

Phần 1. Trắc nghiệm

Câu 1. Dãy số nào sau đây có giới hạn khác 0.

- A. $\frac{1}{n}$. B. $\frac{1}{\sqrt{n}}$. C. $\frac{2n+1}{n}$. D. $\frac{\cos n}{\sqrt{n}}$.

Câu 2. Dãy số nào sau đây không có giới hạn ?

- A. $(0,99)^n$. B. $(-1)^n$. C. $(-0,99)^n$. D. $(-0,89)^n$.

Câu 3. Gọi $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n+4}$. Khi đó L bằng

- A. $-\frac{1}{5}$. B. $-\frac{1}{4}$. C. -1 . D. 0 .

Câu 4. Tính giới hạn $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2017}{3n+2018}$.

- A. $I = \frac{2}{3}$. B. $I = \frac{3}{2}$. C. $I = \frac{2017}{2018}$. D. $I = 1$.

Câu 5. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

- A. $\lim u_n = c$ ($u_n = c$ là hằng số). B. $\lim q^n = 0$ ($|q| > 1$).
C. $\lim \frac{1}{n} = 0$. D. $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ ($k > 1$).

Câu 6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+4}}$ bằng

- A. 0 . B. $+\infty$. C. $-\infty$. D. 1 .

Câu 7. Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1})$ có kết quả bằng:

- A. Không có giới hạn. B. 0
C. -1 . D. $+\infty$

Câu 8. Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2n^2+3}$ có kết quả là:

- A. 2 . B. 0 . C. $+\infty$. D. 4 .

Câu 9. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{2n(n+7)(6n+5)}}$

- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{1}{2\sqrt{6}}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $+\infty$.

Câu 10. Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n+2^n}{4^n}$ có kết quả là:

- A. 0 B. $\frac{5}{4}$. C. $\frac{3}{4}$ D. $+\infty$

Câu 11. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}$

- A. $-\frac{1}{2}$. B. 2. C. $\frac{1}{2}$. D. 1.

Câu 12. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+2x-15}{x-3}$ có kết quả là:

- A. $-\infty$ B. 2. C. $\frac{1}{8}$ D. 8

Câu 13. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x^2+2}{x^2-4x+3}$:

- A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. $\frac{3}{2}$. D. 1.

Câu 14. Tính $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{x+\sqrt{2}}{x^2-2}$.

- A. 2. B. 1. C. $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$. D. $\sqrt{2}$.

Câu 15. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x-3}{x-1}$

- A. $+\infty$. B. 2. C. $-\infty$. D. -2.

Câu 16. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-4x-2}{x-1}$

- A. $+\infty$. B. 2. C. $-\infty$. D. -2.

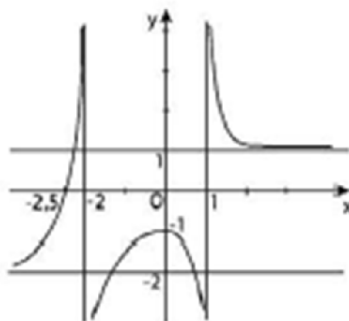
Câu 17. Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4+8x}{x^3+2x^2+x+2}$ là:

- A. $-\frac{21}{5}$. B. $\frac{21}{5}$. C. $-\frac{24}{5}$. D. $\frac{24}{5}$.

Câu 18. Giới hạn nào dưới đây có kết quả là $\frac{1}{2}$?

- A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2}(\sqrt{x^2+1}-x)$. B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1}+x)$.
C. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2}(\sqrt{x^2+1}+x)$. D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.



Các khẳng định sau:

(I) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ (II) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$
 (III) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ (IV) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$

Khẳng định đúng là:

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ là?

- A. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$. B. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$.
 C. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$. D. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Câu 21. Hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 5x + 6}$ liên tục trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-\infty; 3)$. B. $(2; 3)$. C. $(-3; 2)$. D. $(-3; +\infty)$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x-4} + 3 & \text{khi } x \geq 2 \\ \frac{x+1}{x^2-2mx+3m+2} & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

- A. $m = 3$. B. $m = 4$. C. $m = 5$. D. $m = 6$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} a^2 x^2 & \text{khi } x \leq \sqrt{2}, a \in \mathbb{R} \\ (2-a)x^2 & \text{khi } x > \sqrt{2} \end{cases}$. Giá trị của a để $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ là:

- A. 1 và 2. B. 1 và -1. C. -1 và 2. D. 1 và -2.

Câu 24. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x^2 + 3}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ ax + \frac{5}{2} & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Xác định a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

- A. $a = -\frac{5}{2}$. B. $a = \frac{5}{2}$. C. $a = \frac{15}{2}$. D. $a = -\frac{15}{2}$.

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} - m & \text{khi } x \geq 0 \\ mx + 2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

- A. $m = 2$. B. $m = \pm 2$. C. $m = -2$. D. $m = 0$.

Câu 26. Qua phép chiếu song song, tính chất nào không được bảo toàn?

- A. Chéo nhau. B. Đồng qui.
 C. Song song. D. Thẳng hàng.

Câu 27. Cho $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là hình hộp, với K là trung điểm CC_1 . Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A. $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$ B. $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA_1}$
 C. $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$ D. $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$

Câu 28. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ với $M = CD_1 \cap C_1D$. Khi đó:

- A. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$ B. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$
 C. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$ D. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$

Câu 29. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AC, BD lần lượt lấy M, N sao cho $AM = 3MD; BN = 3NC$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AD, BC . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. Các vec tơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng
 B. Các vec tơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng
 C. Các vec tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng
 D. Các vec tơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng

Câu 30. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. Các vec tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng
 B. Các vec tơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không đồng phẳng
 C. Các vec tơ $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng
 D. Các vec tơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng

Câu 31. Trong các mệnh đề dưới đây mệnh đề đúng là?

- A. Cho hai đường thẳng song song, đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng thứ nhất thì cũng vuông góc với đường thẳng thứ hai.
 B. Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
 C. Hai đường thẳng phân biệt vuông góc với nhau thì chúng cắt nhau.
 D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Câu 32. Cho đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{a}$. Vectơ nào sau đây không là vectơ chỉ phương của d ?

- A. $2\vec{a}$ B. $-\frac{1}{2}\vec{a}$ C. $\vec{0}$ D. $k\vec{a} \ (k \neq 0)$

Câu 33. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a và các góc $BAD, DAA', A'AB$ đều bằng 60° . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', CD . Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng MN và $B'C$, giá trị của $\cos \alpha$ bằng:

- A. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ B. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ C. $\frac{3}{\sqrt{5}}$ D. $\frac{3\sqrt{5}}{10}$

Câu 34. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$?

- A. 45° B. 90° C. 120° D. 60°

Câu 35. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM})$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

Phần 2. Tự luận

- Câu 36.** Biết rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 2} - \sqrt{n^2 + 1}) = \frac{a}{b}$ trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*$. Tính giá trị của biểu thức $P = 5a^2 - b^2$
- Câu 37.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 16}{x - 2} = 12$. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{5f(x) - 16} - 4}{x^2 + 2x - 8}$.
- Câu 38.** Chứng minh phương trình: $-m \sin 2x + 2016(\sin x - \cos x) = 0$ (m là tham số) có nghiệm với mọi m thuộc $\mathbb{R}$.
- Câu 39.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết: $\overrightarrow{AN} = -4\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AA'} - 2\overrightarrow{AD}$ ($k \in \mathbb{R}$); $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} - 3\overrightarrow{AD}$. Tìm k để $\overrightarrow{AN} \perp \overrightarrow{AM}$

Nguyễn Bảo Vương

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.B	3.D	4.A	5.B	6.C	7.B	8.B	9.A	10.A
11.C	12.D	13.C	14.C	15.A	16.C	17.C	18.D	19.B	20.A
21.B	22.C	23.D	24.D	25.C	26.A	27.A	28.B	29.A	30.C
31.A	32.C	33.D	34.B	35.A					

Phần 1. Trắc nghiệm

Câu 1. Dãy số nào sau đây có giới hạn khác 0.

- A.** $\frac{1}{n}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{n}}$. **C.** $\frac{2n+1}{n}$. **D.** $\frac{\cos n}{\sqrt{n}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim \left(\frac{2n+1}{n} \right) = 2$.

Câu 2. Dãy số nào sau đây không có giới hạn ?

- A.** $(0,99)^n$. **B.** $(-1)^n$. **C.** $(-0,99)^n$. **D.** $(-0,89)^n$.

Lời giải

Chọn B

Vì $\lim (-1)^n = -1$ nếu n lẻ hoặc $\lim (-1)^n = 1$ nếu n chẵn nên dãy số $u_n = (-1)^n$ không có giới hạn.

Câu 3. Gọi $L = \lim \frac{(-1)^n}{n+4}$. Khi đó L bằng

- A.** $-\frac{1}{5}$. **B.** $-\frac{1}{4}$. **C.** -1 **D.** 0 .

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\left| \frac{(-1)^n}{n+4} \right| \leq \frac{1}{n+4}$ và $\lim \frac{1}{n+4} = 0$ nên $L = \lim \frac{(-1)^n}{n+4} = 0$.

Câu 4. Tính giới hạn $I = \lim \frac{2n+2017}{3n+2018}$.

- A.** $I = \frac{2}{3}$. **B.** $I = \frac{3}{2}$. **C.** $I = \frac{2017}{2018}$. **D.** $I = 1$.

Lời giải

Ta có $I = \lim \frac{2n+2017}{3n+2018} = \lim \frac{2 + \frac{2017}{n}}{3 + \frac{2018}{n}} = \frac{2}{3}$.

Câu 5. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

- A.** $\lim u_n = c$ ($u_n = c$ là hằng số). **B.** $\lim q^n = 0$ ($|q| > 1$).
C. $\lim \frac{1}{n} = 0$. **D.** $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ ($k > 1$).

Lời giải

Theo định nghĩa giới hạn hữu hạn của dãy số (SGK ĐS11-Chương 4) thì $\lim q^n = 0$ ($|q| < 1$).

- Câu 6.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}}$ bằng
- A.** 0. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 1.
- Lời giải**

Chọn C

$$\text{Ta có: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+4}}{(\sqrt{n^2+2})^2-(\sqrt{n^2+4})^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}\right)}{-2} = -\infty.$$

- Câu 7.** Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n}-\sqrt{n+1})$ có kết quả bằng:
- A.** Không có giới hạn. **B.** 0
C. -1. **D.** $+\infty$

Lời giải

Chọn B

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n}-\sqrt{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)} = 0$$

- Câu 8.** Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2n^2+3}$ có kết quả là:
- A.** 2. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2n^2+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{n^3}}}{2+\frac{3}{n^2}} = \frac{0}{2+0} = 0.$$

- Câu 9.** Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{2n(n+7)(6n+5)}}$
- A.** $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{1}{2\sqrt{6}}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\text{Khi đó: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{2n(n+7)(6n+5)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n(n+7)(6n+5)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{12\left(1+\frac{7}{n}\right)\left(6+\frac{5}{n}\right)}} = \frac{1}{6}.$$

- Câu 10.** Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n+2^n}{4^n}$ có kết quả là:
- A.** 0 **B.** $\frac{5}{4}$ **C.** $\frac{3}{4}$ **D.** $+\infty$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 2^n}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{2}{4}\right)^n}{1} = 0$$

Câu 11. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}$

A. $-\frac{1}{2}$.

B. 2.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

Câu 12. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+2x-15}{x-3}$ có kết quả là:

A. $-\infty$

B. 2.

C. $\frac{1}{8}$

D. 8

Lời giải

Chọn D

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+2x-15}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+5)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+5) = 8.$$

Câu 13. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x^2+2}{x^2-4x+3}$:

A. $+\infty$.

B. $-\infty$.

C. $\frac{3}{2}$.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x^2+2}{x^2-4x+3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2-2x-2)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x-2}{x-3} = \frac{3}{2}.$$

Câu 14. Tính $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{x+\sqrt{2}}{x^2-2}$.

A. 2.

B. 1.

C. $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{x+\sqrt{2}}{x^2-2} = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{1}{x-\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Câu 15. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x-3}{x-1}$

A. $+\infty$.

B. 2.

C. $-\infty$.

D. -2.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x-3}{x-1} = +\infty \text{ vì } \lim_{x \rightarrow 1^+} (4x-3) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0, x-1 > 0 \text{ khi } x \rightarrow 1^+.$$

Câu 16. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-4x-2}{x-1}$

A. $+\infty$.

B. 2.

C. $-\infty$.

D. -2.

Chọn C

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-4x-2}{x-1} = -\infty$ vì $\lim_{x \rightarrow 1^+} (-4x-2) = -6$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0$, $x-1 > 0$ khi $x \rightarrow 1^+$.

Câu 17. Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 + 8x}{x^3 + 2x^2 + x + 2}$ là:

A. $-\frac{21}{5}$.

B. $\frac{21}{5}$.

C. $-\frac{24}{5}$.

D. $\frac{24}{5}$.

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 + 8x}{x^3 + 2x^2 + x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{(x+2)(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x^2 - 2x + 4)}{(x^2 + 1)} = -\frac{24}{5}.$$

Câu 18. Giới hạn nào dưới đây có kết quả là $\frac{1}{2}$?

A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2}(\sqrt{x^2 + 1} - x)$. **B.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} + x)$.

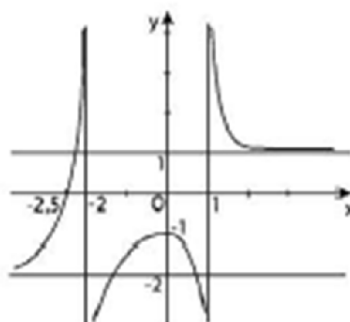
C. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2}(\sqrt{x^2 + 1} + x)$. **D.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Xét: } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.



Các khẳng định sau:

(I) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ (II) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$

(III) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ (IV) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$

Khẳng định đúng là:

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1

Lời giải

Đáp án B

Chỉ có khẳng định (III) sai các khẳng định còn lại đúng.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ là?

- A.** $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$. **B.** $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$.
C. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$. **D.** $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số f xác định trên đoạn $[a; b]$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$, đồng thời $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Câu 21. Hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 5x + 6}$ liên tục trên khoảng nào sau đây?

- A.** $(-\infty; 3)$. **B.** $(2; 3)$. **C.** $(-3; 2)$. **D.** $(-3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; -3\}$

Câu 22. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x-4} + 3 & \text{khi } x \geq 2 \\ \frac{x+1}{x^2 - 2mx + 3m + 2} & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

- A.** $m = 3$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = 5$. **D.** $m = 6$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, liên tục trên khoảng $(2; +\infty)$.

Ta có $f(2) = 3$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (\sqrt{2x-4} + 3) = 3$.

Nếu $m = 6$ thì $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x^2 - 12x + 20} = -\infty$ nên hàm số không liên tục tại $x = 2$.

Nếu $m \neq 6$ thì ta có $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x^2 - 2mx + 3m + 2} = \frac{3}{6-m}$.

Để hàm số liên tục tại $x = 2$ thì $\frac{3}{6-m} = 3 \Leftrightarrow 6-m = 1 \Leftrightarrow m = 5$.

Với $m = 5$ thì khi $x < 2$, $f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 10x + 17}$ liên tục trên $(-\infty; 2)$.

Tóm lại với $m = 5$ thì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

Cách 2: Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, liên tục trên khoảng $(2; +\infty)$.

Ta có $f(2) = 3$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (\sqrt{2x-4} + 3) = 3$.

Thử lần lượt các giá trị từ A đến C thấy $m = 5$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$. Do đó chọn đáp án. **C.**

Câu 23. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} a^2 x^2 & \text{khi } x \leq \sqrt{2}, a \in \mathbb{R} \\ (2-a)x^2 & \text{khi } x > \sqrt{2} \end{cases}$. Giá trị của a để $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ là:

- A.** 1 và 2. **B.** 1 và -1. **C.** -1 và 2. **D.** 1 và -2.

Lời giải

Chọn D.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Với $x > \sqrt{2}$ ta có hàm số $f(x) = a^2 x^2$ liên tục trên khoảng $(\sqrt{2}; +\infty)$.

Với $x < \sqrt{2}$ ta có hàm số $f(x) = (2-a)x^2$ liên tục trên khoảng $(-\infty; \sqrt{2})$.

Với $x = \sqrt{2}$ ta có $f(\sqrt{2}) = 2a^2$.

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} (2-a)x^2 = 2(2-a); \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} a^2 x^2 = 2a^2.$$

Để hàm số liên tục tại $x = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} f(x) = f(\sqrt{2}) \Leftrightarrow 2a^2 = 2(2-a) \Leftrightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}.$$

Vậy $a = 1$ hoặc $a = -2$ thì hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 24. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x^2 + 3}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ ax + \frac{5}{2} & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Xác định a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $a = -\frac{5}{2}$.

