỀ SỐ 3 – THPT Vĩnh Lộc, Huế	182
ĐỀ SỐ 4 - THPT Nho Quan A, Ninh Bình	184
ĐỀ SỐ 5 – THPT Nguyễn Trung Trực, Bình Định	185
ĐỀ SỐ 6 – THPT Nguyễn Khuyến, Bình Phước	186
ĐỀ SỐ 7 – THPT Nam Hà, Đồng Nai	188
ĐỀ SỐ 8 – THPT Đoàn Thượng, Hải Dương.....	190
ĐỀ SỐ 9 – THPT Triệu Quang Phục, Hưng Yên	193
ĐỀ SỐ 10 – THPT Cây Dương, Kiên Giang	195

Chủ đề 7. VÉCTOR TRONG KHÔNG GIAN

QUAN HỆ VUÔNG GÓC

Vấn đề 1. VÉCTOR TRONG KHÔNG GIAN	197
Dạng 1. Tính toán véctor	199
Dạng 2. Chứng minh đẳng thức véctor	203
Dạng 3. Quan hệ đồng phẳng	205
Dạng 4. Cùng phương và song song.....	206
BÀI TẬP CƠ BẢN NÂNG CAO VẤN ĐỀ 1	207
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	209
Vấn đề 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC	210
Dạng 1. Chứng minh vuông góc	211
Dạng 2. Góc giữa hai đường thẳng	212
BÀI TẬP CƠ BẢN NÂNG CAO VẤN ĐỀ 2	217
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	218
Vấn đề 3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC MẶT PHẪNG	219
Dạng 1. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng	221
Dạng 2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng	226
Dạng 3. Thiết diện qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng cho trước	230
Dạng 4. Điểm cố định - Tìm tập hợp điểm	233
BÀI TẬP CƠ BẢN NÂNG CAO VẤN ĐỀ 3	235
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	236

Vấn đề 4. HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC	239
Dạng 1. Góc giữa hai mặt phẳng	241
Dạng 2. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc	245
Dạng 3. Thiết diện chứa đường thẳng a và vuông góc với (α)	248
Dạng 4. Hình lăng trụ– Hình lập phương – Hình hộp	250
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	252
Vấn đề 5. KHOẢNG CÁCH	256
Dạng 1. Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng, mặt phẳng	257
Dạng 2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau	260
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	267
BÀI TẬP TỔNG HỢP CHỦ ĐỀ 3	269
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP CHỦ ĐỀ 3.....	275

PHỤ LỤC

A – KIẾN THỨC CƠ BẢN	285
B – CÔNG THỨC CƠ BẢN	286
C – MỘT SỐ HÌNH THƯỜNG GẶP	287
HÌNH 1.	287
HÌNH 2.	289
HÌNH 3.	290
HÌNH 4.	292
HÌNH 5.	294
HÌNH 6a.	295
HÌNH 6b.	296
HÌNH 7.	297

Chủ đề ④**GIỚI HẠN – LIÊN TỤC****Vấn đề 1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ****A - GIỚI HẠN HỮU HẠN****① Giới hạn hữu hạn**

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow |u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.
- Dây số (u_n) có giới hạn là L nếu: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - L) = 0$
- ✎ Lưu ý: Ta có thể viết gọn: $\lim u_n = 0, \lim u_n = L$.

② Giới hạn đặc biệt

- | | | |
|---|---|---|
| 1) $\lim \frac{1}{n} = 0$ | 2) $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ | 3) $\lim \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$ |
| 4) $u_n = 0 \Rightarrow \lim u_n = 0$ | 5) $\lim C = C, \forall C \in \mathbb{R}$ | 6) $\lim q^n = 0$ nếu $ q < 1$ |
| 7) $\lim \frac{1}{n^k} = 0, k \in \mathbb{N}^*$ | 8) $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$ | 9) $\lim n^k = +\infty, k \in \mathbb{N}^*$ |

③ Định lí về giới hạn

- Nếu hai dãy số (u_n) và (v_n) cùng có giới hạn thì ta có:

1) $\lim(u_n \pm v_n) = \lim u_n \pm \lim v_n$	2) $\lim(u_n \cdot v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n$
3) $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}$ (nếu $\lim v_n \neq 0$)	4) $\lim(k \cdot u_n) = k \cdot \lim u_n, (k \in \mathbb{R})$
5) $\lim u_n = \lim u_n $	6) $\lim \sqrt[2k]{u_n} = \sqrt[2k]{\lim u_n}$ (nếu $u_n \geq 0$) (căn bậc chẵn)
7) $\lim \sqrt[2k+1]{u_n} = \sqrt[2k+1]{\lim u_n}$ (căn bậc lẻ)	8) Nếu $ u_n \leq v_n$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.
- **Định lí kẹp về giới hạn của dãy số:** Cho ba dãy số $(u_n), (v_n), (w_n)$ và $L \in \mathbb{R}$. Nếu $u_n \leq v_n \leq w_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $\lim u_n = \lim w_n = L$ thì (v_n) có giới hạn và $\lim v_n = L$.
- Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.

1) Dây số tăng và bị chặn trên thì có giới hạn.
2) Dây số giảm và bị chặn dưới thì có giới hạn.

✎ **Chú ý:** $e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,718281828459\dots$, là một số vô tỉ.

④ Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

- Một cấp số nhân có công bội q với $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

Ta có : $S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \dots = \frac{u_1}{1-q}$ (với $|q| < 1$)

B - GIỚI HẠN VÔ CỰC**① Định nghĩa**

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ nếu với mỗi số dương tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều lớn hơn số dương đó.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ nếu với mỗi số âm tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều nhỏ hơn số âm đó.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = +\infty$

🔍 Lưu ý: Ta có thể viết gọn: $\lim u_n = \pm\infty$.

② Định lí

- Nếu $\lim |u_n| = +\infty$ thì $\lim \frac{1}{u_n} = 0$
- Nếu $\lim u_n = 0, (u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow \lim \frac{1}{u_n} = \infty$

③ Một vài qui tắc tìm giới hạn**Qui tắc 1:**

Nếu $\lim u_n = \pm\infty$

và $\lim v_n = \pm\infty$,

thì $\lim(u_n \cdot v_n)$ là:

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n \cdot v_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Qui tắc 2:

Nếu $\lim u_n = \pm\infty$

và $\lim v_n = L \neq 0$,

thì $\lim(u_n \cdot v_n)$ là:

$\lim u_n$	Dấu của L	$\lim(u_n \cdot v_n)$
$+\infty$	+	$+\infty$
$+\infty$	-	$-\infty$
$-\infty$	+	$-\infty$
$-\infty$	-	$+\infty$

Qui tắc 3:

Nếu $\lim u_n = L \neq 0$,

$\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ hoặc $v_n < 0$ kể từ một số hạng nào đó trở đi thì:

L	Dấu của v_n	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
+	+	$+\infty$
+	-	$-\infty$
-	+	$-\infty$
-	-	$+\infty$

Dạng 1. Dãy có giới hạn 0**A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

- Dãy (u_n) có giới hạn 0 nếu mỗi số dương nhỏ tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn số dương đó. Khi đó ta viết: $\lim(u_n) = 0$ hoặc $\lim u_n = 0$ hoặc $u_n \rightarrow 0$.

$$\lim u_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : n > n_0 \Rightarrow |u_n| < \varepsilon$$

- Một số kết quả: (xem phần tóm tắt lý thuyết)

🔍 Chú ý: Sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh, đánh giá biểu thức lượng giá, nhân liên hợp của căn thức, ...

B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Chứng minh $u_n = \frac{(-1)^n}{3n+2}$ dãy có giới hạn là 0.

Ta có: $0 \leq |u_n| = \frac{1}{3n+2} < \frac{1}{3n} < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Mà $\lim \frac{1}{n} = 0$ nên suy ra $\lim \frac{(-1)^n}{3n+2} = 0$.

Ví dụ 2. Chứng minh các dãy sau có giới hạn là 0 :

a) $u_n = \frac{1}{n+3}$

b) $u_n = \frac{(-1)^n}{n+4}$

c) $u_n = \frac{1}{n^2}$

d) $u_n = \frac{1}{n^k}, k \in \mathbb{N}^*$

c) $u_n = \frac{1}{3^n}$

b) $u_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$

c) $u_n = (0,99)^n$

d) $u_n = (-0,97)^n$

Ví dụ 3. Chứng minh các dãy sau có giới hạn là 0 : a) $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ b) $v_n = \frac{(-1)^n \cos n}{n^2 + 2}$

Ví dụ 4. Tính các giới hạn sau:

a) $u_n = \frac{\sin n}{n+5}$

b) $u_n = \frac{\cos 3n}{\sqrt{n}+1}$

c) $u_n = \frac{(-1)^n}{3^n+1}$

d) $u_n = \frac{-\sin 2n}{(1,2)^n}$

Ví dụ 5. Tính: a) $\lim \frac{n+2\sin(n+1)}{n^3\sqrt{n}+2\sqrt[3]{n}}$ b) $\lim \frac{(-2)^n}{3^{3n}+4}$ c) $\lim (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ d) $\lim 2(\sqrt{n^2+1}-n)$

Ví dụ 6. Chứng minh các dãy sau có giới hạn bằng 0: a) $u_n = \sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$ b) $v_n = \sqrt[3]{n^3+1}-n$

Dạng 2. Khử dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$
A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Đối với dãy $u_n = \frac{a_0 n^m + a_1 n^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \dots + b_k}$, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ thì chia cả tử lẫn mẫu của phân thức cho lũy thừa lớn nhất của n ở tử n^m hoặc mẫu n^k , việc này cũng như đặt thừa số chung cho n^m hoặc mẫu n^k rồi rút gọn, khử dạng vô định. Kết quả:

$$\lim u_n = \begin{cases} 0 & \text{khi } m < k \\ \frac{a_0}{b_0} & \text{khi } m = k \text{ (dấu } +\infty \text{ hoặc } -\infty \text{ tùy theo dấu của } \frac{a_0}{b_0} \text{)} \\ \pm\infty & \text{khi } m > k \end{cases}$$

- Đối với biểu thức chứa căn bậc hai, bậc ba thì cũng đánh giá bậc tử và mẫu để đặt thừa số chung rồi đưa ra ngoài căn thức, việc này cũng như chia tử và mẫu cho lũy thừa số lớn của n ở tử hoặc mẫu.
- Đối với các biểu thức mũ thì chia tử và mẫu cho mũ có cơ số lớn nhất ở tử hoặc mẫu, việc này cũng như đặt thừa số chung cho tử và mẫu số hạng đó.
- ✎ Biến đổi rút gọn, chia tách, tính tổng, kẹp giới hạn, ... và sử dụng các kết quả đã biết.

B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 9. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{2n+1}{3n+2}$

b) $\lim \frac{n^2-3n+5}{3n^2+4}$

c) $\lim \frac{n^3+n^2-n+1}{2n^3+n^2+2}$

d) $\lim \frac{2n^4+1}{3n^4+n+2}$

Ví dụ 10. Tính các giới hạn sau:

$$\text{a) } \lim \frac{3n^2 - n + 1}{n^3 + 4n^2 + 6}$$

$$\text{b) } \lim \frac{n^4 + 4}{n^5 + 5}$$

$$\text{c) } \lim \frac{-2n^3 + 3n - 2}{3n - 2}$$

$$\text{d) } \lim \frac{n^5 + n^4 - 3n - 2}{4n^3 + 6n^2 + 9}$$

$$\text{e) } \lim \frac{(n+2)(3n+1)}{4n^2 + n + 1}$$

$$\text{f) } \lim \frac{(2n+1)^2(4-n)}{(3n+5)^3}$$

Ví dụ 11. Tính các giới hạn sau:

$$\text{a) } \lim \frac{\sqrt{n^4 + 3n - 2}}{2n^2 - n + 3}$$

$$\text{b) } \lim \frac{\sqrt[3]{n^6 - 7n^3 - 5n + 8}}{n + 12}$$

$$\text{c) } \lim \frac{\sqrt{2n^2 - n}}{1 - 3n^2}$$

$$\text{d) } \lim \frac{\sqrt{6n^4 + n + 1}}{2n + 1}$$

Ví dụ 12. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{4^n}{2 \cdot 3^n + 4^n}$

b) $\lim \frac{3^n - 2 \cdot 5^n}{7 + 3 \cdot 5^n}$

c) $\lim \frac{3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 3^{n+1}}{4 + 3^n}$

d) $\lim \frac{2^{2n} + 5^{n+2}}{3^n + 5 \cdot 4^n}$

Dạng 3. Khử dạng vô định $\infty - \infty$

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Đối với dãy $u_n = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_0$, $a_m \neq 0$ thì đặt thừa số chung m cho thừa số lớn nhất của n là n^m . Khi đó: $\lim u_n = +\infty$ nếu $a_m > 0$ và $\lim u_n = -\infty$ nếu $a_m < 0$
- Đối với biểu thức chứa căn thức thì nhân, chia lượng liên hợp bậc hai, bậc ba để đưa về dạng:

$$\cdot \sqrt{A} + B = \frac{A - B^2}{\sqrt{A} - B}$$

$$\cdot \sqrt[3]{A} + B = \frac{A + B^3}{\sqrt[3]{A^2} - B \cdot \sqrt[3]{A} + B^2}$$

$$\cdot \sqrt{A} + \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} - \sqrt{B}}$$

$$\cdot \sqrt[3]{A} - B = \frac{A - B^3}{\sqrt[3]{A^2} + B \cdot \sqrt[3]{A} + B^2}$$

$$\cdot \sqrt{A} - B = \frac{A - B^2}{\sqrt{A} + B}$$

$$\cdot \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = \frac{A + B}{\sqrt[3]{A^2} - \sqrt[3]{A \cdot B} + \sqrt[3]{B^2}}$$

$$\cdot \sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$$

$$\cdot \sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} = \frac{A - B}{\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{A \cdot B} + \sqrt[3]{B^2}}$$

- Đặc biệt, đôi khi ta thêm, bớt đại lượng đơn giản để xác định các giới hạn mới có cùng dạng vô định, chẳng hạn:

$$\sqrt[3]{n^3 + 2} - \sqrt{n^2 + 1} = \left(\sqrt[3]{n^3 + 2} - n \right) + \left(n - \sqrt{n^2 + 1} \right);$$

$$\sqrt{n^2 + n} + \sqrt[3]{2 - n^3} = \left(\sqrt{n^2 + n} - n \right) + \left(n + \sqrt[3]{2 - n^3} \right)$$

- Đối với các biểu thức khác, biểu thức hỗn hợp thì xem xét đặt thừa số chung của mũ có cơ số lớn nhất, lũy thừa của n lớn nhất.

B. BÀI TẬP MẪU**Ví dụ 13.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim(n^2 - 14n - 7)$

b) $\lim(-2n^2 + 3n - 19)$

c) $\lim\sqrt{2n^2 - n + 1}$

d) $\lim\sqrt[3]{-8n^3 + n^2 - n + 3}$

Ví dụ 14. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim(\sqrt{n^2 + n + 1} - n)$

b) $\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})n$

c) $\lim(\sqrt[3]{n^3 + n^2} - \sqrt[3]{n^3 + 1})$

d) $\lim(\sqrt[3]{n^3 + 1} - n)$

e) $\lim(\sqrt[3]{n^3 + n^2} - \sqrt{n^2 + 3n})$

f) $\lim\frac{\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt[3]{n^3 + 2} - \sqrt[3]{n^3 + n^2}}$

Ví dụ 15. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim (n\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1})$

b) $\lim (\sqrt[3]{n^2+7} - 2n)$

c) $\lim (\sqrt{n^2-n} - n)$

d) $\lim (\sqrt{n^2+n+2} - \sqrt{n+1})$

e) $\lim \frac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}$

f) $\lim \frac{2}{\sqrt{3n+2} - \sqrt{2n+1}}$

Dạng 4. Cấp số nhân lùi vô hạn**A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

Một cấp số nhân có công bội q với $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

Ta có: $S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \dots = \frac{u_1}{1-q}$, với $|q| < 1$.

B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 16. Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số: $0,444\dots$; $0,212121\dots$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 17. Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn là $\frac{5}{3}$, tổng ba số hạng đầu tiên của nó là $\frac{39}{25}$. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số đó.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 18. Cho $|q| < 1$. Tính tổng vô hạn sau:

a) $A = 1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1} + \dots$

b) $B = 1 + 4q + 9q^2 + \dots + n^2q^{n-1} + \dots$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP CƠ BẢN NÂNG CAO VẤN ĐỀ 1**Bài 1.** Tìm các giới hạn sau:

$$1) \lim(-2n^3 + 3n + 5) \quad 2) \lim \sqrt{3n^4 + 5n^3 - 7n} \quad 3) \lim(3n^3 - 7n + 11)$$

$$4) \lim \sqrt{2n^4 - n^2 + n + 2} \quad 5) \lim \sqrt[3]{1 + 2n - n^3} \quad 6) \lim(-n^3 - 3n - 2)$$

Bài 2. Tìm các giới hạn sau:

$$1) \lim \frac{4n^2 - n - 1}{3 + 2n^2} \quad 2) \lim \frac{2n - 3n^3 + 1}{n^3 + n^2} \quad 3) \lim \frac{3n^3 - 5n + 1}{n^2 + 4}$$

$$4) \lim \frac{(2 - 3n)^3 (n + 1)^2}{1 - 4n^5} \quad 5) \lim \frac{2n - 3}{4n + 5} \quad 6) \lim \frac{3n^2 - 2n + 1}{4n^2 + 5n - 2}$$

$$7) \lim \frac{4n^2 - 3}{n^3 + 3n + 1} \quad 8) \lim \frac{(n + 1)(2n - 1)}{(3n + 2)(n + 3)}$$

$$9) \lim \frac{n(3n - 2)(4n + 5)}{(2n - 3)^2} \quad 10) \lim \frac{2(n - 1)^3 (n^2 - n + 1)^2}{(n^3 - 2n + 5)(3 - 2n)^6}$$

$$11) \lim \frac{(2n - 1)^3 (n - 3)^5}{3(n + 1)^9} \quad 12) \lim \frac{(n^2 + 1)(n - 3) + n^3 - 2}{(2n^2 + 1)(3 - n)}$$

$$13) \lim \frac{n^3 - 2n + 1}{2n^2 - n + 3} \quad 14) \lim \frac{6n^3 - 2n + 1}{2n^3 - n}$$

$$15) \lim \frac{4n^5 - n + 1}{(2n + 1)(-n + 1)(n^2 + 2)} \quad 16) \lim \frac{(n^2 + 1)(n - 1)^2}{(n + 1)(3n - 2)^3}$$

$$17) \lim \frac{2n^3 + 3n - 2}{3n - 2} \quad 18) \lim \frac{2n^3 - n - 3}{5n - 1}$$

Bài 3. Tìm các giới hạn sau:

$$1) \lim \frac{\sqrt{3n^2 + 1} + n}{1 - 2n^2} \quad 2) \lim \frac{2n\sqrt{n}}{n^2 + 2n - 1} \quad 3) \lim \frac{\sqrt{n + 1}}{\sqrt{n + 1}}$$

$$4) \lim \frac{\sqrt[3]{n^3 + n}}{n + 2} \quad 5) \lim \frac{n^2 + 2\sqrt{n} + 3}{2n^2 + n - \sqrt{n}} \quad 6) \lim \frac{(2n\sqrt{n} + 1)(\sqrt{n} + 3)}{(n + 1)(n - 3)}$$

$$7) \lim \frac{2n\sqrt{n} + 3}{n^2 + n + 1} \quad 8) \lim \frac{n\sqrt{1 + 2 + 3 + \dots + 2n}}{3n^2 + n - 2} \quad 9) \lim \frac{2n\sqrt{n} + 3}{n^2 + 3\sqrt{n} + 2}$$

Bài 4. Tìm các giới hạn sau:

$$1) \lim \frac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n^2 + 2n}} \quad 2) \lim \frac{\sqrt{4n^2 + 3} - 2n + 1}{n(\sqrt{n^2 + 3} - 2n)}$$

$$3) \lim \frac{2n + 1 - \sqrt{n^2 + 2n - 4}}{3n + \sqrt{n^2 + 7}} \quad 4) \lim \frac{\sqrt{4n^2 + 3} - 2n + 1}{\sqrt{n^2 + 2n} - n}$$

$$5) \lim \frac{\sqrt{3n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{n}$$

$$7) \lim \frac{n(\sqrt[3]{2-n^3}+n)}{\sqrt{n^2+1}-n}$$

$$9) \lim \frac{\sqrt{n^2+n-1}-\sqrt{4n^2-2}}{n+3}$$

$$11) \lim \frac{\sqrt{n^6-n+1}+n^2}{3n^2\sqrt{n^2-1}}$$

$$6) \lim \frac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}}$$

$$8) \lim \frac{\sqrt{2n-1}-\sqrt{n}}{\sqrt{3n+1}}$$

$$10) \lim \frac{\sqrt{4n^2+1}-2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}-n}$$

$$12) \lim \frac{\sqrt{4n^2+3}-2n+1}{\sqrt{n^2+4n}+n}$$

Bài 5. Tìm các giới hạn sau:

$$1) \lim n(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+2})$$

$$3) \lim (1+n^2-\sqrt{n^4+3n+1})$$

$$5) \lim (\sqrt{n^3-3n}-n+5)$$

$$7) \lim (\sqrt{n^2+2n}-n+1)$$

$$9) \lim (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

$$11) \lim (\sqrt{n^2+n+2}-\sqrt{n+1})$$

$$13) \lim \frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}$$

$$9) \lim \frac{1}{\sqrt{3n+2}-\sqrt{2n+1}}$$

$$11) \lim (\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n)$$

$$13) \lim (\sqrt[3]{n-n^3}+n)$$

$$15) \lim (\sqrt[3]{2-n^3}+n)$$

$$17) \lim (\sqrt[3]{8n^3+n^2-1}+3-2n)$$

$$2) \lim n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-2})$$

$$4) \lim (2n-1-\sqrt{4n^2-6n+7})$$

$$6) \lim (\sqrt{n^2+2n}-n-1)$$

$$8) \lim (\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1})$$

$$10) \lim (\sqrt{n^2+n+1}-n)$$

$$12) \lim (\sqrt[3]{2n-n^3}+n-1)$$

$$14) \lim \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n+1}}{3n+2}$$

$$10) \lim (\sqrt[3]{n^3+n^2}-n)$$

$$12) \lim (\sqrt[3]{n^3-2n^2}-2n+1)$$

$$14) \lim (\sqrt[3]{n^3+1}-n)$$

$$16) \lim \frac{n(\sqrt[3]{2-n^3}+n)}{\sqrt{n^2+1}-2n^2}$$

$$18) \lim (\sqrt[3]{n^3-3n}-\sqrt{n^2+4n})$$

Bài 6. Tìm các giới hạn sau:

$$1) \lim [4^n + (-2)^n]$$

$$2) \lim \left(2^n + \frac{1}{n}\right)$$

$$3) \lim \frac{(-2)^n - 4.5^{n+1}}{2.4^n + 3.5^n}$$

$$4) \lim \left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{\pi} \right)^n + \frac{3^n}{4^n} \right]$$

$$5) \lim \frac{1-2^n}{1+2^n}$$

$$6) \lim \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$$

$$7) \lim \frac{3^n - 4^n}{3^n + 4^n}$$

$$8) \lim \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$$

$$9) \lim \frac{2^n + 3^n - 4^{n+3}}{2^n - 3^{n+1} + 4^{n-1}}$$

$$10) \lim \frac{n^2 + (-1)^n}{2n^2 + (-1)^{n+1}}$$

$$11) \lim \frac{3 + 4^n}{1 + 3 \cdot 4^n}$$

$$12) \lim \frac{3^n - 4^n + 5^n}{3^n + 4^n + 5^{n+1}}$$

$$13) \lim \frac{2^n + 3^{n+1}}{2^n + 5 \cdot 3^n}$$

$$14) \lim \frac{3^n - 4^n + 1}{2 \cdot 4^n + 2^n}$$

$$15) \lim \frac{4 \cdot 3^n + 7^{n+1}}{2 \cdot 5^n + 7^n}$$

$$16) \lim (2^n - 3^n)$$

$$17) \lim \frac{3^n - 2 \cdot 5^n}{7 + 3 \cdot 5^n}$$

$$18) \lim \frac{4^n - 5^n}{2^n + 3 \cdot 5^n}$$

$$19) \lim \frac{2^n - 3^n + 4 \cdot 5^{n+2}}{2^{n+1} + 3^{n+2} + 5^{n+1}}$$

$$20) \lim \frac{1 + a + a^2 + \dots + a^n}{1 + b + b^2 + \dots + b^n} \quad (\text{với } |a| < 1; |b| < 1)$$

Bài 7. Tính tổng vô hạn:

$$1) S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$2) S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots$$

$$3) S = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{27} + \dots$$

$$4) S = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} + \frac{1}{2 - \sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \dots$$

$$5) S = 8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots$$

$$6) S = 3^{\frac{1}{3}} \cdot 9^{\frac{1}{9}} \cdot 27^{\frac{1}{27}} \cdot 81^{\frac{1}{81}} \dots$$

$$7) S = 1 + 0,9 + (0,9)^2 + (0,9)^3 + \dots$$

$$8) S = \frac{34}{100} + \frac{34}{10000} + \frac{34}{1000000} + \dots$$

Bài 8. Tìm phân số bằng số thập phân vô hạn tuần hoàn sau:

$$1) 34, (12) \dots$$

$$2) 0, (25) \dots$$

$$3) 3, (123) \dots$$

$$4) 2, 131131 \dots$$

Bài 9. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) . Chứng minh rằng nếu $\lim v_n = 0$ và $|u_n| \leq v_n$ với mọi n thì $\lim u_n = 0$. Áp dụng tính giới hạn của các dãy số sau:

$$1) u_n = \frac{1}{n!}$$

$$2) u_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}$$

$$3) u_n = \frac{2 - n(-1)^n}{1 + 2n^2}$$

$$4) u_n = (0,99)^n \cos n$$

$$5) u_n = 5^n - \cos \sqrt{n} \pi$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VẤN ĐỀ 1

Câu 1. Dãy số nào sau đây có giới hạn khác 0 ?

A. $\frac{n-1}{n}$.

B. $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

C. $\frac{1}{n+1}$

D. $\frac{\cos n}{\sqrt{n}}$.

Câu 2. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0 ?

A. $\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

B. $\left(-\frac{5}{4}\right)^n$.

C. $\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

D. $\left(-\frac{4}{3}\right)^n$.

Câu 3. Dãy nào sau đây không có giới hạn?

A. $\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

B. $\left(-\frac{2}{3}\right)^n$.

C. $(-0,99)^n$.

D. $(-1)^n$.

Câu 4. $\lim \frac{(-1)^n}{n+2}$ có giá trị bằng

A. $\frac{1}{2}$. B. 0. C. -1. D. $-\frac{1}{2}$.

Câu 5. $\lim \left(\frac{1-2n}{4n} \right)$ có giá trị bằng

A. $\frac{1}{4}$. B. $-\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $-\frac{1}{2}$.

Câu 6. $\lim \frac{3^n + 5^n}{5^n}$ có giá trị bằng

A. 1. B. 0. C. $\frac{3}{5}$. D. $\frac{8}{5}$.

Câu 7. $\lim \frac{-2n^3 + n - 5}{n^4 - 2n + 2}$ có giá trị bằng

A. $-\infty$. B. -2. C. 0. D. -6.

Câu 8. $\lim \frac{2n^4 - n + 1}{3n^4 + 2n}$ có giá trị bằng

A. 0. B. $\frac{2}{3}$. C. $+\infty$. D. $\frac{2}{5}$.

Câu 9. $\lim \frac{2n^2 - 3n^3}{2n^3 + 4n^2 - 1}$ có giá trị bằng

A. $-\frac{3}{2}$. B. 0. C. 1. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 10. $\lim \frac{2n^3 - n^2 + 4}{n^2 + 2n - 3}$ có giá trị bằng

A. 2. B. 0. C. $+\infty$. D. -2.

Câu 11. $\lim \frac{(n^2 + 2n)(2n^3 + 1)(4n + 5)}{(n^4 - 3n - 1)(3n^2 - 7)}$ có giá trị bằng

A. 0. B. $\frac{8}{3}$. C. 1. D. $+\infty$.

Câu 12. $\lim \frac{(2n - n^3)(3n^2 + 1)}{(2n - 1)(n^4 - 7)}$ có giá trị bằng

A. 1. B. 3. C. $-\frac{3}{2}$. D. $+\infty$.

Câu 13. $\lim (-2n^3 - 2n^2 + 3)$ có giá trị bằng

A. -2. B. -1. C. $+\infty$. D. $-\infty$.

Câu 14. $\lim (3n^4 + 4n^2 - n + 1)$ có giá trị bằng

A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 3. D. 7.

Câu 15. $\lim \frac{\sqrt{9n^2 - n} - \sqrt{n + 2}}{3n - 2}$ có giá trị bằng

A. 1. B. 3. C. 0. D. $+\infty$.

Câu 16. $\lim (\sqrt{n^2 + 4} - \sqrt{n^2 + 1})$ có giá trị bằng

A. 3. B. 1. C. 0. D. $+\infty$.

Câu 17. $\lim(\sqrt{n^2+2n-1}-\sqrt{2n^2+n})$ có giá trị bằng

A. $1-\sqrt{2}$. B. $+\infty$. C. -1 . D. $-\infty$.

Câu 18. $\lim(\sqrt{n^2-2n+3}-n)$ có giá trị bằng

A. -1 . B. 0. C. $+\infty$. D. 1.

Câu 19. $\lim(\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2})$ có giá trị bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. B. 0. C. $+\infty$. D. $-\infty$.

Câu 20. $\lim\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)$ có giá trị bằng

A. 1. B. 0. C. $\frac{1}{2}$. D. $+\infty$.

Câu 21. $\lim\left|\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3})\right|$ có giá trị bằng

A. -1 . B. 0. C. 1. D. $+\infty$.

Câu 22. Nếu $\lim u_n = L$ thì $\lim \sqrt[3]{u_n+8}$ có giá trị bằng

A. $L+2$. B. $\sqrt[3]{L+8}$. C. $\sqrt[3]{L}+2$. D. $L+8$.

Câu 23. Nếu $\lim u_n = L$ thì $\lim \frac{1}{\sqrt{u_n+9}}$ có giá trị bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{L+3}}$. B. $\frac{1}{\sqrt{L+9}}$. C. $\frac{1}{\sqrt{L}+3}$. D. $\frac{1}{\sqrt{L+9}}$.

Câu 24. $\lim \frac{\sqrt[3]{n}+1}{\sqrt[3]{n}+8}$ có giá trị bằng

A. 1. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{8}$. D. $+\infty$.

Câu 25. $\lim \frac{\sqrt[3]{8n^3+2n^2-1}}{\sqrt{2n^2+1}}$ có giá trị bằng

A. $\sqrt{2}$. B. 2. C. 1. D. $+\infty$.

Câu 26. $\lim \frac{\sqrt{3n}+(-1)^n \cos 3n}{\sqrt{n}-1}$ có giá trị bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\sqrt{5}$. D. -1 .

Câu 27. $\lim[3^n - \sqrt{5}^n]$ có giá trị bằng

A. 3. B. $-\infty$. C. $+\infty$. D. $-\sqrt{5}$.

Câu 28. $\lim \frac{(\sqrt{5})^n - 2^{n+1} + 1}{5 \cdot 2^n + (\sqrt{5})^{n+1} - 3}$ có giá trị bằng

- A. $-\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. C. $-\frac{2}{5}$. D. $-\frac{1}{5}$.

Câu 29. $\lim \frac{\pi^n + 3^n + 2^{2n}}{3\pi^n - 3^n + 2^{2n+2}}$ có giá trị bằng

- A. 1. B. $\frac{1}{4}$. C. $+\infty$. D. -1.

Câu 30. $\lim \frac{n + \sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt{n^2 - n} - 2}$ có giá trị bằng

- A. 1. B. 2. C. 0. D. -1.

Câu 31. $\lim (\sqrt[3]{n^3 - 2n^2} - n)$ có giá trị bằng

- A. $-\frac{2}{3}$. B. $\frac{1}{3}$. C. 1. D. 0.

Câu 32. $\lim (\sqrt[3]{n^2 - n^3} + n)$ có giá trị bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. $+\infty$. C. 1. D. 0.

Câu 33. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

- A. $u_n = \frac{n^2 + 1}{n + 3n^2}$. B. $u_n = \frac{1 - 3n}{n + 3n^2}$. C. $u_n = \frac{1 + 2n^2}{n + 5}$. D. $u_n = \frac{1 - 2n}{n + 5}$.

Câu 34. Dãy số nào sau đây có giới hạn là $+\infty$?

- A. $u_n = \frac{n^2 + 2n}{3n + 3n^2}$. B. $u_n = \frac{1 + 2n}{3n + 3}$. C. $u_n = \frac{2 + n^2}{3n + 3}$. D. $u_n = \frac{n^2 + 2}{n + 5n^3}$.

Câu 35. Dãy số nào sau đây có giới hạn là $+\infty$?

- A. $u_n = \frac{n^2 + 3n}{2n + n^2}$. B. $u_n = \frac{2018 + 2017n}{n + 1}$.
C. $u_n = 2017n - 2016n^2$. D. $u_n = n^2 + 1$.

Câu 36. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng -1?

- A. $\lim \frac{3n^2 - 1}{-3n^3 + 2}$. B. $\lim \frac{2n^3 - 3}{-2n^3 + 1}$. C. $\lim \frac{3n^2 - 1}{-3n^3 + 3n^2}$. D. $\lim \frac{n^3 - 3}{-n^2 - 1}$.

Câu 37. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

- A. $\lim \frac{5n^2 + 2}{-5n^3 - 4}$. B. $\lim \frac{2n - 5n^3}{-2n^2 + 1}$. C. $\lim \frac{2n^2 - n^4}{-n^3 + 2n^2}$. D. $\lim \frac{3 + 5n^3}{n^2 - 1}$.

Câu 38. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào là 1?

- A. $\lim \frac{n^2 + 2}{-n^3 - 4}$. B. $\lim \frac{2n - n^3}{2n^2 - 1}$. C. $\lim \frac{3n^2 - 2n^3}{-2n^3 + 4n^2}$. D. $\lim \frac{3 + 2n^4}{2n^2 + 1}$.

Câu 39. Dãy số nào sau đây không có giới hạn?

- A. $\lim (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$. B. $\lim \sin(n\pi)$. C. $\lim \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$. D. $\lim \cos(n\pi)$.

Câu 40. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 1?

- A. $\lim \sin(n\pi)$. B. $\lim \cos(n\pi)$. C. $\lim \sin\left(\frac{n+2}{2n-1}\pi\right)$. D. $\lim \frac{n \cos n - 2}{n^2}$.

Câu 41. Tổng $S = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n} + \dots$ có giá trị bằng

- A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{2}{5}$. D. $\frac{5}{4}$.

Câu 42. Tổng $S = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} + \dots$ là

- A. 1. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 43. $\lim \frac{1+3+5+\dots+(2n+1)}{5n^2-4}$ có giá trị bằng

- A. 0. B. $-\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{5}$. D. $+\infty$.

Câu 44. $\lim \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2-2}$ có giá trị bằng

- A. 1. B. $+\infty$. C. 0. D. $-\frac{1}{2}$.

Câu 45. $\lim \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$ có giá trị bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. 0. D. $-\infty$.

Câu 46. Kết quả đúng của $\lim \left(5 - \frac{n \cos 2n}{n^2+1} \right)$ là:

- A. 4. B. 5. C. -4. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 47. Kết quả đúng của $\lim \frac{2-5^{n-2}}{3^n+2.5^n}$ là:

- A. $-\frac{5}{2}$. B. 1. C. $\frac{5}{2}$. D. $-\frac{25}{2}$.

Câu 48. Kết quả đúng của $\lim \frac{-n^2+2n+1}{\sqrt{3n^4+2}}$ là

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $-\frac{2}{3}$. C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 49. Giới hạn dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3n-n^4}{4n-5}$ là

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. $\frac{3}{4}$. D. 0.

Câu 50. $\lim \frac{3^n-4.2^{n-1}-3}{3.2^n+4^n}$ bằng

- A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. 0. D. 1.

- Câu 51.** Chọn kết quả đúng của $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 - 2n + 5}}{3 + 5n}$.
- A. 5. B. $\frac{2}{5}$. C. $-\infty$. D. $+\infty$.
- Câu 52.** Giá trị đúng của $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{3n^2 + 2})$ là
- A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. -2. D. 0.
- Câu 53.** Giá trị đúng của $\lim_{n \rightarrow \infty} (3^n - 5^n)$ là
- A. $-\infty$. B. C. 2. D. -2.
- Câu 54.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 \sin \frac{n\pi}{5} - 2n^3 \right)$ bằng
- A. $+\infty$. B. 0. C. -2. D. $-\infty$.
- Câu 55.** Giá trị đúng của $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) \right]$ là
- A. -1. B. 0. C. 1. D. $+\infty$.
- Câu 56.** Cho dãy số (u_n) với $u_n = (n-1) \sqrt{\frac{2n+2}{n^4 + n^2 - 1}}$. Chọn kết quả đúng của $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ là
- A. $-\infty$. B. 0. C. 1. D. $+\infty$.
- Câu 57.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 1}{3^n + 1}$ bằng
- A. $+\infty$. B. 1. C. 0. D. $-\infty$.
- Câu 58.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^4 + n^2 + 1}}$ bằng
- A. $+\infty$. B. 10. C. 0. D. $-\infty$.
- Câu 59.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[5]{200 - 3n^5 + 2n^2}$ bằng
- A. 0. B. 1. C. $+\infty$. D. $-\infty$.
- Câu 60.** Cho dãy số có giới hạn (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}, n \geq 1 \end{cases}$$
. Tìm kết quả đúng của $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.
- A. 0. B. 1. C. -1. D. $\frac{1}{2}$.
- Câu 61.** Tìm giá trị đúng của $S = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \right)$.
- A. $\sqrt{2} + 1$. B. 2. C. $2\sqrt{2}$. D. $\frac{1}{2}$.
- Câu 62.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4]{\frac{4^n + 2^{n+1}}{3^n + 4^{n+2}}}$ bằng:
- A. 0. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $+\infty$.

Câu 63. Tính giới hạn: $\lim \frac{\sqrt{n+1}-4}{\sqrt{n+1}+n}$.

- A. 1. B. 0. C. -1. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 64. Tính giới hạn $\lim \frac{1+3+5+\dots+(2n+1)}{3n^2+4}$.

- A. 0. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. 1.

Câu 65. Tính giới hạn $\lim \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{n(2n+1)} \right]$.

- A. 1. B. 0. C. $\frac{2}{3}$. D. 2.

Câu 66. Tính giới hạn $\lim \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} \right]$.

- A. $\frac{3}{2}$. B. 1. C. 0. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 67. Tính giới hạn $\lim \left[\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \right]$.

- A. 1. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 68. Chọn kết quả đúng của $\lim \sqrt{3 + \frac{n^2-1}{3+n^2} - \frac{1}{2^n}}$.

- A. 4. B. 3. C. 2. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 69. Tổng vô hạn $12 - 9 + \frac{27}{4} - \frac{81}{16} + \dots$ bằng:

- A. $\frac{48}{7}$ B. $\frac{39}{4}$ C. $\frac{75}{16}$ D. Không tồn tại

Câu 70. Biểu diễn số thập phân $1,245454545\dots$ như một phân số:

- A. $\frac{249}{200}$ B. $\frac{137}{110}$ C. $\frac{27}{22}$ D. $\frac{69}{55}$

Vấn đề 2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

① Giới hạn hữu hạn

- **Giới hạn tại một điểm:** Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$. Dãy (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \rightarrow x_0$, thì $\lim f(x_n) = L$

- **Giới hạn bên phải:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \Leftrightarrow \text{dãy } (x_n) \text{ bất kì, } x_0 < x_n < b \text{ và } x_n \rightarrow x_0 \text{ thì } \lim f(x_n) = L$$

- **Giới hạn bên trái:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \text{dãy } (x_n) \text{ bất kì, } a < x_n < x_0 \text{ và } x_n \rightarrow x_0 \text{ thì } \lim f(x_n) = L$$

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \text{dãy } (x_n) \text{ bất kì, } x_n > a \text{ và } x_n \rightarrow +\infty \text{ thì } \lim f(x_n) = L$$

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \text{dãy } (x_n) \text{ bất kì, } x_n < a \text{ và } x_n \rightarrow -\infty \text{ thì } \lim f(x_n) = L$$

② Giới hạn vô cực

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$

$$\text{dãy } (x_n) \text{ bất kì, } x_n > a \text{ và } x_n \rightarrow +\infty \text{ thì } \lim f(x_n) = -\infty$$

- Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \text{dãy } (x_n) \text{ bất kì, } x_n \in K \setminus \{x_0\} \text{ và } x_n \rightarrow x_0 \text{ thì } \lim f(x_n) = +\infty$$

- Các giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ được định nghĩa tương tự.

✎ Nhận xét: $f(x)$ có giới hạn $+\infty \Leftrightarrow -f(x)$ có giới hạn $-\infty$.

③ Các giới hạn đặc biệt

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 \text{ (} c : \text{ hằng số)}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x} = 0 \text{ (} c : \text{ hằng số)}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^k} = 0$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty \text{ (} k \in \mathbb{N}^* \text{)}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ -\infty & \text{nếu } k \text{ lẻ} \end{cases}$$

④ Định lý về giới hạn ở hữu hạn

• Định lý 1.

- Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$, thì:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot f(x) = c \cdot L \text{ (với } c \text{ là hằng số)}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \text{ (} M \neq 0 \text{)}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |L|$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{L}$$

$$\bullet \text{ Nếu } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty \text{ thì } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$$

- Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$

🔍 **Chú ý:** Định lí 1 vẫn đúng khi $x \rightarrow \pm\infty$

• **Định lí 2.** $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$

• **Định lí 3. Định lí kẹp:** Giả sử J là một khoảng chứa x_0 và f, g, h là ba hàm số xác định trên tập hợp $J \setminus \{x_0\}$. Nếu $f(x) \leq g(x) \leq h(x), \forall x \in J \setminus \{x_0\}$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$ thì

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L.$$

⑤ Quy tắc về giới hạn vô cực

• Quy tắc tìm giới hạn của tích
 $f(x) \cdot g(x)$

$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow x_0^+ \\ x \rightarrow x_0^- \\ x \rightarrow \pm\infty}} f(x)$	$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow x_0^+ \\ x \rightarrow x_0^- \\ x \rightarrow \pm\infty}} g(x)$	$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow x_0^+ \\ x \rightarrow x_0^- \\ x \rightarrow \pm\infty}} f(x) \cdot g(x)$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

• Quy tắc tìm giới hạn của thương $\frac{f(x)}{g(x)}$

$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow x_0^+ \\ x \rightarrow x_0^- \\ x \rightarrow \pm\infty}} f(x)$	$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow x_0^+ \\ x \rightarrow x_0^- \\ x \rightarrow \pm\infty}} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow x_0^+ \\ x \rightarrow x_0^- \\ x \rightarrow \pm\infty}} \frac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	+	$+\infty$
		-	$-\infty$
$L < 0$	0	+	$-\infty$
		-	$+\infty$

Dạng 1. Định nghĩa giới hạn

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Định nghĩa và các tính chất (Xem trong phần tóm tắt lí thuyết)
- **Chú ý:**
 - 1) Theo định nghĩa thì giới hạn hàm số $f(x)$ trên cơ sở giới hạn các dãy $f(x_n)$. Nếu có 2 dãy x_n và x'_n cùng tiến đến x_0 mà $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x_n) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x'_n)$ thì không tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.
 - 2) Với mọi số nguyên dương k , ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2k} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2k+1} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^k} = 0$
 - 3) Xác định dấu $+\infty$ hoặc $-\infty$ dựa trên dấu của tích số, thương số, $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$, $x \rightarrow \pm\infty$.

B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 19. Dùng định nghĩa tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1}$.

Xét hàm số: $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1}$, với mọi dãy số (x_n) mà $x_n \neq -1, \forall n$

và $\lim x_n = -1$, ta có: $f(x_n) = \frac{x_n^2 - 3x_n - 4}{x_n + 1} = \frac{(x_n + 1)(x_n - 4)}{x_n + 1} = x_n - 4$

$\Rightarrow f(x_n) = \lim(x_n - 4) = \lim x_n - \lim 4 = -1 - 4 = -5$, nên $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1} = -5$.

Ví dụ 20. Dùng định nghĩa, tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 4} (3x^2 - x + 1)$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{x - 6}$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x + 4}{x + 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{5 - x}}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cos \frac{2}{x} \right)$

f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5}{(x - 2)^2}$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos 2x$

Ví dụ 21. Bài 4. Tìm các giới hạn sau

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - 2x + 1). \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^3 - 3x)(x+1)}{x^2 + 3}. \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt[3]{\frac{2x^4 + 3x + 2}{x^2 - x + 2}}.$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - 2x + 1) = 3 \lim_{x \rightarrow -1} x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow -1} x + \lim_{x \rightarrow -1} 1 = 3(1)^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 2$$

$$\text{b) } \text{Do } \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3) = 2^2 + 3 = 7 \neq 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 3x)(x+1) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 3x) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} (x+1) = (2^3 - 3 \cdot 2) \cdot (2+1) = 6$$

$$\text{Nên } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^3 - 3x)(x+1)}{x^2 + 3} = \frac{6}{7}.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt[3]{\frac{2x^4 + 3x + 2}{x^2 - x + 2}}; \text{ do } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^4 + 3x + 2}{x^2 - x + 2} = \frac{7}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt[3]{\frac{2x^4 + 3x + 2}{x^2 - x + 2}} = \sqrt[3]{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt[3]{28}}{2}.$$

Ví dụ 22. Tính các giới hạn sau:

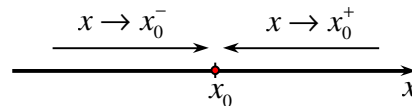
$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 7x + 11) \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} |x^2 - 4| \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^3}{(2x-1)(x^4-3)}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^4 + 3x - 1}{2x^2 - 1}} \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} x \left(3 - \frac{1}{x} \right) \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{9x - x^2}$$

Dạng 2. Giới hạn một bên

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ thì không tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
 - Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$
- 📌 Chú ý: $x \rightarrow x_0^+ \Rightarrow x > x_0$ và $x \rightarrow x_0^- \Rightarrow x < x_0$.



B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 23. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-15}{x-2}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1+3x-2x^2}{x-3}$.

a) Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-15) = 2-15 = -13 < 0$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0$, $x-2 > 0$ (do $x \rightarrow 2^+ \Rightarrow x > 2$)

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-15}{x-2} = -\infty.$$

b) Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1+3x-2x^2}{x-3} = 1+3 \cdot 3-18 = -8 < 0, \lim_{x \rightarrow 3^-} (x-3) = 0, x-3 < 0 \text{ (do } x \rightarrow 3^- \Rightarrow x < 3)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1+3x-2x^2}{x-3} = +\infty.$$

Ví dụ 24. Tìm các giới hạn sau: a) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x^2-3x+1}{\sqrt{x+2}}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1+3x-2x^2}{\sqrt{x-1}}$

Ví dụ 25. Tính các giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x+1}{x-3}$; $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x+1}{x-3}$; $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+1}{x-3}$.

Ví dụ 26. Tính các giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{x-2}$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x-2}$; $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x-2}$.

Ví dụ 27. Tính các giới hạn sau: a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$ b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4-x^2}{\sqrt{2}-x}$

Ví dụ 28. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} & \text{khi } x > 1 \\ -\frac{x}{2} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$. Tính các giới hạn sau

- a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$. b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$. c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, (nếu có).

a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(-\frac{x}{2} \right) = -\frac{1}{2}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{x+1} = -\frac{1}{2}$.

c) Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\frac{1}{2}$. Nên $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{2}$.
 $= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[-(2x-1)(\sqrt{x-1}) \right] = -(2-1)\sqrt{1-1} = 0$.

Ví dụ 29. Cho $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x \leq 2 \\ 4x^3 - 29 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$. Tính $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ (nếu có)

Ví dụ 30. Cho $f(x) = \begin{cases} 2|x| - 1 & \text{khi } x \leq -1 \\ \sqrt{2x^2 + 1} & \text{khi } x > -1 \end{cases}$. Tính $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ (nếu có)

Ví dụ 31. Cho $f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 5x & \text{khi } x < 2 \\ \sqrt{x+7} + 4a & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$. Tìm a để hàm số có giới hạn khi $x \rightarrow 2$.

Dạng 3. Khử dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$
A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI
1. Phương pháp chung:

- Trước khi giải bài toán tìm giới hạn ta thử $x = x_0$ hoặc $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ theo yêu cầu đề xem xét giới hạn cần tìm có dạng vô định không.
- Nếu kết quả cho giá trị xác định, căn thức xác định, phân thức xác định, ... thì dùng định lý về các phép toán tổng, hiệu, thương để giải.
- Nếu mẫu thức tiến đến $+\infty$ hoặc $-\infty$ và tử tiến đến một số khác 0 thì giới hạn cho bằng 0.
- Nếu mẫu thức tiến đến 0 và tử thức tiến đến một số khác 0 thì giới hạn là dạng $+\infty$ hoặc $-\infty$, tùy theo dấu các thừa số, của tử và của mẫu. (Xem bảng Quy tắc tìm giới hạn của thương)
- Nếu có dạng vô định: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ thì chọn phương pháp tương ứng để khử dạng vô định.

2. Phương pháp khử dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$ khi $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$

- Đối với hàm phân thức, ta chia tử thức và mẫu thức cho lũy thừa cao nhất của x , việc này cũng như đặt thừa số chung cho lũy thừa cao nhất đó. (Làm tương tự như giới hạn của dãy số)

Xét hàm số: $f(x) = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n}$, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ thì

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } m < n \\ \frac{a_0}{b_0} & \text{khi } m = n \text{ (dấu } +\infty \text{ hoặc } -\infty \text{ tùy theo dấu của } \frac{a_0}{b_0} \text{)} \\ \pm\infty & m > n \end{cases}$$

- Đối với biểu thức chứa căn, ta nhân lượng liên hợp để khử căn thức đưa về dạng phân thức đã nêu.

⚡ Chú ý:

- 1) Hướng tìm giới hạn hàm số này tương tự như dãy số
- 2) Với các biểu thức hỗn hợp, ta thêm bớt đại lượng đơn giản nhất theo x hoặc hằng số để chia tách thành các phân thức mà các giới hạn mới vẫn giữ nguyên dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$.

- 3) Đưa biểu thức ra ngoài dấu căn:

$$\star \sqrt{A^2} = |A|, \sqrt[3]{B^3} = B$$

$$\star \text{ Khi } x \rightarrow -\infty \text{ thì } \sqrt{x^2} = |x| = -x; \text{ Khi } x \rightarrow +\infty \text{ thì } \sqrt{x^2} = |x| = x$$

- 4) Một số bài phức tạp có thể đặt ẩn phụ và chuyển quan hệ giới hạn sang ẩn mới.

B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 32. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x + 1}{2 - 6x^2 - 6x^3}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x-3)^{20} (3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3x}}{\sqrt{4x^2 + 1} - x + 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x} + 1}{x^2 + x + 1}$

a) Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x + 1}{2 - 6x^2 - 6x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^3} - \frac{6}{x} - 6} = \frac{1}{-6} = -\frac{1}{6}$.

b) Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x-3)^{20} (3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(2 - \frac{3}{x}\right)^{20} \left(3 + \frac{2}{x}\right)^{30}}{\left(2 + \frac{1}{x}\right)^{50}} = \frac{2^{20} \cdot 3^{30}}{2^{50}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{30}$.

c) Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3x}}{\sqrt{4x^2 + 1} - x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x} + 3x}}{|x| \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - x + 2}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + 3x}}{x \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + 3x}}{\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - 1 + \frac{2}{x}} = 4$$
.

d) Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x} + 1}{x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 0$.

Ví dụ 33. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x-2}{3x+1}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x + 10}{x^3 + 3x - 3}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + 5x^2 + 7}{x^3 - 15x}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 5x^2 + 1}{7x^2 - x + 4}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^3 + 3}{2x^6 - 7}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^2 (2x+1)^2}{(2x^3+1)(x-2)^3}$

Ví dụ 34. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x} + 2x}{2x + 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 7x + 1}}{3|x| - 7}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2 + 2x}{8x^2 - x + 5}}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x} - 5}{x^2 - x + 2}$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - x}}{1 - 3x}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^6 - 8x}}{x^4 + 2x^2 + 2}$

Dạng 4. Khử dạng vô định $\frac{0}{0}$

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Đối với hàm phân thức: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, ta phân tích $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-x_0) \cdot f_1(x)}{(x-x_0) \cdot g_1(x)}$ rồi rút gọn cho $x-x_0$
- Đối với biểu thức chứa căn thức, ta nhân lượng liên hợp để khử căn thức, tạo ra thừa số $x-x_0$ rồi rút gọn.

🔍 Chú ý:

- 1) Sử dụng các hằng đẳng thức, nhóm số hạng, phân tích ra thừa số bậc 2, chia đa thức, sơ đồ Hoocner, ...
- 2) Chia tách thành các phân thức bằng cách thêm bớt đại lượng đơn giản nhất theo x hoặc hằng số mà các giới hạn mới vẫn giữ nguyên dạng vô định $\frac{0}{0}$.
- 3) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty$
- 4) Mở rộng HĐT: $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$

B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 35. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2}$. b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^3 - x - 6}$. c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^2 - 4}$. d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3}$.

a) Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+5)(x-2)}{(3x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+5}{3x+1} = 1$.

b) Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^3 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 5x + 1)}{(x-2)(x^2 + 2x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x + 1}{x^2 + 2x + 3} = \frac{15}{11}$.

c) Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x+1-9}{(x^2-4)(\sqrt{4x+1}+3)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x-2)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{4x+1}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{(x+2)(\sqrt{4x+1}+3)} = \frac{4}{4 \cdot 6} = \frac{1}{6}$.

d) Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

Ví dụ 36. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{x^3 + 3\sqrt{3}}{3 - x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^2 + 6x + 8}$

d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 27x}{2x^2 - 3x - 9}$

e) $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{2x^2 + 5x - 3}{(x + 3)^2}$

f) $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{2x^2 + 5x - 3}{(x + 3)^2}$

g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$

h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1}$

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 + x^3 - 2}{x^2 - 1}$

j) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^5 - 5x^4 + 1}{(x - 1)(x^3 + x - 2)}$

Ví dụ 37. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4 - x}}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3 + 1} - 1}{x^2 + x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x - x^2} - 1}{x^2 - x}$

e) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{\sqrt{8 + 2x} - 2}{\sqrt{x + 2}}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1 - x} + x - 1}{\sqrt{x^2 - x^3}}$

Ví dụ 38. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{3x+8} - 2}{5x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{3-x}}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x^2} - 2\sqrt{x} + 1}{x-1}$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-2} + x^2 - x + 1}{x^2 - 4x + 3}$

Dạng 5. Khử dạng vô định $\infty - \infty, 0 \cdot \infty$ **A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI****Phương pháp chung:**

- Đặt nhân tử chung là lũy thừa cao nhất của x
- Quy đồng mẫu phân số
- Nhân chia lượng liên hợp để khử căn
- Chuyển về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$ đã biết.

B. BÀI TẬP MẪU**Ví dụ 39.** Tìm các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \sqrt{\frac{x}{x^2-4}}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4x-2} \sqrt{\frac{8x^2+x-3}{x+4}}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x^2-3x+2} - \frac{1}{x^2-5x+6} \right)$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x-1 - \sqrt{4x^2-4x-3} \right).$

a) Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \sqrt{\frac{x}{x^2-4}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{\sqrt{x-2}} \sqrt{\frac{x}{x+2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{\frac{x}{x+2}} \right) = 0.$

b) Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4x-2} \sqrt{\frac{8x^2+x-3}{x+4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{8x^2+x-3}{(4x-2)^2(x+4)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\frac{8}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3}}{\left(4 - \frac{2}{x}\right)^2 \left(1 + \frac{4}{x}\right)}} = 0.$

c) Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x^2-3x+2} - \frac{1}{x^2-5x+6} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3-(x-1)}{(x-2)(x-1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2}{x-2} \cdot \frac{1}{(x-1)(x-3)}.$

Mà $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2}{x-2} = -\infty$ (do $\lim_{x \rightarrow 2^+} (-1) = -1 < 0$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0$, $x-2 > 0$) ;

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{1}{1 \cdot (-1)} = -1 < 0.$$

Nên $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x^2-3x+2} - \frac{1}{x^2-5x+6} \right) = +\infty$

d) Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x-1 - \sqrt{4x^2-4x-3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-1)^2 - (4x^2-4x-3)}{2x-1 + \sqrt{4x^2-4x-3}}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{2x-1 + \sqrt{4x^2-4x-3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4}{x}}{2 - \frac{1}{x} + 2\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{3}{4x^2}}} = 0.$$

Ví dụ 40. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 - 8x^2 + 7)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^4 - 3x + 12}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3} - x)$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{4 + x^2})$

Ví dụ 41. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^3 + 1) \sqrt{\frac{3x}{x^2 - 1}}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) \sqrt{\frac{x-1}{x^3+x}}$

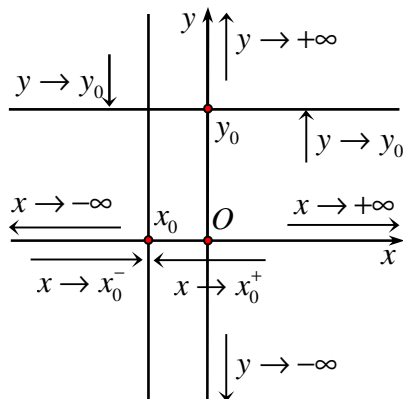
e) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{1-x^2} - \frac{1}{1-x} \right)$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{n}{1-x^n} - \frac{1}{1-x} \right)$

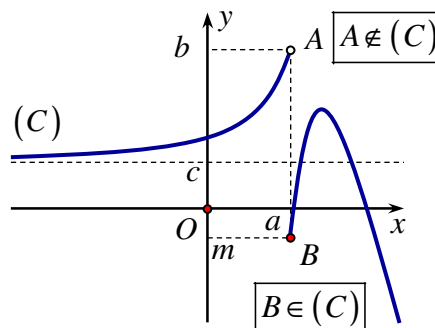
Dạng 6. Sử dụng đồ thị để tìm giá trị của giới hạn

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Một số lưu ý khi sử dụng đồ thị:



Hình 1.



Hình 2.

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) gồm 2 phần như hình 2.

- Khi đó:
- ♦ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$
 - ♦ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
 - ♦ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$
 - ♦ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = m$
 - ♦ $f(a) = m$
 - ♦ $A \notin (C)$: hình tròn rỗng bên trong
 - ♦ $B \in (C)$: hình tròn tô đen bên trong

B. BÀI TẬP MẪU

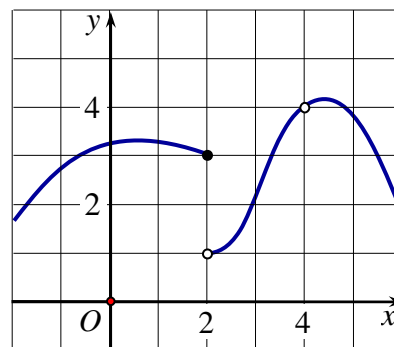
Ví dụ 42. Sử dụng đồ thị f đã cho để xác định giá trị của mỗi giới hạn sau nếu tồn tại.

Nếu không tồn tại, hãy giải thích vì sao?

a) $f(2)$; $f(4)$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$



Ví dụ 43. Cho đồ thị hàm h như hình bên, xác định giá trị của mỗi giới hạn sau nếu nó tồn tại.

Nếu không tồn tại, hãy giải thích vì sao?

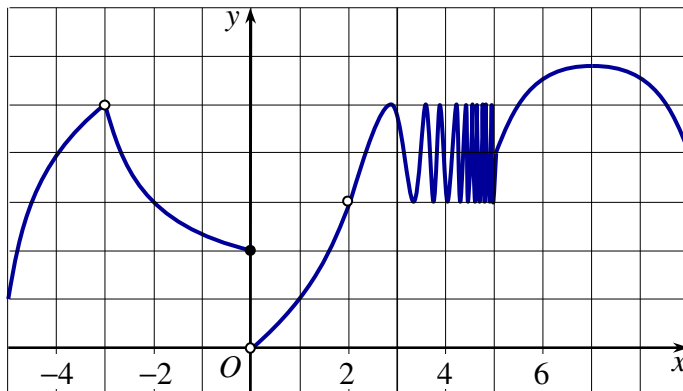
a) $h(-3)$; $h(0)$; $h(2)$.

a) $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} h(x)$; $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} h(x)$; $\lim_{x \rightarrow -3} h(x)$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x)$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$; $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$.

c) $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$.

d) $\lim_{x \rightarrow 5^-} h(x)$; $\lim_{x \rightarrow 5^+} h(x)$; $\lim_{x \rightarrow 5} h(x)$



Ví dụ 44. Một bệnh nhân cứ mỗi 4 giờ đồng hồ phải tiêm

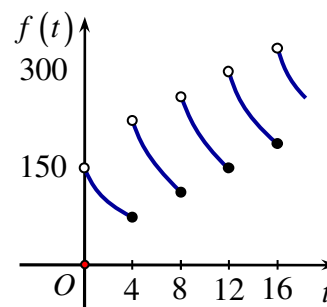
một mũi thuốc 150 mg.

Đồ thị cho thấy lượng thuốc $f(t)$ trong máu

bệnh nhân sau t giờ.

Tìm $\lim_{t \rightarrow 12^-} f(t)$ và $\lim_{t \rightarrow 12^+} f(t)$

và giải thích ý nghĩa các giới hạn một bên này.



BÀI TẬP CƠ BẢN NÂNG CAO VẤN ĐỀ 2**Bài 10.** Tìm các giới hạn sau:

- | | | |
|---|---|---|
| 1) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ | 2) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 - x^2}{x + 2}$ | 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 6}{4 - x}$ |
| 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{17}{x^2 + 1}$ | 5) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x+3} - 3}{x - 6}$ | 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 + x - 1}{3 + x}$ |
| 7) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 5}{(x - 2)^2}$ | 8) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 7}{x - 1}$ | 9) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 7}{x - 1}$ |
| 10) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x - 3}{x - 4}$ | 11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - x^2 + x - 1)$ | 12) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 3x^2 - 5)$ |
| 13) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ | 14) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{5 - 2x}$ | 15) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 3}{x^2 + x + 4}$ |
| 16) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 3x}$ | 17) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x - 5}{x - 4}$ | 18) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 3}{3x - 1}$ |
| 19) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + x^2 - 2x + 1)$ | 20) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 4} - x}{3x - 1}$ | |

Bài 11. Tìm các giới hạn sau:

- | | | |
|---|--|---|
| 1) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1}$ | 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{5 - x}}$ | 3) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 7x + 11)$ |
| 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^3}{(2x - 1)(x^4 - 3)}$ | 5) $\lim_{x \rightarrow 0} x \left(1 + \frac{1}{x} \right)$ | 6) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{9x - x^2}$ |
| 7) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} x^2 - 4 $ | 8) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^4 + 3x - 1}{2x^2 - 1}}$ | 9) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} x^2 - 8 $ |
| 10) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x}$ | 11) $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{\frac{x^3}{x^2 - 3}}$ | 12) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt[3]{\frac{2x(x+1)}{x^2 - 6}}$ |
| 13) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{1 - x^3} - 3x}{2x^2 + x - 3}$ | 14) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$ | 15) $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{x^3 + 2\sqrt{2}}{x^2 - 2}$ |
| 16) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 27x}{2x^2 - 3x - 9}$ | 17) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^2 + 6x + 8}$ | 18) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{(x-1)^2} \cdot \frac{2x+1}{2x-3} \right]$ |
| 19) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$ | 20) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$ | 21) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x - x^2} - 1}{x^2 - x}$ |
| 22) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x+3} - 2}$ | 23) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3 + 1} - 1}{x^2 + x}$ | 24) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 x-1 - 5\sqrt{x^2 - 3}}{2x + 3}$ |
| 25) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}$ | 26) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4 - x}}{x}$ | 27) $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{x^3 + 3\sqrt{3}}{3 - x^2}$ |
| 28) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 4}}{x + 4}$ | 29) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^3 + 11}{2x - 7}$ | 30) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 4x}$ |
| 31) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{3x}$ | 32) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$ | 33) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x + 2}$ |

34) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2+2x-3}$

37) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$

40) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+5}{x^2+x-3}$

35) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3-1}{x}$

38) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{4-\sqrt{x^2+16}}$

41) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{(x-1)(x^2-3x+2)}$

26) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{1}{x^2+1} - 1 \right)$

39) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3-5x-4}{(x+1)^2}$

42) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{(x-2)^2} \sqrt{\frac{x+4}{4-x}}$

Bài 12. Tìm các giới hạn sau:

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2-x+7}{2x^3-1}$

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^6+2}}{3x^3-1}$

7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-5}{x^2+1}$

10) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+2x}}{2x+3}$

13) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|+\sqrt{x^2+x}}{x+10}$

16) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2+1}+x)$

19) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4-x^3+11}{2x-7}$

22) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{2x^4-3x+12}$

25) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2-3x}}{x+2}$

28) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-2x+3x^2}{x^3-9}$

31) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x+\sqrt{x^2-x+1})$

34) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+\sqrt{4x^2-x+1}}{1-2x}$

37) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3-3x^2+7x-5}{2x^3+x-2}$

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4+7x^2-15}{x^4+1}$

5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2+2x}{8x^2-x+3}}$

8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{2x^5+x^3-1}{(2x^2-1)(x^3+x)}}$

11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)\sqrt{\frac{x}{2x^4+x^2+1}}$

14) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}$

17) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2-7x+12}}{3|x|-17}$

20) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-x+5}}{2x-1}$

23) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^4+x^2-1}}{1-2x}$

26) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2-1}$

29) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4+5x-1}{1-x^2+x^4}$

32) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3+2x^2\sqrt{x}-1)$

35) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3-2x+2}{3x^3-2x^2+x-10}$

38) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2-4x+3}{x^3+2x^2-3x+1}$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^6+2}}{3x^3-1}$

6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x^2-x+2}$

9) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2|x|+3}{\sqrt{x^2+x+5}}$

12) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4+4}}{x+4}$

15) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1}-x)$

18) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x\sqrt{\frac{2x^3+x}{x^5-x^2+3}}$

21) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x}-\sqrt{4+x^2})$

24) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+x-10}{9-3x^3}$

27) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-5}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}$

30) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2-1)(1-2x)^5}{x^7+x+3}$

33) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$

36) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3-5x^2+7)$

39) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+3}+4x}{\sqrt{4x^2+1}-x+1}$

Bài 13. Tìm các giới hạn sau:

1) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1}$

4) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4-x^2}{\sqrt{2-x}}$

2) $\lim_{x \rightarrow 5^-} (\sqrt{5-x}+2x)$

5) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^5+x^4}}$

3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$

6) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x^2-7x+12}}{\sqrt{9-x^2}}$

- $$\begin{array}{lll} 7) \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 + 3x + 2}{\sqrt{x^5 + x^4}} & 8) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x} + x - 1}{\sqrt{x^2 - x^3}} & 9) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x+1}{x-2} \\ 10) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+1}{x-2} & 11) \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^3 + 1) \sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}} & 12) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2 - 4} \right) \\ 13) \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{2x^2 + 5x - 3}{(x+3)^2} & 14) \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{2x^2 + 5x - 3}{(x+3)^2} & 15) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 - x} \\ 16) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x}}{x^2} & 17) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x} + 1 - x} & 18) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-x}{\sqrt{27-x^3}} \\ 19) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^3 - 8}}{x^2 - 2x} & 20) \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{x^4 + 1}{x^2 + 4x + 3} & 21) \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{\sqrt{8+2x} - 2}{\sqrt{x+2}} \\ 22) \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x^2 - 4} - \frac{1}{x-2} \right) & 23) \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{x^2 + 8x + 3} & 24) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt{x-1}} \\ 25) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x^2 - 5x + 4} & 26) \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x^2 - 5x + 10}{x^2 - 25} & 27) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x^2 - 5x + 4} \end{array}$$

Bài 14. Tìm các giới hạn sau:

- $$\begin{array}{lll} 1) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} & 2) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} & 3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} \\ 4) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} & 5) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} & 6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x-2} \end{array}$$

Bài 15. Tìm giới hạn bên phải, bên trái và giới hạn (nếu có) của cá hàm số:

- $$\begin{array}{ll} 1) f(x) = \begin{cases} 2|x|-1 & \text{khi } x \leq -2 \\ \sqrt{2x^2+1} & \text{khi } x > -2 \end{cases} & \text{khi } x \rightarrow -2 \\ 2) f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x \leq 2 \\ 4x - 3 & \text{khi } x > 2 \end{cases} & \text{khi } x \rightarrow 2 \\ 3) f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x \leq 1 \\ x^2 - 3 & \text{khi } x > 1 \end{cases} & \text{khi } x \rightarrow 1 \\ 4) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x+2} & \text{khi } x \leq -2 \\ \frac{\sqrt{x+6} - 2}{x+2} & \text{khi } x > -2 \end{cases} & \text{khi } x \rightarrow -2 \\ 5) f(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{x} & \text{khi } x > 1 \\ 5x+3 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases} & \text{khi } x \rightarrow 1 \\ 6) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{7-x}-2}{\sqrt[3]{4-x}} & \text{khi } x < 3 \\ \frac{4}{5} & \text{khi } x \geq 3 \end{cases} & \text{khi } x \rightarrow 3 \\ 7) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ x^2 + x + 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases} & \text{khi } x \rightarrow 1 \end{array}$$

$$8) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ \frac{2x^2-3x+1}{4(3x^2-5x+2)} & \text{khi } x < 1 \end{cases} \quad \text{khi } x \rightarrow 1$$

$$9) f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{khi } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} & \text{khi } x > 0 \end{cases} \quad \text{khi } x \rightarrow 0$$

$$10) f(x) = \begin{cases} \frac{4-x^2}{x-2} & \text{khi } x < 2 \\ 1-2x & \text{khi } x > 2 \end{cases} \quad \text{khi } x \rightarrow 2$$

Bài 16. Với giá trị nào của m thì hàm số sau có giới hạn khi $x \rightarrow 1$? Tìm giới hạn đó.

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & \text{khi } x < 1 \\ mx+2 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} & \text{khi } x > 1 \\ mx+2 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} x^2-x+3 & \text{khi } x \leq 1 \\ \frac{x+m}{x} & \text{khi } x > 1 \end{cases} \quad 4) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{2x-2} & \text{khi } x \neq 1 \\ m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

Bài 17. Tìm các giới hạn sau:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-3x-2}{x^2-4} \quad 2) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-x^2-x-6}{x^2-9} \quad 3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x^2-3x+2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) \quad 5) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3} \right) \quad 6) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4-x^2}{x^3+8}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{(x-2)^2} \quad 8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-3x+1}{x^3-x^2-x+1} \quad 9) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{9-x^2}{x^3+27}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{x^3-8} \quad 11) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-1}{x^5-1} \quad 12) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^2-3x+2}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+1)^2-2(1+x)-3}{(x+1)^3+2(x+1)^2-1} \quad 14) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^3-x^2+x-1} \quad 15) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-x-2)^2}{x^3-12x+16}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3+5x^2-7x+2}{x^2-3x+2} \quad 17) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3-5x^2+2}{3x^2-5x+2} \quad 18) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2-2}{x^2-x+\sqrt{2}-2}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-x^3-x+1}{x^3-5x^2+7x-3} \quad 20) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6} \quad 21) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3+3x+5}{x^3+3x^2+x-1}$$

$$23) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2-3x-7}{x^3+1} \quad 24) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3-x^2+2x-1}{x^3+1}$$

Bài 18. Tìm các giới hạn sau:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{x^3-1} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x}-1}{3x} \quad 3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{3-\sqrt{3x^2+9}} \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} \quad 6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$$

- $$\begin{array}{lll} 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+x+1}}{x} & 8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} & 9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4} - 3}{x} \\ 10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1-x}}{3x} & 11) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2 - \sqrt{x+8}}{\sqrt{x+3} + x-3} & 12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} \\ 13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} & 14) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3x-2}}{x-1} & 15) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} \\ 16) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{x^4-4} & 17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{x+9}}{x^2+x} & 18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{4x^2+x^3}} \\ 19) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x^2+3}-2} & 20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}} & 21) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{2x}-4}{\sqrt[3]{x}-2} \\ 22) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt{1-2x}}{x^2+x} & 23) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} & 24) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{1 + \sqrt[3]{2x}-1} \end{array}$$

Bài 19. Tìm các giới hạn sau:

- $$\begin{array}{ll} 1) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) & 2) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \right) \\ 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-1 - \sqrt{4x^2-6x+3}) & 4) \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-3x - \sqrt{9x^2-2x+1}) \\ 5) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-4x}-x) & 6) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-x+3}+x) \\ 7) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2-4x+1}-2x-3) & 8) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2-3x+1}+2x-5) \\ 9) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-x+1} - \sqrt{x^2+x+1}) & 10) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+5x} - \sqrt{x^2-3x+1}) \\ 11) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) & 12) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x) \\ 13) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x^3+x^2}-x) & 14) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt{x^2-2x}) \\ 15) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3+5x^2} - \sqrt[3]{x^3+8x}) & 16) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{3-x} - \sqrt{5-x}) \end{array}$$

Bài 20. Tìm các giới hạn sau:

- $$\begin{array}{lll} 1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+3x-1}{x^2\sqrt{x}+x} & 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-x}-1} & 3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{3x+5} \\ 4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+2\sqrt{x}-x}{x+3} & 5) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{1+|x|} & 6) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2} \\ 7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2\sqrt{x}-1}{4-2\sqrt{x}+x} & 8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2\sqrt{x}+\sqrt{x^4-5x}}{2x^2+4x-5} & 9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-3)^4(3x^2-x+1)^3}{3x^2(4x+1)^3} \\ 10) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3-3x^2+5}{4x^3+2x-3} & 11) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}} & 12) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-2\sqrt{x}+x}{3-4\sqrt{x}} \\ 13) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x-3)^2(3x^2+1)^6}{(3x-4)^3(2x^3+1)^4} & 14) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x-1)^2(4x^2+1)^3}{(2x^4+1)^2} & 15) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-x}-x} \end{array}$$

16) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 2x} + 5x}{2x - \sqrt{x^2 + 2}}$

17) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1 + \sqrt{x^2 + 1}}$

18) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 3 + \sqrt{x^2 - x + 1}}{x - 1 + \sqrt[3]{8x^3 + 2x - 1}}$

19) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$

20) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

21) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x + 2} \right)$

Bài 21. Tìm các giới hạn sau:

1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{\sin^2 x}$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$

6) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{4 \cos^2 x - 3}$

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{\sin 2x}$

8) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \tan x \right)$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x} \right)$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{\sin x}$

11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin^2 x} - \cos x}{\sin^2 x}$

12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{\cos 5x - \cos 3x}$

Bài 22. Cho $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Tìm các giới hạn sau:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2}$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos 5x}{3x}$

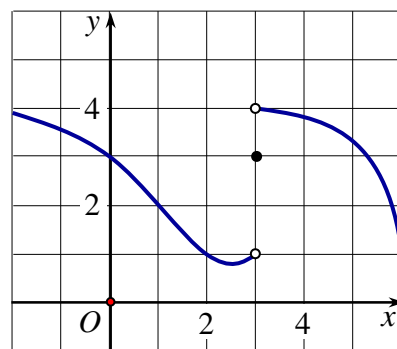
Bài 23. Với đồ thị làm f cho sẵn như hình bên, xác định giá trị của mỗi giới hạn sau nếu tồn tại.