B. $a = \frac{5}{2}$.

C. $a = \frac{15}{2}$.

D. $a = -\frac{15}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Với $x \neq 1$, ta có $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 3}{x-1}$ liên tục trên tập xác định.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 3x + 3)(x-1)}{x-1} = -5.$$

$$f(1) = a + \frac{5}{2}.$$

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục tại $x = 1$. Điều này xảy ra khi

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a + \frac{5}{2} = -5 \Leftrightarrow a = -\frac{15}{2}.$$

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} - m & \text{khi } x \geq 0 \\ mx + 2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m = 2$.

B. $m = \pm 2$.

C. $m = -2$.

D. $m = 0$.

Lời giải

Chọn C

Trên khoảng $(0; +\infty)$ hàm số $f(x) = 2\sqrt{x} - m$ là hàm số liên tục.

Trên khoảng $(-\infty; 0)$ hàm số $f(x) = mx + 2$ là hàm số liên tục.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2\sqrt{x} - m) = -m = f(0) \text{ và } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (mx + 2) = 2.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow -m = 2 \Leftrightarrow m = -2.$$

Câu 26. Qua phép chiếu song song, tính chất nào không được bảo toàn?

A. Chéo nhau.

B. Đồng qui.

C. Song song.

D. Thẳng hàng.

Lời giải

Chọn A.

Do hai đường thẳng qua phép chiếu song song ảnh của chúng sẽ cùng thuộc một mặt phẳng. Suy ra tính chất chéo nhau không được bảo toàn.

Câu 27. Cho $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là hình hộp, với K là trung điểm CC_1 . Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$

B. $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA_1}$

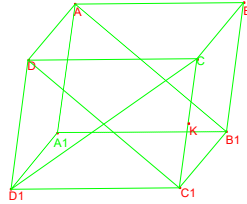
C. $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$

D. $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$

Lời giải

Chọn A

Có $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$



Câu 28. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ với $M = CD_1 \cap C_1D$. Khi đó:

A. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$

B. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$

C. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$

D. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$

Lời giải

Chọn B

(hình vẽ câu 1)

Ta có: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC_1} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1}) = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$

Câu 29. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AC, BD lần lượt lấy M, N sao cho $AM = 3MD; BN = 3NC$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AD, BC . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. Các vec tơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng

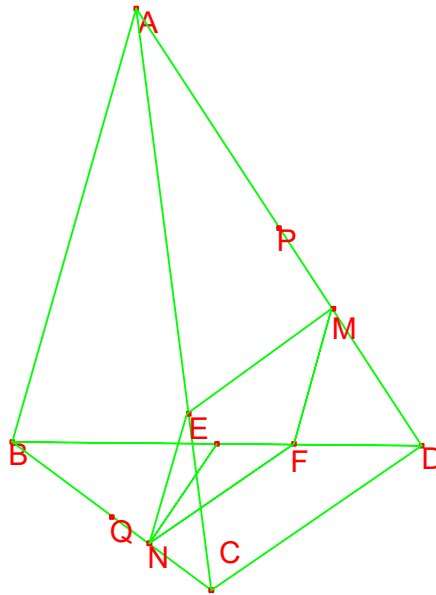
B. Các vec tơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng

C. Các vec tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng

D. Các vec tơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng

Lời giải

Chọn A



Lấy điểm E trên cạnh AC sao cho $AE=3EC$, lấy F trên BD sao cho $BF=3FD$

$$\begin{cases} NE \parallel AB, NE = \frac{1}{3} AB \\ MF \parallel AB, MF = \frac{1}{3} AB \end{cases} \Rightarrow NE \parallel MF, NE \parallel MF$$

$\Rightarrow$ NEMF là hình bình hành và 3 vectơ $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ có giá song song hoặc nằm trên mặt phẳng

(MFNE) $\Rightarrow \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng

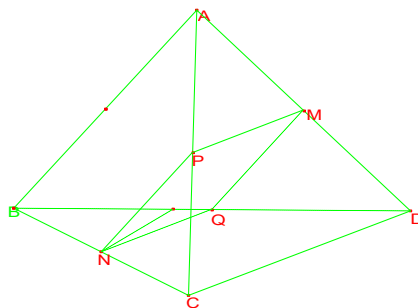
$$\Rightarrow \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN} \text{ không đồng phẳng.}$$

Câu 30. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A.** Các vec tơ $\overline{AB}$, $\overline{DC}$, $\overline{MN}$ đồng phẳng
B. Các vec tơ $\overline{MN}$, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ không đồng phẳng
C. Các vec tơ $\overline{AN}$, $\overline{CM}$, $\overline{MN}$ đồng phẳng
D. Các vec tơ $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{MN}$ đồng phẳng

Lời giải

Chọn C



Gọi P, Q lần lượt là trung điểm AC, BD

$\Rightarrow$ Ba vec tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ có giá song song hoặc nằm trên mặt phẳng (MNPQ) nên 3 vec tơ này đồng phẳng $\Rightarrow$ A đúng

Ba vec tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng $\Rightarrow$ B đúng

Ba vec tơ $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{MN}$ có giá không thể song song với mặt phẳng nào $\Rightarrow$ C sai

Câu 31. Trong các mệnh đề dưới đây mệnh đề đúng là?

- A.** Cho hai đường thẳng song song, đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng thứ nhất thì cũng vuông góc với đường thẳng thứ hai.
B. Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
C. Hai đường thẳng phân biệt vuông góc với nhau thì chúng cắt nhau.
D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Lời giải

Chọn A

Theo lý thuyết.

Câu 32. Cho đường thẳng d có vector chỉ phương $\vec{a}$. Vector nào sau đây không là vector chỉ phương của d ?

- A.** $2\vec{a}$ **B.** $-\frac{1}{2}\vec{a}$ **C.** $\vec{0}$ **D.** $k\vec{a}$ ($k \neq 0$)

Lời giải

Chọn C

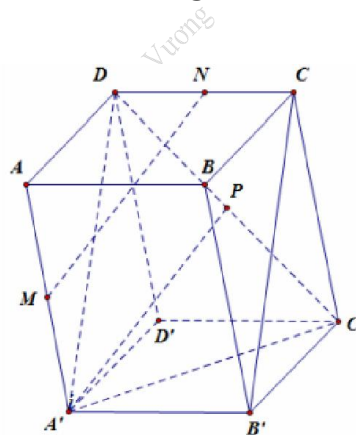
Theo định nghĩa $\vec{a}$ là vector chỉ phương của d thì $k\vec{a}$, ($k \neq 0$) cũng là vector chỉ phương của d .

Câu 33. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a và các góc $BAD, DAA', A'AB$ đều bằng 60° . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', CD . Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng MN và $B'C$, giá trị của $\cos \alpha$ bằng:

- A.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$ **B.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$ **C.** $\frac{3}{\sqrt{5}}$ **D.** $\frac{3\sqrt{5}}{10}$

Lời giải

Chọn D



Ta có $\begin{cases} AD' // B'C \\ MN // A'P \end{cases}$ với P là trung điểm của DC' .

Suy ra $\widehat{(MN, B'C)} = \widehat{(A'P, A'D)} = \widehat{DA'P}$.

Vì $\widehat{BAD} = \widehat{DAA'} = \widehat{A'AB} = 60^\circ$ và các cạnh của hình hộp bằng a . Do đó $A'D = a, C'D = C'A' = a\sqrt{3}$.

Suy ra $A'P = \frac{A'D^2 + A'C'^2}{2} - \frac{DC'^2}{4} \Rightarrow A'P = \frac{\sqrt{5}a}{2}$.

Áp dụng định lý cos cho tam giác $A'DP$, ta có

$$\cos \alpha = \frac{A'D^2 + A'P^2 - DP^2}{2A'D \cdot A'P} = \frac{3\sqrt{5}}{10}.$$

Câu 34. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$?

A. 45^0 .

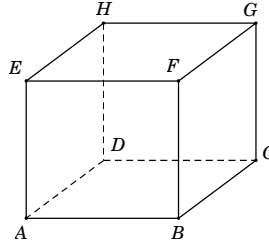
B. 90^0 .

C. 120^0 .

D. 60^0 .

Lời giải

Chọn B



Vì $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE}$ ($ADHE$ là hình vuông) nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DH}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = \widehat{BAE} = 90^0$ ($ABFE$ là hình vuông).

Câu 35. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó $\cos(AB, DM)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

Không mất tính tổng quát, giả sử tứ diện $ABCD$ có cạnh bằng a .

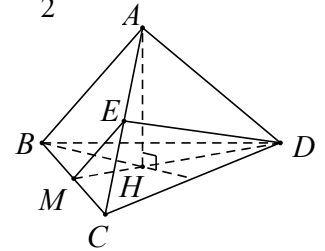
Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD \Rightarrow AH \perp (BCD)$.

Gọi E là trung điểm $AC \Rightarrow ME \parallel AB \Rightarrow (AB, DM) = (ME, MD)$

Ta có: $\cos(AB, DM) = \cos(ME, MD) = |\cos(\overrightarrow{ME}, \overrightarrow{MD})| = |\cos \widehat{EMD}|$.

Do các mặt của tứ diện đều là tam giác đều, từ đó ta dễ dàng tính được độ dài các cạnh của

$\triangle MED$: $ME = a$, $ED = MD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



$$\text{Xét } \triangle MED, \text{ ta có: } \cos \widehat{EMD} = \frac{ME^2 + MD^2 - ED^2}{2ME \cdot MD} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Từ đó: } \cos(AB, DM) = \left| \frac{\sqrt{3}}{6} \right| = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Phần 2. Tự luận

Câu 36. Biết rằng $\lim(\sqrt{n^2 + n + 2} - \sqrt{n^2 + 1}) = \frac{a}{b}$ trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*$. Tính giá trị của biểu thức $P = 5a^2 - b^2$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} & \lim(\sqrt{n^2 + n + 2} - \sqrt{n^2 + 1}) \\ &= \lim \frac{n^2 + n + 2 - (n^2 + 1)}{\sqrt{n^2 + n + 2} + \sqrt{n^2 + 1}} \\ &= \lim \frac{n + 1}{n\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} + n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Suy ra : } \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } P = 5a^2 - b^2 = 1.$$

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 16}{x - 2} = 12$. Tính giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{5f(x) - 16} - 4}{x^2 + 2x - 8}.$$

Lời giải

Theo giả thiết có $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - 16) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) - 16 = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 16$.

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{5f(x) - 16} - 4}{x^2 + 2x - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(5f(x) - 16) - 64}{(x - 2)(x + 4) \left[\left(\sqrt[3]{5f(x) - 16} \right)^2 + 4\sqrt[3]{5f(x) - 16} + 4^2 \right]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5(f(x) - 16)}{(x - 2)(x + 4) \left[\left(\sqrt[3]{5f(x) - 16} \right)^2 + 4\sqrt[3]{5f(x) - 16} + 4^2 \right]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{f(x) - 16}{x - 2} \cdot \frac{5}{(x + 4) \left(\left(\sqrt[3]{5f(x) - 16} \right)^2 + 4\sqrt[3]{5f(x) - 16} + 4^2 \right)} \right]$$

$$= 12 \cdot \frac{5}{6 \left[\left(\sqrt[3]{5 \cdot 16 - 16} \right)^2 + 4\sqrt[3]{5 \cdot 16 - 16} + 16 \right]} = \frac{5}{24}.$$

Câu 38. Chứng minh phương trình: $-m \sin 2x + 2016(\sin x - \cos x) = 0$ (m là tham số) có nghiệm với mọi m thuộc $\mathbb{R}$.

Lời giải

$$\text{Đặt } f(x) = -m \sin 2x + 2016(\sin x - \cos x)$$

$$\text{Vì } f(x) \text{ liên tục trên } \mathbb{R} \text{ nên } f(x) \text{ liên tục trên } \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$$

Ta có:

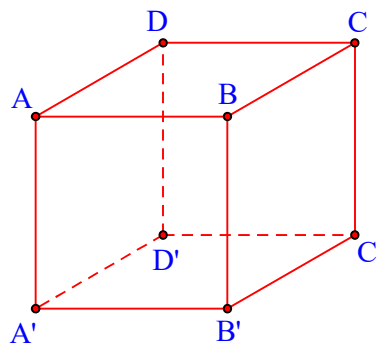
$$\left. \begin{aligned} f(0) &= -2016 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 2016 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2016^2 < 0.$$

$\Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trong $\left(0; \frac{\pi}{2} \right)$ với mọi m .

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi m thuộc $\mathbb{R}$ (đpcm).

Câu 39. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết: $\overrightarrow{AN} = -4\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AA'} - 2\overrightarrow{AD}$ ($k \in \mathbb{R}$); $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} - 3\overrightarrow{AD}$. Tìm k để $\overrightarrow{AN} \perp \overrightarrow{AM}$

Lời giải



Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên:

+ $AB = AA' = AD$;

+ Các vector $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{AD}$ đôi một vuông góc với nhau. Do đó: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA'} = 0$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Để } \overrightarrow{AN} \perp \overrightarrow{AM} \text{ thì } \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AM} &= 0 \Leftrightarrow (-4\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AA'} - 2\overrightarrow{AD}) \cdot (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} - 3\overrightarrow{AD}) = 0 \\ \Leftrightarrow -8\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA'} + 12\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + k\overrightarrow{AA'} \cdot (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} - 3\overrightarrow{AD}) - 2\overrightarrow{AD} \cdot (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} - 3\overrightarrow{AD}) &= 0 \\ \Leftrightarrow -8(\overrightarrow{AB})^2 - 0 + 0 + 2k\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AA'} - 3k\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AD} - 4\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA'} + 6\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} &= 0 \\ \Leftrightarrow -8(\overrightarrow{AB})^2 - 0 + 0 + 0 + k(\overrightarrow{AA'})^2 - 0 - 0 - 0 + 6(\overrightarrow{AD})^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow -8AB^2 + kAA'^2 + 6AD^2 = 0 \text{ (Mà } AB = AA' = AD) \\ \Leftrightarrow -8AB^2 + kAB^2 + 6AB^2 = 0 \Leftrightarrow (-8 + k + 6)AB^2 = 0 \Leftrightarrow -8 + k + 6 = 0 \Leftrightarrow k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = 2. \end{aligned}$$

Vậy giá trị k thích hợp để $\overrightarrow{AN} \perp \overrightarrow{AM}$ là $k = 2$.

Nguyễn Bảo Vương

Phần 1. Trắc nghiệm

Câu 1. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

- A. $\left(\frac{5}{3}\right)^n$. B. $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. C. $\left(-\frac{5}{3}\right)^n$. D. $\left(-\frac{4}{3}\right)^n$.

Câu 2. Giới hạn của dãy số sau đây bằng bao nhiêu. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n-2}$

- A. 3. B. -1. C. 0. D. -2.

Câu 3. Giá trị của $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-n}{n+1}$ bằng

- A. 1. B. 2. C. -1. D. 0.

Câu 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-3}{n^6+5n^5}$ bằng:

- A. 2. B. 0. C. $-\frac{3}{5}$. D. -3.

Câu 5. Dãy số nào sau đây có giới hạn khác 0 ?

- A. $\frac{1}{n}$. B. $\frac{1}{\sqrt{n}}$. C. $\frac{n+1}{n}$. D. $\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$.

Câu 6. Kết quả $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+10} - \sqrt{n})$ là

- A. 10. B. $+\infty$. C. 0. D. -10.

Câu 7. Tổng $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$ có giá trị là:

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{9}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 8. Tổng các cấp số nhân vô hạn: $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}}, \dots$ là

- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $-\frac{2}{3}$. D. 2.

Câu 9. Số thập phân vô hạn tuần hoàn 0,233333... biểu diễn dưới dạng số là:

- A. $\frac{1}{23}$. B. $\frac{2333}{10000}$. C. $\frac{23333}{10^5}$. D. $\frac{7}{30}$.

Câu 10. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1})$ bằng:

- A. 0. B. 1. C. 5. D. 3.

Câu 11. Tìm giới hạn hàm số $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+x-3}{x-1}$ bằng định nghĩa.

- A. $+\infty$. B. 5. C. -2. D. 1.

Câu 12. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{2-x}$ có kết quả là:

- A. -12 B. 12. C. 8 D. 5

Câu 13. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)$ bằng:

- A. 0 B. $+\infty$ C. 1 D. 2

Câu 14. Trong các giới hạn sau, giới hạn nào có kết quả là 0?