Nếu không tồn tại, hãy giải thích vì sao?

a) $f(3)$.

b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

**Bài 24.** Với đồ thị làm g cho sẵn như hình bên, xác định giá trị của mỗi giới hạn sau nếu tồn tại.

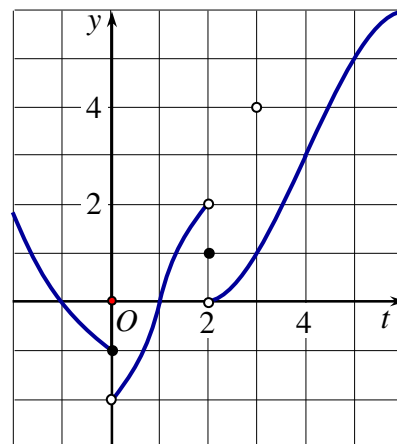
Nếu không tồn tại, hãy giải thích vì sao?

a) $g(2)$.

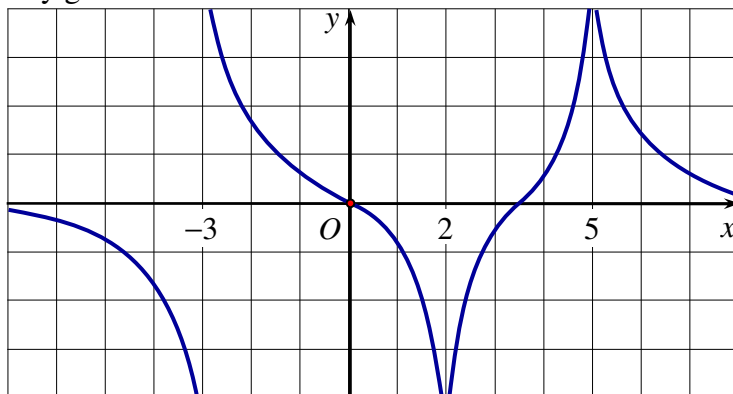
b) $\lim_{t \rightarrow 0^-} g(t)$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t)$, $\lim_{t \rightarrow 0} g(t)$.

c) $\lim_{t \rightarrow 2^-} g(t)$, $\lim_{t \rightarrow 2^+} g(t)$, $\lim_{t \rightarrow 2} g(t)$.

f) $\lim_{t \rightarrow 4} g(t)$.



Bài 25. Với đồ thị làm f cho sẵn như hình bên, xác định giá trị của mỗi giới hạn sau nếu tồn tại. Nếu không tồn tại, hãy giải thích vì sao?



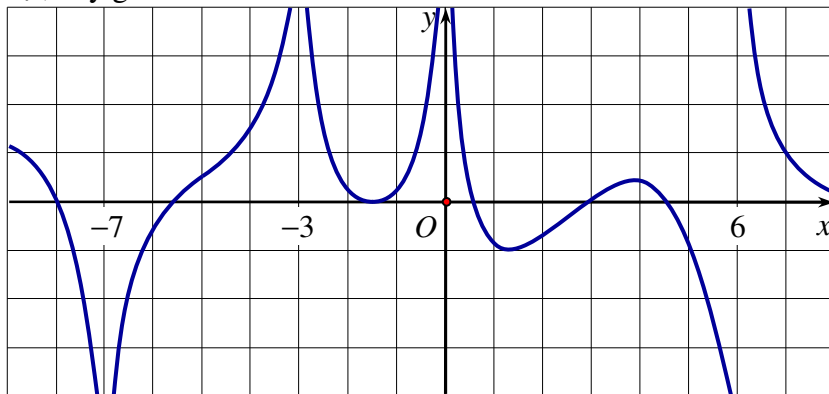
a) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

b) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x)$

Bài 26. Với đồ thị làm f cho sẵn như hình bên, xác định giá trị của mỗi giới hạn sau nếu tồn tại. Nếu không tồn tại, hãy giải thích vì sao?



a) $\lim_{x \rightarrow -7} f(x)$.

b) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

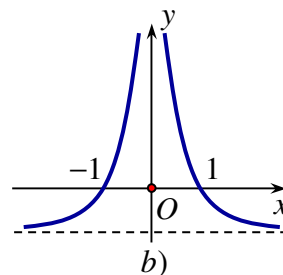
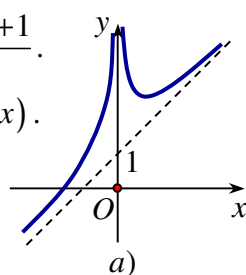
d) $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$

e) $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$

Bài 27. Cho hai hàm số $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2}$ và $g(x) = \frac{x^3+x^2+1}{x^2}$.

1) Tính $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

2) Hai đường cong sau là đồ thị của hai hàm số đã cho. Từ kết quả câu 1), hãy xác định xem đường cong nào là đồ thị của hàm số nào?



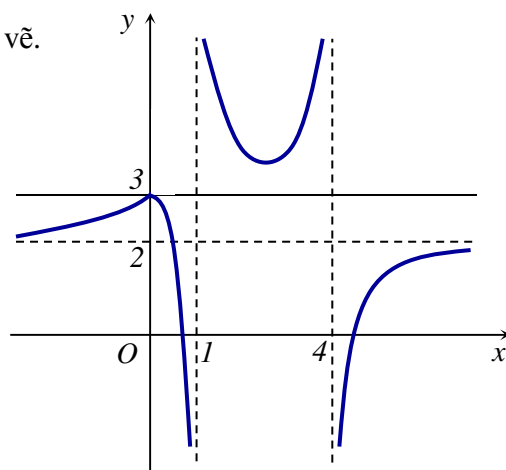
Bài 28. Cho hàm số: $f(x) = \frac{2x^2 - 15x + 12}{x^2 - 5x + 4}$ có đồ thị như hình vẽ.

1) Dựa vào đồ thị, dự đoán giới hạn của hàm số $f(x)$

khí $x \rightarrow 1^+$, $x \rightarrow 1^-$, $x \rightarrow 4^+$, $x \rightarrow 4^-$,

$x \rightarrow +\infty$ và $x \rightarrow -\infty$.

2) Chứng minh dự đoán đó.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VẤN ĐỀ 2

- Câu 71.** $\lim_{x \rightarrow -2} (2)$ có giá trị bằng
A. 2. **B.** -2. **C.** 0. **D.** 4.

Câu 72. $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - x + 2)$ có giá trị bằng
A. 4. **B.** 8. **C.** 0. **D.** -4.

Câu 73. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x+1}$ có giá trị bằng
A. -1. **B.** -2. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $+\infty$.

Câu 74. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3x - 2}{2x^3 + x^2 + 1}$ có giá trị bằng
A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** 0. **D.** -1.

Câu 75. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 4x^4 - 2}{2x^3 - 2x^2 + 3}$ có giá trị bằng
A. -2. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Câu 76. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x^3 + 9x^5 + 1}{4x^5 + 2x^3 - 3}}$ có giá trị bằng
A. $\sqrt{\frac{1}{2}}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 1. **D.** $\frac{9}{4}$.

Câu 77. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + x^4}{5x^5 - 3x^6 + 2}$ có giá trị bằng
A. $\frac{1}{5}$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $\frac{3}{5}$.

Câu 78. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 2x^3}{x^4 + x^2 - 1}$ có giá trị bằng
A. 1. **B.** -1. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

Câu 79. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 - 2x}{x^3 - 3x + 2}$ có giá trị bằng
A. $\frac{21}{16}$. **B.** $\frac{21}{20}$. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 80. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{2x} - 2}{x - 2} \right)$ có giá trị bằng
A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 81. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$ có giá trị bằng

- A. 1. B. -1. C. 2. D. $-\frac{1}{56}$.

Câu 82. $\lim_{x \rightarrow -2} |3x^3 - 4x - 1|$ có giá trị bằng

- A. 1. B. 2. C. -17. D. 17.

Câu 83. $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{\frac{x^3 + 2x^2 + 3}{x^2 - 9x^3 - 2}}$ có giá trị bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 84. $\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{\frac{x^3 - 10x + 3}{x^2 + x + 2}}$ có giá trị bằng

- A. 1. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $+\infty$.

Câu 85. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{\frac{x^2 + 2}{x^2 - x}}$ có giá trị bằng

- A. $\sqrt{3}$. B. 3. C. 0. D. 1.

Câu 86. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2}$ có giá trị bằng

- A. 1. B. $-\frac{1}{2}$. C. $+\infty$. D. $-\infty$.

Câu 87. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-1}{x+1}$ có giá trị bằng

- A. 1. B. -1. C. $+\infty$. D. $-\infty$.

Câu 88. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+3}{|1-x|}$ có giá trị bằng

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 1. D. 3.

Câu 89. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1})$ có giá trị bằng

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 0. D. 1.

Câu 90. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 3} - x)$ có giá trị bằng

- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{3}{\sqrt{2}}$. C. $\sqrt{3}$. D. $+\infty$.

Câu 91. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} + x)$ có giá trị bằng

- A. $\sqrt{2}$. B. $+\infty$. C. 1. D. 3.

Câu 92. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ có giá trị bằng

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 3. D. 1.

- Câu 93.** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$ có giá trị bằng
A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $+\infty$.
- Câu 94.** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$ có giá trị bằng
A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** 1. **D.** $+\infty$.
- Câu 95.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x^2 - x + 2}}{x}$ có giá trị bằng
A. $\sqrt{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** 2. **D.** 0.
- Câu 96.** $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{3x + 6}$ có giá trị bằng
A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $-\frac{1}{3}$. **D.** 1.
- Câu 97.** $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ có giá trị bằng
A. 6. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.
- Câu 98.** $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{3x - 6}$ có giá trị bằng
A. $\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $-\frac{5}{3}$. **D.** $+\infty$.
- Câu 99.** $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + x - 12}{2x + 8}$ có giá trị bằng
A. $-\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $+\infty$. **D.** $-\frac{7}{2}$.
- Câu 100.** $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$ có giá trị bằng
A. $\frac{4}{3}$. **B.** $-\frac{1}{4}$. **C.** $+\infty$. **D.** $\frac{5}{4}$.
- Câu 101.** $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 2x}$ có giá trị bằng
A. -6. **B.** -5. **C.** 1. **D.** 0.
- Câu 102.** $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 1}$ có giá trị bằng
A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $\frac{1}{3}$.
- Câu 103.** $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{\sqrt{x} - 2}$ có giá trị bằng
A. 6. **B.** 0. **C.** 12. **D.** 1.
- Câu 104.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{3x + 4}}{x^2 + 3x}$ có giá trị bằng
A. $\frac{1}{4}$. **B.** 0. **C.** $-\frac{1}{4}$. **D.** 1.

Câu 105. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \sqrt[3]{4x-8}}{\sqrt{x+4}-2}$ có giá trị bằng

- A. 3. B. 1. C. 0. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 106. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{5-3x}-2}{x+1}$ có giá trị bằng

- A. $\frac{1}{4}$. B. 1. C. 0. D. $-\frac{1}{4}$.

Câu 107. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \sqrt[3]{4x-8}}{\sqrt{x+4}-2}$ có giá trị bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. 1. C. 0. D. $\frac{4}{3}$.

Câu 108. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-3}{x-1}$ có giá trị bằng

- A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. 3. D. 0.

Câu 109. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2+x+3}{x-2}$ có giá trị bằng

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 2. D. 0.

Câu 110. $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+3}{x^2-4}$ có giá trị bằng

- A. $+\infty$. B. $-\frac{3}{4}$. C. 0. D. $-\infty$.

Câu 111. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+3}{x^2-4x+3}$ có giá trị bằng

- A. $-\infty$. B. 0. C. $+\infty$. D. 1.

Câu 112. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)\sqrt{\frac{x-2}{x^3+8}}$ có giá trị bằng

- A. 0. B. 1. C. $+\infty$. D. $-\infty$.

Câu 113. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$ có giá trị bằng

- A. -1. B. $+\infty$. C. $-\infty$. D. 0.

Câu 114. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \right)$ có giá trị bằng

- A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. 0. D. $-\frac{1}{2}$.

Câu 115. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^3+1 & \text{khi } x < 1 \\ 2 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ bằng

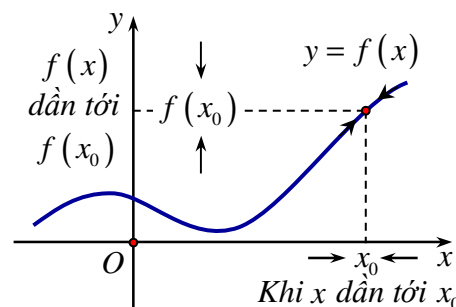
- A. 1. B. 2. C. 0. D. không tồn tại.

Vấn đề 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

① Hàm số liên tục tại một điểm

Định nghĩa:

- Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Hàm số f được gọi là **liên tục** tại điểm x_0 nếu: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- Hàm số không liên tục tại điểm x_0 được gọi là **gián đoạn** tại điểm x_0 và điểm x_0 được gọi là **điểm gián đoạn** của hàm số $f(x)$.
- Theo định nghĩa trên, hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ là liên tục tại điểm $x_0 \in (a; b)$ nếu và chỉ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ tồn tại và $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

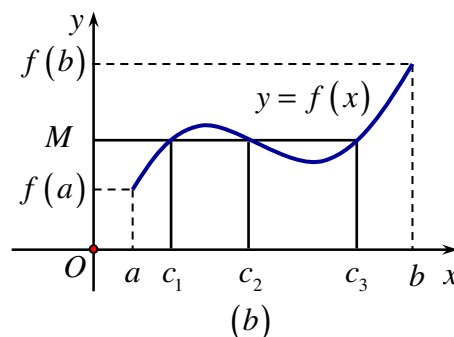
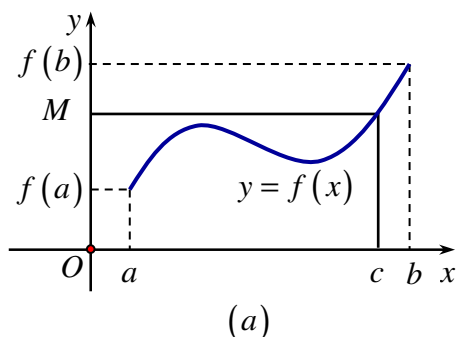


② Hàm số liên tục trên một khoảng, trên một đoạn

- Hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ được gọi là liên tục trên khoảng đó, nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.
- Hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[a; b]$ được gọi là liên tục trên đoạn đó, nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ (liên tục bên phải tại a và bên trái tại b)
- Chú ý:** Đồ thị của một hàm số liên tục trên một khoảng là một “đường liền” trên khoảng đó.
- Tính liên tục của một số hàm số:**
 - Tổng, hiệu, tích, thương** của hai hàm số liên tục tại một điểm là những hàm số liên tục tại điểm đó (giá trị của mẫu tại điểm đó phải khác 0).
 - Hàm đa thức và hàm phân thức hữu tỉ** liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.
 - Các hàm $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

③ Tính chất của hàm số liên tục

- Định lý:** (Định lý về giá trị trung gian của hàm số liên tục)
Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a; b]$. Nếu $f(a) \neq f(b)$ thì với mỗi số thực M nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$, tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = M$.



- Hệ quả 1:** Nếu hàm f liên tục trên $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.
- Hệ quả 2:** Nếu hàm f liên tục trên $[a; b]$ và $f(x) = 0$ vô nghiệm trên $[a; b]$ thì hàm số f có dấu không đổi trên $[a; b]$.

Dạng 1. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm**A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

❖ **Loại 1:** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{khi } x \neq x_0 \\ f_2(x) & \text{khi } x = x_0 \end{cases}$.

Để xét tính liên tục hoặc xác định giá trị của tham số để hàm số liên tục tại điểm x_0 , ta thực hiện các bước sau

✓ **Bước 1.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = L$.

✓ **Bước 2.** Tính $f(x_0) = f_2(x_0)$.

✓ **Bước 3.** Đánh giá hoặc giải phương trình $L = f_2(x_0)$, từ đó đưa ra kết luận.

❖ **Loại 2:** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{khi } x < x_0 \\ f_2(x) & \text{khi } x \geq x_0 \end{cases}$.

Để xét tính liên tục hoặc xác định giá trị của tham số để hàm số liên tục tại điểm x_0 , ta thực hiện các bước sau

✓ **Bước 1.** Tính $f(x_0) = f_2(x_0)$.

✓ **Bước 2. (Liên tục trái)** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f_1(x) = L_1$.

Đánh giá hoặc giải phương trình $L_1 = f_2(x_0)$, từ đó đưa ra kết luận.

✓ **Bước 3. (Liên tục phải)** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f_2(x) = L_2$.

Đánh giá hoặc giải phương trình $L_2 = f_2(x_0)$, từ đó đưa ra kết luận.

🔗 **Chú ý:** Hàm số không liên tục tại x_0 thì được gọi là gián đoạn tại x_0 .

B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của hàm số

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}} & \text{khi } x \neq \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \text{khi } x = \sqrt{2} \end{cases} \quad \text{tại } x = \sqrt{2} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & \text{khi } x > 5 \\ (x-5)^2 + 3 & \text{khi } x \leq 5 \end{cases} \quad \text{tại } x = 5$$

Lời giải

a) Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } \blacklozenge \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{x - \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} (x + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}.$$

$$\blacklozenge f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}.$$

Do $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x) = f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$ nên hàm số liên tục tại $x = \sqrt{2}$.

b) Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } \blacklozenge f(5) = 3.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} [(x-5)^2 + 3] = 3.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}{2x-1-9} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{\sqrt{2x-1}+3}{2} = 3.$$

Do $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$ nên hàm số liên tục tại $x = 5$.

Ví dụ 2. Xét tính liên tục của các hàm số sau tại x_0 đã chỉ ra:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{x+1} & \text{khi } x \neq 1 \\ -1 & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad (x_0 = 1)$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases} \quad (x_0 = 2)$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad (x_0 = 1)$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^2-3x+2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad (x_0 = 1)$$

Ví dụ 3. Xét tính liên tục của các hàm số sau tại x_0 đã chỉ ra:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \begin{cases} (x+1)^2 & \text{khi } x \leq 0 \\ -1 & \text{khi } x > 0 \end{cases} \quad (x_0 = 0) & \text{b) } f(x) &= \begin{cases} \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & \text{khi } x > 5 \\ (x-5)^2 + 3 & \text{khi } x \leq 5 \end{cases} \quad (x_0 = 5) \\ \text{c) } f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{x-2} & \text{khi } x \leq 1 \\ -\frac{1}{x} & \text{khi } x > 1 \end{cases} \quad (x_0 = 1) & \text{d) } f(x) &= \begin{cases} \frac{2x^2-x+1}{x+1} & \text{khi } x < -1 \\ 4x+9 & \text{khi } x \geq -1 \end{cases} \quad (x_0 = -1) \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Tìm m để các hàm số sau liên tục tại x_0 :

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + m & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad (x_0 = 1) & \text{b) } f(x) &= \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x} & \text{khi } x < 2 \\ mx + m + 1 & \text{khi } x \geq 2 \end{cases} \quad (x_0 = 2) \\ \text{c) } f(x) &= \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3} & \text{khi } x \neq 2 \\ x^2 - 3mx & \text{khi } x = 2 \end{cases} \quad (x_0 = 2) & \text{d) } f(x) &= \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 12 - m & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad (x_0 = 1) \end{aligned}$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Xét tính liên tục của hàm số f tại x_0 :

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 3x + 2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 1, x_0 = 2, x_0 = 3.$$

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + x + 2}{x^3 + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ \frac{4}{3} & \text{khi } x = -1 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = -1, x_0 = 1.$$

$$3) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{2x - 3}}{2 - x} & \text{khi } x \neq 2 \\ 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 2, x_0 = 1, x_0 = 6.$$

Bài 2. Xét tính liên tục của hàm số f tại x_0 :

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} & \text{khi } x > 3 \\ 2x - 4 & \text{khi } x \leq 3 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 3, x_0 = 4.$$

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x - 5}{\sqrt{2x - 1} - 3} & \text{khi } x > 5 \\ (x - 5)^2 + 3 & \text{khi } x \leq 5 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 5, x_0 = 6.$$

$$3) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & \text{khi } x < 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \\ \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} & \text{khi } x > 1 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 1, x_0 = 4.$$

Bài 3. Định a để hàm số f liên tục tại x_0 :

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a + \frac{5}{2} & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 1.$$

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x^2 + 3}{x^2 - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ ax + \frac{5}{2} & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 1.$$

Bài 4. Định a, b để hàm số f liên tục tại x_0 :

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x} & \text{khi } x < 0 \\ a + \frac{4-x}{x+2} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 0.$$

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ ax + \frac{4}{4} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 2.$$

Dạng 2. Xét tính liên tục của hàm số trên khoảng, đoạn

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- ✓ Để chứng minh hàm số $y = f(x)$ liên tục trên một khoảng, đoạn ta dùng các định nghĩa về hàm số liên tục trên khoảng, đoạn và các nhận xét để suy ra kết luận.
- ✓ Khi nói xét tính liên tục của hàm số (mà không nói rõ gì hơn) thì ta hiểu phải xét tính liên tục trên tập xác định của nó.
- ✓ Tìm các điểm gián đoạn của hàm số tức là xét xem trên tập xác định của nó hàm số không liên tục tại các điểm nào.

B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 5. Cho hàm số $f(x)$ xác định bởi $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2 & \text{khi } x \geq 3 \\ \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} & \text{khi } -1 < x < 3 \end{cases}$.

Chứng minh rằng hàm số liên tục trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Lời giải

- Nếu $x > 3$. Hàm số $f(x) = x^2 - x - 2$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(3; +\infty)$. (1)

- Nếu $-1 < x < 3$. Hàm số $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$.

Ta có ♦ $\sqrt{x+1}-2 \neq 0$ với mọi $x \in (-1; 3)$.

♦ $x-3$ và $\sqrt{x+1}-2$ đều liên tục trên $(-1; 3)$.

Do đó hàm số $f(x)$ liên tục trên $(-1; 3)$. (2)

- Xét tại $x = -3$. Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} (\sqrt{x+1}+2) = 4.$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - x - 2) = 4.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 4$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 3$. (3)

Từ (1), (2) và (3) ta kết luận hàm số liên tục trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Ví dụ 6. Xác định a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$.

Lời giải

Hàm số xác định và liên tục trên $[0; 1)$.

Xét bên trái $x = 1$.

Ta có ♦ $f(1) = a$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[(x+1)(\sqrt{x}+1) \right] = 4.$$

Để hàm số liên tục bên trái của 1 khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 4 = a$.

Vậy với $a = 4$ thì hàm số liên tục trên $[0; 1]$.

Ví dụ 7. Xét tính liên tục của các hàm số sau:

a) $f(x) = x^2 + x + 3 + \frac{1}{x-2}$

b) $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{2-x}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} & \text{khi } x \neq \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \text{khi } x = \sqrt{2} \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+8}{4x+8} & \text{khi } x \neq -2 \\ 3 & \text{khi } x = -2 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & \text{khi } x \leq 1 \\ -\frac{1}{x} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+27}{x^2-9} & \text{khi } x < 3 \\ 5 & \text{khi } x = 3 \\ 2x-1 & \text{khi } x > 3 \end{cases}$

Ví dụ 8. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x-1} + x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} & \text{khi } x > 1 \\ 1 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ liên tục trên $[1; +\infty)$.

Ví dụ 9. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x < 1 \\ 1 & \text{khi } x = 1 \\ mx + 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ liên tục trên tập xác định của nó..

$$\text{a) } f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 5}{x^2 - 4x + 3}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{for } x \leq 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{for } x > 0 \end{cases}$$

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 5. Chứng minh rằng:

- 1) Các hàm số $f(x) = x^3 - x + 3$ và $g(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- 2) Hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 2$.
- 3) Hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ gián đoạn tại điểm $x = 1$.
- 4) Hàm số $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{khi } x \leq 0 \\ x^2 + 2 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$ gián đoạn tại điểm $x = 0$.
- 5) Hàm số $f(x) = x^4 - x^2 + 2$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- 6) Hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ liên tục trên khoảng $(-1; 1)$.
- 7) Hàm số $f(x) = \sqrt{8-2x^2}$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$.
- 8) Hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$ liên tục trên khoảng $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
- 9) Hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{2x - 1}$ liên tục trên tập xác định của nó.
- 10) Hàm số $f(x) = x^2 + x + 3 + \frac{1}{x-2}$ liên tục trên tập xác định của nó.
- 11) Hàm số $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{2-x}$ liên tục trên tập xác định của nó.
- 12) Hàm số $f(x) = \sqrt{x-3}$ liên tục trên tập xác định của nó.
- 13) Hàm số $f(x) = x^2 \sin x - 2 \cos^2 x + 3$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- 14) Hàm số $f(x) = \frac{x^3 + x \cos x + \sin x}{2 \sin x + 3}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- 15) Hàm số $f(x) = \frac{(2x+1) \sin x - \cos^3 x}{x \sin x}$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{R}\}$.

Bài 6. Xét tính liên tục của hàm số f trên tập xác định:

- 1) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 4}$
- 2) $f(x) = \frac{1 - \sqrt{2x-3}}{2-x}$
- 3) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + x + 2}{x^3 + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ \frac{4}{3} & \text{khi } x = -1 \end{cases}$
- 4) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ -\frac{1}{2} & \text{khi } x = 1 \end{cases}$
- 5) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x^2 - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ \frac{1}{6} & \text{khi } x = 1 \end{cases}$
- 6) $f(x) = \begin{cases} x + \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 4 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$

Bài 7. Xét tính liên tục của hàm số f theo a :

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{-x^3 + 5x^2 - 5x - 3}{x^2 - 9} & \text{khi } x > 3 \\ a + 4x & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$$

Bài 8. Định a để hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$:

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x} & \text{khi } x < 2 \\ ax + a + 1 & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{khi } x \leq 1 \\ 3 - ax^2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

Bài 9. Định a, b để hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$:

$$1) f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{khi } x < 3 \\ ax + b & \text{khi } 3 \leq x \leq 5 \\ x^2 - 4x - 2 & \text{khi } x > 5 \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} -2 \sin x & \text{khi } x \leq \frac{\pi}{2} \\ a \sin x + b & \text{khi } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{khi } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Bài 10. Định a để hàm số f liên tục trên I :

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{x-4}{3(\sqrt{x}-2)} & \text{khi } x \neq 4 \\ a & \text{khi } x = 4 \end{cases}$$

trên $I = [0; 4]$

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{3x+5}}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ ax + 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

trên $I = [-3; +\infty)$

$$3) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a^2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

trên $I = (0; +\infty)$

Bài 11. Tìm các điểm gián đoạn của hàm số sau:

$$1) f(x) = \frac{x+1}{x^3-4x}$$

$$2) f(x) = \frac{x}{2\cos x - 1}$$

$$3) f(x) = \tan x + \cot x$$

$$4) f(x) = \sqrt{x}$$

$$5) f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \neq 0 \\ -2 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

$$6) f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{khi } x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2 - 3x} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

$$7) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ -\frac{3}{2} & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

$$8) f(x) = \begin{cases} \frac{2x-2}{x^2-3x+2} & \text{khi } x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

Bài 12. Xét xem các hàm số sau có liên tục tại mọi x không, nếu không liên tục thì chỉ ra các điểm gián đoạn:

$$1) f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$$

$$2) f(x) = \frac{2x+1}{x^2-3x+2}$$

$$3) f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{khi } x \neq 4 \\ 8 & \text{khi } x = 4 \end{cases}$$

Dạng 3. Chứng minh phương trình có nghiệm

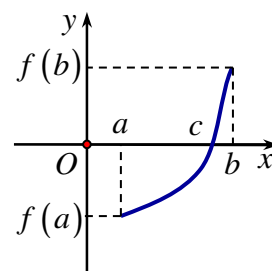
A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Biến đổi phương trình về dạng: $f(x) = 0$
- Tìm hai số a, b sao cho $f(a) \cdot f(b) < 0$ (Dùng chức năng TABLE của máy tính tìm cho nhanh)
- Chứng minh $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ từ đó suy ra $f(x) = 0$ có nghiệm

⚠ Chú ý:

📌 Nếu $f(a) \cdot f(b) \leq 0$ thì phương trình có nghiệm thuộc $[a; b]$

📌 Để chứng minh $f(x) = 0$ có ít nhất n nghiệm trên $[a; b]$, ta chia đoạn $[a; b]$ thành n khoảng nhỏ rời nhau, rồi chứng minh trên mỗi khoảng đó phương trình có ít nhất một nghiệm



B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 11. Chứng minh rằng phương trình

- $x^2 \cos x + x \sin x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$.
- $x^3 + x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm lớn hơn -1 .
- $x^4 - 3x^2 + 5x - 6 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1; 2)$.

Lời giải

- a) Xét hàm số $f(x) = x^2 \cos x + x \sin x + 1 = 0$ trên đoạn $[0; \pi]$.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; \pi]$.

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} f(0) = 1 > 0 \\ f(\pi) = \pi^2 \cos \pi + \pi \sin \pi + 1 = 1 - \pi^2 < 0 \end{cases} \text{ suy ra } f(0) \cdot f(\pi) < 0.$$

Do đó tồn tại một số $c \in (0; \pi)$ sao cho $f(c) = 0$ nghĩa là phương trình $x^2 \cos x + x \sin x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$.

- b) Xét hàm số $f(x) = x^3 + x + 1 = 0$ trên đoạn $[-1; 0]$.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 0]$.

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} f(-1) = -1 < 0 \\ f(0) = 1 > 0 \end{cases} \text{ suy ra } f(-1) \cdot f(0) < 0.$$

Do đó tồn tại một số $c \in (-1; 0)$ sao cho $f(c) = 0$ nghĩa là phương trình $x^3 + x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm lớn hơn -1 .

- c) Xét hàm số $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - 6 = 0$ trên đoạn $[1; 2]$.

Mặt khác $\begin{cases} f(1) = -3 < 0 \\ f(2) = 32 > 0 \end{cases}$ suy ra $f(1).f(2) < 0$.

Do đó tồn tại một số $c \in (1; 2)$ sao cho $f(c) = 0$ nghĩa là phương trình $x^4 - 3x^2 + 5x - 6 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1; 2)$.

a) $x^5 - 3x + 3 = 0$

b) $x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$

c) $(1-m^2)(x+1)^3 + x^2 - x - 3 = 0$

d) $m(2\cos x - \sqrt{2}) = 2\sin 5x + 1$

Ví dụ 13. Chứng minh phương trình:

a) $3x^3 + 12x - 1 = 0$

có ít nhất một nghiệm.

b) $x^5 - 5x^3 + 4x - 1 = 0$

có đúng 5 nghiệm.

c) $x^2 \cos x + x \sin x + 1 = 0$

có ít nhất một nghiệm thuộc $(0; \pi)$.

d) $x^3 + x + 1 = 0$

có ít nhất một nghiệm âm lớn hơn -1 .

e) $2x^3 - 6x + 1 = 0$

có ba nghiệm phân biệt.

Ví dụ 14. Chứng minh phương trình $x^4 - x - 3 = 0$ có ít nhất một nghiệm x_0 thỏa mãn $x_0 > \sqrt[3]{12}$

Ví dụ 15. Cho a, b, c là các số thực khác 0.

Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ với $2a + 3b + 6c = 0$ luôn có nghiệm.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(0) = c \\ f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}a + \frac{2}{3}b + c = \frac{4}{3}\left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + \frac{3c}{4}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{4a + 6b + 9c}{12}\right) = \frac{2}{9}\left(2a + 3b + 6c - \frac{3c}{2}\right) = -\frac{c}{3} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } f(0) \cdot f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{c^2}{3} \leq 0.$$

Vậy phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ với $2a + 3b + 6c = 0$ luôn có nghiệm.

Ví dụ 16. Chứng minh phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn luôn có nghiệm với mọi tham số trong trường hợp $5a + 4b + 6c = 0$.

Ví dụ 17. Chứng minh phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn luôn có nghiệm với mọi tham số trong trường hợp $12a + 15b + 20c = 0$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 13. Chứng minh rằng phương trình:

- 1) $3x^2 + 2x - 2 = 0$ có ít nhất một nghiệm
- 2) $x^3 + x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm lớn hơn -1 .
- 3) $3x^3 + 2x - 2 = 0$ có ít nhất một nghiệm
- 4) $4x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt thuộc $(-1; 1)$.
- 5) $x^5 + x - 1 = 0$ có ít nhất ba nghiệm thuộc $(-1; 1)$
- 6) $x^3 - 3x + 1 = 0$ có ít nhất ba nghiệm phân biệt thuộc $(-2; 2)$
- 7) $2x^3 - 6x + 1 = 0$ có ít nhất ba nghiệm phân biệt thuộc $(-2; 2)$
- 8) $2x^4 - 3x + 5x - 6 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(1; 2)$

Bài 14. Chứng minh các phương trình sau có nghiệm:

- 1) $m(x-1)^2(x+2) + 2x + 3 = 0$
- 2) $\cos x + m \cos 2x = 0$
- 3) $\sin x + \cos x - m \sin x \cos x = 0$
- 4) $2x - 1 + \tan x = 0$

Bài 15. Chứng minh rằng nếu $m < -3$ thì phương trình $(3m^2 + m - 1)x^3 + (3m - 2)x^2 + (m + 1)x - 3 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 1)$.**Bài 16.** Cho a, b, c là các số thực khác 0. Chứng minh rằng các phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ với $\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0$ và $m > 0$ luôn có nghiệm.**Bài 17.** Chứng minh rằng nếu $2a + 3b + 6c = 0$ thì phương trình $a \tan^2 x + b \tan x + c = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $\left(k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$.**Bài 18.** Cho a, b, c là ba số dương phân biệt.Chứng minh rằng phương trình $a(x-b)(x-c) + b(x-a)(x-c) + c(x-a)(x-b) = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt.**Dạng 4. Xét dấu biểu thức****A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

Ta áp dụng hệ quả: “Nếu $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(x) = 0, \forall x \in (a; b)$ thì $f(x)$ không đổi dấu trên $(a; b)$ ” để xét dấu biểu thức $f(x)$ trên miền D theo các bước sau:

Bước 1: Tìm các điểm gián đoạn của $f(x)$ trên D **Bước 2:** Tìm tất cả các $x_i \in D, (i = \overline{1, n})$ sao cho $f(x_i) = 0$.**Bước 3:** Chia miền D thành những khoảng nhỏ bởi các điểm gián đoạn của $f(x)$ và các điểm $x_i \in D, (i = \overline{1, n})$ vừa tìm được ở bước 2.**Bước 4:** Trên mỗi khoảng nhỏ lấy một số m tùy ý, tính $f(m)$, dấu của $f(x)$ trên khoảng đó chính là dấu của $f(m)$. Từ đó suy ra được dấu của $f(x)$ trên miền D .

Ví dụ 18. Xét dấu các biểu thức sau:

b) $f(x) = x^2 - 3 + \sqrt{9 - x^2}$

Bài 19. Xét dấu các biểu thức sau:

6) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 3} + x - 1$

BÀI TẬP CƠ BẢN NÂNG CAO VẤN ĐỀ 3**Bài 20.** Xét tính liên tục của hàm số f tại x_0 :

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3} & \text{khi } x \neq 4 \\ 1 & \text{khi } x = 4 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 4.$$

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ \frac{3}{4} & \text{khi } x = 2 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 2.$$

$$3) \quad f(x) = \begin{cases} x + \frac{|x-2|}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 3 & \text{khi } x = 2 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 2.$$

$$4) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{3x-2-\sqrt{4x^2-x-2}}{x^2-3x+2} & \text{khi } x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 1.$$

$$5) \quad f(x) = \begin{cases} x + \frac{|x-2|}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 3 & \text{khi } x = 2 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 2.$$

$$6) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+8}{4x+8} & \text{khi } x \neq -2 \\ 3 & \text{khi } x = -2 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = -2.$$

Bài 21. Xét tính liên tục của hàm số f tại x_0 :

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 1 \\ \frac{x^2-1}{x^2+6x-7} & \text{khi } x < 1 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 1, x_0 = 2.$$

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3} & \text{khi } x > 4 \\ \frac{x^2-5x+8}{6} & \text{khi } x \leq 4 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 4.$$

$$3) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+1}-2}{\sqrt{x}-1} & \text{khi } x > 1 \\ \frac{\sqrt{x^2+8}-1}{3} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 1, x_0 = -1.$$

$$4) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - \cos x}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} & \text{khi } x > \frac{\pi}{4} \\ 2 \sin x & \text{khi } x \leq \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

Bài 22. Định a để hàm số f liên tục tại x_0 :

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x + 3}{x^2 - 4x + 3} & \text{khi } x \neq 1 \\ a - \frac{3}{2} & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 1.$$

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 4x^3 + 2x + 1}{x^3 - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a + \frac{1}{3} & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 1.$$

$$3) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x+5} - 3} & \text{khi } x \neq 4 \\ ax - \frac{5}{2} & \text{khi } x = 4 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 4.$$

$$4) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a - \frac{5}{4} & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 1.$$

$$5) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 2a - \frac{5}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 0.$$

$$6) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} & \text{khi } x \neq 4 \\ a+2 & \text{khi } x = 4 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 4.$$

$$7) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ a & \text{khi } x = 2 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 2.$$

$$8) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 1.$$

$$9) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ ax + \frac{1}{4} & \text{khi } x = 2 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 2.$$

Bài 23. Định a, b để hàm số f liên tục tại x_0 :

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{2x} & \text{khi } x < 0 \\ a + \frac{x^3 - 3x + 1}{x+2} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 0.$$

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x^2 - 8} - 2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ ax + \frac{1}{4} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 2.$$

$$3) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2\sin x - \sqrt{3}}{2\cos x - 1} & \text{khi } x > \frac{\pi}{3} \\ 2a + \frac{3}{\pi}x & \text{khi } x \leq \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = \frac{\pi}{3}.$$

Bài 24. Xét xem các hàm số sau có liên tục tại mọi x không, nếu không liên tục thì chỉ ra các điểm gián đoạn:

$$1) \quad f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$$

$$2) \quad f(x) = \frac{2x+1}{x^2-3x+2}$$

$$3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x}$$

$$4) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x-4} & \text{khi } x \neq 4 \\ 8 & \text{khi } x = 4 \end{cases}$$

Bài 25. Xét tính liên tục của hàm số f trên tập xác định:

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} x + \frac{|x-1|}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & \text{khi } x \leq 1 \\ -\frac{1}{x} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

$$3) \quad f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x \leq 0 \\ (x-1)^2 & \text{khi } 0 < x < 2 \\ 2 & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$$

$$4) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 1 \\ x-2 & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$$

$$5) \quad f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x+1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

$$6) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{khi } x < 1 \\ \cos x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$$

$$7) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}} & \text{khi } x \neq \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \text{khi } x = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$8) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{(x-2)^2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 3 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$$

Bài 26. Xét tính liên tục của hàm số f theo a :

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ a & \text{khi } x = 2 \end{cases}$$

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ a-x & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$$

Bài 27. Định a để hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$:

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \geq 2 \\ 3x + a & \text{khi } x < 2 \end{cases}$$

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{khi } x \leq 2 \\ 3 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$$

$$3) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ ax + \frac{1}{4} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$$

$$4) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2\cos x} & \text{khi } x \neq \frac{\pi}{3} \\ a + \tan \frac{\pi}{6} & \text{khi } x = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Bài 28. Chứng minh rằng phương trình:

- 1) $x^3 - 3x - 7 = 0$ luôn có nghiệm
- 2) $x^5 + 7x^4 - 3x^2 + x + 2 = 0$ luôn có nghiệm
- 3) $x^4 - 3x - 5 = 0$ luôn có nghiệm
- 4) $x^4 - 3x^3 + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-1; 3)$
- 5) $x^5 - 3x^4 + 5x - 2 = 0$ có ít nhất ba nghiệm thuộc $(-2; 5)$
- 6) $\sqrt{x^3 + 6x + 1} - 2 = 0$ có nghiệm dương
- 7) $\cos 2x = 2\sin x - 2$ có ít nhất hai nghiệm thuộc $\left(\frac{\pi}{6}; \pi\right)$.
- 8) $x^2 \cos x + x \sin x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0; \pi)$
- 9) $\cos x = x$ luôn có nghiệm

Bài 29. Liệu có tồn tại một số lớn hơn lập phương của chính nó 1 đơn vị?

Bài 30. Nếu a và b là các số dương, hãy chứng minh phương trình $\frac{a}{x^3 + 2x^2 - 1} + \frac{b}{x^3 + x - 2} = 0$ có ít nhất 1 nghiệm nằm trong khoảng $(-1; 1)$.

Bài 31. Một thầy tu Tây Tạng rời tu viện lúc 7 h sáng và đi lên đỉnh núi như thường lệ, đến nơi lúc 7 h tối. Sáng hôm sau, ông bắt đầu đi từ đỉnh núi vào lúc 7 h sáng và cũng đi về bằng con đường cũ, về đến tu viện lúc 7 h tối. Hãy sử dụng Định lý Giá trị trung gian để chứng minh rằng có một điểm nằm trên đường mà thầy tu sẽ đi qua vào cùng thời điểm như nhau trong cả hai ngày.

Bài 32. Chứng minh các phương trình sau có nghiệm:

- 1) $(m^2 + m + 1)x^4 + 2x - 2 = 0$
- 2) $(1 - m^2)(x + 1)^3 + x^2 - x - 3 = 0$
- 3) $m(2\cos x - \sqrt{2}) = 2\sin 5x + 1$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VẤN ĐỀ 3

- Câu 1.** Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3-x}}{x}$ với $x \neq 0$. Để hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $f(0)$ bằng
 A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. 1. D. 0.
- Câu 2.** Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ với $x \neq 1$. Để hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $f(1)$ bằng
 A. 2. B. 1. C. 0. D. -1.
- Câu 3.** Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+4} - 2}$ với $x \neq 0$. Để hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $f(0)$ bằng
 A. 0. B. 2. C. 4. D. 1.
- Câu 4.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 8}{4x + 8} & \text{khi } x \neq -2 \\ 3 & \text{khi } x = -2 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại
 A. $x = -2$. B. $x = 3$. C. $x = 2$. D. $x = -3$.
- Câu 5.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} & \text{khi } x \neq 3 \\ a & \text{khi } x = 3 \end{cases}$. Để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 3$ thì a bằng
 A. 2. B. 4. C. 0. D. -2.
- Câu 6.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{4x - 3} - x} & \text{khi } x > 3 \\ 1 + ax & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$. Để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 3$ thì a bằng
 A. $-\frac{4}{3}$. B. -3. C. 0. D. $\frac{2}{3}$.
- Câu 7.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{5-4x} - x}{1-x} & \text{khi } x < 1 \\ (a+4)x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Để hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thì a bằng
 A. 3. B. -1. C. 1. D. 0.
- Câu 8.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+1} + \sqrt[3]{-2-6x}}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ a-x & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$. Để hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thì a bằng
 A. 2. B. 1. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{5}{4}$.
- Câu 9.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ a & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Để hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thì a bằng

A. 0.

B. 2.

C. $\frac{1}{4}$.

D. 1.

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x < 3, x \neq 1 \\ 4 & \text{khi } x = 1 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x \geq 3 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

A. mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.

B. mọi điểm trừ $x = 1$.

C. mọi điểm trừ $x = 3$.

D. mọi điểm trừ $x = 1$ và $x = 3$.

Câu 11. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right)$ bằng

A. Không tồn tại

B. $+\infty$

C. $-\infty$

D. Đáp số khác

Câu 12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) \sqrt{\frac{x-1}{x^3+x}}$ bằng

A. 0

B. 1

C. $+\infty$

D. Đáp số khác

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{khi } x \in [0; 4] \\ 1+m & \text{khi } x \in (4; 6] \end{cases}$. Định m để $f(x)$ liên tục trên $[0; 6]$:

A. $m = 3$

B. $m = 4$

C. $m = 0$

D. $m = 1$

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x - 1$ xác định trên $\mathbb{R}$. Số nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ trên $\mathbb{R}$ là

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Câu 15. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[-1; 4]$ sao cho $f(-1) = -3$, $f(4) = 5$. Có thể nói gì về số nghiệm của phương trình $f(x) = 8$ trên đoạn $[-1; 4]$:

A. Vô nghiệm

B. Có ít nhất một nghiệm

C. Có hai nghiệm

D. Không thể kết luận gì

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG 4

Câu 16. Dãy số nào sau đây có giới hạn khác 0 ?

- A. $\frac{1}{n}$. B. $\frac{1}{\sqrt{n}}$. C. $\frac{n+1}{n}$. D. $\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$.

Câu 17. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0 ?

- A. $\left(\frac{4}{3}\right)^n$. B. $\left(-\frac{4}{3}\right)^n$. C. $\left(-\frac{5}{3}\right)^n$. D. $\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Câu 18. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0 ?

- A. $(0,999)^n$. B. $(-1,01)^n$. C. $(1,01)^n$. D. $(-2,001)^n$.

Câu 19. Dãy nào sau đây không có giới hạn?

- A. $(0,99)^n$. B. $(-1)^n$. C. $(-0,99)^n$. D. $(-0,89)^n$.

Câu 20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n+3}$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. $-\frac{1}{3}$. B. -1 . C. 0 . D. $-\frac{1}{4}$.

Câu 21. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3-4n}{5n}\right)$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. $\frac{3}{5}$. B. $-\frac{3}{5}$. C. $\frac{4}{5}$. D. $-\frac{4}{5}$.

Câu 22. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{3^n}$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. 0 . B. 1 . C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{5}{3}$.

Câu 23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4 - \frac{\cos 2n}{n}}$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. 0 . B. $\sqrt{2}$. C. 2 . D. 4 .

Câu 24. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 2n + 1}{4n^4 + 2n + 1}$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. 0 . B. $+\infty$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{2}{7}$.

Câu 25. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 - 2n + 3}{4n^4 + 2n + 1}$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. 0 . B. $+\infty$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{4}{7}$.

Câu 26. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n^4}{4n^4 + 5n + 1}$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. $-\frac{3}{4}$. B. 0 . C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{4}$.

- Câu 27.** $\lim \frac{3n^4 - 2n + 4}{4n^2 + 2n + 3}$ có giá trị là bao nhiêu?
 A. 0. B. $+\infty$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{4}{3}$.
- Câu 28.** $\lim (-3n^3 + 2n^2 - 5)$ có giá trị là bao nhiêu?
 A. -3. B. -6. C. $-\infty$. D. $+\infty$.
- Câu 29.** $\lim (2n^4 + n^2 - 5n)$ có giá trị là bao nhiêu?
 A. $-\infty$. B. 0. C. 2. D. $+\infty$.
- Câu 30.** $\lim \frac{\sqrt{4n^2 + 5} - \sqrt{n + 4}}{2n - 1}$ có giá trị là bao nhiêu?
 A. 0. B. 1. C. 2. D. $+\infty$.
- Câu 31.** $\lim (\sqrt{n + 10} - \sqrt{n})$ có giá trị là bao nhiêu?
 A. $+\infty$. B. 10. C. $\sqrt{10}$. D. 0.
- Câu 32.** $\lim \frac{3 - 2n + 4n^2}{4n^2 + 5n - 3}$ có giá trị là bao nhiêu?
 A. 0. B. 1. C. $\frac{3}{4}$. D. $-\frac{4}{3}$.
- Câu 33.** Nếu $\lim u_n = L$ thì $\lim \sqrt{u_n + 9}$ có giá trị là bao nhiêu?
 A. $L + 9$. B. $L + 3$. C. $\sqrt{L + 9}$. D. $\sqrt{L} + 3$.
- Câu 34.** Nếu $\lim u_n = L$ thì $\lim \frac{1}{\sqrt[3]{u_n} + 8}$ có giá trị là bao nhiêu?
 A. $\frac{1}{\sqrt{L} + \sqrt{8}}$. B. $\frac{1}{\sqrt{L + 8}}$. C. $\frac{1}{\sqrt[3]{L} + 2}$. D. $\frac{1}{\sqrt[3]{L + 8}}$.
- Câu 35.** $\lim \frac{\sqrt{n + 4}}{\sqrt{n} + 1}$ có giá trị là bao nhiêu?
 A. 1. B. 2. C. 4. D. $+\infty$.
- Câu 36.** $\lim \frac{1 - 2n + 2n^2}{5n^2 + 5n - 3}$ có giá trị là bao nhiêu?
 A. 0. B. $\frac{1}{5}$. C. $\frac{2}{5}$. D. $-\frac{2}{5}$.
- Câu 37.** $\lim \frac{10^4 n}{10^4 + 2n}$ có giá trị là bao nhiêu?
 A. $+\infty$. B. 10000. C. 5000. D. 1.
- Câu 38.** $\lim \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{2n^2}$ có giá trị là bao nhiêu?
 A. 0. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $+\infty$.

- Câu 39.** $\lim \frac{\sqrt[3]{n^3 + n}}{6n + 2}$ có giá trị là bao nhiêu?
 A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{\sqrt[3]{2}}{6}$. D. 0.
- Câu 40.** $\lim n(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 3})$ có giá trị là bao nhiêu?
 A. $+\infty$. B. 4. C. 2. D. -1.
- Câu 41.** $\lim \frac{n + \sin 2n}{n + 5}$ có giá trị là bao nhiêu?
 A. $\frac{2}{5}$. B. $\frac{1}{5}$. C. 0. D. 1.
- Câu 42.** $\lim (3n - 4n^3)$ có giá trị là bao nhiêu?
 A. $-\infty$. B. -4. C. 3. D. $+\infty$.
- Câu 43.** Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?
 A. $u_n = \frac{n^2 - 2n}{5n + 5n^2}$. B. $u_n = \frac{1 - 2n}{5n + 5}$. C. $u_n = \frac{1 - 2n^2}{5n + 5}$. D. $u_n = \frac{1 - 2n}{5n + 5n^2}$.
- Câu 44.** Dãy số nào sau đây có giới hạn là $+\infty$?
 A. $u_n = 3n^2 - n^3$. B. $u_n = n^2 - 4n^3$. C. $u_n = 3n^2 - n$. D. $u_n = 3n^3 - n^4$.
- Câu 45.** Dãy số nào sau đây có giới hạn là $-\infty$?
 A. $u_n = n^4 - 3n^3$. B. $u_n = 3n^3 - n^4$. C. $u_n = 3n^2 - n$. D. $u_n = -n^2 + 4n^3$.
- Câu 46.** Tổng của cấp số nhân vô hạn $\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; \dots; \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}; \dots$ có giá trị là bao nhiêu?
 A. 1. B. $\frac{1}{3}$. C. $-\frac{1}{3}$. D. $-\frac{2}{3}$.
- Câu 47.** Tổng của cấp số nhân vô hạn $-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \dots; \frac{(-1)^n}{2^n}; \dots$ có giá trị là bao nhiêu?
 A. $\frac{1}{3}$. B. $-\frac{1}{3}$. C. $-\frac{2}{3}$. D. -1.
- Câu 48.** Tổng của cấp số nhân vô hạn $\frac{1}{3}; -\frac{1}{9}; \dots; \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}; \dots$ có giá trị là bao nhiêu?
 A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{3}{4}$. D. 4.
- Câu 49.** Tổng của cấp số nhân vô hạn $\frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \dots; \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}}; \dots$ có giá trị là bao nhiêu?
 A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{3}{8}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{3}{2}$.
- Câu 50.** Tổng của cấp số nhân vô hạn $\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}; \dots; \frac{(-1)^{n+1}}{2 \cdot 3^{n-1}}; \dots$ có giá trị là bao nhiêu?
 A. $\frac{8}{3}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{3}{8}$.

Câu 51. Tổng của cấp số nhân vô hạn $1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \dots; \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}}; \dots$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. $-\frac{2}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{3}{2}$. D. 2.

Câu 52. Dãy số nào sau đây có giới hạn là $+\infty$?

- A. $u_n = \frac{n^2 - 2n}{5n + 5n^2}$. B. $u_n = \frac{1 + 2n}{5n + 5}$. C. $u_n = \frac{1 + n^2}{5n + 5}$. D. $u_n = \frac{n^2 - 2}{5n + 5n^3}$.

Câu 53. Dãy số nào sau đây có giới hạn là $+\infty$?

- A. $u_n = \frac{9n^2 + 7n}{n + n^2}$. B. $u_n = \frac{2007 + 2008n}{n + 1}$.
C. $u_n = 2008m - 2007n^2$. D. $u_n = n^2 + 1$.

Câu 54. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng -1 ?

- A. $\lim \frac{2n^2 - 3}{-2n^3 - 4}$. B. $\lim \frac{2n^2 - 3}{-2n^2 - 1}$. C. $\lim \frac{2n^2 - 3}{-2n^3 + 2n^2}$. D. $\lim \frac{2n^3 - 3}{-2n^2 - 1}$.

Câu 55. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

- A. $\lim \frac{2n^2 - 3}{-2n^3 - 4}$. B. $\lim \frac{2n - 3n^3}{-2n^2 - 1}$. C. $\lim \frac{2n^2 - 3n^4}{-2n^3 + 2n^2}$. D. $\lim \frac{3 + 2n^3}{2n^2 - 1}$.

Câu 56. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng $+\infty$?

- A. $\lim \frac{2n^2 + 3}{n^3 + 4}$. B. $\lim \frac{2n - 3n^3}{2n^2 - 1}$. C. $\lim \frac{2n^2 - 3n^4}{-2n^3 + 2n^2}$. D. $\lim \frac{3 - 2n^3}{2n^2 - 1}$.

Câu 57. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng $\frac{1}{5}$?

- A. $u_n = \frac{n^2 - 2n}{5n + 5n^2}$. B. $u_n = \frac{1 - 2n}{5n + 5}$. C. $u_n = \frac{1 - 2n^2}{5n + 5}$. D. $u_n = \frac{1 - 2n}{5n + 5n^2}$.

Câu 58. $\lim_{x \rightarrow -1} (3)$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. -2 . B. -1 . C. 0. D. 3.

Câu 59. $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 2x + 3)$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. 0. B. 2. C. 4. D. 6.

Câu 60. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x - 5)$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. -15 . B. -7 . C. 3. D. $+\infty$.

Câu 61. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 2x + 3}{5x^4 + 3x + 1}$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. 0. B. $\frac{4}{9}$. C. $\frac{3}{5}$. D. $+\infty$.

Câu 62. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + 3x + 2}$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. $-\frac{2}{5}$. B. $\frac{3}{5}$. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

- Câu 63.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x^5}{x^4 + x + 5}$ có giá trị là bao nhiêu?
 A. $+\infty$. B. 3. C. -1. D. $-\infty$.
- Câu 64.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + 3x^6 + 1}$ có giá trị là bao nhiêu?
 A. $-\infty$. B. $\frac{3}{5}$. C. $-\frac{2}{5}$. D. 0.
- Câu 65.** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + 3x^6 + 1}$ có giá trị là bao nhiêu?
 A. $\frac{1}{9}$. B. $\frac{3}{5}$. C. $-\frac{2}{5}$. D. $-\frac{2}{3}$.
- Câu 66.** $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 - 3x^2 + 1}$ có giá trị là bao nhiêu?
 A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{5}{9}$. C. $\frac{3}{5}$. D. $\frac{5}{3}$.
- Câu 67.** $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^4 - x^5}{x^4 + x + 5}$ có giá trị là bao nhiêu?
 A. $\frac{4}{5}$. B. $\frac{4}{7}$. C. $\frac{2}{5}$. D. $\frac{2}{7}$.
- Câu 68.** $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^4 - 2x}{x^4 - 3x + 2}$ có giá trị là bao nhiêu?
 A. $-\frac{13}{6}$. B. $\frac{7}{4}$. C. $\frac{11}{6}$. D. $\frac{13}{6}$.
- Câu 69.** $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x^3}{x^2 - x + 3}$ có giá trị là bao nhiêu?
 A. $-\frac{4}{9}$. B. $\frac{12}{5}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $+\infty$.
- Câu 70.** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x^5}{2x^4 + 3x^5 + 2}$ có giá trị là bao nhiêu?
 A. $-\frac{1}{12}$. B. $-\frac{1}{7}$. C. $-\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{2}$.
- Câu 71.** $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + x^3}{x^2 - x + 1}$ có giá trị là bao nhiêu?
 A. $-\frac{10}{7}$. B. $-\frac{10}{3}$. C. $\frac{6}{7}$. D. $-\infty$.
- Câu 72.** $\lim_{x \rightarrow -1} |4x^3 - 2x - 3|$ có giá trị là bao nhiêu?
 A. 9. B. 5. C. 1. D. -5.
- Câu 73.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3x^4 + 4x^5 + 3}{9x^5 + 5x^4 + 1}}$ có giá trị là bao nhiêu?
 A. 0. B. $\sqrt{\frac{1}{3}}$. C. $\sqrt{\frac{3}{5}}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 74. $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{\frac{x^4 - 4x^2 + 3}{7x^2 + 9x - 1}}$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. $\sqrt{\frac{1}{15}}$. B. $\sqrt{\frac{1}{3}}$. C. $\sqrt{\frac{35}{9}}$. D. $+\infty$.

Câu 75. $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{\frac{x^4 - 4x^2 + 3x}{x^2 + 16x - 1}}$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. $\sqrt{\frac{1}{8}}$. B. $\sqrt{\frac{3}{8}}$. C. $\frac{3}{8}$. D. $+\infty$.

Câu 76. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\frac{1 - x^3}{3x^2 + x}}$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. 0. B. 1. C. $\sqrt{\frac{1}{2}}$. D. $\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Câu 77. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{x-1}$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. $-\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

Câu 78. $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{\frac{10 - x^3}{3x^2 + x}}$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. $\frac{3}{2}$. B. $\sqrt{\frac{11}{4}}$. C. $\sqrt{\frac{9}{2}}$. D. $\sqrt{\frac{11}{2}}$.

Câu 79. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-5})$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. 0. B. $\sqrt{3} + \sqrt{5}$. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

Câu 80. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 + x^3 - 2x^2 - 1}{x - 2x^4}$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. -2. B. -1. C. 1. D. 2.

Câu 81. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 5} - x)$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. $\frac{5}{\sqrt{2}}$. B. $\frac{5}{2}$. C. $\sqrt{5}$. D. $+\infty$.

Câu 82. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. $+\infty$. B. 0. C. $\sqrt{\frac{1}{2}}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 83. $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^4 - 1}{y - 1}$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. $+\infty$. B. 4. C. 2. D. $-\infty$.

Câu 84. $\lim_{y \rightarrow a} \frac{y^4 - a^4}{y - a}$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. $+\infty$. B. $2a^3$. C. $4a^3$. D. $4a^2$.

Câu 85. $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^4 - 1}{y^3 - 1}$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. $+\infty$. B. 0. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{4}{3}$.

Câu 86. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2} - \sqrt{x + 3}}{2x - 3}$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. $+\infty$.

Câu 87. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2 + x + 1}}{x}$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. 0. B. -1. C. $-\frac{1}{2}$. D. $-\infty$.

Câu 88. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x - 4}$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. $+\infty$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $-\frac{1}{2}$.

Câu 89. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 12x + 35}{x - 5}$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. $+\infty$. B. 5. C. -5. D. -14.

Câu 90. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 12x + 35}{5x - 25}$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. $+\infty$. B. $\frac{1}{5}$. C. $\frac{2}{5}$. D. $-\frac{2}{5}$.

Câu 91. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 2x - 15}{2x + 10}$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. -8. B. -4. C. $\frac{1}{2}$. D. $+\infty$.

Câu 92. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{2x - 10}$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. -4. B. -1. C. 4. D. $+\infty$.

Câu 93. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 9x - 20}{2x + 10}$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. $-\frac{5}{2}$. B. -2. C. $-\frac{3}{2}$. D. $+\infty$.

Câu 94. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + 3x + 2}$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. $-\frac{2}{5}$. B. $\frac{3}{5}$. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

Câu 95. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + x}$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. -3. B. -1. C. 0. D. 1.

Câu 96. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)\sqrt{\frac{x}{x^3-1}}$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. $-\infty$. B. 0. C. 1. D. $+\infty$.

Câu 97. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-3x+2}{x^3-1}$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. $-\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{3}$. C. 0. D. 1.

Câu 98. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-5})$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. $+\infty$. B. 4. C. 0. D. $-\infty$.

Câu 99. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2-7x}{\sqrt{2x+3}}$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. $\frac{3}{\sqrt{2}}$. B. 2. C. 6. D. $+\infty$.

Câu 100. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{6x^3-x^2+x}{x-2}$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. $-\frac{8}{3}$. B. -2. C. $-\frac{4}{3}$. D. $\frac{8}{3}$.

Câu 101. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+1}{x-1}$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. $+\infty$. B. 2. C. 1. D. $-\infty$.

Câu 102. Cho $f(x) = \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2-x}}{x}$ với $x \neq 0$. Phải bổ sung thêm giá trị $f(0)$ bằng bao nhiêu thì hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

- A. 0. B. 1. C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. D. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Câu 103. Cho $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ với $x \neq 0$. Phải bổ sung thêm giá trị $f(0)$ bằng bao nhiêu thì hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

- A. 0. B. 1. C. $\sqrt{2}$. D. 2.

Câu 104. Cho $f(x) = \frac{x^2-5x}{3x}$ với $x \neq 0$. Phải bổ sung thêm giá trị $f(0)$ bằng bao nhiêu thì hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

- A. $\frac{5}{3}$. B. $\frac{1}{3}$. C. 0. D. $-\frac{5}{3}$.

Câu 105. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x} & \text{khi } x < 1, x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \\ \sqrt{x} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

- A. mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$. B. mọi điểm trừ $x = 0$.
C. mọi điểm trừ $x = 1$. D. mọi điểm trừ $x = 0$ và $x = 1$.

CÁC ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG 4

ĐỀ SỐ 1 - THPT Nguyễn Trãi, Thanh Hóa

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM: (2,5 điểm).

Câu 1. [1D4-1] Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2}$ ta được:

- A. 1. B. $\frac{3}{2}$. C. $-\frac{1}{2}$. D. -2.

Câu 2. [1D4-2] Tính $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3}$ ta được:

- A. ∞ . B. $\frac{1}{8}$. C. 8. D. 2.

Câu 3. [1D4-3] Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Để $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$ thì a bằng

- A. -1. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 4. [1D4-2] Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3^n}{4 + 3^n}$ ta được:

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{3}{4}$. C. 1. D. $+\infty$.

Câu 5. [1D4-2] Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^7 - 5x^5 + 7x - 4)$ ta được:

- A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. 3. D. 2.

Câu 6. [1D4-2] Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 - 3}{n^2 - 2}$ ta được:

- A. 0. B. 7. C. ∞ . D. $-\frac{3}{2}$.

Câu 7. [1D4-3] Số nghiệm thực của phương trình $2x^3 - 6x + 1 = 0$ thuộc khoảng $(-2; 1)$ là

- A. 2. B. 0. C. 3. D. 1.

Câu 8. [1D4-2] Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n + 1}{2n^3 + 1}$ ta được:

- A. 0. B. $-\frac{1}{4}$. C. $+\infty$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 9. [1D4-2] Tính $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 4x - 3}{2x^2 - 7x + 1}$ ta được:

- A. 1. B. $\frac{5}{2}$. C. ∞ . D. 2.

Câu 10. [1D4-2] Tính $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+1}{x-1}$ ta được:

A. 2.

B. $+\infty$.C. $-\infty$.

D. 0.

II. PHẦN TỰ LUẬN: (7,5 điểm).

Câu 11. (4,5 điểm) Tìm các giới hạn sau:

a)[1D4-1] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 2n + 2}}{n^2 + 1}$.

b)[1D4-1] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-2)^3 + 8}{x}$.

c)[1D4-2] $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2 + 4x - 2})$.

Câu 12. (2,0 điểm)[1D4-3] Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{7x-10}-2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ mx+3 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x = 2$.

Câu 13. (1,0 điểm)[1D4-4] Cho phương trình $(m^4 + m + 1)x^{2010} + x^5 - 32 = 0$, m là tham số. Chứng minh rằng phương trình trên luôn có ít nhất một nghiệm dương với mọi giá trị của tham số m .

ĐỀ SỐ 2 - THPT Hoàng Thái Hiến, Vĩnh Long

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. [1D4-1] Giới hạn nào sau đây có kết quả bằng 3?

A. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x}{x-2}$.

B. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x}{x-2}$.

C. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x^2 + 3x + 6}{-x^2 + 1}$.

D. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x}{2-x}$.

Câu 2. [1D4-2] Giới hạn nào sau đây có kết quả bằng 1?

A. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$.

B. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1}$.

C. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{1 - x}$.

D. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x - 1}$.

Câu 3. [1D4-1] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 2}{7n^2 + 2n + 1}$ là

A. $-\frac{2}{7}$.

B. 5.

C. $\frac{5}{7}$.

D. $-\infty$.

Câu 4. [1D4-2] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 5 \cdot 3^n}{3^n + 2^n}$ là

A. 5.

B. 6.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Câu 5. [1D4-2] $\lim_{n \rightarrow \infty} (-2n^3 + 3n + 5)$ là

A. 0.

B. -2.

C. $+\infty$.

D. $-\infty$.

Câu 6. [1D4-1] $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ là

A. 0.

B. -1.

C. 2.

D. 5.

- Câu 7.** [2D4-2] $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{9-x^2}{x+3}$ là
 A. 2. B. -3. C. 6. D. -5.
- Câu 8.** [2D4-2] $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{15}{x^3+2}$ là
 A. 15. B. $\frac{15}{2}$. C. 0. D. $+\infty$.
- Câu 9.** [1D4-2] $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2+3x-15}{2+x}$ là
 A. -1. B. -2. C. $+\infty$. D. $-\infty$.
- Câu 10.** [1D4-3] $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+3x+1}+x)$ là
 A. 2. B. $\frac{4}{3}$. C. $-\frac{3}{2}$. D. $-\infty$.
- Câu 11.** [1D4-2] $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+5}{x-1}$ là
 A. 2. B. 5. C. $+\infty$. D. $-\infty$.
- Câu 12.** [1D4-2] $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+7}{x-2}$ là
 A. 1. B. $\frac{7}{2}$. C. $+\infty$. D. $-\infty$.
- Câu 13.** [1D4-2] Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 5 \cdot 7^n}{2^n + 7^n}$ bằng bao nhiêu?
 A. -35. B. 1. C. 5. D. -5.
- Câu 14.** [1D4-2] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+2}{x^2-1}$ bằng bao nhiêu?
 A. $\frac{1}{2}$. B. $-\infty$. C. $+\infty$. D. $\frac{2}{7}$.

II. PHẦN TỰ LUẬN

Câu 1. [1D4-2] Tính giới hạn của các hàm số sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^7 - 5x^5 + 7x + 4)$ b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{3 - x}$.

Câu 2. [1D4-2] Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm $x_0 = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ -x + 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$$

Câu 3. [1D4-3] Chứng minh rằng phương trình $x^4 + 5x - 3 = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-2; 0)$.

ĐỀ SỐ 3 – THPT Nguyễn Trung Trực, Bình Định
Phần trắc nghiệm:

Câu 1: [1D4-1] Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(a; b)$.
- B. Hàm số $f(x)$ được gọi là gián đoạn tại x_0 nếu x_0 không thuộc tập xác định của nó.
- C. Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 thuộc tập xác định của nó nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- D. Hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[a; b]$.

Câu 2: [1D4-2] Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 2}{\sqrt{n^4 + n^2 + 1}}$ bằng

- A. 2. B. 1. C. 0. D. -2.

Câu 3: [1D4-2] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 5x + 4}{x + 4}$ bằng

- A. 3. B. $+\infty$. C. 5. D. -3.

Câu 4: [1D4-2] Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$, a là tham số thực. Để hàm số liên tục tại

$x_0 = 1$ thì giá trị của a bằng

- A. 0. B. 2. C. -1. D. 1.

Câu 5: [1D4-2] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ bằng

- A. $+\infty$. B. -2. C. -4. D. 0.

Câu 6: [1D4-3] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{4x^2 + 1}}{2x + 3}$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\infty$. C. $-\frac{1}{2}$. D. $+\infty$.

Câu 7: [1D4-1] Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 5^n}{5^n + 1}$ bằng

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. -1. D. 0.

Câu 8: [1D4-2] Hàm số dưới đây liên tục trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = \sin \frac{\pi}{x}$. B. $y = \cot x$. C. $y = \sqrt{x - 3}$. D. $y = \frac{2x - 3}{x^2 + 4}$.

Câu 9: [1D4-1] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x^3 + 2)$ bằng

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 0. D. 2.

Câu 10: [1D4-2] Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)(2-n)}{n^2-3n+1}$ bằng

- A. 2. B. 1. C. -2. D. 4.

Câu 11: [1D4-1] Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3-5n+3}{3n^3-n}$ bằng

- A. 3. B. 0. C. $+\infty$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 12: [1D4-2] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-1}{x-2}$ bằng

- A. $+\infty$. B. 1. C. 0. D. $-\infty$.

Phần tự luận:

Đề A

Câu 1: [1D4-2] Tính các giới hạn sau a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{1-x^2}$. b) $\lim (\sqrt{n^2-n+3}-n)$.

Câu 2: [1D4-3] Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{khi } x \leq 3 \\ \frac{x^2-2x-3}{2x-6} & \text{khi } x > 3 \end{cases}$ trên $\mathbb{R}$.

Đề B

Câu 1: [1D4-2] Tính các giới hạn sau a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{16-x^2}$. b) $\lim (\sqrt{n^2+2n-1}-n)$.

Câu 2: [1D4-3] Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} 2+x & \text{khi } x \leq 2 \\ \frac{x^2-3x+2}{3x-6} & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ trên $\mathbb{R}$.

Đề C

Câu 1: [1D4-2] Tính các giới hạn sau a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-3x+2}$. b) $\lim (\sqrt{4n^2-2n+1}-2n)$.

Câu 2: [1D4-3] Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{khi } x \leq 1 \\ \frac{x^2+2x-3}{2x-2} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ trên $\mathbb{R}$.

Đề D

Câu 1: [1D4-2] Tính các giới hạn sau a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5}-3}{4-x^2}$. b) $\lim (\sqrt{n^2-n+3}-n)$.

Câu 2: [1D4-3] Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{khi } x \leq 3 \\ \frac{x^2-x-6}{2x-6} & \text{khi } x > 3 \end{cases}$ trên $\mathbb{R}$.

Đề E

Câu 1: [1D4-2] Tính các giới hạn sau a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+2}-2}{x^2-1}$. b) $\lim (\sqrt{n^2-2n}-n)$.

Câu 2: [1D4-3] Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} 3-2x & \text{khi } x \leq 4 \\ \frac{x^2-x-12}{2x-8} & \text{khi } x > 4 \end{cases}$ trên $\mathbb{R}$.

Đề F

- Câu 1:** [1D4-2] Tính các giới hạn sau a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5x-1}-3}{4-x^2}$. b) $\lim \left(\sqrt{n^2+n+1}-n \right)$.
- Câu 2:** [1D4-3] Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{khi } x \leq 4 \\ \frac{x^2-3x-4}{3x-12} & \text{khi } x > 4 \end{cases}$ trên $\mathbb{R}$.

Đề G

- Câu 1:** [1D4-2] Tính các giới hạn sau a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{9-x^2}$. b) $\lim \left(\sqrt{n^2+2n}-n \right)$.
- Câu 2:** [1D4-3] Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} 1-3x & \text{khi } x \leq 2 \\ \frac{x^2-3x+2}{3x-6} & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ trên $\mathbb{R}$.

Đề H

- Câu 1:** [1D4-2] Tính các giới hạn sau a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{9-x^2}$. b) $\lim \left(\sqrt{4n^2-n+1}-2n \right)$.
- Câu 2:** [1D4-3] Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{khi } x \leq 4 \\ \frac{x^2-5x+4}{2x-8} & \text{khi } x > 4 \end{cases}$ trên $\mathbb{R}$.

Đề I

- Câu 1:** [1D4-2] Tính các giới hạn sau a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2}-2}{x^2-4}$. b) $\lim \left(\sqrt{n^2-3n+2}-n \right)$.
- Câu 2:** [1D4-3] Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{khi } x \leq 2 \\ \frac{x^2-x-2}{2x-3} & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ trên $\mathbb{R}$.

Đề J

- Câu 1:** [1D4-2] Tính các giới hạn sau a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-4}$. b) $\lim \left(\sqrt{n^2+4n-3}-n \right)$.
- Câu 2:** [1D4-3] Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{khi } x \leq 4 \\ \frac{x^2-3x-4}{3x-12} & \text{khi } x > 4 \end{cases}$ trên $\mathbb{R}$.

Đề K

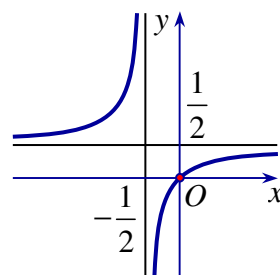
- Câu 1:** [1D4-2] Tính các giới hạn sau a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-1}-2}{x^2-1}$. b) $\lim \left(\sqrt{n^2+n+2}-n \right)$.
- Câu 2:** [1D4-3] Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{khi } x \leq 3 \\ \frac{x^2-4x+3}{2x-6} & \text{khi } x > 3 \end{cases}$ trên $\mathbb{R}$.

Đề L

- Câu 1:** [1D4-2] Tính các giới hạn sau a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1}-4}{9-x^2}$. b) $\lim \left(\sqrt{n^2+3n-1}-n \right)$.
- Câu 2:** [1D4-3] Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} 4x-1 & \text{khi } x \leq 1 \\ \frac{x^2+2x-3}{3x-3} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ trên $\mathbb{R}$.

ĐỀ SỐ 4 - THPT Như Xuân, Thanh Hóa

- Câu 1.** [1D4-3] Cho $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + ax + 5} - x) = 5$. Khi đó giá trị của a là
 A. 6. B. 10. C. 10. D. 6.
- Câu 2.** [1D4-2] Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^3 - x & \text{khi } x \geq 2 \\ x^3 - 3x & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tính giới hạn của hàm số tại $x = 2$ ta được kết quả là
 A. 2. B. 1. C. Không tồn tại. D. -2.
- Câu 3.** [1D4-1] Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2x+1}{x-1}$ ta được kết quả là
 A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 0. D. 2.
- Câu 4.** [1D4-3] Đồ thị hàm số ở hình bên là đồ thị của hàm số nào?
 A. $y = \frac{4x+1}{2x+1}$. B. $y = 2x^3 - 3x + \frac{1}{2}$.
 C. $y = \frac{x}{2x+1}$. D. $y = x^2 - 3x + 2$.
- Câu 5.** [1D4-3] Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^2 - a^2}$ được kết quả là
 A. $\frac{a-1}{2a}$. B. a . C. $a-1$. D. $a+1$.
- Câu 6.** [1D4-2] Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x-1}$ ta được kết quả là
 A. -3. B. 1. C. 3. D. -2.
- Câu 7.** [1D4-2] Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (7x^5 + 5x^2 - x + 7)$ ta được kết quả là
 A. 3. B. $-\infty$. C. $+\infty$. D. 0.
- Câu 8.** [1D4-2] Tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-3n^2 - 2n + 1)$ ta được kết quả là
 A. $+\infty$. B. 2. C. 3. D. $-\infty$.
- Câu 9.** [1D4-2] Tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^5 + 2n - 1}{n^2 + 1}$ ta được kết quả là
 A. 4. B. $+\infty$. C. $-\infty$. D. -1.
- Câu 10.** [1D4-2] Cho phương trình $2x^4 - 5x^2 + x + 1 = 0$ (1). mệnh đề nào **đúng** trong các mệnh đề sau:
 A. Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm thuộc khoảng $(0; 2)$.
 B. Phương trình (1) không có nghiệm trong khoảng $(-2; 0)$.
 C. Phương trình (1) không có nghiệm trong khoảng $(-1; 1)$.
 D. Phương trình (1) chỉ có 1 nghiệm trong khoảng $(-2; 1)$.
- Câu 11.** [1D4-2] Tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^3 - 2n^2 + 2}{n^3 + 1}$ ta được kết quả là
 A. $-\infty$. B. 3. C. $\frac{1}{2}$. D. $+\infty$.
- Câu 12.** [1D4-2] Tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n + 2 \cdot 3^n}{4^n - 5^n}$ ta được kết quả là
 A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. -1. D. 1.