- A. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^3-1}$ B. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+5}{x+10}$.
C. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$

Câu 15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-3})$ bằng

- A. 0. B. 2. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

Câu 16. Giới hạn của hàm số $f(x) = \frac{(2x^2+1)(2x^2+x)}{(2x^4+x)(x+1)}$ khi x tiến đến $+\infty$ có kết quả là:

- A. 4 B. $+\infty$. C. 0 D. $\frac{1}{4}$

Câu 17. Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+x+1}}{x}$.

- A. 0. B. 1. C. ∞ . D. 2.

Câu 18. Tìm giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 - 8}$:

- A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. $-\frac{1}{6}$. D. 1.

Câu 19. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**

- A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2) = \frac{-3}{2}$. B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2) = +\infty$.
C. $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x+2}{x+1} = -\infty$. D. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x+2}{x+1} = -\infty$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-3x+1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. Hàm số gián đoạn tại $x = 1$. B. Hàm số liên tục tại $x = 1$.
C. Hàm số liên tục tại $x = 3$. D. Hàm số liên tục tại $x = -5$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x > 1 \\ x^2 + 3, & x < 1 \\ k^2, & x = 1 \end{cases}$. Tìm k để $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

- A. $k \neq \pm 2$. B. $k \neq 2$. C. $k \neq -2$. D. $k \neq \pm 1$.

Câu 22. Biết rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+5x+6}{x+2} & \text{khi } x > -2 \\ mx+n & \text{khi } x \leq -2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và n là một số thực tùy ý.

Giá trị của m (tính theo n) bằng

- A. $\frac{n}{2}$. B. $\frac{n+1}{2}$. C. $\frac{n-1}{2}$. D. 1.

- Câu 23.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+6}{3x^2-27} & \text{khi } x \neq \pm 3 \\ -\frac{1}{9} & \text{khi } x = \pm 3 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?
- A. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ các điểm thuộc khoảng $(-3;3)$.
 B. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = -3$.
 C. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = 3$.
 D. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Câu 24.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{nếu } \cos x \geq 0 \\ 1 + \cos x & \text{nếu } \cos x < 0 \end{cases}$. Hỏi hàm số f có tất cả bao nhiêu điểm gián đoạn trên khoảng $(0;2018)$?
- A. 2018. B. 1009. C. 542. D. 321.
- Câu 25.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x+a-1 & \text{khi } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Tìm tất cả giá trị của a để hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.
- A. $a = 1$. B. $a = 3$. C. $a = 2$. D. $a = 4$.
- Câu 26.** Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai?
- A. Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
 B. Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song.
 C. Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không thay đổi thứ tự của ba điểm đó.
 D. Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.
- Câu 27.** Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào sai?
- A. Nếu giá của ba vector cắt nhau từng đôi một thì 3 vector đồng phẳng
 B. Nếu ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có một vector $\vec{0}$ thì ba vector đồng phẳng
 C. Nếu giá của ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng song song với một mặt phẳng thì ba vector đó đồng phẳng
 D. Nếu trong ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có hai vector cùng phương thì ba vector đó đồng phẳng
- Câu 28.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I, K lần lượt là tâm của các hình bình hành $ABB'A'$ và $BCC'B'$. Khẳng định nào sau đây là sai?
- A. Bốn điểm I, K, C, A đồng phẳng
 B. $\vec{IK} = \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{A'C'}$
 C. Ba vector $\vec{BD}, \vec{IK}, \vec{B'C'}$ không đồng phẳng
 D. $\vec{BD} + 2\vec{IK} = 2\vec{BC}$
- Câu 29.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ là
- A. 90° . B. 60° . C. 30° . D. 45° .
- Câu 30.** Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AB và CI , với I là trung điểm của AD .
- A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Câu 31.** Cho ba đường thẳng a, b, c . Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Nếu $a//b$ thì $(\widehat{a,c}) = (\widehat{c,b})$.

B. Nếu $c//b$ thì $(\widehat{a,b}) = (\widehat{a,c})$.

C. Nếu $a//c$ thì $(\widehat{a,c}) = 0^\circ$.

D. Nếu $a \perp b$ thì $(\widehat{a,c}) = (\widehat{c,b})$.

Câu 32. Cho ba đường thẳng a, b, c . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Nếu $a \perp c$ và $b \perp c$ thì $a//b$.

B. Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \perp c$.

C. Nếu $a \perp c$ và $b \perp c$ thì $a \perp b$.

D. Nếu $a//b$ và $c \perp b$ thì $c \perp a$.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD . Số đo của góc (MN, SC) bằng

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Câu 34. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử tam giác $AB'C$ và $A'DC'$ đều có ba góc nhọn. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ là góc nào sau đây?

A. $\widehat{AB'C}$.

B. $\widehat{DA'C'}$.

C. $\widehat{BB'D}$.

D. $\widehat{BDB'}$.

Câu 35. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a , M là trung điểm của cạnh BC . Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AB và DM , khi đó $\cos \alpha$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{1}{2}$

Phần 2. Tự luận

Câu 36. Cho dãy số (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 2020 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 1), n \geq 1 \end{cases}$$
 . Tìm $\lim u_n$.

Câu 37. Tính các giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2 - 4x}$.

Câu 38. Tìm giá trị của m để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 2m + 3 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$$

Câu 39. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC . Tính $\cos(AB, DM)$

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.C	3.C	4.B	5.C	6.C	7.B	8.B	9.D	10.A
11.B	12.A	13.C	14.D	15.A	16.C	17.A	18.D	19.C	20.A
21.A	22.C	23.C	24.D	25.C	26.B	27.A	28.C	29.B	30.A
31.D	32.D	33.D	34.B	35.A					

Phần 1. Trắc nghiệm

Câu 1. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

- A. $\left(\frac{5}{3}\right)^n$. B. $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. C. $\left(-\frac{5}{3}\right)^n$. D. $\left(-\frac{4}{3}\right)^n$.

Lời giải

Chọn B

$$u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ Vì } \left|\frac{1}{3}\right| < 1.$$

Áp dụng công thức $\lim q^n = 0$, với $|q| < 1$. Nên $\lim \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$.

Câu 2. Giới hạn của dãy số sau đây bằng bao nhiêu. $\lim \frac{3}{n-2}$

- A. 3. B. -1. C. 0. D. -2.

Lời giải

Chọn A

Câu 3. Giá trị của $\lim \frac{2-n}{n+1}$ bằng

- A. 1. B. 2. C. -1. D. 0.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \lim \frac{2-n}{n+1} = \lim \frac{\frac{2}{n} - 1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{0-1}{1+0} = -1.$$

Câu 4. $\lim \frac{2n^2-3}{n^6+5n^5}$ bằng:

- A. 2. B. 0. C. $-\frac{3}{5}$. D. -3.

Lời giải

$$\text{Ta có } \lim \frac{2n^2-3}{n^6+5n^5} = \lim \frac{\frac{2}{n^4} - \frac{3}{n^6}}{1 + \frac{5}{n}} = 0.$$

Câu 5. Dãy số nào sau đây có giới hạn khác 0 ?

- A. $\frac{1}{n}$. B. $\frac{1}{\sqrt{n}}$. C. $\frac{n+1}{n}$. D. $\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Có } \lim \frac{n+1}{n} = \lim 1 + \lim \frac{1}{n} = 1.$$

- Câu 6.** Kết quả $\lim(\sqrt{n+10} - \sqrt{n})$ là
A. 10. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** -10.

Lời giải

Chọn C

$$\lim(\sqrt{n+10} - \sqrt{n}) = \lim \frac{n+10-n}{\sqrt{n+10} + \sqrt{n}} = \lim \frac{10}{\sqrt{n+10} + \sqrt{n}} = 0.$$

- Câu 7.** Tổng $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$ có giá trị là:

- A.** $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{9}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$$

$$\Rightarrow 3S = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} + \dots$$

$$\Rightarrow 2S = \lim \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) = 1 \Rightarrow S = \frac{1}{2}.$$

- Câu 8.** Tổng các cấp số nhân vô hạn: $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}}, \dots$ là

- A.** $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $-\frac{2}{3}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}} + \dots$$

$$\Rightarrow 2S = 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} + \dots$$

$$\Rightarrow 3S = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} + \dots = \lim \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \right) = 2$$

$$\Rightarrow S = \frac{2}{3}.$$

- Câu 9.** Số thập phân vô hạn tuần hoàn 0,233333... biểu diễn dưới dạng số là:

- A.** $\frac{1}{23}$. **B.** $\frac{2333}{10000}$. **C.** $\frac{23333}{10^5}$. **D.** $\frac{7}{30}$.

Lời giải

Chọn D

- Câu 10.** $\lim(\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1})$ bằng:

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

$$\lim(\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1}) = \lim \frac{(\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n+5} + \sqrt{n+1})}{(\sqrt{n+5} + \sqrt{n+1})} = \lim \frac{4}{(\sqrt{n+5} + \sqrt{n+1})} = 0.$$

Câu 11. Tìm giới hạn hàm số $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$ bằng định nghĩa.

A. $+\infty$.

B. 5.

C. -2 .

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Với mọi dãy $(x_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ ta có: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x_n^2 + x_n - 3}{x_n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2x_n + 3) = 5$.

Câu 12. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{2 - x}$ có kết quả là:

A. -12

B. 12.

C. 8

D. 5

Lời giải

Chọn A

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{2 - x} = -12.$$

Câu 13. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)$ bằng:

A. 0

B. $+\infty$

C. 1

D. 2

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1} = 1.$$

Câu 14. Trong các giới hạn sau, giới hạn nào có kết quả là 0?

A. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^3 - 1}$

B. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + 5}{x + 10}$

C. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$

D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$

Lời giải

Chọn D

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = 0.$$

Câu 15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 3})$ bằng

A. 0.

B. 2.

C. $-\infty$.

D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn A

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 3}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1 - x + 3}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 3}} = 0.$$

Câu 16. Giới hạn của hàm số $f(x) = \frac{(2x^2 + 1)(2x^2 + x)}{(2x^4 + x)(x + 1)}$ khi x tiến đến $+\infty$ có kết quả là:

A. 4

B. $+\infty$.

C. 0

D. $\frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x^2+1)(2x^2+x)}{(2x^4+x)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{\left(2+\frac{1}{x^2}\right)\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\left(2+\frac{1}{x^3}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 0$$

Câu 17. Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+x+1}}{x}$.

A. 0. **B.** 1. **C.** ∞ . **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+x+1}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+x+1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+x+1})}{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+x+1})} = 0 \end{aligned}$$

Câu 18. Tìm giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 - 8}$:

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** $-\frac{1}{6}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^3-2^3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-1)(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-1)(x+2)}{x^2+2x+4} = 1.$$

Câu 19. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai

A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-x+1} + x - 2) = \frac{-3}{2}$. **B.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-x+1} + x - 2) = +\infty$.

C. $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x+2}{x+1} = -\infty$. **D.** $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x+2}{x+1} = -\infty$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\begin{aligned} + \text{ Với đáp án A ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-x+1} + x - 2) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2-x+1-x^2+4x-4}{\sqrt{x^2-x+1}-x+2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x-3}{\sqrt{x^2-x+1}-x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x\left(3-\frac{3}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1-\frac{2}{x}\right)} \right) = \frac{-3}{2} \Rightarrow \text{A đúng.} \end{aligned}$$

$$+ \text{ Với đáp án B ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-x+1} + x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-x+1-x^2+4x-4}{\sqrt{x^2-x+1}-x+2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-3}{\sqrt{x^2-x+1}-x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x \left(3 - \frac{3}{x} \right)}{x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 + \frac{2}{x} \right)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{0} \right) = +\infty \Rightarrow \text{B đúng.}$$

+ Với đáp án C ta có $\lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1) = 0$, $x+1 < 0$ với mọi $x < -1$ và $\lim_{x \rightarrow -1^-} (3x+2) = -1 < 0$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x+2}{x+1} = +\infty \Rightarrow \text{C sai.}$

+ Với đáp án D ta có $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1) = 0$, $x+1 > 0$ với mọi $x > -1$ và $\lim_{x \rightarrow -1^+} (3x+2) = -1 < 0$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x+2}{x+1} = -\infty \Rightarrow \text{D đúng.}$

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-3x+1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Hàm số gián đoạn tại $x = 1$.

B. Hàm số liên tục tại $x = 1$.

C. Hàm số liên tục tại $x = 3$.

D. Hàm số liên tục tại $x = -5$.

Lời giải

Chọn A

+) Hàm số đã cho có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

+) Với $x \neq 1$ thì $f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{x-1}$ liên tục trên từng khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$. Do đó hàm số liên tục tại các điểm $x = -5$ và $x = 3$. Suy ra mệnh đề **C** và **D** đúng.

+) Mặt khác

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-3x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x-1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (2x-1) = 1 = f(1)$$

Do đó hàm số liên tục tại $x = 1$. Suy ra mệnh đề **B** đúng.

Vậy mệnh đề **A** sai.

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x > 1 \\ x^2 + 3, & x < 1 \\ k^2, & x = 1 \end{cases}$. Tìm k để $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

A. $k \neq \pm 2$.

B. $k \neq 2$.

C. $k \neq -2$.

D. $k \neq \pm 1$.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Với $x = 1$ ta có: $f(1) = k^2$

Với $x \neq 1$ ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 3) = 4; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1)^2 = 4 \quad \text{suy ra} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4.$$

Vậy để hàm số gián đoạn tại $x = 1$ khi $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq k^2 \Leftrightarrow k^2 \neq 4 \Leftrightarrow k \neq \pm 2$.

Câu 22. Biết rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+5x+6}{x+2} & \text{khi } x > -2 \\ mx+n & \text{khi } x \leq -2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và n là một số thực tùy

ý. Giá trị của m (tính theo n) bằng

- A. $\frac{n}{2}$. B. $\frac{n+1}{2}$. C. $\frac{n-1}{2}$. D. 1.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (x + 3) = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (mx + n) = -2m + n.$$

$$f(-2) = -2m + n.$$

Để hàm số liên tục tại $x = -2$ thì

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = f(-2) \Leftrightarrow -2m + n = 1 \Leftrightarrow m = \frac{n-1}{2}.$$

Câu 23. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+6}{3x^2-27} & \text{khi } x \neq \pm 3 \\ -\frac{1}{9} & \text{khi } x = \pm 3 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ các điểm thuộc khoảng $(-3; 3)$.
 B. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = -3$.
 C. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = 3$.
 D. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+6}{3x^2-27}$, vì $\lim_{x \rightarrow 3} (2x+6) = 12 \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow 3} (3x^2-27) = 0$ nên hàm số không có giới hạn tại $x = 3$. Ta loại hai phương án A và D.

Ta tiếp tục tính giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x+6}{3x^2-27} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2(x+3)}{3(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2}{3(x-3)} = \frac{-1}{9}.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = f(-3) = -\frac{1}{9}$ nên hàm số liên tục tại $x = -3$.

Câu 24. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{ng } \cos x \geq 0 \\ 1 + \cos x & \text{ng } \cos x < 0 \end{cases}$. Hỏi hàm số f có tất cả bao nhiêu điểm gián đoạn trên khoảng $(0; 2018)$?

- A. 2018. B. 1009. C. 542. D. 321.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 2\pi]$, khi đó:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{ng } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right] \\ 1 + \cos x & \text{ng } x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0); \quad \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} f(x) = 0 = f(2\pi).$$

Hàm số rõ ràng liên tục trên các khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ và $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Ta xét tại $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\square \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} (1 + \cos x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \sin x = 1;$$

$$\square f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;$$

$$\square \text{ Như vậy } \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ nên hàm số } f(x) \text{ liên tục tại điểm } x = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Ta xét tại } x = \frac{3\pi}{2}:$$

$$\square \lim_{x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}\right)^+} \sin x = -1; \quad \lim_{x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}\right)^-} (1 + \cos x) = 1;$$

$$\square \text{ Vì } \lim_{x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}\right)^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}\right)^+} f(x) \text{ nên hàm số } f(x) \text{ gián đoạn tại điểm } x = \frac{3\pi}{2}.$$

$$\text{Do đó, trên đoạn } [0; 2\pi] \text{ hàm số chỉ gián đoạn tại điểm } x = \frac{3\pi}{2}.$$

$$\text{Do tính chất tuần hoàn của hàm số } y = \cos x \text{ và } y = \sin x \text{ suy ra hàm số gián đoạn tại các điểm } x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ta có } x \in (0; 2018) \Leftrightarrow 0 < \frac{3\pi}{2} + k2\pi < 2018 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} < k < \frac{1009}{\pi} - \frac{3}{4} \approx 320,42.$$

$$\text{Vì } k \in \mathbb{Z} \text{ nên } k \in \{0, 1, 2, \dots, 320\}.$$

$$\text{Vậy, hàm số } f \text{ có 321 điểm gián đoạn trên khoảng } (0; 2018).$$

Câu 25. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x + a - 1 & \text{khi } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{x} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Tìm tất cả giá trị của a để hàm số đã cho liên tục

trên $\mathbb{R}$.