- Câu 13.** [1D4-2] Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a; b]$, trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **đúng**?
- A. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục, tăng trên $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) > 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trong khoảng $(a; b)$.
- B. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) > 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trong khoảng $(a; b)$.
- C. Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(a; b)$ thì hàm số $f(x)$ phải liên tục trên $(a; b)$.
- D. Nếu $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(a; b)$.
- Câu 14.** [1D4-2] Tìm giá trị đúng của $S = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \right)$ ta được kết quả là
- A. $\sqrt{2}$. B. 2. C. $\frac{1}{2}$. D. $2\sqrt{2}$
- Câu 15.** [1D4-3] Tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+5+8+\dots+3n-1}{2n^2+3}$ ta được kết quả là
- A. $+\infty$. B. $\frac{3}{4}$. C. -1 . D. $-\infty$.
- Câu 16.** [1D4-2] Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a - x^b}{1-x}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$ ta được kết quả là
- A. ab . B. $a-b$. C. $b-a$. D. $\frac{a}{b}$.
- Câu 17.** [1D4-3] Để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 2a - \frac{7}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 0$ thì giá trị của a là
- A. 1. B. 3. C. 2. D. 1.
- Câu 18.** [1D4-2] Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4-5}{x^7+5x^5}$ ta được kết quả là
- A. 2. B. -5 C. $\frac{2}{5}$. D. 0.
- Câu 19.** [1D4-2] Hàm số $f(x) = \begin{cases} 5x^2 & \text{khi } x \neq 0 \\ -15 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ có tính chất:
- A. Liên tục tại $x = 2$ và $x = 0$.
- B. Liên tục tại $x = 2$ nhưng không liên tục tại $x = 0$.
- C. Liên tục tại mọi điểm.
- D. Liên tục tại $x = 1, x = 3, x = 0$.
- Câu 20.** [1D4-2] Để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-3x-2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ ax+1 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 2$ thì giá trị của a là
- A. 1. B. 2. C. 5. D. -3 .

ĐỀ SỐ 5 - THPT Mộ Quan A, Ninh Bình
I – PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1: [1D4-1] Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là 0 ?

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 1}{2n - 1}$. B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n + 2}{n^2 + n}$. C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n - 1}{n - 2n^3}$. D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n}{n^3 + 3n}$.

Câu 2: [1D4-3] Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là 0 ?

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 1}{3 \cdot 2^n - 3^n}$. B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3}{1 - 2^n}$. C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n^3}{n^2 + 2n}$. D.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(n-3)^2}{n - 2n^3}$.

Câu 3: [1D4-3] Trong các mệnh đề sau đây, hãy chọn mệnh đề sai

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n - 3n^3) = -\infty$. B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n}{1 - 3n^2} = +\infty$.
C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n^3}{n^2 + 2n} = -\infty$. D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n^3}{2n^3 + 5n - 2} = -\frac{3}{2}$.

Câu 4: [1D4-1] Với k là số nguyên dương, c là hằng số. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x^k}$ là

A. x_0^k . B. $+\infty$. C. 0. D. $-\infty$.

Câu 5: [1D4-3] Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là -1 ?

A. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x}$. B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$. C. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1-\sqrt{x+3}}{x^2-1}$. D. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

Câu 6: [1D4-2] Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là $-\frac{1}{2}$?

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2-3n}$. B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{-2n-n^2}$. C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^2+3}$. D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-n^3}{2n^3+1}$.

Câu 7: [1D4-1] Với số k nguyên dương. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} x^k$ là

A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. 0. D. x_0^k .

Câu 8: [1D4-2] Tính giới hạn: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right]$

A. 1. B. 0. C. $\frac{3}{2}$. D. 2.

Câu 9: [1D4-4] Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là -1 ?

A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{\sqrt{x^2-1}-x}$. B. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-4}{\sqrt{(x^2+1)(2-x)}}$.
C. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3-1}{\sqrt{x^2-1}}$. D. $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{\sqrt{8+2x}-2}{\sqrt{x+2}}$.

Câu 10: [1D4-2] Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là $+\infty$?

- A. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-3x+4}{x-2}$. B. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-3x+4}{x-2}$. C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x+4}{x-2}$. D. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x+4}{x-2}$.

Câu 11: [1D4-1] Với số k nguyên dương. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} x^k$ là

- A. x_0^k . B. 0. C. $+\infty$. D. $-\infty$.

Câu 12: [1D4-2] Giới hạn của hàm số nào dưới đây có kết quả bằng 1?

- A. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+4x+3}{x+1}$. B. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+3x+2}{x+1}$. C. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+3x+2}{1-x}$. D. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+3x+2}{x+2}$.

Câu 13: [1D4-3] Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1} = \frac{3}{2}$. B. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4} = -\frac{1}{16}$.
C. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{x^2-1} = -\frac{1}{12}$. D. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{x} = -\frac{1}{6}$.

Câu 14: [1D4-4] Tính tổng: $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$

- A. $-\frac{1}{2}$. B. 1. C. $\frac{3}{2}$. D. 2.

II – PHẦN TỰ LUẬN

Câu 15: [1D4-2] Tìm m để hàm số sau liên tục tại điểm $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2-4x+1}{x-1}, & \text{nếu } x \neq 1 \\ 5m^2-3, & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$$

Câu 16: [1D4-3] Chứng minh rằng phương trình sau có ít nhất hai nghiệm: $2x^3 - 10x - 7 = 0$.

ĐỀ SỐ 6 – THPT An Hải, Hải Phòng

A. TRẮC NGHIỆM: (0,5 điểm/ 1 câu * 6 câu = 3 điểm).

Câu 1. Giới hạn của hàm số sau đây bằng bao nhiêu: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k$ (với k nguyên dương).

- A. $+\infty$. B. 0. C. 14. D. k .

Câu 2. Giới hạn của hàm số sau đây bằng bao nhiêu: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x+2}{(x-2)^2}$.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. $+\infty$.

Câu 3. Giới hạn của hàm số sau đây bằng bao nhiêu: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+2x}-x)$.

- A. 0. B. $-\infty$. C. 1. D. 2.

Câu 4. Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{x} & \text{khi } x \geq 1 \\ \frac{x^2-x}{x-1} & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề *sai*?

- A. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$. B. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$.
C. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$. D. Không tồn tại giới hạn của hàm số $f(x)$ khi x tiến tới 1.

Câu 5. Cho các hàm số: (I) $y = \sin x$, (II) $y = \cos x$, (III) $y = \tan x$, (IV) $y = \cot x$. Trong các hàm số sau hàm số nào liên tục trên $\mathbb{R}$.

- A. (I) và (II). B. (III) và (IV).
C. (I) và (III). D. (I), (II), (III) và (IV).

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ chưa xác định tại $x=0$: $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x}$. Để $f(x)$ liên tục tại $x=0$, phải gán cho $f(0)$ giá trị bằng bao nhiêu?

- A. -3. B. -2. C. -1. D. 0.

B. TỰ LUẬN: (7 điểm)

Bài 1: (3 điểm) Tính giới hạn của các hàm số sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-4}{x+1}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{7x-10} - 2}{x-2}$

Bài 2: (2 điểm) Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 11x + 6}{x-3} & \text{khi } x \neq 3 \\ m^2 - x^2 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 3$.

Bài 3: (2 điểm) Chứng minh rằng phương trình:

- a) $x^5 + x^3 - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.
b) $\cos x + m \cos 2x = 0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m .

ĐỀ SỐ 7 - THPT Đoàn Thượng, Hải Dương

PHẦN 1 (3 điểm): Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 1: Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề:

- A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$. B. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$. C. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^4 = +\infty$. D. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = +\infty$.

Câu 2: Cho $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ hỏi $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \cdot g(x)]$ bằng bao nhiêu trong các giá trị sau:

- A. $+\infty$. B. 300. C. 20. D. $-\infty$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$, các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. Hàm số liên tục tại $x=3$. B. Hàm số liên tục tại $x=2$.
C. Hàm số liên tục tại $x=1$. D. Hàm số liên tục tại $x=4$.

Câu 4: Dãy số nào sau có giới hạn bằng $\frac{17}{3}$?

- A. $u_n = \frac{n^2 - 2n}{5n + 3n^2}$. B. $u_n = \frac{1 - 2n}{5n + 3n^2}$. C. $u_n = \frac{1 - 2n^2}{5n + 3n^2}$. D. $u_n = \frac{17n^2 - 2}{5n + 3n^2}$.

Câu 5: Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n - 2}$.

- A. 1. B. -1. C. 0. D. $+\infty$.

- Câu 6:** Tính giới hạn $\lim \frac{2^{n+1} - 3 \cdot 5^n + 3}{3 \cdot 2^n + 7 \cdot 4^n}$.
- A. -1 . B. 1 . C. $-\infty$. D. $+\infty$.
- Câu 7:** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3}$.
- A. $+\infty$. B. 2 . C. $\frac{1}{8}$. D. 8 .
- Câu 8:** Cho hàm số $f(x) = x^5 + x - 1$. Xét phương trình: $f(x) = 0$ (1), trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**?
- A. (1) có nghiệm trên khoảng $(-1; 1)$. B. (1) có nghiệm trên khoảng $(0; 1)$.
C. (1) có nghiệm trên $\mathbb{R}$. D. (1) Vô nghiệm.
- Câu 9:** Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau (với k là số nguyên dương):
- A. $\lim \frac{1}{n^k} = 0$. B. $\lim n^k = +\infty$. C. $\lim \frac{19}{n^k} = 0$. D. $\lim n^k = -\infty$.
- Câu 10:** Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau.
- A. $\lim (\sqrt{n^2 - n} + n) = +\infty$. B. $\lim (-2n^3 + 2n^2 + n - 1) = -\infty$.
C. $\lim (-2n + 1) = -1$. D. $\lim (2n^2 - 3n) = +\infty$.
- Câu 11:** Trong các hàm số sau, hàm số nào liên tục trên $\mathbb{R}$.
- A. $f(x) = x^2 - 3x$. B. $f(x) = \frac{3x+5}{x-1}$. C. $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$. D. $f(x) = \frac{1}{x}$.
- Câu 12:** Trong các phương pháp tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x} - \sqrt{x})$ dưới đây, phương pháp nào là phương pháp thích hợp?
- A. Nhân và chia với biểu thức liên hợp $(\sqrt{1+x} + \sqrt{x})$.
B. Chia cho x^2 .
C. Phân tích nhân tử rồi rút gọn.
D. Sử dụng định nghĩa với $x \rightarrow +\infty$.
- Câu 13:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 , hỏi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ bằng các giá trị nào sau đây:
- A. $f(x_0)$. B. $f(2)$. C. $f(-2)$. D. $f(3)$.
- Câu 14:** Cho $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 3$, hỏi $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)]$ bằng bao nhiêu trong các giá trị sau:
- A. 2 . B. 5 . C. 3 . D. 4 .
- Câu 15:** Cho $f(x) = \frac{x^2 - 7x}{3x}$ với $x \neq 0$ phải bổ sung thêm giá trị $f(0)$ bằng bao nhiêu thì hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$?
- A. 0 . B. $\frac{7}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $-\frac{7}{3}$.

PHẦN 2 (7 điểm): Câu hỏi tự luận.

ĐỀ CHẴN

Câu 16: (2,0 điểm). Tính giới hạn dãy số: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{n-1}$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 2^n + 7^n}{2 \cdot 7^n - 3 \cdot 4^n}$

Câu 17: (2,0 điểm) Tính giới hạn hàm số:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} (-3x^2 - 2x + 1)$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2017) \sqrt[3]{1-5x} - 2017}{x}$

Câu 18: (2,0 điểm) Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 7x - 6}{x-3} & \text{khi } x > 3 \\ x^2 + mx + 2 & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$

Câu 19: (1,0 điểm) Chứng minh rằng phương trình $x^2 \cos x + x \sin^5 x + 1 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trên $\mathbb{R}$.

ĐỀ LẺ

Câu 16: (2,0 điểm) Tính giới hạn dãy số: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{n+1}$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 3^n + 5^n}{3 \cdot 5^n - 4 \cdot 2^n}$

Câu 17: (2,0 điểm) Tính giới hạn hàm số:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} (-3x^2 - 2x + 1)$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2016) \sqrt[3]{1+3x} - 2016}{x}$

Câu 18: (2,0 điểm) Tìm các giá trị của m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ x^2 + mx + 1 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 19: (1,0 điểm) Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm biết rằng $a - 3b + 10c = 0$.

ĐỀ SỐ 8 - Nguồn Internet

ĐỀ A

Câu 1: (3đ). Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + 3n - 1}{2n^4 + 4}$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{27n^3 - 4n^2 + 5}}{n-6}$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 - n^2 + n - 6}{3 - 2n^2}$

Câu 2: (4đ). Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 2x + 3} - 2x^3}{3 - x^3}$
c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5x - 3}{x - 2}$ d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{5x+6} - 6}{\sqrt[3]{3x+2} - 2}$

Câu 3: (1,5đ). Xác định a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 2}{x+1} & \text{khi } x \neq -1 \\ ax^2 + 3x & \text{khi } x = -1 \end{cases}$ liên tục tại $x = -1$

Câu 4: (1,5đ). Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 3x - 1 = 0$ có ít nhất ba nghiệm.

ĐỀ B

Câu 1: (3đ). Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n + 2}{3n^5 + 1}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8n^3 - 2n^2 + 6}}{7 - 2n}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^3 + n - 6}{4n^2 - 3}$

Câu 2: (4đ). Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 3} - 6x}{2x - 5}$

c) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x - 7}{x - 3}$

d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} - 5}{\sqrt[3]{7x+6} - 3}$

Câu 3: (1,5đ). Xác định a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 3x^2 - ax + 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

Câu 4: (1,5đ). Chứng minh rằng phương trình $x^7 - 3x + 1 = 0$ có ít nhất ba nghiệm.

ĐỀ SỐ 9 - THPT Thị xã Quảng Trị

ĐỀ SỐ 1

Câu 1. (2,0 điểm) Tính các giới hạn

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+2}$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 8n + 5} - 2n)$.

Câu 2. (5,0 điểm) Tính các giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x + 1)$.

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$.

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} + x^2 + x - 4}{x - 1}$.

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt[3]{3x^2-3x+1}}{(x-1)^2}$.

Câu 3. (2,0 điểm) Xét tính liên tục của hàm số sau đây tại điểm đã chỉ ra

$$f(x) = \begin{cases} 4 - 3x^2 & \text{khi } x \leq -2 \\ x^3 & \text{khi } x > -2 \end{cases} \quad \text{với } x = -2$$

Câu 4. (1,0 điểm) Chứng minh phương trình $mx^7 + x^3 + 5x^2 - mx - 1 = 0$ luôn có ít nhất hai nghiệm với mọi giá trị của m .

-----HẾT-----

ĐỀ SỐ 2

Câu 1. (2,0 điểm) Tính các giới hạn

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n-2}$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n^2 + 12n + 7} - 3n)$.

Câu 2. (5,0 điểm) Tính các giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 3x + 1)$.

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} + x^2 - x - 2}{x-1}.$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{-3x^2+3x-1} + \sqrt{2x-1}}{(x-1)^2}.$$

Câu 3. (2,0 điểm) Xét tính liên tục của hàm số sau đây tại điểm đã chỉ ra

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x < 0 \\ 1 - \sqrt{x} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{với } x = 0$$

Câu 4. (1,0 điểm) Chứng minh phương trình $mx^5 + x^3 + 3x^2 - mx - 1 = 0$ luôn có ít nhất hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

-----HẾT-----

ĐỀ SỐ 3

Câu 1. (2,0 điểm) Tính các giới hạn

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n + 1}{n^2 + 2}. \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + 3n^2} - n \right).$$

Câu 2. (5,0 điểm) Tính các giới hạn

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} (4x^2 - 3x + 1).$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}.$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{x^2+3x-4}}{x-1}.$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2019x)^{2018} - (1+2018x)^{2019}}{x^2}.$$

Câu 3. (2,0 điểm) Xét tính liên tục của hàm số sau đây tại điểm đã chỉ ra

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & \text{khi } x \neq 3 \\ 9 & \text{khi } x = 3 \end{cases} \quad \text{với } x = 3$$

Câu 4. (1,0 điểm) Chứng minh phương trình $ax^2 + 3x + b = 0$ luôn có nghiệm trên $(0;1)$, biết $2a + 21b + 9 = 0$.

-----HẾT-----

ĐỀ SỐ 4

Câu 1. (2,0 điểm) Tính các giới hạn

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 1}{2n^2 - 1}. \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 - 3n^2} - n \right).$$

Câu 2. (5,0 điểm) Tính các giới hạn

$$a) \lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 4x + 1).$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}.$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} + \sqrt{3x^2+x-4}}{x-1}.$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2018x)^{2019} - (1+2019x)^{2018}}{x^2}.$$

Câu 3. (2,0 điểm) Xét tính liên tục của hàm số sau đây tại điểm đã chỉ ra

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 6 & \text{khi } x = 2 \end{cases} \quad \text{với } x = 2$$

Câu 4. (1,0 điểm) Chứng minh phương trình $3x^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm trên $(0;1)$, biết $5b + 21c + 6 = 0$.

-----HẾT-----

ĐỀ SỐ 10 - THPT Đoàn Thượng, Hải Dương (18-19)

Câu 1. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1} = \frac{3}{2}$

B. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4} = -\frac{1}{16}$

C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{x} = -\frac{1}{6}$

D. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{x^2-1} = -\frac{1}{12}$

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ là

A. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

B. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$.

C. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$.

D. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Câu 3. Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là -1 ?

A. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

B. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

C. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1-\sqrt{x+3}}{x^2-1}$.

D. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$.

Câu 4. Tính tổng: $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$

A. $\frac{1}{2}$.

B. 1.

C. 2.

D. $\frac{3}{2}$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ 3x+a & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$.

Với giá trị nào của a thì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. 0

B. 1

C. -5

D. 3

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \geq 1 \\ \frac{2x^3}{1+x} & \text{khi } 0 \leq x < 1 \\ x \sin x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

B. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

D. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Câu 7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2+1}-\sqrt{n+2}}{2n-3}$ bằng

A. $+\infty$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. 2.

D. 1.

Câu 8. Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right]$.

A. 1.

B. $\frac{3}{2}$.

C. 0.

D. 2.

Câu 9. Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2}$.

A. $I = 0$.

B. $I = 1$.

C. $I = -1$.

D. $I = 5$.

Câu 10. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

(I). $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ liên tục với mọi $x \neq 1$. (II). $f(x) = \sin x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(III). $f(x) = \frac{|x|}{x}$ liên tục tại $x = 1$.

A. Chỉ (I) và (II). B. Chỉ (I) và (III). C. Chỉ (I) đúng. D. Chỉ (II) và (III).

Câu 11. Với k là số nguyên dương, c là hằng số. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x^k}$ là

A. $-\infty$. B. 0. C. $+\infty$. D. x_0^k .

Câu 12. Hàm nào trong các hàm số sau không có giới hạn tại điểm $x = 2$

A. $y = |x-2|$. B. $y = \frac{1}{|x-3|}$. C. $y = \frac{1}{x-2}$. D. $y = \frac{1}{|x+2|}$.

Câu 13. Với k là số nguyên dương. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} x^k$ là

A. $+\infty$. B. x_0^k . C. $-\infty$. D. 0.

Câu 14. Tính giới hạn $\lim \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right]$.

A. 1. B. 2. C. $\frac{3}{2}$. D. 0.

Câu 15. Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là $+\infty$?

A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x+4}{x-2}$ B. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-3x+4}{x-2}$ C. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x+4}{x-2}$ D. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-3x+4}{x-2}$

Câu 16. Giả sử ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = b$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$. B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \cdot g(x)] = a \cdot b$.
C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = a - b$. D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = a + b$.

Câu 17. Giới hạn của hàm số nào dưới đây có kết quả bằng 1?

A. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+3x+2}{1-x}$ B. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+3x+2}{x+1}$ C. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+3x+2}{x+2}$ D. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+4x+3}{x+1}$

Câu 18. Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là $-\frac{1}{2}$?

A. $\lim \frac{n^2+n}{-2n-n^2}$. B. $\lim \frac{2n+3}{2-3n}$. C. $\lim \frac{n^2-n^3}{2n^3+1}$. D. $\lim \frac{n^3}{n^2+3}$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2-4}$. Chọn câu **đúng** trong các câu sau:

(I) $f(x)$ liên tục tại $x = 2$. (II) $f(x)$ gián đoạn tại $x = 2$.

(III) $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$.

A. Chỉ (II). B. Chỉ (I) và (III). C. Chỉ (I). D. Chỉ (II) và (III).

Câu 20. Tính giới hạn: $\lim \left[\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \right]$.

A. 1. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{3}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 21. Cho phương trình $-4x^3 + 4x - 1 = 0$. Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau:

A. Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt.

B. Phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm trong $(-2; 0)$.

C. Phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm trong $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

D. Phương trình đã cho chỉ có một nghiệm trong khoảng $(0; 1)$.

Câu 22. Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là 0?

A. $\lim \frac{2^n + 1}{3 \cdot 2^n - 3^n}$. B. $\lim \frac{1 - n^3}{n^2 + 2n}$. C. $\lim \frac{(2n+1)(n-3)^2}{n - 2n^3}$. D. $\lim \frac{2^n + 3}{1 - 2^n}$.

Câu 23. Với k là số nguyên dương chẵn. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k$ là

A. $+\infty$. B. 0. C. x_0^k . D. $-\infty$.

Câu 24. Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là 0?

A. $\lim \frac{n^2 - n + 1}{2n - 1}$. B. $\lim \frac{n^3 + 2n - 1}{n - 2n^3}$; C. $\lim \frac{n^2 - 3n + 2}{n^2 + n}$; D. $\lim \frac{2n^2 - 3n}{n^3 + 3n}$;

Câu 25. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $c^2 + a = 18$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{ax^2 + bx - cx}) = -2$. Tính

$P = a + b + 5c$.

A. $P = 5$. B. $P = 12$ C. $P = 18$ D. $P = 9$

Câu 26. Hàm số nào trong các hàm số sau liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $f(x) = \frac{3}{x-2}$ B. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ C. $f(x) = \frac{1}{x^2+2}$ D. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$

Câu 27. Trong các mệnh đề sau đây, hãy chọn mệnh đề sai

A. $\lim \frac{n^2 - 3n^3}{2n^3 + 5n - 2} = -\frac{3}{2}$.

B. $\lim \frac{n^3 - 2n}{1 - 3n^2} = +\infty$;

C. $\lim (2n - 3n^3) = -\infty$

D. $\lim \frac{1 - n^3}{n^2 + 2n} = -\infty$;

Câu 28. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} & \text{khi } x > 0 \\ a+2x & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$.

Với giá trị nào của a thì hàm số đã cho liên tục tại $x = 0$?

A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $-\frac{1}{2}$

Câu 29. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x > 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \\ 4x + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau

A. Hàm số đã cho liên tục trên nửa khoảng $[0; +\infty)$.

B. Hàm số đã cho liên tục trên nửa khoảng $(-\infty; 0]$.

C. Hàm số gián đoạn tại $x = 0$.

D. Hàm số đã cho liên tục tại $x = 2$

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 5x + 6}$. Khi đó hàm số $y = f(x)$ liên tục trên các khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty; 3)$. B. $(-3; 2)$. C. $(2; 3)$. D. $(-2; +\infty)$.

-----HẾT-----

Chủ đề 5

ĐẠO HÀM

Vấn đề 1. ĐẠO HÀM VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

① Mở đầu

Nhiều bài toán của toán học, vật lí, hóa học, sinh học, kĩ thuật, ... đòi hỏi phải tìm giới hạn dạng:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

trong đó $f(x)$ là một hàm số đã cho của đối số x .

Qua Đại số và Giải tích 11, ta biết định nghĩa và kí hiệu của số gia đối số và số gia tương ứng của hàm số:

- Số gia đối số là $\Delta x = x - x_0$
- Số gia tương ứng của hàm số là $\Delta y = f(x) - f(x_0)$

Ta sẽ dùng khái niệm và kí hiệu đó viết các giới hạn trên: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

② Định nghĩa đạo hàm

Cho hàm số $y = f(x)$, xác định trên $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$

Giới hạn, nếu có, của tỉ số giữa số gia của hàm số và số gia của đối số tại x_0 , khi số gia đối số dần tới 0, được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 .

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 được kí hiệu là $y'(x_0)$ hoặc $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ hoặc } y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

③ Đạo hàm một bên

a. Đạo hàm bên trái của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 , kí hiệu là $f'(x_0^-)$ được định nghĩa là

$$f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

trong đó $x \rightarrow x_0^-$ được hiểu là $x \rightarrow x_0$ và $x < x_0$.

b. Đạo hàm bên phải của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 , kí hiệu là $f'(x_0^+)$ được định nghĩa là

$$f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

trong đó $x \rightarrow x_0^+$ được hiểu là $x \rightarrow x_0$ và $x > x_0$.

Định lí: Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thuộc tập xác định của nó, nếu và chỉ nếu $f'(x_0^-)$ và $f'(x_0^+)$ tồn tại và bằng nhau. Khi đó ta có: $f'(x_0) = f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$.

④ Đạo hàm trên một khoảng

Định nghĩa:

a. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm trên khoảng đó.

b. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên đoạn $[a; b]$ nếu nó có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và có đạo hàm bên phải tại a , đạo hàm bên trái tại b .

Qui ước: Từ nay, khi ta nói hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm, mà không nói rõ trên khoảng nào, thì điều đó có nghĩa là đạo hàm tồn tại với mọi giá trị thuộc tập xác định của hàm số đã cho.

⑤ Quan hệ giữa sự tồn tại của đạo hàm và tính liên tục của h.số

Định lý: Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

Chú ý: 1. Đảo lại không đúng, tức là một hàm số liên tục tại điểm x_0 có thể không có đạo hàm tại điểm đó

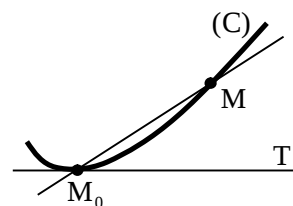
2. Như vậy, hàm số không liên tục tại x_0 thì không có đạo hàm tại điểm đó.

⑥ Ý nghĩa của đạo hàm

1. Ý nghĩa hình học

a. Tiếp tuyến của đường cong phẳng:

Cho đường cong phẳng (C) và một điểm cố định M_0 trên (C) , M là điểm di động trên (C) . Khi đó M_0M là một cát tuyến của (C) .

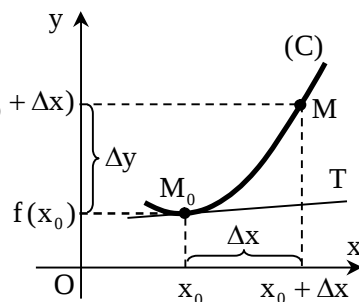


Định nghĩa: Nếu cát tuyến M_0M có vị trí giới hạn M_0T khi điểm M di chuyển trên (C) và dần tới điểm M_0 thì đường thẳng M_0T được gọi là tiếp tuyến của đường cong (C) tại điểm M_0 . Điểm M_0 được gọi là tiếp điểm.

b. Ý nghĩa hình học của đạo hàm:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $f(x_0 + \Delta x)$ có đạo hàm tại $x_0 \in (a; b)$, gọi (C) là đồ thị hàm số đó.

Định lý 1: Đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T của (C) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$



c. Phương trình của tiếp tuyến:

Định lý 2: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ là

$$y - y_0 = f'(x)(x - x_0)$$

2. Ý nghĩa vật lý

a. **Vận tốc tức thời:** Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình: $s = f(t)$, với $f(t)$ là hàm số có đạo hàm. Khi đó, vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t_0 là đạo hàm của hàm số $s = f(t)$ tại t_0 .

$$v(t_0) = s'(t_0) = f'(t_0)$$

b. **Cường độ tức thời:** Điện lượng Q truyền trong dây dẫn xác định bởi phương trình: $Q = f(t)$, với $f(t)$ là hàm số có đạo hàm. Khi đó, cường độ tức thời của dòng điện tại thời điểm t_0 là đạo hàm của hàm số $Q = f(t)$ tại t_0 .

$$I(t_0) = Q'(t_0) = f'(t_0)$$

Dạng 1. Tìm số gia của hàm số

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Để tính số gia của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 tương ứng với số gia Δx cho trước ta áp dụng công thức tính sau: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

B. BÀI TẬP MẪU

VD 1. Tìm số gia của hàm số $y = 2x^2 - 3x + 5$, tương ứng với sự biến thiên của đối số:

- a) Từ $x_0 = 1$ đến $x_0 + \Delta x = 2$ b) Từ $x_0 = 2$ đến $x_0 + \Delta x = 0,9$
 c) Từ $x_0 = 1$ đến $x = 1 + \Delta x$ d) Từ $x_0 = 2$ đến $x = 2 + \Delta x$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 2. Tính Δy và $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số sau theo x và Δx :

- a) $y = 3x - 5$ b) $y = 3x^2 + 7$ c) $y = 2x^2 + 4x - 1$ d) $y = \cos 2x$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm số gia của hàm số $y = x^2 - 1$ tại điểm $x_0 = 1$ ứng với số gia Δx , biết:

- a) $\Delta x = 1$ b) $\Delta x = -0,1$

Dạng 2. Tính đạo hàm bằng định nghĩa**A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 bằng định nghĩa ta làm như sau:

• **Cách 1:**

✓ Cho x_0 một số gia Δx và tìm số gia $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

✓ Tập tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

✓ Tìm giới hạn $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Nếu:

✦ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ tồn tại hữu hạn thì tại x_0 hàm số có đạo hàm là $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

✦ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ không tồn tại hữu hạn thì tại x_0 hàm số không có đạo hàm.

• **Cách 2:**

✓ Tính $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

✦ Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ tồn tại hữu hạn thì tại x_0 hàm số có đạo hàm là

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

✦ Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ không tồn tại hữu hạn thì tại x_0 hàm số không có đạo hàm.

B. BÀI TẬP MẪU

VD 3. Dùng định nghĩa để tính đạo hàm hàm số $y = x^2 - 3x + 2$ tại $x = 2$.

Lời giải

Cho biến số một số gia $\Delta x \neq 0$ tại $x = 2$.

Ta có $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 2 - (x^2 - 3x + 2) = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3\Delta x$.

Suy ra $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x - 3$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2x + \Delta x - 3) = 2x - 3$, suy ra $f'(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$.

VD 4. Tính đạo hàm của hàm số $y = x^2 - 2x + 4$ tại $x_0 = 2$

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 2. Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm x_0 :

a) $y = 2x + 1$ tại $x_0 = 2$

b) $y = x^2 + x$ tại $x_0 = 1$

c) $y = \frac{x+1}{x-1}$ tại $x_0 = 0$

d) $y = \sqrt{2x+7}$ tại $x_0 = 1$

Bài 3. Cho hàm số: $y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

a) Chứng minh rằng $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 0$.

b) Tính đạo hàm (nếu có) của $f(x)$ tại điểm $x_0 = 0$.

Bài 4. Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 0$

Bài 5. Chứng minh rằng hàm số: $y = f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{khi } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ không có đạo hàm tại điểm $x_0 = 0$ nhưng có đạo hàm tại $x_0 = 2$.

Bài 6. Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x}{1+|x|}$ tại $x_0 = 0$.

Bài 7. Chứng minh rằng hàm số $y = \frac{x^2 - 2|x+3|}{3x-1}$ liên tục tại $x = -3$ nhưng không có đạo hàm tại điểm ấy.

Bài 8. Tìm a, b để hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 1 \\ ax+b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x = 1$.

Bài 9. Cho hàm số: $y = f(x) = \begin{cases} p \cos x + q \sin x & \text{khi } x \leq 0 \\ px + q + 1 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Chứng minh rằng với mọi cách chọn p, q hàm số không thể có đạo hàm tại điểm $x = 0$.

Bài 10. Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của mỗi hàm số sau (a là hằng số):

a) $y = ax + 3$

b) $y = \frac{1}{2}ax^2$

c) $y = \frac{1}{2x-1}$ với $x \neq \frac{1}{2}$

d) $y = \sqrt{3-x}$ với $x < 3$

Dạng 3. Quan hệ giữa liên tục và đạo hàm

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Mối quan hệ giữa liên tục và đạo hàm ta cần nhớ các kết luận sau:

- $f(x)$ liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$
- $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 \Rightarrow f(x)$ liên tục tại x_0
- $f(x)$ liên tục tại x_0 **chưa chắc** $f(x)$ có đạo hàm tại x_0

B. BÀI TẬP MẪU

- VD 8.** a) Chứng minh hàm số $y = \frac{|x|}{x+1}$ liên tục tại $x = 0$ nhưng không có đạo hàm tại $x = 0$.
 b) Chứng minh hàm số $y = \sqrt[3]{x^2}$ liên tục tại $x = 0$ nhưng không có đạo hàm tại $x = 0$.

Lời giải

a) Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x+1} = 0$; $f(0) = 0$;

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x+1} = 0.$$

Do đó $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

Tại $x = 0$ cho số gia Δx .

- $\Delta x > 0$ suy ra $0 + \Delta x > 0$ nên

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{|\Delta x|}{\Delta x + 1} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x + 1} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta x + 1} = 1.$$

- $\Delta x < 0$ suy ra $0 + \Delta x < 0$ nên

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{|\Delta x|}{\Delta x + 1} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x + 1} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{\Delta x + 1} = -1.$$

Do $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \neq \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ nên hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$.

b) Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$. Do đó $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

Tại $x = 0$ cho số gia Δx , ta có

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(0 + \Delta x)^2} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{1}{\Delta x}} = \infty.$$

Vậy hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$.

VD 9. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{|x-2|}{2x+1}$.

- a) Xét sự liên tục của hàm số tại $x_0 = 2$ b) Xét xem tại $x_0 = 2$ hàm số có đạo hàm không?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 10. Cho $y = f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{x^2+3}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$.

a) Xét sự liên tục của hàm số tại $x_0 = 0$ b) Xét xem tại $x_0 = 0$ hàm số có đạo hàm không?

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 11. CMR: hàm số $y = \frac{x^2 - 2|x+3|}{3x-1}$ liên tục tại $x = -3$ nhưng không có đạo hàm tại điểm ấy.

Bài 12. Cho hàm số: $y = f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

- a) Tính đạo hàm của hàm số tại mỗi $x \in \mathbb{R}$.
b) Chứng tỏ rằng đạo hàm $f'(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 0$.

Dạng 4. Ý nghĩa hình học của đạo hàm:
Bài toán tiếp tuyến

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

❖ **Sử dụng ý nghĩa hình học của đạo hàm**

✓ **Hệ số góc k** của cát tuyến MN với đường cong $(C): y = f(x)$, biết M, N theo

thứ tự có hoành độ là x_M, x_N được cho bởi: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M}$ với $x_N \neq x_M$

✓ $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong (C) tại $M(x_0; f(x_0))$

❖ **Tiếp tuyến của đồ thị****1. Tiếp tuyến tại một điểm:**

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị $(C): y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; y_0)$: (Xem VD47)

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Trong đó: - $M_0(x_0; y_0)$ gọi là tiếp điểm.

- $k = f'(x_0)$ là hệ số góc.

Các chú ý: - Nếu cho x_0 thì thế vào $y = f(x)$ tìm y_0 .

- Nếu cho y_0 thì thế vào $y = f(x)$ tìm x_0 .

2. Tiếp tuyến đi qua một điểm: (Xem VD450)

Để lập phương trình tiếp tuyến d với (C) biết d đi qua $A(x_A; y_A)$:

Cách 1: - Gọi $M_0(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

- Phương trình đường thẳng d qua M_0 với hệ số góc $k = f'(x_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

- $A(x_A; y_A) \in d \Rightarrow y_A - y_0 = f'(x_0)(x_A - x_0)$

- Giải phương trình trên tìm x_0 , tìm $f'(x_0)$, thế vào $y = f(x)$ tìm y_0 .

Cách 2: Dùng điều kiện tiếp xúc (Sẽ học ở lớp 12)

3. Tiếp tuyến biết hệ số góc: (Xem VD48-49)

- Giải phương trình: $f'(x) = k \Rightarrow$ các hoành độ tiếp điểm.

- Thế vào $y = f(x)$ để tìm tung độ.

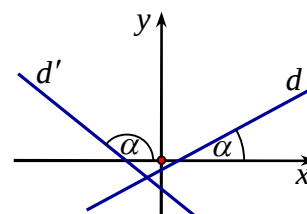
- Viết tiếp tuyến: $y - y_0 = k.(x - x_0)$

🔍 **Chú ý:**

- tiếp tuyến $d // \Delta: y = ax + b \Rightarrow k = a$

- tiếp tuyến $d \perp \Delta: y = ax + b \Rightarrow k.a = -1$

- $k = \tan \alpha$, với α là góc giữa d với tia Ox .

**B. BÀI TẬP MẪU**

VD 11. Cho đường cong $(C): y = x^3$ và hai điểm $A(1; 1)$ và $B(1 + \Delta x; 1 + \Delta y)$ trên (C) .

a) Tính hệ số góc của cát tuyến AB với Δx lần lượt là 0,1 và 0,01

b) Tìm hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại A .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 13. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$, biết:

- a) Tiếp điểm có hoành độ bằng -1 .
- b) Tiếp điểm có tung độ bằng 8 .
- c) Hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3 .

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Bài 13.** Cho Parabol $y = x^2$ và hai điểm $A(2; 4)$ và $B(2 + \Delta x; 4 + \Delta y)$ trên parabol đó.
- Tính hệ số góc của cát tuyến AB biết Δx lần lượt bằng 1; 0,1 và 0,001.
 - Tính hệ số góc của tiếp tuyến của parabol đã cho tại điểm A .
- Bài 14.** Tìm hệ số góc của cát tuyến MN với đường cong (C) , biết:
- $(C): y = x^2 - 2x$ và hoành độ M, N theo thứ tự là $x_M = 2, x_N = 1$.
 - $(C): y = \frac{x^2 + x + 1}{x}$ và hoành độ M, N theo thứ tự là $x_M = 1, x_N = 3$.
- Bài 15.** Viết phương trình tiếp tuyến của đường hypebol $y = \frac{1}{x}$, biết:
- Tại điểm $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.
 - Tiếp điểm có hoành độ bằng -1 .
 - Hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}$.
- Bài 16.** Cho đường cong $(C): y = \sqrt{x}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) :
- Biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng 1.
 - Biết tiếp tuyến song song với $\Delta: x - 4y + 3 = 0$.
- Bài 17.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số:
- $y = \frac{x-1}{x+1}$, biết hoành độ tiếp điểm là $x_0 = 0$.
 - $y = \sqrt{x+2}$, biết tung độ tiếp điểm là $y_0 = 2$.
- Bài 18.** Cho hai hàm số $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ và $y = \frac{x^2}{\sqrt{2}}$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của mỗi hàm số đã cho tại giao điểm của chúng. Tính góc giữa hai tiếp tuyến kẻ trên.
- Bài 19.** Cho parabol $(P): y = x^2$. Gọi M_1 và M_2 là hai điểm thuộc (P) lần lượt có hoành độ $x_1 = -2$ và $x_2 = 1$. Hãy tìm trên (P) một điểm E sao cho tiếp tuyến tại E song song với cát tuyến M_1M_2 . Viết phương trình tiếp tuyến đó.
- Bài 20.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị, biết rằng tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $\Delta: 3x - 5y - 2018 = 0$.
- Bài 21.** Viết phương trình tiếp tuyến với $(P): y = x^2$, biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm $A(0; -1)$.
- Bài 22.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) , biết rằng tiếp tuyến đó đi qua $A(0; 3)$.

- Bài 23.** Cho hàm số $(C_m): y = f(x) = -x^4 - mx^2 + m + 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các tiếp tuyến của (C_m) tại $A(1; 0)$ và $B(-1; 0)$ vuông góc với nhau.
- Bài 24.** Cho h.số $y = \cos^2 x + m \sin x$ (m là tham số) có đồ thị (C) . Tìm m trong mỗi trường hợp sau:
 a) Tiếp tuyến của (C) tại điểm có $x = \pi$ có hệ số góc bằng 1.
 b) Tiếp tuyến của (C) tại các điểm có các hoành độ $x = -\frac{\pi}{4}$ và $x = \frac{\pi}{3}$ song song hoặc trùng nhau.
- Bài 25.** Tìm giao điểm của hai đường cong $(P): y = x^2 - x + 1$ và $(H): y = \frac{1}{x+1}$. Chứng minh rằng hai đường cong đó có tiếp tuyến chung tại giao điểm của chúng.
- Bài 26.** Cho parabol $(P): y = x^2$. Viết phương trình tiếp tuyến với (P) , biết:
 a) Tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = 4x + 3$.
 b) Tiếp tuyến đi qua điểm $A(0; -1)$.

Dạng 5. Ý nghĩa Vật lí của đạo hàm cấp 1

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Cần nhớ các kết quả sau:

- ✓ Nếu một chất điểm chuyển động với phương trình $s = s(t)$ thì **vận tốc tức thời** của chất điểm đó tại thời điểm t_0 là $v(t_0) = s'(t_0)$.
- ✓ Một dòng điện có điện lượng là $Q = Q(t)$ thì **cường độ tức thời** của dòng điện tại thời điểm t_0 là $I(t_0) = Q'(t_0)$.

B. BÀI TẬP MẪU

VD 14. Một chất điểm chuyển động có phương trình là $s = f(t) = t^2 + 2t + 3$ (s,m)

- a) Tính đạo hàm của hàm số $f(t)$ tại thời điểm t_0 .
 b) Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 5$.

.....

.....

.....

.....

.....

VD 15. Cho biết điện lượng trong một dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số $Q = 5t + 3$ (t tính bằng giây, Q tính bằng culông). Tính cường độ của dòng điện trong dây dẫn tại $t = 8$.

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Bài 27.** Một viên đạn được bắn lên từ vị trí M cách mặt đất 1 m , theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu là $v_0 = 196\text{ m/s}$ (bỏ qua sức cản của không khí)
- a) Tìm thời điểm t_0 mà tại đó vận tốc của viên đạn bằng 0 . Khi đó viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét?
- b) Sau khoảng bao nhiêu giây (kể từ lúc bắn) viên đạn rơi xuống mặt đất? (lấy $g = 9,8\text{ m/s}^2$)
- Bài 28.** Một vật rơi tự do có phương trình chuyển động $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9,8\text{ m/s}^2$ và t được tính bằng giây.
- a) Tìm vận tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian từ t đến $t + \Delta t$ với độ chính xác đến $0,001$, biết Δt lần lượt nhận các giá trị $0,1$; $0,01$; $0,001$.
- b) Tìm vận tốc tại thời điểm $t = 5$ giây.
- Bài 29.** Một chiếc xe chạy được quãng đường s (km) sau t (giờ) được tính bởi $s = t^2 + 3t - 2$. Hãy tính vận tốc tức thời của xe đó sau khi chạy được 4 giờ.

VẤN ĐỀ 2. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

① Đạo hàm của hàm tổng, hiệu, tích thường, hàm hợp

- 1) $(u - v + w)' = u' - v' + w'$ 2) $(ku)' = k.u'$, với k là hằng số.
- 3) $(u.v)' = u'v + v'u$ 4) $(u.v.w)' = u'vw + uv'w + uvw'$
- 5) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ 6) $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ 7) $y'_x = y'_u.u'_x$

② Bảng đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản

Đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản	Đạo hàm của các hàm số hợp
$(C)' = 0$, C hằng số	
$(x)' = 1$	
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}$	$(u^\alpha)' = \alpha.u^{\alpha-1}.u'$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u'.\cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u'.\sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u)$
$(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$(\cot u)' = \frac{-u'}{\sin^2 u} = -u'(1 + \cot^2 u)$

Dạng 1. Tìm đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương của các hàm số
Đạo hàm của hàm số hợp

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Sử dụng các quy tắc, các công thức tính đạo hàm của một số hàm số trong phần tóm tắt lý thuyết để tính.

- 📌 **Chú ý:**
- ♦ Một số bài toán ta cần rút gọn trước để việc tính đạo hàm sẽ đơn giản hơn.
 - ♦ Sau khi tính đạo hàm xong, rút gọn để đưa về kết quả đẹp hơn (nếu được).

B. BÀI TẬP MẪU

VD 16. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^7 - 3x^4 + 4x^2 - 4\sqrt{x} + 4$

b) $y = 2x^4 + \frac{3}{x} + 10x - 25$

c) $y = (x^2 - x + 1)(-2x^2 + 3x + 1)$

d) $y = (2\sqrt{x} + 1)(4\sqrt{x} - 3)$

e) $y = \frac{3x - 1}{4x + 5}$

f) $y = \frac{2x^2 - 3x + 7}{x^2 + 2x + 3}$

VD 17. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (2x^2 + 3\sqrt{x})^{2020}$

b) $y = \sqrt{4x^3 + 3x^2 + 2}$

c) $y = \frac{5}{(2\sqrt{x} + 3)^4}$

d) $y = (2x + 3)^{21} (x - 4)^{23}$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 30. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau (a là hằng số):

a) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + a^3$

b) $y = \frac{1}{(x^2 - x + 1)^5}$

c) $y = 3x^5(8 - 3x^2)$

d) $y = (x+1)(x+2)(x+3)$

e) $y = \frac{2x}{x^2 - 1}$

f) $y = \frac{5x - 3}{x^2 + x + 1}$

g) $y = \frac{1}{x\sqrt{x}}$

h) $y = \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x}}$

i) $y = \sqrt{2 - 5x - x^2}$

j) $y = x^2 + x\sqrt{x} + 1$

k) $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$

l) $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

VD 19. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } y = \frac{\sin x}{1 + \cos x} & \text{b) } y = \sqrt{1 + \cos^2 \frac{x}{2}} & \text{c) } y = \left(\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \right)^{20} & \text{d) } y = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \\ \text{e) } y = x \sin x + \cos x & \text{f) } y = 3 \tan x + \tan 3x + \tan^3 x + \tan x^2 & \text{g) } y = x \cot(x^2 - 1) & \\ \text{h) } y = \cot^3 2x + 3 \cot 2x & \text{i) } y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} & \text{j) } y = \frac{\sin^2 2x + 4 \cos^2 x - 4}{\sin^2 2x - 4 \cos^2 x} & \end{array}$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 31. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a) $y = 5\sin x - 3\cos x$

b) $y = \sin(x^2 - 3x + 2)$

c) $y = \cos\sqrt{2x+1}$

d) $y = \sin 3x \cdot \cos 5x$

e) $y = \sqrt{1+2\tan x}$

f) $y = \tan 3x - \cot 3x$

g) $y = 4\sin x - 3\cos x$

h) $y = 4\sin^2 x - 3\cos^4 x$

i) $y = \frac{x}{1-\cos x}$

j) $y = \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$

k) $y = \frac{\cos x}{\sin x + 1}$

l) $y = 2x \cot x + x^2$

m) $y = \sqrt{1+2\tan x}$

n) $y = \sin 3x \cdot \cos 4x$

o) $y = 2\cos\frac{x}{2} - \sin 2x + \cos(x^2)$

p) $y = \sin^2 x \cdot \cos^3 x$

q) $y = \tan^3\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

r) $y = \sin^2[\cos^2(\tan x)]$

u) $y = \cot^2\sqrt{x^2+1}$

v) $y = \sin^3\sqrt{x^2+1}$

w) $y = \sin^2(\cos 3x)$

Bài 32. Cho hàm số $y = f(x) = x^3$ và $y = g(x) = 4x + \sin\frac{\pi x}{2}$. Tính tổng $f'(1) + g'(1)$?

Bài 33. Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x}}}$, với $x \in (0; \pi)$

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

“Cho hàm số $y = f(x)$, hãy giải phương trình $g(y, y') = 0$ ”

Bước 1. Tính đạo hàm y' .

Bước 2. Chuyển phương trình $g(y, y') = 0$ về phương trình đại số thông thường để giải.

Chú ý: Cho tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$)

$$\mathbf{1/} \quad f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \quad \mathbf{2/} \quad f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{3/} \quad f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \quad \mathbf{4/} \quad f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

VD 20. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x - 2$. Tìm x sao cho: a) $y' \leq -2$ b) $y' > 10$

VD 21. Giải các bất phương trình:

a) $y' < 0$ với $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

b) $y' \leq 0$ với $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$

- VD 22.** a) Cho $y = \sin 2x - 2 \cos x$. Hãy giải phương trình $y' = 0$.
 b) Cho $y = 3 \sin 2x + 4 \cos x + 12x$. Hãy giải phương trình $y' = 2$.

- VD 23.** Cho hàm số $f(x) = \frac{mx^3}{3} - 3x^2 + mx - 5$. Xác định m để $f'(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Ta có $f'(x) = mx^2 - 6x + m$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow mx^2 - 6x + m > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. (*)

• $m = 0$, bất phương trình trở thành $-6x > 0 \Leftrightarrow x < 0$: không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

• $m \neq 0$. Khi đó (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 9 - m^2 < 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \vee m > 3 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3$.

Vậy $m > 3$ thỏa yêu cầu bài toán.

- VD 24.** Cho hàm số: $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + mx - 3$. Tìm m để:

- a) $f'(x)$ là bình phương của một nhị thức bậc nhất.
 b) $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
 c) $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt đều dương.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 34. Tìm các nghiệm của phương trình sau:

a) $f'(x) = 0$ với $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 6x - 1$.

b) $f'(x) = -5$ với $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 3$.

Bài 35. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Hãy giải các bất phương trình sau: a) $f'(x) > 0$ b) $f'(x) \leq 3$

Bài 36. Giải phương trình $y' = 0$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $y = \sin 2x - 2 \cos x$

b) $y = \cos^2 x + \sin x$

c) $y = \cos^2 x + \sin x$

d) $y = \tan x + \cot x$

e) $y = 3 \cos x + 4 \sin x + 5x$

f) $y = 1 - \sin(\pi + x) + 2 \cos\left(\frac{2\pi + x}{2}\right)$

Bài 37. Cho hàm số $y = mx^3 + x^2 + x - 5$. Tìm m để:

a) y' bằng bình phương của một nhị thức bậc nhất.

b) y' có hai nghiệm trái dấu.

c) $y' > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Dạng 4. Sử dụng đạo hàm chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Ta đã biết nếu một hàm số không đổi trong khoảng $(a; b)$ thì đạo hàm luôn triệt tiêu trong khoảng đó. Đảo lại ta có định lý sau:

“Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trong khoảng $(a; b)$ và $f'(x) = 0, \forall x \in (a; b)$ thì hàm số $y = f(x)$ không đổi trong khoảng $(a; b)$ ”

Từ đó ta thực hiện các dạng toán:

Dạng 1. Chứng minh rằng: $A(x) = c, \forall x \in D$.

Ta thực hiện các bước:

Bước 1. Tính $A'(x)$, rồi khẳng định $A'(x) = 0, \forall x \in D$.

Bước 2. Chọn $x_0 \in D \Rightarrow A(x_0) = c$.

Dạng 2. Tìm điều kiện của tham số để $A(x)$ không phụ thuộc vào x .

Ta thực hiện các bước:

Bước 1. Tính $A'(x)$, rồi tìm điều kiện để $A'(x) = 0, \forall x$.

Bước 2. Kết luận.

B. BÀI TẬP MẪU

VD 25. Cho hai hàm số $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ và $g(x) = \frac{1}{4} \cos 4x$.

Chứng minh $f'(x) = g'(x)$. Nhận xét?

VD 26. Chứng minh rằng hàm số $y = \frac{\sin^4 x + 3\cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x + 3\cos^4 x - 1}$ có đạo hàm không phụ thuộc vào x .

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 38. Chứng minh rằng:a) Hàm số $y = \tan x$ thỏa mãn hệ thức $y' - y^2 - 1 = 0$.b) Hàm số $y = \cot 2x$ thỏa mãn hệ thức $y' + 2y^2 + 2 = 0$.**Bài 39.** Chứng minh với mọi x thuộc tập xác định:a) Nếu $f(x) = 2\cos^2(4x-1)$ thì $|f(x)| \leq 8$. Tìm giá trị của x để đẳng thức xảy ra.b) Nếu $f(x) = \tan 3x$ thì $f'(x) \geq 3$. Tìm giá trị của x để đẳng thức xảy ra.**Bài 40.** Chứng minh rằng với mọi x ta đều có:

$$\cos^2(x-a) + \sin^2(x-b) - 2\cos(x-a)\sin(x-b)\sin(a-b) = \cos^2(a-b)$$

Bài 41. Chứng minh rằng biểu thức $A = \sin^2\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin^2 x + \sin^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$ không phụ thuộc vào x .**Bài 42.** Chứng minh rằng hàm số sau có đạo hàm không phụ thuộc x :a) $y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x$ b) $y = \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) - 2\sin^2 x$

Vấn đề 3. VI PHÂN – ĐẠO HÀM CẤP CAO

A. VI PHÂN

① Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$ và có đạo hàm tại $x \in (a; b)$.

Cho số gia Δx tại x sao cho $x + \Delta x \in (a; b)$.

Ta gọi tích $f'(x) \cdot \Delta x$ (hoặc $y' \cdot \Delta x$) là vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại x ứng với số gia Δx và ký hiệu là dy hoặc $df(x)$. Như vậy, ta có:

$$dy = y' \Delta x \text{ hoặc } df(x) = f'(x) \Delta x$$

Áp dụng: Với hàm số $y = x$, ta được: $dx = (x)' \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$

Vậy ta có: $dy = y' dx$ hoặc $df(x) = f'(x) dx$.

② Ứng dụng của vi phân vào phép tính gần đúng

Theo định nghĩa đạo hàm, ta có: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Do đó, với $|\Delta x|$ đủ nhỏ thì:

$$f'(x_0) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} \Leftrightarrow \Delta y \approx f'(x_0) \Delta x \Leftrightarrow f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \Delta x$$

$$\Leftrightarrow f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x$$

Đó là công thức tính gần đúng đơn giản nhất.

B. ĐẠO HÀM CẤP CAO**① Định nghĩa**

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$.

✓ Đạo hàm của hàm số $f'(x)$, nếu có, được gọi là **đạo hàm cấp hai** của hàm số $f(x)$.

Kí hiệu là y'' hay $f''(x)$.

✓ Tương tự, đạo hàm của hàm số $f''(x)$, nếu có, được gọi là **đạo hàm cấp ba** của hàm số $f(x)$.

Kí hiệu là y''' hay $f'''(x)$.

✓ Đạo hàm của hàm số $f'''(x)$, nếu có, được gọi là **đạo hàm cấp bốn** của hàm số $f(x)$.

Kí hiệu là $y^{(4)}$ hay $f^{(4)}(x)$.

✓ Tổng quát, **đạo hàm của đạo hàm cấp $n-1$ được gọi là đạo hàm cấp n của hàm số $y = f(x)$.**

Kí hiệu là $y^{(n)}$ hay $f^{(n)}(x)$.

② Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình: $s = f(t)$ với $f(t)$ là hàm số có đạo hàm.

Khi đó, gia tốc tức thời (γ) của chuyển động tại thời điểm t là đạo hàm cấp hai của hàm số $s = f(t)$ tại t là $\gamma(t) = f''(t)$.

Dạng 1. Tìm vi phân của hàm số**A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

• Tính vi phân của hàm số $f(x)$ tại x_0 cho trước:

✓ Tính đạo hàm của hàm số tại x_0

✓ Suy ra vi phân của hàm số tại x_0 ứng với số gia Δx là $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$

• Tính vi phân của hàm số $f(x)$:

✓ Tính đạo hàm của hàm số

✓ Suy ra vi phân của hàm số là $dy = df(x) = f'(x)dx$

B. BÀI TẬP MẪU

VD 27. Tính số gia và vi phân của các hàm số

a) $y = f(x) = 3x^2 - x$ tại điểm $x = 1$ ứng với $\Delta x = 0,01$.

b) $y = f(x) = \tan x$ tại điểm $x = \frac{\pi}{3}$ ứng với $\Delta x = \frac{\pi}{180}$.

Lời giải

a) Số gia $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 3(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x) - 3x^2 + x = (6x - 1)\Delta x + 3(\Delta x)^2$.

Tại điểm $x = 1$ ứng với $\Delta x = 0,01$ thì $\Delta y = 0,05 + 0,0003 = 0,0503$.

Vi phân $dy = (6x - 1)\Delta x = 5(0,01) = 0,05$.

b) Số gia $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \tan(x + \Delta x) - \tan x$.

Tại điểm $x = \frac{\pi}{3}$ ứng với $\Delta x = \frac{\pi}{180}$ thì $\Delta y = \tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\right) - \tan \frac{\pi}{3}$.

Vi phân $dy = (1 + \tan^2 x)\Delta x = (1 + 3) \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{45} \approx 0,0698$.

VD 28. Cho hàm số $f(x) = 6x^3 - 2x^2 + 4x - 1$.

Tính vi phân của hàm số tại điểm $x_0 = 1$, ứng với số gia $\Delta x = 0,01$.

VD 29. Tìm vi phân của hàm số $y = f(x) = \sin 3x \cdot \cos 2x$.

VD 30. Bài 38. Chứng minh

a) $\sqrt{1-x}dy - dx = 0$ với $y = -2\sqrt{1-x}$.

b) $(x+2y)dx - xdy = 0$ với $y = 2x^2 - x$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 43. Tính vi phân của hàm số $y = \sin 2x$ tại điểm $x = \frac{\pi}{3}$ ứng với a) $\Delta x = 0,01$ b) $\Delta x = 0,001$

Bài 44. Tính vi phân của mỗi hàm số sau:

a) $y = x^2 - x\sqrt{x} + x + 8$

b) $y = \sqrt{ax+b}$ (với a, b là hằng số)

c) $y = \tan^2(3x) - \cot(3x^2)$

d) $y = \sqrt{\cos^2 2x + 1}$

Dạng 3. Tính đạo hàm cấp cao của hàm số
A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Áp dụng trực tiếp định nghĩa để tính đạo hàm cấp cao:

$$y'' = (y')'; y''' = (y'')'; y^{(4)} = (y''')'; y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$$

B. BÀI TẬP MẪU

VD 33. Tính đạo hàm cấp ba của hàm số $y = x \sin x + \cos x$

.....

.....

.....

.....

.....

VD 34. Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x+1}$. Tìm x sao cho $y'' = -10$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 46. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

- a) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ b) $y = \frac{x-3}{x-2}$ c) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x-1}$ d) $y = x \cdot \sin x$
- e) $y = x\sqrt{1-x^2}$ f) $y = \cos^2 x$ g) $y = x\sqrt{1+x^2}$

Bài 47. a) Cho $f(x) = (x+10)^6$. Tính $f''(2)$.

b) Cho $f(x) = \sin 3x$. Tính $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $f''(0)$, $f''\left(\frac{\pi}{18}\right)$

Bài 48. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau đến cấp cho kèm theo:

- a) $f(x) = x^4 - \cos 2x$, $f^{(4)}(x)$ b) $f(x) = \cos^2 x$, $f^{(5)}(x)$
- c) $f(x) = (x+10)^6$, $f^{(n)}(x)$ d) $f(x) = \sin 2x$, $f^{(5)}(x)$

Dạng 5. Tìm công thức đạo hàm cấp n

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Với hàm số $y = f(x)$, tìm được công thức $f^{(n)}(x)$ ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Tính $f'(x)$, $f''(x)$ đôi khi cần tính tới $f'''(x)$, $f^{(4)}(x)$.

Bước 2. Dự đoán công thức tổng quát $f^{(n)}(x)$.

Bước 3. Chứng minh công thức dự đoán bằng phương pháp qui nạp.

B. BÀI TẬP MẪU

VD 36. Tính đạo hàm cấp n của hàm số: $y = \sin x$, với $n \in \mathbb{N}^*$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 37. Tính đạo hàm cấp n của hàm số: $y = \frac{1}{ax+b}$, với $a, b \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{N}^*$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 51. Chứng minh rằng: Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$:

- | | |
|---|--|
| a) Nếu $f(x) = \cos x$ thì $f^{(4n)}(x) = \cos x$ | b) Nếu $y = \sin x$ thì $y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ |
| c) Nếu $y = \sin^2 x$ thì $y^{(n)} = -2^{4n-1} \cos 2x$ | d) Nếu $y = \frac{1}{x+1}$ thì $y^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$ |

Bài 52. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau:

- | | | | |
|----------------------|---------------------------------|-------------------|---|
| a) $y = \frac{1}{x}$ | b) $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ | c) $y = \sin^3 x$ | d) $y = \sin ax \cdot \sin bx$ (a, b là hằng số) |
|----------------------|---------------------------------|-------------------|---|

VD 40. Cho hàm số $y = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}$. Chứng minh rằng:

a) $2\sqrt{x^2+1}.y' = y$

b) $4(1+x^2)y'' + 4xy' - y = 0$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 53. Chứng minh rằng:

a) Nếu $y = \cot x$ thì $y + y' \sin x + \tan \frac{x}{2} = 0$

b) Nếu $y = \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x}$ thì $f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$

c) Nếu $y = -\frac{1}{3}\cot^3 x + \cot x + x$ thì $y' = \cot^4 x$

d) Nếu $y = \frac{x-3}{x+4}$ thì $2(y')^2 = (y-1)y''$

e) $y'' + y = 0$ với $y = \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x \cos x}$.

f) $2(y')^2 = (y-1)y''$ với $y = \frac{x-3}{x+4}$.

g) $y^{(4)} + 2xy''' - 4y'' = 40$ với $y = (x^2 - 1)^2$.

h) $y^3 y'' + 1 = 0$ với $y = \sqrt{2x - x^2}$.

i) $4(x^2 + 1)y'' + 4xy' - y = 0$ với $y = \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$.

j) $(1 + x^2)y'' + xy' - k^2 y = 0$ với $y = (x + \sqrt{x^2 + 1})^k$.

Vấn đề 4. SỬ DỤNG ĐẠO HÀM TRONG CÁC BÀI TOÁN CÓ CHỨA C_n^k

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

✓ Công thức khai triển nhị thức Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

$$(a-b)^n = (-1)^k \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + (-1)^n C_n^n b^n$$

✓ Tính chất:

$$\boxed{C_n^k = C_n^{n-k}} \quad (0 \leq k \leq n); \quad \boxed{C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k} \quad (0 \leq k \leq n); \quad \boxed{C_n^0 = C_n^n = 1}$$

Phương pháp:

- Viết khai triển Newton của $(ax+b)^n$.
- Đạo hàm 2 vế một số lần thích hợp.
- Chọn giá trị x sao cho thay vào ta được đẳng thức phải chứng minh.

B. BÀI TẬP MẪU

VD 41. Tính tổng

a) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n$.

b) $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \dots + (-1)^{n-1} nC_n^n$.

a) Xét khai triển nhị thức New-ton của $(1+x)^n$, ta có

Lấy đạo hàm hai vế theo biến x , ta được

Cho $x = 1$, ta được

Vậy $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = n.2^{n-1}$.

b) Xét khai triển nhị thức New-ton của $(1-x)^n$, ta có

Lấy đạo hàm hai vế theo biến x , ta được

hay

Cho $x = 1$, ta được

$$\text{Vậy } C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \dots + (-1)^{n-1} nC_n^n = 0.$$

VD 42. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh các hệ thức sau:

a) $C_n^1 + 2.C_n^2 + 3.C_n^3 + \dots + n.C_n^n = n.2^{n-1}$

b) $1.2C_n^2 + 2.3C_n^3 + 3.4C_n^4 + \dots + n(n-1)C_n^n = n(n-1).2^{n-2}$

c) $2.C_n^0 + 3.C_n^1 + 4.C_n^2 + \dots + (n+2)C_n^n = (n+4).2^{n-1}$

Vấn đề 5. DÙNG ĐỊNH NGHĨA ĐẠO HÀM ĐỂ TÌM GIỚI HẠN

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- **Bài toán 1.** Ta có thể sử dụng định nghĩa của đạo hàm: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(0)}{x - x_0}$ để tính các giới hạn có dạng vô định. Bằng cách viết giới hạn cần tìm thành dạng $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(0)}{x - x_0}$, sau đó tính đạo hàm của hàm $f(x)$ tại điểm x_0 rồi áp dụng định nghĩa đạo hàm suy ra kết quả của giới hạn.
- **Bài toán 2.** Ta sử dụng các công thức lượng giác để biến đổi và sử dụng công thức

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1 \quad \text{với} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$$

B. BÀI TẬP MẪU

VD 44. Tính các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+4x} - 1}{x}$.

Lời giải

Đặt $f(x) = \sqrt[3]{1+4x}$, suy ra $f(0) = 1$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+4x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$.

Mà $f'(x) = \frac{4}{3 \cdot \sqrt[3]{(1+4x)^2}}$, suy ra $f'(0) = \frac{4}{3}$. Vậy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+4x} - 1}{x} = \frac{4}{3}$.

VD 45. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+4x} - 1}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x^3} - \sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$.

VD 46. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}$

Lời giải

a) Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{2} \cdot \frac{2x}{3x \sin 2x} = \frac{3}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 2x} = \frac{3}{2}$.

b) Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\cos 2x \sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{5} \cdot \frac{5x}{2x \sin 5x} \cdot \frac{1}{\cos 2x}$
 $= \frac{2}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x} = \frac{2}{5}$.

c) Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}$.

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2 \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2}}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\sin \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2}}{\frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2}} \right]^2$
 $= \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2}}{\frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2}} \right]^2 = \frac{1}{2}$.

Bài 52. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{1 - \sqrt{2} \sin x}.$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN**Bài 57.** Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - nx + n - 1}{(x - 1)^2}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x^2 + 2x - 3}.$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3\sqrt[3]{4x^3 - 24} + \sqrt{x+2} - 8\sqrt{2x-3}}{4 - x^2}.$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}.$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+2x} - 1}{\sqrt[m]{1+3x} - 1}.$

Bài 58. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin x}.$

Vấn đề 6. MỘT SỐ DẠNG TOÁN NÂNG CAO VỀ TIẾP TUYẾN

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Sử dụng kiến thức về tiếp tuyến ở Vấn đề 1, dạng 4.

2. Một số kiến thức liên quan:

✓ Độ dài đoạn thẳng AB : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

✓ Khoảng cách từ điểm $M(x_M; y_M)$ đến đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ là

$$d(M, \Delta) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

• Khoảng cách từ điểm $M(x_M; y_M)$ đến đường thẳng trục Ox là $d(M, Ox) = |y_M|$.

• Khoảng cách từ điểm $M(x_M; y_M)$ đến đường thẳng trục Oy là $d(M, Oy) = |x_M|$.

✓ Diện tích tam giác OAB :

• Nếu $A \in Ox$ và $B \in Oy$ thì $S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB$

• Nếu $A, B \in \Delta$ thì $S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot OH \cdot AB$, với $OH = d(M, \Delta)$.

✓ Phương trình đường thẳng qua $A(a; 0)$ và $B(0; b)$ là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (phương trình đoạn chắn)

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

VD 47. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ bằng 2.

Lời giải

Với $x_0 = 2$ suy ra $y_0 = x_0^3 - 3x_0 + 1 = 3$.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$. Suy ra hệ số góc của tiếp tuyến: $k = y'(2) = 9$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 = 9(x - 2) + 3 = 9x - 15.$$

VD 48. Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = -3x + 2015$.

Lời giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta có $y' = -x^2 + 2x$. Suy ra hệ số góc của tiếp tuyến: $k = y'(x_0) = -x_0^2 + 2x_0$.

Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = -3x + 2015$ nên

$$k = -3 \Leftrightarrow -x_0^2 + 2x_0 = -3 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{cases}.$$

- Với $x_0 = -1$ suy ra $y_0 = -\frac{1}{3}x_0^3 + x_0^2 + 2 = \frac{10}{3}$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm $y = -3(x+1) + \frac{10}{3} = -3x + \frac{1}{3}$.

- Với $x_0 = 3$ suy ra $y_0 = -\frac{1}{3}x_0^3 + x_0^2 + 2 = 2$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm $y = -3(x-3) + 2 = -3x + 11$.

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm là: $y = -3x + \frac{1}{3}$ hoặc $y = -3x + 11$.

VD 49. Cho hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 - \frac{1}{3}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x - 4y + 2016 = 0$.

Lời giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta có $y' = 2x^2 - 6x$. Suy ra hệ số góc của tiếp tuyến: $k = y'(x_0) = 2x_0^2 - 6x_0$.

Do tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x - 4y + 2016 = 0$ nên

$$k \cdot \frac{1}{4} = -1 \Leftrightarrow (2x_0^2 - 6x_0) \frac{1}{4} = -1 \Leftrightarrow 2x_0^2 - 6x_0 = -4 \Leftrightarrow 2x_0^2 - 6x_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = 2 \end{cases}$$

- Với $x_0 = 1$ suy ra $y_0 = \frac{2}{3}x_0^3 - 3x_0^2 - \frac{1}{3} = -\frac{8}{3}$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm $y = -4(x-1) - \frac{8}{3} = -4x + \frac{4}{3}$.

- Với $x_0 = 2$ suy ra $y_0 = \frac{2}{3}x_0^3 - 3x_0^2 - \frac{1}{3} = -7$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm $y = -4(x-2) - 7 = -4x + 1$.

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm là: $y = -4x + \frac{4}{3}$ hoặc $y = -4x + 1$.

VD 50. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 1$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị, biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(1; 3)$.

Lời giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x$. Suy ra hệ số góc của tiếp tuyến: $k = y'(x_0) = 3x_0^2 + 6x_0$.

Phương trình tiếp tuyến tại M của đồ thị có dạng

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 = (3x_0^2 + 6x_0)(x - x_0) + x_0^3 + 3x_0^2 - 1.$$

Do tiếp tuyến đi qua điểm $A(1; 3)$ nên

$$3 = (3x_0^2 + 6x_0)(1 - x_0) + x_0^3 + 3x_0^2 - 1 \Leftrightarrow x_0 = 1 \text{ hoặc } x_0 = -2.$$

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm là: $y = 9x - 6$ hoặc $y = 3$.

VD 51. Cho hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (3m-1)x + 1$, với m là tham số thực. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị tại điểm có hoành độ bằng 2. Tìm m để giao điểm của Δ và đường thẳng $d: y = x - 1$ cách đều các trục tọa độ.

Lời giải

Với $x_0 = 2$, suy ra $y_0 = x_0^3 + 2mx_0^2 + (3m-1)x_0 + 1 = 14m + 7$.

Ta có $y' = 3x^2 + 4mx + (3m-1)$. Suy ra hệ số góc của tiếp tuyến $k = y'(2) = 11m + 11$.

Phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị tại điểm có hoành độ bằng 2 có dạng

$$\Delta: y = y'(2)(x-2) + y(2) = (11m+11)(x-2) + 14m + 7.$$

Giao điểm của Δ và d là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} y = (11m+11)(x-2) + 14m + 7 \\ y = x-1 \end{cases}$$

Suy ra $A\left(\frac{8m+14}{11m+10}; \frac{-3m+4}{11m+10}\right)$

Theo giả thiết bài toán, ta có $\left|\frac{8m+14}{11m+10}\right| = \left|\frac{-3m+4}{11m+10}\right| \Leftrightarrow \begin{cases} 8m+14 = -3m+4 \\ 8m+14 = 3m-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -\frac{18}{5} \end{cases}$

Vậy $m = -1$ hoặc $m = -\frac{18}{5}$ thỏa yêu cầu bài toán.

VD 52. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m-2)x + 1$, với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{4}x + 2020$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + m - 2$. Suy ra hệ số góc của tuyến tại một điểm bất kỳ $M(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị là $k = 3x_0^2 - 6mx_0 + m - 2 = 3(x_0 - m)^2 - 3m^2 + m - 2 \geq -3m^2 + m - 2$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x_0 = m$. Khi đó $k_{\min} = -3m^2 + m - 2$. Yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow k_{\min} \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow (-3m^2 + m - 2) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow -3m^2 + m - 2 = -4 \Leftrightarrow -3m^2 + m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 1 \text{ hoặc } m = -\frac{2}{3}. \text{ Vậy } m = 1 \text{ hoặc } m = -\frac{2}{3} \text{ thỏa mãn yêu cầu bài toán.}$$

VD 53. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$. Gọi A là điểm thuộc đồ thị có hoành độ là m . Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại A cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt M, N khác A sao cho $AN = 4AM$ (M nằm giữa A và N).

Lời giải

Tọa độ điểm $A(m; m^4 - 2m^2 + 1)$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại A có dạng

$$d: y = (4m^3 - 4m)(x - m) + m^4 - 2m^2 + 1.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của tiếp tuyến d với đồ thị

$$(4m^3 - 4m)(x - m) + m^4 - 2m^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow (x - m)^2 (x^2 + 2mx + 3m^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x^2 + 2mx + 3m^2 - 2 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Để đường d cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = -2m^2 + 2 > 0 \\ m^2 + 2m^2 + 3m^2 - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ m \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}.$$

Gọi $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (*).

Theo Viet, ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m & (1) \\ x_1 x_2 = 3m^2 - 2 & (2) \end{cases}$$

Theo giả thiết bài toán, ta có $\overline{AN} = 4\overline{AM} \Leftrightarrow x_2 - m = 4(x_1 - m) \Leftrightarrow 4x_1 - x_2 = 3m. \quad (3)$

Từ (1) và (3), ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ 4x_1 - x_2 = 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{m}{5} \\ x_2 = -\frac{11m}{5} \end{cases}$$

Thay vào (2), ta được $\frac{m}{5} \cdot \left(-\frac{11m}{5}\right) = 3m^2 - 2 \Leftrightarrow 86m^2 = 50 \Leftrightarrow m = \pm \frac{5}{\sqrt{43}}$ (thỏa mãn).

Vậy $m = \pm \frac{5}{\sqrt{43}}$ là giá trị cần tìm thỏa yêu cầu bài toán.

VD 54. Cho hàm số $y = x^4 + mx^2 - 4m + 1$, với m là tham số thực. Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị tại A song song với đường thẳng $y = 4x - 2020$, với A là điểm cố định có hoành độ âm của đồ thị.

Lời giải

Gọi $A(x_A; y_A)$ là điểm cố định của đồ thị $\Leftrightarrow y_A = x_A^4 + mx_A^2 - 4m + 1, \forall m \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow m(x_A^2 - 4) + x_A^4 - y_A + 1 = 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A^2 - 4 = 0 \\ x_A^4 - y_A + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 2 \\ y_A = 17 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_A = -2 \\ y_A = 17 \end{cases}$$

Do A có hoành độ âm nên ta chọn $A(-2; 17)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'(x_A) = 4 \Leftrightarrow y'(-2) = 4 \Leftrightarrow -32 + 4m = 4 \Leftrightarrow m = 9$.

Vậy $m = 9$ là giá trị cần tìm.

VD 55. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị, biết tiếp tuyến cắt hai trục Ox và Oy lần lượt tại A, B phân biệt sao cho đường trung trực của đoạn thẳng AB đi qua gốc tọa độ O .

Lời giải

Gọi $M\left(a; \frac{a+1}{a-1}\right)$ với $a \neq 1$ là điểm thuộc đồ thị.

Phương trình tiếp tuyến tại M của đồ thị có dạng

$$d: y = y'(a)(x - a) + \frac{a+1}{a-1} = \frac{-2}{(a-1)^2}(x - a) + \frac{a+1}{a-1}.$$

Ta có $d \cap Ox = A\left(\frac{a^2 + 2a - 1}{2}; 0\right); d \cap Oy = B\left(0; \frac{a^2 + 2a - 1}{(a-1)^2}\right)$.

Do $A \neq B$ nên $a^2 + 2a - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1 \pm \sqrt{2}$.

Đường trung trực của đoạn thẳng AB đi qua gốc tọa độ O nên

$$OA = OB \Leftrightarrow \left|\frac{a^2 + 2a - 1}{2}\right| = \left|\frac{a^2 + 2a - 1}{(a-1)^2}\right| \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2a - 1 = 0 \\ (a-1)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow (a-1)^2 = 2 \Leftrightarrow a = 1 \pm \sqrt{2}.$$

- Với $a = 1 - \sqrt{2}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến $y = -x + 2 - 2\sqrt{2}$.

- Với $a = 1 + \sqrt{2}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến $y = -x + 2 + 2\sqrt{2}$.

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm thỏa mãn yêu cầu bài toán là $y = -x + 2 - 2\sqrt{2}$ hoặc $y = -x + 2 + 2\sqrt{2}$.

VD 56. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị, biết tiếp tuyến cắt hai trục Ox và Oy lần lượt tại A, B phân biệt thỏa mãn $OA = 2OB$.

Lời giải

Gọi $M\left(a; \frac{2a-1}{a+1}\right)$ với $a \neq -1$ là điểm thuộc đồ thị.

Phương trình tiếp tuyến tại M của đồ thị có dạng

$$d: y = y'(a)(x-a) + \frac{2a-1}{a+1} = \frac{3}{(a+1)^2}(x-a) + \frac{2a-1}{a+1}.$$

$$\text{Ta có } d \cap Ox = A\left(\frac{-2a^2+2a+1}{3}; 0\right); d \cap Oy = B\left(0; \frac{2a^2-2a-1}{(a+1)^2}\right).$$

Do $A \neq B$ nên $2a^2 - 2a - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1 \pm \sqrt{3}$.

$$\text{Theo giả thiết bài toán } OA = 2OB \Leftrightarrow \left|\frac{-2a^2+2a+1}{3}\right| = 2\left|\frac{2a^2-2a-1}{(a+1)^2}\right| \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 - 2a - 1 = 0 \\ (a+1)^2 = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (a+1)^2 = 6 \Leftrightarrow a = -1 \pm \sqrt{6}$$

- Với $a = -1 - \sqrt{6}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} + 2\sqrt{6}$.

- Với $a = -1 + \sqrt{6}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} - 2\sqrt{6}$.

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} + 2\sqrt{6} \text{ hoặc } y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} - 2\sqrt{6}.$$

VD 57. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị, biết tiếp tuyến cắt hai trục Ox và Oy lần lượt tại A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng $\frac{2}{3}$ và hoành độ tiếp điểm nguyên.

Lời giải

Gọi $M\left(a; \frac{a+2}{a-1}\right)$ với $a \neq 1$ và $a \in \mathbb{Z}$ là điểm thuộc đồ thị.

Phương trình tiếp tuyến tại M của đồ thị có dạng

$$d: y = y'(a)(x-a) + \frac{a+2}{a-1} = \frac{-3}{(a-1)^2}(x-a) + \frac{a+2}{a-1}.$$

$$\text{Ta có } d \cap Ox = A\left(\frac{a^2+4a-2}{3}; 0\right); d \cap Oy = B\left(0; \frac{a^2+4a-2}{(a-1)^2}\right). \text{ Do } A \neq B \text{ nên}$$

$$a^2 + 4a - 2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -2 \pm \sqrt{6}.$$

$$\text{Theo giả thiết bài toán } S_{\Delta OAB} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left| \frac{a^2 + 4a - 2}{3} \right| \cdot \left| \frac{a^2 + 4a - 2}{(a-1)^2} \right| = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + 4a - 2)^2 = 4(a-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 4a - 2 = 2(a-1) \\ a^2 + 4a - 2 = -2(a-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \vee a = -2 \\ a = -3 \pm \sqrt{13} \text{ (loại)} \end{cases}$$

• Với $a = 0$. Suy ra phương trình tiếp tuyến $y = -3x - 2$.

• Với $a = -2$. Suy ra phương trình tiếp tuyến $y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$.

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm thỏa mãn yêu cầu bài toán là $y = -3x - 2$ hoặc $y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$.

VD 58. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$. Tìm điểm M thuộc đồ thị có hoành độ âm, biết tiếp tuyến của đồ thị tại M cắt hai đường thẳng $d_1 : x = 2$ và $d_2 : y = 1$ lần lượt tại A và B sao cho $IA^2 + IB^2 = 40$, với $I(2;1)$.

Lời giải

Gọi $M\left(a; \frac{a+1}{a-2}\right)$ với $a \neq 2$ và $a < 0$ là điểm thuộc đồ thị.

Phương trình tiếp tuyến tại M của đồ thị có dạng

$$d : y = y'(a)(x-a) + \frac{a+1}{a-2} = \frac{-3}{(a-2)^2}(x-a) + \frac{a+1}{a-2}.$$

Ta có $d \cap d_1 = A\left(2; \frac{a+4}{a-2}\right)$; $d \cap d_2 = B(2a-2; 1)$. Suy ra $\overrightarrow{IA} = \left(0; \frac{6}{a-2}\right)$, $\overrightarrow{IB} = (2a-4; 0)$.

Theo giả thiết bài toán, ta có $IA^2 + IB^2 = 40 \Leftrightarrow \frac{36}{(a-2)^2} + 4(a-2)^2 = 40$

$$\Leftrightarrow 4(a-2)^4 - 40(a-2)^2 + 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2 = 1 \\ (a-2)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \vee a = 3 \\ a = -1 \vee a = 5 \end{cases}$$

Do $a \neq 2$ và $a < 0$ nên ta chọn $a = -1$, suy ra $M(-1; 0)$.

VD 59. Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị, biết tiếp tuyến cắt hai đường thẳng $d_1 : x = 2$ và $d_2 : y = 2$ lần lượt tại A và B sao cho $AB = \sqrt{2}IB$, với $I(2;2)$.

Lời giải

Gọi $M\left(a; \frac{2a-3}{a-2}\right)$ với $a \neq 2$ là điểm thuộc đồ thị.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại M có dạng

$$d : y = y'(a)(x-a) + \frac{2a-3}{a-2} = \frac{-1}{(a-2)^2}(x-a) + \frac{2a-3}{a-2}.$$

Ta có $d \cap d_1 = A\left(2; \frac{2a-2}{a-2}\right)$; $d \cap d_2 = B(2a-2; 2)$. Suy ra $\overrightarrow{IA} = \left(0; \frac{2}{a-2}\right)$, $\overrightarrow{IB} = (2a-4; 0)$.

Nhận xét. Tam giác IAB vuông tại I nên $IA = \sqrt{AB^2 - IB^2} = \sqrt{2IB^2 - IB^2} = IB$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{2}{a-2} \right| = |2a-4| \Leftrightarrow (a-2)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 3 \end{cases}$$

• Với $a = 1$ suy ra phương trình tiếp tuyến $d: y = -x + 2$.

• Với $a = 3$ suy ra phương trình tiếp tuyến $d: y = -x + 6$.

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm thỏa mãn yêu cầu bài toán là $y = -x + 2$ hoặc $y = -x + 6$.

VD 60. Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}$. Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm M thuộc đồ thị, biết tiếp tuyến cắt hai đường thẳng $d_1: x = 2$ và $d_2: y = 2$ lần lượt tại A và B sao cho cosin góc $\widehat{ABI}$ bằng $\frac{4}{\sqrt{17}}$, với $I(2; 2)$.

Lời giải

Gọi $M\left(a; \frac{2a-3}{a-2}\right)$ với $a \neq 2$ là điểm thuộc đồ thị.

Phương trình tiếp tuyến tại M của đồ thị có dạng

$$y = y'(a)(x-a) + \frac{2a-3}{a-2} = \frac{-1}{(a-2)^2}(x-a) + \frac{2a-3}{a-2}.$$

Ta có $d \cap d_1 = A\left(2; \frac{2a-2}{a-2}\right)$; $d \cap d_2 = B(2a-2; 2)$. Suy ra $\overrightarrow{IA} = \left(0; \frac{2}{a-2}\right)$, $\overrightarrow{IB} = (2a-4; 0)$.

Nhận xét. Tam giác IAB vuông tại I nên $\cos \widehat{ABI} = \frac{4}{\sqrt{17}}$ suy ra $\tan \widehat{ABI} = \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \frac{IA}{IB} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow IB^2 = 16.IA^2 \Leftrightarrow (a-2)^4 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 4 \end{cases}.$$

• Với $a = 0$ suy ra phương trình tiếp tuyến $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$.

• Với $a = 4$ suy ra phương trình tiếp tuyến $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$.

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm thỏa mãn yêu cầu bài toán là $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$ hoặc $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$.

VD 61. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị, biết khoảng cách từ điểm $I(1; 2)$ đến tiếp tuyến bằng $\sqrt{2}$.

Lời giải

Gọi $M\left(a; \frac{2a-1}{a-1}\right)$ với $a \neq 1$ là điểm thuộc đồ thị.

Phương trình tiếp tuyến tại M của đồ thị có dạng

$$d: y = y'(a)(x-a) + \frac{2a-1}{a-1} = \frac{-1}{(a-1)^2}(x-a) + \frac{2a-1}{a-1}$$

$$\text{hay } d: x + (a-1)^2 y - 2a^2 + 2a - 1 = 0.$$

Khoảng cách từ điểm I đến tiếp tuyến d bằng $\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|2-2a|}{\sqrt{1+(a-1)^4}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}.$

• Với $a = 0$ suy ra phương trình tiếp tuyến $x + y - 1 = 0$ hay $y = -x + 1$.

• Với $a = 2$ suy ra phương trình tiếp tuyến $x + y - 5 = 0$ hay $y = -x + 5$.

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm thỏa mãn yêu cầu bài toán là $y = -x + 1$ hoặc $y = -x + 5$.

VD 62. Cho hàm số $y = \frac{2x-4}{x-1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm M có hoành độ lớn hơn 1, biết rằng tiếp tuyến cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $3\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MB}$.

Lời giải

Gọi $M\left(a; \frac{2a-4}{a-1}\right)$ với $a > 1$ là điểm thuộc đồ thị.

Phương trình tiếp tuyến tại M của đồ thị có dạng

$$d: y = y'(a)(x-a) + \frac{2a-4}{a-1} = \frac{2}{(a-1)^2}(x-a) + \frac{2a-4}{a-1}.$$

Ta có
$$\begin{cases} d \cap Ox = A(-a^2 + 4a - 2; 0) \\ d \cap Oy = B\left(0; -\frac{2a}{(a-1)^2} + \frac{2a-4}{a-1}\right) \end{cases}.$$
 Suy ra
$$\begin{cases} \overrightarrow{MA} = \left(-a^2 + 3a - 2; -\frac{2a-4}{a-1}\right) \\ \overrightarrow{MB} = \left(-a; -\frac{2a}{(a-1)^2}\right) \end{cases}.$$

Theo giả thiết bài toán $3\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(-a^2 + 3a - 2) = -2a \\ 3\left(-\frac{2a-4}{a-1}\right) = 2\left(-\frac{2a}{(a-1)^2}\right) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow a = 3 \text{ hoặc } a = \frac{2}{3} \text{ (loại)}.$$

Với $a = 3$ suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

VD 63. Cho hàm số $y = \frac{2mx+3}{x-m}$, với m là tham số thực. Tìm m để tiếp tuyến tại một điểm bất kỳ của đồ thị hàm số cắt hai đường thẳng $d_1: x = m$ và $d_2: y = 2m$ lần lượt tại A và B sao cho diện tích tam giác IAB bằng 42, với $I(m; 2m)$.

Lời giải

Giả sử $M\left(a; \frac{2ma+3}{a-m}\right)$ với $a \neq m$ là điểm thuộc đồ thị. Khi đó tiếp tuyến tại M của đồ thị có dạng

$$d: y = y'(a)(x-a) + \frac{2ma+3}{a-m} = \frac{-2m^2-3}{(a-m)^2}(x-a) + \frac{2ma+3}{a-m}.$$

Ta có $d \cap d_1 = A\left(m; \frac{2m^2+2ma+6}{a-m}\right); d \cap d_2 = B(2a-m; 2m).$

Theo giả thiết, ta có $S_{\Delta IAB} = 42 \Leftrightarrow \frac{1}{2}IA \cdot IB = 42 \Leftrightarrow IA \cdot IB = 84$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{2m^2+2ma+6}{a-m} - 2m \right| \cdot |2a-2m| = 84 \Leftrightarrow 4m^2 + 6 = 42 \Leftrightarrow m = \pm 3.$$

Vậy $m = \pm 3$ thỏa yêu cầu bài toán.

BÀI TẬP CƠ BẢN NĂNG CAO CHỦ ĐỀ 5

Bài 59. Xét sự tồn tại đạo hàm của các hàm số sau trên $\mathbb{R}$:

$$\text{a) } y = \begin{cases} x^2 - x + 2 & \text{khi } x \leq 2 \\ \frac{1}{x-1} & \text{khi } x > 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } y = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x < 1 \\ \frac{2}{x} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$$

Bài 60. Tìm a, b để hàm số sau có đạo hàm tại $x=1$:

$$\text{a) } y = \begin{cases} x & \text{khi } x \leq 1 \\ ax^2 + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } y = \begin{cases} \sqrt{2-x^2} & \text{khi } -\sqrt{2} \leq x \leq 1 \\ x^2 + ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

Bài 61. Chứng minh rằng hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đạo hàm là $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

Áp dụng tính đạo hàm của: $y = \frac{3x-5}{x-2}$, $y = \frac{4}{3x+2}$, $y = \frac{2x}{1-3x}$

Bài 62. Chứng minh rằng hàm số $y = \frac{ax^2+bx+c}{b'x+c'}$ có đạo hàm là $y' = \frac{ab'x^2+2ac'x+bc'-b'c}{(b'x+c')^2}$

Áp dụng tính đạo hàm của: $y = \frac{x^2-2x+7}{x-2}$, $y = \frac{x^2+1}{3x+2}$, $y = \frac{2x^2-x+1}{x+5}$

Bài 63. Chứng minh hàm số $y = \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ có đạo hàm là $y' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}x^2 + 2\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}x + \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{(a'x^2+b'x+c')^2}$

Áp dụng tính đạo hàm của: $y = \frac{2x^2-x-1}{x^2-3x+3}$, $y = \frac{3x^2-6x+1}{x^2+3x+2}$, $y = \frac{2x^2-5x+6}{-x^2+5}$

Bài 64. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$\text{a) } y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - 5$$

$$\text{b) } y = \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} - \frac{6}{7x^4}$$

$$\text{c) } y = \frac{3x^2-6x+7}{4x}$$

$$\text{d) } y = \left(\frac{2}{x} + 3x\right)(\sqrt{x}-1)$$

$$\text{e) } y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$

$$\text{f) } y = \frac{-x^2+7x+5}{x^2-3x}$$

$$\text{g) } y = (x^7+x)^2$$

$$\text{h) } y = (x-x^2)^{32}$$

$$\text{i) } y = \frac{x^2+2x+2}{x+1}$$

$$\text{j) } y = \frac{5x-3}{x^2+x+1}$$

$$\text{k) } y = \frac{1}{(x^2-x+1)^5}$$

$$\text{l) } y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$$

Bài 65. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$\text{a) } y = 2\sqrt{x} \sin x - \frac{\cos x}{x}$$

$$\text{b) } y = \frac{3\cos x}{2x+1}$$

$$\text{c) } y = \frac{x^2+2\cos x}{\sin x}$$

$$\text{d) } y = \frac{2\cos x - \sin x}{3\sin x + \cos x}$$

$$\text{e) } y = \frac{\tan x}{\sin x + 2}$$

$$\text{f) } y = \frac{\cot x}{2\sqrt{x}-1}$$

g) $y = \sin(x^2 - 3x + 2)$

h) $y = \cos \sqrt{2x+1}$

i) $y = 2 \sin 3x \cos 5x$

j) $y = \sqrt{\cos 2x}$

k) $y = \tan \frac{x+1}{x^2}$

l) $y = \cot \sqrt{x^2+1}$

m) $y = \tan^3 x + \cot 2x$

n) $y = \sqrt{1+2 \tan x}$

o) $y = \frac{\sin x}{x} + \frac{x}{\sin x}$

p) $y = \frac{\sin^2 x}{1 + \tan 2x}$

q) $y = \tan(\sin x)$

r) $y = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x$

s) $y = \cos^2 \sqrt{\frac{\pi}{4} - 2x}$

t) $y = x \sqrt{\sin 3x}$

u) $y = \tan^2 x + \tan x^2$

Bài 66. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (x^2 - 4x + 1)^5$

b) $y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x - 3}$

c) $y = \frac{-x^2 + 6x + 1}{x^2 + x - 1}$

d) $y = \frac{\sqrt{x^2 + x + 3}}{2x + 1}$

e) $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

f) $y = \frac{2 + \sqrt{x}}{1 + 2\sqrt{x}}$

g) $y = \frac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2}$

h) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

i) $y = (x+1)\sqrt{x^2 + x + 1}$

Bài 67. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sin(\sqrt{1+x^2})$

b) $y = \sin^2(\cos 3x)$

c) $y = \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x}$

d) $y = \cos[\cos(\cos x)]$

e) $y = \cos^2\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$

f) $y = \frac{\sin^2 x}{1 + \cot x} + \frac{\tan^2 x}{1 + \tan x}$

g) $y = \frac{x}{\sin x + \cos x}$

h) $y = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$

i) $y = \sqrt{1 + \cos^2 x}$

Bài 68. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x - 24}$. Giải bất phương trình $2f'(x) \geq f(x)$.

Bài 69. Giải phương trình $y' = 0$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $y = \frac{1}{2} \sin 2x + \sin x - 3$

b) $y = \sin 2x - 2 \cos x$

c) $y = 3 \sin 2x + 4 \cos 2x + 10x$

d) $y = \tan x + \cot x$

e) $y = 2x - \cos x - \sqrt{3} \sin x$

Bài 70. Giải bất phương trình $f'(x) > g'(x)$, biết rằng:

a) $f(x) = x^3 + x - \sqrt{2}$ và $g(x) = 3x^2 + x + \sqrt{2}$

b) $f(x) = 2x^3 - x^2 + \sqrt{3}$ và $g(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - \sqrt{3}$

Bài 71. Cho hàm số $y = x - 2\sqrt{x^2 + 12}$. Giải bất phương trình $f'(x) \leq 0$. (TN THPT 2010)

Bài 72. Tính đạo hàm đến cấp được kèm theo của các hàm số sau ($n \in \mathbb{N}^*$):

a) $y = \sin x, y''',$

b) $y = \sin x \sin 5x, y^{(4)}$

c) $y = (4-x)^5, y^{(n)}$

d) $y = \frac{1}{2+x}, y^{(n)}$

e) $y = \frac{1}{2x+1}, y^{(n)}$

f) $y = \cos^2 x, y^{(2n)}$

Bài 73. Chứng minh rằng hàm số:

a) $y = x \sin x$ thỏa hệ thức $xy - 2(y' - \sin x) + xy'' = 0$.

b) $y = \sqrt{2x+x^2}$ thỏa hệ thức $y^3 y'' + 1 = 0$.

c) $y = (x + \sqrt{x^2 + 1})^3$ thỏa hệ thức $(1+x^2)y'' + xy' - 9y = 0$.

d) $y = 3 + \frac{5}{x}$ thỏa hệ thức $xy' + y = 3$.

e) $y = \frac{x-3}{x+4}$ thỏa hệ thức $2(y')^2 = (y-1)y''$

Bài 74. Viết phương trình tiếp tuyến của:

a) $y = \frac{x+1}{x-1}$ tại điểm $A(2;3)$.

b) $y = x^3 + 4x^2 - 1$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.

c) $y = 4x^2 - 4x + 4$ tại điểm có tung độ $y_0 = 1$.

d) $y = \sqrt{2x+1}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 4$.

e) $y = \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 3}$ biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng $\frac{4}{3}$.

f) $y = x^4 - 2x^2 + 1$ biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng 24.

g) $y = x^3 + 3x^2 + 2$ biết tiếp tuyến $d \perp D: x - 3y - 15 = 0$.

h) $y = x^3 + x + 3$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.

i) $y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$.

Bài 75. Cho $(C): y = f(x) = \frac{3x-2}{x-1}$. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) :

a) Tại điểm có hoành độ bằng 2

b) Tại điểm có tung độ bằng $\frac{5}{2}$

c) $d \parallel D: y = -x + 25$

d) $d \perp \Delta: 4x - y = 2018$.

Bài 76. Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 1$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) trong mỗi trường hợp sau:

a) Biết rằng tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = -3x + 1$.

b) Biết rằng tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $\Delta: x - 7y = 2018$.

c) Biết rằng tiếp tuyến đi qua điểm $A(0; 2)$

Bài 77. Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) trong mỗi trường hợp sau:

a) Biết tung độ của tiếp điểm bằng 2.

b) Biết rằng tiếp tuyến song song với trục hoành.

c) Biết rằng tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: x + 8y - 2018 = 0$.

d) Biết rằng tiếp tuyến đi qua điểm $A(0; -6)$.

- Bài 78.** Cho hàm số $y = x^3$. Viết tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho
 a) Biết tiếp điểm là $M(1;1)$. b) Biết hoành độ tiếp điểm $= 2$ c) Biết tung độ tiếp điểm $= 5$
- Bài 79.** Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x-1}$. Viết PTTT của đồ thị hàm số biết:
 a) Tiếp điểm M có tung độ bằng 4.
 b) Tiếp điểm M là giao của đồ thị hàm số với trục hoành
 c) Tiếp điểm M là giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung
- Bài 80.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$
 a) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$.
 b) CMR: trong các tiếp tuyến của đồ thị hàm số thì tiếp tuyến ở câu a có hệ số góc nhỏ nhất.
- Bài 81.** Cho hàm số $y = x^3 + x^2 + x + 1$
 a) Viết PTT tại M thuộc đồ thị hàm số biết trung độ điểm M bằng 1.
 b) CMR trên đồ thị hàm số không tồn tại những cặp điểm mà tiếp tuyến tại 2 điểm đó vuông góc với nhau.
- Bài 82.** Cho hàm số $y = x^3$. Tìm các điểm M trên đồ thị hàm số ($M \neq$ gốc tọa độ) sao cho tiếp tuyến tại M tạo với 2 trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 6.
- Bài 83.** Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+1}$. Tìm M trên đồ thị hàm số sao cho tiếp tuyến tại M tạo với 2 trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{1}{4}$.
- Bài 84.** Cho hàm số $y = \frac{1}{x\sqrt{2}}$ và $y = \frac{x^2}{\sqrt{2}}$. Gọi M là giao điểm của hai đồ thị hàm số trên. Viết pttt của mỗi đồ thị hàm số đã cho tại điểm M . Tính góc giữa hai tiếp tuyến tìm được.
- Bài 85.** Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + (m+1)x + 1$. Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ đi qua $A(1;2)$.
- Bài 86.** Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$; $I(1;2)$. Tìm điểm M thuộc đồ thị hàm số sao cho tiếp tuyến d của đồ thị hàm số tại M vuông góc với đường thẳng IM .
- Bài 87.** Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$; $I(-1;1)$. Tìm điểm M thuộc đồ thị hàm số sao cho tiếp tuyến d của đồ thị hàm số tại M tạo với đường thẳng IM một góc α mà $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.
- Bài 88.** Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. Với M là điểm thuộc đồ thị hàm số có hoành độ bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$, hãy viết phương trình tiếp tuyến d của đồ thị hàm số tại M và tìm hoành độ các giao điểm của d với đồ thị hàm số đã cho.
- Bài 89.** Cho hàm số $y = \frac{x-1}{2x+2}$. Tìm M trên đồ thị hàm số sao cho tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M tạo với 2 trục tọa độ 1 tam giác có trọng tâm G nằm trên đường thẳng $\Delta: 4x + y = 0$.

- Bài 90.** Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$. Tìm hoành độ điểm M thuộc đồ thị hàm số biết tiếp tuyến tại M tạo với hai đường thẳng $d_1; d_2$ lần lượt có phương trình $x-1=0$ và $y-2=0$ một tam giác vuông cân.
- Bài 91.** Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}$. Đường thẳng $d_1: x=2$. Đường thẳng $d_2: y=2$. I là giao điểm của d_1 & d_2 . Gọi đường thẳng d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm M tùy ý. A là giao d & d_1 , B là giao điểm của d & d_2 . Viết pttt (d) biết độ dài AB nhỏ nhất.
- Bài 92.** Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-2}$. Đường thẳng $d_1: x=2$. Đường thẳng $d_2: y=2$. I là giao điểm của d_1 & d_2 . Gọi đường thẳng d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm M tùy ý. A là giao d & d_1 , B là giao điểm của d & d_2 .
- a) CMR: M là trung điểm của đoạn thẳng AB .
- b) Tìm M để $d(I; d)$ đạt giá trị lớn nhất.
- Bài 93.** Cho hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số biết
- Bài 94.** Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2x-2}$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số biết tiếp tuyến đi qua điểm $I\left(1; \frac{-1}{2}\right)$.
- Bài 95.** Cho hàm số $y = \frac{x^2+x+1}{x+1}$. Chứng minh rằng qua điểm $A(1; -1)$ có thể kẻ được hai tiếp tuyến với đồ thị hàm số và hai tiếp tuyến này vuông góc với nhau.
- Bài 96.** Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$. Hãy tìm m để từ điểm $A(0; m)$ kẻ được hai tiếp tuyến với đồ thị hàm số và hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành.
- Bài 97.** Cho hàm số $y = \frac{2x-2}{x+5}$. Hãy tìm m để từ điểm $A(m; 0)$
- a) Kẻ được hai tiếp tuyến với đồ thị hàm số tích hai hệ số góc của hai tiếp tuyến là $\frac{1}{144}$.
- b) Kẻ được hai tiếp tuyến với đồ thị hàm số và hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục tung.
- c) Kẻ được hai tiếp tuyến với đồ thị hàm số và hai tiếp điểm nằm về hai phía của đường thẳng $y=1$.
- Bài 98.** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{4}{3}$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: 4x - y + 2 = 0$.
- Bài 99.** Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{1-x}$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: x - y + 2017 = 0$.

- Bài 100.** Cho hàm số $y = \frac{3x-2}{x-2}$. Viết phương trình tiếp tuyến d với đồ thị hàm số biết d tạo với trục hoành một góc α mà $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$.
- Bài 101.** Cho hàm số $y = x^3 + \frac{3}{2}x + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến d với đồ thị hàm số biết d tạo với đường thẳng $\Delta: y = -x - 7$ một góc α mà $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$.
- Bài 102.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$ (C); đường thẳng $d: y = 3x + 1$. Tìm điểm M trên đồ thị (C) biết tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M có hệ số góc âm và tạo với d một góc $\alpha = 45^\circ$.
- Bài 103.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ (C). Tìm hai điểm A, B trên đồ thị hàm số sao cho tiếp tuyến của đồ thị (C) tại A, B song song với nhau và $AB = 4\sqrt{2}$.
- Bài 104.** Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ (C). Tìm điểm M trên đồ thị (C) biết tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M cắt trục ox, oy lần lượt tại A, B sao cho $AB = \sqrt{82} \cdot OB$.
- Bài 105.** Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ (H). Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số biết rằng tiếp điểm của tiếp tuyến đó với (H) cách điểm $A(0;1)$ một khoảng bằng 2.
- Bài 106.** Cho hàm số $y = -x^3 + (2m+1)x^2 - m - 1$, m là tham số. Tìm m để đồ thị của hàm số đã cho tiếp xúc với đường thẳng $y = 2mx - m - 1$.
- Bài 107.** Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số (1) biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng (Δ): $x + y + 1 = 0$ một góc α sao cho $\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}$ và tiếp điểm có tọa độ nguyên.
- Bài 108.** Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến d của đồ thị hàm số (C) biết tiếp tuyến tạo với $d_1: x = 1, d_2: y = 1$ một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất.
- Bài 109.** Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ (C). Tìm trên đường thẳng $y = 3$ các điểm mà từ đó kẻ được ba tiếp tuyến phân biệt đến đồ thị (C).
- Bài 110.** Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{-x+1}$ (C). Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) tại điểm $I(0;1)$. Tìm điểm $M \in (C)$ có hoành độ lớn hơn 1 sao cho khoảng cách từ M đến d nhỏ nhất.
- Bài 111.** Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến d của đồ thị hàm số (C) biết d cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại A, B sao cho ΔOAB cân tại O .
- Bài 112.** Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ (C). Tìm m để đường thẳng $y = mx + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau.

- Bài 113.** Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$. Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(-1; 3)$ có hệ số góc k . Tìm các giá trị của k để Δ cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, D, E . Gọi d_1, d_2 lần lượt là các tiếp tuyến của (C) tại D, E . Chứng minh rằng các khoảng cách từ A đến d_1, d_2 bằng nhau.
- Bài 114.** Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ (C). Tìm điểm $M \in (C)$ để qua đó kẻ được ba tiếp tuyến đến (C) .
- Bài 115.** Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-1}$ (C). Tìm điểm $M \in (C)$ có hai tọa độ là số hữu tỉ sao cho tiếp tuyến d của đồ thị hàm số (C) tại M cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại A, B sao cho $S_{OAB} = \frac{9}{2}$.
- Bài 116.** Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(1; 10)$.
- Bài 117.** Cho hàm số $y = x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 6$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{-x}{12} + 1$.
- Bài 118.** Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ (C). Chứng minh rằng mọi tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M \in (C)$ đều tạo với hai đường thẳng $d_1: x-1$ và $d_2: y=1$ một tam giác có diện tích không đổi.
- Bài 119.** Cho hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng $\Delta: 47x - 43y + 90 = 0$ một góc 45° và tạo với tia ox một góc tù.
- Bài 120.** Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 + 2$ (1) và đường thẳng $d: y = 2mx + m + 1$, trong đó m là tham số. Tìm m để d cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt $I(1; 1-m), A, B$ sao cho tiếp tuyến tại A và B có cùng hệ số góc.
- Bài 121.** Tìm trên trục hoành điểm mà từ đó có thể kẻ được ba tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$ (C).
- Bài 122.** Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+2}$ (C) và điểm $P\left(\frac{-9}{2}; 0\right)$. Tìm trên (C) cặp điểm A, B sao cho tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau và ΔPAB cân tại P .
- Bài 123.** Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ (1). Đường thẳng d đi qua điểm $I(-1; 2)$ có hệ số góc bằng $-m$ cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt A, B, I . Chứng minh rằng các tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) tại A và B song song với nhau.
- Bài 124.** Cho hàm số $y = \frac{x}{x-1}$. Tìm những điểm trên đồ thị hàm số mà tiếp tuyến tại đó tạo với hai đường thẳng $d_1: x=1, d_2: y=1$ một tam giác có chu vi bằng $4 + 2\sqrt{2}$.
- Bài 125.** Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$ (1), m là tham số. Biết A là điểm thuộc đồ thị hàm số (1) và có hoành độ bằng 1. Tìm m để khoảng cách từ $B\left(\frac{3}{4}; 1\right)$ đến tiếp tuyến của đồ thị (1) tại A lớn nhất.

- Bài 126.** Cho hàm số $y = x^4 - 6x^2 + 5$ (C). Tìm m để đồ thị của hàm số đã cho tiếp xúc với đường thẳng $y = mx - m$.
- Bài 127.** Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ (C). Tìm m để đồ thị hàm số tiếp xúc với đường thẳng $y = mx + 5$.
- Bài 128.** Hàm số $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$. Chứng minh rằng mọi tiếp tuyến của đồ thị hàm số đều không đi qua điểm $A(2; 3)$.
- Bài 129.** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (4-3m)x + 1$ (C_m). Tìm m để trên đồ thị (C_m) tồn tại duy nhất điểm A có hoành độ âm mà tiếp tuyến của (C_m) tại A vuông góc với đường thẳng $x + 2y - 3 = 0$.
- Bài 130.** Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{2x-1}$ (C). Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng $d: y = x + m$ luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B . Khi đó gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại A và B , tìm m để tổng $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất
- Bài 131.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ (C). Với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y'(x) = 0$. Gọi $A(x_1; y(x_1)), B(x_2; y(x_2))$. Tìm trên đồ thị (C) điểm M sao cho tiếp tuyến với (C) tại M cách đều hai điểm A và B .
- Bài 132.** Cho hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (6m-5)x - 3$ (C_m). Tìm m để đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành.
- Bài 133.** Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + (m-1)x + 1$ (C_m). Chứng minh rằng trên đồ thị hàm số (C_m) luôn tồn tại hai điểm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $x + 9y = 0$. Tìm m để đường thẳng nối hai điểm đó đi qua điểm $I(0; 4)$.
- Bài 134.** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + 6(m-1)x + \frac{2}{3}$ (1) có đồ thị là (C_m). Tìm m để trên (C_m) có hai điểm $M(x_1; y_1)$ và $N(x_2; y_2)$ sao cho tiếp tuyến tại mỗi điểm đó vuông góc với đường thẳng $x + 3y - 6 = 0$ và $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \leq 2\sqrt{3}$.
- Bài 135.** Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + 1$ (1) và đường thẳng $d: y = 1$. Tìm m để hai đồ thị hàm số cắt nhau tại ba điểm phân biệt $C(0; 1), D, E$ sao cho tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) tại D và E vuông góc với nhau.
- Bài 136.** Cho hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ (1) với m là tham số. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có tiếp tuyến tạo với đường thẳng $d: x + y + 7 = 0$ một góc α mà $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$.
- Bài 137.** Hãy viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$, biết tiếp tuyến qua điểm A :

a) $y = \frac{4x - x^2}{x - 1}$, với $A(1; -4)$.

b) $y = x^4 - 2x^2$, với $A(0; -1)$.

c) $y = x^3 - 3x + 1$, với $A(1; -6)$.

d) $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 1}$, với $A(-1; 0)$.

Bài 138. Cho hàm số: $y = f(x) = \frac{mx^3}{3} - \frac{mx^2}{2} + (3 - m)x - 2$. Tìm m để:

a) $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $f'(x)$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.

c) Chứng minh rằng trong trường hợp $f'(x)$ có hai nghiệm (hai nghiệm có thể trùng nhau) thì các nghiệm này thỏa mãn một hệ thức độc lập với m .

Bài 139. Tìm m để:

a) $y = mx - x^3$ có $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x + 3$ có $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

c) $y = x^3 - 3mx^2 + 4mx$ có $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

d) $y = x^3 - 3(2m + 1)x^2 + (2m + 5)x + 2$ có $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

e) $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - mx + 2$ có $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

f) $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - mx$ có $y' \leq 0, \forall x \in (0; +\infty)$.

Bài 140. Với mỗi hàm số sau đây: ① Tìm TXĐ ② Tính y' ③ Xét dấu y' , chỉ ra $y' > 0$, $y' < 0$ trên khoảng, các khoảng nào:

a) $y = -x^3 + 3x + 1$

b) $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 2$

c) $y = \frac{2x - 1}{x + 2}$

d) $y = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$

e) $y = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x - 1}$

f) $y = 1 + \frac{1}{x - 2}$

g) $y = -x^4 + 4x^2$

h) $y = x^4 + 4x^2 + 1$

i) $y = 4x + 1 - \frac{1}{x + 1}$

j) $y = 4 + 3x - x^2$

k) $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 7x - 2$

l) $y = x^4 - 2x^2 + 3$

m) $y = -x^3 + x^2 - 5$

n) $y = \sqrt{4 - x^2}$

o) $y = \frac{x^2 - 2x}{1 - x}$

p) $y = \sqrt{\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 2x - 3}}$

q) $y = \sqrt{3x - x^2}$

r) $y = \sqrt{x^2 - x - 20}$

s) $y = \frac{x^2 - 8x + 9}{x - 5}$

t) $y = \frac{1}{x + 1} - 2x$

u) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHỦ ĐỀ 5

BÀI 1. ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

- Câu 1.** [1D5-1] Cho hàm số $f(x)$ liên tục tại x_0 . Đạo hàm của $f(x)$ tại x_0 là
- A. $f(x_0)$.
 B. $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.
 C. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).
 D. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).
- Câu 2.** [1D5-1] Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 7x + 2$. Phương trình tiếp tuyến tại $A(0; 2)$ là
- A. $y = 7x + 2$. B. $y = 7x - 2$. C. $y = -7x + 2$. D. $y = -7x - 2$.
- Câu 3.** [1D5-1] Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?
- A. Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x + x_0}$ thì giới hạn đó gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 .
 B. Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ thì giới hạn đó gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 .
 C. Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f(x_0)}{x - x_0}$ thì giới hạn đó gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 .
 D. Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f(x_0)}{x + x_0}$ thì giới hạn đó gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 .
- Câu 4.** [1D5-1] Số gia của hàm số $f(x) = x^2 - 1$ tại điểm $x_0 = 1$ ứng với $\Delta x = -0,1$ là
- A. $-1,19$. B. $0,01$. C. $-0,19$. D. $0,21$.
- Câu 5.** [1D5-1] Cho hàm số $y = 2x - 5$. Tìm biểu thức của Δy và $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tính theo x và Δx .
- A. $\Delta y = 2\Delta x, \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$. B. $\Delta y = \Delta x - 10, \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 - \frac{10}{\Delta x}$.
 C. $\Delta y = 2\Delta x - 10, \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 - \frac{10}{\Delta x}$. D. $\Delta y = \Delta x, \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$.
- Câu 6.** [1D5-1] Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$.
- A. $\frac{1}{4}$. B. 4 . C. 0 . D. 1 .

- Câu 7. [1D5-1]** Gọi d là tiếp tuyến với đồ thị hàm số $(C): y = \frac{1}{x^2 - 1}$ song song với trục hoành. Tìm hoành độ tiếp điểm x_0 của d và (C) .
- A. $x_0 = 1$. B. $x_0 = 2$. C. $x_0 = -1$. D. $x_0 = 0$.
- Câu 8. [1D5-1]** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -2$.
- A. $y = 20x + 22$. B. $y = 4x - 10$. C. $y = 10x + 11$. D. $y = 20x + 58$.
- Câu 9. [1D5-1]** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{2x - 1}$ tại điểm $M(0; -1)$ có phương trình là
- A. $y = x - 1$. B. $y = 5x + 1$. C. $y = x + 1$. D. $y = 5x - 1$.
- Câu 10. [1D5-1]** Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai:
- A. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm x_0 thì $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 .
- B. Nếu tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ của đồ thị hàm số $y = f(x)$ song song với trục hoành thì $f'(x_0) = 0$.
- C. Nếu $f'(x_0) = 0$ thì tồn tại tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ của đồ thị hàm số $y = f(x)$ song song hoặc trùng với trục hoành.
- D. Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 và đồ thị của hàm số là một đường cong (C) thì tiếp tuyến của (C) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ có hệ số góc $k = f'(x_0)$.
- Câu 11. [1D5-1]** Xét các mệnh đề sau
- (I) Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.
- (II) Nếu hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại điểm x_0 thì nó không có đạo hàm tại điểm đó.
- (III) Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm x_0 thì nó không có đạo hàm tại điểm đó.
- Trong ba mệnh đề trên
- A. Có (I), (II) đúng. B. Có ba mệnh đề đúng.
- C. Cả ba mệnh đề đều sai. D. Có (I) đúng.
- Câu 12. [1D5-1]** Giả sử $u(x), v(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào Sai?
- A. $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$. B. $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) + u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.
- C. $\frac{1}{v(x)} = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$, (Với $v(x) \neq 0$). D. $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$.
- Câu 13. [1D5-2]** Gọi (P) là đồ thị của hàm số $y = 2x^2 - x + 3$. Phương trình tiếp tuyến với (P) tại điểm mà (P) cắt trục tung là
- A. $y = -x + 3$. B. $y = -x - 3$. C. $y = 4x - 1$. D. $y = 11x + 3$.
- Câu 14. [1D5-2]** Đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{3x + 1}{x - 1}$ cắt trục tung tại điểm A . Tiếp tuyến của (C) tại điểm A có phương trình là
- A. $y = -4x - 1$. B. $y = 4x - 1$. C. $y = 5x - 1$. D. $y = -5x - 1$.

- Câu 15.** [1D5-2] Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = x^4 + x$. Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $d: x + 5y = 0$ có phương trình là
A. $y = 5x - 3$. **B.** $y = 3x - 5$. **C.** $y = 2x - 3$. **D.** $y = x + 4$.
- Câu 16.** [1D5-2] Cho hàm số $f(x)$ là hàm số trên $\mathbb{R}$ định bởi $f(x) = x^2$ và $x_0 \in \mathbb{R}$. Chọn câu đúng.
A. $f'(x_0) = x_0$. **B.** $f'(x_0) = x_0^2$.
C. $f'(x_0) = 2x_0$. **D.** $f'(x_0)$ không tồn tại.
- Câu 17.** [1D5-2] Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(0; +\infty)$ bởi $f(x) = \frac{1}{x}$. Đạo hàm của $f(x)$ tại $x_0 = \sqrt{2}$ là
A. $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.
- Câu 18.** [1D5-2] Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = (x+1)^2(x-2)$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là
A. $y = -8x + 4$. **B.** $y = 9x + 18$. **C.** $y = -4x + 4$. **D.** $y = 9x - 18$.
- Câu 19.** [1D5-2] Phương trình tiếp tuyến của đồ thị của hàm số $y = x(3-x)^2$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là
A. $y = -3x + 8$. **B.** $y = -3x + 6$. **C.** $y = 3x - 8$. **D.** $y = 3x - 6$.
- Câu 20.** [1D5-2] Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 7x + 5$ (C). Tìm trên (C) những điểm có hệ số góc tiếp tuyến tại điểm đó bằng -2 .
A. $(-1; -9); (3; -1)$. **B.** $(1; 7); (3; -1)$. **C.** $(1; 7); (-3; -97)$. **D.** $(1; 7); (-1; -9)$.
- Câu 21.** [1D5-2] Tìm hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị $y = \tan x$ tại điểm có hoành độ $x = \frac{\pi}{4}$.
A. $k = 1$. **B.** $k = \frac{1}{2}$. **C.** $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** 2 .
- Câu 22.** [1D5-2] Cho đường cong $(C): y = x^2$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(-1; 1)$ là
A. $y = -2x + 1$. **B.** $y = 2x + 1$. **C.** $y = -2x - 1$. **D.** $y = 2x - 1$.
- Câu 23.** [1D5-2] Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x}{x - 2}$. Phương trình tiếp tuyến tại $A(1; -2)$ là
A. $y = -4(x - 1) - 2$. **B.** $y = -5(x - 1) + 2$. **C.** $y = -5(x - 1) - 2$. **D.** $y = -3(x - 1) - 2$.
- Câu 24.** [1D5-2] Biểu thức của Δy của hàm số $y = x^2 - 1$ tính theo x và Δx là
A. $\Delta y = 0$. **B.** $\Delta y = (\Delta x)^2 + 2x\Delta x$.
C. $\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 2$. **D.** $\Delta y = (\Delta x)^2 - 1$.
- Câu 25.** [1D5-2] Một vật rơi tự do theo phương trình $S(t) = \frac{1}{2}gt^2$ với $g = 9,8\text{m/s}^2$. Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 5$ giây là
A. $122,5\text{m/s}$. **B.** $61,5\text{m/s}$. **C.** $9,8\text{m/s}$. **D.** 49m/s .

- Câu 26. [1D5-2]** Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S(t) = t^3 - 2t^2 + 4t + 1$, trong đó t được tính bằng giây và S tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t = 2$ giây là
A. 12m/s^2 . **B.** 8m/s^2 . **C.** 9m/s^2 . **D.** 6m/s^2 .
- Câu 27. [1D5-2]** Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2-3x}{x-1}$ tại giao điểm với trục hoành bằng
A. 9. **B.** $\frac{1}{9}$. **C.** 4. **D.** -9.
- Câu 28. [1D5-2]** Số tiếp tuyến của đường cong $(C): y = x^3 + 3x^2 - 8x + 1$ song song với đường thẳng $\Delta: y = x + 28$ là
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.
- Câu 29. [1D5-2]** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x}$.
A. $\frac{3}{5}$. **B.** 1. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{1}{5}$.
- Câu 30. [1D5-2]** Cho hàm số $y = \sin 2x$ (C) . Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x = -\frac{\pi}{2}$ bằng.
A. -2. **B.** 2. **C.** 0. **D.** -1.
- Câu 31. [1D5-2]** Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ (C) . Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) và song song với đường thẳng $d: 9x - y - 15 = 0$.
A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.
- Câu 32. [1D5-2]** Cho hàm số $y = f(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$. Số nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ là
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.
- Câu 33. [1D5-2]** Cho hàm số $y = f(x) = |x^2 + 2x|$. $f'(0)$ có giá trị bằng
A. 2. **B.** -2
C. 0. **D.** Không tồn tại đạo hàm tại $x = 0$.
- Câu 34. [1D5-3]** Cho hàm số $y = \frac{2x}{x-2}$. Phương trình tiếp tuyến của (C) cắt các trục Ox , Oy lần lượt tại A và B sao cho $AB = \sqrt{2}OA$ là
A. $y = -x$. **B.** $y = -x + 4$. **C.** $y = -x - 8$. **D.** $y = -x + 8$.
- Câu 35. [1D5-3]** Điểm M trên đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$ mà tiếp tuyến tại đó có hệ số góc k bé nhất trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị thì M , k là
A. $M(1; -3)$, $k = -3$. **B.** $M(1; 3)$, $k = -3$.
C. $M(1; -3)$, $k = 3$. **D.** $M(-1; -3)$, $k = -3$.
- Câu 36. [1D5-3]** Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x-1}$ có đồ thị cắt trục tung tại $A(0; -1)$, tiếp tuyến tại A có hệ số góc $k = -3$. Các giá trị của a , b là
A. $a = 1$, $b = 1$. **B.** $a = 2$, $b = 1$.
C. $a = 1$, $b = 2$. **D.** $a = 2$, $b = 2$.

- Câu 37. [1D5-3]** Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$ và xét các phương trình tiếp tuyến có hệ số góc $k = 2$ của đồ thị hàm số là
- A. $y = 2x - 1; y = 2x - 3$. B. $y = 2x - 5; y = 2x - 3$.
 C. $y = 2x - 1; y = 2x - 5$. D. $y = 2x - 1; y = 2x + 5$.
- Câu 38. [1D5-3]** Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$, tiếp tuyến của đồ thị hàm số vuông góc với đường thẳng $d: 3y - x + 6 = 0$ là
- A. $y = -3x - 3; y = -3x - 11$. B. $y = -3x - 3; y = -3x + 11$.
 C. $y = -3x + 3; y = -3x - 11$. D. $y = -3x - 3; y = 3x - 11$.
- Câu 39. [1D5-3]** Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = (2m - 1)x^4 - m + \frac{5}{4}$ tại điểm có hoành độ $x = -1$ vuông góc với đường thẳng $d: 2x - y - 3 = 0$.
- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{7}{16}$. D. $\frac{9}{16}$.
- Câu 40. [1D5-3]** Cho hàm số $y = \frac{x + 2}{x - 2}$, tiếp tuyến của đồ thị hàm số kẻ từ điểm $(-6; 5)$ là
- A. $y = -x - 1; y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$. B. $y = -x - 1; y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$.
 C. $y = -x + 1; y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$. D. $y = -x + 1; y = -\frac{1}{4}x - \frac{7}{2}$.
- Câu 41. [1D5-3]** Tiếp tuyến kẻ từ điểm $(2; 3)$ tới đồ thị hàm số $y = \frac{3x + 4}{x - 1}$ là
- A. $y = -28x + 59; y = x + 1$. B. $y = -24x + 51; y = x + 1$.
 C. $y = -28x + 59$. D. $y = -28x + 59; y = -24x + 51$.
- Câu 42. [1D5-3]** Cho hàm số $(C): y = x^3 - 3mx^2 + (m + 1)x - m$. Gọi A là giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung. Khi đó giá trị m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại A vuông góc với đường thẳng $y = 2x - 3$ là
- A. $-\frac{3}{2}$. B. 1 . C. -3 . D. $-\frac{1}{2}$.
- Câu 43. [1D5-3]** Một viên đạn được bắn lên trời từ một vị trí cách mặt đất 1000 m theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu $v_0 = 245$ m/s (bỏ qua sức cản của không khí). Tại thời điểm viên đạn đạt độ cao lớn nhất cách mặt đất bao nhiêu mét?
- A. $3062,5$ (m). B. $4062,5$ (m).
 C. 3461 (m). D. $4026,5$ (m).
- Câu 44. [1D5-4]** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in \mathbb{R}$ để đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 3x$ tiếp xúc với đường thẳng $y = mx - 1$?
- A. 0 . B. 1 . C. 2 . D. 3 .

Câu 45. [1D5-4] Cho hàm số $y = \frac{x-1}{2(x+1)}$ có đồ thị là (C) . Gọi điểm $M(x_0; y_0)$ với $x_0 > -1$ là điểm thuộc (C) , biết tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB có trọng tâm G nằm trên đường thẳng $d: 4x + y = 0$. Hỏi giá trị của $x_0 + 2y_0$ bằng bao nhiêu?

- A. $-\frac{7}{2}$. B. 1. C. $\frac{5}{2}$. D. $-\frac{5}{2}$.

Câu 46. [1D5-4] Cho các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = \frac{f(x)+3}{g(x)+1}$. Hệ số góc của các tiếp tuyến của các đồ thị các hàm số đã cho tại điểm có hoành độ $x = 1$ bằng nhau và khác 0. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

- A. $f(1) \leq -\frac{11}{4}$. B. $f(1) < \frac{11}{4}$. C. $f(1) > -\frac{11}{4}$. D. $f(1) \geq \frac{11}{4}$.

Câu 47. [1D5-4] Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + m}{x + m}$. Giá trị m để đồ thị hàm số cắt trục Ox tại hai điểm và tiếp tuyến của đồ thị tại hai điểm đó vuông góc là

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 7.

BÀI 2. QUI TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

Câu 48. [1D5-1] Đạo hàm cấp một của hàm số $y = (1 - x^3)^5$ là

- A. $y' = 5(1 - x^3)^4$. B. $y' = -15x^2(1 - x^3)^5$. C. $y' = -3(1 - x^3)^4$. D. $y' = -5x^2(1 - x^3)^4$.

Câu 49. [1D5-1] Đạo hàm của hàm số $f(x) = (x^2 + 1)^4$ tại điểm $x = -1$ là

- A. -32. B. 30. C. -64. D. 12.

Câu 50. [1D5-1] Hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đạo hàm là

- A. $y' = 2$. B. $y' = -\frac{1}{(x-1)^2}$. C. $y' = -\frac{3}{(x-1)^2}$. D. $y' = \frac{1}{(x-1)^2}$.

Câu 51. [1D5-1] Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$. Phương trình $y' = 0$ có nghiệm là

- A. $\{-1; 2\}$. B. $\{-1; 3\}$. C. $\{0; 4\}$. D. $\{1; 2\}$.

Câu 52. [1D5-1] Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ bởi $f(x) = 2x^2 + 1$. Giá trị $f'(-1)$ bằng

- A. 2. B. 6. C. -4. D. 3.

Câu 53. [1D5-1] Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ bởi $f(x) = \frac{2x}{x-1}$. Giá trị của $f'(-1)$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. -2. D. Không tồn tại.

Câu 54. [1D5-1] Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ bởi $f(x) = ax + b$, với a, b là hai số thực đã cho. Chọn câu đúng:

- A. $f'(x) = a$. B. $f'(x) = -a$. C. $f'(x) = b$. D. $f'(x) = -b$.

Câu 55. [1D5-1] Tính đạo hàm của hàm số $y = x^4 - 3x^2 + \frac{1}{2}x + 3$.

A. $y' = 4x^4 - 6x^2 + \frac{1}{2}$. B. $y' = 4x^3 - 6x + \frac{1}{2}$. C. $y' = 4x^3 - 6x + \frac{7}{2}$. D. $y' = 4x^3 - 6x - \frac{1}{4}$.

Câu 56. [1D5-1] Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x+1}{x-3}$.

A. $y' = -\frac{7}{(x-3)^2}$. B. $y' = \frac{4x-2}{(x-3)^2}$. C. $y' = -\frac{5}{(x-3)^2}$. D. $y' = -\frac{4x-5}{(x-3)^2}$.

Câu 57. [1D5-1] Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^3 + 2x^2)^{10}$.

A. $y' = 10(3x^2 + 4x)^9$. B. $y' = 10(3x^2 + 2x)(x^3 + 2x^2)^9$.
C. $y' = 10(3x^2 + 4x)(x^3 + 2x^2)^9$. D. $y' = 10(x^3 + 2x^2)^9$.

Câu 58. [1D5-1] Tính đạo hàm của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, (Với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$).

A. $y' = 3ax^2 + bx + c$. B. $y' = ax^2 + bx + c$.
C. $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. D. $y' = ax^2 + bx + d$.

Câu 59. [1D5-2] Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x}{x-2}$ đạo hàm của hàm số tại $x = 1$ là

A. $y'(1) = -4$. B. $y'(1) = -5$. C. $y'(1) = -3$. D. $y'(1) = -2$.

Câu 60. [1D5-2] Cho hàm số $y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$. $y'(0)$ bằng

A. $y'(0) = \frac{1}{2}$. B. $y'(0) = \frac{1}{3}$. C. $y'(0) = 1$. D. $y'(0) = 2$.

Câu 61. [1D5-2] Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ bởi $f(x) = \sqrt{x^2}$. Giá trị $f'(0)$ bằng

A. 0. B. 2. C. 1. D. Không tồn tại.

Câu 62. [1D5-2] Hàm số $y = \frac{(x-2)^2}{1-x}$ có đạo hàm là

A. $y' = \frac{-x^2 + 2x}{(1-x)^2}$. B. $y' = \frac{x^2 - 2x}{(1-x)^2}$. C. $y' = -2(x-2)$. D. $y' = \frac{x^2 + 2x}{(1-x)^2}$.

Câu 63. [1D5-3] Cho hàm số $y = \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^2$. Đạo hàm của hàm số $f(x)$ là

A. $f'(x) = \frac{-2(1-\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})^3}$. B. $f'(x) = \frac{-2(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3}$.
C. $f'(x) = \frac{2(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$. D. $f'(x) = \frac{2(1-\sqrt{x})}{1+\sqrt{x}}$.

- Câu 64. [1D5-3]** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ bởi $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Giá trị $f'(-8)$ bằng
- A. $\frac{1}{12}$. B. $-\frac{1}{12}$. C. $\frac{1}{6}$. D. $-\frac{1}{6}$.
- Câu 65. [1D5-2]** Cho hàm số $f(x)$ xác định bởi $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Giá trị $f'(0)$ bằng
- A. 0. B. 1. C. $\frac{1}{2}$. D. Không tồn tại.
- Câu 66. [1D5-2]** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ bởi $f(x) = -2x^2 + 3x$. Hàm số có đạo hàm $f'(x)$ bằng
- A. $-4x - 3$. B. $-4x + 3$. C. $4x + 3$. D. $4x - 3$.
- Câu 67. [1D5-2]** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $D = [0; +\infty)$ cho bởi $f(x) = x\sqrt{x}$ có đạo hàm là
- A. $f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$. B. $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$. C. $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{x}$. D. $f'(x) = x + \frac{\sqrt{x}}{2}$.
- Câu 68. [1D5-2]** Hàm số $f(x) = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$ xác định trên $D = (0; +\infty)$. Có đạo hàm của $f(x)$ là
- A. $f'(x) = x + \frac{1}{x} - 2$. B. $f'(x) = x - \frac{1}{x^2}$. C. $f'(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$. D. $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.
- Câu 69. [1D5-2]** Hàm số $f(x) = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$ xác định trên $D = (0; +\infty)$. Đạo hàm của hàm $f(x)$ là
- A. $f'(x) = \frac{3}{2}\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2\sqrt{x}}\right)$. B. $f'(x) = \frac{3}{2}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2\sqrt{x}}\right)$.
C. $f'(x) = \frac{3}{2}\left(-\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2\sqrt{x}}\right)$. D. $f'(x) = x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}}$.
- Câu 70. [1D5-2]** Cho hàm số $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ xác định trên $\mathbb{R}$. Giá trị $f'(-1)$ bằng
- A. 4. B. 14. C. 15. D. 24.
- Câu 71. [1D5-2]** Cho hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ xác định $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Đạo hàm của hàm số $f(x)$ là
- A. $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$. B. $f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$. C. $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$. D. $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$.
- Câu 72. [1D5-2]** Cho hàm số $f(x) = -1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ xác định $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Đạo hàm của hàm số $f(x)$ là
- A. $f'(x) = -\frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}\sqrt{x}$. B. $f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}\sqrt{x}$. C. $f'(x) = -\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}\sqrt{x}}$. D. $f'(x) = -\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}\sqrt{x^2}}$.
- Câu 73. [1D5-3]** Cho hàm số $f(x) = k\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}$ ($k \in \mathbb{R}$). Để $f'(1) = \frac{3}{2}$ thì ta chọn:
- A. $k = 1$. B. $k = -3$. C. $k = 3$. D. $k = \frac{9}{2}$.

Câu 74. [1D5-2] Đạo hàm của $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 5}$ là kết quả nào sau đây?

A. $y' = \frac{1}{2x-2}$. B. $y' = -\frac{2x-2}{(x^2 - 2x + 5)^2}$. C. $y' = \frac{2x-2}{(x^2 - 2x + 5)^2}$. D. $y' = -\frac{2x-2}{x^2 - 2x + 5}$.

Câu 75. [1D5-2] Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}$.

A. $y' = \frac{5}{(2x-1)^2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$. B. $y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{(2x-1)^2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$.
C. $y' = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$. D. $y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{(x+2)^2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$.

Câu 76. [1D5-3] Cho hàm số $f(x) = k\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}$ ($k \in \mathbb{R}$). Để $f'(1) = \frac{3}{2}$ thì ta chọn:

A. $k = 1$. B. $k = -3$. C. $k = 3$. D. $k = \frac{9}{2}$.

Câu 77. [1D5-3] Với $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x-1}$. Thì $f'(-1)$ bằng

A. 1. B. -3. C. -5. D. 0.

Câu 78. [1D5-3] Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$. Tính $y'(0)$ bằng

A. $y'(0) = \frac{1}{2}$. B. $y'(0) = \frac{1}{3}$. C. $y'(0) = 1$. D. $y'(0) = 2$.

Câu 79. [1D5-3] Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x}{x-2}$, đạo hàm của hàm số tại $x = 1$ là

A. $y'(1) = -4$. B. $y'(1) = -3$. C. $y'(1) = -2$. D. $y'(1) = -5$.

Câu 80. [1D5-3] Đạo hàm của hàm số $y = (2x-1)\sqrt{x^2+x}$ là

A. $y' = 2\sqrt{x^2+x} - \frac{4x^2-1}{2\sqrt{x^2+x}}$. B. $y' = 2\sqrt{x^2+x} + \frac{4x^2-1}{\sqrt{x^2+x}}$.
C. $y' = 2\sqrt{x^2+x} + \frac{4x^2-1}{2\sqrt{x^2+x}}$. D. $y' = 2\sqrt{x^2+x} + \frac{4x^2+1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

Câu 81. [1D5-3] Đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$ là

A. $y' = -\frac{1}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})^2}$. B. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x-1}}$.
C. $y' = \frac{1}{4\sqrt{x+1}} + \frac{1}{4\sqrt{x-1}}$. D. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$.

Câu 82. [1D5-3] Cho hàm số $f(x) = \sqrt{-5x^2 + 14x - 9}$. Tập hợp các giá trị của x để $f'(x) < 0$ là

A. $\left(\frac{7}{5}; \frac{9}{5}\right)$. B. $\left(-\infty; \frac{7}{5}\right)$. C. $\left(1; \frac{7}{5}\right)$. D. $\left(\frac{7}{5}; +\infty\right)$.

- Câu 83. [1D5-3]** Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x + m}{x - 2}$. Tìm m để phương trình $y' = 2$ có hai nghiệm phân biệt.
A. $m < 2$ và $m \neq -2$. **B.** $m \leq -2$. **C.** $m < -2$. **D.** $m > -2$.
- Câu 84. [1D5-3]** Cho hàm số $y = \frac{x^2 + (3m - 2)x + 1 - 2m}{x + 2}$. Tìm các giá trị của m để $y' \geq 0$ với mọi x thuộc tập xác định.
A. $m < \frac{9}{8}$. **B.** $m > \frac{9}{8}$. **C.** $m \leq \frac{9}{8}$. **D.** $m \geq \frac{9}{8}$.
- Câu 85. [1D5-3]** Cho hàm số $y = \frac{(m^2 - m)}{3}x^3 + 2mx^2 + x - 2m + 1$. Với giá trị nào của m thì $y' \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$?
A. $-1 \leq m \leq 0$. **B.** $-\frac{1}{3} < m \leq 0$. **C.** $-\frac{1}{3} \leq m < 0$. **D.** $-\frac{1}{3} \leq m \leq 0$.
- Câu 86. [1D5-4]** Cho hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - mx^2 + (3m - 1)x + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2018; 2018]$ để $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
A. 2019. **B.** 2018. **C.** 2017. **D.** 2016.
- Câu 87. [1D5-4]** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị (C) của nó đi qua các điểm $A(0; 15)$, $B(1; 13)$. Biết rằng $f'(x)$ là một đa thức bậc bốn và có bảng xét dấu là
- | | | | | | | |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----------|-----|
| x | $-\infty$ | -1 | 0 | 1 | $+\infty$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
- Hỏi điểm nào trong số bốn điểm dưới đây thuộc (C) ?
A. $Q(2; -1)$. **B.** $M(2; 71)$. **C.** $N(2; 41)$. **D.** $P(2; -41)$.
- Câu 88. [1D5-4]** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ có đồ thị là (C) . Hai đường thẳng d_1, d_2 có hệ số góc âm, song song với nhau và lần lượt tiếp xúc với (C) tại x_1, x_2 . Khẳng định nào sau đây đúng?
A. $0 < |x_1^2 - x_2^2| < 4$. **B.** $4 \leq |x_1^2 - x_2^2| < 6$. **C.** $6 \leq |x_1^2 - x_2^2| < 8$. **D.** $8 \leq |x_1^2 - x_2^2| < 16$.
- Câu 89. [1D5-4]** Cho hàm số $y = x^3 - 3(m + 1)x^2 + 9x - m$. Tìm m để phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $|x_1 - x_2| \leq 2$.
A. $m \in [-3; -1 - \sqrt{3}] \cup (-1 + \sqrt{3}; 1]$. **B.** $m \in [-3; -1 - \sqrt{3}] \cup [-1 + \sqrt{3}; 1]$.
C. $m \in (-1 - \sqrt{3}; -1 + \sqrt{3})$. **D.** $m \in [-3; -1 - \sqrt{3})$.

BÀI 3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

- Câu 90. [1D5-1]** Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?
A. $(\sin u)' = \cos u$, (với $u = u(x)$). **B.** $(\cos u)' = \sin u$, (với $u = u(x)$).
C. $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$, (với $u = u(x)$). **D.** $(\cot u)' = \frac{u'}{\sin^2 u}$, (với $u = u(x)$).

Câu 91. [1D5-1] Hàm số $y = \sin x$ có đạo hàm là

- A. $y' = \cos x$. B. $y' = -\cos x$. C. $y' = -\sin x$. D. $y' = \frac{1}{\cos x}$.

Câu 92. [1D5-1] Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm là

- A. $y' = \sin x$. B. $y' = -\sin x$. C. $y' = -\cos x$. D. $y' = \frac{1}{\sin x}$.

Câu 93. [1D5-1] Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm là

- A. $y' = \cot x$. B. $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$. C. $y' = \frac{1}{\sin^2 x}$. D. $y' = 1 - \tan^2 x$.

Câu 94. [1D5-1] Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm là

- A. $y' = -\tan x$. B. $y' = -\frac{1}{\cos^2 x}$. C. $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$. D. $y' = 1 + \cot^2 x$.

Câu 95. [1D5-1] Hàm số $y = \frac{1}{2}(1 + \tan x)^2$ có đạo hàm là

- A. $y' = 1 + \tan x$. B. $y' = (1 + \tan x)^2$.
C. $y' = (1 + \tan x)(1 + \tan^2 x)$. D. $y' = 1 + \tan^2 x$.

Câu 96. [1D5-1] Tính đạo hàm của hàm số $y = 5\sin x - 3\cos x$.

- A. $y' = -5\sin x + 3\cos x$. B. $y' = -5\sin x - 3\cos x$.
C. $y' = 5\cos x - 3\sin x$. D. $y' = 5\cos x + 3\sin x$.

Câu 97. [1D5-1] Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos \sqrt{2x+1}$.

- A. $y' = -\frac{\sin \sqrt{2x+1}}{2\sqrt{2x+1}}$. B. $y' = \frac{\sin \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$. C. $y' = -\frac{\sin \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$. D. $y' = -\sin \sqrt{2x+1}$.

Câu 98. [1D5-1] Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin 2x$

- A. $y' = 2(\sin 2x)'$. B. $y' = \cos 2x$. C. $y' = 2(\cos 2x)'$. D. $y' = 2\cos 2x$.

Câu 99. [1D5-2] Cho hàm số $f(x) = 3\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $f'(x)$ lần lượt là

- A. 1; -1. B. 12; -12. C. -6; 6. D. 6; -6.

Câu 100. [1D5-2] Đạo hàm của hàm số $y = \tan \frac{x+1}{2}$ là

- A. $y' = \frac{1}{2\cos^2 \frac{x+1}{2}}$. B. $y' = \frac{1}{\cos^2 \frac{x+1}{2}}$. C. $y' = -\frac{1}{2\cos^2 \frac{x+1}{2}}$. D. $y' = -\frac{1}{\cos^2 \frac{x+1}{2}}$.

Câu 101. [1D5-2] Cho hàm số $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$. Tìm nghiệm của phương trình $y' = 0$.

- A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$. B. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.
C. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$. D. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 102. [1D5-2] Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin(x^2 - 3x + 2)$.

A. $y' = \cos(x^2 - 3x + 2)$.

B. $y' = (2x - 3) \cdot \sin(x^2 - 3x + 2)$.

C. $y' = (2x - 3) \cdot \cos(x^2 - 3x + 2)$.

D. $y' = -(2x - 3) \cdot \cos(x^2 - 3x + 2)$.

Câu 103. [1D5-2] Đạo hàm của hàm số $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$ là

A. $-2\sin 2x$.

B. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$.

C. $2\sin 2x$.

D. $2\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$.

Câu 104. [1D5-2] Hàm số nào sau đây có đạo hàm là hàm số $y = \cos 2x + \sin x$?

A. $y = \sin 2x + \cos x$.

B. $y = \frac{1}{2}\sin 2x - \cos x$.

C. $y = \sin 2x - \cos x$.

D. $y = \frac{1}{2}\sin 2x + \cos x$.

Câu 105. [1D5-2] Cho hàm số $y = f(x) = \sin x + \cos x + \sqrt{2}x$. Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $f'(x) = 0$ là

A. $\frac{5\pi}{4}$

B. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

C. $x = \frac{3\pi}{4}$

D. $x = \frac{11\pi}{4}$

Câu 106. [1D5-2] Hàm số $y = \frac{\sin x}{x}$ có đạo hàm là

A. $y' = \frac{x \cos x + \sin x}{x^2}$.

B. $y' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$.

C. $y' = \frac{x \sin x + \cos x}{x^2}$.

D. $y' = \frac{x \sin x - \cos x}{x^2}$.

Câu 107. [1D5-2] Hàm số $y = x^2 \cdot \cos x$ có đạo hàm là

A. $y' = 2x \cdot \cos x - x^2 \sin x$.

B. $y' = 2x \cdot \cos x + x^2 \sin x$.

C. $y' = 2x \cdot \sin x - x^2 \cos x$.

D. $y' = 2x \cdot \sin x + x^2 \cos x$.

Câu 108. [1D5-2] Hàm số $y = \tan x - \cot x$ có đạo hàm là

A. $y' = \frac{1}{\cos^2 2x}$.

B. $y' = \frac{4}{\sin^2 2x}$.

C. $y' = \frac{4}{\cos^2 2x}$.

D. $y' = \frac{1}{\sin^2 2x}$.

Câu 109. [1D5-3] Hàm số $y = 2\sqrt{\sin x} - 2\sqrt{\cos x}$ có đạo hàm là

A. $y' = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} - \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$.

B. $y' = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} + \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$.

C. $y' = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} - \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$.

D. $y' = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} + \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$.

Câu 110. [1D5-3] Hàm số $y = f(x) = \frac{2}{\cos(\pi x)}$ có $f'(3)$ bằng

A. 2π .

B. $\frac{8\pi}{3}$.

C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

D. 0.

Câu 111. [1D5-3] Hàm số $y = \tan^2 \frac{x}{2}$ có đạo hàm là

- A. $y' = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos^3 \frac{x}{2}}$. B. $y' = \frac{2 \sin \frac{x}{2}}{\cos^3 \frac{x}{2}}$. C. $y' = \frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \cos^3 \frac{x}{2}}$. D. $y' = \tan^3 \left(\frac{x}{2} \right)$.

Câu 112. [1D5-3] Hàm số $y = \sqrt{\cot 2x}$ có đạo hàm là

- A. $y' = \frac{1 + \cot^2 2x}{\sqrt{\cot 2x}}$. B. $y' = \frac{-(1 + \cot^2 2x)}{\sqrt{\cot 2x}}$. C. $y' = \frac{1 + \tan^2 2x}{\sqrt{\cot 2x}}$. D. $y' = \frac{-(1 + \tan^2 2x)}{\sqrt{\cot 2x}}$.

Câu 113. [1D5-3] Cho hàm số $y = \cos 3x \cdot \sin 2x$. Tính $y' \left(\frac{\pi}{3} \right)$ bằng

- A. $y' \left(\frac{\pi}{3} \right) = -1$. B. $y' \left(\frac{\pi}{3} \right) = 1$. C. $y' \left(\frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2}$. D. $y' \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$.

Câu 114. [1D5-3] Cho hàm số $y = \frac{\cos 2x}{1 - \sin x}$. Tính $y' \left(\frac{\pi}{6} \right)$ bằng

- A. $y' \left(\frac{\pi}{6} \right) = 1$. B. $y' \left(\frac{\pi}{6} \right) = -1$. C. $y' \left(\frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3}$. D. $y' \left(\frac{\pi}{6} \right) = -\sqrt{3}$.

Câu 115. [1D5-3] Xét hàm số $f(x) = \sqrt[3]{\cos 2x}$. Chọn đáp án sai:

- A. $f \left(\frac{\pi}{2} \right) = -1$. B. $f'(x) = \frac{-2 \sin 2x}{3 \sqrt[3]{\cos^2 2x}}$.
C. $f' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1$. D. $3 \cdot y^2 \cdot y' + 2 \sin 2x = 0$.

Câu 116. [1D5-3] Cho hàm số $y = f(x) = \sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}$. Giá trị $f' \left(\frac{\pi^2}{16} \right)$ bằng

- A. 0. B. $\sqrt{2}$. C. $\frac{2}{\pi}$. D. $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

Câu 117. [1D5-3] Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{\tan x + \cot x}$. Giá trị $f' \left(\frac{\pi}{4} \right)$ bằng

- A. $\sqrt{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. 0. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 118. [1D5-3] Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$. Giá trị $f' \left(\frac{\pi}{2} \right)$ bằng

- A. 1. B. $\frac{1}{2}$. C. 0. D. Không tồn tại.

Câu 119. [1D5-3] Xét hàm số $y = f(x) = 2 \sin \left(\frac{5\pi}{6} + x \right)$. Tính giá trị $f' \left(\frac{\pi}{6} \right)$ bằng

- A. -1. B. 0. C. 2. D. -2.

Câu 120. [1D5-3] Cho hàm số $y = f(x) = \tan \left(x - \frac{2\pi}{3} \right)$. Giá trị $f'(0)$ bằng

- A. 4. B. $\sqrt{3}$. C. $-\sqrt{3}$. D. 3.

Câu 121. [1D5-3] Cho hàm số $y = f(x) = 2\sin\sqrt{x}$. Đạo hàm của hàm số y là

A. $y' = 2\cos\sqrt{x}$. B. $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$. C. $y' = 2\sqrt{x}\cos\frac{1}{\sqrt{x}}$. D. $y' = \frac{1}{\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}$.

Câu 122. [1D5-3] Cho hàm số $y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$. Tính $y'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ bằng

A. $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$. B. $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -1$. C. $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$. D. $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2$.

Câu 123. [1D5-3] Hàm số $y = \sin^2 x \cos x$ có đạo hàm là

A. $y' = \sin x(3\cos^2 x - 1)$. B. $y' = \sin x(3\cos^2 x + 1)$.
C. $y' = \sin x(\cos^2 x + 1)$. D. $y' = \sin x(\cos^2 x - 1)$.

Câu 124. [1D5-3] Đạo hàm của hàm số $y = \cot^2(\cos x) + \sqrt{\sin x - \frac{\pi}{2}}$ là

A. $y' = -2\cot(\cos x)\frac{1}{\sin^2(\cos x)} + \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x - \frac{\pi}{2}}}$.
B. $y' = 2\cot(\cos x)\frac{1}{\sin^2(\cos x)} \cdot \sin x + \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x - \frac{\pi}{2}}}$.
C. $y' = -2\cot(\cos x)\frac{1}{\sin^2(\cos x)} + \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x - \frac{\pi}{2}}}$.
D. $y' = 2\cot(\cos x)\frac{1}{\sin^2(\cos x)} \cdot \sin x + \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x - \frac{\pi}{2}}}$.

Câu 125. [1D5-4] Cho hàm số $f(x) = \sin 2x + 2(1 - 2m)\cos 2x - 2mx + 1$. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm.

A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m \in [-1; 1]$
C. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{6}; +\infty\right)$ D. $m \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$

Câu 126. [1D5-4] Cho hàm số $f(x) = m\cos x + 2\sin x - 3x + 1$, tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm.

A. $m \leq -\sqrt{5}$ hoặc $m \geq \sqrt{5}$. B. $-\sqrt{5} \leq m \leq \sqrt{5}$.
C. $m \leq -\sqrt{5}$. D. $m \geq \sqrt{5}$.

Câu 127. [1D5-4] Cho hàm số $f(x) = \sin^2 x \tan^2 x + 3\cos^2 x$ và $g(x) = 4\sin^2 x - \tan^2 x$. Khi đó:

A. $f'(x) + g'(x) = \sin 2x$. B. $f'(x) + g'(x) = 3$.
C. $f'(x) + g'(x) = 1$. D. $f'(x) + g'(x) = 0$.

Câu 128. [1D5-4] Cho hàm số $y = \frac{\cos x}{x}$, $x \neq 0$. Chọn đẳng thức đúng.

A. $y''x - 2y' + \cos x = 0$. B. $y''x - 2y' - \cos x = 0$.
C. $y''x + 2y' - \cos x = 0$. D. $y''x + 2y' + \cos x = 0$.

BÀI 4. VI PHÂN

Câu 129. [1D5-1] Cho hàm số $y = f(x) = (x-1)^2$. Biểu thức nào sau đây chỉ vi phân của hàm số $f(x)$?

- A. $dy = 2(x-1)dx$. B. $dy = (x-1)^2 dx$. C. $dy = 2(x-1)$. D. $dy = 2(x-1)dx$.

Câu 130. [1D5-1] Cho hàm số $y = x^3 - 5x + 6$. Vi phân của hàm số là

- A. $dy = (3x^2 - 5)dx$. B. $dy = -(3x^2 - 5)dx$. C. $dy = (3x^2 + 5)dx$. D. $dy = (3x^2 - 5)dx$.

Câu 131. [1D5-1] Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$. Vi phân của hàm số là

- A. $dy = \frac{dx}{(x-1)^2}$. B. $dy = \frac{3dx}{(x-1)^2}$. C. $dy = \frac{-3dx}{(x-1)^2}$. D. $dy = -\frac{dx}{(x-1)^2}$.

Câu 132. [1D5-1] Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x-1}$. Vi phân của hàm số là

- A. $dy = -\frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2}dx$. B. $dy = \frac{2x+1}{(x-1)^2}dx$. C. $dy = -\frac{2x+1}{(x-1)^2}dx$. D. $dy = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2}dx$.