A. $a = 1$.

B. $a = 3$.

C. $a = 2$.

D. $a = 4$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x + a - 1) = a - 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt{1+2x} + 1} = 1.$$

$$f(0) = a - 1.$$

$$\text{Hàm số liên tục trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Hàm số liên tục tại điểm } x = 0 \Leftrightarrow a - 1 = 1 \Leftrightarrow a = 2.$$

Câu 26. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**?

A. Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

B. Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song.

C. Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không thay đổi thứ tự của ba điểm đó.

D. Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.

Lời giải

Chọn B

Tính chất của phép chiếu song song.

Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau. Suy ra B sai: Chúng có thể trùng nhau.

Câu 27. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào sai?

A. Nếu giá của ba vector cắt nhau từng đôi một thì 3 vector đồng phẳng

B. Nếu ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có một vector $\vec{0}$ thì ba vector đồng phẳng

C. Nếu giá của ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng song song với một mặt phẳng thì ba vector đó đồng phẳng

D. Nếu trong ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có hai vector cùng phương thì ba vector đó đồng phẳng

Lời giải

Chọn A

Câu 28. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I, K lần lượt là tâm của các hình bình hành $ABB'A'$ và $BCC'B'$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. Bốn điểm I, K, C, A đồng phẳng

B. $\vec{IK} = \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{A'C'}$

C. Ba vector $\vec{BD}, \vec{IK}, \vec{B'C'}$ không đồng phẳng

D. $\vec{BD} + 2\vec{IK} = 2\vec{BC}$

Lời giải

Chọn C

Câu 29. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ là

A. 90° .

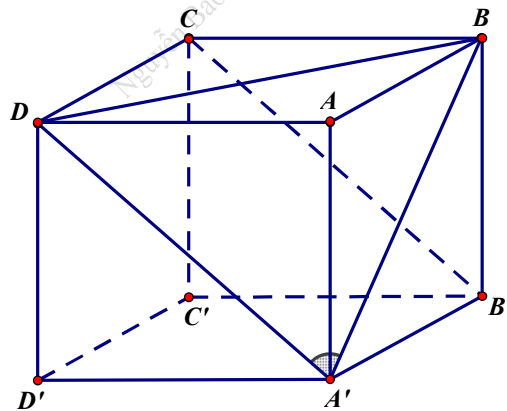
B. 60° .

C. 30° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn B



Ta có $B'C \parallel A'D \Rightarrow \widehat{(A'B; B'C)} = \widehat{(A'B; A'D)} = \widehat{DA'B}$.

Xét $\triangle DA'B$ có $A'D = A'B = BD$ nên $\triangle DA'B$ là tam giác đều.

Vậy $\widehat{DA'B} = 60^\circ$.

Câu 30. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AB và CI , với I là trung điểm của AD .

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

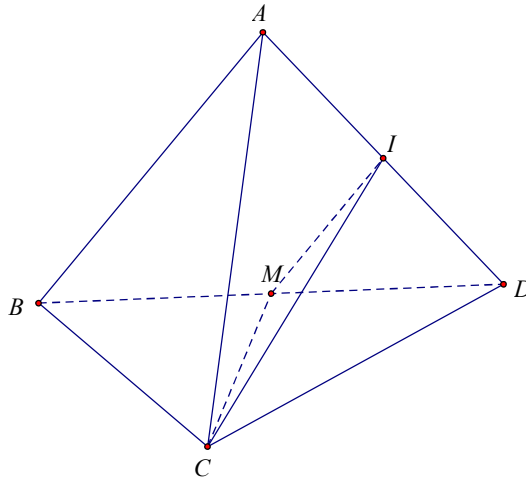
B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của BD .

Ta có: $IM \parallel AB$.

$$\Rightarrow (AB, IC) = (IM, IC).$$

$$\Rightarrow \cos(AB, IC) = \cos(IM, IC) = |\cos(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IC})| = |\cos \widehat{MIC}|.$$

$$\text{Mà: } \cos \widehat{MIC} = \frac{MI^2 + IC^2 - MC^2}{2 \cdot MI \cdot IC} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$\Rightarrow \cos(AB, IC) = |\cos \widehat{MIC}| = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 31. Cho ba đường thẳng a, b, c . Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Nếu $a \parallel b$ thì $(\widehat{a, c}) = (\widehat{c, b})$.

B. Nếu $c \parallel b$ thì $(\widehat{a, b}) = (\widehat{a, c})$.

C. Nếu $a \parallel c$ thì $(\widehat{a, c}) = 0^\circ$.

D. Nếu $a \perp b$ thì $(\widehat{a, c}) = (\widehat{c, b})$.

Lời giải

Chọn D.

Câu 32. Cho ba đường thẳng a, b, c . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Nếu $a \perp c$ và $b \perp c$ thì $a \parallel b$.

B. Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \perp c$.

C. Nếu $a \perp c$ và $b \perp c$ thì $a \perp b$.

D. Nếu $a \parallel b$ và $c \perp b$ thì $c \perp a$.

Lời giải

Chọn D.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a .

Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD . Số đo của góc (MN, SC) bằng

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn D.

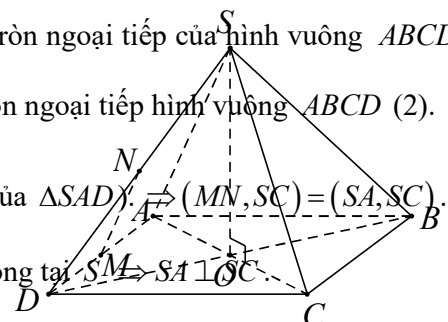
Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD \Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp của hình vuông $ABCD$ (1).

Ta có: $SA = SB = SC = SD \Rightarrow S$ nằm trên trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Từ giả thiết ta có: $MN \parallel SA$ (do MN là đường trung bình của $\triangle SAD$). $\Rightarrow (MN, SC) = (SA, SC)$.

$$\text{Xét } \triangle SAC, \text{ ta có: } \begin{cases} SA^2 + SC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \\ AC^2 = 2AD = 2a^2 \end{cases} \Rightarrow \triangle SAC \text{ vuông tại } A.$$



$$\Rightarrow (SA, SC) = (MN, SC) = 90^\circ.$$

Câu 34. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử tam giác $AB'C$ và $A'DC'$ đều có ba góc nhọn. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ là góc nào sau đây?

A. $\widehat{AB'C}$.

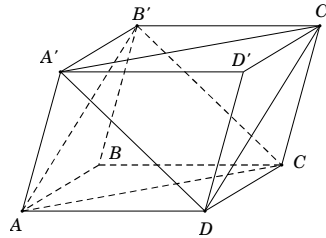
B. $\widehat{DA'C'}$.

C. $\widehat{BB'D}$.

D. $\widehat{BDB'}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $AC \parallel A'C'$ ($A'B'CD$ là hình bình hành) mà $\widehat{DA'C'}$ nhọn nên
 $(AC, A'D) = (A'C', A'D) = \widehat{DA'C'}$.

Câu 35. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a , M là trung điểm của cạnh BC . Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AB và DM , khi đó $\cos \alpha$ bằng

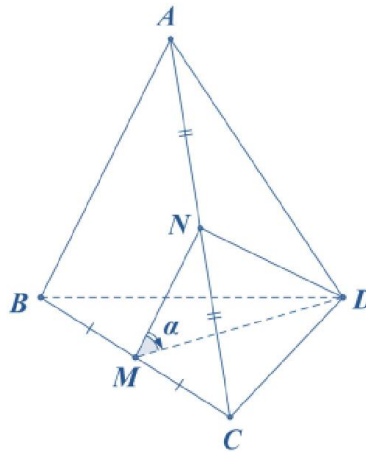
A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{1}{2}$

Lời giải:



Gọi N là trung điểm của AC

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của $\triangle ABC$

$$\Rightarrow \begin{cases} MN \parallel AB \\ MN = \frac{1}{2} AB \end{cases}$$

Vì $\triangle BCD$ và $\triangle ACD$ là các tam giác đều cạnh bằng a

$$\Rightarrow MD = ND = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vì } MN \parallel AB \Rightarrow \alpha = (\widehat{AB, DM}) = (\widehat{MN, DM})$$

Xét $\triangle MND$, ta có:

$$\cos \widehat{NMD} = \frac{MN^2 + MD^2 - ND^2}{2MN.MD}$$

$$= \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} > 0$$

$$\Rightarrow \widehat{NMD} < 90^\circ \Rightarrow (\widehat{MN, DM}) = \widehat{NMD}$$

$$\text{Vậy } \cos \alpha = \cos \widehat{NMD} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Chọn đáp án A

Phần 2. Tự luận

Câu 36. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 2020 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 1), n \geq 1 \end{cases}$. Tìm $\lim u_n$.

Lời giải

$$\text{Ta có } u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 1) \Leftrightarrow u_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(u_n - 1).$$

$$\text{Đặt } v_n = u_n - 1, \text{ ta có } \begin{cases} v_1 = 2019 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot v_n \end{cases} \quad (n \geq 1).$$

Suy ra dãy (v_n) là một cấp số nhân có số hạng đầu bằng 2019, công bội bằng $\frac{1}{2}$ nên

$$v_n = 2019 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (n \geq 1).$$

$$\text{Suy ra } u_n = 2019 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1 \quad (n \geq 1), \text{ do đó } \lim u_n = 1.$$

Câu 37. Tính các giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2 - 4x}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2 - 4x} = \frac{x^3 \left(1 + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{4}{x}\right)} = x \frac{\left(1 + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)}{1 - \frac{4}{x}}.$$

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(1 + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)}{1 - \frac{4}{x}} = 1 > 0. \text{ Nên } \lim_{x \rightarrow -\infty} x \frac{\left(1 + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)}{1 - \frac{4}{x}} = -\infty.$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2 - 4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \frac{\left(1 + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)}{1 - \frac{4}{x}} = -\infty.$$

Câu 38. Tìm giá trị của m để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 2m + 3 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$$

Lời giải

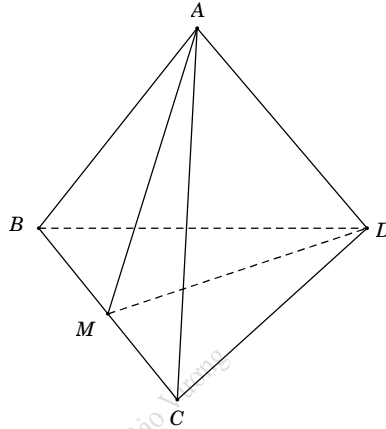
Tập xác định: $D = \mathbb{R}$, $x_0 = 2 \in D$ và $f(2) = 2m + 3$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{(x - 2)(3 + \sqrt{x^2 + 5})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x + 2)}{3 + \sqrt{x^2 + 5}} = -\frac{2}{3}.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$ khi $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 2m + 3 = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow m = -\frac{11}{6}$.

Câu 39. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC . Tính $\cos(AB, DM)$

Lời giải



Giả sử cạnh của tứ diện là a .

$$\text{Tam giác } BCD \text{ đều} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Tam giác } ABC \text{ đều} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ta có: } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{DM}|} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM}}{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

$$\text{Mặt khác: } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AM}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) - |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$$

$$= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AM}| \cdot \cos 30^\circ - |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos 60^\circ$$

$$= a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}) = \frac{\sqrt{3}}{6} > 0 \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}) = (AB, DM) \Rightarrow \cos(AB, DM) = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Phần 1. Trắc nghiệm

Câu 1. Dãy số nào sau đây có giới hạn khác 0 .

- A. $\frac{1}{2n}$. B. $\frac{1}{\sqrt{n}}$. C. $\left(\frac{4}{3}\right)^n$. D. $\frac{(-1)^n}{n}$.

Câu 2. Giới hạn $\lim(-n^4 - 50n + 11)$ có kết quả là:

- A. 1 B. 0 C. 2 D. $-\infty$

Câu 3. Tính giới hạn $\lim \frac{4n+2018}{2n+1}$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. 4. C. 2. D. 2018.

Câu 4. Giới hạn của dãy số $u_n = -\frac{(\sin^2 n)^n}{2^n + 1}$ bằng

- A. 1. B. 2. C. 0 D. 4.

Câu 5. $\lim(\sqrt{n^2 - n + 1} - n)$ bằng

- A. $-\infty$. B. 1. C. 0. D. $-\frac{1}{2}$.

Câu 6. Giới hạn của dãy số $\lim \frac{(-1)^n \cos^2(n-1)}{n^2}$ bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 7. $\lim \frac{1}{\sqrt{n^2 + n} - n}$ bằng

- A. 0. B. $+\infty$. C. -2. D. 2.

Câu 8. Giới hạn $\lim(\sqrt{n^2 + n} - n)$ có kết quả bằng:

- A. 0 B. $+\infty$. C. $-\infty$ D. $\frac{1}{2}$

Câu 9. Gọi $S = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$. $\lim S$ bằng:

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{2}$. D. 1.

Câu 10. Cho cấp số nhân $u_1, u_2, \dots$ với công bội q thỏa điều kiện $|q| < 1$. Lúc đó, ta nói cấp số nhân đã cho là lùi vô hạn. Tổng của cấp số nhân đã cho là $S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ bằng:

- A. $\frac{u_1}{q-1}$. B. $\frac{u_1(q^n - 1)}{q-1}$. C. $\frac{u_1}{1+q}$. D. $\frac{u_1}{1-q}$.

Câu 11. Tính $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3}$.

A. ∞ .

B. 2.

C. $\frac{1}{8}$.

D. 8.

Câu 12. Giới hạn của hàm số nào dưới đây có kết quả bằng 1?

A. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$

B. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2}$.

C. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{1 - x}$

D. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1}$

Câu 13. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**

A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2) = -\frac{3}{2}$.

B. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x + 2}{x + 1} = -\infty$.

C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2) = +\infty$.

D. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x + 2}{x + 1} = -\infty$.

Câu 14. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

B. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = -\infty$.

C. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^5} = +\infty$.

D. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ \frac{1}{8} & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tính $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

A. $\frac{1}{8}$.

B. $+\infty$.

C. 0.

D. $-\frac{1}{8}$.

Câu 16. Xác định $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x^2}$.

A. 0.

B. $-\infty$.

C. Không tồn tại.

D. $+\infty$.

Câu 17. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+x+1}}{x}$ có kết quả bằng:

A. 0

B. 1.

C. $+\infty$

D. 2

Câu 18. Tính $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 3x + 1} - 2x)$?

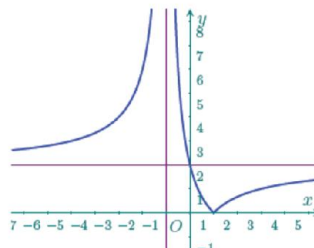
A. $I = \frac{1}{2}$.

B. $I = +\infty$.

C. $I = 0$.

D. $I = \frac{3}{4}$.

Câu 19. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ.



Xét các mệnh đề sau

(I). $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

(II). $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

(III). $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$

(IV). $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

Có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{khi } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$.

B. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x=1$.

C. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$ và hàm số $f(x)$ cũng có đạo hàm tại $x=1$.

D. Hàm số $f(x)$ không có đạo hàm tại $x=1$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{3x+1}}{x-1}, x \neq 1 \\ ax, x = 1 \end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x_0 = 1$.

A. -3.

B. 2.

C. $-\frac{3}{2}$.

D. -2.

Câu 22. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số gián đoạn tại $x=1$.

A. $m \neq 2$.

B. $m \neq 1$.

C. $m \neq 2$.

D. $m \neq 3$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ m^2+3m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x_0 = 2$.

A. $m=0$ hoặc $m=1$. B. $m=1$ hoặc $m=-4$.

C. $m=-4$ hoặc $m=-1$. D. $m=0$ hoặc $m=-4$.

Câu 24. Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4} & \text{khi } x > 4 \\ \frac{(a+2)x}{4} & \text{khi } x \leq 4 \end{cases}$ liên tục trên tập xác định.

A. $a=3$.

B. $a=\frac{5}{2}$.

C. $a=2$.

D. $a=-\frac{11}{6}$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x-4}+3 & \text{khi } x \geq 2 \\ \frac{x+1}{x^2-2mx+3m+2} & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m=3$.