Câu 133. [1D5-1] Cho hàm số $y = x^3 - 9x^2 + 12x - 5$. Vi phân của hàm số là

- A. $dy = (3x^2 - 18x + 12)dx$. B. $dy = (-3x^2 - 18x + 12)dx$.
C. $dy = -(3x^2 - 18x + 12)dx$. D. $dy = (-3x^2 + 18x - 12)dx$.

Câu 134. [1D5-1] Tìm vi phân của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$.

- A. $dy = (3x^2 + 6x - 2)dx$. B. $dy = 3x^2 + 6x - 2dx$.
C. $dy = (-3x^2 + 6x + 2)dx$. D. $dy = (x^2 + 3x - 2)dx$.

Câu 135. [1D5-1] Vi phân của hàm số $y = \cos x$ là

- A. $dy = \cos x dx$. B. $dy = -\cos x dx$. C. $dy = -\sin x dx$. D. $dy = \sin x dx$.

Câu 136. [1D5-2] Cho hàm số $y = \frac{1}{3x^3}$. Vi phân của hàm số là

- A. $dy = \frac{1}{4}dx$. B. $dy = \frac{1}{x^4}dx$. C. $dy = -\frac{1}{x^4}dx$. D. $dy = x^4 dx$.

Câu 137. [1D5-2] Cho hàm số $y = \sin x - 3\cos x$. Vi phân của hàm số là

- A. $dy = (-\cos x + 3\sin x)dx$. B. $dy = (-\cos x - 3\sin x)dx$.
C. $dy = (\cos x + 3\sin x)dx$. D. $dy = -(\cos x + 3\sin x)dx$.

Câu 138. [1D5-2] Cho hàm số $y = \sin^2 x$. Vi phân của hàm số là

- A. $dy = -\sin 2x dx$. B. $dy = \sin 2x dx$. C. $dy = \sin x dx$. D. $dy = 2\cos x dx$.

Câu 139. [1D5-2] Hàm số $y = x \sin x + \cos x$ có vi phân là

- A. $dy = (x \cos x - \sin x)dx$. B. $dy = (x \cos x)dx$.
C. $dy = (\cos x - \sin x)dx$. D. $dy = (x \sin x)dx$.

Câu 140. [1D5-2] Hàm số $y = \frac{x}{x^2+1}$. Có vi phân là

A. $dy = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} dx$. B. $dy = \frac{2x}{(x^2+1)} dx$. C. $dy = \frac{1-x^2}{(x^2+1)} dx$. D. $dy = \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$.

Câu 141. [1D5-2] Cho hàm số $y = 5\sin 2x$ vi phân của hàm số tại $x = \frac{\pi}{3}$ là

A. $dy = 5dx$. B. $dy = 10\cos 2x dx$. C. $dy = -10\cos 2x dx$. D. $dy = -5dx$.

Câu 142. [1D5-2] Cho hàm số $y = \frac{x+3}{1-2x}$, vi phân của hàm số tại $x = -3$ là

A. $dy = \frac{1}{7} dx$. B. $dy = 7dx$. C. $dy = -\frac{1}{7} dx$. D. $dy = -7dx$.

Câu 143. [1D5-2] Cho hàm số $y = \sin(\sin x)$ vi phân của hàm số tại x là

A. $dy = \cos(\sin x) dx$. B. $dy = \sin(\cos x) dx$.
C. $dy = \cos(\sin x) \cdot \cos x dx$. D. $dy = \cos(\sin x) \cdot \sin x dx$.

Câu 144. [1D5-2] Cho hàm số $y = \tan \sqrt{x}$ vi phân của hàm số tại x là

A. $dy = \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot \cos \sqrt{x}} dx$. B. $dy = \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot \cos^2 x} dx$.
C. $dy = \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot \cos^2 \sqrt{x}} dx$. D. $dy = \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot \cos \sqrt{x}} dx$.

Câu 145. [1D5-2] Cho hàm số $y = \cos^2 2x$ vi phân của hàm số tại x là

A. $dy = 4\cos 2x \sin 2x dx$. B. $dy = 2\cos 2x \sin 2x dx$.
C. $dy = -4\cos 2x \sin 2x dx$. D. $dy = -2\cos 2x \sin 2x dx$.

Câu 146. [1D5-2] Cho hàm số $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ vi phân của hàm số tại x là

A. $dy = \frac{-4}{(1+x^2)^2} dx$. B. $dy = \frac{-4x}{(1+x^2)^2} dx$. C. $dy = \frac{-dx}{(1+x^2)^2}$. D. $dy = \frac{-4}{1+x^2} dx$.

Câu 147. [1D5-2] Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Kết quả nào dưới đây là đúng?

A. $f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - x) = 0$. B. $f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 1 = -1$.
C. $f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x = 0$. D. $df(0) = -dx$.

Câu 148. [1D5-2] Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{khi } x \geq 0 \\ x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây là sai?

A. $f'(0^+) = 1$. B. $f'(0^-) = 1$.
C. $df(0) = dx$. D. Hàm số không có vi phân tại $x = 0$.

Câu 149. [1D5-2] Hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$ có vi phân là

A. $dy = -\frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2} dx$ B. $dy = \frac{2x+1}{(x-1)^2} dx$ C. $dy = -\frac{2x+1}{(x-1)^2} dx$ D. $dy = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2} dx$

Câu 150. [1D5-2] Hàm số $y = \frac{x}{x^2+1}$ có vi phân là

- A. $dy = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} dx$. B. $dy = \frac{2x}{(x^2+1)} dx$. C. $dy = \frac{1-x^2}{(x^2+1)} dx$. D. $dy = \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$.

Câu 151. [1D5-2] Vi phân của hàm số $y = \sqrt{x^2-5x}$ bằng biểu thức nào sau đây?

- A. $dy = \frac{1}{2\sqrt{x^2-5x}} dx$. B. $dy = \frac{2x-5}{\sqrt{x^2-5x}} dx$.
C. $dy = -\frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x}} dx$. D. $dy = \frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x}} dx$.

Câu 152. [1D5-2] Biểu thức nào sau đây là vi phân của hàm số $y = \frac{x}{x^2+1}$?

- A. $\frac{3x^2+1}{(x^2+1)^2} dx$. B. $\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} dx$. C. $\frac{-x^2+1}{x^2+1} dx$. D. $\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$.

Câu 153. [1D5-3] Vi phân của hàm số $y = \frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ là

- A. $dy = \frac{2\sqrt{x}}{4x\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx$. B. $dy = \frac{\sin(2\sqrt{x})}{4x\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx$.
C. $dy = \frac{2\sqrt{x} - \sin(2\sqrt{x})}{4x\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx$. D. $dy = -\frac{2\sqrt{x} - \sin(2\sqrt{x})}{4x\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx$.

Câu 154. [1D5-3] Xét hàm số $y = f(x) = \sqrt{1+\cos^2 2x}$. Chọn câu đúng:

- A. $df(x) = \frac{-\sin 4x}{2\sqrt{1+\cos^2 2x}} dx$. B. $df(x) = \frac{-\sin 4x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}} dx$.
C. $df(x) = \frac{\cos 2x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}} dx$. D. $df(x) = \frac{-\sin 2x}{2\sqrt{1+\cos^2 2x}} dx$.

Câu 155. [1D5-4] Tính $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$.

- A. $-\cot x$. B. $-\tan x$. C. $\cot x$. D. $\tan x$.

BÀI 5. ĐẠO HÀM CẤP CAO

Câu 156. [1D5-1] Hàm số $y = \frac{x}{x-2}$ có đạo hàm cấp hai là

- A. $y'' = 0$. B. $y'' = \frac{1}{(x-2)^2}$. C. $y'' = -\frac{4}{(x-2)^2}$. D. $y'' = \frac{4}{(x-2)^3}$.

Câu 157. [1D5-1] Hàm số $y = (x^2+1)^3$ có đạo hàm cấp ba là

- A. $y''' = 12(x^2+1)$. B. $y''' = 24(x^2+1)$.
C. $y''' = 24(5x^2+3)$. D. $y''' = -12(x^2+1)$.

Câu 158. [1D5-1] Cho hàm số $f(x) = (x+1)^3$. Giá trị $f''(0)$ bằng

- A. 3. B. 6. C. 12. D. 24.

Câu 159. [1D5-2] Hàm số $y = \sqrt{2x+5}$ có đạo hàm cấp hai bằng

- A. $y'' = \frac{1}{(2x+5)\sqrt{2x+5}}$. B. $y'' = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$.
C. $y'' = -\frac{1}{(2x+5)\sqrt{2x+5}}$. D. $y'' = -\frac{1}{\sqrt{2x+5}}$.

Câu 160. [1D5-2] Hàm số $y = \frac{x^2+x+1}{x+1}$ có đạo hàm cấp 5 bằng

- A. $y^{(5)} = -\frac{120}{(x+1)^6}$. B. $y^{(5)} = \frac{120}{(x+1)^5}$. C. $y^{(5)} = \frac{1}{(x+1)^5}$. D. $y^{(5)} = -\frac{1}{(x+1)^5}$.

Câu 161. [1D5-2] Hàm số $y = x\sqrt{x^2+1}$ có đạo hàm cấp 2 bằng

- A. $y'' = -\frac{2x^3+3x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. B. $y'' = \frac{2x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}$.
C. $y'' = \frac{2x^3+3x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. D. $y'' = -\frac{2x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Câu 162. [1D5-2] Hàm số $y = (2x+5)^5$ có đạo hàm cấp 3 bằng

- A. $y''' = 80(2x+5)^3$. B. $y''' = 480(2x+5)^2$.
C. $y''' = -480(2x+5)^2$. D. $y''' = -80(2x+5)^3$.

Câu 163. [1D5-2] Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm cấp 2 bằng

- A. $y'' = -\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$. B. $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$. C. $y'' = -\frac{1}{\cos^2 x}$. D. $y'' = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$.

Câu 164. [1D5-2] Cho hàm số $y = \sin x$. Chọn câu sai.

- A. $y' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. B. $y'' = \sin(x + \pi)$. C. $y''' = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$. D. $y^{(4)} = \sin(2\pi - x)$.

Câu 165. [1D5-2] Hàm số $y = \frac{-2x^2+3x}{1-x}$ có đạo hàm cấp 2 bằng

- A. $y'' = 2 + \frac{1}{(1-x)^2}$. B. $y'' = \frac{2}{(1-x)^3}$. C. $y'' = \frac{-2}{(1-x)^3}$. D. $y'' = \frac{2}{(1-x)^4}$.

Câu 166. [1D5-2] Hàm số $y = f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. Phương trình $f^{(4)}(x) = -8$ có nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là

- A. $x = \frac{\pi}{2}$. B. $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{6}$. C. $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{3}$. D. $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{2}$.

Câu 167. [1D5-2] Cho hàm số $y = \sin 2x$. Chọn khẳng định đúng.

- A. $4y - y' = 0$. B. $4y + y'' = 0$.
C. $y = y' \tan 2x$. D. $y^2 = (y')^2 = 4$.

Câu 168. [1D5-2] Cho hàm số $y = f(x) = -\frac{1}{x}$. Xét hai mệnh đề:

$$(I): y'' = f''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

$$(II): y''' = f'''(x) = -\frac{6}{x^4}.$$

Mệnh đề nào đúng?

- A. Chỉ (I) đúng. B. Chỉ (II) đúng. C. Cả hai đều đúng. D. Cả hai đều sai.

Câu 169. [1D5-2] Nếu $f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$ thì $f(x)$ bằng

A. $\frac{1}{\cos x}$.

B. $-\frac{1}{\cos x}$.

C. $\cot x$.

D. $\tan x$.

Câu 170. [1D5-2] Cho hàm số $y = f(x) = \frac{-x^2 + x + 2}{x - 1}$. Xét hai mệnh đề:

$$(I): y' = f'(x) = -1 - \frac{2}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1.$$

$$(II): y'' = f''(x) = \frac{4}{(x-1)^2} > 0, \forall x \neq 1.$$

Mệnh đề nào đúng?

- A. Chỉ (I) đúng. B. Chỉ (II) đúng. C. Cả hai đều đúng. D. Cả hai đều sai.

Câu 171. [1D5-2] Cho hàm số $f(x) = \sin^3 x + x^2$. Giá trị $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. 0.

B. -1.

C. -2.

D. 5.

Câu 172. [1D5-2] Cho hàm số $f(x) = 5(x+1)^3 + 4(x+1)$. Tập nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$ là

A. $[-1; 2]$.

B. $(-\infty; 0]$.

C. $\{-1\}$.

D. $\emptyset$.

Câu 173. [1D5-2] Cho hàm số $y = \frac{1}{x-3}$. Khi đó:

A. $y'''(1) = \frac{3}{8}$.

B. $y'''(1) = \frac{1}{8}$.

C. $y'''(1) = -\frac{3}{8}$.

D. $y'''(1) = -\frac{1}{4}$.

Câu 174. [1D5-2] Cho hàm số $y = (ax+b)^5$ với a, b là tham số. Khi đó:

A. $y^{(10)}(1) = 0$.

B. $y^{(10)}(1) = 10a + b$.

C. $y^{(10)}(1) = 5a$.

D. $y^{(10)}(1) = 10a$.

Câu 175. [1D5-2] Cho hàm số $y = \sin^2 2x$. Tính $y^{(4)}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ bằng

A. 64.

B. -64.

C. $64\sqrt{3}$.

D. $-64\sqrt{3}$.

Câu 176. [1D5-2] Nếu $f(x) = \sin^3 x + x^2$ thì $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. -2.

D. 5.

Câu 177. [1D5-2] Cho hàm số $y = \frac{1}{x+1}$. Đạo hàm cấp hai y'' của hàm số đã cho là

A. $y'' = \frac{2}{(x+1)^4}$.

B. $y'' = \frac{2}{(x+1)^3}$.

C. $y'' = \frac{-2}{(x+1)^3}$.

D. $y'' = \frac{-2}{(x+1)^4}$.

Câu 178. [1D5-2] Cho hàm số $y = \cos^2 x$. Đạo hàm cấp hai y'' bằng

A. $y'' = -2\cos 2x$.

B. $y'' = -4\cos 2x$.

C. $y'' = 2\cos 2x$.

D. $y'' = 4\cos 2x$.

- Câu 179. [1D5-2]** Cho hàm số $f(x) = (x+1)^4$. Giá trị của $f''(2)$ bằng
 A. 27. B. 81. C. 96. D. 108.
- Câu 180. [1D5-2]** Cho hàm số $y = \sin^3 x$. Giá trị biểu thức $M = y'' + 9y$ bằng
 A. $\sin x$. B. $6\sin x$. C. $6\cos x$. D. $-6\sin x$.
- Câu 181. [1D5-2]** Cho hàm số $y = A\sin(\omega x + \varphi)$. Tính $M = y'' + \omega^2 y$.
 A. $M = 1$. B. $M = -1$. C. $M = \cos^2(\omega x + 4)$. D. $M = 0$.
- Câu 182. [1D5-2]** Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x-2}$. Tính y'' .
 A. $y = \frac{-2}{(x-2)^3}$. B. $y = \frac{2}{(x-2)^3}$. C. $y = \frac{-2}{(x-2)^4}$. D. $y = \frac{2}{(x-2)^4}$.
- Câu 183. [1D5-2]** Cho $y = x\sin x$. Tính y'' .
 A. $y = 2\sin x - x\cos x$. B. $y = 2\cos x - x\sin x$. C. $y = \sin x + x\cos x$. D. $y = \cos x + x\sin x$.
- Câu 184. [1D5-2]** Cho $y = \cos^2 x$. Tính y'' .
 A. $y = -\sin 2x$. B. $y = \sin 2x$. C. $y = -2\cos 2x$. D. $y = 2\cos 2x$.
- Câu 185. [1D5-2]** Cho $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tính y'' .
 A. $y = 3ax^2 + 2bx + c$. B. $y = 3ax^2 - 2bx + c$. C. $y = 6ax + 2b$. D. $y'' = 6ax - 2b$.
- Câu 186. [1D5-2]** Cho $f(x) = (x+10)^6$. Giá trị của $f''(2)$ bằng
 A. 622080. B. 1492992. C. 124416. D. 103680.
- Câu 187. [1D5-2]** Cho $f(x) = \sin 3x$. Giá trị của $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ bằng
 A. -9. B. 0. C. 9. D. -3.
- Câu 188. [1D5-2]** Cho $f(x) = \sin 3x$. Giá trị của $f''(0)$ bằng
 A. 0. B. 3. C. -3. D. 1.
- Câu 189. [1D5-2]** Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ tại điểm $x = 2$.
 A. $f''(2) = 14$. B. $f''(2) = 1$. C. $f''(2) = 10$. D. $f''(2) = 28$.
- Câu 190. [1D5-2]** Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \tan x$.
 A. $y'' = -\frac{1}{\cos^4 x}$. B. $y'' = 2\tan x$.
 C. $y'' = -\frac{2}{\cos^3 x}$. D. $y'' = 2\tan x(1 + \tan^2 x)$.
- Câu 191. [1D5-2]** Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ là
 A. $y'' = \frac{6}{(x-2)^3}$. B. $y'' = \frac{-6}{(x-2)^4}$. C. $y'' = \frac{-6}{(x-2)^3}$. D. $y'' = \frac{6}{(x-2)^4}$.
- Câu 192. [1D5-2]** Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \sin 2x$, biết đạo hàm cấp một của hàm số là $y' = 2\cos 2x$.
 A. $y'' = -4\sin 2x$. B. $y'' = 4\sin 2x$. C. $y'' = -4\cos 2x$. D. $y'' = 4\cos 2x$.
- Câu 193. [1D5-2]** Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = 2x + \cos x$, biết đạo hàm cấp một của hàm số là $y' = 2 - \sin x$
 A. $y'' = 2 - \sin x$. B. $y'' = 2 - \cos x$. C. $y'' = -\sin x$. D. $y'' = -\cos x$.

- Câu 194. [1D5-2]** Cho hàm số $y = \cos^2 x$. Đạo hàm cấp hai y'' bằng
 A. $y'' = -2 \cos 2x$. B. $y'' = -4 \cos 2x$. C. $y'' = 2 \cos 2x$. D. $y'' = -2 \sin x$.
- Câu 195. [1D5-2]** Cho hàm số $y = \frac{3x-2}{1-x}$. Giải bất phương trình $y'' > 0$.
 A. $x > 1$. B. $x < 1$. C. $x \neq 1$. D. vô nghiệm.
- Câu 196. [1D5-2]** Cho hàm số $y = x \cdot \sin x$. Đẳng thức nào sau đây đúng?
 A. $y'' + y = -2 \cos x$. B. $y'' - y = -(x+1) \sin x$.
 C. $y'' + y = 2 \cos x$. D. $y'' - y = -2 \cos x$.
- Câu 197. [1D5-2]** Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x+1}{1-x}$. Phương trình $f'(x) + f''(x) = 0$ có nghiệm là
 A. $x = -\frac{1}{2}$. B. $x = \frac{3}{2}$. C. $x = \frac{1}{2}$. D. $x = -\frac{3}{2}$.
- Câu 198. [1D5-2]** Cho hàm số $y = \sin^2 2x$ giá trị của biểu thức $M = \frac{1}{4}(y')^2 + \frac{1}{64}(y'')^2$ bằng
 A. 1. B. -1. C. 4. D. 3.
- Câu 199. [1D5-3]** Cho hàm số $y = \frac{x+4}{x-3}$. Giá trị biểu thức $M = 2(y')^2 + (1-y) \cdot y''$ bằng
 A. $M = 0$. B. $M = 1$. C. $M = \frac{1}{x+4}$. D. $M = \frac{2x}{(x+4)^2}$.
- Câu 200. [1D5-3]** Cho hàm số $y = \sqrt{2x-x^2}$. Giá trị biểu thức $M = y^3 \cdot y'' + 1$ bằng
 A. -2. B. 0. C. -1. D. $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$.
- Câu 201. [1D5-3]** Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$. Giá trị biểu thức $y'^2 - 2y \cdot y''$ bằng
 A. 0. B. 2. C. -1. D. 1.
- Câu 202. [1D5-3]** Cho hàm số $y = x \sin x$. Giá trị biểu thức $xy - 2(y' - \sin x) + xy''$ bằng
 A. 1. B. 0. C. 2. D. $\sin x$.
- Câu 203. [1D5-3]** Cho hàm số $y = x \cdot \tan x$. Tính $M = x^2 y'' - 2(x^2 + y^2)(1+y)$.
 A. $\frac{x^2}{\cos^2 x}$. B. 1. C. $x^2 - \tan^2 x$. D. 0.
- Câu 204. [1D5-3]** Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = t^3 - 3t^2 - 9t + 2017$ (t tính bằng giây và S tính bằng mét). Tính gia tốc khi $t = 3s$.
 A. 15 m/s^2 . B. 9 m/s^2 . C. 12 m/s^2 . D. 6 m/s^2 .
- Câu 205. [1D5-3]** Cho hàm số $y = \sin 2x - \cos 2x$. Giải phương trình $y'' = 0$
 A. $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{\pi}{8} + k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \frac{\pi}{8} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 206. [1D5-3] Cho hàm số $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$. Giải bất phương trình $y'' < 0$.

- A. $x \in (-\infty; 1) \setminus \{0\}$. B. $x \in (1; +\infty)$. C. $x \in (-1; 1)$. D. $x \in (-2; 2)$.

Câu 207. [1D5-3] Cho hàm số $y = (m-4)\frac{x^2}{2} + \cos x$. Tìm m sao cho $y'' \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

- A. $m \leq 3$. B. $m \leq 2$. C. $m \geq 3$. D. $m \geq 2$.

Câu 208. [1D5-3] Cho hàm số $y = (2-m)x^4 + 2x^3 + 2mx^2 + 2m - 1$. Tìm m để phương trình $y'' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

- A. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right) \setminus \{2\}$. B. $m \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{2\}$.
C. $m \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{2\}$. D. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right) \setminus \{2\}$.

Câu 209. [1D5-3] Cho hàm số $y = \frac{3x-2}{1-x}$. Giải bất phương trình $y'' > 0$.

- A. $x > 1$. B. $x < 1$. C. $x \neq 1$. D. vô nghiệm.

Câu 210. [1D5-3] Cho hàm số $y = \frac{1}{(x+1)^3}$. Giải bất phương trình $y'' < 0$.

- A. $x < -1$. B. $x > -1$. C. $x \neq 1$. D. vô nghiệm.

Câu 211. [1D5-3] Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x^2+1}$. Giải phương trình $y'' = 0$.

- A. $x = 1; x = 1 \pm \sqrt{3}$. B. $x = 1; x = -2 \pm \sqrt{3}$.
C. $x = 1; x = -1 \pm \sqrt{3}$. D. $x = 1; x = -3 \pm \sqrt{3}$.

Câu 212. [1D5-3] Đạo hàm cấp 2018 của hàm số $y = \cos x$ là

- A. $\sin x$. B. $-\sin x$. C. $\cos x$. D. $-\cos x$.

Câu 213. [1D5-3] Giả sử $h(x) = 5(x+1)^3 + 4(x+1)$. Tập nghiệm của phương trình $h''(x) = 0$ là

- A. $[-1; 2]$. B. $(-\infty; 0]$. C. $\{-1\}$. D. $\emptyset$.

Câu 214. [1D5-3] Tính gia tốc tức thời của chuyển động $S = f(t) = t^3 - 3t^2 + 7t - 2$ tại thời điểm $t_0 = 2$ bằng

- A. -6 . B. 7 . C. -7 . D. 6 .

Câu 215. [1D5-3] Tính gia tốc tức thời của chuyển động $s = f(t) = 3\sin 2t + 2\cos 2t$ tại thời điểm $t_0 = \frac{\pi}{4}$ bằng

- A. -12 . B. 12 . C. 20 . D. -20 .

Câu 216. [1D5-3] Cho hàm số $y = \frac{1}{x}$. Khi đó $y^{(n)}(x)$ bằng

- A. $(-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$. B. $\frac{n!}{x^{n+1}}$. C. $(-1)^n \cdot \frac{n!}{x^n}$. D. $\frac{n!}{x^n}$.

Câu 217. [1D5-4] Đạo hàm cấp n , với $n \in \mathbb{N}^*$ của hàm số $y = \sin x$.

- A. $y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$. B. $y^{(n)} = n! \sin x$.
C. $y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$. D. $y^{(n)} = n! \cos x$.

CÁC ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG 4

ĐỀ SỐ 1 – THPT CHƯƠNG MỸ B, HÀ NỘI

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM: (2,5 điểm).

- Câu 1.** [1D5-1] Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{f(2)} = 3$. Kết quả nào sau đây đúng?
- A. $f'(x) = 2$. B. $f'(2) = 3$. C. $f'(x) = 3$. D. $f'(3) = 2$.
- Câu 2.** [1D5-1] Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$, có đạo hàm $x = -1$. Định nghĩa về đạo hàm nào sau đây là đúng?
- A. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) + f(-1)}{x + 1} = f'(-1)$. B. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) + f(1)}{x + 1} = f'(-1)$.
- C. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = f'(-1)$. D. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - 1} = f'(x)$.
- Câu 3.** [1D5-2] Đạo hàm của hàm số $y = f(x) = x^2 + 1$ tại $x = -2$ bằng:
- A. -3 . B. -2 . C. -4 . D. -1 .
- Câu 4.** [1D5-1] Cho hàm số $y = f(x)$ và $f'(-1) = 2$ thì điều nào sau đây là đúng?
- A. $\lim_{\Delta x \rightarrow -2} (\Delta x) = 0$. B. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2$. C. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x + 2}{\Delta x + 1} = 2$. D. $\lim_{\Delta x \rightarrow -1} (\Delta x + 2) = 2$.
- Câu 5.** [1D5-2] Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x$ tại điểm $M(1; -2)$ có hệ số góc k là:
- A. $k = -1$. B. $k = 1$. C. $k = -7$. D. $k = -2$.
- Câu 6.** [1D5-2] Nếu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x$ (C) có tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 3x - 10$ thì số tiếp tuyến của (C) là:
- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.
- Câu 7.** [1D5-2] Hàm số $y = x^3 + 2x^2 + 4x + 5$ có đạo hàm là:
- A. $y = 3x^2 + 2x + 4$. B. $y' = 3x^2 + 4x + 4$. C. $y = 3x + 2x + 4$. D. $y = 3x^2 + 4x + 4 + 5$.
- Câu 8.** [1D5-2] Hàm số $y = x + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$ có đạo hàm là:
- A. $y' = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}$. B. $y' = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^4}$. C. $y' = 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^4}$. D. $y' = 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}$.
- Câu 9.** [1D5-2] Hàm số $y = 2x + \frac{1}{\sqrt{x}}$ có đạo hàm $y'(4)$ là:
- A. $\frac{17}{2}$. B. $\frac{5}{2}$. C. $\frac{31}{16}$. D. $\frac{17}{4}$.
- Câu 10.** [1D5-2] Hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 5$ có đạo hàm $y' = 0$ tại các điểm sau đây:
- A. $x = 0$ hoặc $x = 1$. B. $x = -1$ hoặc $x = -\frac{5}{2}$. C. $x = 1$ hoặc $x = \frac{5}{2}$. D. $x = 0$.

- Câu 11. [1D5-2]** Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ tại điểm $A(2;3)$ là:
- A. $y = 2x - 1$. B. $y = \frac{1}{2}x + 4$. C. $y = -2x + 1$. D. $y = -2x + 7$.
- Câu 12. [1D5-3]** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + m$ (với m là tham số) tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ là đường thẳng có phương trình:
- A. $x = m - 1$. B. $y = 0$. C. $y = m - 1$. D. $y = m - 3$.
- Câu 13. [1D5-2]** Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x+2}$. Giá trị $P = f(2) + (x+2) \cdot f'(2)$ là:
- A. $2 + \frac{(x+2)}{4}$. B. $2 + \frac{(x+2)}{2\sqrt{x+2}}$. C. $2 + \frac{(x+2)}{2}$. D. $2 + \sqrt{x+2}$.
- Câu 14. [1D5-2]** Hàm số $y = (x^4 - 1)^3 + \frac{2x-1}{x+2}$ có đạo hàm là:
- A. $12x^3(x^4 - 1)^2 + \frac{5}{(x+2)^2}$. B. $3(x^4 - 1)^2 + \frac{5}{(x+2)^2}$.
 C. $12x^3(x^4 - 1)^2 + \frac{3}{(x+2)^2}$. D. $4x^3(x^4 - 1)^3 + \frac{5}{(x+2)^2}$.
- Câu 15. [1D5-2]** Đạo hàm của biểu thức $f(x) = (x^2 - 3)\sqrt{x^2 - 2x + 4}$ là:
- A. $f'(x) = 2x\sqrt{x^2 - 2x + 4} + \frac{(x-1)(x^2 - 3)}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}$. B. $f'(x) = 2x \frac{(x-1)(x^2 - 3)}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}$.
 C. $f'(x) = 2x\sqrt{x^2 - 2x + 4} + \frac{(x^2 - 3)}{2\sqrt{x^2 - 2x + 4}}$. D.
 $f'(x) = (2x - 3)\sqrt{x^2 - 2x + 4} + \frac{(x-1)(x^2 - 3)}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}$.
- Câu 16. [1D5-4]** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}(m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - 2x + 1$. Giá trị m để $y' - 2x - 2 > 0$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.
- A. $(-\infty; -1); (1; +\infty)$. B. $\left(0; \frac{4}{5}\right)$. C. Không tồn tại m . D. $(-1; 0); \left(\frac{4}{5}; 1\right)$.
- Câu 17. [1D5-3]** Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Nghiệm của bất phương trình $f'(x) > 0$ là:
- A. $(0; 2)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(2; +\infty)$. D. $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.
- Câu 18. [1D5-2]** Hàm số $f(x) = \sin 3x$ có đạo hàm $f'(x)$ là:
- A. $3\cos 3x$. B. $\cos 3x$. C. $-3\cos 3x$. D. $-\cos 3x$.
- Câu 19. [1D5-2]** Đạo hàm của hàm số $y = 3\sin x - 5\cos x$ là:
- A. $y' = 3\cos x - 5\sin x$. B. $y' = -3\cos x - 5\sin x$.
 C. $y' = -3\cos x + 5\sin x$. D. $y' = 3\cos x + 5\sin x$.
- Câu 20. [1D5-2]** Đạo hàm của hàm số $y = \cos x - \sin x + 2x$ là:
- A. $\sin x - \cos x + 2$. B. $-\sin x + \cos x + 2$. C. $-\sin x - \cos x + 2x$. D. $-\sin x - \cos x + 2$.

Câu 21. [1D5-2] Tính $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ biết $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

- A. 0. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. -2.

Câu 22. [1D5-2] Đạo hàm của hàm số $y = x \cot x$ là:

- A. $\cot x - \frac{x}{\sin^2 x}$. B. $\cot x + \frac{x}{\sin^2 x}$. C. $\cot x - \frac{x}{\cos^2 x}$. D. $\cot x + \frac{x}{\cos^2 x}$.

Câu 23. [1D5-2] Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{1 + 2 \tan x}$ là:

- A. $y' = \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{1 + 2 \tan x}}$. B. $y' = \frac{1}{\sin^2 x \sqrt{1 + 2 \tan x}}$.
C. $y' = \frac{1 + 2 \tan x}{2 \sqrt{1 + 2 \tan x}}$. D. $y' = \frac{1}{2 \sqrt{1 + 2 \tan x}}$.

Câu 24. [1D5-4] Cho hàm số $f(x) = 2 \cos^2(4x - 1)$. Miền giá trị của $f'(x)$ là:

- A. $-2 \leq f'(x) \leq 2$. B. $-4 \leq f'(x) \leq 4$. C. $-8 \leq f'(x) \leq 8$. D. $-16 \leq f'(x) \leq 16$.

Câu 25. [1D5-4] Cho hàm số $y = \cos^2 2x$. Số nghiệm của phương trình $y' = 0$ trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là:

- A. 4. B. 3. C. 2. D. Vô số nghiệm.

-----HẾT-----

ĐỀ SỐ 2 - THPT HOÀNG VĂN THỤ, Hòa Bình

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (7 điểm)

Câu 1. [1D5-1] Số gia của hàm số $f(x) = x^2 - 1$ biết $x_0 = 1$ và $\Delta x = 1$ là

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 2. [1D5-1] Đạo hàm của hàm số $y = x^5 - 4x^3 - x^2 + \frac{x}{2}$ là

- A. $5x^4 - 12x^2 - 2x + \frac{1}{4}$. B. $5x^5 - 12x^2 + 2x + \frac{1}{2}$.
C. $5x^4 - 12x^2 - 2x + \frac{1}{2}$. D. $5x^4 + 12x^2 - 2x + \frac{1}{4}$.

Câu 3. [1D5-2] Nghiệm của bất phương trình $f'(x) > 0$ với $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$ là

- A. $x > \frac{2}{3} \vee x < 0$. B. $0 < x < \frac{2}{3}$. C. $x > \frac{4}{3} \vee x < 0$. D. $0 < x < \frac{4}{3}$.

Câu 4. [1D5-2] Phương trình tiếp của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x}{x - 2}$ tại điểm $A(1; -2)$ là

- A. $y = 5x + 3$. B. -2 . C. $y = 9x + 7$. D. $y = 9x - 7$.

Câu 5. [1D5-2] Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ tại điểm $(-1; -2)$ là

- A. 9. B. $y = -5x + 3$. C. $y = 3x + 5$. D. $y = -5x + 7$.

- Câu 6.** [1D5-3] Một vật rơi tự do theo phương trình $s = \frac{1}{2}gt^2$ (m) với $g = 9,8(\text{m/s}^2)$. Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 5(\text{s})$ là
- A. $122,5(\text{m/s})$. B. $29,5(\text{m/s})$. C. $10(\text{m/s})$. D. $49(\text{m/s})$.
- Câu 7.** [1D5-3] Cho hàm số $y = (x-2)\sqrt{x^2+1}$. Khi đó:
- A. $y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$. B. $y' = \frac{2x^2-2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$. C. $y' = \frac{-2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$. D. $y' = \frac{2x^2-2x+1}{2\sqrt{x^2+1}}$.
- Câu 8.** [1D5-3] Đạo hàm của hàm số $y = (1-2x^3)^{10}$ là
- A. $10x^2(1-2x^3)^9$. B. $-60x^3(1-2x^3)^9$. C. $-6x^2(1-2x^3)^9$. D. $-60x^2(1-2x^3)^9$.
- Câu 9.** [1D5-3] Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 2x + 3$ là
- A. $y = 2x - 7$. B. $y = -2x + 7$. C. $y = 3x + 5$. D. $y = 2x + 5$.
- Câu 10.** [1D5-4] Cho hàm số $y = x^2 + 1$. Hai điểm $A(0,5; 1,25)$ và $B(0,5 + \Delta x; 1,25 + \Delta y)$ thuộc đồ thị hàm số. Hệ số góc của cát tuyến AB với $\Delta x = 1,5$ là
- A. 2. B. 2,5. C. 3,5. D. 5.
- Câu 11.** [1D5-3] Cho hàm số $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 5x - 17$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ thì $x_1 + x_2$ có giá trị bằng
- A. 5. B. 8. C. -5. D. -8.
- Câu 12.** [1D5-3] Cho $y = x + \sqrt{x^2 - 2}$ ta có $\frac{y}{y'}$ bằng
- A. $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 2}}$. B. 1. C. $\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 2}}$. D. $\sqrt{x^2 - 2}$.
- Câu 13.** [1D5-3] Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $f(x) = \frac{5}{x-2}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 3$ có hệ số góc là
- A. -5. B. 5. C. 2. D. 3.
- Câu 14.** [1D5-3] Cho $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x + x$ khi đó $f'(x)$ bằng
- A. $1 - \sin x \cdot \cos x$. B. $1 - 2 \sin 2x$. C. $1 + 2 \sin 2x$. D. $-1 - 2 \sin 2x$.

II. TỰ LUẬN (3 điểm)

Câu 15. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1) $y = 2x^5 - \frac{4}{3}x^3 - x^2$.

2) $y = x \sin 2x + \sqrt{x^2 + 3}$

Câu 16. [1D5-3] Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) . Biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng d có phương trình: $y = \frac{1}{3}x + 5$.

-----HẾT-----

ĐỀ SỐ 3 – THPT VINH LỘC, HUẾ**I - PHẦN TRẮC NGHIỆM****Câu 1.** [1D5-1] Tính đạo hàm của hàm số $y = \cot 2x$.

- A. $y' = \frac{2}{\sin^2 x}$. B. $y' = -\frac{2}{\sin^2 x}$. C. $y' = \frac{-2}{\sin^2 2x}$. D. $y' = \frac{2}{\sin^2 2x}$.

Câu 2. [1D5-2] Tính đạo hàm của hàm số $y = 2 \sin 2x - 3 \cot 2x$.

- A. $y' = 4 \cos 2x - \frac{3}{\sin^2 2x}$. B. $y' = 4 \cos 2x + \frac{6}{\sin^2 2x}$.
C. $y' = 4 \cos 2x - \frac{6}{\sin^2 2x}$. D. $y' = 4 \cos 2x + \frac{2}{\sin^2 2x}$.

Câu 3. [1D5-2] Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\tan 4x - 4x}$.

- A. $y' = \frac{2 \tan 4x}{\sqrt{\tan 4x - 4x}}$. B. $y' = \frac{2 \tan^2 4x}{\sqrt{\tan 4x - 4x}}$. C. $y' = \frac{\tan^2 4x}{\sqrt{\tan 4x - 4x}}$. D. $y' = \frac{2|\tan 4x|}{\sqrt{\tan 4x - 4x}}$.

Câu 4. [1D5-2] Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = -x^2 + 5$ tại điểm M có tung độ $y_0 = -1$ và hoành độ $x_0 < 0$.

- A. $y = 2\sqrt{6}(x + \sqrt{6}) + 1$. B. $y = 2\sqrt{6}(x + \sqrt{6}) - 1$.
C. $y = -2\sqrt{6}(x + \sqrt{6}) - 1$. D. $y = 2\sqrt{6}(x - \sqrt{6}) + 1$.

Câu 5. [1D5-3] Cho hàm số $y = x \cos x$. Biết rằng $xy' = y(k - x \tan x)$ với mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.Tìm giá trị của k .

- A. $k = 2$. B. $k = 0$. C. $k = -1$. D. $k = 1$.

Câu 6. [1D5-1] Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos 2x$.

- A. $y' = -\sin 2x$. B. $y' = 2 \sin 2x$. C. $y' = \sin 2x$. D. $y' = -2 \sin 2x$.

Câu 7. [1D5-2] Tính đạo hàm của hàm số $y = (5 - 7x)^4$.

- A. $y' = 20(5 - 7x)^3$. B. $y' = 4(5 - 7x)^3$. C. $y' = 28(7x - 5)^3$. D. $y' = 28(5 - 7x)^3$.

Câu 8. [1D5-3] Cho hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 + mx - 3$. Tìm m để $f'(x)$ bằng bình phương của một nhị thức bậc nhất.

- A. $m = \frac{4}{3}$. B. $m = \frac{4}{9}$. C. $m = 4$. D. Không có giá trị nào.

Câu 9. [1D5-1] Tại mọi x dương. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$.

- A. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$. B. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. C. $(\sqrt{x})' = \sqrt{x}$. D. $(\sqrt{x})' = 2\sqrt{x}$.

Câu 10. [1D5-1] Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.

- A. $y - y_0 = f'(x_0)x$, trong đó $y_0 = f(x_0)$. B. $y + x_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.
C. $y = f'(x_0)(x - x_0)$. D. $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, trong đó $y_0 = f(x_0)$.

Câu 11. [1D5-1] Tính đạo hàm của hàm số $y = -2x^4 + 3x^3 - x + 2$.

A. $y' = -8x^3 + 9x^2 - 1$.

B. $y' = -16x^3 + 9x - 1$.

C. $y' = -8x^3 + 27x^2 - 1$.

D. $y' = -8x^3 + 9x - 1$.

Câu 12. [1D5-2] Cho hàm số $y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$. Tính $y'\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

A. $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$.

B. $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

C. $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$.

D. $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2$.

Câu 13. [1D5-1] Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan 4x$.

A. $y' = 1 + \tan^2 4x$.

B. $y' = -\frac{4}{\cos^2 4x}$.

C. $y' = \frac{1}{\cos^2 4x}$.

D. $y' = 4(1 + \tan^2 4x)$.

Câu 14. [1D5-2] Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = x^2 + 5$ tại điểm M có hoành độ $x_0 = -1$.

A. $y = 2(x - 1) + 6$.

B. $y = -2(x + 1) - 6$.

C. $y = -2(x + 1) + 6$.

D. $y = -2(x - 1) + 6$.

Câu 15. [1D5-1] Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề dưới đây.

A. Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 khi và chỉ khi hàm số này liên tục tại điểm đó.

B. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

C. Nếu hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 thì nó vẫn có thể có đạo hàm tại điểm đó.

D. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 thì có đạo hàm tại điểm đó.

Bài 1: [1D5-2] Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$.

A. $y' = \frac{-1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3}$.

B. $y' = \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{2}{x^3}$.

C. $y' = \frac{-1}{2x\sqrt{x}} + \frac{2}{x^3}$.

D. $y' = \frac{-1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{x^3}$.

Bài 2: [1D5-1] Tại mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính đạo hàm của hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}, n > 1$).

A. $(x^n)' = n.x^{n-1}$.

B. $(x^n)' = x^{n-1}$.

C. $(x^n)' = n.x^{1-n}$.

D. $(x^n)' = n.x$.

Bài 3: [1D5-1] Cho hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm trên $(a; b)$. Tính đạo hàm của hàm $y = \sin u$.

A. $y' = u' \cos u$.

B. $y' = u \cos u$.

C. $y' = -u' \cos u$.

D. $y' = -u \cos u$.

Bài 4: [1D5-2] Tính số gia Δy của hàm số $f(x) = x$ tại $x_0 = 1$, với giả thiết Δx là số gia của đối số tại x_0 .

A. $\Delta y = 1 + \Delta x - x$.

B. $\Delta y = 1 + \Delta x$.

C. $\Delta y = x + \Delta x$.

D. $\Delta y = \Delta x$.

Bài 5: [1D5-3] Cho hàm số $y = 4x^3 - 3x$ có đồ thị (C) . Tìm m để đường thẳng $(d): y = mx - 1$ tiếp xúc với (C) .

A. $m = 0$.

B. $m = -6$.

C. $m = 2$.

D. $m = -3$.

II - PHẦN TỰ LUẬN

Bài 6: [1D5-2] Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$.

Bài 7: [1D5-3] Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 3x - 2}{\sqrt{1 - x}}$, ($x < 1$).

-----HẾT-----

ĐỀ SỐ 4 – THPT Nho Quan A, Ninh Bình**I. PHẦN TRẮC NGHIỆM**

- Câu 1.** [1D5-2] Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $f(x) = \frac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ có hệ số góc là
 A. -1. B. -2. C. 2. D. 1.
- Câu 2.** [1D5-2] Một vật rơi tự do theo phương trình $s = \frac{1}{2}gt^2$ (m), với $g = 9,8$ (m/s²). Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 5$ (s) là
 A. 122,5 (m/s). B. 29,5 (m/s). C. 10 (m/s). D. 49 (m/s).
- Câu 3.** [1D5-2] Hàm số nào sau đây có đạo hàm là $\frac{x^2 - 2x - 15}{(x-1)^2}$:
 A. $y = \frac{x^2 + 4x + 9}{x-1}$. B. $y = \frac{x^2 + 6x + 5}{x-1}$. C. $y = \frac{x^2 + 6x + 9}{x-1}$. D. $y = \frac{x^2 - 6x + 9}{x-1}$.
- Câu 4.** [1D5-2] Cho $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) \leq 0$ là
 A. $[-2; 2]$. B. $\emptyset$. C. $(0; +\infty)$. D. $\mathbb{R}$.
- Câu 5.** [1D5-2] Phương trình tiếp tuyến của đồ hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = 8x + 2$.
 A. $y = 8x + \frac{2}{3}$, $y = 8x$. B. $y = 8x + \frac{1}{3}$, $y = 8x - \frac{7}{3}$.
 C. $y = 8x + \frac{11}{3}$, $y = 8x - \frac{97}{3}$. D. $y = -\frac{1}{8}x + \frac{11}{3}$, $y = -\frac{1}{8}x - \frac{97}{3}$.
- Câu 6.** [1D5-2] Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+6}{x+9}$.
 A. $\frac{3}{(x+9)^2}$. B. $\frac{15}{(x+9)^2}$. C. $-\frac{15}{(x+9)^2}$. D. $-\frac{3}{(x+9)^2}$.
- Câu 7.** [1D5-2] Cho $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x + x$. Khi đó $f'(x)$ bằng
 A. $1 - 2\sin 2x$. B. $1 - \sin x \cdot \cos x$. C. $1 + 2\sin 2x$. D. $-1 - 2\sin 2x$.
- Câu 8.** [1D5-2] Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\sin 3x}$ là biểu thức nào sau đây?
 A. $\frac{\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$. B. $\frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$. C. $-\frac{\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$. D. $-\frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$.
- Câu 9.** [1D5-2] Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = x^4$ tại điểm có hoành độ bằng -1 là
 A. $y = -4x - 3$. B. $y = -4x - 4$. C. $y = -4x - 5$. D. $y = -4x + 5$.
- Câu 10.** [1D5-2] Cho $y = x + \sqrt{x^2 + 1}$. Ta có $\frac{y}{y'}$ bằng
 A. $\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$. B. $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$. C. 1. D. $\sqrt{x^2 + 1}$.

Câu 11. [1D5-2] Cho hàm số $y = \left(\frac{4x+1}{\sqrt{x^2+2}} \right)^2$. Chọn ra câu trả lời đúng:

A. $y' = 2 \left(\frac{4x+1}{\sqrt{x^2+2}} \right) \frac{8+x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$.

B. $y' = 2 \left(\frac{4x+1}{\sqrt{x^2+2}} \right) \frac{8-x}{x^2+2}$.

C. $y' = 2 \left(\frac{4x+1}{\sqrt{x^2+2}} \right) \frac{8-x}{\sqrt{x^2+2}}$.

D. $y' = 2 \left(\frac{4x+1}{\sqrt{x^2+2}} \right) \frac{8-x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$.

Câu 12. [1D5-2] Số gia Δy của hàm số $y = x^2 + 2x$ tại điểm $x_0 = 1$ là

A. $\Delta^2 x + 4\Delta x$.

B. $\Delta^2 x - 2\Delta x$.

C. $\Delta^2 x - 4\Delta x$.

D. $\Delta^2 x + 2\Delta x - 3$.

Câu 13. [1D5-2] Đạo hàm của hàm số $y = \tan x$:

A. $-\frac{1}{\sin^2 x}$.

B. $\frac{1}{\cos^2 x}$.

C. $\frac{1}{\sin^2 x}$.

D. $-\frac{1}{\cos^2 x}$.

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 2x^5 - \frac{4}{3}x^3 - x^2$.

b) $y = x \sin 2x + \sqrt{x^2 + 3}$.

Bài 2. [1D5-2] Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng (d): $y = -x + 2020$.

-----HẾT-----

ĐỀ SỐ 5 - THPT Nguyễn Trung Trực, BÌNH ĐỊNH

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. [1D5-2] Cho hàm số $f(x) = x^4 + 2x^2 - 3$. Tập các giá trị của x để $f'(x) > 0$ là

A. $\{0\}$.

B. $(-1; 0)$.

C. $(0; +\infty)$.

D. $(-\infty; -1)$.

Câu 2. [1D5-2] Cho hàm số $y = \cos 2x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $dy = \sin 2x dx$.

B. $dy = 2 \sin 2x dx$.

C. $dy = -2 \sin 2x dx$.

D. $dy = -\sin 2x dx$.

Câu 3. [1D5-2] Đạo hàm của hàm số $y = \sin^2 x$ tại $x_0 = \frac{\pi}{2}$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Câu 4. [1D5-2] Đạo hàm cấp 2 của hàm số $y = \cos x$ tại $x_0 = 0$ bằng

A. 1.

B. $\frac{\pi}{2}$.

C. 0.

D. -1.

Câu 5. [1D5-2] Đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại $x_0 = 2$ bằng

A. $\frac{1}{9}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. 3.

D. 1.

Câu 6. [1D5-2] Với mọi x để các hàm số dưới đây xác định, mệnh đề nào sai?

A. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

B. $(\sin x)' = \cos x$.

C. $(\cos x)' = \sin x$.

D. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

- Câu 7.** [1D5-2] Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{1+x}$ tại $x_0 = 3$ bằng
 A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. C. $\sqrt{2}$. D. $\frac{1}{2}$.
- Câu 8.** [1D5-2] Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(0;1)$ bằng
 A. 2. B. 1. C. 0. D. -1.
- Câu 9.** [1D5-2] Đạo hàm của hàm số $y = x \cos x$ là
 A. $-\sin x$. B. $\cos x - x \sin x$. C. $\cos x + x \sin x$. D. $x \sin x$.
- Câu 10.** [1D5-2] Đạo hàm của hàm số $y = x^3 + 2x$ tại $x_0 = -1$ bằng
 A. 0. B. -1. C. 5. D. -3.
- Câu 11.** [1D5-2] Đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x-1}{3x+2}$ là
 A. $y' = \frac{-5}{(3x+2)^2}$. B. $y' = \frac{7}{(3x+2)^2}$. C. $y' = \frac{5}{(3x+2)^2}$. D. $y' = \frac{-7}{(3x+2)^2}$.
- Câu 12.** [1D5-3] Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2 - 2$ tại điểm $A(1;-1)$ là
 A. $y = 2x - 3$. B. $y = 2x - 1$. C. $y = 3 - 2x$. D. $y = 2x + 3$.

II. PHẦN TỰ LUẬN

- Câu 13.** [1D5-3] Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 3$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$.
- Câu 14.** [1D5-3] Cho hai hàm số $f(x) = 2x^3 - 3x - 5$ và $g(x) = 3x^2 - 3x + 4$. Giải bất phương trình $f'(x) < g'(x)$.

-----HẾT-----

ĐỀ SỐ 6 - THPT Nguyễn Khuyến, BÌNH PHƯỚC

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

- Câu 1.** [1D5-1] Cho hàm số: $y = \frac{4x}{x+1}$. Khi đó số gia Δy của hàm số tại $x_0 = 3$ là:
 A. $\frac{\Delta x}{4 + \Delta x}$. B. $\frac{2\Delta x}{4 + \Delta x}$. C. $\frac{-2\Delta x}{4 + \Delta x}$. D. 1.
- Câu 2.** [1D5-3] Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 2b, & x > 1 \\ ax^3 - 2bx, & x \leq 1 \end{cases}$. Giá trị của a, b để $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$
 A. $a = -\frac{1}{2}; b = 1$. B. $a = \frac{1}{3}; b = 1$. C. $a = \frac{1}{2}; b = 0$. D. Không có.
- Câu 3.** [1D5-2] Một đoàn tàu hỏa rời ga, chuyển động nhanh dần đều với gia tốc $0,1m/s^2$ (bỏ qua sức cản của không khí). Vận tốc tức thời tại thời điểm tàu đã đi được đúng $500m$ là:
 A. $10(m/s)$. B. $15(m/s)$. C. $12(m/s)$. D. $20(m/s)$.
- Câu 4.** [1D5-1] Hàm số có đạo hàm bằng $2x + \frac{1}{x^2}$ là
 A. $\frac{x^3 - 1}{x}$. B. $\frac{x^3 + 5x - 1}{x}$. C. $\frac{3(x^2 + x)}{x^3}$. D. $\frac{2x^2 + x - 1}{x}$.

- Câu 5.** [1D5-3] Cho hàm số $y = \tan x$. Hãy tìm mệnh đề đúng:
A. $y'^2 - y + 1 = 0$. **B.** $y' - y^2 + 1 = 0$. **C.** $y' - y^2 - 1 = 0$. **D.** $y'^2 - y - 1 = 0$.
- Câu 6.** [1D5-1] Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$. Đạo hàm của hàm số y' bằng:
A. $\frac{x-4}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$. **B.** $\frac{1}{2\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$. **C.** $\frac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$. **D.** $\frac{2x-4}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$.
- Câu 7.** [1D5-1] Cho hàm số $y = (2x+3)^{10}$. Đạo hàm của hàm số y' bằng:
A. $30(2x+3)^9$. **B.** $10(2x+3)^{10}$. **C.** $10(2x+3)^9$. **D.** $20(2x+3)^9$.
- Câu 8.** [1D5-2] Cho hàm số $y = \cos^3 2x$. Đạo hàm của hàm số y' bằng:
A. $-3\cos^2 2x \cdot \sin 2x$. **B.** $3\cos^2 2x \cdot \sin 2x$. **C.** $6\cos^2 2x \cdot \sin 2x$. **D.** $-6\cos^2 2x \cdot \sin 2x$.
- Câu 9.** [1D5-1] Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 2$ có hệ số góc $k = -9$, là:
A. $y + 16 = -9(x + 3)$. **B.** $y - 16 = -9(x - 3)$. **C.** $y - 16 = -9(x + 3)$. **D.** $y = -9(x + 3)$.
- Câu 10.** [1D5-1] Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ tại điểm $A(1; 2)$ bằng:
A. -2 . **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** -1 .
- Câu 11.** [1D5-4] Tọa độ điểm M trên đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x-1}$ sao cho tiếp tuyến tại đó cùng với các trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2 là:
A. $\left(\frac{1}{4}; -\frac{4}{3}\right)$. **B.** $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{4}{5}\right)$. **C.** $\left(\frac{3}{4}; -4\right)$. **D.** $\left(-\frac{3}{4}; -\frac{4}{7}\right)$.
- Câu 12.** [1D5-3] Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 2$. Giải bất phương trình $y' < 0$ ta có nghiệm:
A. $1 < x < 5$. **B.** $-5 < x < -1$. **C.** $-5 < x < 1$. **D.** $-1 < x < 5$.
- Câu 13.** [1D5-3] Cho hàm số $y = \sin x + \cos x$. Tập nghiệm của phương trình $y' = 0$ là:
A. $\left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **B.** $\left\{\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **C.** $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **D.** $\left\{-\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Câu 14.** [1D5-3] Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$. Nếu tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm M song song với đường thẳng: $-8x + y - 2017 = 0$. Thì hoành độ x_0 của điểm M là
A. $x_0 = -1$. **B.** $x_0 = 5$. **C.** $x_0 = 12$. **D.** $x_0 = 6$.

II. PHẦN TỰ LUẬN

- Câu 15.** [1D5-2] Tính đạo hàm các hàm số sau:
a. $y = \frac{x^4}{2} - \frac{3}{x^3} - \sqrt{2x} + 2017$. **b.** $y = (2 - x^2)\cos 3x + 3x \cdot \sin 3x$.
- Câu 16.** [1D5-2] Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{2x}{x+1}$ tại điểm có tung độ bằng 4.
- Câu 17.** [1D5-3] Cho hai hàm số $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x - 2}$ và $g(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2$. Hãy giải bất phương trình: $\frac{f(x)}{g'(x)} \geq 0$.

-----HẾT-----

ĐỀ SỐ 7 – THPT NAM HÀ, ĐỒNG NAI

- Câu 1:** Cho đồ thị (H) $y = \frac{x+2}{x-1}$ và điểm $M \in (H)$ có tung độ 4. Phương trình tiếp tuyến của (H) tại điểm M có dạng $y = ax + b$, khi đó $b - a^2$ bằng
A. 6. **B.** 19. **C.** 1. **D.** -1.
- Câu 2:** Đạo hàm của hàm số $y = 3x^3 - 2\sqrt{x} + 3x + 2$ bằng biểu thức có dạng $ax^2 + \frac{b}{\sqrt{x}} + c$. Khi đó $a - 4b + c$ là
A. 12. **B.** 10. **C.** 16. **D.** 8.
- Câu 3:** Đạo hàm của hàm số $y = 2\sin 3x - 5\cos 2x$ là biểu thức có dạng $a\cos 3x + b\sin 2x$. Khi đó $\frac{b}{2a}$ là
A. $\frac{5}{6}$. **B.** $-\frac{5}{6}$. **C.** $-\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.
- Câu 4:** Đạo hàm của hàm số $y = 2x \tan x$ là biểu thức có dạng $a\left(\tan x + \frac{bx}{\cos^2 x}\right)$. Khi đó mệnh đề nào sau đây đúng?
A. $\frac{a}{b} = -2$. **B.** $\frac{a}{b} = 2$. **C.** $\frac{a}{b} = -1$. **D.** $\frac{a}{b} = 1$.
- Câu 5:** Trên đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{x-1}$ có điểm M sao cho tiếp tuyến tại đó cùng với các trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2. Khi đó M có tung độ là
A. $y_M = -3$. **B.** $y_M = 4$. **C.** $y_M = 3$. **D.** $y_M = -4$.
- Câu 6:** Cho hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + m^2x(1)$. Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) tại điểm có hoành độ bằng 1. Tổng các giá trị của tham số m bằng bao nhiêu để tiếp tuyến d song song với đường thẳng $\Delta: y = 4x + 3$
A. 2. **B.** 4. **C.** -2. **D.** -4.
- Câu 7:** Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 + 2t^2 + 4t + 1$ trong đó t tính bằng giây, s tính bằng mét. Vận tốc của chuyển động khi $t = 2$ là
A. 25 m/s. **B.** 24 m/s. **C.** 16 m/s. **D.** 26 m/s.
- Câu 8:** Cho hàm số $y = \sin 2x$. Đẳng thức nào sau đây là đúng với mọi x ?
A. $4y - y'' = 0$. **B.** $y^2 + (y')^2 = 4$. **C.** $4y + y'' = 0$. **D.** $y = y' \cdot \tan 2x$.
- Câu 9:** Cho hàm số $f(x) = 2\sin^2 x - 3\cos^2 x$. Khi đó $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{a\sqrt{3}}{b}$, mệnh đề nào sau đây sai?
A. $a + b = 7$. **B.** $ab = 10$. **C.** $a - b = 5$. **D.** $a^2 + b^2 = 29$.
- Câu 10:** Đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2 - 2x - 1}{x - 1}$ bằng biểu thức có dạng $\frac{ax^2 + bx + c}{(x - 1)^2}$. Khi đó $a.b.c$ là
A. -6. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 6.

- Câu 11:** Cho hàm số $y = x^3 + 4x^2 - 4x$ có đồ thị (C) . Gọi x_1, x_2 là hoành độ các điểm M, N trên (C) , mà tại đó tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = -x + 2020$. Khi đó $x_1 x_2$ bằng
- A. $-\frac{4}{3}$. B. $\frac{8}{3}$. C. $-\frac{5}{3}$. D. $-\frac{8}{3}$.
- Câu 12:** Cho hàm số $y = \frac{1}{x}$. Tính $y'''(2)$.
- A. $\frac{1}{27}$. B. $-\frac{1}{4}$. C. $-\frac{3}{8}$. D. $\frac{3}{8}$.
- Câu 13:** Đạo hàm của hàm số $y = \cot^2 2x$ là biểu thức có dạng $\frac{a \cos 2x}{\sin^n 2x}$. Khi đó $\frac{a}{n}$ là
- A. $\frac{2}{3}$. B. $-\frac{4}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $-\frac{2}{3}$.
- Câu 14:** Cho hàm số $f(x) = \sqrt{1 + \sin x}$. Chọn kết quả đúng
- A. $df(x) = \frac{-\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}} dx$. B. $df(x) = \frac{-\cos x}{2\sqrt{1 + \sin x}} dx$.
 C. $df(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}} dx$. D. $df(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{1 + \sin x}} dx$.
- Câu 15:** Cho hàm số $f(x) = 5(x+1)^3 + 4(x+1)$. Tập nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$ là
- A. $\{-1\}$. B. $[-1; 2]$. C. $(-\infty; 0]$. D. $\emptyset$.
- Câu 16:** Đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$ bằng biểu thức có dạng $\frac{a}{(x+1)^2}$. Khi đó mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. $a \in (0; 2)$. B. $a \in (-5; 0)$. C. $a \in (2; 6)$. D. $a \in (-6; -1)$.
- Câu 17:** Đạo hàm của hàm số $y = 2 \sin x - 3 \cos x$ là biểu thức có dạng $a \sin x + b \cos x$. Khi đó $a^2 - b^2$ là
- A. -5 . B. -1 . C. 14 . D. 5 .
- Câu 18:** Đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + x + 3)^6$ là biểu thức có dạng $a(x^2 + x + 3)^n (bx + c)$. Khi đó $a.b.c - n$ là
- A. 7 . B. 17 . C. 1 . D. 8 .
- Câu 19:** Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$ là biểu thức có dạng $\frac{ax + b}{2\sqrt{x^2 + 3x + 2}}$. Khi đó $a - b$ là
- A. 1 . B. -2 . C. 4 . D. -1 .
- Câu 20:** Cho hàm số $f(x) = (x + 1)^{2019} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{2019} x^{2019}$.
 Tính tổng: $S = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + \dots + 2019a_{2019}$
- A. $S = 2^{2018}$. B. $S = 2^{2019}$. C. $S = 2019 \cdot 2^{2018}$. D. $S = 2019 \cdot 2^{2019}$.
- Câu 21:** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - x^2 + 3x$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ có dạng $y = ax + b$ khi đó $a^2 - b^2$ là
- A. 73 . B. 55 . C. 50 . D. 60 .

- Câu 22:** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 4$ có hệ số góc $k = -9$ có phương trình dạng $y = -9x + b$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. $b < -13$. **B.** $b \geq -14$. **C.** $b \geq 12$. **D.** $b \geq 14$.
- Câu 23:** Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị (C) . Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1; -2)$ và có hệ số góc m . Tổng các giá trị m để Δ tiếp xúc đồ thị (C) là
A. $-\frac{9}{4}$. **B.** 0 . **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{3}{2}$.
- Câu 24:** Cho hàm số $y = x \cdot \sin x$. Tìm hệ thức đúng
A. $y'' + y = -2 \cos x$. **B.** $y'' - y' = 2 \cos x$. **C.** $y'' + y' = 2 \cos x$. **D.** $y'' + y = 2 \cos x$.
- Câu 25:** Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m+2)x - m$. Tổng các giá trị của tham số m nguyên để $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là
A. 1 . **B.** 2 . **C.** -2 . **D.** -1 .

----- HẾT -----

ĐỀ SỐ 8 - THPT ĐOÀN THƯỢNG, HẢI DƯƠNG

- Câu 1.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ ax - b - 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Khi hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 = 0$. Hãy tính $T = a + 2b$.
A. $T = 0$. **B.** $T = -4$. **C.** $T = -6$. **D.** $T = 4$.
- Câu 2.** Cho hàm số $f(x) = (2018+x)(2017+2x)(2016+3x)\dots(1+2018x)$. Tính $f'(1)$.
A. $2019 \cdot 2018^{1009}$. **B.** $1009 \cdot 2019^{2018}$. **C.** $2018 \cdot 2019^{1009}$. **D.** $2018 \cdot 1009^{2019}$.
- Câu 3.** Cho hàm số $y = f(x) = (x-1)^2$. Biểu thức nào sau đây là vi phân của hàm số f ?
A. $dy = 2(x-1)$. **B.** $dy = (x-1)dx$ **C.** $dy = (x-1)^2 dx$. **D.** $dy = 2(x-1)dx$.
- Câu 4.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $[f(2x+1)]^2 + [f(1-x)]^3 = x$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1
A. $y = \frac{1}{7}x - \frac{5}{7}$. **B.** $y = \frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$. **C.** $y = -\frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$. **D.** $y = -\frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$.
- Câu 5.** Một vật rơi tự do với phương trình chuyển động là $S = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó t tính bằng giây (s), S tính bằng mét (m) và $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 4\text{s}$ là
A. $v = 78,4 \text{ m/s}$. **B.** $v = 39,2 \text{ m/s}$. **C.** $v = 19,6 \text{ m/s}$. **D.** $v = 9,8 \text{ m/s}$.
- Câu 6.** Tổng $C_{2018}^1 - 2.5C_{2018}^2 + 3.5^2C_{2018}^3 - \dots - 2018.5^{2017}C_{2018}^{2018}$ bằng
A. -1009.2^{4035} . **B.** -1009.2^{4034} . **C.** 1009.2^{4035} . **D.** 1009.2^{4034} .

Câu 7. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin^2 2x - \cos 3x$

A. $f'(x) = 2 \sin 4x - 3 \sin 3x$.

B. $f'(x) = \sin 4x + 3 \sin 3x$.

C. $f'(x) = 2 \sin 4x + 3 \sin 3x$.

D. $f'(x) = 2 \sin 2x + 3 \sin 3x$.

Câu 8. Xét hai mệnh đề.

(I) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2 \sin x}{\cos^3 x}$; (II) $g(x) = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow g'(x) = -\frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

Mệnh đề nào sai?

A. Cả hai đều đúng.

B. Cả hai đều sai.

C. Chỉ (I).

D. Chỉ (II).

Câu 9. Cho hàm số $y = \cos x + m \sin 2x (C)$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị m để tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = \pi$, $x = \frac{\pi}{3}$ song song hoặc trùng nhau

A. $m = -2\sqrt{3}$.

B. $m = \sqrt{3}$.

C. $m = -\frac{\sqrt{3}}{6}$.

D. $m = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 10. Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ tại điểm có hoành độ bằng -3 có phương trình là

A. $y = 9x - 25$.

B. $y = 9x + 25$.

C. $y = 30x + 25$.

D. $y = 30x - 25$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$. Tính $f'''(1)$.

A. 3.

B. 0.

C. $\frac{3}{2}$.

D. -3 .

Câu 12. Cho hàm số: $y = \frac{2x+1}{x+1} (C)$. Số tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $\Delta: y = x + 1$ là

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{khi } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây là sai?

A. Hàm số $f(x)$ không có đạo hàm tại $x = 1$.

B. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

C. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$.

D. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ và hàm số $f(x)$ cũng có đạo hàm tại $x = 1$.

Câu 14. Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm là

A. $y' = 1 - \tan^2 x$.

B. $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

C. $y' = \cot x$.

D. $y' = \frac{1}{\sin^2 x}$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ liên tục tại x_0 . Đạo hàm của $f(x)$ tại x_0 là

- A. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).
 B. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).
 C. $f(x_0)$.
 D. $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.

Câu 16. Cho hàm số $y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$. Tính $y'\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

- A. $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$. B. $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$. C. $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2$. D. $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -1$.

Câu 17. Số gia của hàm số $y = x^2 + 2$ tại điểm $x_0 = 2$ ứng với số gia $\Delta x = 1$ bằng bao nhiêu?

- A. 5. B. 13. C. 2. D. 9.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x) = -3x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 2x + 1$. Lấy đạo hàm cấp 1, 2, 3,.. Hỏi đạo hàm đến cấp nào thì ta được kết quả triệt tiêu?

- A. 3.. B. 4. C. 6. D. 5..

Câu 19. Trong 3 đường thẳng $d_1: y = 7x - 9$, $d_2: y = 5x + 29$, $d_3: y = -5x - 5$ có bao nhiêu đường thẳng là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2x - 4$

- A. 2. B. 0. C. 3. D. 1.

Câu 20. Cho $f(x) = \sin^3 ax$, $a > 0$. Tính $f'(\pi)$.

- A. $f'(\pi) = 0$. B. $f'(\pi) = 3\sin^2(a\pi) \cdot \cos(a\pi)$.
 C. $f'(\pi) = 3a\sin^2(a\pi)$. D. $f'(\pi) = 3a \cdot \sin^2(a\pi) \cdot \cos(a\pi)$.

Câu 21. Hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đạo hàm là

- A. $y' = -\frac{1}{(x-1)^2}$. B. $y' = 2$. C. $y' = -\frac{3}{(x-1)^2}$. D. $y' = \frac{1}{(x-1)^2}$.

Câu 22. Một chất điểm chuyển động trong 20 giây đầu tiên có phương trình $s(t) = \frac{1}{12}t^4 - t^3 + 6t^2 + 10t$,

trong đó $t > 0$ với t tính bằng giây (s) và $s(t)$ tính bằng mét (m). Hỏi tại thời điểm gia tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất thì vận tốc của vật bằng bao nhiêu?

- A. 17(m/s). B. 28(m/s). C. 13(m/s). D. 18(m/s).

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ xác định bởi $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$. Giá trị $f'(0)$ bằng

- A. 1. B. 0.. C. $\frac{1}{2}$. D. Không tồn tại.

Câu 24. Tìm hệ số k của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x+1}$ tại điểm $M(-2; 2)$

- A. $k = -1$. B. $k = \sqrt{2}$. C. $k = \frac{1}{9}$. D. $k = 1$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x) = x^4 + 2x^2 - 3$. Tìm x để $f'(x) > 0$?

- A. $x > 0$. B. $-1 < x < 0$. C. $x < -1$. D. $x < 0$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ bởi $f(x) = 2x^2 + 1$. Giá trị bằng $f'(-1)$

- A. 2. B. 6. C. 3. D. -4.

Câu 27. Xét hàm số $y = f(x) = \sqrt{1 + \cos^2 2x}$. Chọn Câu đúng:

- A. $df(x) = \frac{-\sin 4x}{\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx$. B. $df(x) = \frac{\cos 2x}{\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx$.
C. $df(x) = \frac{-\sin 2x}{2\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx$. D. $df(x) = \frac{-\sin 4x}{2\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx$.

Câu 28. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ có đồ thị (C) và điểm $A(m; 2)$. Tìm tập hợp S là tập tất cả các giá trị thực của m để có ba tiếp tuyến của (C) đi qua A

- A. $S = (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{3}; 3\right) \cup (3; +\infty)$. B. $S = (-\infty; -1) \cup \left(\frac{4}{3}; 2\right) \cup (2; +\infty)$.
C. $S = (-\infty; -2) \cup \left(\frac{5}{3}; 2\right) \cup (2; +\infty)$. D. $S = (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{3}; 2\right) \cup (2; +\infty)$.

Câu 29. Đạo hàm của hàm số $y = (x^3 - ax^2)^3$ (a là hằng số) bằng biểu thức nào sau đây?

- A. $3(x^3 - ax^2)^2$. B. $3(x^3 - ax^2)^2(3x^2 - 2ax)$.
C. $3a(x^3 - ax^2)^2(3x^2 - 2ax)$. D. $3a(x^3 - ax^2)(3x^2 - a^2 \cdot x)$.

Câu 30. Cho hàm số $y = \frac{1}{x}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $y''y^3 = 2$. B. $y''y + 2(y')^2 = 0$.
C. $y''y^3 + 2 = 0$. D. $y''y = 2(y')^2$.

-----HẾT-----

ĐỀ SỐ 9 - THPT Triệu Quang Phục, HƯNG YÊN

PHẦN 1: TRẮC NGHIỆM (8 điểm)

Câu 1. Với mọi $x \neq 0$ hàm số $g(x) = 3x^2 + \frac{1}{x^2} + 3$ là đạo hàm của hàm số nào?

- A. $f(x) = x^3 + \frac{1}{x} + 3x + 2$. B. $f(x) = x^3 + \frac{1}{2x} + 3x$.
C. $f(x) = x^3 - \frac{1}{x} + 3x + 1$. D. $f(x) = 3x^3 - \frac{1}{x} + 3x$.

- Câu 2.** Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 12$. Tìm x để $f'(x) < 0$.
- A. $x \in (-2; 0)$. B. $x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$.
 C. $x \in (0; 2)$. D. $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.
- Câu 3.** Tính tổng $S = C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n$.
- A. $4n \cdot 2^{n-1}$. B. $2n \cdot 2^{n-1}$. C. $3n \cdot 2^{n-1}$. D. $n \cdot 2^{n-1}$.
- Câu 4.** Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 5x^2 + 2$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $A(0; 2)$?
- A. 1. B. 4. C. 3. D. 2.
- Câu 5.** Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$. Phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm là
- A. $\{1; 2\}$. B. $\{-1; 2\}$. C. $\{-1; 3\}$. D. $\{0; 4\}$.
- Câu 6.** Gọi $M(a; b)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại điểm M có hệ số góc nhỏ nhất. Tính $a + b$.
- A. -3. B. 0. C. 1. D. 2.
- Câu 7.** Đạo hàm của hàm số $y = (3x - 1)\cos x$ là
- A. $y' = 3\cos x$. B. $y' = -(3x - 1)\sin x$.
 C. $y' = 3\cos x + (3x - 1)\sin x$. D. $y' = 3\cos x - (3x - 1)\sin x$.
- Câu 8.** Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x-3}{x+4}$.
- A. $y' = \frac{5}{(x+4)^2}$. B. $y' = \frac{11}{x+4}$. C. $y' = \frac{-11}{(x+4)^2}$. D. $y' = \frac{11}{(x+4)^2}$.
- Câu 9.** Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1}$ là
- A. $y' = \frac{x}{2\sqrt{x^2 + 1}}$. B. $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$. C. $y' = \frac{x^2 + 1}{2\sqrt{x^2 + 1}}$. D. $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.
- Câu 10.** Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = -x^3 + x$ tại điểm $M(1; 0)$. Tìm hệ số góc của d ?
- A. -2. B. 2. C. 1. D. 0.
- Câu 11.** Đạo hàm của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ là
- A. $y' = 4x^3 - 4x$. B. $y' = x^3 - 4x$. C. $y' = x^3 - 2x$. D. $y' = 4x^3 - 2x$.
- Câu 12.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$; $x_0 \in (a; b)$. Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là
- A. $f'(x_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. B. $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. C. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. D. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$.

- Câu 13.** Đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ tại điểm $x_0 = 2$ là
A. -2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.
- Câu 14.** Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm là
A. $y' = \sin x$. **B.** $y' = \frac{1}{\sin x}$. **C.** $y' = -\cos x$. **D.** $y' = -\sin x$.
- Câu 15.** Số gia của hàm số $y = f(x) = x^2 + 2x - 3$ ứng với số gia Δx của đối số tại $x_0 = 1$ là
A. $\Delta y = \Delta^2 x - 4\Delta x$. **B.** $\Delta y = \Delta^2 x + 2\Delta x$. **C.** $\Delta y = 4\Delta x$. **D.** $\Delta y = \Delta^2 x + 4\Delta x$.
- Câu 16.** Một chất điểm chuyển động có phương trình $s = t^3 + 3t$ (t tính bằng giây, s tính bằng mét). Tính vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t_0 = 2$ (giây)?
A. 12 m/s. **B.** 15 m/s. **C.** 14 m/s. **D.** 7 m/s.
- Câu 17.** Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm là
A. $y' = -\frac{1}{\cos^2 x}$. **B.** $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$. **C.** $y' = \tan x$. **D.** $y' = \frac{1}{\sin^2 x}$.
- Câu 18.** Cho hai hàm số $f(x) = x^2 + 2$; $g(x) = \frac{1}{1-x}$. Tính $\frac{f'(1)}{g'(0)}$.
A. 0. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 1.
- Câu 19.** Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = -3x^2 + x + 3$ tại điểm $M(1;1)$.
A. $y = -5x + 6$. **B.** $y = 5x - 6$. **C.** $y = -5x - 6$. **D.** $y = 5x + 6$.
- Câu 20.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$; biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 2x + 3$ là
A. $y = 2x + 5$. **B.** $y = 3x + 5$. **C.** $y = -2x + 7$. **D.** $y = 2x - 7$.

PHẦN 2: TỰ LUẬN (2 điểm)

- Câu 21.** Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng có phương trình: $x - 3y + 2019 = 0$.
- Câu 22.** Cho hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 + mx - 3$. Tìm m để $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (0; 2)$.

-----HẾT-----

ĐỀ SỐ 10 - THPT CÂY DƯƠNG, KIÊN GIANG

PHẦN I: TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

- Câu 1.** Cho hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$. Nghiệm của bất phương trình $f'(x) < 0$ là
A. $1 < x < 3$. **B.** $-1 < x < \frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{3} < x < 1$. **D.** $-\frac{1}{3} < x < 1$.
- Câu 2.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = -x^3 + x$ tại điểm $M(-2;6)$.
A. $y = -11x - 16$. **B.** $y = -11x - 28$. **C.** $y = -11x + 28$. **D.** $y = -11x + 16$.
- Câu 3.** Tính đạo hàm của hàm số $y = \cot 3x$
A. $y' = -\frac{3}{\sin^2 x}$. **B.** $y' = \frac{3}{\sin^2 3x}$. **C.** $y' = -\frac{3}{\sin^3 3x}$. **D.** $y' = -\frac{3}{\sin^2 3x}$.

Câu 4. Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. $(\cos x)' = -\sin x$. B. $(\sin x)' = -\cos x$. C. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$. D. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Câu 5. Cho $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$. Tính $f'(-2)$

- A. -3. B. -5. C. 1. D. 0.

Câu 6. Biết $(x^5 - 3x^4 + 2019)' = a.x^4 + b.x^3$. Tìm $S = a + b$.

- A. $S = -7$. B. $S = 7$. C. $S = 17$. D. $S = 12$.

Câu 7. Một chất điểm chuyển động có phương trình $s = t^3 - 2t$ (t tính bằng giây, s tính bằng mét). Tính vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t_0 = 4$ (giây) ?

- A. 64 m/s. B. 46 m/s. C. 56 m/s. D. 22 m/s.

Câu 8. Cho $u = u(x)$, $v = v(x)$ và k là hằng số. Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. $(ku)' = ku'$. B. $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{1}{v^2}$. C. $(u^n)' = n.u^{n-1}.u'$. D. $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 5x^2 + 2$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = -7x$

- A. 3. B. 4. C. 2. D. 1.

Câu 10. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = (4x + 3)^8$

- A. $y'' = 224.(4x + 3)^6$. B. $y'' = 32.(4x + 3)^7$. C. $y'' = 56.(4x + 3)^6$. D. $y'' = 896.(4x + 3)^6$.

Câu 11. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x + \cos x}$

- A. $y' = \frac{1 + \sin x}{2\sqrt{x + \cos x}}$. B. $y' = \frac{1 - \sin x}{\sqrt{x + \cos x}}$. C. $y' = \frac{1 - \sin x}{2\sqrt{x + \cos x}}$. D. $y' = \frac{1 - \sin x}{2\sqrt{x + \sin x}}$.

Câu 12. Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ tại điểm có tung độ bằng 2

- A. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$. B. $y = \frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$. C. $y = \frac{1}{3}x - \frac{11}{3}$. D. $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$.

Câu 13. Cho $u = u(x)$ và $v = v(x)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $(u.v)' = u'.v - u.v'$. B. $(u.v)' = u'.v'$. C. $(u + v)' = u'.v + u.v'$. D. $(u.v)' = u'.v + u.v'$.

Câu 14. Điện lượng truyền trong dây dẫn có phương trình $Q = t^2$. Tính cường độ dòng điện tức thời tại thời điểm $t_0 = 5$ (giây) ?

- A. 3 A. B. 25 A. C. 10 A. D. 2 A.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x) = x^3$. Giải phương trình $f'(x) = 3$.

- A. $x = 1; x = -1$. B. $x = 1$. C. $x = -1$. D. $x = \pm 3$.

PHẦN II: TỰ LUẬN

Câu 16. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a/ $y = x^4 + 5x^3 + 2x + 300$.

b/ $y = (6x + 5). \sin x$.

c/ $y = \frac{2x-1}{x+4}$.

d/ $y = \sqrt{1+x+3x^2}$.

Câu 17. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, biết tiếp tuyến này vuông góc với đường thẳng $d: 4x + y - 1 = 0$.

-----HẾT-----

Chủ đề ③**VÉCTOR TRONG KHÔNG GIAN
QUAN HỆ VUÔNG GÓC****Vấn đề 1. VÉCTOR TRONG KHÔNG GIAN****1. Vectơ trong không gian****① Vectơ, giá và độ dài của vectơ.**

- ✦ Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng. **Kí hiệu** $\overrightarrow{AB}$ chỉ vectơ có điểm đầu A , điểm cuối B . Vectơ còn được kí hiệu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$
- ✦ Giá của vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó. Hai vectơ được gọi là *cùng phương* nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau. Ngược lại, hai vectơ có giá cắt nhau được gọi là hai vectơ *không cùng phương*. Hai vectơ cùng phương thì có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.
- ✦ Độ dài của vectơ là độ dài của đoạn thẳng có hai đầu mút là điểm đầu và điểm cuối của vectơ. Vectơ có độ dài bằng 1 gọi là vectơ đơn vị. Kí hiệu độ dài vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $|\overrightarrow{AB}|$

Như vậy: $|\overrightarrow{AB}| = AB = BA$.

② Hai vectơ bằng nhau, đối nhau. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b} (\neq \vec{0})$

- ✦ Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là *bằng nhau* nếu chúng có cùng hướng và cùng độ dài.

$$\text{Kí hiệu } \vec{a} = \vec{b} \text{ và } \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \text{ cùng hướng } \vec{b} \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| \end{cases}$$

- ✦ Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là *đối nhau* nếu chúng ngược hướng và cùng độ dài.

$$\text{Kí hiệu } \vec{a} = -\vec{b} \text{ và } \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \text{ cùng hướng } \vec{b} \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| \end{cases}$$

③ Vectơ – không.

Vectơ – không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.

Kí hiệu: $\vec{0}, \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \dots = \vec{0}$.

Vectơ – không có phương, hướng tùy ý, có độ dài bằng không.

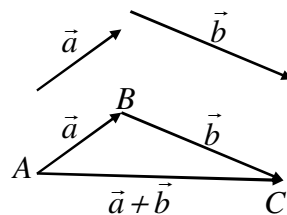
Vectơ – không cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.

11. Phép cộng và phép trừ vectơ**① Định nghĩa 1.**

- ✦ Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Trong không gian lấy một điểm A tùy ý, dựng $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và được kí hiệu $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$.
- ✦ $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

② Tính chất 1:

- ✦ Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- ✦ Tính chất kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- ✦ Cộng với $\vec{0}$: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$
- ✦ Cộng với vectơ đối: $\vec{a} + (-\vec{a}) = -\vec{a} + \vec{a} = \vec{0}$

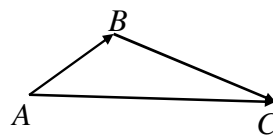
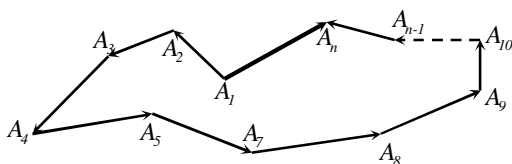


③ Các qui tắc:

✦ **Qui tắc ba điểm:** Với ba điểm A, B, C bất kì ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

Mở rộng: **Qui tắc đa giác khép kín**

Cho n điểm bất kì $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$. Ta có: $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$

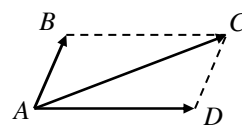


✦ **Qui tắc trừ (ba điểm cho phép trừ):**

Với ba điểm A, B, C bất kì ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$

✦ **Qui tắc hình bình hành:**

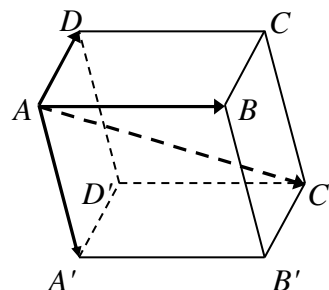
Với hình bình hành $ABCD$ ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$



✦ **Qui tắc hình hộp.**

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với AB, AD, AA' là ba cạnh có chung đỉnh A và AC' là đường chéo, ta có:

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$$



III. Phép nhân một số với một vectơ

① Định nghĩa 2

Cho $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích $k \cdot \vec{a}$ là một vectơ:

- Cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$
- Ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$

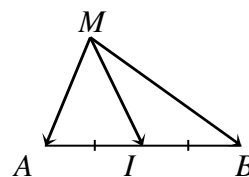
② Tính chất 2. Với $\vec{a}, \vec{b}$ bất kì; $m, n \in \mathbb{R}$, ta có:

$$\begin{aligned} \star m(\vec{a} + \vec{b}) &= m\vec{a} + m\vec{b} & \star (m+n)\vec{a} &= m\vec{a} + n\vec{a} \\ \star m(n\vec{a}) &= (mn)\vec{a} & \star 1 \cdot \vec{a} &= \vec{a}, (-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a} & \star 0 \cdot \vec{a} &= \vec{0}; k \cdot \vec{0} = \vec{0} \end{aligned}$$

③ Điều kiện để hai vectơ cùng phương

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\neq \vec{0}$), $k \neq 0$: $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}$

Hệ quả: điều kiện để ba điểm A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$



④ Một số tính chất

✦ **Tính chất trung điểm**

Cho đoạn thẳng AB có I là trung điểm, ta có: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$; $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$; $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$$\bullet \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} \quad (M \text{ bất kì})$$

✦ **Tính chất trọng tâm.**

Cho $\triangle ABC$, G là trọng tâm, ta có: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

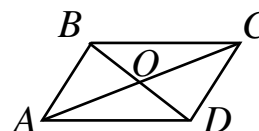
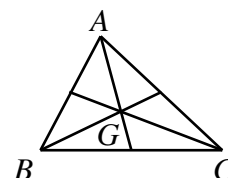
$$\bullet \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \quad (M \text{ bất kì})$$

✦ **Tính chất hình bình hành.**

Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O , ta có:

$$\bullet \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

$$\bullet \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$$



IV. Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng**① Khái niệm về sự đồng phẳng của ba vectơ trong không gian.**

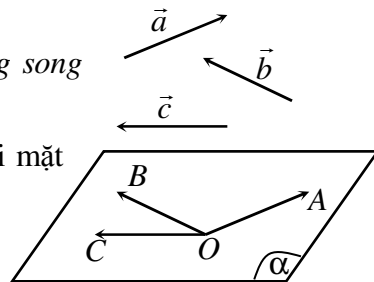
Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ($\neq \vec{0}$) trong không gian. Từ một điểm O bất kì ta dựng $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$. Khi đó xảy ra hai trường hợp:

- ✦ Các đường thẳng OA, OB, OC không cùng nằm trong một mặt phẳng thì ta nói ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng.
- ✦ Các đường thẳng OA, OB, OC cùng nằm trong một mặt phẳng thì ta nói ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

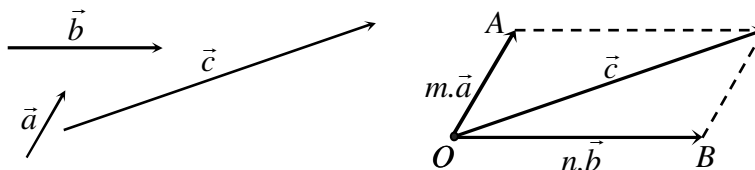
② Định nghĩa 3

Ba vectơ gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

Trên hình bên, giá của các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng song song với mặt phẳng (α) nên ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

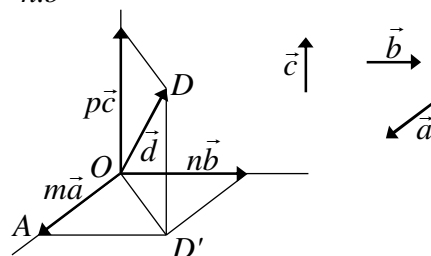
**③ Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng****Định lý 1**

Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ trong đó $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Điều kiện cần và đủ để ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng là có **duy nhất** các số m, n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

**④ Phân tích một vectơ theo ba vectơ không đồng phẳng****Định lý 2**

Nếu ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng thì với mỗi vectơ $\vec{d}$, ta tìm được **duy nhất** các số m, n, p sao cho

$$\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}.$$

**Dạng 1. Tính toán vectơ****A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

① Quy tắc ba điểm: $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$ (quy tắc cộng)

$$\vec{AB} = \vec{CB} - \vec{CA} \text{ (quy tắc trừ)}$$

② Quy tắc hình bình hành: Với hình bình hành $ABCD$ ta luôn có: $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$

③ Quy tắc hình hộp: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, ta được: $\vec{AC'} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'}$

④ Quy tắc trung điểm: Cho I là trung điểm AB , M là điểm bất kỳ: $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ và $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$

- ⑤ **Tính chất trọng tâm của tam giác:** G là trọng tâm $\triangle ABC$, $\forall M$ ta có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \quad \text{v} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$$

- ⑥ **Tính chất trọng tâm của tứ diện:** G là trọng tâm tứ diện $ABCD$:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \text{ và } \forall M \text{ ta có: } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$$

- ⑦ Ba véctơ gọi là **đồng phẳng** khi các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

- ⑧ Nếu ba véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng thì mỗi véctơ $\vec{d}$ đều có thể viết dưới dạng $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$, với m , n , p duy nhất.

☞ **Chú ý:** ☒ Để biểu diễn một véctơ trong hệ cơ sở ta thường đưa về gốc để tính, chẳng hạn véctơ $\overrightarrow{MN}$ và gốc O cho trước $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ theo hệ cơ sở thuận lợi, từ đó ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$.

- ✱ Để tính đoạn AB ta có thể bình phương vô hướng $AB = \overrightarrow{AB}^2$ trong hệ cơ sở gồm 3 vectơ đồng phẳng.

- ✎ Để tính góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ ta có thể tính $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ và

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{BD'}$, $\overrightarrow{B'D'}$, $\overrightarrow{DB'}$, $\overrightarrow{BC'}$ và $\overrightarrow{AD'}$ theo ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting or typing. There are no margins, text, or other markings on the page.

Ví dụ 4. Cho hình tứ diện $ABCD$ có $AB = c$, $CD = c'$, $AC = b$, $BD = b'$, $BC = a$, $AD = a'$. Tính cosin góc giữa các vectơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{DA}$.

Ví dụ 5. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có cạnh $BC = a\sqrt{2}$ và các cạnh còn lại đều bằng a . Tính cosin góc giữa các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{SC}$.

Ví dụ 6. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA = SB = SC = b$ và đôi một hợp với nhau một góc 30° . Tính khoảng cách từ S đến trọng tâm G của chúng.

Ví dụ 7. Cho hình tứ diện đều $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng m . Các điểm M và N lần lượt là trung điểm AB và CD .

a) Tính độ dài MN .

b) Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BC}$

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức vectơ

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- ① Sử dụng các phép toán cộng, trừ, nhân vectơ với một số, tích vô hướng
 - ② Sử dụng các quy tắc trung điểm, trọng tâm tam giác, trọng tâm tứ diện, quy tắc hình bình hành, hình hộp, ...
- 🔗 **Chú ý:** $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có cùng trọng tâm khi và chỉ khi $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 8. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Chứng minh:

a) $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

b) Điểm G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

Ví dụ 9. Cho tứ diện $ABCD$ với G là trọng tâm.

a) Chứng minh $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AG}$

b) Gọi A' là trọng tâm tam giác BCD . Chứng minh: $\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'D} \cdot \overrightarrow{AA'} = 0$

Ví dụ 10. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi D_1, D_2, D_3 lần lượt là điểm đối xứng của điểm D' qua A, B', C . Chứng tỏ rằng B là trọng tâm của tứ diện $D_1D_2D_3D'$.

Ví dụ 11. Cho hình chóp $S.ABCD$.

a) Chứng minh rằng nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$

b) Gọi O là giao điểm của AC và BD . Chứng tỏ rằng $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$

Dạng 3. Quan hệ đồng phẳng**A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

- ① Để chứng minh ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng, ta chứng minh tồn tại cặp số thực m, n sao cho: $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.
- ② Để chứng minh ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng, ta đi chứng minh:
 $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow m = n = p = 0$
- ③ Bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng khi 3 vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng.

B. BÀI TẬP MẪU**Ví dụ 12.** Chứng minh:

- a) Nếu có $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ và một trong 3 số m, n, p khác 0 thì 3 vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.
- b) Nếu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng và $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ thì $m = n = p = 0$.

Ví dụ 13. Cho hình tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AD lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MD}$ và trên cạnh BC lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{NB} = -3\overrightarrow{NC}$. Chứng minh rằng ba vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Ví dụ 15. Cho tứ diện $ABCD$, M và N là các điểm lần lượt thuộc AB và CD sao cho $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{ND} = -2\overrightarrow{NC}$. Các điểm I , J , K lần lượt thuộc AD , MN , BC sao cho $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{ID}$, $\overrightarrow{JM} = k\overrightarrow{JN}$, $\overrightarrow{KB} = k\overrightarrow{KC}$. Chứng minh các điểm I , J , K thẳng hàng.

BÀI TẬP CƠ BẢN NÂNG CAO VẤN ĐỀ 1

Bài 1. Cho G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi $O = AC \cap BD$. Chứng minh rằng:

a) Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$. Điều ngược lại có đúng không?

b) $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$.

Bài 3. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M , N theo thứ tự thuộc AB và CD sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DN} = k\overrightarrow{DC}$.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MN} = (1-k)\overrightarrow{AD} + k.\overrightarrow{BC}$.

b) Gọi các điểm E, F, I theo thứ tự thuộc AD, BC và MN sao cho $\overrightarrow{AE} = m\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BF} = m\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{MI} = m\overrightarrow{MN}$. Chứng minh rằng E, F, I thẳng hàng.

Bài 4. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M, N theo thứ tự thuộc AB và CD sao cho $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{ND} = -2\overrightarrow{NC}$. Các điểm I, J, K lần lượt thuộc AD, MN, BC sao cho $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{ID}$, $\overrightarrow{JM} = k\overrightarrow{JN}$ và $\overrightarrow{KB} = k\overrightarrow{KC}$. Chứng minh rằng các điểm I, J, K thẳng hàng.

Bài 5. Cho hai đường thẳng Δ và Δ_1 cắt ba mặt phẳng song song (α) , (β) và (γ) lần lượt tại A , B , C và A_1 , B_1 , C_1 . Với O là điểm bất kì trong không gian, đặt $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{CC_1}$. Chứng minh rằng ba điểm I , J , K thẳng hàng.

- Bài 6.** Cho hình chóp $S.ABC$. Đáy ABC có trọng tâm G . Tính $\overrightarrow{SG}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{SC}$.
- Bài 7.** Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ và $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{BC'}$ qua các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
- Bài 8.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi A_1 , B_1 , C_1 và D_1 là các điểm thỏa: $\overrightarrow{A_1A} = -2\overrightarrow{A_1B}$, $\overrightarrow{B_1B} = -2\overrightarrow{B_1C}$, $\overrightarrow{C_1C} = -2\overrightarrow{C_1D}$, $\overrightarrow{D_1D} = -2\overrightarrow{D_1A}$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{j}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{k}$. Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$ theo ba vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.
- Bài 9.** Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi K là giao điểm của AH và DE , I là giao điểm của BH và DF . Chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{KI}$ và $\overrightarrow{FG}$ đồng phẳng.
- Bài 10.** Cho $\triangle ABC$. Lấy điểm S nằm ngoài mặt phẳng (ABC) . Trên đoạn SA lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{MS} = -2\overrightarrow{MA}$ và trên đoạn BC lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{NC} = -2\overrightarrow{NB}$. Chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{SC}$ đồng phẳng.
- Bài 11.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của BB' và $A'C'$. Điểm K thuộc $B'C'$ sao cho $\overrightarrow{KC'} = -2\overrightarrow{KB'}$. Chứng minh bốn điểm A , I , J , K cùng thuộc một mặt phẳng.
- Bài 12.** Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.
- Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = 2\overrightarrow{AC}$.
 - Xác định vị trí của điểm O sao cho: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1} = \vec{0}$
 - Chứng minh rằng khi đó mọi điểm M trong không gian ta luôn có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MD_1} = 8\overrightarrow{MO}$
- Bài 13.** Cho tứ diện $ABCD$, hai điểm M , N thỏa mãn: $\overrightarrow{MA} + t\overrightarrow{MC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{NB} + t\overrightarrow{ND} = \vec{0}$. Chứng tỏ rằng khi t thay đổi thì trung điểm I của MN di chuyển trên một đường thẳng cố định.
- Bài 14.** Trong không gian, cho ba điểm A , B , C cố định không thẳng hàng, tìm tập hợp các điểm M sao cho: $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$
- Bài 15.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M , N lần lượt là các điểm thuộc AD' và BD sao cho $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MD'}$, $\overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB}$ ($k \neq 0, k \neq 1$).
- Chứng minh rằng MN song song với mặt phẳng $(A'BC)$.
 - Khi MN và $A'C$ song song với nhau, chứng tỏ rằng MN vuông góc với AD' và DB .
- Bài 16.** Trong không gian cho $\triangle ABC$.
- Chứng minh rằng nếu điểm $M \in (ABC)$ thì có ba số x, y, z mà $x + y + z = 1$ sao cho $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ với mọi điểm O .
 - Ngược lại, nếu có một điểm O trong không gian sao cho $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, trong đó $x + y + z = 1$ thì $M \in (ABC)$.
- Bài 17.** Cho hình chóp $S.ABC$. Lấy các điểm A' , B' , C' lần lượt thuộc các tia SA , SB , SC sao cho $SA = aSA'$, $SB = bSB'$, $SC = cSC'$, trong đó a, b, c là các số thay đổi. Chứng minh rằng mặt phẳng $(A'B'C')$ đi qua trọng tâm của $\triangle ABC$ khi và chỉ khi $a + b + c = 3$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

- Câu 1.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB' . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?
- A. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$ B. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$ C. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$ D. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$
- Câu 2.** Trong không gian cho điểm O và bốn điểm A, B, C, D không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để A, B, C, D tạo thành hình bình hành là:
- A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$
 C. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$ D. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.
- Câu 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?
- A. $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$ B. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$ C. $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$ D. $\vec{a} + \vec{c} + \vec{b} + \vec{d} = \vec{0}$
- Câu 4.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?
- A. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b})$ B. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{b} - \vec{c})$ C. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b} - \vec{d})$ D. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} + \vec{b})$
- Câu 5.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Gọi I là tâm hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CA'} = \vec{v}$, $\overrightarrow{BD'} = \vec{x}$, $\overrightarrow{DB'} = \vec{y}$ **đúng**?
- A. $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$ B. $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$
 C. $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$ D. $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$
- Câu 6.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I và K lần lượt là tâm của hình bình hành $ABB'A'$ và $BCC'B'$. Khẳng định nào sau đây **sai**?
- A. $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}$ B. Bốn điểm I, K, C, A đồng phẳng
 C. $\overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{IK} = 2\overrightarrow{BC}$ D. Ba vectơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{B'C'}$ không đồng phẳng.
- Câu 7.** Cho tứ diện $ABCD$. Người ta định nghĩa “ G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ ”. Khẳng định nào sau đây **sai**?
- A. G là trung điểm của đoạn IJ (I, J lần lượt là trung điểm AB và CD)
 B. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của AC và BD
 C. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của AD và BC
 D. Chưa thể xác định được.
- Câu 8.** Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD . Đặt $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{y} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{z} = \overrightarrow{AD}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?
- A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$. B. $\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{3}(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$
 C. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$ D. $\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3}(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$
- Câu 9.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. M là điểm xác định bởi $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?
- A. M là tâm hình bình hành $ABB'A'$ B. M là tâm hình bình hành $BCC'B'$
 C. M là trung điểm BB' D. M là trung điểm CC'

Vấn đề 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

1. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

① Góc giữa hai vectơ.

Cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ trong không gian. Từ một điểm A bất kì vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Khi đó ta gọi góc $\widehat{BAC}$ ($0^\circ \leq \widehat{BAC} \leq 180^\circ$) là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, kí hiệu $(\vec{u}, \vec{v})$.

Ta có $(\vec{u}, \vec{v}) = \widehat{BAC}$.

② Tích vô hướng : Cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ ($\neq \vec{0}$). Tích vô hướng của $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Nếu $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$ thì ta quy ước $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

③ Tính chất

Tính chất 3:

Với $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là ba vectơ bất kì trong không gian và $k \in \mathbb{R}$, ta có:

- ✦ Tính chất giao hoán: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- ✦ Tính chất phân phối: $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- ✦ Tính chất kết hợp: $(k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k \cdot \vec{b})$
- ✦ Bình phương vô hướng: $\vec{a}^2 \geq 0$, $\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

④ Vectơ chỉ phương của đường thẳng.

- ✦ Vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng d nếu giá của nó song song hoặc trùng với đường thẳng d .
- ✦ Nếu $\vec{a}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d thì $k \cdot \vec{a}$ cũng là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d .
- ✦ Một đường thẳng d trong không gian hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm A thuộc d và một vectơ chỉ phương.

⑤ Một số ứng dụng của tích vô hướng

- ✦ Tính độ dài của đoạn thẳng AB : $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$
- ✦ Xác định góc giữa hai vectơ: $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$
- ✦ Chứng minh hai đường thẳng vuông góc.

II. Góc giữa hai đường thẳng

Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm bất kì và lần lượt song song với a và b . Ta có:

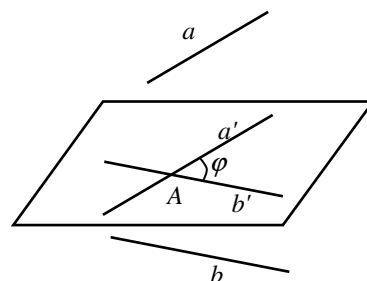
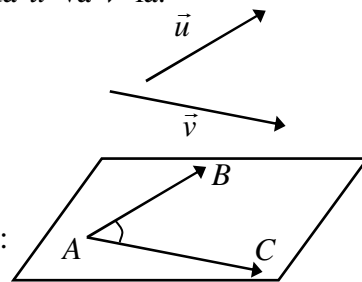
$$(a, b) = (a', b') = \varphi$$

III. Hai đường thẳng vuông góc

① **Định nghĩa 4:** Hai đường thẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° . Kí hiệu: $a \perp b$ hay $b \perp a$.

② Nhận xét:

- ✦ Nếu $\vec{u}$, $\vec{v}$ lần lượt là vectơ chỉ phương của hai đường thẳng a và b thì $a \perp b \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- ✦ Nếu $a \parallel b$ và $c \perp a \Rightarrow c \perp b$.



Dạng 1. Chứng minh vuông góc

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- ① **Cách 2.** Sử dụng trực tiếp định nghĩa góc của hai đường thẳng trong không gian.
- ② **Cách 3.** Muốn chứng minh hai đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau ta có thể chứng minh $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.
- ③ **Cách 4.** Chứng minh đường thẳng này vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng kia.
- ④ **Cách 5.** Dùng định lí ba đường vuông góc (**DL4**).

B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 16. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng nếu $\overline{AB}.\overline{AC} = \overline{AC}.\overline{AD} = \overline{AD}.\overline{AB}$ thì $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, $AD \perp BC$. Điều ngược lại có đúng không?

[illegible]

Ví dụ 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Chứng minh rằng $SA \perp BC$, $SB \perp AC$, $SC \perp AB$.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Ví dụ 18. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng $AB \perp CD \Leftrightarrow AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

Ví dụ 19. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn AC, BD, BC, AD . Chứng minh nếu $MN = PQ$ thì $AB \perp CD$.

Dạng 2. Góc giữa hai đường thẳng

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Để tính góc giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b , ta chọn một trong hai cách sau:

Cách 1. Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Tìm góc bằng việc lấy một điểm A nào đó (thông thường $A \in a$ hoặc $A \in b$). Qua A dựng a' và b' theo thứ tự song song với a và b . Khi đó, góc nhọn hoặc vuông tạo bởi a' và b' là góc giữa a và b .

Bước 2. Tính góc: Sử dụng tỉ số lượng giác của góc trong tam giác vuông hoặc dùng định lý hàm số sin, cosin trong tam giác thường để xác định số đo góc giữa a và b .

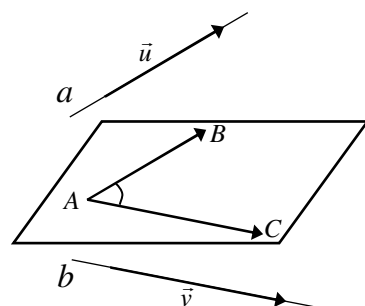
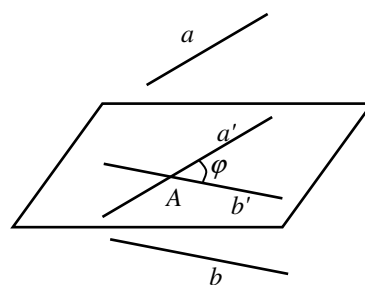
Cách 2. Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Tìm 2 vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ theo thứ tự là các vectơ chỉ phương của các đường thẳng a và b .

Bước 2. Tính số đo góc α giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

Bước 3. Khi đó, góc giữa hai đường thẳng a và b :

- bằng góc α nếu $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$
- bằng $180^\circ - \alpha$ nếu α là góc tù.



Ví dụ 22. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi M là trung điểm của CD . Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD , BC và AM .

Ví dụ 23. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa 2 đường thẳng AC và DA' , BD và AC' .

Ví dụ 24. Cho tứ diện $ABCD$ có $BC = AD = a$, $AC = BD = b$, $AB = CD = c$. Tính góc giữa BC và AD

Ví dụ 25. Cho tứ diện $ABCD$ có $CD = \frac{4}{3}AB$. Gọi I , J lần lượt là trung điểm của BC , AC , BD . Biết $JK = \frac{5}{6}AB$, tính góc giữa đường thẳng CD với các đường thẳng IJ và AB .

Ví dụ 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, cạnh bên $SA = AB$ và $SA \perp BC$.

- Tính góc giữa SD và BC
- Gọi I , J lần lượt là các điểm thuộc SB và SD sao cho $IJ \parallel BD$. Chứng minh rằng góc giữa AC và IJ không phụ thuộc vào vị trí của I và J .

BÀI TẬP CƠ BẢN NÂNG CAO VẤN ĐỀ 2

Bài 18. Cho ba tia Ox , Oy , Oz không đồng phẳng.

a) Đặt $\widehat{xOy} = \alpha$, $\widehat{yOz} = \beta$, $\widehat{zOx} = \gamma$. Chứng minh rằng: $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma > -\frac{3}{2}$

b) Gọi Ox' , Oy' , Oz' lần lượt là các tia phân giác của các góc $\widehat{xOy}$, $\widehat{yOz}$, $\widehat{zOx}$. Chứng minh rằng nếu Ox' và Oy' vuông góc với nhau thì Oz' vuông góc với cả Ox' và Oy' .

Bài 19. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng m . Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AB , CD .

a) Tính độ dài MN theo a .

b) Tính góc giữa MN với AB , CD và BC .

Bài 20. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa các cặp vectơ sau:

a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$

b) $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$

c) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$

Bài 21. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC , AD . Hãy tính góc giữa AB và CD , biết $AB = CD = 2a$ và $MN = a\sqrt{2}$.

Bài 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng SC và AB .

Bài 23. Cho tứ diện $ABCD$, biết $AB = AC$ và $DB = DC$.

a) Chứng minh rằng AD vuông góc với BC .

b) Gọi M , N là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng AB và BD sao cho $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB}$. Tính góc giữa hai đường thẳng MN và BC .

Bài 24. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Từ đó, suy ra rằng nếu tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$ và $AC \perp DB$ thì $AD \perp BC$.

b) Nếu $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ thì $AB \perp CD$, $AC \perp DB$, $AD \perp BC$. Điều ngược lại có đúng không?

c) Nếu $AD = BD = CD$ và $\widehat{BDC} = \widehat{CDA}$ thì $AB \perp CD$, $AC \perp DB$, $AD \perp BC$.

Bài 25. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{CAD} = 90^\circ$. Chứng minh rằng:

a) AB vuông góc với CD .

b) Nếu I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD thì $IJ \perp AB$ và $IJ \perp CD$.

Bài 26. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Chứng minh rằng $SA \perp BC$, $SB \perp AC$, $SC \perp AB$.

Bài 27. Cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M , N , P , Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC , CB , BC' , $C'A$. Chứng minh rằng:

a) $AB \perp CC'$.

b) Tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Bài 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình bình hành. SAB và SAD là các tam giác vuông tại A . Chứng minh rằng:

a) SA vuông góc với BC và CD .

b) SA vuông góc với AC và BD .

Bài 29. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABC'D'$ có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau, lần lượt có tâm O và O' . Cmr: $AB \perp OO'$ và tứ giác $CDD'C'$ là hình chữ nhật.

Bài 30. Cho vectơ $\vec{n}$ (khác $\vec{0}$) và hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thì ba vectơ $\vec{n}$, $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không đồng phẳng.

Bài 31. Chứng minh rằng ba vectơ cùng vuông góc với vectơ $\vec{n}$ (khác $\vec{0}$) thì đồng phẳng. Từ đó suy ra, các đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì cùng song song với một mặt phẳng.

Bài 32. Gọi S là diện tích $\triangle ABC$. Chứng minh rằng: $S = \frac{1}{2} \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

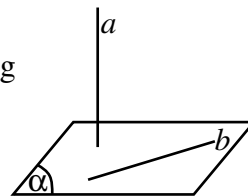
- Câu 10.** Trong không gian cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c . Khẳng định nào sau đây **sai**?
- A. Nếu a và b cùng nằm trong một mặt phẳng và cùng vuông góc với c thì $a \parallel b$.
 B. Nếu $a \parallel b$ và $c \perp a$ thì $c \perp b$.
 C. Nếu góc giữa a và c bằng góc giữa b và c thì $a \parallel b$.
 D. Nếu a và b cùng nằm trong $mp(\alpha) \parallel c$ thì góc giữa a và c bằng góc giữa b và c .
- Câu 11.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$, $IJ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. (I, J lần lượt là trung điểm của BC và AD). Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD là
- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .
- Câu 12.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = a$, $BD = 3a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Biết AC vuông góc với BD . Tính MN
- A. $MN = \frac{a\sqrt{10}}{2}$. B. $MN = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. C. $MN = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$. D. $MN = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.
- Câu 13.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử tam giác $AB'C$ và $A'DC'$ đều có 3 góc nhọn. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ là góc nào sau đây?
- A. $\angle BDB'$ B. $\angle AB'C$ C. $\angle DB'B$ D. $\angle DA'C'$
- Câu 14.** Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ thì $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, $AD \perp BC$. Điều ngược lại đúng không?
 Sau đây là lời giải:
- Bước 1: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow AC \perp BD$
- Bước 2: Chứng minh tương tự, từ $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ ta được $AD \perp BC$ và $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ ta được $AB \perp CD$.
- Bước 3: Ngược lại đúng, vì quá trình chứng minh ở bước 1 và 2 là quá trình biến đổi tương đương.
- Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở đâu?**
- A. Đúng B. Sai từ bước 1 C. Sai từ bước 1 D. Sai ở bước 3
- Câu 15.** Cho tứ diện đều $ABCD$ (tứ diện có tất cả các cạnh bằng nhau). Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng:
- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°
- Câu 16.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có thể **sai**?
- A. $A'C' \perp BD$ B. $BB' \perp BD$ C. $A'B \perp DC'$ D. $BC' \perp A'D$
- Câu 17.** Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó $\cos(\angle AB, DM)$ bằng:
- A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$
- Câu 18.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD . Số đo của góc (MN, SC) bằng:
- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°
- Câu 19.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC . Số đo của góc (IJ, CD) bằng
- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°
- Câu 20.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD . Góc giữa (IE, JF) bằng
- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

Vấn đề 3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC MẶT PHẪNG

1. Định nghĩa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng:

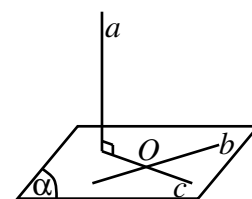
- ① **Định nghĩa 5:** Đường thẳng gọi là vuông góc với mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng của mặt phẳng đó.

$$a \perp (\alpha) \Leftrightarrow a \perp b, \forall b \subset (\alpha); \left. \begin{array}{l} a \perp (\alpha) \\ b \subset (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp b$$



- ② **Định lý 3:** Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (α) thì đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) .

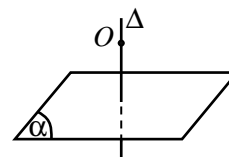
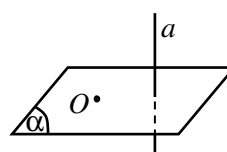
$$\left. \begin{array}{l} b, c \subset (\alpha) \\ b \text{ cắt } c \\ a \perp b, a \perp c \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (\alpha)$$



11. Tính chất

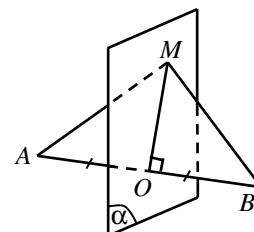
① Tính chất 4:

- Ⓐ Có duy nhất một mặt phẳng (P) đi qua một điểm O cho trước và vuông góc với một đường thẳng a cho trước.
- Ⓑ Có duy nhất một đường thẳng Δ đi qua một điểm O cho trước và vuông góc với một mặt phẳng (P) cho trước.



- ② **Định nghĩa 6:** Mặt phẳng đi qua trung điểm O của đoạn AB và vuông góc với AB là **mặt phẳng trung trực** của đoạn AB .

$$M \in \text{mặt trung trực của } AB \Leftrightarrow MA = MB$$

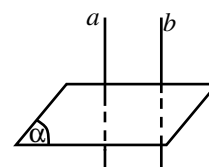


111. Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng

① Tính chất 5:

- Ⓐ Nếu mặt phẳng nào vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì cũng vuông góc với đường thẳng còn lại.

$$\left. \begin{array}{l} a \parallel b \\ (\alpha) \perp a \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) \perp b$$



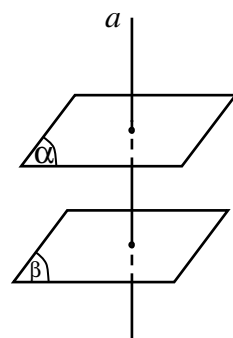
- Ⓑ Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.

$$\left. \begin{array}{l} a \perp (\alpha) \\ b \perp (\alpha) \\ a \neq b \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel b$$

② Tính chất 6:

- Ⓐ Đường thẳng nào vuông góc với một trong hai mặt phẳng song song thì cũng vuông góc với mặt phẳng còn lại.

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \parallel (\beta) \\ a \perp (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (\beta) \quad \left. \begin{array}{l} (\alpha) \perp a \\ (\beta) \perp a \\ (\alpha) \neq (\beta) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta)$$

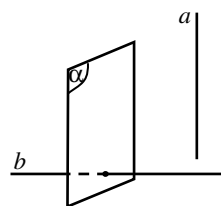


- Ⓑ Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.

③ Tính chất 7:

- Ⓐ Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với (α) thì cũng vuông góc với a .

$$\left. \begin{array}{l} a \parallel (\alpha) \\ b \perp (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow b \perp a \quad \left. \begin{array}{l} a \not\subset (\alpha) \\ a \perp b \\ (\alpha) \perp b \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel (\alpha)$$



- Ⓑ Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.

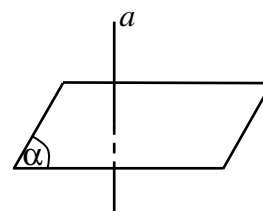
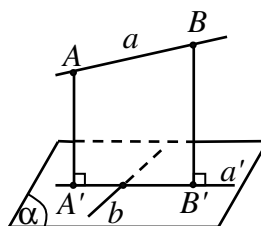
IV. Định lý ba đường vuông góc

- ① **Định nghĩa 7:** Phép chiếu song song lên mặt phẳng (α) theo phương l vuông góc với mặt phẳng (α) gọi là **phép chiếu vuông góc** lên mặt phẳng (α) .

② Định lý 4: (Định lý 3 đường vuông góc)

Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (α) và đường thẳng b nằm trong (α) . Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên (α) .

$$\left. \begin{array}{l} b \subset (\alpha) \\ a \perp (\alpha) \\ Ch_a a = a' \end{array} \right\} \text{ thì } b \perp a \Leftrightarrow b \perp a'$$



V. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Định nghĩa 8: Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

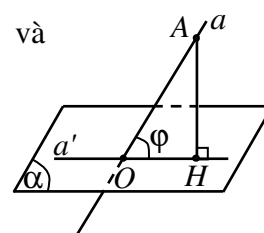
- Ⓐ Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (α) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) bằng 90° .

$$a \perp (\alpha) \Rightarrow (a, (\alpha)) = 90^\circ$$

- Ⓑ Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (α) thì góc giữa a và hình chiếu a' của a trên (α) gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α)

$$(a, (\alpha)) = (a, a') = \widehat{AOH}$$

⌘ **Chú ý:** $0^\circ \leq (a, (\alpha)) \leq 90^\circ$

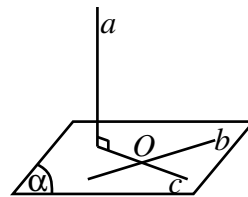


Dạng 1. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

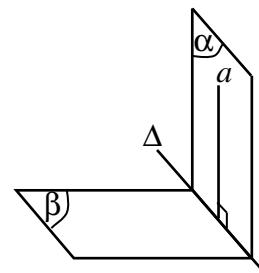
- ① Chứng minh đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (P) .

$$\left. \begin{array}{l} b, c \subset (\alpha) \\ b \text{ cắt } c \\ a \perp b, a \perp c \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (\alpha)$$



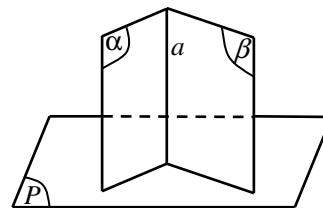
- ② Chứng minh a nằm trong một trong hai mặt phẳng vuông góc và d vuông góc với giao tuyến $\Rightarrow d$ vuông góc với mặt còn lại.

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \perp (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = \Delta \\ a \subset (\alpha), a \perp \Delta \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (\beta)$$



- ③ Chứng minh a là giao tuyến của hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt thứ 3.

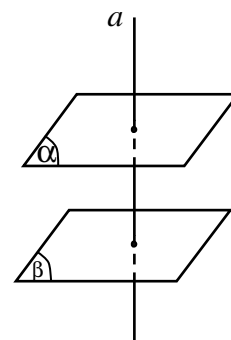
$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \cap (\beta) = a \\ (\alpha) \perp (P) \\ (\beta) \perp (P) \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (P)$$



- ④ Chứng minh đường thẳng d song song với a mà $a \perp (P)$.

- ⑤ Đường thẳng nào vuông góc với một trong hai mặt phẳng song song thì cũng vuông góc với mặt phẳng còn lại. (TC6).

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \parallel (\beta) \\ a \perp (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (\beta)$$



- ⑥ Chứng minh d là trục của tam giác ABC nằm trong (P) .

B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B , $SA \perp (ABC)$.

- Chứng minh: $BC \perp (SAB)$.
- Kẻ đường cao AH trong tam giác SAB . Chứng minh $AH \perp (SBC)$.
- Kẻ đường cao AK trong tam giác SAC . Chứng minh $SC \perp (AHK)$.
- Đường thẳng HK cắt BC tại I . Chứng minh $IA \perp (SAC)$.

Ví dụ 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$.

- Chứng minh: $BC \perp (SAB)$ và $CD \perp (SAD)$.
- Kẻ đường cao AH trong tam giác SAB . Chứng minh $AH \perp (SBC)$.
- Kẻ đường cao AK trong tam giác SAD . Chứng minh $SC \perp (AHK)$.
- Trong mặt phẳng $(ABCD)$ kẻ $AM \perp BD$ tại M . Chứng minh $BD \perp (SAM)$.

Ví dụ 30. Cho hình chóp $A.BCD$. Gọi O là hình chiếu của A lên (BCD) .
Chứng minh rằng $AB = AC = AD \Leftrightarrow OB = OC = OD$.

Ví dụ 31. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 90^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{CSA} = 120^\circ$. Gọi I là trung điểm cạnh AC . Chứng minh $SI \perp (ABC)$.

Ví dụ 32. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A , $BC = 2CC'$. Gọi I , K lần lượt là trung điểm của BC và AI' .

a) Chứng minh $B'C' \perp (A'AI)$ b) Chứng minh $AK \perp (A'BC)$

c) Gọi K là hình chiếu vuông góc của A trên $A'C$. Chứng minh B , H , K thẳng hàng

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Bài 33.** Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt (ABC) và (BCD) là hai tam giác cân có chung cạnh đáy BC . Gọi I là trung điểm của BC .
- a) Chứng minh rằng $BC \perp (ADI)$.
- b) Gọi AH là đường cao của ΔADI , chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$.
- Bài 34.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC không vuông. Gọi H và K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và SBC . Chứng minh:
- a) AH , SK và BC đồng qui. b) $SC \perp (BHK)$ c) $HK \perp (SBC)$

- Bài 35.** Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên mặt phẳng (ABC) .
- Chứng minh rằng $BC \perp (OAH), CA \perp (OBH), AB \perp (OCH)$.
 - Chứng minh rằng H là trực tâm của ΔABC .
 - Chứng minh rằng $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.
 - Chứng minh rằng $S_{\Delta ABC}^2 = S_{\Delta OAB}^2 + S_{\Delta OBC}^2 + S_{\Delta OCA}^2$.
 - Chứng minh rằng các góc của ΔABC đều nhọn.
- Bài 36.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi và có $SA = SB = SC = SD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD .
- Chứng minh $SO \perp (ABCD)$
 - Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, BC . Chứng minh $IJ \perp (SBD)$.
 - Gọi G là trọng tâm ΔACD và H ở trên cạnh SD sao cho $HD = 2HS$. Cm $HG \perp (ABCD)$
- Bài 37.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi và có $SA = SC$ và $SB = SD$.
- $SO \perp (ABCD)$
 - $AC \perp (SBD)$ và $BD \perp (SAC)$.
- Bài 38.** Trên mặt phẳng (α) cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , S là một điểm nằm ngoài mặt phẳng (α) sao cho $SA = SC, SB = SD$. Chứng minh rằng:
- $SO \perp (\alpha)$.
 - Nếu trong mặt phẳng (SAB) kẻ $SH \perp AB$ tại H thì $AB \perp (SOH)$.
- Bài 39.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi và có cạnh SA vuông góc với $(ABCD)$. Gọi I và K là hai điểm lần lượt lấy trên hai cạnh SB và SD sao cho $\frac{SI}{SB} = \frac{SK}{SD}$. Chứng minh:
- $BD \perp SC$.
 - $IK \perp (SAC)$
- Bài 40.** Cho tứ diện $SABC$ có $SA \perp (ABC)$ và có ΔABC vuông tại B . Trong mặt phẳng (SAB) kẻ $AM \perp SB$ tại M . Trên cạnh SC lấy điểm N sao cho $\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC}$. Chứng minh rằng:
- $BC \perp (SAB)$ và $AM \perp (SBC)$.
 - $MN \perp (SAB)$, từ đó suy ra $SB \perp AN$.
- Bài 41.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , SA vuông góc với $(ABCD)$. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên SB, SC và SD .
- Chứng minh rằng $BC \perp (SAB), CD \perp (SAD)$.
 - Chứng minh rằng (SAC) là mặt trung trực của đoạn BD .
 - Chứng minh AH, AK cùng vuông góc với SC . Từ đó suy ra ba đường thẳng AH, AI, AK cùng nằm trong một mặt phẳng.
 - Chứng minh rằng (SAC) là mặt trung trực của đoạn HK . Từ đó suy ra $HK \perp AI$.
 - Tính diện tích tứ giác $AHIK$ biết $SA = AB = a$.

Dạng 2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Để tìm góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) ta thường dùng các cách sau đây:

✎ **Cách 1:**

Bước 1. Tìm $O = a \cap (\alpha)$.

Bước 2. Lấy $A \in a$ và dựng $AH \perp (\alpha)$ tại H .

Khi đó $(a, (\alpha)) = (a, a') = \widehat{AOH}$.

Bước 3. Tính số đo của góc $\widehat{AOH}$

✎ **Chú ý:** $0^\circ \leq (a, (\alpha)) \leq 90^\circ$

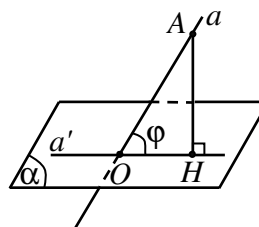
✎ **Cách 2:** Tính gián tiếp theo một trong hai hướng sau:

Hướng 1: Chọn một đường thẳng $d \parallel a$ mà góc giữa d và (α) có thể tính được.

Từ đó ta có: $(a, (\alpha)) = (d, (\alpha))$

Hướng 2: Chọn một mặt phẳng $(\beta) \parallel (\alpha)$ mà góc giữa a và (β) có thể tính được.

Từ đó ta có: $(a, (\alpha)) = (a, (\beta))$



B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 33. Cho tứ diện đều $ABCD$. Tính góc giữa đường thẳng AB và (BCD)

ĐS: $54^\circ 44'$

Ví dụ 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$.

Tính góc giữa:

a) SC, SD với $(ABCD)$

b) BD với (SAC)

ĐS: a) $45^\circ; 54^\circ 44'$ b) 90°

Ví dụ 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang cân đáy lớn $AD = 2a$, $AB = BC = CD = a$. hình chiếu vuông góc của S trên $(ABCD)$ là trung điểm I của AD . $\triangle SAD$ là tam giác đều.

a) Tính góc giữa SC và $(ABCD)$

b) Gọi K là trung điểm AB , tính góc giữa KI và mặt phẳng (SAB)

c) Tính góc giữa BD với (SAB)

d) Tính góc giữa SA và (MBD)

ĐS: a) 60° b) $\arctan(1/2)$ c) $\arctan 2$ d) $\arcsin(1/4)$

Bài 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a tâm O ; $SA \perp (ABCD)$. Gọi M , N lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SD .

a) Chứng minh $MN \parallel BD$ và $SC \perp (AMN)$.

b) Gọi K là giao điểm của SC với mặt phẳng (AMN) . Chứng minh tứ giác $AMKN$ có hai đường chéo vuông góc với nhau.

c) Nếu cho $AB = a$ và $SA = a\sqrt{6}$, tính góc φ giữa cạnh SC và mặt phẳng $(ABCD)$ và góc α giữa BD và mặt phẳng (SBC) .
ĐS: c) $\varphi = 60^\circ$, $\alpha = \arcsin(\sqrt{21}/7)$

Bài 45. Cho hình chóp $S.ABC$ đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $BC = a$, $SA = SB = SC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

a) Tính khoảng cách từ S tới $mp(ABC)$.

b) Tính góc giữa SA và $mp(ABC)$.

$$\text{ĐS: a) } \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad \text{b) } \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Bài 46. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{6}$. Tính góc giữa:

a) SC với các mặt phẳng $(ABCD)$ và (SAB) .

b) SB với mặt phẳng (SAC) .

$$\text{ĐS: a) } 60^\circ; \arctan \frac{\sqrt{7}}{7}$$

c) AC với mặt phẳng (SBC) .

$$\text{ĐS: b) } \arctan \frac{\sqrt{14}}{14} \quad \text{c) } \arctan \frac{\sqrt{21}}{7}$$

Bài 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , O là tâm của đáy $SO \perp (ABCD)$, M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA , CD . Cho biết MN tạo với đáy $(ABCD)$ một góc 60°

a) Tính MN và SO .

b) Tính góc giữa MN và $mp(SBD)$.

$$\text{ĐS: a) } MN = \frac{a\sqrt{5}}{2}; SO = a\sqrt{5} \quad \text{b) } \arcsin \frac{2\sqrt{15}}{15}$$

Bài 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , O là tâm của đáy, $SO \perp (ABCD)$, và SA tạo với $(ABCD)$ và (SBC) hai góc bằng nhau. H là hình chiếu của A trên (SBC) .

a) Chứng minh $SO = AH$ và khi $HB = \frac{a}{2}$. Tính SA .

b) Tính tan góc giữa SA với $mp(ABCD)$.

$$\text{ĐS: a) } a/2 \quad \text{b) } \sqrt{6}/2$$

Bài 49. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Tính góc của AB' và BC' ; AC' và CD' .

b) IK với $(A'B'C'D')$, trong đó I , K là trung điểm của BC , $A'D'$.

$$\text{ĐS: a) } 60^\circ; 90^\circ \quad \text{b) } 45^\circ$$

Bài 50. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính góc giữa:

a) $B'D$ và $(AA'D'D)$ b) BD và $(B'AC)$

$$\text{ĐS: a) } \arctan(\sqrt{2}/2) \quad \text{b) } \arctan 2$$

Ví dụ 39. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân, $AB = AC = a$, $AA' = a\sqrt{2}$. Ba điểm I , K , M lần lượt là trung điểm của BC , CC' và BI .

a) Chứng minh $B'C \perp (AKI)$

b) Xác định thiết diện do mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với $B'C$ cắt hình lăng trụ.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 51. Cho hình chóp $S.ABC$, đáy là tam giác ABC vuông tại B , $SA \perp (ABC)$ và $SA = AB$. Gọi (P) là mặt phẳng qua một điểm M thuộc cạnh AB và vuông góc với SB . Hãy xác định thiết diện do (P) cắt hình chóp. Thiết diện là hình gì? Thiết diện có thể là hình bình hành được không?

Bài 52. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông đáy lớn là AD , $SA \perp (ABCD)$. Mặt phẳng (α) qua M thuộc cạnh SC và vuông góc với AB . Hãy xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (α) . Thiết diện là hình gì?

Bài 53. Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh a và $SA = SB = SC = b$. Gọi G là trọng tâm ΔABC .

a) Chứng minh rằng $SG \perp (ABC)$. Tính SG .

b) Xét mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng SC . Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để (P) cắt SC tại điểm C' nằm giữa S và C . Khi đó, hãy tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABC$ khi cắt (P) .

$$\text{ĐS: a) } SG = \sqrt{9b^2 - 3a^2} / 3 \quad \text{b) } a > b\sqrt{2}; S = a^2 \sqrt{3b^2 - a^2} / (4b) \quad (\text{đvdt})$$

Bài 54. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O . Trên đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ tại O , lấy điểm S sao cho $SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC lần lượt cắt SB , SC , SD tại B' , C' , D' .

a) Tính AC' . Chứng minh C' là trung điểm của SC .

$$\text{ĐS: } AC' = a\sqrt{6}/2$$

b) Chứng minh $B'D'$ song song với BD . Từ đó suy ra cách dựng hai điểm B' và D' .

Dạng 4. Điểm cố định - Tìm tập hợp điểm

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

① Tập hợp điểm thường gặp:

Cho 3 điểm A, B, C không thẳng hàng và mặt phẳng (α)

- ✓ Nếu M là điểm thỏa mãn $AM \perp BC$ thì điểm M nằm trên mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với BC .
- ✓ Nếu điểm M thỏa mãn: $AM \perp (\alpha)$ thì điểm M nằm trên mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với (α)
- ✓ Nếu điểm M thỏa mãn $MA = MB$ thì M nằm trên mặt phẳng (P) qua trung điểm I của AB và vuông góc với AB , chính là **mặt phẳng trung trực** của đoạn AB .
- ✓ Nếu M thỏa mãn $MA = MB = MC \Leftrightarrow MA = MB$ và $MA = MC$ thì M nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (P) (mặt phẳng trung trực của AB) và mặt phẳng (Q) (mặt phẳng trung trực của AC), giao tuyến này chính là **trục của tam giác ABC** .

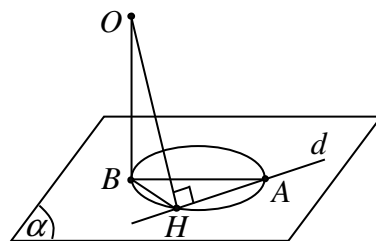
② Hai bài toán quỹ tích:

Bài toán 1: “Quỹ tích hình chiếu H của điểm cố định O lên đường thẳng di động d trong mặt phẳng (α) quay quanh điểm cố định A ”.

Gọi B là hình chiếu của O trên (α)

$$\left. \begin{array}{l} Ch_{\alpha} OH = BH \\ Do OH \perp d \end{array} \right\} \Rightarrow BH \perp d \Rightarrow \widehat{BHA} = \frac{\pi}{2} \text{ và } H \in (\alpha)$$

$\Rightarrow$ Quỹ tích là đường tròn đường kính BA trong (α)

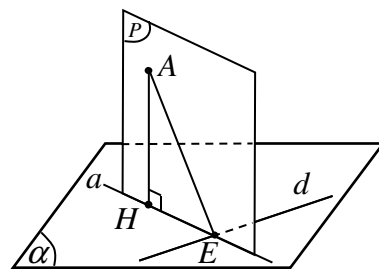


Bài toán 2: “Quỹ tích hình chiếu H của điểm cố định A trên mặt phẳng (α) di động và luôn chứa một đường thẳng cố định d ”.

Bước 1. Xác định mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với d . Tìm $a = (\alpha) \cap (P)$

Bước 2. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên a , thì H cũng là hình chiếu vuông góc của A trên (P) .

Bước 3. Gọi E là giao điểm của d với (P) . Trong (P) , ta có $\widehat{AHE} = 90^\circ$ nên quỹ tích là đường tròn đường kính AE trong (P) .



B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 40. Tìm tập hợp các điểm M cách đều 2 mút của đoạn thẳng AB

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 41. Tìm tập hợp các điểm M cách đều ba đỉnh của tam giác ABC .

Ví dụ 42. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm:

a) M sao cho $MA \perp BC$

b) N sao cho: $NA \perp BC, NB \perp CA, NC \perp AB$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 55. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B , có $AD = 2a, AB = BC = a$. Trên tia $Ax \perp (ABCD)$ lấy một điểm S . Gọi C', D' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SC và SD . Chứng minh rằng:

a) $\widehat{SBC} = \widehat{SCD} = 90^\circ$.

b) AD', AC' và AB cùng nằm trên một mặt phẳng.

c) Đường thẳng $OS = 2a$ luôn luôn đi qua một điểm cố định khi S di động trên Ax .

Bài 56. Cho mặt phẳng (α) và một điểm O ngoài (α) . A là một điểm cố định thuộc (α) sao cho OA không vuông góc với (α) , d là một đường thẳng di động trong (α) nhưng luôn luôn qua A . Gọi M là hình chiếu vuông góc của O trên d .

a) Tìm tập hợp các điểm M thỏa các tính chất nêu trên.

b) Tìm vị trí của d để độ dài OM là lớn nhất.

Bài 57. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , S là một điểm di động trên tia Ax vuông góc với $(ABCD)$.

a) Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của O trên đường thẳng SB .

b) Tìm tập hợp chân đường cao vẽ từ đỉnh D của M .

BÀI TẬP CƠ BẢN NÂNG CAO VẤN ĐỀ 3

- Bài 58.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, cạnh bên $SA = SB = SC = SD = b$ và cùng hợp với đáy góc 60° . Gọi I là trung điểm của CD . Tính góc hợp bởi đường thẳng:
- a) SC và (SBD) b) SI và (SAB) ĐS: a) 30° b) $44^\circ 24'$
- Bài 59.** Cho hình tứ diện $ABCD$ có AB, BC, CD đôi một vuông góc với nhau và $AB = a, BC = b, CD = c$.
- a) Tính AD . b) Chỉ ra điểm cách đều A, B, C, D (Tâm mặt cầu ngoại tiếp khối tứ diện)
- c) Tính góc giữa đường thẳng AD với các mặt phẳng (BCD) và (ABC)
- Bài 60.** Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = a, AD = 2a, AA' = 3a$ và $\widehat{BAD} = 60^\circ$.
- a) Chứng minh $AB \perp (BD'D)$.
- b) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên BD' và BC' . Chứng minh $BC' \perp (DHK)$.
- Bài 61.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh $a, SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$.
- a) Chứng minh các mặt bên của hình chóp là những tam giác vuông.
- b) Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với cạnh SC lần lượt cắt SB, SC, SD tại B', C', D' . Chứng minh $B'D' \parallel BD$ và $AB' \perp SB$.
- Bài 62.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và $SA = SC, SB = SD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD .
- a) Chứng minh: $SO \perp (ABCD)$.
- b) Gọi $d_1 = (SAB) \cap (SCD), d_2 = (SBC) \cap (SAD)$. Chứng minh: $SO \perp (d_1, d_2)$
- Bài 63.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại $B, SA \perp (ABC)$.
- a) Trong ΔSAB kẻ đường cao AH . Chứng minh rằng $BC \perp (SAB), AH \perp (SBC)$.
- b) Trong ΔSAC kẻ đường cao AK . Chứng minh rằng $SC \perp (AHK)$.
- c) Trong ΔABC kẻ đường cao BM . Chứng minh rằng $BM \parallel (AHK)$.
- Bài 64.** Cho ΔABC cân tại A có $\widehat{A} = 120^\circ$, cạnh $BC = a\sqrt{3}$. Lấy điểm S ở ngoài mặt phẳng chứa ΔABC sao cho $SA = a$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSBC .
- a) Chứng minh: $AO \perp (SBC)$. b) Tính AO khi ΔSBC vuông tại S . ĐS: $a/2$
- Bài 65.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh $a, SA = a\sqrt{2}$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi AH là đường cao của ΔSAB .
- a) Tính tỉ số $\frac{SH}{SB}$ và độ dài AH .
- b) Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với $SB, (\alpha)$ cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì? Tính diện tích của thiết diện. ĐS: a) $SH/SB = 2/3, AH = a\sqrt{6}/3$ b) $S = 5a^2\sqrt{6}/18$ (đvdt)
- Bài 66.** Cho tam giác đều ABC có đường cao $AH = 2a$. Gọi O là trung điểm của AH . Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại O , lấy điểm S sao cho $OS = 2a$. Gọi I là một điểm trên OH , đặt $AI = x, a < x < 2a$. Gọi (α) là mặt phẳng qua I và vuông góc với đường thẳng OH .
- a) Xác định mặt phẳng (α) .
- b) Dựng thiết diện của (α) với tứ diện $SABC$. Thiết diện là hình gì?

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

- Câu 21.** Khẳng định nào sau đây **sai**?
- A. Nếu đường thẳng $d \perp (\alpha)$ thì d vuông góc với hai đường thẳng trong (α) .
 B. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì $d \perp (\alpha)$.
 C. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) thì d vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong (α) .
 D. Nếu $d \perp (\alpha)$ và đường thẳng $a // (\alpha)$ thì $d \perp a$.
- Câu 22.** Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O . Qua O có mấy đường thẳng vuông góc với Δ cho trước?
- A. 1. B. 2. C. 3. D. Vô số.
- Câu 23.** Qua điểm O cho trước, có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với đường thẳng Δ cho trước?
- A. 1. B. 2. C. 3. D. Vô số.
- Câu 24.** Mệnh đề nào sau đây có thể **sai**?
- A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.
 B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.
 C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song.
 D. Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau.
- Câu 25.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và ΔABC vuông ở B . Gọi AH là đường cao của ΔSAB . Khẳng định nào sau đây **sai**?
- A. $SA \perp BC$. B. $AH \perp BC$. C. $AH \perp AC$. D. $AH \perp SC$.
- Câu 26.** Trong không gian tập hợp các điểm M cách đều hai điểm cố định A và B là:
- A. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB . B. Đường trung trực của đoạn thẳng AB .
 C. Mặt phẳng vuông góc với AB tại A . D. Đường thẳng qua A và vuông góc với AB .
- Câu 27.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$ và $DB = DC$. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $AB \perp (ABC)$. B. $AC \perp BD$. C. $CD \perp (ABD)$. D. $BC \perp AD$.
- Câu 28.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O . Biết $SA = SC$ và $SB = SD$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?
- A. $SO \perp (ABCD)$. B. $AC \perp (SBD)$. C. $BD \perp (SAC)$. D. $CD \perp AC$.
- Câu 29.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và tam giác ABC vuông tại B . Vẽ $SH \perp (ABC)$, $H \in (ABC)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?
- A. H trùng với trọng tâm tam giác ABC . B. H trùng với trực tâm tam giác ABC .
 C. H trùng với trung điểm của AC . D. H trùng với trung điểm của BC .
- Câu 30.** Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác cân ở C . Gọi H và K lần lượt là trung điểm của AB và SB . Khẳng định nào sau đây có thể **sai**?
- A. $CH \perp SA$. B. $CH \perp SB$. C. $CH \perp AK$. D. $AK \perp SB$.

- Câu 31.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$. Gọi O là hình chiếu của S lên mặt đáy ABC . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?
- A. O là trọng tâm tam giác ABC . B. O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
 C. O là trực tâm tam giác ABC . D. O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .
- Câu 32.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi O là tâm của ABC và I là trung điểm của SC . Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?
- A. $BC \perp SB$. B. (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn BD .
 C. $IO \perp (ABCD)$. D. Tam giác SCD vuông ở D .
- Câu 33.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, BC và SB . Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?
- A. $(IJK) \parallel (SAC)$. B. $BD \perp (IJK)$.
 C. Góc giữa SC và BD có số đo 60° . D. $BD \perp (SAC)$.
- Câu 34.** Cho hình tứ diện $ABCD$ có AB, BC, CD đôi một vuông góc nhau. Hãy chỉ ra điểm O cách đều bốn điểm A, B, C, D .
- A. O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . B. O là trọng tâm tam giác ACD .
 C. O là trung điểm cạnh BD . D. O là trung điểm cạnh AD .
- Câu 35.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC . H là hình chiếu vuông góc của O lên (ABC) . Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. H là trung điểm cạnh AB .
 B. H là trung điểm cạnh AC .
 C. H là trọng tâm tam giác ABC .
 D. H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- Câu 36.** Cho tứ diện $ABCD$. Vẽ $AH \perp (BCD)$. Biết H là trực tâm tam giác BCD . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?
- A. $AB = CD$. B. $AC = BD$. C. $AB \perp CD$. D. $CD \perp BD$.
- Câu 37.** Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông có tâm O , $SA \perp (ABCD)$. Gọi I là trung điểm của SC . Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?
- A. $IO \perp (ABCD)$. B. (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn BD .
 C. $BD \perp SC$. D. $SA = SB = SC$.
- Câu 38.** Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AB, BC, BD bằng nhau và vuông góc với nhau từng đôi một. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?
- A. Góc giữa AC và (BCD) là góc $\angle ACD$. B. Góc giữa AD và (ABC) là góc $\angle ADB$.
 C. Góc giữa AC và (ABD) là góc $\angle CAB$. D. Góc giữa CD và (ABD) là góc $\angle CBD$.
- Câu 39.** Cho tam giác ABC vuông cân tại A và $BC = a$. Trên đường thẳng qua A vuông góc với (ABC) lấy điểm S sao cho $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính số đo giữa đường thẳng SB và (ABC)
- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 75° .

- Câu 40.** Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và cạnh bằng $2a$. Trên đường thẳng qua O vuông góc với $(ABCD)$ lấy điểm S . Biết góc giữa SA và $(ABCD)$ có số đo bằng 45° . Tính độ dài SO .
- A. $SO = a\sqrt{3}$. B. $SO = a\sqrt{2}$. C. $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
- Câu 41.** Cho hình thoi $ABCD$ có tâm O , $BD = 4a$, $AC = 2a$. Lấy điểm S không thuộc $(ABCD)$ sao cho $SO \perp (ABCD)$. Biết $\tan \widehat{SBO} = \frac{1}{2}$. Tính số đo của góc giữa SC và $(ABCD)$.
- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 75° .
- Câu 42.** Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa SC và $(ABCD)$.
- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 75° .
- Câu 43.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau $SA = SB = SC = SD$. Gọi H là hình chiếu của S lên mặt đáy $ABCD$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?
- A. $HA = HB = HC = HD$.
 B. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
 C. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong đường tròn.
 D. Các cạnh SA, SB, SC, SD hợp với đáy $ABCD$ những góc bằng nhau.
- Câu 44.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC . Biết tam giác SBC là tam giác đều. Tính số đo của góc giữa SA và (ABC) .
- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 75° .
- Câu 45.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cạnh huyền $BC = a$. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm BC . Biết $SB = a$. Tính số đo của góc giữa SA và (ABC) .
- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 75° .

Vấn đề 4. HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

1. Góc giữa hai mặt phẳng

① **Định nghĩa 9:** Góc giữa hai mặt phẳng.

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

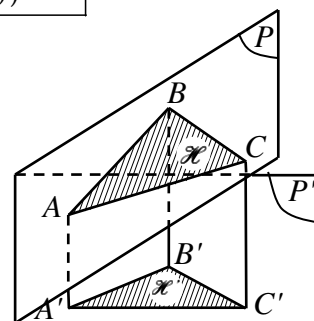
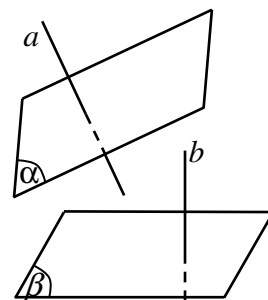
$$\left. \begin{array}{l} a \perp (\alpha) \\ b \perp (\beta) \end{array} \right\} \Rightarrow ((\alpha), (\beta)) = (a, b)$$

➤ **Chú ý:** $(\alpha) \parallel (\beta) \Rightarrow ((\alpha), (\beta)) = 0^\circ$ $(\alpha) \equiv (\beta) \Rightarrow ((\alpha), (\beta)) = 0^\circ$

② **Định lí 5:** (Diện tích đa giác chiếu)

Gọi S là diện tích của đa giác H trong mặt phẳng (P) và S' là diện tích hình chiếu H' của H trên mặt phẳng (P') và φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P') , thì

$$S' = S \cdot \cos \varphi, \quad S_{\Delta A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot \cos \varphi$$



II. Hai mặt phẳng vuông góc

① **Định nghĩa 10:** Hai mặt phẳng vuông góc.

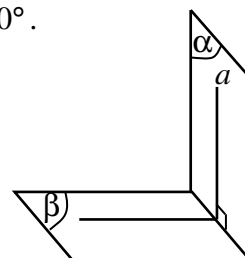
Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° .

$$(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow ((\alpha), (\beta)) = 90^\circ$$

② **Định lí 6:** Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc.

Nếu một mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.

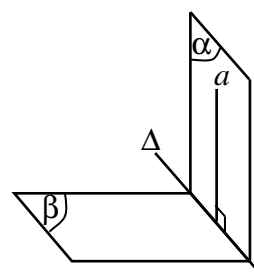
$$\left. \begin{array}{l} a \subset (\alpha) \\ a \perp (\beta) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$$



③ **Định lí 7:** (Tính chất của hai mặt phẳng vuông góc)

Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất kì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này mà vuông góc với giao tuyến đều vuông góc với mặt phẳng kia.

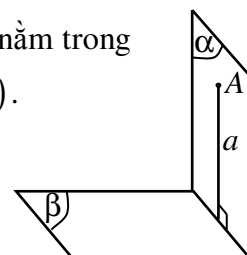
$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \perp (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = \Delta \\ a \subset (\alpha), a \perp \Delta \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (\beta)$$



④ **Hệ quả 1:**

Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau và A là một điểm nằm trong (α) thì đường thẳng a đi qua A và vuông góc với (α) sẽ nằm trong (β) .

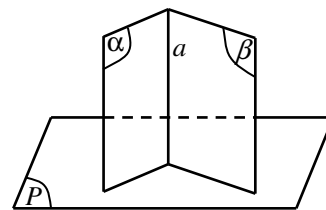
$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \perp (\beta) \\ A \in (\alpha); A \in a \\ a \perp (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow a \subset (\beta)$$



⑤ Hệ quả 2:

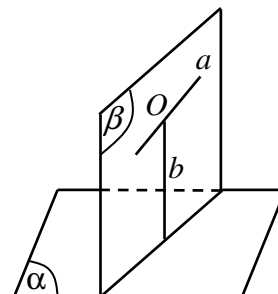
Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \cap (\beta) = \Delta \\ (\alpha) \perp (P) \\ (\beta) \perp (P) \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (P)$$



⑥ Hệ quả 3:

Qua một đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (α) có duy nhất một mặt phẳng (β) vuông góc với mặt phẳng (α) : $a \perp (\alpha) \Rightarrow \exists! (\beta) \supset a \text{ và } (\beta) \perp (\alpha)$



III. Hình lăng trụ đứng. Hình hộp chữ nhật. Hình lập phương

Định nghĩa 11	Hình vẽ	Tính chất
Hình lăng trụ đứng Là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.		Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là hình chữ nhật, vuông góc với mặt đáy.
Hình lăng trụ đều Là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều		Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là hình chữ nhật bằng nhau và vuông góc với mặt đáy.
Hình hộp đứng Là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành		Hình hộp đứng có 4 mặt bên là hình chữ nhật
Hình hộp chữ nhật Là hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật		Các mặt là hình chữ nhật.
Hình lập phương Là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau		Các mặt là hình vuông bằng nhau.

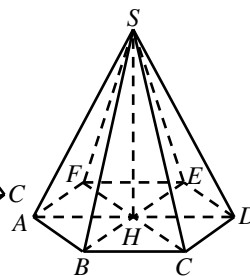
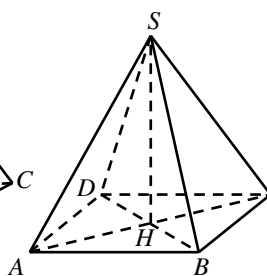
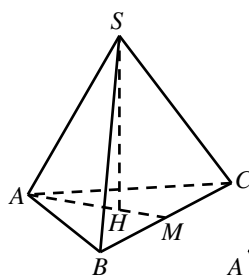
IV. Hình chóp đều

① Định nghĩa 12.

Một hình chóp được gọi là **hình chóp đều** nếu đáy của nó là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

Trong hình chóp đều:

- Đường thẳng vuông góc với đáy kẻ từ đỉnh được gọi là **đường cao** của hình chóp.
- Đường cao kẻ từ đỉnh của mặt bên gọi là **trung đoạn** của hình chóp đều.



② Tính chất 8.

- Các mặt bên của hình chóp đều là các tam giác cân bằng nhau
- Các cạnh bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.
- Các mặt bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.
- Tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy là hình chiếu của đỉnh xuống đáy.

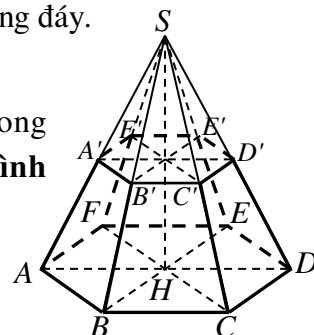
V. Hình chóp cắt đều

① Định nghĩa 13. Khi cắt hình chóp đều bởi một mặt phẳng song song với đáy để được một hình chóp cắt thì hình chóp cắt đó gọi là **hình chóp cắt đều**.

Đoạn nối tâm hai đáy được gọi là **đường cao** của hình chóp cắt đều.

② Tính chất 9.

- Các mặt bên là các hình thang cân bằng nhau.
- Hai đáy là hai đa giác đều đồng dạng và nằm trong hai mặt phẳng song song.



Dạng 1. Góc giữa hai mặt phẳng

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Để tính góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) ta thực hiện theo 3 cách sau:

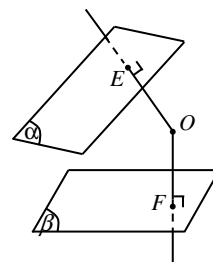
Cách 1. Sử dụng định nghĩa:

Bước 1. Chọn điểm O , từ đó kẻ:

✦ $OE \perp (\alpha)$ tại E

✦ $OF \perp (\beta)$ tại F

Bước 2. Khi đó: $((\alpha), (\beta)) = (OE, OF)$



Cách 2. Dùng cho 2 mặt phẳng cắt nhau:

“Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường cùng vuông góc với giao tuyến tại một điểm”

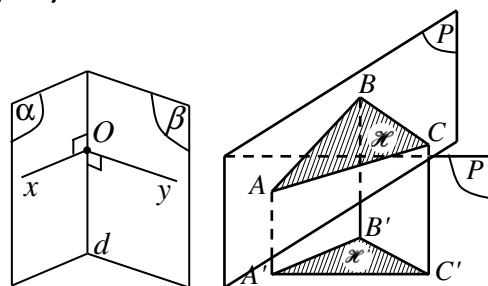
Bước 1. Tìm giao tuyến d của (α) và (β)

Bước 2. Chọn điểm O trên d , từ đó:

✦ Trong (α) dựng $Ox \perp d$.