B. $m=4$.

C. $m=5$.

D. $m=6$.

Câu 26. Qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) , hai đường thẳng a và b có hình chiếu là hai đường thẳng song song a' và b' . Khi đó:

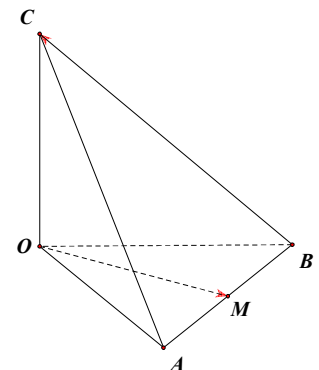
A. a và b phải song song với nhau

B. a và b phải cắt nhau

C. a và b có thể chéo nhau hoặc song song với nhau

D. a và b không thể song song.

- Câu 27.** Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng xét các vectơ $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}; \vec{y} = -4\vec{a} + 2\vec{b}; \vec{z} = -3\vec{a} - 2\vec{c}$ Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:
- A. Hai vectơ $\vec{y}, \vec{z}$ cùng phương
 B. Hai vectơ $\vec{x}, \vec{y}$ cùng phương
 C. Hai vectơ $\vec{x}, \vec{z}$ cùng phương
 D. Hai vectơ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng
- Câu 28.** Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào sai?
- A. Nếu giá của ba vectơ cắt nhau từng đôi một thì 3 vectơ đồng phẳng
 B. Nếu ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có một vectơ $\vec{0}$ thì ba vectơ đồng phẳng
 C. Nếu giá của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng song song với một mặt phẳng thì ba vectơ đó đồng phẳng
 D. Nếu trong ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có hai vectơ cùng phương thì ba vectơ đó đồng phẳng
- Câu 29.** Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M là trung điểm của AD . Chọn khẳng định đúng:
- A. $\overrightarrow{B_1M} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1}$
 B. $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{C_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$
 C. $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$
 D. $\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = 2\overrightarrow{B_1D}$
- Câu 30.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Bộ ba vectơ nào sau đây đồng phẳng?
- A. $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{A'B'}$.
 B. $\overrightarrow{D'C'}, \overrightarrow{D'D}, \overrightarrow{AC}$.
 C. $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CC'}$.
 D. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$.
- Câu 31.** Trong không gian, mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?
- A. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
 B. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.
 C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
 D. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- Câu 32.** Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?
- A. 90° .
 B. 60° .
 C. 45° .
 D. 120° .
- Câu 33.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC . Số đo của góc (IJ, CD) bằng:
- A. 30° .
 B. 45° .
 C. 60° .
 D. 90° .
- Câu 34.** Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh bằng a ; SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Khi đó, cosin góc giữa SB và AC bằng
- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$
 C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$
- Câu 35.** Tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và đều có độ dài là 1. Gọi M là trung điểm cạnh AB . Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{OM}$ bằng
- A. 0° .
 B. 45° .
 C. 90° .
 D. 120° .



Phần 2. Tự luận

Câu 1. Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5\sqrt{3n^2+n}}{2(3n+2)} = \frac{a\sqrt{3}}{b}$ (với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $T = a + b$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ xác định với mọi $x \neq 0$ thỏa mãn $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x, x \neq 0$. Tính

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{f(x)}{x - \sqrt{2}}$$

Câu 3. Chứng minh rằng phương trình sau luôn có hai nghiệm trái dấu với mọi giá trị thực của tham số m : $x^3 + (2m-1)x^2 - (m+2)x - 2m = 0$

Câu 4. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = a, BD = 3a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Biết AC vuông góc với BD . Tính MN .

Nguyễn Bảo Vương

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.D	3.C	4.C	5.D	6.C	7.D	8.D	9.B	10.D
11.D	12.A	13.B	14	15.B	16.C	17.A	18.D	19.D	20.D
21.C	22.B	23.B	24.D	25	26.C	27.B	28.A	29.B	30.A
31.A	32.C	33.C	34.B	35.D					

Phần 1. Trắc nghiệm

Câu 1. Dãy số nào sau đây có giới hạn khác 0 .

- A. $\frac{1}{2n}$. B. $\frac{1}{\sqrt{n}}$. **C. $\left(\frac{4}{3}\right)^n$.** D. $\frac{(-1)^n}{n}$.

Lời giải

Chọn B

Câu 2. Giới hạn $\lim(-n^4 - 50n + 11)$ có kết quả là:

- A. 1 B. 0 C. 2 **D. $-\infty$**

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim(-n^4 - 50n + 11) = \lim n^4 \left(-1 - \frac{50}{n} + \frac{11}{n^2}\right) = -\infty$

Câu 3. Tính giới hạn $\lim \frac{4n+2018}{2n+1}$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. 4. **C. 2.** D. 2018.

Lời giải

Ta có $\lim \frac{4n+2018}{2n+1} = \lim \frac{4 + \frac{2018}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = 2$.

Câu 4. Giới hạn của dãy số $u_n = -\frac{(\sin^2 n)^n}{2^n + 1}$ bằng

- A. 1. B. 2. **C. 0** D. 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\left| -\frac{(\sin^2 n)^n}{2^n + 1} \right| = \frac{(\sin^2 n)^n}{2^n + 1} \leq \frac{(\sin^2 n)^n}{2^n} = \left(\frac{\sin^2 n}{2}\right)^n$

Vì $\left| \frac{\sin^2 n}{2} \right| \leq 1$ (do $0 \leq \sin^2 n \leq 1$) nên $\lim \left(\frac{\sin^2 n}{2}\right)^n = 0$. Suy ra: $\lim |u_n| = 0$.

Vậy $\lim u_n = 0$.

Câu 5. $\lim(\sqrt{n^2 - n + 1} - n)$ bằng

- A. $-\infty$. B. 1. C. 0. **D. $-\frac{1}{2}$.**

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \lim(\sqrt{n^2 - n + 1} - n) &= \lim \frac{(\sqrt{n^2 - n + 1} - n)(\sqrt{n^2 - n + 1} + n)}{\sqrt{n^2 - n + 1} + n} \\ &= \lim \frac{-n + 1}{n\sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + n} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Câu 6. Giới hạn của dãy số $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \cos^2(n-1)}{n^2}$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } -1 \leq (-1)^n \cos^2(n-1) \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{n^2} \leq \frac{(-1)^n \cos^2(n-1)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

$$\text{Mà } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n^2} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0 \text{ nên } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \cos^2(n-1)}{n^2} = 0.$$

Câu 7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n} - n}$ bằng

A. 0.

B. $+\infty$.

C. -2.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n} - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n} + n}{(\sqrt{n^2 + n} - n)(\sqrt{n^2 + n} + n)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right) = 2$$

Câu 8. Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$ có kết quả bằng:

A. 0

B. $+\infty$.

C. $-\infty$

D. $\frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + n} - n)(\sqrt{n^2 + n} + n)}{(\sqrt{n^2 + n} + n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - n^2}{(\sqrt{n^2 + n} + n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Câu 9. Gọi $S = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$. $\lim S$ bằng:

A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S &= \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} \\ \Rightarrow 3S &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n-1}} \\ \Rightarrow 4S &= 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} \Rightarrow S = \frac{1}{4} + \frac{(-1)^{n+1}}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

Câu 10. Cho cấp số nhân $u_1, u_2, \dots$ với công bội q thỏa điều kiện $|q| < 1$. Lúc đó, ta nói cấp số nhân đã cho là lùi vô hạn. Tổng của cấp số nhân đã cho là $S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ bằng:

A. $\frac{u_1}{q-1}$. B. $\frac{u_1(q^n-1)}{q-1}$. C. $\frac{u_1}{1+q}$. D. $\frac{u_1}{1-q}$.

Lời giải

Chọn D

Theo định nghĩa cấp số nhân lùi vô hạn ta chứng minh được

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \dots + u_1q^{n-1} + \dots = \frac{u_1}{1-q}.$$

Câu 11. Tính $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3}$.

A. ∞ . B. 2. C. $\frac{1}{8}$. D. 8.

Lời giải

Chọn D

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+5)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+5) = 8$$

Câu 12. Giới hạn của hàm số nào dưới đây có kết quả bằng 1?

A. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$ B. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2}$
C. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{1 - x}$ D. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1}$

Lời giải

Chọn B

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+2)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x+2) = 1$$

Câu 13. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai

A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2) = -\frac{3}{2}$. B. $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x + 2}{x + 1} = -\infty$.
C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2) = +\infty$. D. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x + 2}{x + 1} = -\infty$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 1 - (x - 2)^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} - (x - 2)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 3}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \frac{3}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 + \frac{2}{x}} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \text{đáp án A đúng.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 - \frac{2}{x} \right).$$

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 - \frac{2}{x} \right) = 2 > 0$ nên $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 - \frac{2}{x} \right) = +\infty \Rightarrow$

đáp án C đúng.

Do $\lim_{x \rightarrow -1^-} (3x + 2) = -1 < 0$ và $x + 1 < 0$ với $\forall x < -1$ nên $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x + 2}{x + 1} = +\infty \Rightarrow$ đáp án B sai.

Do $\lim_{x \rightarrow -1^+} (3x + 2) = -1 < 0$ và $x + 1 > 0$ với $\forall x > -1$ nên $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x + 2}{x + 1} = -\infty \Rightarrow$ đáp án D đúng.

Câu 14. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

B. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = -\infty$.

C. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^5} = +\infty$.

D. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ do $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ và $x > 0$. Vậy đáp án A đúng.

Suy ra đáp án B sai.

Các đáp án C và D đúng. Giải thích tương tự đáp án A.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ \frac{1}{8} & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tính $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

A. $\frac{1}{8}$.

B. $+\infty$.

C. 0.

D. $-\frac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4 - x - 3}{(x-1)(x+1)(2 + \sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{(x+1)(2 + \sqrt{x+3})} = +\infty$

Câu 16. Xác định $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x^2}$.

A. 0.

B. $-\infty$.

C. Không tồn tại.

D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x} = +\infty$.

Vậy không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x^2}$.

Câu 17. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+x+1}}{x}$ có kết quả bằng:

- A.** 0 **B.** 1. **C.** $+\infty$ **D.** 2

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+x+1}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1-x^2-x-1)}{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+x+1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+x+1})} = 0 \end{aligned}$$

Câu 18. Tính $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2+3x+1} - 2x)$?

- A.** $I = \frac{1}{2}$. **B.** $I = +\infty$. **C.** $I = 0$. **D.** $I = \frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Phương pháp: Khử dạng vô định: $\infty - \infty$

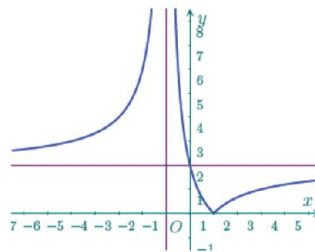
- Trục căn thức $f(x) = \sqrt{4x^2+3x+1} - 2x = \frac{3x+1}{\sqrt{4x^2+3x+1} + 2x}$

- Chia cả tử và mẫu của $f(x)$ cho x rồi cho $x \rightarrow +\infty$

Cách giải:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2+3x+1} - 2x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+3x+1} - 2x \sqrt{4x^2+3x+1} + 2x}{\sqrt{4x^2+3x+1} + 2x} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2+3x+1-2x^2}{\sqrt{4x^2+3x+1} - 2x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{\sqrt{4x^2+3x+1} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{\sqrt{4 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2} = \frac{3}{\sqrt{4+2}} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Câu 19. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ.



Xét các mệnh đề sau

- (I). $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$
 (II). $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
 (III). $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$
 (IV). $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

Có bao nhiêu mệnh đề đúng?

- A.** 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Đáp án D

Mệnh đề $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ đúng. Mệnh đề $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ sai

Mệnh đề $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2$ sai. Mệnh đề $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ đúng

Vậy có 2 mệnh đề đúng.

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{khi } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

- A. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.
- B. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$.
- C. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ và hàm số $f(x)$ cũng có đạo hàm tại $x = 1$.
- D. Hàm số $f(x)$ không có đạo hàm tại $x = 1$.**

Lời giải

Chọn D

+) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3-x^2}{2} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1$. Do đó, hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Vậy

A. đúng

+) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x^2}{2(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 + x}{-2} = -1$ và

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x}{x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x} = -1$. Do đó, hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$.

Vậy **B đúng**

Từ đó thấy **C đúng** và **D sai**

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{3x+1}}{x-1}, x \neq 1 \\ ax, x = 1 \end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x_0 = 1$.

A. -3.

B. 2.

C. $-\frac{3}{2}$.

D. -2.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{3x+1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{x-1} + \frac{2 - \sqrt{3x+1}}{x-1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{(x-1) \left[(\sqrt[3]{x+7})^2 + 2\sqrt[3]{x+7} + 4 \right]} + \frac{-3(x-1)}{(x-1)(2 + \sqrt{3x+1})} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{(\sqrt[3]{x+7})^2 + 2\sqrt[3]{x+7} + 4} - \frac{3}{2 + \sqrt{3x+1}} \right) = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Hàm số liên tục tại } x_0 = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a = -\frac{3}{2}.$$

Câu 22. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số gián đoạn tại $x = 1$.

A. $m \neq 2$.

B. $m \neq 1$.

C. $m \neq 2$.

D. $m \neq 3$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Hàm số gián đoạn tại $x = 1$ khi $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} \neq 3m$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} \neq 3m \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) \neq 3m \Leftrightarrow 3 \neq 3m \Leftrightarrow m \neq 1.$$

Câu 23. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ m^2 + 3m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x_0 = 2$.

A. $m = 0$ hoặc $m = 1$. **B.** $m = 1$ hoặc $m = -4$.

C. $m = -4$ hoặc $m = -1$. **D.** $m = 0$ hoặc $m = -4$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$.

Hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = 2$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

$$\Leftrightarrow 4 = m^2 + 3m \Leftrightarrow m^2 + 3m - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -4 \end{cases}.$$

Câu 24. Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} & \text{khi } x > 4 \\ \frac{(a+2)x}{4} & \text{khi } x \leq 4 \end{cases}$ liên tục trên tập xác định.

A. $a = 3$.

B. $a = \frac{5}{2}$.

C. $a = 2$.

D. $a = -\frac{11}{6}$.

Lời giải

Chọn D

* TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

NX: Hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 4)$ và $(4; +\infty)$

Do đó, để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ ta cần tìm a để hàm số liên tục tại $x = 4$

$$\text{ĐK: } \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = f(4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5})(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+5})}{(x-4)(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+5})} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+5}} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(a+2)x}{4} = a + 2 = f(4)$$

$$\text{Cần có: } a + 2 = \frac{1}{6} \Leftrightarrow a = -\frac{11}{6}.$$

Câu 25. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x-4} + 3 & \text{khi } x \geq 2 \\ \frac{x+1}{x^2 - 2mx + 3m + 2} & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để

hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m = 3$.

B. $m = 4$.

C. $m = 5$.

D. $m = 6$.

Lời giải

Chọn C.

Cách 1: Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, liên tục trên khoảng $(2; +\infty)$.

Ta có. $f(2) = 3; \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (\sqrt{2x-4} + 3) = 3$

Nếu $m = 6$ thì $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x^2-12x+20} = -\infty$ nên hàm số không liên tục tại $x = 2$.

Nếu $m \neq 6$ thì ta có $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x^2-2mx+3m+2} = \frac{3}{6-m}$.

Để hàm số liên tục tại $x = 2$ thì $\frac{3}{6-m} = 3 \Leftrightarrow 6-m = 1 \Leftrightarrow m = 5$.

Với $m = 5$ thì khi $x < 2$ $f(x) = \frac{x+1}{x^2-10x+17}$ liên tục trên $(-\infty; 2)$.

Tóm lại với $m = 5$ thì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 26. Qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) , hai đường thẳng a và b có hình chiếu là hai đường thẳng song song a' và b' . Khi đó:

- A.** a và b phải song song với nhau
- B.** a và b phải cắt nhau
- C.** a và b có thể chéo nhau hoặc song song với nhau
- D.** a và b không thể song song.

Lời giải

Chọn C

Nếu $a' // b' \Rightarrow$ mặt phẳng $(a, a') //$ mặt phẳng (b, b')

Khi đó a và b có thể song song hoặc chéo nhau.

Câu 27. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng xét các vectơ $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}; \vec{y} = -4\vec{a} + 2\vec{b}; \vec{z} = -3\vec{a} - 2\vec{c}$ Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A.** Hai vectơ $\vec{y}, \vec{z}$ cùng phương
- B.** Hai vectơ $\vec{x}, \vec{y}$ cùng phương
- C.** Hai vectơ $\vec{x}, \vec{z}$ cùng phương
- D.** Hai vectơ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng

Lời giải

Chọn B

Ta thấy $\vec{y} = -2\vec{x}$ nên $\vec{x}, \vec{y}$ cùng phương.

Câu 28. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào sai?