✦ Trong (β) dựng $Oy \perp d$.

Bước 3. Khi đó: $((\alpha), (\beta)) = (Ox, Oy)$



Cách 3. Dùng diện tích đa giác chiếu:

Gọi S là diện tích của đa giác H trong (P) và S' là diện tích hình chiếu H của

H trên (P') và φ là góc giữa (P) và (P') , thì: $S' = S \cdot \cos \varphi$ hay $\cos \varphi = \frac{S'}{S}$.

B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 43. Cho hình chóp $S.ABC$ với ΔABC vuông cân tại B và $BA = BC = a$, $SA \perp (ABC)$, $SA = a\sqrt{3}$.

a) Tính góc giữa (SBC) và (ABC)

b) Tính góc giữa (SAC) và (SBC)

Ví dụ 45. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với $AB = a$. Gọi O là hình chiếu của S trên mặt đáy, đặt $SO = x$.

a) Tìm x sao cho góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ bằng 45° .

b) Với giá trị của x tìm được ở câu a), tính góc giữa (SAD) và (SCD) *ĐS: a) $x = a/2$ b) 60°*

Ví dụ 46. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a .

a) Tính góc giữa (ACB') và (ACD') *ĐS: a) $\arccos(1/3)$ b) $x = a/2$*

b) Lấy điểm M trên cạnh DD' và đặt $MD = x$. Tính x sao cho (ACB') vuông góc với (ACM)

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

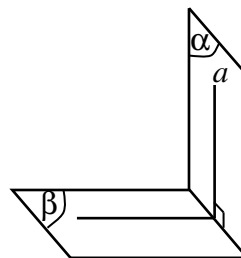
- Bài 67.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$. Hai điểm M và N lần lượt thay đổi trên hai cạnh CB và CD , đặt $CM = x$, $CN = y$. Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y để:
- Hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) tạo với nhau góc 45° . ĐS: a) $2a^2 = 2a(x+y) - xy$
 - Hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) vuông góc với nhau. ĐS: b) $a(x+y) = x^2 + y^2$
- Bài 68.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa các cặp mặt phẳng sau:
- (SAB) và (SCD)
 - (SBC) và (ABC)
 - (SBD) và (ABD)
 - (SBC) và (SCD)
 - (SAB) và (SBD)
- ĐS: a) 30° b) 60° c) $\arctan \sqrt{6}$ d) $2\arctan \frac{2\sqrt{21}}{21}$ e) $\arctan \frac{\sqrt{3}}{2}$
- Bài 69.** Cho $\triangle ABC$ đều cạnh a . Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại B và C , lần lượt lấy điểm M và N nằm cùng phía đối với mặt phẳng (ABC) sao cho $BM = x$, $CN = 2x$. Tính x sao cho góc giữa (ABC) và (AMN) bằng 60° . ĐS: $x = a\sqrt{3}/2$
- Bài 70.** Cho tứ diện $SABC$, $\triangle ABC$ vuông cân tại A , $AB = a$. Hình chiếu của S trên (ABC) trùng với trung điểm H của BC và $SH = \frac{a}{2}$. Tính góc giữa (SAB) và (SBC) . ĐS: 60°
- Bài 71.** Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi I , J , K lần lượt là trung điểm các cạnh AB , CD , BC . Tính góc giữa hai mặt phẳng (IJK) và (BCD) . ĐS: $\arctan \sqrt{2}$
- Bài 72.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = a$. Tính:
- Góc giữa các mặt (SAB) , (SBC) , (SCD) , (SAD) với mặt đáy.
 - Góc giữa các cặp mặt phẳng (SAB) và (SAD) ; (SBC) và (SAB) ; (SBC) và (SCD) ; (SAD) và (SCD) .
 - Góc giữa các cặp mặt phẳng (SAB) và (SCD) , (SAD) và (SBC) .
- ĐS: a) $90^\circ, 45^\circ, \arctan \frac{1}{2}, 90^\circ$ b) $90^\circ, 90^\circ, \arctan \frac{\sqrt{10}}{5}, 90^\circ$ c) $90^\circ - \arctan \frac{1}{2}; 45^\circ$
- Bài 73.** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$.
- Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy.
 - Tính tan của góc tạo bởi các mặt bên và mặt đáy. ĐS: a) 30° b) $\tan \alpha = 2\sqrt{3}/3$
- Bài 74.** Từ một điểm nằm ngoài mặt phẳng (P) , hạ đường vuông góc MA và hai đường xiên MB , MC tới (P) . Biết $MA = a$, MB , MC đều tạo với (P) các góc 30° và $MB \perp MC$.
- Tính độ dài đoạn thẳng BC .
 - Tính góc φ tạo bởi (MBC) và (ABC) . ĐS: a) $BC = 2a\sqrt{2}$ b) $\varphi = 45^\circ$
- Bài 75.** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đáy đều bằng a . biết góc tạo thành bởi cạnh bên và mặt đáy là 60° và hình chiếu H của đỉnh A lên $(A'B'C')$ trùng với trung điểm của cạnh $B'C'$.
- Tính tan của góc giữa hai đường thẳng BC và AC' .
 - Tính tan của góc giữa $(ABB'A')$ và mặt đáy. ĐS: a) $\tan \varphi = 3$ b) $\tan \alpha = 2\sqrt{3}$

Dạng 2. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- ① Chứng minh góc giữa chúng bằng 90° .
- ② Chứng minh có một đường thẳng nằm trong mặt phẳng này mà vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\left[\begin{array}{l} a \subset (\alpha) \\ a \perp (\beta) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$$



- ③ Chứng minh $a // (P)$ mà $(Q) \perp a$.
- ④ Chứng minh $(P) // (R)$ mà $(Q) \perp (R)$

B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O . Các tam giác SAC và SBD cân tại S .
 Chứng minh: $SO \perp (ABCD)$ và $(SAC) \perp (SBD)$.

[illegible]

Ví dụ 48. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B , $SA \perp (ABC)$.

- a) Chứng minh: $(SBC) \perp (SAB)$.
- b) Gọi M là trung điểm của AC . Chứng minh: $(SBM) \perp (SAC)$.

[illegible]

Ví dụ 49. Cho hình chóp $S.ABC$, đáy là tam giác cân tại A . Hình chiếu của S trên (ABC) là trung điểm H của BC . Trong ΔSAC , kẻ đường cao CI . Chứng minh: $(IBC) \perp (SAC)$ và $(IBC) \perp (SAB)$.

Ví dụ 50. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , cạnh a . Dựng d và d' lần lượt vuông góc với $(ABCD)$ tại B và D . Gọi M và N là hai điểm di động lần lượt trên d , d' và nằm cùng bên đối với mặt phẳng $(ABCD)$ sao cho $BM \cdot DN = \frac{a^2}{2}$. Chứng minh: $(MAC) \perp (NAC)$ và $(AMN) \perp (CMN)$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Bài 76.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là $\triangle ABC$ vuông tại B và $SA \perp (ABC)$. Trong $\triangle SAB$ và $\triangle SAC$, kẻ đường cao $AH \perp AB$ và $AK \perp SC$. Gọi E là giao điểm của HK và BC . C/m:
- a) $AH \perp (SBC)$ b) $(AHK) \perp (SAC)$ c) $EA \perp AC$.
- Bài 77.** Cho $\triangle AMN$ cân tại A , $AM = AN = a$, $MN = x$. Gọi I là trung điểm của MN . Trên đường thẳng qua I và vuông góc với (AMN) , ta lấy điểm B sao cho $IA = IB$.
- a) Gọi J là trung điểm của AB . C/m góc giữa (ABM) và (ABN) bằng góc giữa IM và JN .
- b) Tính AB theo a và x và suy ra giá trị x để $(ABM) \perp (ABN)$.
- Bài 78.** Cho hình chóp $S.ABC$, đáy là tam giác vuông tại A . Mặt bên (SAC) là tam giác vuông tại S , nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC) . Chứng minh:
- a) $(SAB) \perp (SAC)$ b) $(SAB) \perp (SBC)$.
- Bài 79.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi O là trọng tâm $\triangle BCD$ và H là trung điểm đoạn AO . Chứng minh các mặt phẳng (HBC) , (HCD) và (HBD) đôi một vuông góc với nhau.
- Bài 80.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , cạnh a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Chứng minh: a) $(SBD) \perp (SAC)$ b) $(SBC) \perp (SDC)$.
- Bài 81.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $SA = SB = SC = a$. Chứng minh:
- a) $(ABCD) \perp (SBD)$ b) $\triangle SBD$ vuông.
- Bài 82.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thoi tâm I cạnh a và có góc A bằng 60° , cạnh $SC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ và $SC \perp (ABCD)$.
- a) Chứng minh: $(SBD) \perp (SAC)$.
- b) Trong $\triangle SCA$, kẻ $IK \perp SA$ tại K . Tính IK .
- c) Chứng minh $\widehat{BKD} = 90^\circ$ và từ đó suy ra $(SAB) \perp (SAD)$.
- Bài 83.** Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt phẳng (ABC) , (ABD) nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (BDC) . Vẽ các đường cao BE , DF của $\triangle BCD$ và đường cao DK của $\triangle ACD$.
- a) Chứng minh rằng $AB \perp (BCD)$.
- b) Chứng minh rằng $(ABE) \perp (ADC)$ và $(DFK) \perp (ADC)$.
- c) Gọi O và H lần lượt là trọng tâm của $\triangle BCD$ và $\triangle ACD$. Chứng minh rằng $OH \perp (ADC)$.
- Bài 84.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm cạnh a . $SO \perp (ABCD)$ và $SO = \frac{a}{2}$. Gọi I , J lần lượt là trung điểm của các cạnh AB , CD . Chứng minh:
- a) $(SAC) \perp (SBD)$ b) $(SAB) \perp (SIJ)$ c) $(SAB) \perp (SCD)$.
- Bài 85.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . $SA = SB = SC$. Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) . Đặt $SH = h$.
- a) Tính h theo a sao cho $(SAB) \perp (SAC)$. ĐS: a) $h = a\sqrt{6}/6$
- b) Với giá trị h của câu trên. Chứng minh ba mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông.

**Dạng 3. Thiết diện chứa đường thẳng a và vuông góc với (α)
(a không vuông góc với (α))**

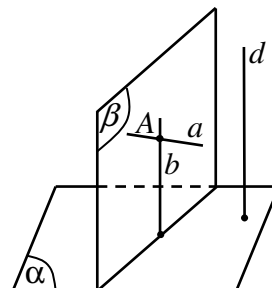
A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Bước 1. Chọn một điểm $A \in a$ sao cho từ A có thể dựng được đường thẳng b vuông góc với (α) một cách dễ nhất.

Bước 2. Khi đó, mặt phẳng (a, b) chính là mặt phẳng (β) cần dựng.

Bước 3: Tìm các giao điểm của (β) với các cạnh bên của hình chóp. Từ đó suy ra thiết diện.

⚡ **Chú ý:** Nếu có đường thẳng $d \perp (\alpha)$ thì $(\beta) \parallel d$ hay $(\beta) \supset d$.



B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 51. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với (SDC) .

a) Mặt phẳng (α) cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì ?

b) Tính diện tích thiết diện

ĐS: $S = 7a^2\sqrt{3}/16$

Ví dụ 52. Chi hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D , $AD = CD = a$, $AB = 2a$.
Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa SD và vuông góc với (SAC) . Xác định và tính diện tích thiết diện do (α) cắt hình chóp. ĐS: $S = a^2 \sqrt{3}/2$

$$DS: S=a^2 \sqrt{3}/2$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 86. Cho hình chóp $S.ABC$ có ba cạnh SA, AB, AC đôi một vuông góc với nhau và $SA = AB = AC = a$.

a) Gọi H là hình chiếu của A trên (SBC) . Chứng minh H là trực tâm của ΔSBC .

b) Trên cạnh SB , ta lấy điểm E sao cho $SE = 2BE$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa AE và vuông góc với (SBC) . Xác định và tính diện tích của thiết diện do (α) cắt hình chóp.

Bài 87. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và cạnh a , $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$.

a) Gọi (α) là mặt phẳng qua O , trung điểm M của SD và vuông góc với $(ABCD)$. Hãy xác định (α) , mặt phẳng (α) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình gì? Tính diện tích thiết diện.

b) Gọi (β) là mặt phẳng qua A , trung điểm E của CD và vuông góc với (SAB) . Hãy xác định (β) , mặt phẳng (β) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình gì? Tính diện tích thiết diện.

ĐS: a) *H.thang vuông*, $S=3a^2/8$ (đvdt) b) *Tứ giác*, $S=a^2/2$ (đvdt)

Dạng 4. Hình lăng trụ- Hình lập phương - Hình hộp

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

① **Lăng trụ có:**

- Hai đáy song song và là 2 đa giác bằng nhau
- Các cạnh bên song song và bằng nhau
- Các mặt bên là các hình bình hành

② **Lăng trụ đứng** là lăng trụ có các **cạnh bên vuông góc** với đáy

③ **Lăng trụ tam giá đều** là lăng trụ **đứng**, có đáy là **tam giác đều**

④ **Lăng trụ có đáy là tam giác đều** là lăng trụ **xiên**, có đáy là **tam giác đều**

⑤ **Lăng trụ tứ giác đều** là lăng trụ **đứng**, có đáy là **hình vuông**

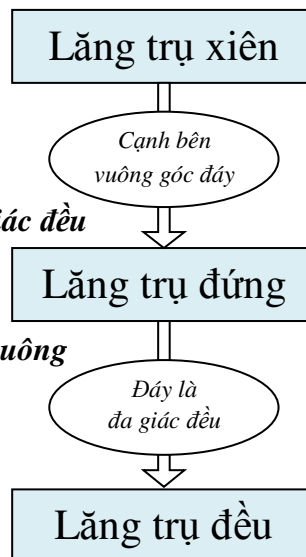
⑥ **Lăng trụ có đáy là tứ giác đều** là lăng trụ **xiên**, có đáy là **hình vuông**

⑦ **Hình hộp** là hình lăng trụ **xiên**, có đáy là **hình bình hành**

⑧ **Hình hộp đứng** là lăng trụ **đứng**, có đáy là **hình bình hành**

⑨ **Hình hộp chữ nhật** là lăng trụ **đứng**, có đáy là **hình chữ nhật**

⑩ **Hình lập phương** là lăng trụ **đứng**, có đáy và **các mặt bên** là **hình vuông**.



B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 53. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng:

a) $(AB'C'D) \perp (BCD'A')$

b) $AC' \perp (A'BD)$

Ví dụ 54. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = b$, $CC' = c$.

- a) Chứng minh rằng: $(ADC'B') \perp (ABB'A')$.
b) Tính độ dài đường chéo AC' theo a, b, c .

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.

C. BÀI TẬP TƯ LUYỆN

Bài 88. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Chứng minh rằng các khoảng cách từ các điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' đều bằng nhau. Tính khoảng cách đó.

Bài 89. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ đáy là tam giác đều cạnh a , $A'A = a\sqrt{2}$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB , $A'C'$.

- a) Xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng (α) qua MN và vuông góc với $(BCC'B')$.
Thiết diện là hình gì ?

- b) Tính diện tích thiết diện.

$$DS: S = \frac{a^2 \sqrt{15}}{8} (\dot{d}v dt)$$

Bài 90. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ đáy là tam giác vuông cân tại A . Đoạn nối trung điểm M của AB và trung điểm N của $B'C'$ có độ dài bằng a , MN hợp với đáy góc α và mặt bên $(BCC'B')$ góc β .

- a) Tính các cạnh đáy và cạnh bên của lăng trụ theo a và α .
b) Chứng minh rằng: $\cos \alpha = \sqrt{2} \sin \beta$. ĐS:

$$DS: AB = AC = 2a \cos \alpha; \quad BC = 2\sqrt{2}a \cos \alpha$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

- Câu 46.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC vuông tại A . Khẳng định nào sau đây **sai**?
A. $(SAB) \perp (ABC)$ **B.** $(SAB) \perp (SAC)$
C. Về $AH \perp BC$, $H \in BC \Rightarrow$ góc ASH là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC)
D. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAC) là góc SCB

Câu 47. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD$ và $BC = BD$. Gọi I là trung điểm của CD . Khẳng định nào sau đây **sai**?
A. Góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc AIB . **B.** $(BCD) \perp (AIB)$
C. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) là góc CBD **D.** $(ACD) \perp (AIB)$

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc nào sau đây?
A. Góc SBA **B.** Góc SCA
C. Góc SCB **D.** Góc SIA (I là trung điểm BC)

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?
A. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là góc ABS
B. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là góc SOA (O là tâm hình vuông $ABCD$)
C. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ là góc SDA
D. $(SAC) \perp (SBD)$

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O . Biết $SO \perp (ABCD)$, $SO = a\sqrt{3}$ và đường tròn ngoại tiếp $ABCD$ có bán kính bằng $a\sqrt{2}$. Tính góc hợp bởi mỗi mặt bên với đáy?
A. 30° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 75°

Câu 51. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O và khoảng cách từ A đến BD bằng $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (SBD) . Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?
A. $(SAB) \perp (SAD)$ **B.** $(SAC) \perp (ABCD)$ **C.** $\tan \alpha = \sqrt{5}$ **D.** $\alpha = \angle SOA$.

Câu 52. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $AC = 2a$. Các cạnh bên AA' , BB' vuông góc với đáy và $AA' = a$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?
A. Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình chữ nhật.
B. Góc giữa hai mặt phẳng $(AA'C'C)$ và $(BB'D'D)$ có số đo bằng 60° .
C. Hai mặt bên $(AA'C)$ và $(BB'D)$ vuông góc với hai đáy.
D. Hai hai mặt bên $AA'B'B$ và $AA'D'D$ bằng nhau.

Câu 53. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trực tâm H của tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây **không đúng**?
A. $(AA'B'B) \perp (BB'C'C)$ **B.** $(AA'H) \perp (A'B'C')$
C. $BB'C'C$ là hình chữ nhật. **D.** $(BB'C'C) \perp (AA'H)$

- Câu 54.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác cân ở A . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC) . Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

 - A. $H \in SB$
 - B. H trùng với trọng tâm tam giác SBC
 - C. $H \in SC$
 - D. $H \in SI$ (I là trung điểm của BC)

Câu 55. Cho hình chóp $S.ABC$ có hai mặt bên (SBC) và (SAC) vuông góc với đáy (ABC) . Khẳng định nào sau đây **sai** ?

 - A. $SC \perp (ABC)$
 - B. Nếu A' là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC) thì $SA' \perp SB$
 - C. $(SAC) \perp (ABC)$
 - D. BK là đường cao của tam giác ABC thì $BK \perp (SAC)$.

Câu 56. Cho hình chóp $S.ABC$ có hai mặt bên (SAB) và (SAC) vuông góc với đáy (ABC) , tam giác ABC vuông cân ở A và có đường cao AH ($H \in BC$). Gọi O là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC) . Khẳng định nào sau đây đúng ?

 - A. $SC \perp (ABC)$
 - B. $(SAH) \perp (SBC)$
 - C. $O \in SC$
 - D. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc SBA .

Câu 57. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt bên ACD và BCD là hai tam giác cân có đáy CD . Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên (ACD) . Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai** ?

 - A. AB nằm trên mặt phẳng trung trực của CD
 - B. $H \in AM$ (M là trung điểm CD)
 - C. Góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc ADB .
 - D. $(ABH) \perp (ACD)$.

Câu 58. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân ở A . H là trung điểm BC . Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai** ?

 - A. Các mặt bên của $ABC.A'B'C'$ là các hình chữ nhật bằng nhau.
 - B. $(AA'H)$ là mặt phẳng trung trực của BC
 - C. Nếu O là hình chiếu vuông góc của A lên $(A'BC)$ thì $O \in A'H$
 - D. Hai mặt phẳng $(AA'B'B)$ và $(AA'C'C)$ vuông góc nhau.

Câu 59. Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ trở thành hình lăng trụ tứ giác đều khi phải thêm các điều kiện nào sau đây?

 - A. Tất cả các cạnh đáy bằng nhau và cạnh bên vuông góc với mặt đáy.
 - B. Cạnh bên bằng cạnh đáy và cạnh bên vuông góc với mặt đáy
 - C. Có một mặt bên vuông góc với mặt đáy và đáy là hình vuông.
 - D. Các mặt bên là hình chữ nhật và mặt đáy là hình vuông

Câu 60. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

 - A. Hình hộp có 6 mặt là 6 hình chữ nhật.
 - B. Hai mặt $ACC'A'$ và $BDD'B'$ vuông góc nhau
 - C. Tồn tại điểm O cách đều tám đỉnh của hình hộp
 - D. Hình hộp có 4 đường chéo bằng nhau và đồng quy tại trung điểm của mỗi đường.

- Câu 61.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Khẳng định nào sau đây **sai** ?
 A. Hai mặt $ACC'A'$ và $BDD'B'$ vuông góc nhau
 B. Bốn đường chéo $AC', A'C, BD', B'D$ bằng nhau và bằng $a\sqrt{3}$
 C. Hai mặt $ACC'A'$ và $BDD'B'$ là hai hình vuông bằng nhau
 D. $AC \perp BD'$
- Câu 62.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = a$, $AD = 2a$. Gọi α là góc giữa đường chéo $A'C$ và đáy $ABCD$. Tính α
 A. $\alpha \approx 20^\circ 45'$. B. $\alpha \approx 24^\circ 5'$. C. $\alpha \approx 30^\circ 18'$. D. $\alpha \approx 25^\circ 48'$.
- Câu 63.** Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (ABC') có số đo bằng 60° . Cạnh bên của hình lăng trụ bằng:
 A. $3a$ B. $a\sqrt{3}$ C. $2a$ D. $a\sqrt{2}$
- Câu 64.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AA' = a$, $BC = 2a$, $CA = a\sqrt{5}$. Khẳng định nào sau đây **sai** ?
 A. Đáy ABC là tam giác vuông.
 B. Hai mặt $(AA'B'B)$ và $(BB'C'C)$ vuông góc nhau.
 C. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'BC)$ có số đo bằng 45° .
 D. $AC' = 2a\sqrt{2}$.
- Câu 65.** Cho hình lăng trụ lục giác đều $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$ có cạnh bên bằng a và $ADD'A'$ là hình vuông. Cạnh đáy của lăng trụ bằng
 A. a B. $\frac{a}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$
- Câu 66.** Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có $ACC'A'$ là hình vuông, cạnh bằng a . Cạnh đáy của hình lăng trụ bằng
 A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ B. $a\sqrt{2}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ D. $a\sqrt{3}$
- Câu 67.** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a\sqrt{3}$ và cạnh bên bằng $2a$. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của hai đáy ABC và $A'B'C'$. Khẳng định nào sau đây đúng khi nói về $AA'G'G$?
 A. $AA'G'G$ là hình chữ nhật có hai kích thước là $2a$ và $3a$.
 B. $AA'G'G$ là hình vuông có cạnh bằng $2a$.
 C. $AA'G'G$ là hình chữ nhật có diện tích bằng $6a^2$
 D. $AA'G'G$ là hình vuông có diện tích bằng $8a^2$
- Câu 68.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khẳng định nào sau đây **sai**?
 A. Tam giác $AB'C$ là tam giác đều.
 B. Nếu α là góc giữa AC' thì $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
 C. $ACC'A'$ là hình chữ nhật có diện tích bằng $2a^2$
 D. Hai mặt $AA'C'C$ và $BB'D'D$ ở trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau.
- Câu 69.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đường cao SH . Xét các mệnh đề sau:
 I) $SA = SB = SC$
 II) H trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
 III) Tam giác ABC là tam giác đều.
 IV) H là trực tâm tam giác ABC .
 Các yếu tố nào chưa đủ để kết luận $S.ABC$ là hình chóp đều?
 A. (I) và (II) B. (II) và (III) C. (III) và (IV) D. (IV) và (I)

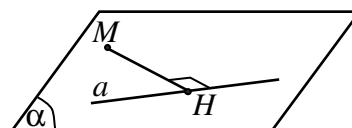
- Câu 70.** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và đường cao SH bằng cạnh đáy. Tính số đo góc hợp bởi cạnh bên và mặt đáy.
 A. 30° B. 45° C. 60° D. 75°
- Câu 71.** Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính số đo của góc giữa mặt bên và mặt đáy.
 A. 30° B. 45° C. 60° D. 75°
- Câu 72.** Tính cosin của góc giữa hai mặt của một tứ diện đều.
 A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$
- Câu 73.** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa một mặt bên và mặt đáy bằng 60° . Tính độ dài đường cao SH .
 A. $SH = \frac{a}{2}$ B. $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ C. $SH = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ D. $SH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$
- Câu 74.** Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a . Tính cosin của góc giữa một mặt bên và một mặt đáy.
 A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- Câu 75.** Cho ba tia Ox, Oy, Oz vuông góc nhau từng đôi một. Trên Ox, Oy, Oz lần lượt lấy các điểm A, B, C sao cho $OA = OB = OC = a$. Khẳng định nào sau đây **sai**?
 A. $O.ABC$ là hình chóp đều.
 B. Tam giác ABC có diện tích $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. C. Tam giác ABC có chu vi $2p = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
 D. Ba mặt phẳng $(OAB), (OBC), (OCA)$ vuông góc với nhau từng đôi một.
- Câu 76.** Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a và $\widehat{A} = 60^\circ$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại O (O là tâm của $ABCD$), lấy điểm S sao cho tam giác SAC là tam giác đều. Khẳng định nào sau đây **đúng**?
 A. $S.ABCD$ là hình chóp đều
 B. Hình chóp $S.ABCD$ có các mặt bên là các tam giác cân. C. $SO = \frac{3a}{2}$.
 D. SA và SB hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ những góc bằng nhau.
- Câu 77.** Cho hình chóp cụt đều $ABC.A'B'C'$ với đáy lớn ABC có cạnh bằng a . Đáy nhỏ $A'B'C'$ có cạnh bằng $\frac{a}{2}$, chiều cao $OO' = \frac{a}{2}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?
 A. Ba đường cao AA', BB', CC' đồng qui tại S .
 B. $AA' = BB' = CC' = \frac{a}{2}$
 C. Góc giữa mặt bên mặt đáy là góc SIO (I là trung điểm BC)
 D. Đáy lớn ABC có diện tích gấp 4 lần diện tích đáy nhỏ $A'B'C'$.
- Câu 78.** Cho hình chóp cụt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh của đáy nhỏ $ABCD$ bằng $\frac{a}{3}$ và cạnh của đáy lớn $A'B'C'D'$ bằng a . Góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° . Tính chiều cao OO' của hình chóp cụt đã cho.
 A. $OO' = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ B. $OO' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ C. $OO' = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$ D. $OO' = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$

Vấn đề 5. KHOẢNG CÁCH

① Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng a là MH , với H là hình chiếu của M trên đường thẳng a .

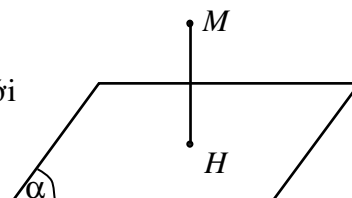
Kí hiệu: $d(M, a) = MH$.



② Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α) là MH , với H là hình chiếu của M trên mặt phẳng (α) .

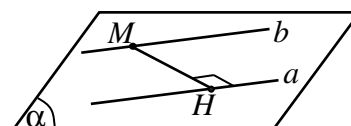
Kí hiệu: $d(M, (\alpha)) = MH$.



③ Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường này đến đường kia.

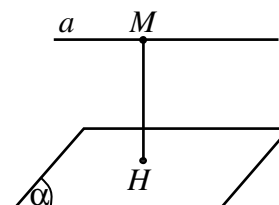
$d(a, b) = d(M, b) = MH$ ($M \in a$)



④ Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau là khoảng cách từ một điểm M bất kì thuộc đường a đến mặt phẳng (α) .

$d(a, (\alpha)) = d(M, (\alpha)) = MH$ ($M \in a$)

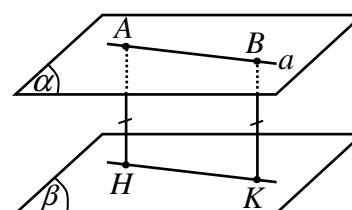


⑤ Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

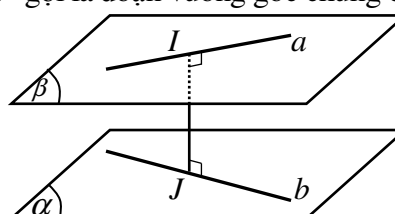
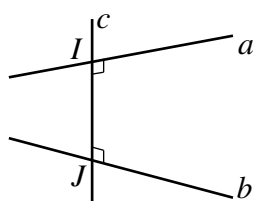
$d((\alpha), (\beta)) = d(a, (\alpha)) = d(A, (\beta)) = AH$

(với $a \subset (\alpha); A \in a$)



⑥ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

- Đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và cùng vuông góc với mỗi đường thẳng ấy gọi là **đường vuông góc chung** của a và b . IJ gọi là đoạn vuông góc chung của a và b .



- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

Dạng 1. Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng, mặt phẳng

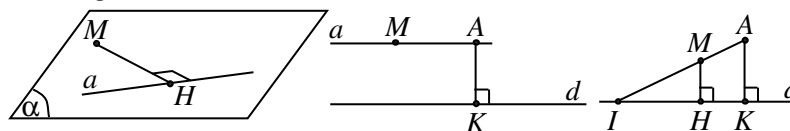
A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d cho trước

Các bước thực hiện:

Bước 1. Trong mặt phẳng (M, d) hạ $MH \perp d$ với $H \in d$.

Bước 2. Thực hiện việc xác định độ dài MH dựa trên hệ thức lượng trong tam giác, từ giác, đường tròn, ...



⚡ **Chú ý:**

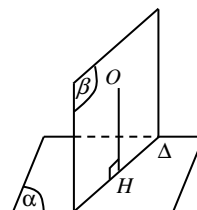
- Nếu tồn tại đường thẳng a qua A và song song với d thì: $d(M, d) = d(A, d) = AK$ với $A \in d$.
- Nếu $MA \cap d = I$, thì: $\frac{d(M, d)}{d(A, d)} = \frac{MI}{AI}$

2. Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α)

Các bước thực hiện:

Bước 1. Tìm hình chiếu H của O lên (α) .

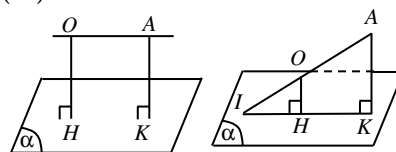
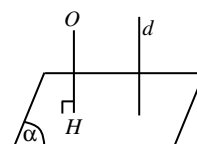
- Tìm mặt phẳng (β) qua O và vuông góc với (α) .
- Tìm $\Delta = (\alpha) \cap (\beta)$.
- Trong mặt phẳng (β) , kẻ $OH \perp \Delta$ tại H
 $\Rightarrow H$ là hình chiếu vuông góc của O lên (α) .



Bước 2. Khi đó OH là khoảng cách từ O đến (α) .

⚡ **Chú ý:**

- Chọn mặt phẳng (β) sao cho dễ tìm giao tuyến với (α) .
- Nếu đã có đường thẳng $d \perp (\alpha)$ thì kẻ $Ox \parallel d$ cắt (α) tại H .
- Nếu $OA \parallel (\alpha)$ thì: $d(O, (\alpha)) = d(A, (\alpha))$.
- Nếu OA cắt (α) tại I thì: $\frac{d(O, (\alpha))}{d(A, (\alpha))} = \frac{OI}{AI}$



B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 55. Tứ diện $SABC$ có tam giác ABC vuông cân đỉnh B và $AC = 2a$, có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = a$.

a) Tính khoảng cách từ S đến BC .

ĐS: a) $a\sqrt{3}$ b) $a\sqrt{6}/6$

b) Hạ $HK \perp SB$. Tính khoảng cách từ trung điểm O của AC đến đường thẳng CH .

Ví dụ 56. Cho tam giác ABC với $AB = 7\text{ cm}$, $BC = 5\text{ cm}$, $CA = 8\text{ cm}$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A , lấy điểm O sao cho $AO = 4\text{ cm}$. Tính khoảng cách từ điểm A và điểm O đến đường thẳng BC . *ĐS: $4\sqrt{3}\text{ cm}$; 8 cm*

Ví dụ 57. Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. gọi G là trọng tâm của tam giác đáy ABC , M là trung điểm SC .

a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC)

b) Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAG) *ĐS: a) a b) $3a/4$*

Ví dụ 58. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = a$, $\widehat{ASB} = 120^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{CSA} = 90^\circ$. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) *ĐS: $a/2$*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 59. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh a , cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Gọi I là trung điểm của cạnh SC và M là trung điểm của đoạn AB

a) Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Tính khoảng cách từ I đến đường thẳng CM .

ĐS: a) $a/2$ b) $a\sqrt{30}/10$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 60. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính:

a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BD)$.

b) Tính khoảng cách từ A' , B , C , D' đến đường thẳng AC' .

ĐS: a) $a\sqrt{3}/2$ b) $a\sqrt{6}/3$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

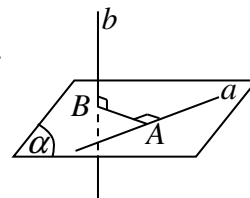
.....

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

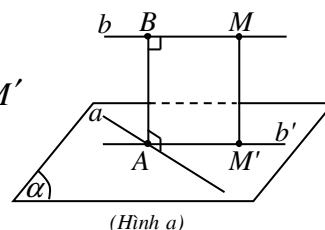
- Bài 91.** Cho tam giác đều ABC cạnh $3a$, điểm H thuộc cạnh AC với $HC = a$. Dụng đoạn SH vuông góc với (ABC) và $SH = 2a$.
- Hãy nêu cách dựng đoạn vuông góc HK vẽ từ H đến (SAB) .
 - Tính khoảng cách từ H và từ C đến mặt phẳng (SAB) . ĐS: b) $2a\sqrt{3}/\sqrt{7}$, $3a\sqrt{21}/7$
- Bài 92.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O , cạnh a , $\widehat{ABC} = 60^\circ$, SO vuông góc với mặt phẳng đáy, $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- Hãy nêu cách dựng $OH \perp (SCD)$.
 - Tính OH và khoảng cách từ B đến (SCD) . ĐS: b) $OH = a\sqrt{15}/10$; $d[B, (SCD)] = a\sqrt{15}/5$, $3a\sqrt{21}/7$
- Bài 93.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a , các mặt bên là tam giác đều. Gọi M , N , I lần lượt là trung điểm của SB , SD và OC . Tính các khoảng cách từ:
- S đến $(ABCD)$
 - A đến $(IMNB)$
 - S đến (IMN)
- ĐS: a) $a\sqrt{2}/2$ b) $3a/4$ c) $a/4$

Dạng 2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau**A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI****• Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b** **✦ Trường hợp $a \perp b$:**

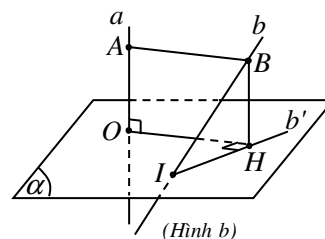
- Dụng mặt phẳng (α) chứa a và vuông góc với b tại B .
 - Trong (α) dựng $BA \perp a$ tại A .
- $\Rightarrow AB$ là đoạn vuông góc chung.

**✦ Trường hợp a và b không vuông góc với nhau.****Cách 1: (Hình a)**

- Dụng mp (α) chứa a và song song với b .
 - Lấy điểm M tùy ý trên b dựng $MM' \perp (\alpha)$ tại M'
 - Từ M' dựng $b' \parallel b$ cắt a tại A .
 - Từ A dựng $AB \parallel MM'$ cắt b tại B .
- $\Rightarrow AB$ là đoạn vuông góc chung.

**Cách 2: (Hình b)**

- Dụng mặt phẳng $(\alpha) \perp a$ tại O , (α) cắt b tại I
 - Dụng hình chiếu vuông góc b' của b lên (α)
 - Trong mp (α) , vẽ $OH \perp b'$ tại H .
 - Từ H dựng đường thẳng song song với a cắt b tại B
 - Từ B dựng đường thẳng song song với OH cắt a tại A .
- $\Rightarrow AB$ là đoạn vuông góc chung.



• **Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b**

Cách 1. Dùng đường vuông góc chung:

- Tìm đoạn vuông góc chung AB của a và b .
- $d(a, b) = AB$.

Cách 2. Dùng mặt phẳng (α) chứa a và song song với b .

Khi đó: $d(a, b) = d(b, (\alpha))$

Cách 3. Dùng 2 mặt phẳng song song và lần lượt chứa a và b .

Khi đó: $d(a, b) = d((\alpha), (\beta))$

B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 61. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC = a$. Gọi I là trung điểm của BC . Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng sau:

a) OA và BC

b) AI và OC

ĐS: a) $a\sqrt{2}/2$ b) $a\sqrt{5}/5$

Ví dụ 62. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , có cạnh $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Dùng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng sau:

a) SB và CD

b) SC và BD

c) SC và AB

ĐS: a) a b) $a\sqrt{3}/3$ c) $2a\sqrt{5}/5$

Ví dụ 64. Cho tứ diện $OABC$ có $OA = OB = OC = a$ và $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 60^\circ$, $\widehat{BOC} = 90^\circ$.

a) Chứng minh $\triangle ABC$ vuông và $OA \perp BC$. Tìm đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng OA và BC . ĐS: a) $a/2$

b) Chứng minh rằng hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) vuông góc với nhau.

Ví dụ 65. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

a) AA' và CB'

b) AA' và DB'

c) AC và $B'D'$

d) BC' và CD' ĐS: a) a b) $a\sqrt{2}/2$ c) a d) $a\sqrt{3}/3$

Ví dụ 67. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính khoảng cách giữa:

- a) AA' và mặt phẳng song song (BB', DD')
 b) Hai mặt phẳng song song $(A'BD)$ và $(CB'D')$

ĐS: a) $a\sqrt{2}/2$ b) $a\sqrt{3}/3$

Ví dụ 68. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$.

- a) Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(ACC'A')$
 b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC'

ĐS: a) $ab/\sqrt{a^2 + b^2}$ b) $ab/\sqrt{a^2 + b^2}$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Bài 94.** Cho tứ diện $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các ΔABC và ΔSBC .
- Chứng minh ba đường thẳng AH, SK, BC đồng quy.
 - Chứng minh rằng $SC \perp (BHK)$ và $HK \perp (SBC)$.
 - Xác định đường vuông góc chung của BC và SA .
- Bài 95.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a có $SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $\widehat{BAD} = 60^\circ$.
- Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ và độ dài cạnh SC .
 - Chứng minh $(SAC) \perp (ABCD)$.
 - Chứng minh $SB \perp BC$.
 - Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Tính $\tan \varphi$.
- Bài 96.** Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt (ABC) và (ADC) nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. ΔABC vuông tại A có $AB = a, AC = b$. ΔADC vuông tại D có $CD = a$.
- Chứng minh các tam giác BAD và BDC là những tam giác vuông.
 - Gọi I và K lần lượt là trung điểm của AD và BC . Chứng minh IK là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AD và BC .
- Bài 97.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , tâm O , $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi I, M theo thứ tự là trung điểm của SC và AB .
- Chứng minh: $OI \perp (ABCD)$. ĐS: b) $d[I, CM] = a\sqrt{30}/10, d[S, CM] = a\sqrt{30}/5$
 - Tính khoảng cách từ I đến đường thẳng CM , từ đó suy ra khoảng cách từ S đến CM .
- Bài 98.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và có $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = \frac{3a}{4}$. Gọi E là trung điểm của đoạn BC , F là trung điểm của BE .
- Chứng minh: $(SOF) \perp (SBC)$.
 - Tính khoảng cách từ O và A đến mặt phẳng (SBC) .
- Bài 99.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = 90^\circ, \widehat{BSC} = 60^\circ, \widehat{ASC} = 120^\circ$ và $SA = SB = SC = a$. Gọi I là trung điểm của AC .
- Chứng minh $SI \perp (ABC)$.
 - Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) . ĐS: $a/2$
- Bài 100.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 2a$ và $SA \perp (ABC)$, đáy là tam giác vuông cân tại B với $AB = a$. Gọi M là trung điểm của AC .
- Dựng đoạn vuông góc chung của SM và BC .
 - Tính độ dài đoạn vuông góc chung của SM và BC . ĐS: $2a\sqrt{17}/17$
- Bài 101.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O , cạnh a , $\widehat{A} = 60^\circ$ và có đường cao $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- Tính khoảng cách từ O đến (SBC) .

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB .ĐS: a) $a\sqrt{3}/4$ b) $a\sqrt{3}/2$ **BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

- Câu 79.** Cho tứ diện $SABC$ trong đó SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một và $SA = 3a, SB = a, SC = 2a$. Khoảng cách từ A đến đường thẳng BC bằng:
- A. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{7a\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{8a\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{5a\sqrt{6}}{6}$
- Câu 80.** Cho hình chóp $ABCD$ có cạnh $AC \perp (BCD)$ và BCD là tam giác đều cạnh bằng a . Biết $AC = a\sqrt{2}$ và M là trung điểm của BD . Khoảng cách từ C đến đường thẳng AM bằng:
- A. $a\sqrt{\frac{2}{3}}$ B. $a\sqrt{\frac{6}{11}}$ C. $a\sqrt{\frac{7}{5}}$ D. $a\sqrt{\frac{4}{7}}$
- Câu 81.** Cho hình chóp $ABCD$ có cạnh $AC \perp (BCD)$ và BCD là tam giác đều cạnh bằng a . Biết $AC = a\sqrt{2}$ và M là trung điểm của BD . Khoảng cách từ A đến đường thẳng BD bằng:
- A. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{4a\sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{a\sqrt{11}}{2}$
- Câu 82.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a và $\hat{B} = 60^\circ$. Biết $SA = 2a$. Tính khoảng cách từ A đến SC
- A. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{5a\sqrt{6}}{2}$
- Câu 83.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $SA = 2a$, $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Gọi O là tâm của $ABCD$, tính khoảng cách từ O đến SC .
- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$
- Câu 84.** Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và góc hợp bởi một cạnh bên và mặt đáy bằng α . Khoảng cách từ tâm của đáy đến một cạnh bên bằng:
- A. $a\sqrt{2} \cot \alpha$ B. $a\sqrt{2} \tan \alpha$ C. $\frac{a\sqrt{2}}{2} \cos \alpha$ D. $\frac{a\sqrt{2}}{2} \sin \alpha$
- Câu 85.** Cho hình chóp $S.ABC$ trong đó SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết $SA = 3a, AB = a\sqrt{3}, BC = a\sqrt{6}$. Khoảng cách từ B đến SC bằng:
- A. $a\sqrt{2}$ B. $2a$ C. $2a\sqrt{3}$ D. $a\sqrt{3}$
- Câu 86.** Cho hình chóp $S.ABC$ trong đó SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết $SA = a\sqrt{3}, AB = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng:
- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$
- Câu 87.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $AD = 2a, SA = a$. Khoảng cách từ A đến (SCD) bằng
- A. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$ D. $\frac{3a}{\sqrt{7}}$
- Câu 88.** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ cạnh đáy bằng $2a$ và chiều cao bằng $a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ tâm O của đáy ABC đến một mặt bên:
- A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ C. $a\sqrt{\frac{3}{10}}$ D. $a\sqrt{\frac{2}{5}}$
- Câu 89.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách từ tâm O của đáy $ABCD$ đến một mặt bên:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{2a\sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{a\sqrt{7}}{2}$

Câu 90. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông có chiều cao $AB = a$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CB . Tính khoảng cách giữa đường thẳng IJ và (SAD) .

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{a}{2}$ D. $\frac{a}{3}$

Câu 91. Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D , $AD = 2a$. Trên đường thẳng vuông góc tại D với $(ABCD)$ lấy điểm S với $SD = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa đường thẳng DC và (SAB) .

A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ B. $\frac{a}{\sqrt{2}}$ C. $a\sqrt{2}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Câu 92. Cho hình chóp $O.ABC$ có đường cao $OH = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của OA và OB . Khoảng cách giữa đường thẳng MN và (ABC) bằng:

A. $\frac{a}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{a}{3}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Câu 93. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Tính khoảng cách giữa AB và CD .

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Câu 94. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AC = a\sqrt{5}$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa SD và BC

A. $\frac{3a}{4}$ B. $\frac{2a}{3}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ D. $a\sqrt{3}$

Câu 95. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khoảng cách giữa BB' và AC bằng:

A. $\frac{a}{2}$ B. $\frac{a}{3}$ C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Câu 96. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1 (đvđ). Khoảng cách giữa AA' và BD' bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ D. $\frac{3\sqrt{5}}{7}$

Câu 97. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a . Gọi M , N , P lần lượt là trung điểm của AD , DC , $A'D'$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (MNP) và (ACC') .

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{a}{4}$ C. $\frac{a}{3}$ D. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

Câu 98. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có các cạnh bên hợp với đáy những góc bằng 60° , đáy ABC là tam giác đều và A' cách đều A , B , C . Tính khoảng cách giữa hai đáy của hình lăng trụ.

A. a B. $a\sqrt{2}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{2a}{3}$

Câu 99. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Khoảng cách từ A đến (BCD) bằng:

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Câu 100. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Khoảng cách giữa hai cạnh đối AB và CD bằng:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{a}{2}$

D. $\frac{a}{3}$

BÀI TẬP TỔNG HỢP CHỦ ĐỀ 3

Bài 102. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a .

- Chứng minh rằng $B'D \perp (BA'C')$ và $BC' \perp (A'B'CD)$.
- Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(BA'C')$ và (ACD') .
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD' .
- Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB' và BC' .

Bài 103. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi I , K lần lượt là trung điểm của AB và SC . Chứng minh $IS = IC = ID$ và suy ra $IK \perp (SDC)$.

Tính IK .

ĐS: $a\sqrt{2}/2$

Bài 104. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a và ΔSAB đều. Gọi H , K lần lượt là trung điểm của AB , AD và $SH \perp BC$. Chứng minh:

- $SH \perp (ABCD)$.
- $AC \perp SK$ và $CK \perp SD$.

Bài 105. Cho tứ diện $SABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H , K lần lượt là trực tâm ΔABC và ΔSBC . Chứng minh:

- AH , SK , BC đồng qui.
- $SC \perp (BHK)$.
- $HK \perp (SBC)$.

Bài 106. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có ΔABC đều cạnh a , cạnh bên CC' vuông góc với đáy và $CC' = a$.

- Gọi I là trung điểm của BC . Chứng minh $AI \perp BC'$.
- Gọi M là trung điểm của BB' . Chứng minh $AM \perp BC'$.
- Lấy $N \in A'B'$ sao cho $NB' = \frac{a}{4}$ và gọi J là trung điểm của $B'C'$. Chứng minh $AM' \perp (MNJ)$.

Bài 107. Cho tứ diện $ABCD$ có ΔABC và ΔABD vuông tại B , ΔBCD vuông tại C .

- Chứng minh $AB \perp (BCD)$ và ΔACD vuông tại C .
- Chứng minh $CD \perp (ABC)$ và ΔBHD vuông tại H với H là hình chiếu của B lên AC .

Bài 108. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh a , SA vuông góc với đáy và $SA = a$.

- Gọi I là trung điểm của SD . Chứng minh $AI \perp (SCD)$.
- Gọi M là một điểm thay đổi trên SD . Chứng minh hình chiếu của O trên CM thuộc đường tròn cố định.

Bài 109. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a$, $AD = 2a$; $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi M là một điểm trên cạnh AB . (α) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB . Đặt $AM = x$, $(0 < x < a)$.

- Định hình tính của thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với (α) .
- Tính diện tích thiết diện theo a và x .

ĐS: $(2a - x)(a - x)$

Bài 110. Cho đường tròn (C) đường kính AB trong mặt phẳng (α) và một đường thẳng d vuông góc với (α) tại A , trên d lấy một điểm S và trên (C) lấy một điểm M .

- Chứng minh $MB \perp (SAM)$.

- b) Dụng $AH \perp SB$ tại H , $AK \perp SM$ tại K . Chứng minh $AK \perp (SBM)$ và $SB \perp (AHK)$.
- c) Gọi $I = HK \cap MB$. Chứng minh $AI \perp (SAB)$ và AI là tiếp tuyến của (C) .

Bài 111. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30° . Hình chiếu H của đỉnh A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ thuộc đường thẳng $B'C'$

- a) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy ĐS: a) $a/2$ b) $a\sqrt{3}/4$
- b) Chứng minh rằng hai đường thẳng AA' và $B'C'$ vuông góc, tính khoảng cách giữa chúng

Bài 112. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $AC = 2a$, $SA \perp (ABC)$, $SA = 2a$.

- a) Xác định thiết diện của hình chóp và mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với SC .
- b) Tính diện tích của thiết diện. ĐS: $a^2\sqrt{6}/5$

Bài 113. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O và có $SB = SD = AB$.

- a) Chứng minh (SAC) là mặt trung trực của đoạn BD .
- b) Chứng minh ΔSAC vuông tại S .
- c) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SD .
Chứng minh $SH = SK$, $OH = OK$, $HK \parallel BD$.
- d) Chứng minh (SAC) là mặt trung trực của đoạn HK .

Bài 114. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a$.

- a) Tính khoảng cách từ A và B đến mặt phẳng (SBC) .
- b) Tính khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng (SCD) .
- c) Tính diện tích của thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (SAD) và cách một khoảng bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. ĐS: a) $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{2}/2$ b) $a\sqrt{6}/3$ c) $a^2\sqrt{6}/2$

Bài 115. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh a , có $SA = a\sqrt{2}$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC .

- a) Xác định thiết diện của hình chóp tạo bởi (α) .
- b) Chứng minh thiết diện là tứ giác nội tiếp và có hai đường chéo vuông góc với nhau. Tính diện tích thiết diện. ĐS: $a^2\sqrt{2}/3$

Bài 116. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $AB = BC = a$, $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABC)$, $M \in AB$, $AM = x$. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB . Dụng và tính diện tích S của thiết diện bởi hình chóp với (α) theo a và x . Tìm x để S lớn nhất.

Bài 117. Cho tứ diện $ABCD$ có ΔBCD đều. BH là đường cao của ΔBCD . O là trung điểm của BH và $AO \perp (BCD)$, $AO = BH = 2a$, $BI = x$ với $I \in OH$ ($a < x < 2a$), (α) qua I và vuông góc với OH . Dụng và tính diện tích thiết diện tạo bởi (α) . ĐS: $2(3x - 2a)(2a - x)/\sqrt{3}$

Bài 118. Cho tứ diện $ABCD$ có (ABC) và (ABD) cùng vuông góc với (BCD) .

- a) Chứng minh $AB \perp (BCD)$.

- b) Cho BE và DF là các đường cao của ΔBCD . C/m $(ABE) \perp (ACD)$, $(DAF) \perp (ABC)$.
 c) Cho DI là đường cao của ΔABD . Chứng minh $(DIF) \perp (ACD)$.
 d) Gọi $H = BE \cap DF$ và $K = DI \cap AE$. Chứng minh $KH \perp (ACD)$.

Bài 119. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = b$, $CC' = c$.

- a) Tính khoảng cách từ B đến $(ACC'A')$.
 b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC' .

Bài 120. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a , $SO \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{6}$, mặt phẳng (P) đi qua B và vuông góc với SD . Hãy xác định thiết diện và tính diện tích của thiết diện tạo bởi (P) với hình chóp.
 ĐS: $a^2\sqrt{39}/39$

Bài 121. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , các cạnh bên đều bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi (α) là mặt phẳng qua A và song song với BC và vuông góc với SI (I là trung điểm BC).

- a) Hãy xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) . Thiết diện là hình gì?
 b) Tính góc giữa đường thẳng AB và (α) .
 ĐS: 45°

Bài 122. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $2a$ và góc $\widehat{A} = 60^\circ$, các cạnh SA , SB và SD bằng $a\sqrt{3}$. Gọi H là trọng tâm ΔABD .

- a) Chứng minh $SH \perp (ABCD)$.
 b) Tính các khoảng cách từ S đến đường thẳng AC và BD .
 c) Tính góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$.
 ĐS: b) $\frac{a\sqrt{15}}{3}$; $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ c) $\arctan \frac{\sqrt{5}}{3}$

Bài 123. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và ΔBCD vuông cân tại C , O là trung điểm của BD và I là trung điểm của BC . Chứng minh:

- a) $(AOC) \perp (BCD)$, $(ABD) \perp (BCD)$ và $(AOI) \perp (ABC)$.
 b) Cho CH là đường cao của ΔABC . Chứng minh $(OCH) \perp (ABC)$.

Bài 124. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (α) chứa AB và vuông góc với (SCD) . Xác định và tính diện tích thiết diện bởi hình chóp với (α) .
 ĐS: $7a^2\sqrt{3}/16$

Bài 125. Trong mặt phẳng (α) cho đường tròn tâm O đường kính AB và M thuộc đường tròn ấy (M không trùng với A, B). Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (α) tại A lấy điểm S . Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SM . Chứng minh:

- a) $(ADE) \perp (SBM)$.
 b) Tìm vị trí của điểm M để $(SOM) \perp (SAB)$.

Bài 126. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi E là trung điểm của cạnh CD . Tính theo a khoảng cách từ điểm S tới đường thẳng BE . ĐS: $3a\sqrt{5}/5$

Bài 127. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D , $AB = 2a$, $AD = DC = a$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa SD và vuông góc với (SAC) .

a) Chứng minh $BC \perp (SAC)$.

b) Xác định thiết diện của hình chóp bởi (α) .

c) Tính diện tích thiết diện ấy.

$$ĐS: a^2\sqrt{3}/2$$

Bài 128. Gọi (β) là mặt phẳng qua trung điểm M của SA và $N \in AD$, $AN = x$, vuông góc với (SAD) . Xác định và tính diện tích thiết diện của hình chóp với (β) . $ĐS: (3a-2x)\sqrt{a^2+4x^2}/4$

Bài 129. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh a , $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$.

a) Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) .

b) Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) .

c) Tính khoảng cách từ trọng tâm ΔSAB đến mặt phẳng (SAC) . $ĐS: a) a\sqrt{3}/2$ b) $a\sqrt{3}/4$ c) $a\sqrt{2}/6$

Bài 130. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O , cạnh a và $AC = a$. Từ trung điểm H của cạnh AB dựng $SH \perp (ABCD)$ với $SH = a$, $\widehat{B} = 60^\circ$.

a) Tính khoảng cách từ điểm O đến (SCD) .

$$ĐS: a\sqrt{21}/14$$

b) Tính khoảng cách từ điểm A đến (SBC) .

$$ĐS: 2a\sqrt{57}/19$$

Bài 131. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a , $\widehat{A} = 60^\circ$ góc của đường chéo $A'C$ và mặt đáy bằng 60° .

a) Tính khoảng cách giữa hai đáy của hình hộp, suy ra khoảng cách giữa hai đường AC và $D'C'$

b) Dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng $A'C$ và BB' . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng đó. $ĐS: a) 3a; 3a$ b) $a/2$

Bài 132. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy là a , cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD .

a) Chứng minh: $AB \perp (SIJ)$.

b) Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AB và SC . $ĐS: a\sqrt{42}/7$

Bài 133. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 3a$ và $SA \perp (ABC)$. Tam giác ABC có $AB = BC = 2a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (ABC) . $ĐS: 3a/2$

Bài 134. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B , $BC = a$, $SA \perp (ABC)$, $SA = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và SC .

a) Tính khoảng cách giữa SB và SC .

$$ĐS: 3a\sqrt{20}/20$$

b) Dựng mặt phẳng chứa MN và song song với BC . Tính $d(MN, BC)$.

$$ĐS: a/2$$

Bài 135. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tâm O , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi I là trung điểm của SC và M là trung điểm của AB .

a) Chứng minh $OI \perp (ABCD)$.

b) Tính khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng CM .

$$ĐS: a\sqrt{105}/10$$

Bài 136. Cho hình tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (ABC)$, $AC = AD = 4$ cm, $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm. Tính khoảng cách giữa A và mặt phẳng (BCD) . $ĐS: 6\sqrt{34}/17$

Bài 137. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $SA \perp (ABC)$. Tính

$$d(A, (ABC)) \text{ theo } a, \text{ biết } SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}. \quad \text{ĐS: } a\sqrt{2}/2$$

Bài 138. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, ΔSAB đều cạnh a , $(SAB) \perp (ABCD)$.

a) Chứng minh ΔSCD cân.

b) Tính số đo góc của hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$.

c) Tính độ dài đoạn vuông góc chung giữa AB và SC .

$$\text{ĐS: b) } 60^\circ, \text{ c) } a\sqrt{21}/7$$

Bài 139. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a .

a) Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'D$.

b) Gọi M , N và P lần lượt là trung điểm của các cạnh $B'B$, CD , $A'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng MP và $C'N$.

$$\text{ĐS: a) } a\sqrt{6}/6 \text{ b) } 90^\circ$$

Bài 140. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy là a , tâm O , cạnh bên bằng a .

a) Tính đường cao của hình chóp.

b) Tính góc giữa các cạnh bên và các mặt bên với mặt đáy.

c) Tính $d(O, (SCD))$.

$$\text{ĐS: a) } \frac{a\sqrt{6}}{2} \text{ c) } \frac{a\sqrt{42}}{14} \text{ d) } \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ e) } \frac{6a^2\sqrt{42}}{49}$$

d) Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung giữa BD và SC .

e) Gọi (α) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với (SCD) , (α) cắt SC , SD lần lượt tại C' và D' . Tứ giác $ABC'D'$ là hình gì? Tính diện tích của tứ giác.

Bài 141. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với $(ABCD)$ và góc giữa (SBC) và đáy bằng 60° . Gọi I là trung điểm của CD , E là trung điểm cạnh BC và J là điểm trên cạnh BC sao cho $BJ = 2JC$. Tính các khoảng cách:

a) Giữa hai đường BC và SD

b) Giữa hai đường CD và SB

c) Giữa hai đường SA và BD

d) Giữa hai đường SI và AB

e) Giữa hai đường DJ và SA

f) Giữa hai đường DJ và SC

g) Giữa hai đường AE và SC

Bài 142. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, ΔSAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm của AB . Tính khoảng cách:

a) từ A đến mặt phẳng (SBD)

b) giữa hai đường SH và CD

c) giữa hai đường SH và AC

d) giữa hai đường SB và CD

e) giữa hai đường BC và SA

f) giữa hai đường SC và BD

Bài 143. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a\sqrt{2}$, $AD = 2a$. Biết tam giác

SAB cân tại S và có diện tích bằng $\frac{a^2\sqrt{6}}{6}$. Gọi H là trung điểm của AB . Tính khoảng cách:

a) từ A đến mặt phẳng (SBD)

b) giữa hai đường SH và BD

c) giữa hai đường BC và SA

Bài 144. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Lấy điểm $M \in AD'$, điểm $N \in BD$ sao cho: $AM = DN = x$ ($0 < x < a\sqrt{2}$).

a) Tìm x để đoạn thẳng MN có độ dài ngắn nhất.

$$\text{ĐS: } a\sqrt{2}/3$$

b) Khi MN ngắn nhất, hãy chứng minh MN là đường vuông góc chung của AD' và DB , đồng thời $MN \parallel A'C$.

Bài 145. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $a\sqrt{6}$. Xét đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với BD . Gọi (P) là mặt phẳng qua Δ và C' .

a) Thiết diện của hình lăng trụ đã cho khi cắt bởi (P) là hình gì? Tính diện tích thiết diện.

b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (P) và $(ABCD)$.

ĐS: a) $S = 2a^2$ (đvdt) b) 60°

Bài 146. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a .

a) Tính góc tạo bởi hai đường thẳng AC' và $A'B$.

ĐS: 90°

b) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B', BC, DD'$. Cm: $AC' \perp (MNP)$.

Bài 147. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi I là điểm thuộc cách AB , $AI = x$ ($0 < x < a$)

a) Khi góc giữa hai đường thẳng AC' và DI bằng 60° , hãy xác định vị trí của điểm I .

b) Tính theo a và x diện tích thiết diện của hình lập phương khi cắt bởi mặt phẳng $(B'DI)$.

Tìm x để diện tích ấy là nhỏ nhất.

c) Tính khoảng cách từ điểm C đến $(B'DI)$ theo a và x .

ĐS: a) $x = (4 - \sqrt{15})a$ b) $S = a\sqrt{a^2 + x^2 + (a-x)^2}$ (đvdt), $S_{\min}$ khi $x = \frac{a}{2}$; c) $h = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + x^2 + (a-x)^2}}$

Bài 148. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , I là trung điểm của BC , $SA \perp (ABC)$.

a) Chứng minh $(SAI) \perp (SBC)$.

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, AB ; BE, CF lần lượt là đường cao của ΔSBC . Chứng minh (MBE) vuông góc với (SAC) và (NFC) vuông góc với (SBC) .

c) Gọi H, O lần lượt là trực tâm của ΔSBC và ΔABC . Chứng minh OH vuông góc với (SBC) .

d) Cho (α) qua A và song song với BC và (α) vuông góc với (SBC) . Tính diện tích thiết diện tạo bởi hình chóp $S.ABC$ và mặt phẳng (α) khi $SA = 2a$.

ĐS: $16a^2\sqrt{3}/19\sqrt{19}$

e) Chứng minh $AK.AS$ không đổi. Tìm vị trí của S để SK ngắn nhất.

f) Khi $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mp (SBC) và (ABC) , (SAC) và (SBC) .

Bài 149. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) nếu hình chóp $S.ABC$:

a) Có tất cả các cạnh đều bằng a .

b) Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$, cạnh đáy $AB = a$.

c) Cạnh đáy $AB = a$ và góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy là 60° .

d) Cạnh bên $SB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy là 60° .

e) Cạnh bên $SB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy là 60° .

Bài 150. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ nếu hình chóp $S.ABCD$:

a) Tất cả các cạnh đều bằng a .

b) $SA = \frac{a\sqrt{10}}{2}$, $AB = a$.

c) $SA = 2a\sqrt{3}$ và góc tạo bởi giữa cạnh bên và mặt đáy là 60° .

d) $SA = a\sqrt{2}$ và góc tạo bởi giữa mặt bên và mặt đáy là 60° .

e) $AB = 2a$ và góc giữa cạnh bên và mặt đáy là 60° .

Bài 151. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi C_1 là trung điểm CC' .

a) Tính góc giữa hai đường thẳng C_1B và $A'B'$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (C_1AB) và (ABC) .

b) Chứng minh hình chóp $C_1.ABB'A'$ là hình chóp tứ giác đều.

c) Một mặt phẳng (P) chứa cạnh AB , tạo với mặt phẳng đáy (ABC) góc φ và cắt hình lăng trụ đã cho theo hình có diện tích khác 0. Tính diện tích thiết diện theo a và φ .

$$DS: a) 30^\circ; 30^\circ \quad b) 0^\circ < \varphi < \widehat{C'MC} : S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4 \cos \varphi}, \quad \widehat{C'MC} < \varphi < 90^\circ : S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{3 \tan \varphi \sin \varphi} (\sqrt{3} \tan \varphi - 1), \\ \varphi = 90^\circ : S = a^2$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP CHỦ ĐỀ 3

Câu 101. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A. Vector trong không gian là một đoạn thẳng.
- B. Vector trong không gian là một tia.
- C. Vector trong không gian là một đoạn thẳng có độ dài xác định.
- D. Vector trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

Câu 102. Trong không gian cho hai điểm M, N . Khi đó,

- A. giá của vector $\overrightarrow{MN}$ là tia MN .
- B. giá của vector $\overrightarrow{MN}$ là đoạn thẳng MN .
- C. giá của vector $\overrightarrow{MN}$ là đường thẳng MN .
- D. giá của vector $\overrightarrow{MN}$ song song với giá của vector $\overrightarrow{NM}$.

Câu 103. Trong không gian cho vector $\overrightarrow{AB}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A. Độ dài vector $\overrightarrow{AB}$ là một số thực dương.
- B. Độ dài vector $\overrightarrow{AB}$ là độ dài đoạn thẳng AB .
- C. Độ dài vector $\overrightarrow{AB}$ là đoạn thẳng AB .
- D. Độ dài vector $\overrightarrow{AB}$ là đường thẳng AB .

Câu 104. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, vector $\overrightarrow{AD}$ bằng vector nào dưới đây?

- A. $\overrightarrow{CD}$.
- B. $\overrightarrow{B'C'}$.
- C. $\overrightarrow{D'C'}$.
- D. $\overrightarrow{BA}$.

Câu 105. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các vector $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{AB'}$. Có bao nhiêu vector bằng vector $\overrightarrow{AB}$?

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.

Câu 106. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, ba vector đồng phẳng là

- A. $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{B'A'}$ và $\overrightarrow{D'C'}$.
- B. $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{B'A'}$ và $\overrightarrow{BC'}$.
- C. $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{B'A'}$ và $\overrightarrow{A'A}$.
- D. $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC'}$.

Câu 107. Cho hình hộp chữ nhật $MNPQ.M'N'P'Q'$. Khi đó,

- A. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{PM}$.
- B. $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{Q'N'} = \overrightarrow{PQ}$.
- C. $\overrightarrow{PN} - \overrightarrow{Q'N'} = \overrightarrow{PQ}$.
- D. $\overrightarrow{MM'} - \overrightarrow{N'N} = 2\overrightarrow{MN}$.

Câu 108. Gọi M, N, P và Q lần lượt là trung điểm của AB, AC, CD và DB của tứ diện $ABCD$. Các vector đồng phẳng là

- A. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}$.
- B. $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{CD}$.
- C. $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MP}, \overrightarrow{BD}$.
- D. $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}$.

Câu 109. Trong không gian, cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ có O và O' tương ứng là giao hai đường chéo của mỗi hình đó. Khi đó,

- A. $\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DF} = 4\overrightarrow{OO'}$.
- B. $\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{OO'}$.

C. $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} = 3\overrightarrow{EO}$.

D. $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DF} = \vec{0}$.

Câu 110. Cho hình hộp chữ nhật $MNPQ.M'N'P'Q'$. Khi đó,

A. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP'}$.

B. $\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{PP'} - \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MM'}$.

C. $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QN} - \overrightarrow{P'P} = \overrightarrow{P'Q}$.

D. $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'N'} + \overrightarrow{M'M} = \vec{0}$.

Câu 111. Cho các điểm A, B, C, D trong không gian, trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

B. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$.

C. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD}$.

Câu 112. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Ba vectơ đồng phẳng khi và chỉ khi giá của ba vectơ đó cùng song song với một mặt phẳng.

B. Ba vectơ đồng phẳng khi và chỉ khi có một vectơ ngược hướng với hai vectơ còn lại.

C. Ba vectơ đồng phẳng khi và chỉ khi giá của ba vectơ đó trùng nhau hoặc song song với nhau.

D. Ba vectơ đồng phẳng khi và chỉ khi ba vectơ đó nằm trong cùng một mặt phẳng.

Câu 113. Cho hình hộp $MNPQ.M'N'P'Q'$, khi đó $\overrightarrow{MN'}$, $\overrightarrow{NP'}$ và $\overrightarrow{NQ}$ là

A. ba vectơ cùng phương.

B. ba vectơ cùng hướng.

C. ba vectơ đồng phẳng.

D. ba vectơ không đồng phẳng.

Câu 114. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có O, O' lần lượt là tâm của các mặt $ABCD$,

$A'B'C'D'$. Khi đó $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OO'}$ và $\overrightarrow{BB'}$ là

A. ba vectơ đồng phẳng.

B. ba vectơ không đồng phẳng.

C. ba vectơ cùng phương.

D. ba vectơ cùng hướng.

Câu 115. Điều kiện cần và đủ để ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng là:

A. Có hai số x, y để $x\vec{a} + y\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

B. Có hai số x, y không đồng thời bằng 0 để $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

C. Có ba số x, y, z để $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$.

D. Có ba số x, y, z không đồng thời bằng 0 để $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$.

Câu 116. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Gọi M là trung điểm của CD . Khi đó:

A. $\overrightarrow{MC'} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$. C. $\overrightarrow{MC'} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. B. $\overrightarrow{MC'} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$. D. $\overrightarrow{MC'} = \vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

Câu 117. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Gọi E là trung điểm của CC' . Khi đó:

A. $\overrightarrow{AE} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. B. $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c}$. C. $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$. D. $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c})$.

Câu 118. Cho hình bình hành $ABCD$, gọi E là một điểm bất kì. Khi đó:

A. $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{ED}$.

B. $\overrightarrow{EA} - \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED}$.

C. $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED}$.

D. $\overrightarrow{EA} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{ED}$.

Câu 119. Cho tứ diện $SMNP$, gọi G là trọng tâm tam giác MNP , khi đó

A. $\overrightarrow{SM} + \overrightarrow{SN} + \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{SG}$.

B. $\overrightarrow{SM} + \overrightarrow{SN} + \overrightarrow{SP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SG}$.

$$\text{C. } \overrightarrow{SM} + \overrightarrow{SN} + \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{SG} = \vec{0}.$$

$$\text{D. } \overrightarrow{SM} + \overrightarrow{SN} + \overrightarrow{SP} = 3\overrightarrow{SG}.$$

Câu 120. Cho tứ diện $SMNP$, gọi G là trọng tâm của tam giác MNP . Vector $\overrightarrow{SG}$ cùng phương với vector nào sau đây?

$$\text{A. } \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC}.$$

$$\text{B. } \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}.$$

$$\text{C. } 2(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}).$$

$$\text{D. } \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}.$$

Câu 121. Cho tứ diện $SMNP$, gọi G là trọng tâm của tam giác MNP . Vector $\overrightarrow{GS}$ cùng hướng với vector nào sau đây?

$$\text{A. } \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}.$$

$$\text{B. } -\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC}.$$

$$\text{C. } 2(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}).$$

$$\text{D. } \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SA}.$$

Câu 122. Cho hình chóp $S.ABC$, các điểm M, N tương ứng là trung điểm các cạnh SA, BC . Gọi I là trung điểm của MN , P là điểm bất kì. Khi đó

$$\text{A. } 2\overrightarrow{PI} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}.$$

$$\text{B. } 3\overrightarrow{PI} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}.$$

$$\text{C. } 4\overrightarrow{PI} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}.$$

$$\text{D. } \overrightarrow{PI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}).$$

Câu 123. Cho hình chóp $S.ABC$, các điểm M, N tương ứng là trung điểm các cạnh SA, BC . Gọi I là trung điểm của MN , P là điểm bất kì. Khi đó, $\overrightarrow{PI}$ cùng phương với vector nào sau đây?

$$\text{A. } \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}.$$

$$\text{B. } \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}.$$

$$\text{C. } \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}.$$

$$\text{D. } \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}.$$

Câu 124. Cho hình chóp $S.ABC$, các điểm M, N tương ứng là trung điểm các cạnh SA, BC . Khi đó, vector $\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$ cùng hướng với vector nào sau đây?

$$\text{A. } \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}.$$

$$\text{B. } -\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PN}.$$

$$\text{C. } \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{PS}.$$

$$\text{D. } \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}.$$

Câu 125. Cho hình hộp $MNPQ.M'N'P'Q'$. Khi đó, góc giữa hai vector $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{NP'}$ là góc nào dưới đây?

$$\text{A. } \widehat{NPQ'}.$$

$$\text{B. } \widehat{MPN}.$$

$$\text{C. } \widehat{NMQ'}.$$

$$\text{D. } \widehat{NMQ}.$$

Câu 126. Cho hình hộp $MNPQ.M'N'P'Q'$. Khi đó, góc giữa hai vector $\overrightarrow{MM'}$ và $\overrightarrow{NP'}$ là góc nào dưới đây?

$$\text{A. } \widehat{N'NP'}.$$

$$\text{B. } \widehat{MPN}.$$

$$\text{C. } \widehat{NMQ'}.$$

$$\text{D. } \widehat{NMM'}.$$

Câu 127. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Khi đó, góc giữa hai vector $\overrightarrow{BS}$ và $\overrightarrow{CD}$ bằng

$$\text{A. } \widehat{SBC}.$$

$$\text{B. } \widehat{SCB}.$$

$$\text{C. } \widehat{SAB}.$$

$$\text{D. } \widehat{SBA}.$$

Câu 128. Cho vector $\vec{a}$ khác $\vec{0}$. Khi đó, góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $-\vec{a}$ là góc có số đo bằng

$$\text{A. } 0^\circ.$$

$$\text{B. } 90^\circ.$$

$$\text{C. } 180^\circ.$$

$$\text{D. } 360^\circ.$$

Câu 129. Trong không gian, với hai điểm phân biệt A, B . Ta luôn có:

$$\text{A. } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} \neq \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

$$\text{B. } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

$$\text{C. } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = -AB^2.$$

$$\text{D. } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = 2AB^2.$$

Câu 130. Trong không gian, với ba vector $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ đều khác $\vec{0}$, ta luôn có:

$$\text{A. } (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq \vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}).$$

$$\text{B. } (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) = 0.$$

$$\text{C. } (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}).$$

$$\text{D. } (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}).$$

Câu 131. Trong không gian, với hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vector không, ta luôn có:

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
 B. $\vec{a} \cdot \vec{b} > |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
 C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.
 D. $\vec{a} \cdot \vec{b} < |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Câu 132. Trong không gian, với hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vector không, ta luôn có:

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$.
 B. $\vec{a} \cdot \vec{b} \geq 0$.
 C. $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq 0$.
 D. $\vec{a} \cdot \vec{b} \in \mathbb{R}$.

Câu 133. Trong không gian, với hai điểm phân biệt A, B . Ta luôn có:

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.
 B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
 C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2$.
 D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = -AB^2$.

Câu 134. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có vector chỉ phương $\vec{u}_1, \vec{u}_2$. Ta luôn có:

- A. $\cos \alpha = \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.
 B. $\cos \alpha = -\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.
 C. $\cos \alpha = |\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)|$.
 D. $\cos \alpha > \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

Câu 135. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Tích vô hướng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một vector.
 B. Tích vô hướng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số thực dương.
 C. Tích vô hướng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số thực.
 D. Tích vô hướng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là số thực khác 0.

Câu 136. Cho hình hộp $MNPQ.M'N'P'Q'$, trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$.
 B. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{N'M'}$.
 C. $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{PP'}$.
 D. $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NQ}$.

Câu 137. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = b, AA' = c$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B'C'}$ bằng

- A. 1.
 B. ab .
 C. 0.
 D. abc .

Câu 138. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ bằng

- A. $\overrightarrow{AS}$.
 B. $\overrightarrow{SC}$.
 C. $\overrightarrow{AC}$.
 D. $\overrightarrow{SA}$.

Câu 139. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a . Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$ bằng

- A. $2a^2$.
 B. 0.
 C. a^2 .
 D. $-a^2$.

Câu 140. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a . Tích vô hướng $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{B'D'}$ bằng

- A. a^2 .
 B. 0.
 C. $2a^2$.
 D. $\sqrt{2}a^2$.

Câu 141. Cho hình lập phương $MNPQ.M'N'P'Q'$ có cạnh a . Khi đó,

- A. $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{Q'P'} = a^2$.
 B. $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} = a^2$.
 C. $\overrightarrow{MN'} \cdot \overrightarrow{NP'} = a^2$.
 D. $\overrightarrow{MN'} \cdot \overrightarrow{NP'} = 0$.

Câu 142. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a . Khi đó,

- A. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'D} = a^2$.
 B. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'D} = 2a^2$.
 C. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'D} = 0$.
 D. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'D} = -a^2$.

Câu 143. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. Một đường thẳng có đúng một vector chỉ phương.
 B. Một đường thẳng có vô số vector chỉ phương.
 C. Các vector chỉ phương của đường thẳng cùng hướng với nhau.
 D. Các vector chỉ phương của đường thẳng ngược hướng với nhau.

Câu 144. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
- B. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với hai đường thẳng chéo nhau cho trước.
- C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- D. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Câu 145. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

- A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng d thì song song hoặc trùng nhau.
- B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng d thì vuông góc với nhau.
- C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng d thì có thể chéo nhau.
- D. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng d thì cắt nhau.

Câu 146. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P) . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Nếu $a \perp b, (P) \perp a$ thì $(P) \parallel b$.
- C. Nếu $a \parallel b, (P) \perp a$ thì $(P) \perp b$.
- B. Nếu $a \parallel (P), a \perp b$ thì $(P) \perp b$.
- D. Nếu $a \parallel (P), a \perp b$ thì $(P) \parallel b$.

Câu 147. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

- A. Nếu góc giữa hai vectơ bằng 180° thì hai vectơ đó bằng nhau.
- B. Nếu góc giữa hai vectơ bằng 180° thì hai vectơ đó đối nhau.
- C. Nếu góc giữa hai vectơ bằng 180° thì hai vectơ đó ngược hướng.
- D. Nếu góc giữa hai vectơ bằng 180° thì hai vectơ đó cùng hướng.

Câu 148. Nếu hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$ thỏa mãn $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ thì

- A. góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng 180° .
- B. góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng 90° .
- C. hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng.
- D. hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.

Câu 149. Nếu hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$ thỏa mãn $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ thì

- A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$.
- B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1$.
- C. $|\cos(\vec{a}, \vec{b})| = 1$.
- D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

Câu 150. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, đường thẳng nào **không** song song với mặt phẳng $(ABCD)$?

- A. $B'D'$.
- B. $A'D'$.
- C. AC .
- D. $B'C'$.

Câu 151. Cho hình chóp đều $S.ABCD$. Khi đó số mặt bên của hình chóp là tam giác cân bằng

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.

Câu 152. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) .

Khi đó số mặt của hình chóp $S.ABC$ là tam giác vuông bằng

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.

Câu 153. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AC vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

- A. $(ACC'A')$.
- B. $(ABB'A')$.
- C. $(BDD'B')$.
- D. $(BC'D')$.

Câu 154. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy. Khi đó, góc giữa đường thẳng SB với mặt phẳng đáy bằng góc nào dưới đây?

- A. $\widehat{SCA}$.
- B. $\widehat{SBA}$.
- C. $\widehat{SBD}$.
- D. $\widehat{BAB}$.

- Câu 155.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy, $SB = a\sqrt{2}$. Khi đó góc giữa SD với mặt phẳng $(ABCD)$ bằng
 A. 60° . B. 90° . C. 45° . D. 30° .
- Câu 156.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy, $SC = a\sqrt{3}$. Khi đó góc giữa SB với mặt phẳng $(ABCD)$ bằng
 A. 45° . B. 60° . C. 90° . D. 30° .
- Câu 157.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, SA vuông góc với đáy. Trong các tam giác cho dưới đây, tam giác nào **không phải** tam giác vuông?
 A. $\triangle SAB$. B. $\triangle SAD$. C. $\triangle SAC$. D. $\triangle SCD$.
- Câu 158.** Cho hình lập phương $MNPQ.M'N'P'Q'$. Khi đó mặt phẳng $(MPP'M')$ vuông góc với mặt phẳng nào dưới đây?
 A. $(NN'P'P)$. B. $(NN'Q)$. C. $(NN'M')$. D. $(MNPQ)$.
- Câu 159.** Cho hai mặt phẳng (P) , (Q) vuông góc với nhau theo giao tuyến Δ và cho đường thẳng a . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?
 A. Nếu $a \parallel (P)$ thì $a \perp (Q)$. B. Nếu $a \parallel (Q)$ thì $a \perp (P)$.
 C. Nếu $a \subset (P)$, $a \perp \Delta$ thì $a \perp (Q)$. D. Nếu $a \perp \Delta$ thì $a \perp (P)$ hoặc $a \perp (Q)$.
- Câu 160.** Cho hai mặt phẳng phân biệt (P) , (Q) cùng vuông góc với mặt phẳng (R) . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?
 A. $(P) \equiv (Q)$. B. $(P) \parallel (Q)$.
 C. (P) cắt (Q) . D. $(P) \parallel (Q)$ hoặc (P) cắt (Q) theo giao tuyến Δ thỏa mãn $\Delta \perp (R)$.
- Câu 161.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?
 A. Hình hộp chữ nhật có các mặt bên đều là hình chữ nhật.
 B. Hình hộp chữ nhật là hình lăng trụ đứng.
 C. Hình lăng trụ đứng là hình hộp chữ nhật.
 D. Hình hộp chữ nhật có các cạnh bên vuông góc với đáy.
- Câu 162.** Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?
 A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
 B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
 C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì cắt nhau.
 D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- Câu 163.** Cho hai mặt phẳng (P) , (Q) và một đường thẳng a . Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?
 A. Nếu $(P) \parallel (Q)$, $a \perp (P)$ thì $a \perp (Q)$. B. Nếu $(P) \perp (Q)$, $a \parallel (P)$ thì $a \perp (Q)$.
 C. Nếu $(P) \perp (Q)$, $a \perp (P)$ thì $a \parallel (Q)$. D. Nếu $(P) \parallel a$, $(Q) \parallel a$ thì $(P) \parallel (Q)$.
- Câu 164.** Cho đường thẳng a có hình chiếu trên mặt phẳng (P) là đường thẳng a' , đường thẳng b nằm trong (P) . Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?
 A. Nếu $a \perp b$ thì $a' \perp b$. B. Nếu $a' \perp b$ thì $a \perp b$.
 C. Nếu $a \parallel b$ thì $a' \parallel b$ hoặc $a' \equiv b$. D. Nếu $a' \parallel b$ thì $a \parallel b$.

- Câu 165.** Cho tứ diện $ABCD$ có AB , AC , AD đôi một vuông góc. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?
- A. Hai cạnh đối của tứ diện vuông góc.
 B. Ba mặt phẳng (ABC) , (ABD) , (ACD) đôi một vuông góc.
 C. Hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD) là trực tâm tam giác BCD .
 D. Tam giác BCD vuông.
- Câu 166.** Cho đoạn thẳng AB là (P) là mặt phẳng trung trực của nó. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?
- A. Nếu $M \in (P)$ thì $MA = MB$.
 B. Nếu $MN \subset (P)$ thì $MN \perp AB$.
 C. Nếu $MA = MB$ thì $M \in (P)$.
 D. Nếu $MN \perp AB$ thì $MN \subset (P)$.
- Câu 167.** Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến c . Mệnh đề nào sau đây là đúng?
- A. Góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa hai đường thẳng lần lượt nằm trên (P) và (Q) .
 B. Góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa hai đường thẳng lần lượt nằm trên (P) , (Q) và cùng đi qua một điểm.
 C. Góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa hai đường thẳng lần lượt nằm trên (P) , (Q) và cùng vuông góc với c .
 D. Góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa đường thẳng a nằm trên (P) và hình chiếu của a trên (Q) .
- Câu 168.** Cho tứ diện $ABCD$ có AB , AC , AD đôi một vuông góc. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC) bằng góc:
- A. $\widehat{DBA}$.
 B. $\widehat{DMA}$ (M là trung điểm BC).
 C. $\widehat{DCA}$.
 D. $\widehat{DHA}$ (H là chân đường cao của $\triangle ABC$ kẻ từ A).
- Câu 169.** Hai mặt phẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi:
- A. Mọi đường thẳng trong mặt phẳng này đều vuông góc với mặt phẳng kia.
 B. Hai mặt phẳng lần lượt chứa hai đường thẳng vuông góc với nhau.
 C. Mặt phẳng này chứa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.
 D. Mỗi đường thẳng trong mặt phẳng này vuông góc với một đường thẳng nằm trong mặt phẳng kia.
- Câu 170.** Qua một đường thẳng $a \parallel (P)$ cho trước, có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P) ?
- A. 0
 B. 1.
 C. 2.
 D. Vô số.
- Câu 171.** Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau theo giao tuyến c . Mệnh đề nào sau đây là đúng?
- A. Đường thẳng a nằm trong (P) thì vuông góc với (Q) .
 B. Đường thẳng a vuông góc với (Q) thì nằm trong (P) .
 C. Đường thẳng a vuông góc với c thì vuông góc với (Q) .
 D. Đường thẳng a đi qua điểm A thuộc (P) và vuông góc với c thì a nằm trên (P) .
- Câu 172.** Hình hộp chữ nhật có ba kích thước là 3, 4, 4 thì độ dài đường chéo của nó là:

- A. 5. B. $\sqrt{41}$. C. $2\sqrt{5}$. D. $5\sqrt{2}$.

Câu 173. Hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng 3, cạnh bên bằng 2 thì đường cao bằng bao nhiêu?

- A. 1. B. $2\sqrt{2}$. C. $\sqrt{2}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 174. Hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng 2, cạnh bên bằng 5 thì đường cao bằng bao nhiêu?

- A. $3\sqrt{3}$. B. $\sqrt{23}$. C. 3. D. $\sqrt{5}$.

Câu 175. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD , O là trung điểm của MN . Gọi I là giao điểm của đường thẳng AO và mặt phẳng (BCD) . Khi đó

- A. I trùng với trục tâm của tam giác BCD .
 B. I trùng với trọng tâm của tam giác BCD .
 C. I trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD .
 D. I trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCD .

Câu 176. Một hình chóp tam giác là hình chóp đều khi và chỉ khi

- A. đường cao của hình chóp đi qua trọng tâm của đáy.
 B. các cạnh bên của hình chóp bằng nhau.
 C. các cạnh bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.
 D. đáy là tam giác đều và các cạnh bên có độ dài bằng nhau.

Câu 177. Cho ba đường thẳng a, b, c đôi một chéo nhau. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. Không tồn tại đường thẳng nào cắt cả ba đường thẳng a, b, c .
 B. Tồn tại vô số đường thẳng cắt cả ba đường thẳng a, b, c .
 C. Tồn tại đúng hai đường thẳng phân biệt cắt cả ba đường thẳng a, b, c .
 D. Tồn tại duy nhất một đường thẳng cắt cả ba đường thẳng a, b, c .

Câu 178. Hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. Hình hộp đã cho là hình lăng trụ đứng. B. Hình hộp đã cho là hình lăng trụ đều.
 C. Tất cả các mặt đều là hình vuông. D. Các mặt bên là các hình chữ nhật.

Câu 179. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. Hình hộp có ba cạnh chung một đỉnh đôi một vuông góc là hình hộp chữ nhật.
 B. Hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật là hình hộp chữ nhật.
 C. Hình lăng trụ đều có đáy là tứ giác là hình hộp chữ nhật.
 D. Hình hộp đứng có tất cả các cạnh bằng nhau là hình hộp chữ nhật.

Câu 180. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. Hình hộp có sáu mặt là hình vuông là một hình lập phương.
 B. Hình hộp chữ nhật có sáu mặt có diện tích bằng nhau là một hình lập phương.
 C. Hình lăng trụ đều có tất cả các cạnh bằng nhau là một hình lập phương.
 D. Hình lăng trụ tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau là một hình lập phương.

Câu 181. Hình nào trong các hình sau đây **không** có đủ sáu mặt là hình chữ nhật?

- A. Hình lập phương. B. Hình lăng trụ tứ giác đều.
 C. Hình hộp đứng. D. Hình hộp chữ nhật.

Câu 182. Hình nào trong các hình sau đây có tất cả các cạnh bằng nhau?

A. Hình hộp chữ nhật.

B. Hình hộp.

C. Hình lăng trụ đều.

D. Hình lập phương.

Câu 183. Hình lập phương có cạnh bằng 2 thì đường chéo có độ dài là:

A. 6.

B. $3\sqrt{2}$.C. $\sqrt{6}$.D. $2\sqrt{2}$.**Câu 184.** Hình nào trong các hình sau đây không có mặt nào là hình bình hành?

A. Hình lăng trụ ngũ giác.

B. Hình chóp cụt tứ giác đều.

B. Hình lập phương.

D. Hình chóp cụt ngũ giác đều.

Câu 185. Cho tứ diện $ABCD$ có AB , AC , AD đôi một vuông góc. Khi đó:A. $S_{BCD} \cdot \cos \widehat{DCA} = S_{ABC}$.B. $S_{BCD} \cdot \cos \widehat{DBA} = S_{ABC}$.C. $S_{BCD} \cdot \cos \widehat{DHA} = S_{ABC}$ (H là chân đường cao của $\triangle ABC$ kẻ từ A).D. $S_{BCD} \cdot \cos \widehat{DMA} = S_{ABC}$ (M là trung điểm của BC).**Câu 186.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

B. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt đi qua hai đường thẳng đó.

C. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng và mặt phẳng song song với nó chứa đường thẳng còn lại.

D. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai đường thẳng song song lần lượt cắt hai đường thẳng đó.

Câu 187. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau là đoạn thẳng ngắn nhất nối hai điểm thuộc hai đường thẳng đó.

B. Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau là đường thẳng vuông góc với cả hai đường thẳng đó.

C. Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau cắt cả hai đường thẳng đó.

D. Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau vuông góc với mặt phẳng song song với hai đường thẳng đó.

Câu 188. Cho tứ diện $OABC$ có $OA \perp OB$, $OB \perp OC$, $OC \perp OA$. Gọi α , β , γ theo thứ tự là góc tạo bởi các mặt phẳng (OAB) , (OBC) , (OAC) với (ABC) . Khi đó, giá trị biểu thức $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma$ bằng

A. 2.

B. $\frac{3}{2}$.C. $\frac{1}{2}$.D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.**Câu 189.** Cho tứ diện $OABC$ có $OA \perp OB$, $OB \perp OC$, $OC \perp OA$. Đặt $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Khi đó khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) bằngA. $h = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{abc}$.B. $h = \frac{a+b+c}{3}$.C. $h = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$.D. $h = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.**Câu 190.** Đường cao của tứ diện đều cạnh a bằngA. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.B. $\frac{3a}{2}$.C. $a\sqrt{2}$.D. $2a\sqrt{3}$.**Câu 191.** Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) . Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Khoảng cách giữa a và (P) bằng khoảng cách giữa đường thẳng a và đường thẳng $a' \subset (P)$ và song song với a .
- B. Khoảng cách giữa a và (P) bằng khoảng cách giữa a và hình chiếu của nó lên (P) .
- C. Khoảng cách giữa a và (P) bằng khoảng cách giữa a và đường thẳng b nằm trên (P) và vuông góc với a .
- D. Khoảng cách giữa a và (P) bằng khoảng cách giữa a và đường thẳng b nằm trên (P) và không song song với a .

Câu 192. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $d(AC, B'D') = AA'$. B. $d(AC, B'D') = AD'$.
- C. $d(AC, B'D') = AB'$. D. $d(AC, B'D') = CB'$.

Câu 193. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. $d(BB', AC') = d(BB', (ACC'A'))$ B. $d(BB', AC') = d(B, AC')$
- C. $d(BB', AC') = d(B, (ACC'A'))$ D. $d(BB', AC') = BO$ (O là tâm hình vuông $ABCD$)

Câu 194. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. $AD \perp (BDD'B')$. B. $BD \perp (ACC'A')$.
- C. $(BDD'B') \perp (ACC'A')$. D. $BC \parallel (ADC'B')$.

Câu 195. Trong không gian cho hai đường thẳng a, b chéo nhau và đường thẳng c song song với a . Khi đó

- A. b và c song song B. b và c cắt nhau. C. b và c chéo nhau. D. Cả 3 đều sai.

Câu 196. Cho tứ diện đều $ABCD$, gọi α là góc giữa hai mặt bất kỳ của tứ diện $ABCD$. Khi đó,

- A. $\cos \varphi = \frac{1}{3}$. B. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\cos \varphi = \frac{1}{2}$. D. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 197. Cho tứ diện đều $SABC$, gọi α là góc giữa SA và mặt (ABC) . Khi đó,

- A. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. C. $\cos \varphi = \frac{1}{2}$. D. $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 198. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Khoảng cách từ đỉnh C' đến mặt phẳng $(BDD'B')$ bằng

- A. $\frac{a}{3}$. B. $\frac{a}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 199. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 200. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. C. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

PHỤ LỤC

A – KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Chứng minh đường thẳng d song song mp (α) ($d \not\subset (\alpha)$)

Cách 1. Chứng minh $d \parallel d'$ và $d' \subset (\alpha)$

Cách 2. Chứng minh $d \subset (\beta)$ và $(\beta) \parallel (\alpha)$

Cách 3. C/m d và (α) cùng vuông góc với 1 đường thẳng hoặc cùng vuông góc với 1 mặt phẳng

2. Chứng minh mp (α) song song với mp (β)

Cách 1. Chứng minh mp (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau cùng song song với (β) (Nghĩa là 2 đường thẳng cắt nhau trong mặt này song song với 2 đường thẳng trong mặt phẳng kia)

Cách 2. Chứng minh (α) và (β) cùng song song với 1 mặt phẳng hoặc cùng vuông góc với 1 đường thẳng.

3. Chứng minh hai đường thẳng song song:

Cách 1. Hai mặt phẳng (α) , (β) có điểm chung S lần lượt chứa hai đường thẳng song song a và b thì $(\alpha) \cap (\beta) = Sx \parallel a \parallel b$.

Cách 2. $(\alpha) \parallel a$, $a \subset (\beta) \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = b \parallel a$

Cách 3. Hai mặt phẳng cắt nhau cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng song song với đường thẳng đó.

Cách 4. Một mặt phẳng cắt hai mặt phẳng song song cho 2 giao tuyến song song

Cách 5. Một mặt phẳng song song với giao tuyến của 2 mặt phẳng cắt nhau, ta được 3 giao tuyến song song.

Cách 6. Hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ 3 hoặc cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Cách 7. Sử dụng phương pháp hình học phẳng: đường trung bình, định lý Thales đảo, cạnh đối tứ giác đặc biệt, ...

4. Chứng minh đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α)

Cách 1. Chứng minh đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) .

Cách 2. Chứng minh d nằm trong một trong hai mặt phẳng vuông góc và d vuông góc với giao tuyến $\Rightarrow d$ vuông góc với mp còn lại.

Cách 3. Chứng minh d là giao tuyến của hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt thứ 3.

Cách 4. Chứng minh đường thẳng d song song với a mà $a \perp (\alpha)$.

Cách 5. Đường thẳng nào vuông góc với một trong hai mặt phẳng song song thì cũng vuông góc với mặt phẳng còn lại.

Cách 6. Chứng minh d là trục của tam giác ABC nằm trong (α) .

5. Chứng minh hai đường thẳng d và d' vuông góc:

Cách 1. Chứng minh $d \perp (\alpha)$ và $d' \subset (\alpha)$.

Cách 2. Sử dụng định lý 3 đường vuông góc.

Cách 3. Chứng tỏ góc giữa d , d' bằng 90° .

6. Chứng minh hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc:

Cách 1. Chứng minh $(\alpha) \supset d$ và $d \perp (\beta)$.

Cách 2. Chứng tỏ góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) bằng 90° .

Cách 3. Chứng minh $a \parallel (\alpha)$ mà $(\beta) \perp a$

Cách 4. Chứng minh $(\alpha) \parallel (P)$ mà $(\beta) \perp (P)$.

B – CÔNG THỨC CƠ BẢN

1. Tam giác

a. Tam giác thường:

$$\textcircled{1} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

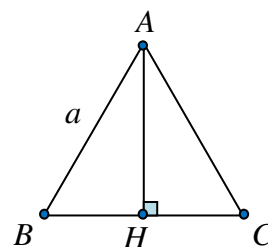
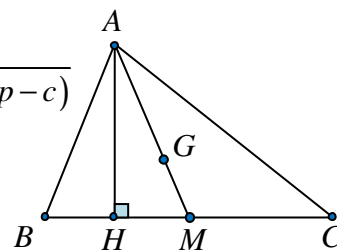
$$\textcircled{2} S_{\Delta ABM} = S_{\Delta ACM} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABC}$$

$$\textcircled{3} AG = \frac{2}{3} AM \quad (G \text{ là trọng tâm})$$

$$\textcircled{4} \text{Độ dài trung tuyến: } AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$$

$$\textcircled{5} \text{Định lí hàm số cosin: } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$$

$$\textcircled{6} \text{Định lí hàm số sin: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



b. Tam giác đều ABC cạnh a:

$$\textcircled{1} S_{\Delta ABC} = \frac{(cạnh)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \quad \textcircled{2} AH = \frac{cạnh \times \sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \textcircled{3} AG = \frac{2}{3} AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

c. Tam giác ABC vuông tại A:

$$\textcircled{1} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} AH \cdot BC$$

$$\textcircled{2} BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$\textcircled{3} BA^2 = BH \cdot BC$$

$$\textcircled{4} CA^2 = CH \cdot CB$$

$$\textcircled{5} HA^2 = HB \cdot HC$$

$$\textcircled{6} AH \cdot BC = AB \cdot AC$$

$$\textcircled{7} \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

$$\textcircled{8} \frac{HB}{HC} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

$$\textcircled{9} AM = \frac{1}{2} BC$$

$$\textcircled{10} \sin B = \frac{AC}{BC}$$

$$\textcircled{11} \cos B = \frac{AB}{BC}$$

$$\textcircled{12} \tan B = \frac{AC}{AB}$$

$$\textcircled{13} \cot B = \frac{AB}{AC}$$

d. Tam giác ABC vuông cân tại A

$$\textcircled{1} BC = AB\sqrt{2} = AC\sqrt{2} \quad \textcircled{2} AB = AC = \frac{BC}{\sqrt{2}}$$

2. Tứ giác

a. Hình bình hành:

$$\text{Diện tích: } S_{ABCD} = BC \cdot AH = AB \cdot AD \cdot \sin A$$

b. Hình thoi:

$$\bullet \text{ Diện tích: } S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = AB \cdot AD \cdot \sin A$$

$$\bullet \text{ Đặc biệt: khi } \widehat{ABC} = 60^\circ \text{ hoặc } \widehat{BAC} = 120^\circ \text{ thì các tam giác } ABC, ACD \text{ đều.}$$

c. Hình chữ nhật:

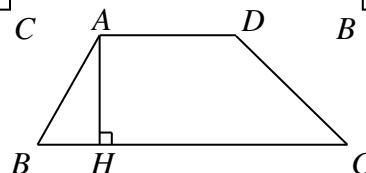
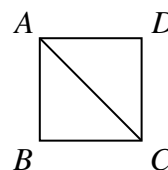
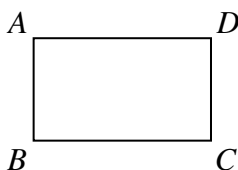
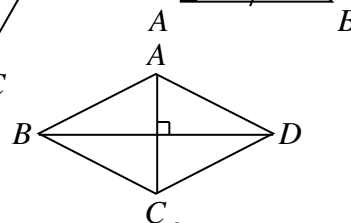
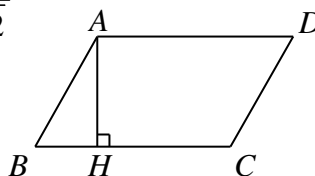
$$S_{ABCD} = AB \cdot AD$$

d. Hình vuông:

$$\bullet \text{ Diện tích: } S_{ABCD} = AB^2$$

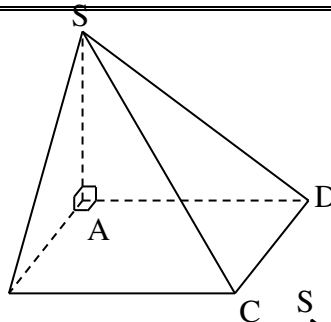
$$\bullet \text{ Đường chéo: } AC = AB\sqrt{2}$$

$$\text{e. Hình thang: } S_{ABCD} = \frac{(AD + BC) \cdot AH}{2}$$



C – MỘT SỐ HÌNH THƯỜNG GẶP
HÌNH 1. Hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình chữ nhật (hoặc hình vuông) và SA vuông góc với đáy
H1.1 - Đáy, đường cao, cạnh đáy, cạnh bên, mặt bên của hình chóp

1. **Đáy:** là hình vuông hoặc hình chữ nhật
2. **Đường cao:** SA
3. **Cạnh bên:** SA, SB, SC, SD
4. **Cạnh đáy:** AB, BC, CD, DA
5. **Mặt bên:** $\triangle SAB$ vuông tại A. $\triangle SBC$ vuông tại B.
 $\triangle SCD$ vuông tại D. $\triangle SAD$ vuông tại A. B


H1.2 - Góc giữa cạnh bên và đáy

1. **Góc giữa cạnh bên SB và mặt đáy (ABCD) bằng α :**

Ta có: $SA \perp (ABCD)$ (gt)

$\Rightarrow$ Hình chiếu của SB lên (ABCD) là AB

$$\Rightarrow (\widehat{SB, (ABCD)}) = (\widehat{SB, AB}) = \widehat{SBA} = \alpha$$

2. **Góc giữa cạnh bên SD và mặt đáy (ABCD) bằng α :**

Ta có: $SA \perp (ABCD)$ (gt)

$\Rightarrow$ Hình chiếu của SD lên (ABCD) là AD

$$\Rightarrow (\widehat{SD, (ABCD)}) = (\widehat{SD, AD}) = \widehat{SDA} = \alpha$$

3. **Góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy (ABCD) bằng α :**

Ta có: $SA \perp (ABCD)$ (gt)

$\Rightarrow$ Hình chiếu của SC lên (ABCD) là AC

$$\Rightarrow (\widehat{SC, (ABCD)}) = (\widehat{SC, AC}) = \widehat{SCA} = \alpha$$

H1.3 - Góc giữa cạnh bên và mặt bên:

1. **Góc giữa cạnh bên SB và mặt bên (SAD) bằng α :**

Ta có: $AB \perp (SAD) \Rightarrow$ Hình chiếu của SB lên (SAD) là SA

$$\Rightarrow (\widehat{SB, (SAD)}) = (\widehat{SB, SA}) = \widehat{BSA} = \alpha$$

2. **Góc giữa cạnh bên SD và mặt bên (SAB) bằng α :**

Ta có: $AD \perp (SAB)$

$\Rightarrow$ Hình chiếu của SD lên (SAB) là SA

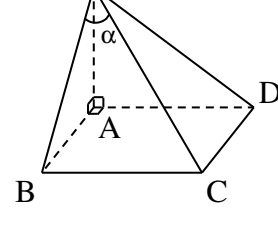
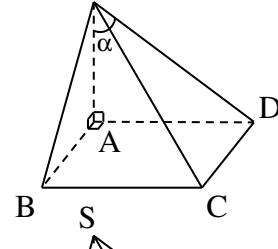
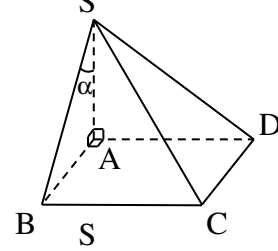
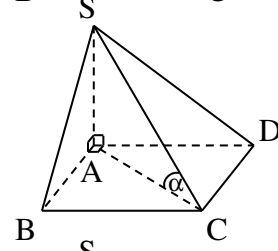
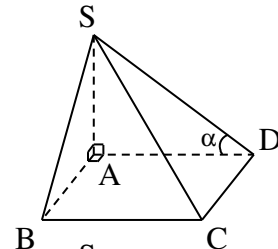
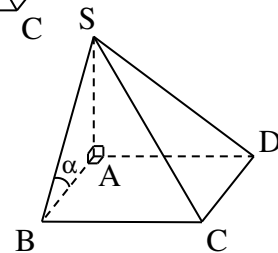
$$\Rightarrow (\widehat{SD, (SAB)}) = (\widehat{SD, SA}) = \widehat{DSA} = \alpha$$

3. **Góc giữa cạnh bên SC và mặt bên (SAB) bằng α :**

Ta có: $BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow$ Hình chiếu của SC lên (SAB) là SB

$$\Rightarrow (\widehat{SC, (SAB)}) = (\widehat{SC, SB}) = \widehat{BSC} = \alpha$$



4. Góc giữa cạnh bên SC và mặt bên (SAD) bằng α :

Ta có: $DC \perp (SAD) \Rightarrow$ Hình chiếu của SC lên (SAD) là SD
 $\Rightarrow (\widehat{SC, (SAD)}) = (\widehat{SC, SD}) = \widehat{DSC} = \alpha$

H1.4 - Góc giữa mặt bên và mặt đáy:

1. Góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy $(ABCD)$ bằng α :

Ta có: $BC \perp AB$ tại B (?), $BC \perp SB$ tại B (?)
 $(SBC) \cap (ABCD) = BC$
 $\Rightarrow (\widehat{(SBC), (ABCD)}) = (\widehat{AB, SB}) = \widehat{SBA} = \alpha$

2. Góc giữa mặt bên (SCD) và mặt đáy $(ABCD)$ bằng α :

Ta có: $CD \perp AD$ tại D (?), $CD \perp SD$ tại D (?)
 $(SCD) \cap (ABCD) = CD$
 $\Rightarrow (\widehat{(SCD), (ABCD)}) = (\widehat{AD, SD}) = \widehat{SDA} = \alpha$

3. Góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt đáy $(ABCD)$ bằng α :

❖ **Đáy $ABCD$ là hình chữ nhật:**

Trong $(ABCD)$, vẽ $AH \perp BD$ tại $H \Rightarrow BD \perp SH$ (?)
 $\Rightarrow (\widehat{(SBD), (ABCD)}) = (\widehat{AH, SH}) = \widehat{SHA} = \alpha$

⚠ **Chú ý:** Nếu $AB < AD$ thì điểm H ở gần B hơn
 Nếu $AB > AD$ thì điểm H ở gần D hơn

❖ **Đáy $ABCD$ là hình vuông:**

Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow AO \perp BD$ (?)
 $\Rightarrow BD \perp SO$ (?)
 $\Rightarrow (\widehat{(SBD), (ABCD)}) = (\widehat{SO, AO}) = \widehat{SOA} = \alpha$

H1.5 - Khoảng cách "điểm - mặt"

1. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD)

Trong $mp(SAD)$, vẽ $AH \perp SD$ tại H
 $\Rightarrow AH \perp (SCD)$ (?)
 $\Rightarrow d(A, (SCD)) = AH$

2. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD)

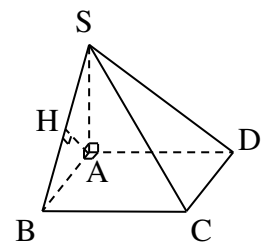
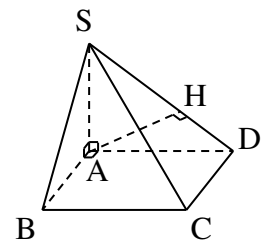
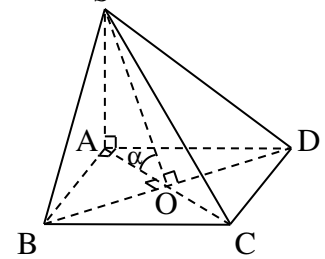
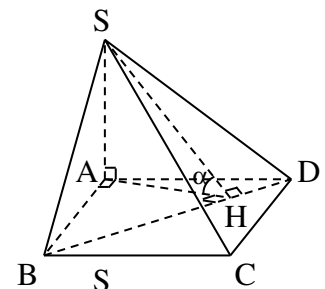
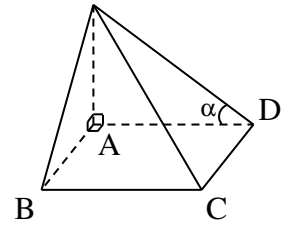
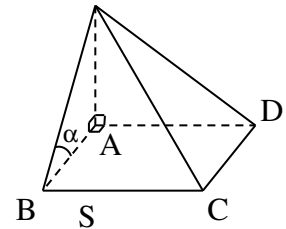
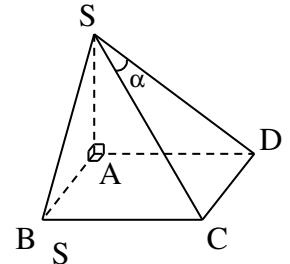
Vì $AB \parallel (SCD)$ (?) nên $d(B, (SCD)) = d(A, (SCD))$ (xem dạng 1)

3. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC)

Trong $mp(SAB)$, vẽ $AH \perp SB$ tại H
 $\Rightarrow AH \perp (SBC)$ (?)
 $\Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$

4. Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC)

Vì $AD \parallel (SBC)$ (?) nên $d(D, (SBC)) = d(A, (SBC))$ (xem dạng 3)



5. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD)

❖ Đáy ABCD là hình chữ nhật:

- Trong (ABCD), vẽ $AI \perp BD$ tại I

$$\Rightarrow BD \perp (SAI) (?)$$

- Trong (SAI), vẽ $AH \perp SI$ tại H

$$\Rightarrow AH \perp (SBD) (?)$$

$$\Rightarrow d(A, (SBD)) = AH$$

⚡ **Chú ý:** Nếu $AB < AD$ thì điểm I ở gần B hơn
Nếu $AB > AD$ thì điểm I ở gần D hơn

❖ Đáy ABCD là hình vuông:

- Gọi $O = AC \cap BD$

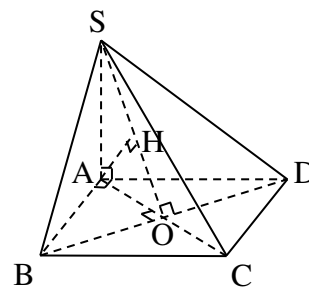
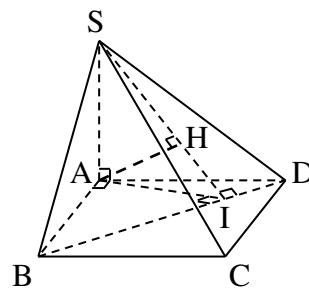
$$\Rightarrow AO \perp BD (?) \Rightarrow BD \perp (SAO) (?)$$

- Trong (SAO), vẽ $AH \perp SO$ tại H

$$\Rightarrow AH \perp (SBD) (?) \Rightarrow d(A, (SBD)) = AH$$

6. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD)

Vì O là trung điểm của AC nên $d(C, (SBD)) = d(A, (SBD))$



HÌNH 2. Hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B và SA vuông góc với đáy

H2.1 - Đáy, đường cao, cạnh đáy, cạnh bên, mặt bên của hình chóp

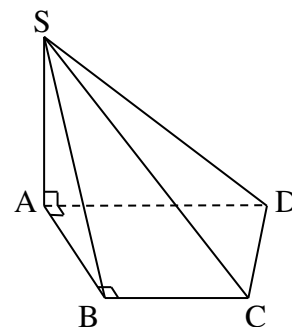
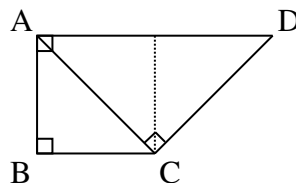
1. Đáy: Hình thang ABCD vuông tại A và B

2. Đường cao: SA

3. Cạnh bên: SA, SB, SC, SD

4. Cạnh đáy: AB, BC, CD, DA

5. Mặt bên: $\triangle SAB$ vuông tại A.
 $\triangle SBC$ vuông tại B.
 $\triangle SAD$ vuông tại A.



⚡ **Chú ý:** Nếu $AB = BC$ và $AD = 2BC$ thì $AC \perp CD \Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow \triangle SCD$ vuông tại C

H2.2 - Góc giữa cạnh bên SB và đáy

1. Góc giữa cạnh bên SB và mặt đáy (ABCD):

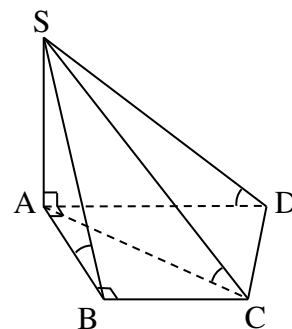
Ta có: $SA \perp ABCD$ (gt) $\Rightarrow$ Hình chiếu của SB lên (ABCD) là AB

$$\Rightarrow (\widehat{SB, (ABCD)}) = (\widehat{SB, AB}) = \widehat{SBA}$$

2. Góc giữa cạnh bên SD và mặt đáy (ABCD):

Ta có: $SA \perp ABCD$ (gt) $\Rightarrow$ Hình chiếu của SD lên (ABCD) là AD $\Rightarrow (\widehat{SD, (ABCD)}) = (\widehat{SD, AD}) = \widehat{SDA}$

3. Góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy (ABCD):

Ta có: $SA \perp ABCD$ (gt) $\Rightarrow$ Hình chiếu của SC lên (ABCD) là AC $\Rightarrow (\widehat{SC, (ABCD)}) = (\widehat{SC, AC}) = \widehat{SCA}$ 

H2.3 - Góc giữa mặt bên và mặt đáy:

1. Góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy (ABCD):

Ta có: $BC \perp AB$ tại B (?)

$BC \perp SB$ tại B (?)

$(SBC) \cap (ABCD) = BC$

$$\Rightarrow (\widehat{(SBC), (ABCD)}) = (\widehat{AB, SB}) = \widehat{SBA}$$

2. Góc giữa mặt bên (SCD) và mặt đáy (ABCD):

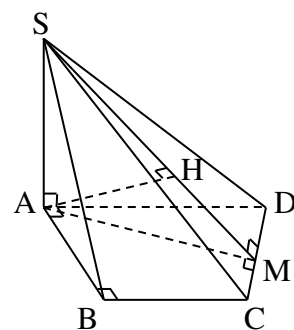
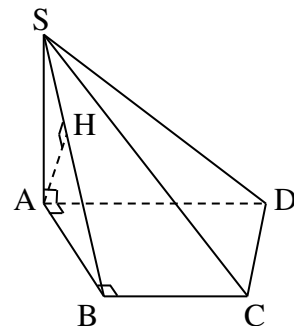
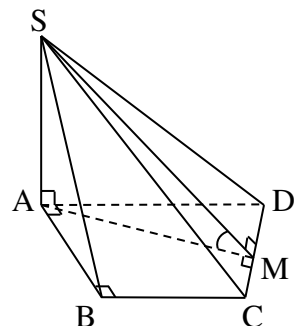
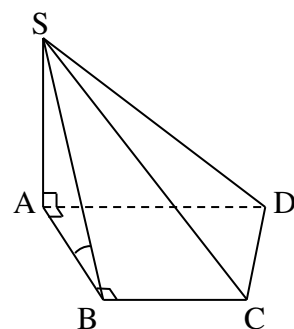
Trong $(ABCD)$, vẽ $AM \perp CD$ tại M

$\Rightarrow SM \perp CD$ tại M (?)

Mà $(SCD) \cap (ABCD) = CD$

$$\Rightarrow (\widehat{(SCD), (ABCD)}) = (\widehat{AM, SM}) = \widehat{SMA} = \alpha$$

➤ **Chú ý:** Nếu $AB = BC$ và $AD = 2BC$ thì $AC \perp CD$. Do đó $M \equiv C$.



H2.4 - Khoảng cách "điểm - mặt"

1. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC)

Trong $mp(SAB)$, vẽ $AH \perp SB$ tại H

$\Rightarrow AH \perp (SBC)$ (?)

$$\Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$$

2. Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC)

Vì $AD \parallel (SBC)$ (?) nên $d(D, (SBC)) = d(A, (SBC))$ (xem dạng 3)

3. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD)

• Trong $(ABCD)$, vẽ $AM \perp CD$ tại M

$\Rightarrow CD \perp (SAM)$ (?)

• Trong (SAM) , vẽ $AH \perp SM$ tại H

$\Rightarrow AH \perp (SCD)$ (?)

$$\Rightarrow d(A, (SCD)) = AH$$

➤ **Chú ý:** Nếu $AB = BC$ và $AD = 2BC$ thì $AC \perp CD$. Do đó $M \equiv C$.

HÌNH 3. Hình chóp tứ giác đều S.ABCD

H3.1 - Đáy, đường cao, cạnh đáy, cạnh bên, mặt bên của hình chóp

1. Đáy: $ABCD$ là hình vuông

2. Đường cao: SO

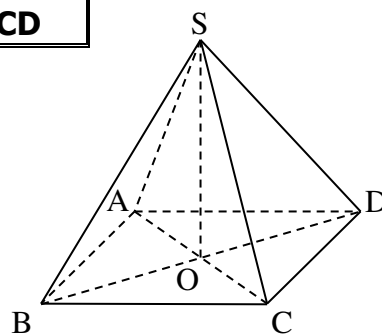
3. Cạnh bên: $SA = SB = SC = SD$

4. Cạnh đáy: $AB = BC = CD = DA$

5. Mặt bên: $\Delta SAB, \Delta SBC, \Delta SCD, \Delta SAD$

là các tam giác cân tại S và bằng nhau.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$



H3.2 - Góc giữa cạnh bên và đáy**1. Góc giữa cạnh bên SA và mặt đáy (ABCD):**Ta có: $SO \perp (ABCD)$ (?) $\Rightarrow$ Hình chiếu của SA lên (ABCD) là AO

$$\Rightarrow (\widehat{SA, (ABCD)}) = (\widehat{SA, AO}) = \widehat{SAO}$$

2. Góc giữa cạnh bên SB và mặt đáy (ABCD):

$$\text{Tương tự } (\widehat{SB, (ABCD)}) = (\widehat{SB, BO}) = \widehat{SBO}$$

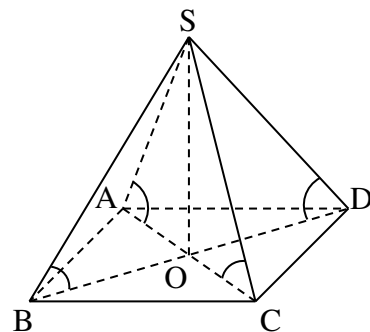
3. Góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy (ABCD):

$$\text{Tương tự } (\widehat{SC, (ABCD)}) = (\widehat{SC, CO}) = \widehat{SCO}$$

4. Góc giữa cạnh bên SD và mặt đáy (ABCD):

$$\text{Tương tự } (\widehat{SD, (ABCD)}) = (\widehat{SD, DO}) = \widehat{SDO}$$

🔗 **Chú ý:** $\boxed{\widehat{SAO} = \widehat{SBO} = \widehat{SCO} = \widehat{SDO}} \rightarrow \text{“Góc giữa các cạnh bên với mặt đáy bằng nhau”}$

**H3.3 - Góc giữa mặt bên và mặt đáy:****1. Góc giữa mặt bên (SAB) và mặt đáy (ABCD):**Ta có: $OM \perp AB$ tại M (?) $\Rightarrow AB \perp SM$ tại M (?)Mà $(SAB) \cap (ABCD) = AB$

$$\Rightarrow (\widehat{(SAB), (ABCD)}) = (\widehat{OM, SM}) = \widehat{SMO}$$

2. Góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy (ABCD):Ta có: $ON \perp BC$ tại N (?) $\Rightarrow BC \perp SN$ tại N (?)Mà $(SBC) \cap (ABCD) = BC$

$$\Rightarrow (\widehat{(SBC), (ABCD)}) = (\widehat{ON, SN}) = \widehat{SNO}$$

3. Góc giữa mặt bên (SCD) và mặt đáy (ABCD):Ta có: $OP \perp CD$ tại P (?) $\Rightarrow CD \perp SP$ tại P (?)Mà $(SCD) \cap (ABCD) = CD$

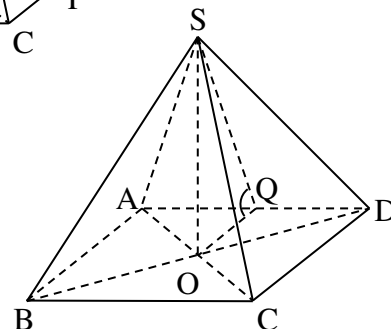
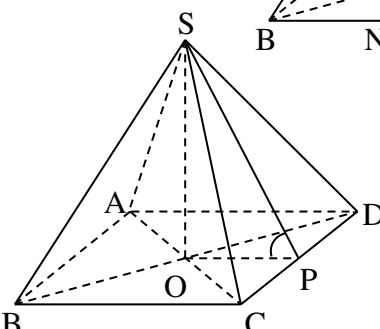
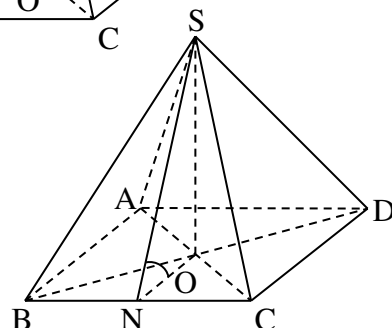
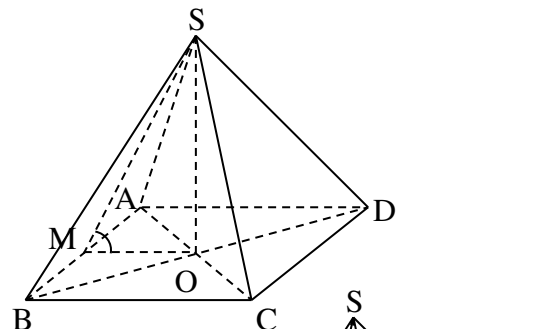
$$\Rightarrow (\widehat{(SCD), (ABCD)}) = (\widehat{OP, SP}) = \widehat{SPO}$$

4. Góc giữa mặt bên (SAD) và mặt đáy (ABCD):Ta có: $OQ \perp AD$ tại Q (?) $\Rightarrow AD \perp SQ$ tại Q (?)Mà $(SAD) \cap (ABCD) = AD$

$$\Rightarrow (\widehat{(SAD), (ABCD)}) = (\widehat{OQ, SQ}) = \widehat{SQO}$$

🔗 **Chú ý:** $\boxed{\widehat{SMO} = \widehat{SNO} = \widehat{SPO} = \widehat{SQO}}$

$\rightarrow \text{“Góc giữa các mặt bên với mặt đáy bằng nhau”}$



H3.4 - Khoảng cách "điểm - mặt"

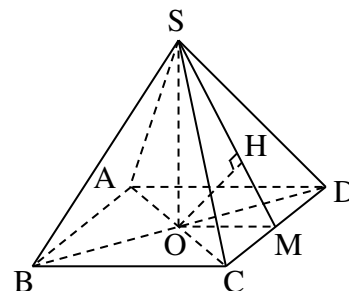
1. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SCD)

Trong $(ABCD)$, vẽ $OM \perp CD$ tại M

$$\Rightarrow CD \perp (SOM) \quad (?)$$

Trong (SOM) , vẽ $OH \perp SM$ tại H

$$\Rightarrow d(O, (SCD)) = OH$$



2. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD)

Vì O là trung điểm của AC nên $d(A, (SCD)) = 2d(O, (SCD))$

3. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD)

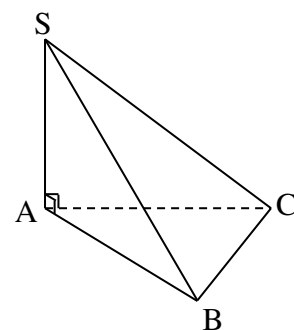
Vì O là trung điểm của BD nên $d(B, (SCD)) = 2d(O, (SCD))$

HÌNH 4. Hình chóp $S.ABC$, SA vuông góc với đáy

H4.1 - Đáy, đường cao, cạnh đáy, cạnh bên, mặt bên của hình chóp

- Đáy: tam giác ABC
- Đường cao: SA
- Cạnh bên: SA, SB, SC
- Cạnh đáy: AB, BC, CA
- Mặt bên: $\triangle SAB$ là tam giác vuông tại A .
 $\triangle SAC$ là tam giác vuông tại A .

Chú ý: Nếu $\triangle ABC$ vuông tại B thì $\triangle SBC$ vuông tại B
Nếu $\triangle ABC$ vuông tại C thì $\triangle SBC$ vuông tại C



H4.2 - Góc giữa cạnh bên và đáy

1. Góc giữa cạnh bên SB và mặt đáy (ABC) :

Ta có: $SA \perp (ABC)$ (gt)

$\Rightarrow$ Hình chiếu của SB lên (ABC) là AB

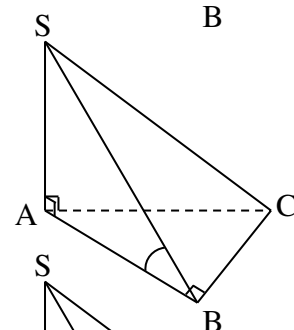
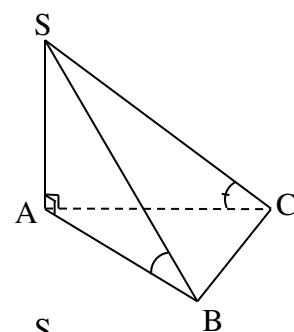
$$\Rightarrow (\widehat{SB, (ABC)}) = (\widehat{SB, AB}) = \widehat{SBA}$$

2. Góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy (ABC) :

Ta có: $SA \perp (ABC)$ (gt)

$\Rightarrow$ Hình chiếu của SC lên (ABC) là AC

$$\Rightarrow (\widehat{SC, (ABC)}) = (\widehat{SC, AC}) = \widehat{SCA}$$



H4.3 - Góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy (ABC) :

1. Tam giác ABC vuông tại B

Ta có: $BC \perp AB$ tại B (?)

$BC \perp SB$ tại B (?)

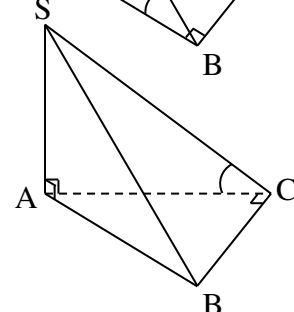
$$(SBC) \cap (ABC) = BC \Rightarrow (\widehat{(SBC), (ABC)}) = (\widehat{AB, SB}) = \widehat{SBA}$$

2. Tam giác ABC vuông tại C

Ta có: $BC \perp AC$ tại C (?)

$BC \perp SC$ tại C (?)

$$(SBC) \cap (ABC) = BC \Rightarrow (\widehat{(SBC), (ABC)}) = (\widehat{AC, SC}) = \widehat{SCA}$$



3. Tam giác ABC vuông tại A

Trong (ABC) , vẽ $AM \perp BC$ tại M (?)

$\Rightarrow BC \perp SM$ tại M (?)

$$(SBC) \cap (ABC) = BC \Rightarrow ((SBC), (ABC)) = (\widehat{AM, SM}) = \widehat{SMA}$$

✎ **Chú ý:**

- ♦ M không là trung điểm BC
- ♦ Nếu $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$ thì M ở trên đoạn BC và gần B hơn
- ♦ Nếu $\widehat{ABC} < \widehat{ACB}$ thì M ở trên đoạn BC và gần C hơn
- ♦ Nếu $AB > AC$ thì M ở trên đoạn BC và gần C hơn
- ♦ Nếu $AB < AC$ thì M ở trên đoạn BC và gần B hơn

4. Tam giác ABC cân tại A (hoặc đều)

Gọi M là trung điểm BC

$\Rightarrow BC \perp AM$ tại M (?)

$\Rightarrow BC \perp SM$ tại M (?)

$$\text{Mà } (SBC) \cap (ABC) = SM \Rightarrow ((SBC), (ABC)) = (\widehat{AM, SM}) = \widehat{SMA}$$

5. Tam giác ABC có $\widehat{ABC} > 90^\circ$

Trong (ABC) , vẽ $AM \perp BC$ tại M (?)

$\Rightarrow BC \perp SM$ tại M (?)

$$(SBC) \cap (ABC) = BC$$

$$\Rightarrow ((SBC), (ABC)) = (\widehat{AM, SM}) = \widehat{SMA}$$

✎ **Chú ý:** M nằm ngoài đoạn BC và ở về phía B

6. Tam giác ABC có $\widehat{ACB} > 90^\circ$

Trong (ABC) , vẽ $AM \perp BC$ tại M (?)

$\Rightarrow BC \perp SM$ tại M (?)

$$(SBC) \cap (ABC) = BC$$

$$\Rightarrow ((SBC), (ABC)) = (\widehat{AM, SM}) = \widehat{SMA}$$

✎ **Chú ý:** M nằm ngoài đoạn BC và ở về phía C

H4.4 - Khoảng cách "điểm - mặt"**1. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC)**

Trong (ABC) , vẽ $BH \perp AC$ tại H

$\Rightarrow BH \perp (SAC)$ (?) $\Rightarrow d(B, (SAC)) = BH$

✎ **Chú ý:**

- ♦ Nếu $\triangle ABC$ vuông tại A thì $H \equiv A$ và khi đó $AB = d(B, (SAC))$
- ♦ Nếu $\triangle ABC$ vuông tại C thì $H \equiv C$ và khi đó $BC = d(B, (SAC))$

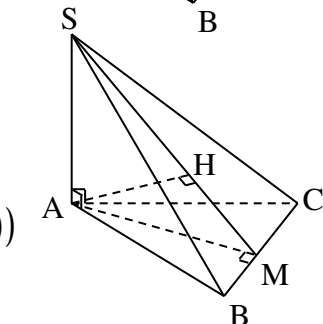
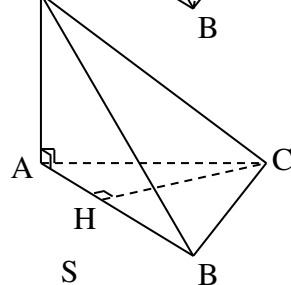
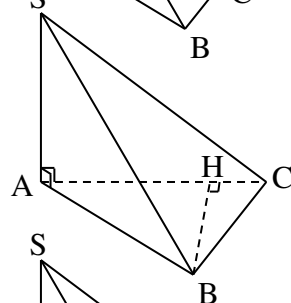
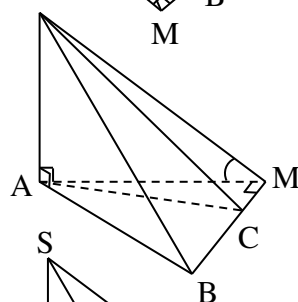
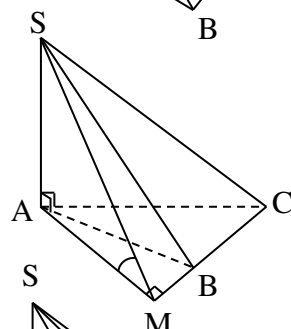
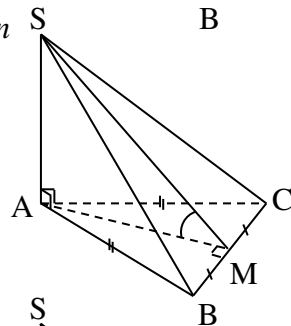
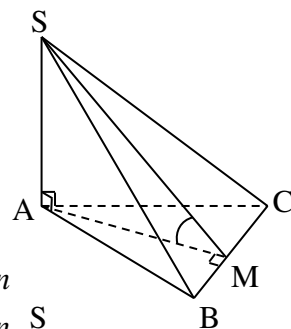
2. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB)

Trong (ABC) , vẽ $CH \perp AB$ tại H

$\Rightarrow CH \perp (SAB)$ (?) $\Rightarrow d(C, (SAB)) = CH$

✎ **Chú ý:**

- ♦ Nếu $\triangle ABC$ vuông tại A thì $H \equiv A$ và khi đó $CA = d(C, (SAB))$
- ♦ Nếu $\triangle ABC$ vuông tại B thì $H \equiv B$ và khi đó $CB = d(C, (SAB))$



3. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC)

- Trong (ABC), vẽ $AM \perp BC$ tại M (?) $\Rightarrow BC \perp SM$ tại M (?)
- Trong (SAM), vẽ $AH \perp SM$ tại H $\Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$

🔗 **Chú ý:** Tùy đặc điểm của ΔABC để các định đúng vị trí của điểm M trên đường thẳng BC.

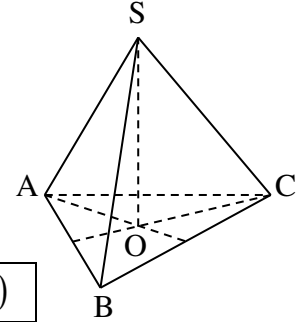
HÌNH 5. Hình chóp tam giác đều S.ABC

H5.1 - Đáy, đường cao, cạnh đáy, cạnh bên, mặt bên của hình chóp

1. Đáy: Tam giác ABC đều
2. Đường cao: SO
3. Cạnh bên: $SA = SB = SC$
4. Cạnh đáy: $AB = BC = CA$
5. Mặt bên: $\Delta SAB, \Delta SBC, \Delta SCA$
là các tam giác cân tại S và bằng nhau.

Gọi O là trọng tâm của tam giác ABC $\Rightarrow SO \perp (ABC)$

🔗 **Chú ý:** Tứ diện đều S.ABC là hình chóp có đáy và các mặt bên là những tam giác đều bằng nhau.



H5.2 - Góc giữa cạnh bên và đáy

1. Góc giữa cạnh bên SA và mặt đáy (ABC):

Ta có: $SO \perp (ABC)$ (?)
 $\Rightarrow$ Hình chiếu của SA lên (ABC) là AO
 $\Rightarrow (\widehat{SA, (ABC)}) = (\widehat{SA, AO}) = \widehat{SAO}$

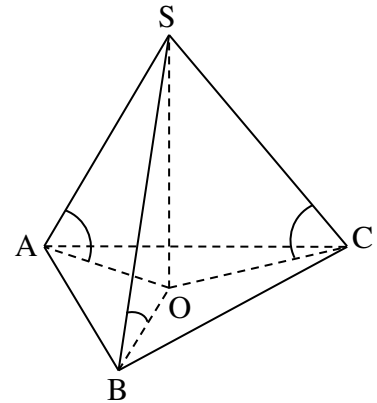
2. Góc giữa cạnh bên SB và mặt đáy (ABC):

Tương tự $(\widehat{SB, (ABC)}) = (\widehat{SB, BO}) = \widehat{SBO}$

3. Góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy (ABC):

Tương tự $(\widehat{SC, (ABC)}) = (\widehat{SC, CO}) = \widehat{SCO}$

🔗 **Chú ý:** $\boxed{\widehat{SAO} = \widehat{SBO} = \widehat{SCO}}$ $\rightarrow$ “Góc giữa các cạnh bên với mặt đáy bằng nhau”



H5.3 - Góc giữa mặt bên và mặt đáy:

1. Góc giữa mặt bên (SAB) và mặt đáy (ABC):

Ta có: $OM \perp AB$ tại M (?) $\Rightarrow AB \perp SM$ tại M (?)
 Mà $(SAB) \cap (ABC) = AB \Rightarrow (\widehat{(SAB), (ABC)}) = (\widehat{OM, SM}) = \widehat{SMO}$

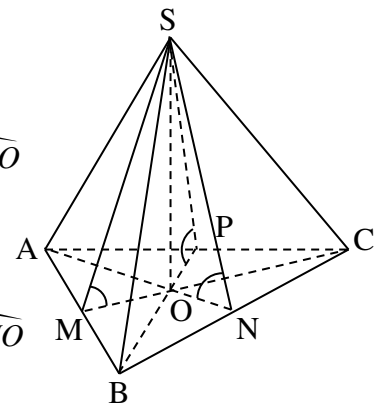
2. Góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy (ABC):

Ta có: $ON \perp BC$ tại N (?) $\Rightarrow BC \perp SN$ tại N (?)
 Mà $(SBC) \cap (ABC) = BC \Rightarrow (\widehat{(SBC), (ABC)}) = (\widehat{ON, SN}) = \widehat{SNO}$

3. Góc giữa mặt bên (SAC) và mặt đáy (ABC):

Ta có: $OP \perp AC$ tại P (?)
 $\Rightarrow AC \perp SP$ tại P (?)
 Mà $(SAC) \cap (ABC) = AC \Rightarrow (\widehat{(SAC), (ABC)}) = (\widehat{OP, SP}) = \widehat{SPO}$

🔗 **Chú ý:** $\boxed{\widehat{SMO} = \widehat{SNO} = \widehat{SPO}}$ $\rightarrow$ “Góc giữa các mặt bên với mặt đáy bằng nhau”



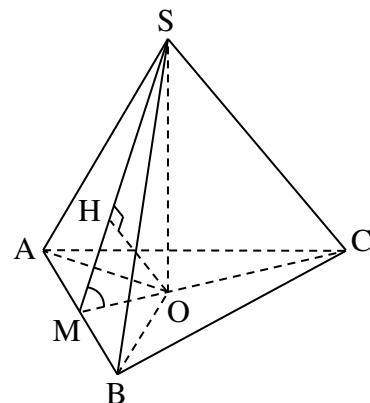
H5.4 - Khoảng cách “điểm - mặt”**1. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB)**

- Trong (ABC) , vẽ $OM \perp AB$ tại $M \Rightarrow AB \perp (SOM)$ (?)
- Trong (SOM) , vẽ $OH \perp SM$ tại $H \Rightarrow d(O, (SAB)) = OH$

2. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB)

Vì O là trọng tâm của ΔABC nên $\frac{MC}{MO} = 3$

$$\Rightarrow d(C, (SAB)) = \frac{MC}{MO} \cdot d(O, (SAB)) = 3 d(O, (SAB))$$



**HÌNH 6a. Hình chóp S.ABC
có một mặt bên (SAB) vuông góc với đáy (ABCD)**

“Luôn luôn vẽ SH vuông góc với giao tuyến”

H6a.1 - Góc giữa cạnh bên và mặt đáy

- Vẽ $SH \perp AB$ tại H
 Vì $(SAB) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$

➤ **Chú ý:** Tùy đặc điểm của tam giác SAB để xác định đúng vị trí của điểm H trên đường thẳng AB .

1. Góc giữa cạnh bên SA và mặt đáy (ABC) :

Ta có: $SH \perp (ABC)$ (?)

$\Rightarrow$ Hình chiếu của SA lên (ABC) là AH

$$\Rightarrow (\widehat{SA, (ABC)}) = (\widehat{SA, AH}) = \widehat{SAH}$$

2. Góc giữa cạnh bên SB và mặt đáy (ABC) :

Ta có: $SH \perp (ABC)$ (?)

$\Rightarrow$ Hình chiếu của SB lên (ABC) là BH

$$\Rightarrow (\widehat{SB, (ABC)}) = (\widehat{SB, BH}) = \widehat{SBH}$$

3. Góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy (ABC) :

Ta có: $SH \perp (ABC)$ (?)

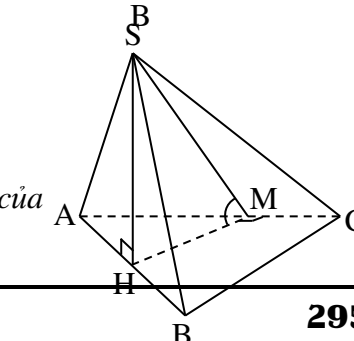
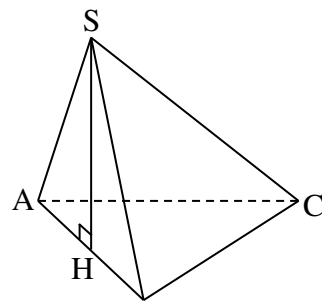
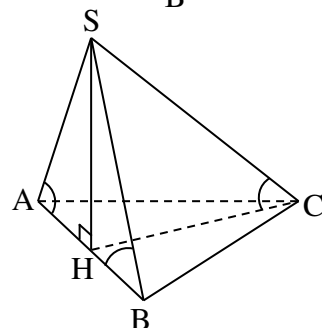
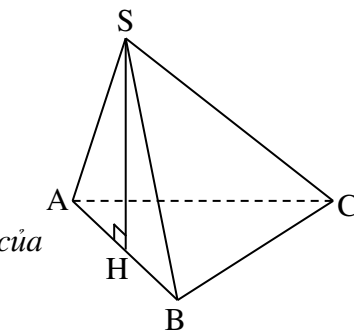
$\Rightarrow$ Hình chiếu của SC lên (ABC) là CH

$$\Rightarrow (\widehat{SC, (ABC)}) = (\widehat{SC, CH}) = \widehat{SCH}$$

H6a.2 - Góc giữa mặt bên và mặt đáy:

- Vẽ $SH \perp AB$ tại H
- Vì $(SAB) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$

➤ **Chú ý:** Tùy đặc điểm của tam giác SAB để xác định đúng vị trí của điểm H trên đường thẳng AB .



1. Góc giữa mặt bên (SAB) và mặt đáy (ABC):

Vì $(SAB) \perp (ABC)$ nên $(\widehat{(SAB), (ABC)}) = 90^\circ$

2. Góc giữa mặt bên (SAC) và mặt đáy (ABC):

Vẽ $HM \perp AC$ tại M

Ta có: $\left. \begin{array}{l} HM \perp AC \\ SH \perp AC \end{array} \right\} \Rightarrow AC \perp (SHM), \text{ mà } SM \subset (SHM) \Rightarrow SM \perp AC$

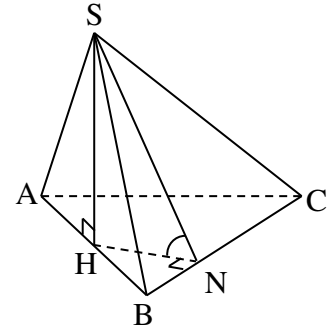
$\Rightarrow (\widehat{(SBC), (ABC)}) = (\widehat{HM, SM}) = \widehat{SMH}$

3. Góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy (ABC):

Vẽ $HN \perp BC$ tại N

Ta có: $\left. \begin{array}{l} HN \perp BC \\ SH \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SHN),$

mà $SN \subset (SHN) \Rightarrow SN \perp AB \Rightarrow (\widehat{(SBC), (ABC)}) = (\widehat{HN, SN}) = \widehat{SNH}$



HÌNH 6b. Hình chóp S.ABCD có một mặt bên (SAB) vuông góc với đáy (ABCD) và ABCD là hình chữ nhật hoặc hình vuông

“luôn luôn vẽ SH vuông góc với giao tuyến”

H6b.1 - Góc giữa cạnh bên và mặt đáy

- Vẽ $SH \perp AB$ tại H
- Vì $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$

Chú ý: Tùy đặc điểm của tam giác SAB để xác định đúng vị trí của điểm H trên đường thẳng AB.

1. Góc giữa cạnh bên SA và mặt đáy (ABCD):

Ta có: $SH \perp (ABCD)$ (?)

$\Rightarrow$ Hình chiếu của SA lên (ABCD) là AH $\Rightarrow (\widehat{SA, (ABCD)}) = (\widehat{SA, AH}) = \widehat{SAH}$

2. Góc giữa cạnh bên SB và mặt đáy (ABCD):

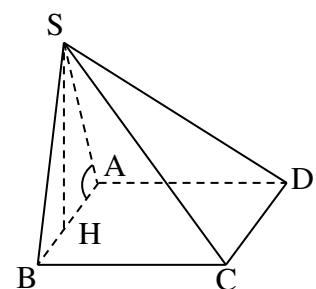
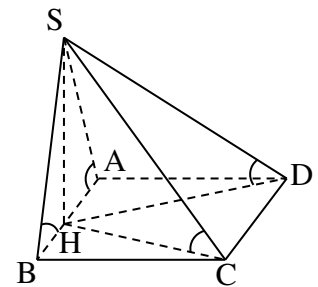
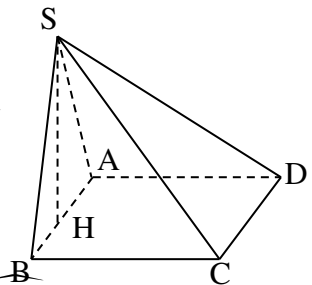
Tương tự $(\widehat{SB, (ABCD)}) = (\widehat{SB, BH}) = \widehat{SBH}$

3. Góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy (ABCD):

Tương tự $(\widehat{SC, (ABCD)}) = (\widehat{SC, CH}) = \widehat{SCH}$

4. Góc giữa cạnh bên SD và mặt đáy (ABCD):

Tương tự $(\widehat{SD, (ABCD)}) = (\widehat{SD, DH}) = \widehat{SDH}$



H6b.2 - Góc giữa mặt bên và mặt đáy:

1. Góc giữa mặt bên (SAD) và mặt đáy (ABCD):

Ta có: $HA \perp AD$ (?)

$SH \perp AD$ (?) $\Rightarrow AD \perp (SHA) \Rightarrow AD \perp SA$

Mà $(SAD) \cap (ABCD) = AD \Rightarrow (\widehat{(SAD), (ABCD)}) = (\widehat{SA, AH}) = \widehat{SAH}$

2. Góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy (ABCD):Ta có: $BA \perp BC$ (?) $SH \perp BC$ (?) $\Rightarrow BC \perp (SHB) \Rightarrow BC \perp SB$ Mà $(SBC) \cap (ABCD) = BC \Rightarrow (\widehat{(SBC), (ABCD)}) = (\widehat{SB, AH}) = \widehat{SBH}$ **3. Góc giữa mặt bên (SCD) và mặt đáy (ABCD):**Trong $(ABCD)$, vẽ $HM \perp CD$ tại M Ta có: $\left. \begin{array}{l} HM \perp CD \\ SH \perp CD \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (SHM) \Rightarrow CD \perp SM$ Mà $(SCD) \cap (ABCD) = CD \Rightarrow (\widehat{(SCD), (ABCD)}) = (\widehat{HM, SM}) = \widehat{SMH}$ **HÌNH 7. Hình lăng trụ****① Lăng trụ có:**

- Hai đáy song song và là 2 đa giác bằng nhau
- Các cạnh bên song song và bằng nhau
- Các mặt bên là các hình bình hành

② Lăng trụ đứng là lăng trụ có các **cạnh bên vuông góc** với đáy**③ Lăng trụ tam giác đều** là lăng trụ **đứng**, có đáy là **tam giác đều****④ Lăng trụ có đáy là tam giác đều** là lăng trụ **xiên**, có đáy là **tam giác đều****⑤ Lăng trụ tứ giác đều** là lăng trụ **đứng**, có đáy là **hình vuông****⑥ Lăng trụ có đáy là tứ giác đều** là lăng trụ **xiên**, có đáy là **hình vuông****⑦ Hình hộp** là hình lăng trụ **xiên**, có đáy là **hình bình hành****⑧ Hình hộp đứng** là lăng trụ **đứng**, có đáy là **hình bình hành****⑨ Hình hộp chữ nhật** là lăng trụ **đứng**, có đáy là **hình chữ nhật****⑩ Hình lập phương** là lăng trụ **đứng**, có đáy và các mặt bên là **hình vuông**.**⑪ Lăng trụ đứng ABC.A'B'C'.**

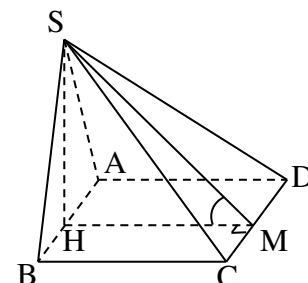
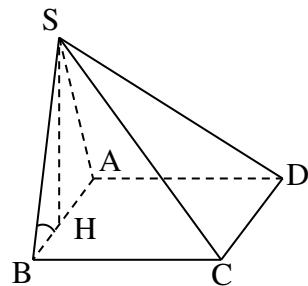
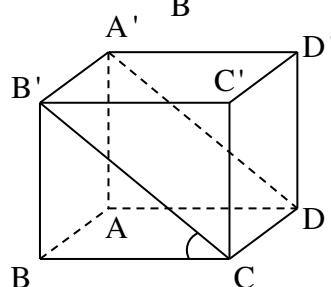
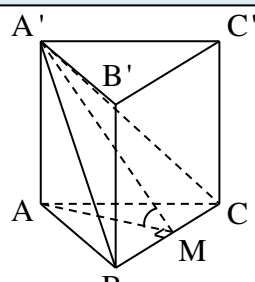
- Góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) :

Vẽ $AM \perp BC$ tại M $\Rightarrow A'M \perp BC$ (?) $\Rightarrow (\widehat{(A'BC), (ABC)}) = \widehat{AMA'}$

- **Chú ý:** Tùy đặc điểm của tam giác ABC để xác định đúng vị trí của điểm M trên đường thẳng BC .

⑫ Hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'.

- Góc giữa $(A'B'CD)$ và $(ABCD)$:

Ta có: $BC \perp CD \Rightarrow CD \perp B'C$ (?) $\Rightarrow (\widehat{(A'B'CD), (ABCD)}) = \widehat{BCB'}$ **Lăng trụ xiên**Cạnh bên
vuông góc đáy**Lăng trụ đứng**Đáy là
đa giác đều**Lăng trụ đều**

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

Chủ đề 4. GIỚI HẠN – LIÊN TỤC

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	C	D	B	D	A	C	B	A	C	B	C	D	B	A	C	D	A	A	B

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
C	B	D	A	A	B	C	C	B	B	A	D	B	C	D	B	A	C	D	C
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
B	B	C	A	B	A	D	A	A	C	D	B	A	D	C	B	A	D	D	B
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
C	B	C	B	C	A	B	C	A	B	A	B	C	A	D	B	B	C	A	A
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
D	D	B	C	A	D	D	B	C	A	B	C	A	A	B	C	A	A	D	D
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
A	D	C	C	D	D	D	B	B	D	C	B	A	D	B	B	D	C	A	A
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
A	B	D	C	C	C	B	D	D	D	C	D	A	B	C	D	B	C	A	C
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
A	B	C	D	B	D	B	C	D	A	C	C	B	A	C	D	A	D	C	B
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
B	B	A	C	D	B	C	D	B	A	C	A	D	D	B	C	C	D	D	A
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200
D	A	D	C	B	A	B	D	B	B	A	C	D	A	B	B	D	B	C	D
201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220
B	A	C	C	D	B	C	B	D	A	C	A	C	B	D	A	C	D	D	A

Chủ đề 5. ĐẠO HÀM

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	A	B	B	A	B	D	A	A	A	A	B	A	A	A	C	B	D	A	B
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
D	C	C	B	D	B	A	B	A	A	B	D	D	D	A	B	A	A	D	B
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
C	A	B	B	A	A	C	B	C	C	B	C	B	A	B	A	C	C	B	A
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
D	A	B	A	C	B	B	D	A	D	B	C	C	B	D	C	D	A	D	C
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
C	A	D	D	D	A	B	A	A	C	A	B	B	B	C	D	C	D	D	A
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
D	C	A	B	C	B	A	8	D	D	A	B	B	D	C	A	C	C	D	A
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
B	D	A	B	A	C	D	D	A	A	C	D	A	A	C	C	C	B	B	A
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
D	A	C	C	C	B	B	D	D	A	D	B	D	B	A	D	C	B	C	A
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
C	B	D	D	B	A	B	D	D	A	B	C	C	A	C	D	B	A	D	B
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200
D	A	B	C	C	A	A	A	C	D	A	A	D	A	B	C	B	A	A	B
201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220
C	B	D	C	B	A	A	D	B	A	B	D	C	D	A	A	A			

Chủ đề 7. VÉCTƠ TRONG KHÔNG GIAN
QUAN HỆ VUÔNG GÓC

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	B	A	A	C	C	D	A	C	D	C	A	D	A	D	B	A	D	C	D
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
B	B	A	C	C	A	D	D	C	D	B	B	C	D	B	C	D	C	C	B
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
B	A	B	B	C	D	C	A	C	C	D	B	A	D	B	B	D	A	D	D
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
C	B	B	D	B	A	A	A	D	C	C	D	A	C	C	C	A	C	B	B
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
D	C	A	D	B	D	B	C	B	C	A	D	C	D	C	B	B	A	B	A
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
D	C	B	B	B	A	C	D	A	A	B	A	C	A	D	A	B	A	D	C
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
B	C	B	D	C	A	D	C	C	C	C	D	C	C	C	C	C	C	D	B
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
A	C	B	D	C	C	C	D	B	C	D	B	C	B	C	A	D	B	C	D
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
C	B	A	D	D	D	C	D	C	B	D	B	A	B	B	D	B	C	D	C
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200
C	D	D	D	C	D	B	A	C	A	A	A	B	A	D	A	D	C	D	C