- A.** Nếu giá của ba vectơ cắt nhau từng đôi một thì 3 vectơ đồng phẳng
- B.** Nếu ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có một vectơ $\vec{0}$ thì ba vectơ đồng phẳng
- C.** Nếu giá của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng song song với một mặt phẳng thì ba vectơ đó đồng phẳng
- D.** Nếu trong ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có hai vectơ cùng phương thì ba vectơ đó đồng phẳng

Lời giải

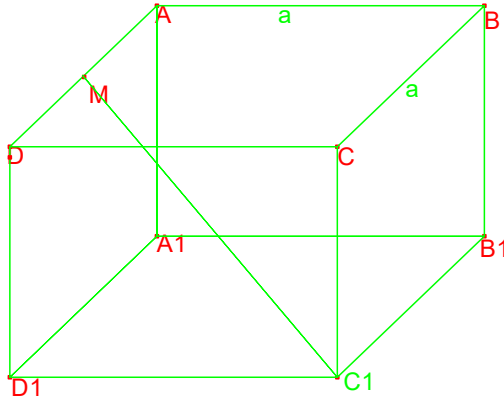
Chọn A

Câu 29. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M là trung điểm của AD . Chọn khẳng định đúng:

- A.** $\overrightarrow{B_1M} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1}$
- B.** $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{C_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$
- C.** $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$
- D.** $\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = 2\overrightarrow{B_1D}$

Lời giải

Chọn B

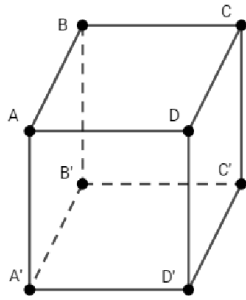


Ta có $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{D_1D} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{C_1C} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$

- Câu 30.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Bộ ba vector nào sau đây đồng phẳng?
A. $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{A'B'}$. **B.** $\overrightarrow{D'C'}, \overrightarrow{D'D}, \overrightarrow{AC}$. **C.** $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CC'}$. **D.** $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Từ hình vẽ bên ta thấy

$A'B' \parallel (ABCD)$ và $BC, AD \subset (ABCD)$ nên $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{A'B'}$ đồng phẳng.

$AC \subset (ABCD), D'C' \parallel (ABCD), DD' \perp (ABCD) \Rightarrow \overrightarrow{D'C'}, \overrightarrow{D'D}, \overrightarrow{AC}$ không đồng phẳng.

$CB, CD \subset (ABCD), CC' \perp (ABCD) \Rightarrow \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CC'}$ không đồng phẳng.

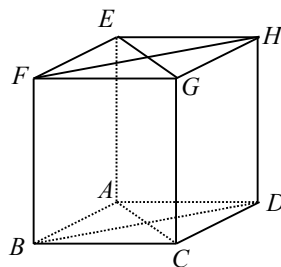
$AB, AD \subset (ABCD), AA' \perp (ABCD) \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ không đồng phẳng.

- Câu 31.** Trong không gian, mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?
A. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
B. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.
C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
D. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

- Câu 32.** Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?
A. 90° . **B.** 60° . **C.** 45° . **D.** 120° .

Lời giải

Chọn C



Ta có: $EG \parallel AC$ (do $ACGE$ là hình chữ nhật)

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 45^\circ.$$

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC . Số đo của góc (IJ, CD) bằng:

A. 30° .

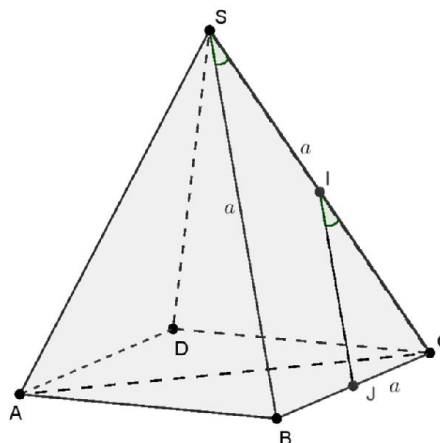
B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn C



Vì $IJ \parallel SB$ nên $(IJ, SC) = (SB, SC) = 60^\circ$ (do $\triangle SBC$ đều).

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh bằng a ; SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Khi đó, cosin góc giữa SB và AC bằng

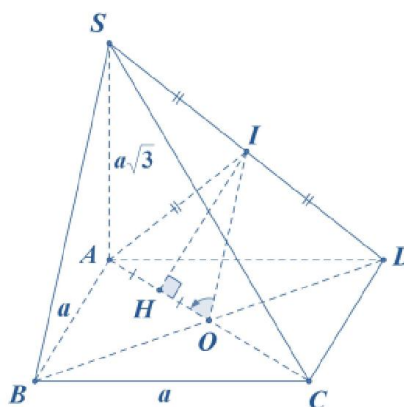
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Lời giải



Gọi I là trung điểm của SD

$\Rightarrow OI$ là đường trung bình của $\triangle SBD$

$$\Rightarrow \begin{cases} OI // SB \\ OI = \frac{SB}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AB^2}}{2} = \frac{\sqrt{3a^2 + a^2}}{2} = a \end{cases}$$

$$\text{Vì } OI // SB \Rightarrow (\widehat{SB, AC}) = (\widehat{OI, AC}) = \widehat{AOI}$$

$$\text{Ta có: } AI = \frac{SD}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AD^2}}{2} = \frac{\sqrt{3a^2 + a^2}}{2} = a$$

$$\Rightarrow AI = OI \Rightarrow \Delta AOI \text{ cân tại } I.$$

$$\text{Gọi } H \text{ là trung điểm của } OA \Rightarrow IH \perp OA$$

$$\text{Và } OH = \frac{OA}{2} = \frac{AC}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{Xét } \Delta OHI, \text{ ta có: } \cos \widehat{HOI} = \frac{OH}{OI} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{Vậy } \cos(\widehat{SB, AC}) = \cos \widehat{HOI} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Chọn đáp án B

Câu 35. Tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và đều có độ dài là 1. Gọi M là trung điểm cạnh AB . Góc giữa hai vec tơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{OM}$ bằng

A. 0° .

B. 45° .

C. 90° .

D. 120° .

Lời giải

Chọn D

Loại phương án A vì hai vec tơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{BC}$ không cùng phương;

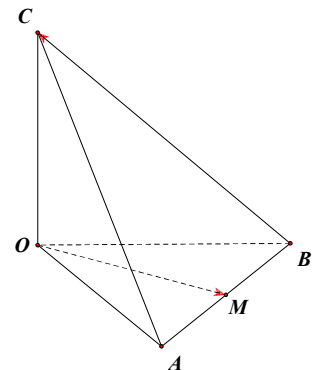
Loại phương án B vì góc giữa hai vec tơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{BC}$ không thể nhọn.

Loại đáp án C vì hai vec tơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{BC}$ không vuông góc với nhau.

$$\text{Vậy phương án D đúng vì: } \cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BC}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}} = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$\text{Mà: } \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Suy ra: } (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ.$$



Phần 2. Tự luận

Câu 1. Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5\sqrt{3n^2 + n}}{2(3n + 2)} = \frac{a\sqrt{3}}{b}$ (với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính

$$T = a + b.$$

Lời giải

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5\sqrt{3n^2 + n}}{2(3n + 2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(5\sqrt{3 + \frac{1}{n}} \right)}{n \left(6 + \frac{2}{n} \right)} = \frac{5\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 6 \end{cases}$$

Khi đó $T = a + b = 11$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ xác định với mọi $x \neq 0$ thỏa mãn $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x, x \neq 0$. Tính

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{f(x)}{x - \sqrt{2}}$$

Lời giải

$$\text{Ta có } f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x, x \neq 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{3}{x}, x \neq 0 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x \\ f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x \\ 2f\left(\frac{1}{x}\right) + 4f(x) = \frac{6}{x} \end{cases} \Rightarrow f(x) = -x + \frac{2}{x}$$

$$\text{Do đó } \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{f(x)}{x - \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{-x + \frac{2}{x}}{x - \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{-(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{x(x - \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{-(x + \sqrt{2})}{x} = -2.$$

Câu 3. Chứng minh rằng phương trình sau luôn có hai nghiệm trái dấu với mọi giá trị thực của tham số $m: x^3 + (2m - 1)x^2 - (m + 2)x - 2m = 0$

Lời giải

$$\text{Đặt } f(x) = x^3 + (2m - 1)x^2 - (m + 2)x - 2m.$$

$$\text{Với } m = 0 \text{ thì } f(x) = x^3 - x^2 - 2x \Rightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Khi này, phương trình luôn có hai nghiệm trái dấu là $x = -1, x = 2$ với $m = 0$ (1).

Với $m \neq 0$, ta thấy $f(0) = -2m$; $f(-1) = m$; $f(2) = 4m$.

Nhận thấy $f(-1) \cdot f(0) = -2m^2 < 0$ với mọi $m \neq 0$ và $f(0) \cdot f(2) = -8m^2 < 0$ với mọi $m \neq 0$.

Mà $f(x)$ là hàm đa thức bậc ba nên $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Suy ra $f(x)$ liên tục trên các đoạn $[-1; 0]$ và $[0; 2]$.

Khi đó luôn tồn tại $x_1 \in (-1; 0)$ và $x_2 \in (0; 2)$ sao cho $f(x_1) = 0, f(x_2) = 0$. Hay phương trình $f(x) = 0$ luôn có hai nghiệm trái dấu với mọi $m \neq 0$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra phương trình $f(x) = 0$ luôn có hai nghiệm trái dấu với mọi số thực m .

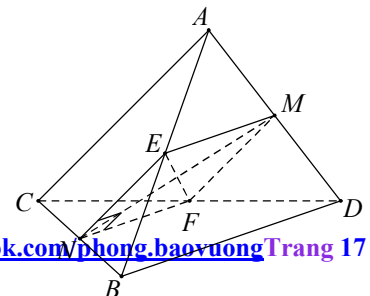
Suy ra điều phải chứng minh.

Câu 4. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = a, BD = 3a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Biết AC vuông góc với BD . Tính MN .

Lời giải

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} EN \parallel AC \\ NF \parallel BD \end{cases} \Rightarrow (AC, BD) = (NE, NF) = 90^\circ \Rightarrow NE \perp NF \quad (1).$$



$$\text{Mà: } \begin{cases} NE = FM = \frac{1}{2} AC \\ NF = ME = \frac{1}{2} BD \end{cases} \quad (2).$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow MENF$ là hình chữ nhật.

$$\text{Từ đó ta có: } MN = \sqrt{NE^2 + NF^2} = \sqrt{\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}.$$

Nguyễn Bảo Vương

Phần 1. Trắc nghiệm

Câu 1. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0.

- A. $(0,909)^n$. B. $(-1,012)^n$. C. $(1,013)^n$. D. $(-1,901)^n$.

Câu 2. Giới hạn của dãy số sau đây bằng bao nhiêu. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{n^3 - 3n + 3}$

- A. $\frac{1}{3}$. B. 2. C. 0 D. -1.

Câu 3. Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right]$.

- A. 0. B. 2. C. 1. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 2n + 1} - n)$ bằng

- A. $-\infty$. B. 1. C. 0. D. $-\frac{1}{2}$.

Câu 5. Số thập phân vô hạn tuần hoàn 0,511111... được biểu diễn bởi phân số

- A. $\frac{47}{90}$. B. $\frac{46}{90}$. C. $\frac{6}{11}$. D. $\frac{43}{90}$.

Câu 6. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}, \dots$ là?

- A. 4. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 7. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 2})$ bằng:

- A. $-\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{3}{2}$. D. 1.

Câu 8. Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n + 28} - \sqrt{n^2 - 4n + 5})$ có kết quả bằng:

- A. 0 B. $-\infty$ C. 3 D. $+\infty$

Câu 9. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 2n})$ có kết quả là

- A. 4. B. 2. C. 1. D. $+\infty$.

Câu 10. Tính $S = 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^{n-3}} + \dots$. Kết quả là:

- A. $\frac{27}{2}$. B. 14. C. 16. D. 15.

Câu 11. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x} + x - 1}{\sqrt{x^2 - x^3}}$ có kết quả là:

- A. -1 B. 1 C. 2 D. -2

Câu 12. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 + 3x + 2}{|x + 1|}$ có kết quả là:

- A. -1 B. $+\infty$. C. $-\infty$ D. 1

Câu 13. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. B. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = -\infty$. C. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^5} = +\infty$. D. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Câu 14. Tính giới hạn $K = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1}$.

- A. $K = 0$. B. $K = 1$. C. $K = -2$. D. $K = 4$.

Câu 15. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x^{2018} - 1}$.

- A. -1 . B. 1 . C. 2 . D. 0 .

Câu 16. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**

- A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2) = \frac{-3}{2}$. B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2) = +\infty$.
C. $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x + 2}{x + 1} = -\infty$. D. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x + 2}{x + 1} = -\infty$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + m & \text{khi } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{1+4x} - 1}{x} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của m để tồn tại giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

- A. $m = 2$. B. $m = -1$. C. $m = 3$. D. $m = 1$.

Câu 18. Tìm $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2}$.

- A. Không tồn tại. B. -1 . C. ± 1 . D. 1 .

Câu 19. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 3}{1 - 3x}$:

- A. $\frac{2}{3}$. B. $-\frac{2}{3}$. C. $-\frac{3}{2}$. D. 2 .

Câu 20. Hàm số nào dưới đây liên tục trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. $y = \frac{1}{x+1}$. B. $y = \frac{1}{x^2+1}$. C. $y = \sqrt{x+1}$. D. $y = \frac{1}{x} + x^2$.

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} & \text{khi } x > 2 \\ mx - 4 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

- A. $m = 1$. B. Không tồn tại m . C. $m = 3$. D. $m = -2$.

Câu 22. Hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \leq 1 \\ x + m & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$ khi m nhận giá trị

- A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. m bất kỳ. D. $m = -1$.

Câu 23. Để hàm số $y = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & \text{khi } x \leq -1 \\ 4x + a & \text{khi } x > -1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = -1$ thì giá trị của a là

- A. 4 . B. 1 . C. -1 . D. -4 .

- Câu 24.** Hàm số $f(x) = \begin{cases} ax+b+1, & \text{khi } x > 0 \\ a \cos x + b \sin x, & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi
- A. $a-b=1$. B. $a-b=-1$. C. $a+b=1$ D. $a+b=1$
- Câu 25.** Cho a, b là hai số thực sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+ax+b}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 2ax-1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính
- $a-b$.
- A. 0. B. -1. C. -5. D. 7.
- Câu 26.** Qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) , hai đường thẳng chéo nhau a và b có hình chiếu là 2 đường thẳng a' và b' . Mệnh đề nào sau đây đúng:
- A. a' và b' luôn cắt nhau
B. a' và b' có thể trùng nhau
C. a' và b' không thể song song
D. a' và b' có thể cắt nhau hoặc song song với nhau.
- Câu 27.** Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào *sai*?
- A. Nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ thì bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng
B. Tam giác ABC có I là trung điểm cạnh BC thì ta có đẳng thức: $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
C. Vì $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$ nên suy ra B là trung điểm của AC
D. Vì $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AD}$ nên 4 điểm A, B, C, D đồng phẳng.
- Câu 28.** Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau, biết $AB = AC = AD = 1$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng
- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 90° .
- Câu 29.** Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, đặt $\alpha = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC_1})$; $\beta = (\overrightarrow{DA_1}, \overrightarrow{BB_1})$; $\gamma = (\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{C_1C})$ Khi đó: là $\alpha + \beta + \gamma$:
- A. 360° B. 375° C. 315° D. 275°
- Câu 30.** Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Đặt $\overrightarrow{AA_1} = a$; $\overrightarrow{AB} = b$; $\overrightarrow{AC} = c$; $\overrightarrow{BC_1} = d$ trong các đẳng thức sau đẳng thức nào đúng.
- A. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$ B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$
C. $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$ D. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$
- Câu 31.** Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?
- A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.
C. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại.
D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng còn lại.
- Câu 32.** Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Góc giữa AC và DA_1 là
- A. 45° . B. 90° . C. 60° . D. 120° .
- Câu 33.** Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?
- A. 90° . B. 60° . C. 45° . D. 120° .
- Câu 34.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$, $IJ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (I, J lần lượt là trung điểm của BC và AD). Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD là
- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 35. Cho tứ diện đều $ABCD$ (Tứ diện có tất cả các cạnh bằng nhau). Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Phần 2. Tự luận

Câu 1. Biết $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 - 4n} - \sqrt{4n^2 + 1}}{\sqrt{3n^2 + 1} - n} = \frac{6 - \sqrt{3}}{2} - \frac{a}{b}$, trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, a và b là các số nguyên dương. Tính ab

Câu 2. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+5} - 1 & \text{khi } x \geq -1 \\ \frac{x^3 + ax^2 + ax + 1}{x+1} & \text{khi } x < -1 \end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x = -1$

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$. SA vuông góc với mặt đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN .

Nguyễn Bảo Vương

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.C	3.C	4.B	5.B	6.D	7.C	8.C	9.B	10.A
11.B	12.A	13.B	14.C	15.D	16.C	17.A	18.A	19.B	20.B
21.C	22.D	23.A	24.A	25.D	26.D	27.A	28.D	29.B	30.C
31.D	32.C	33.C	34.C	35.D					

Phần 1. Trắc nghiệm

Câu 1. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0 .

- A.** $(0,909)^n$. **B.** $(-1,012)^n$. **C.** $(1,013)^n$. **D.** $(-1,901)^n$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\lim q^n = 0$, với $|q| < 1$.

Câu 2. Giới hạn của dãy số sau đây bằng bao nhiêu. $\lim \frac{2n^2 + 1}{n^3 - 3n + 3}$

- A.** $\frac{1}{3}$. **B.** 2 . **C.** 0 **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

$$\lim \frac{2n^2 + 1}{n^3 - 3n + 3} = \lim \frac{\frac{2n^2 + 1}{n^3}}{\frac{n^3 - 3n + 3}{n^3}} = \lim \frac{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}}{1 - \frac{3}{n^2} + \frac{3}{n^3}} = \frac{\lim \left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n^3} \right)}{\lim \left(1 - \frac{3}{n^2} + \frac{3}{n^3} \right)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Câu 3. Tính giới hạn $\lim \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right]$.

- A.** 0 . **B.** 2 . **C.** 1 . **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

$$\text{Vậy } \lim \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right] = \lim \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

Câu 4. $\lim (\sqrt{n^2 - 2n + 1} - n)$ bằng

- A.** $-\infty$. **B.** 1 . **C.** 0 . **D.** $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \lim (\sqrt{n^2 - 2n + 1} - n) &= \lim \frac{(\sqrt{n^2 - 2n + 1} - n)(\sqrt{n^2 - 2n + 1} + n)}{\sqrt{n^2 - 2n + 1} + n} \\ &= \lim \frac{-2n + 1}{\sqrt{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} = -1 \end{aligned}$$

Câu 5. Số thập phân vô hạn tuần hoàn 0,511111... được biểu diễn bởi phân số

A. $\frac{47}{90}$.

B. $\frac{46}{90}$.

C. $\frac{6}{11}$.

D. $\frac{43}{90}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$0,51111... = 0,5 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + ...$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + ... = \frac{1}{2} + \frac{1}{100} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + ... \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{23}{45} = \frac{46}{90}.$$

Câu 6. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, ..., \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}, ...$ là?

A. 4.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Cấp số nhân có $u_1 = \frac{1}{3}, q = -\frac{1}{3}$. Do đó tổng cần tìm là

$$S = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

Câu 7. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 2})$ bằng:

A. $-\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{3}{2}$.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 2}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 2}) \cdot (\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 2})}{(\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 2})} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{n^2 + 1 - (n^2 - 2)}{(\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 2})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n\sqrt{\frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}} + n\sqrt{\frac{n^2}{n^2} - \frac{2}{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{\frac{n^2}{n^2} - \frac{2}{n^2}}} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Câu 8. Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n + 28} - \sqrt{n^2 - 4n + 5})$ có kết quả bằng:

A. 0

B. $-\infty$

C. 3

D. $+\infty$

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n + 28} - \sqrt{n^2 - 4n + 5}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n + 23}{(\sqrt{n^2 + 2n + 28} + \sqrt{n^2 - 4n + 5})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{23}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{28}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}}} = 3 \end{aligned}$$

Câu 9. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 2n})$ có kết quả là

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{\sqrt{n^2 + 2n} + \sqrt{n^2 - 2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{1 - \frac{2}{n}}} = 2.$$

Câu 10. Tính $S = 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^{n-3}} + \dots$. Kết quả là:

A. $\frac{27}{2}$.

B. 14.

C. 16.

D. 15.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } S = 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^{n-3}} + \dots$$

$$\Rightarrow 3S = 27 + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^{n-2}} + \dots$$

$$\Rightarrow 2S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(27 - \frac{1}{3^{n-2}} \right) = 27 \Rightarrow S = \frac{27}{2}.$$

Câu 11. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x} + x - 1}{\sqrt{x^2 - x^3}}$ có kết quả là:

A. -1

B. 1

C. 2

D. -2

Lời giải

Chọn D

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x} + x - 1}{\sqrt{x^2 - x^3}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x} + x - 1}{\sqrt{x^2 - x^3}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2}} = 1$$

Câu 12. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 + 3x + 2}{|x + 1|}$ có kết quả là:

A. -1

B. $+\infty$.

C. $-\infty$

D. 1

Lời giải

Chọn D

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 + 3x + 2}{|x + 1|} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{(x+1)(x+2)}{|x+1|} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{(x+2)}{-1} = -1 \text{ (vì } x + 1 < 0 \text{)}$$

Câu 13. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

B. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = -\infty$.

C. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^5} = +\infty$.

D. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ do $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ và $x > 0$. Vậy đáp án A đúng.

Suy ra đáp án B sai.

Các đáp án C và D đúng. Giải thích tương tự đáp án A

Câu 14. Tính giới hạn $K = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1}$.

A. $K = 0$.

B. $K = 1$.

C. $K = -2$.

D. $K = 4$.

Lời giải

Ta có: $K = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = -2.$

Câu 15. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x^{2018}-1}.$

A. $-1.$

B. $1.$

C. $2.$

D. $0.$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x^{2018}-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{2017}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{1 - \frac{1}{x^{2017}}} = 0.$$

Câu 16. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**

A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-x+1}+x-2) = \frac{-3}{2}.$

B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-x+1}+x-2) = +\infty.$

C. $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x+2}{x+1} = -\infty.$

D. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x+2}{x+1} = -\infty.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

+ Với đáp án A ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-x+1}+x-2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2-x+1-x^2+4x-4}{\sqrt{x^2-x+1}-x+2} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x-3}{\sqrt{x^2-x+1}-x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x \left(3 - \frac{3}{x} \right)}{-x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 - \frac{2}{x} \right)} \right) = \frac{-3}{2} \Rightarrow \text{A đúng.}$$

+ Với đáp án B ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-x+1}+x-2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-x+1-x^2+4x-4}{\sqrt{x^2-x+1}-x+2} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-3}{\sqrt{x^2-x+1}-x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x \left(3 - \frac{3}{x} \right)}{x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 + \frac{2}{x} \right)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{0} \right) = +\infty \Rightarrow \text{B đúng.}$$

+ Với đáp án C ta có $\lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1) = 0$, $x+1 < 0$ với mọi $x < -1$ và $\lim_{x \rightarrow -1^-} (3x+2) = -1 < 0$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x+2}{x+1} = +\infty \Rightarrow \text{C sai.}$

+ Với đáp án D ta có $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1) = 0$, $x+1 > 0$ với mọi $x > -1$ và $\lim_{x \rightarrow -1^+} (3x+2) = -1 < 0$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x+2}{x+1} = -\infty \Rightarrow \text{D đúng.}$

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+m & \text{khi } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{1+4x}-1}{x} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của m để tồn tại giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

A. $m = 2$.

B. $m = -1$.

C. $m = 3$.

D. $m = 1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x+m) = m$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+4x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{\sqrt{1+4x}+1} = 2$$

Tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Leftrightarrow m = 2$.

Câu 18. Tìm $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}$.

A. Không tồn tại.

B. -1 .

C. ± 1 .

D. 1 .

Lời giải

Chọn A

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x-2}.$$

Xét:

• $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x-2} = 1.$

• $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1.$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x-2}$ nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x-2}$.

Câu 19. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3}{1-3x}$:

A. $\frac{2}{3}$.

B. $-\frac{2}{3}$.

C. $-\frac{3}{2}$.

D. 2 .

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3}{1-3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}-3} = -\frac{2}{3}.$

Câu 20. Hàm số nào dưới đây liên tục trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. $y = \frac{1}{x+1}.$

B. $y = \frac{1}{x^2+1}.$

C. $y = \sqrt{x+1}.$

D. $y = \frac{1}{x} + x^2.$

Lời giải

Chọn B

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ mx-4 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

A. $m = 1$.

B. Không tồn tại m .

C. $m = 3$.

D. $m = -2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(2) = 2m - 4$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} (mx - 4) = 2m - 4$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} x = 2$.

Đề hàm số liên tục tại $x = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 2m - 4 = 2 \Leftrightarrow m = 3$.

Câu 22. Hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \leq 1 \\ x + m & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$ khi m nhận giá trị

A. $m = 1$.

B. $m = 2$.

C. m bất kỳ.

D. $m = -1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 1) = 0$; $f(1) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + m) = m + 1$

Hàm số liên tục tại $x_0 = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Câu 23. Đề hàm số $y = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & \text{khi } x \leq -1 \\ 4x + a & \text{khi } x > -1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = -1$ thì giá trị của a là

A. 4.

B. 1.

C. -1.

D. -4.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(-1) = 0$.

$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x^2 + 3x + 2) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (4x + a) = a - 4$.

Hàm số đã cho liên tục tại $x = -1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = f(-1)$

$\Leftrightarrow a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 4$.

Câu 24. Hàm số $f(x) = \begin{cases} ax + b + 1, & \text{khi } x > 0 \\ a \cos x + b \sin x, & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

A. $a - b = 1$.

B. $a - b = -1$.

C. $a + b = 1$

D. $a + b = 1$

Lời giải

Chọn A

Khi $x < 0$ thì $f(x) = a \cos x + b \sin x$ liên tục với $x < 0$.

Khi $x > 0$ thì $f(x) = ax + b + 1$ liên tục với mọi $x > 0$.

Tại $x = 0$ ta có $f(0) = a$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax + b + 1) = b + 1$.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a \cos x + b \sin x) = a$.

Đề hàm số liên tục tại $x = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow a = b + 1 \Leftrightarrow a - b = 1$.

Câu 25. Cho a, b là hai số thực sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 2ax - 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính

$a - b$.

A. 0.

B. -1.

C. -5.

D. 7.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(1) = 2a - 1$.

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì phải tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1}$ và $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$.

Để tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1}$ thì $(x^2 + ax + b) : (x - 1) \Rightarrow 1 + a + b = 0 \Rightarrow b = -a - 1$.

Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + a + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + a + 1) = a + 2$.

Do đó để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

$\Leftrightarrow 2a - 1 = a + 2 \Leftrightarrow a = 3$. Suy ra $b = -4$.

Vậy $a - b = 7$.

Câu 26. Qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) , hai đường thẳng chéo nhau a và b có hình chiếu là 2 đường thẳng a' và b' . Mệnh đề nào sau đây đúng:

A. a' và b' luôn cắt nhau

B. a' và b' có thể trùng nhau

C. a' và b' không thể song song

D. a' và b' có thể cắt nhau hoặc song song với nhau.

Lời giải

Chọn D

+ Gọi d là phương chiếu, $a \subset (P)$, $b \subset (Q)$ và $d \parallel (P)$, $d \parallel (Q)$.

+ Nếu $(P) \cap (Q) \Rightarrow a'$ và b' cắt nhau

+ Nếu $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a' \parallel b'$

Câu 27. Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào **sai**?

A. Nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ thì bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng

B. Tam giác ABC có I là trung điểm cạnh BC thì ta có đẳng thức: $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

C. Vì $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$ nên suy ra B là trung điểm của AC

D. Vì $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AD}$ nên 4 điểm A, B, C, D đồng phẳng.

Lời giải

Chọn A

Bằng quy tắc 3 điểm ta nhận thấy rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ đúng với mọi điểm A, B, C, D nằm trong không gian chứ không phải chỉ riêng 4 điểm đồng phẳng.

Câu 28. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau, biết $AB = AC = AD = 1$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. 45° .

B. 60° .

C. 30° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn D

CÁCH 1. Vì $\left. \begin{matrix} AB \perp AC \\ AB \perp AD \end{matrix} \right\} \Rightarrow AB \perp (ACD) \Rightarrow AB \perp CD$.

Câu 29. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, đặt $\alpha = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC_1})$; $\beta = (\overrightarrow{DA_1}, \overrightarrow{BB_1})$; $\gamma = (\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{C_1C})$ Khi đó: là $\alpha + \beta + \gamma$:

A. 360°

B. 375°

C. 315°

D. 275°

Lời giải

Chọn B

(hình câu 3)

$$\alpha = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC_1}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_1}) = 60^\circ$$

$$\beta = (\overrightarrow{DA_1}, \overrightarrow{BB_1}) = (\overrightarrow{DA_1}, \overrightarrow{A_1A}) = 135^\circ$$

$$\gamma = (\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{C_1C}) = (\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{A_1A}) = 180^\circ$$

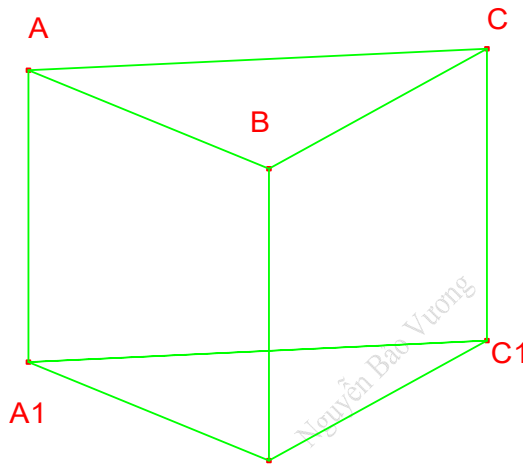
$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 60^\circ + 135^\circ + 180^\circ = 375^\circ$$

Câu 30. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Đặt $\overrightarrow{AA_1} = a$; $\overrightarrow{AB} = b$; $\overrightarrow{AC} = c$; $\overrightarrow{BC_1} = d$ trong các đẳng thức sau đẳng thức nào đúng.

- A. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$ B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$
 C. $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$ D. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$

Lời giải

Chọn C



Ta có: $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$

Câu 31. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
 B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.
 C. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại.
 D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng còn lại.

Lời giải

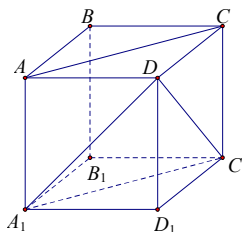
Chọn D

Câu 32. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Góc giữa AC và DA_1 là

- A. 45° . B. 90° . C. 60° . D. 120° .

Lời giải

Chọn C



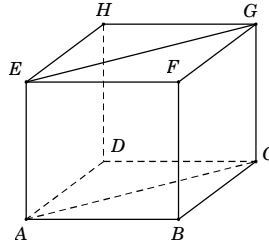
Vì $A'C' // AC$ nên góc giữa AC và DA_1 là $\widehat{DA_1C_1}$.

Vì tam giác DA_1C_1 đều nên $\widehat{DA_1C_1} = 60^\circ$.

- Câu 33.** Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?
A. 90° . **B.** 60° . **C.** 45° . **D.** 120° .

Lời giải

Chọn C



Vì $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$ ($AEGC$ là hình chữ nhật) nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 45^\circ$ ($ABCD$ là hình vuông).

- Câu 34.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$, $IJ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (I, J lần lượt là trung điểm của BC và AD). Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD là
A. 30° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 90° .

Lời giải

Chọn

C.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm AC, BC .

Ta có:

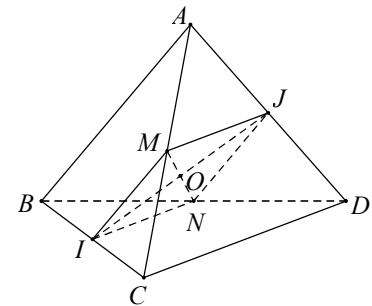
$$\begin{cases} MI = NI = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD = \frac{a}{2} \\ MI \parallel AB \parallel CD \parallel NI \end{cases} \Rightarrow MINJ \text{ là hình thoi.}$$

Gọi O là giao điểm của MN và IJ .

Ta có: $\widehat{MIN} = 2\widehat{MIO}$.

$$\text{Xét } \triangle MIO \text{ vuông tại } O, \text{ ta có: } \cos \widehat{MIO} = \frac{IO}{MI} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{MIO} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{MIN} = 60^\circ.$$

Mà: $(AB, CD) = (IM, IN) = \widehat{MIN} = 60^\circ$.



- Câu 35.** Cho tứ diện đều $ABCD$ (Tứ diện có tất cả các cạnh bằng nhau). Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng
A. 30° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 90° .

Lời giải

Chọn

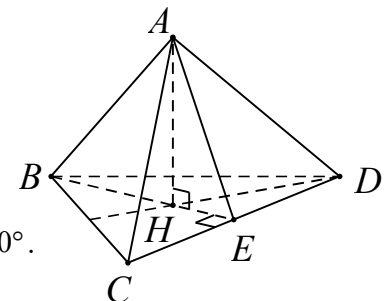
D.

Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD \Rightarrow AH \perp (BCD)$.

Gọi E là trung điểm $CD \Rightarrow BE \perp CD$ (do $\triangle BCD$ đều).

Do $AH \perp (BCD) \Rightarrow AH \perp CD$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} CD \perp BE \\ CD \perp AH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABE) \Rightarrow CD \perp AB \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 90^\circ.$$



Phần 2. Tự luận

Câu 1. Biết $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 - 4n} - \sqrt{4n^2 + 1}}{\sqrt{3n^2 + 1} - n} = \frac{6 - \sqrt{3}}{2} - \frac{a}{b}$, trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, a và b là các số nguyên dương. Tính $a.b$

Lời giải

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 - 4n} - \sqrt{4n^2 + 1}}{\sqrt{3n^2 + 1} - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{4}{n}} - \sqrt{4 + \frac{1}{n^2}}}{\sqrt{3 + \frac{1}{n^2}} - 1} = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} = \frac{6 - \sqrt{3}}{2} - \frac{7}{2}.$$

Suy ra $\frac{a}{b} = \frac{7}{2} \Rightarrow a = 7; b = 2 \Rightarrow a.b = 14.$

Câu 2. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{1+x - (1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+5} - 1 & \text{khi } x \geq -1 \\ \frac{x^3 + ax^2 + ax + 1}{x+1} & \text{khi } x < -1 \end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x = -1$

Lời giải

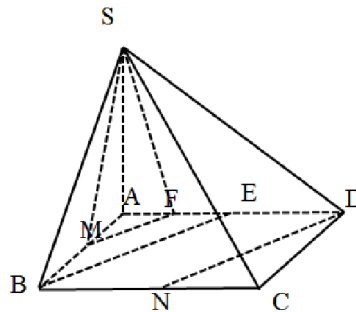
Ta có $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (\sqrt{x+5} - 1) = 1 = f(-1).$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 + ax^2 + ax + 1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+1)[x^2 + (a-1)x + 1]}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} [x^2 + (a-1)x + 1] = 3 - a \end{aligned}$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = -1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow 3 - a = 1 \Leftrightarrow a = 2.$

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$. SA vuông góc với mặt đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN .

Lời giải



Gọi E là trung điểm AD , F là trung điểm AE .

Ta có $MF \parallel BE \parallel ND \Rightarrow$ góc giữa SM và ND bằng góc giữa SM và MF .

Ta có $SM^2 = SA^2 + AM^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow SM = a\sqrt{2}.$

$SF = SM = a\sqrt{2}.$

$$BE = \sqrt{AB^2 + AE^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow MF = \frac{BE}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Áp dụng định lí côsin trong ΔSMF :

$$SF^2 = SM^2 + MF^2 - 2SM.MF \cos \widehat{SMF}$$

$$\Leftrightarrow \cos \widehat{SMF} = \frac{SM^2 + MF^2 - SF^2}{2.SM.MF} = \frac{2a^2 + \frac{5a^2}{4} - 2a^2}{2.a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{8}.$$

Vậy cosin của góc giữa SM và ND bằng $\frac{\sqrt{10}}{8}$.

Nguyễn Bảo Vương

Phần 1. Trắc nghiệm

Câu 1. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{1+n}$ được kết quả là

- A. 2. B. 0. C. $\frac{1}{2}$. D. 1.

Câu 2. Dãy số nào sau đây có giới hạn khác 0 ?

- A. $\frac{1}{n}$. B. $\frac{1}{\sqrt{n}}$. C. $\frac{n+1}{n}$. D. $\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$.

Câu 3. Để tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 4n + 6} - \sqrt{n^2 + 4})$. Một học sinh lập luận ba bước sau:

Bước 1: Ta có

$$\sqrt{n^2 - 4n + 6} - \sqrt{n^2 + 4} = \sqrt{n^2 \left(1 - \frac{4}{n} + \frac{6}{n^2}\right)} - \sqrt{n^2 \left(1 + \frac{4}{n^2}\right)} = n \left(\sqrt{1 - \frac{4}{n} + \frac{6}{n^2}} - \sqrt{1 + \frac{4}{n^2}} \right)$$

Bước 2: Do đó $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 4n + 6} - \sqrt{n^2 + 4}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{1 - \frac{4}{n} + \frac{6}{n^2}} - \sqrt{1 + \frac{4}{n^2}} \right)$

Bước 3: Do $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 - \frac{4}{n} + \frac{6}{n^2}} - \sqrt{1 + \frac{4}{n^2}} \right) = 0$ nên $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

Hỏi lập luận trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai bắt đầu từ bước nào?

- A. Sai từ bước 1. B. Sai từ bước 3. C. Lập luận đúng. D. Sai từ bước 2.

Câu 4. Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n + 3} - n)$ có kết quả bằng:

- A. 1 B. 0. C. $+\infty$ D. $-\infty$

Câu 5. Số thập phân vô hạn tuần hoàn 0,212121. biểu diễn dưới dạng phân số là:

- A. $\frac{2121}{10^4}$. B. $\frac{1}{21}$. C. $\frac{7}{33}$. D. $\frac{212121}{10^6}$.

Câu 6. Tổng của cấp số nhân vô hạn $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}, \dots$ là

- A. $-\frac{2}{3}$. B. 1. C. $-\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 7. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{2 \cdot 3^{n-1}}, \dots$ là?

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{8}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{3}{8}$.

Câu 8. Tìm $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+n} \right)$

- A. $L = \frac{5}{2}$. B. $L = +\infty$. C. $L = 2$. D. $L = \frac{3}{2}$.

Câu 9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ bằng

- A. 0. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 10. Gọi $S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{2^n}{3^n} + \dots$. Giá trị của S bằng

- A. 3. B. 5. C. 6. D. 4.

Câu 11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{2x+5}$ bằng:

- A. 0. B. $+\infty$. C. $-\infty$. D. $-\frac{1}{2}$.

Câu 12. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{3x+2}$ bằng:

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $-\frac{1}{3}$. D. $-\frac{1}{2}$.

Câu 13. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{x+5}$ bằng:

- A. 3. B. -3. C. $-\frac{1}{5}$. D. 5.

Câu 14. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$ bằng

- A. 0. B. -2. C. $-\infty$. D. 2.

Câu 15. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-4x}{5x+2}$ bằng

- A. $\frac{5}{4}$. B. $-\frac{5}{4}$. C. $-\frac{4}{5}$. D. $\frac{4}{5}$.

Câu 16. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2+2x+3}{x^2+1}$.

- A. 5. B. 4. C. 3. D. 2.

Câu 17. Giới hạn của hàm số $f(x) = \frac{(x^2+1)(x+1)}{(2x^4+x)(x+1)}$ khi x tiến đến $-\infty$ có kết quả là:

- A. 0 B. $\frac{1}{2}$. C. 2 D. $-\infty$

Câu 18. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^4+x^2+2}{(x^3+1)(3x-1)}}$ có kết quả là:

- A. $-\sqrt{3}$ B. $\sqrt{3}$. C. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 19. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x} = +\infty$. B. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x} = 1$. C. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x} = -\infty$. D. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x} = 0$.

Câu 20. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn hàm số $y = \sqrt{x^2-2mx+9}$ liên tục trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

- A. 6. B. 7. C. 5. D. Vô số.

Câu 21. Giá trị của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-3x+2} & \text{khi } x \neq 2 \\ \frac{2a+1}{6} & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

A. 2. B. $\frac{1}{2}$. C. 3. D. 1.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;3]$ sao cho $f(-2) = -5$; $f(3) = -1$. Hỏi phương trình $f(x) = -3$ có bao nhiêu nghiệm trên đoạn $[-2;3]$?

A. Vô nghiệm. B. Có ít nhất một nghiệm.
C. Có ít nhất hai nghiệm. D. Có ít nhất ba nghiệm.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{|2x^2-7x+6|}{x-2} & \text{khi } x < 2 \\ a + \frac{1-x}{2+x} & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$. Biết a là giá trị để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$, tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $-x^2 + ax + \frac{7}{4} > 0$.

A. 1. B. 4. C. 3. D. 2.

Câu 24. Nếu hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{khi } x < -5 \\ x + 17 & \text{khi } -5 \leq x \leq 10 \\ ax + b + 10 & \text{khi } x > 10 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $a + b$ bằng

A. -1. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 25. Tìm tham số thực m để hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-12}{x+4} & \text{khi } x \neq -4 \\ mx+1 & \text{khi } x = -4 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = -4$.

A. $m = 4$. B. $m = 3$. C. $m = 2$. D. $m = 5$.

Câu 26. Phép chiếu song song theo phương l không song song với a hoặc b , mặt phẳng chiếu là (P) , hai đường thẳng a và b biến thành a' và b' . Quan hệ nào giữa a và b không được bảo toàn trong phép chiếu song song?

A. Cắt nhau. B. Trùng nhau. C. Song song. D. Chéo nhau.

Câu 27. Cho $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là hình hộp, trong các khẳng định sau khẳng định sai:

A. $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = 2\overrightarrow{AC}$ B. $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{CA_1} + 2\overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$
C. $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{AA_1}$ D. $\overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CC_1}$

Câu 28. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng xét các vectơ $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}$; $\vec{y} = -4\vec{a} + 2\vec{b}$; $\vec{z} = -3\vec{a} - 2\vec{c}$ Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Hai vectơ $\vec{y}, \vec{z}$ cùng phương
B. Hai vectơ $\vec{x}, \vec{y}$ cùng phương
C. Hai vectơ $\vec{x}, \vec{z}$ cùng phương
D. Hai vectơ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng

Câu 29. Hãy chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

A. Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng nếu có hai trong ba vectơ đó cùng phương.
B. Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng nếu có một trong ba vectơ đó bằng vectơ $\vec{0}$.
C. vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ luôn luôn đồng phẳng với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

D. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ba vectơ $\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{DA'}$ đồng phẳng

Câu 30. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$; $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. M là điểm xác định bởi $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. M là tâm hình bình hành $ABB'A'$.

B. M là tâm hình bình hành $BCC'B'$.

C. M là trung điểm BB' .

D. M là trung điểm CC' .

Câu 31. Trong không gian cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Nếu a và b cùng vuông góc với c thì $a \parallel b$.

B. Nếu $a \parallel b$ và $c \perp a$ thì $c \perp b$.

C. Nếu góc giữa a và c bằng góc giữa b và c thì $a \parallel b$.

D. Nếu a và b cùng nằm trong mp $(\alpha) \parallel c$ thì góc giữa a và c bằng góc giữa b và c .

Câu 32. Cho hình lập phương $ABCDEFGH$, góc giữa hai đường thẳng EG và BC là:

A. 0° .

B. 45° .

C. 90° .

D. 30°

Câu 33. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa AC và DA' là:

A. 45° .

B. 90° .

C. 60° .

D. 120° .

Câu 34. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD . Góc (IE, JF) bằng

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Câu 35. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{CAD} = 90^\circ$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?

A. 120° .

B. 90° .

C. 60° .

D. 45° .

Phần 2. Tự luận

Câu 36. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^3 + bn^2 + 2n + 4}{n^2 + 1} = 1$. Tính $2a + b$

Câu 37. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 3x + 13} - 2x - 1}{7x}$.

Câu 38. Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m :
 $\cos x + m \cos 2x = 0$

Câu 39. Cho tứ diện $ABCD$ với $AC = \frac{3}{2}AD$, $\widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60^\circ$, $CD = AD$. Gọi φ là góc giữa AB và CD . Tính $\cos \varphi$

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.C	3.B	4.A	5.C	6.D	7.D	8.C	9.B	10.A
11.A	12.C	13.A	14.B	15.C	16.A	17.A	18.D	19.A	20.B
21.D	22.B	23.D	24.A	25.C	26.D	27.C	28.B	29.C	30.C
31.B	32.B	33.C	34.D	35.B					

Phần 1. Trắc nghiệm

Câu 1. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{1+n}$ được kết quả là

- A.** 2. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

Lời giải

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{1+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(2 + \frac{1}{n} \right)}{n \left(\frac{1}{n} + 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + 1} = \frac{2+0}{0+1} = 2.$$

Câu 2. Dãy số nào sau đây có giới hạn khác 0 ?

- A.** $\frac{1}{n}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{n}}$. **C.** $\frac{n+1}{n}$. **D.** $\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1.$$

Câu 3. Để tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 - 4n + 6} - \sqrt{n^2 + 4} \right)$. Một học sinh lập luận ba bước sau:

Bước 1: Ta có

$$\sqrt{n^2 - 4n + 6} - \sqrt{n^2 + 4} = \sqrt{n^2 \left(1 - \frac{4}{n} + \frac{6}{n^2} \right)} - \sqrt{n^2 \left(1 + \frac{4}{n^2} \right)} = n \left(\sqrt{1 - \frac{4}{n} + \frac{6}{n^2}} - \sqrt{1 + \frac{4}{n^2}} \right)$$

$$\text{Bước 2: Do đó } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 - 4n + 6} - \sqrt{n^2 + 4} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{1 - \frac{4}{n} + \frac{6}{n^2}} - \sqrt{1 + \frac{4}{n^2}} \right)$$

$$\text{Bước 3: Do } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty \text{ và } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 - \frac{4}{n} + \frac{6}{n^2}} - \sqrt{1 + \frac{4}{n^2}} \right) = 0 \text{ nên } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

Hỏi lập luận trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai bắt đầu từ bước nào?

- A.** Sai từ bước 1. **B.** Sai từ bước 3. **C.** Lập luận đúng. **D.** Sai từ bước 2.

Lời giải

Chọn B

Bạn sai từ bước 3, ta có thể làm tiếp như sau:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 - 4n + 6} - \sqrt{n^2 + 4} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{1 - \frac{4}{n} + \frac{6}{n^2}} - \sqrt{1 + \frac{4}{n^2}} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(1 - \frac{4}{n} + \frac{6}{n^2} - 1 - \frac{4}{n^2} \right)}{\sqrt{1 - \frac{4}{n} + \frac{6}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{4}{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4 + \frac{2}{n}}{\sqrt{1 - \frac{4}{n} + \frac{6}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{4}{n^2}}} = -2.$$

Câu 4. Giới hạn $\lim(\sqrt{n^2 + 2n + 3} - n)$ có kết quả bằng:

A. 1

B. 0.

C. $+\infty$

D. $-\infty$

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned}\lim(\sqrt{n^2 + 2n + 3} - n) &= \lim \frac{(\sqrt{n^2 + 2n + 3} - n)(\sqrt{n^2 + 2n + 3} + n)}{(\sqrt{n^2 + 2n + 3} + n)} = \lim \frac{n^2 + 2n + 3 - n^2}{(\sqrt{n^2 + 2n + 3} + n)} \\ &= \lim \frac{2n + 3}{\sqrt{n^2 + 2n + 3} + n} = \lim \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} + 1} = 1\end{aligned}$$

Câu 5. Số thập phân vô hạn tuần hoàn 0,212121. biểu diễn dưới dạng phân số là:

A. $\frac{2121}{10^4}$.

B. $\frac{1}{21}$.

C. $\frac{7}{33}$.

D. $\frac{212121}{10^6}$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned}0,212121... &= \frac{2}{10} + \frac{1}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{1}{10000} + \frac{2}{100000} + \frac{1}{1000000} + ... = \frac{2}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{2}{10^5} + ... \\ &= 2\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^5} + \frac{1}{10^7} + ... \right) + \left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^8} + ... \right) = 2 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10^2}} + \frac{\frac{1}{10^2}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{20}{99} + \frac{1}{99} = \frac{7}{33}\end{aligned}$$

Câu 6. Tổng của cấp số nhân vô hạn $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ..., \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}, ...$ là

A. $-\frac{2}{3}$.

B. 1.

C. $-\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} + ... = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Câu 7. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{18}, ..., \frac{(-1)^{n+1}}{2 \cdot 3^{n-1}}, ...$ là?

A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{8}{3}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{3}{8}$.

Lời giải

Chọn D

Cấp số nhân có $u_1 = \frac{1}{2}, q = -\frac{1}{3}$. Do đó tổng cần tìm là

$$S = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}.$$

Câu 8. Tìm $L = \lim\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + ... + \frac{1}{1+2+...+n}\right)$

A. $L = \frac{5}{2}$.

B. $L = +\infty$.

C. $L = 2$.

D. $L = \frac{3}{2}$.

Chọn C

Ta có $1 + 2 + 3 + \dots + k$ là tổng của cấp số cộng có $u_1 = 1$, $d = 1$ nên $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{(1+k)k}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+2+\dots+k} = \frac{2}{k(k+1)} = \frac{2}{k} - \frac{2}{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

$$L = \lim \left(\frac{2}{1} - \frac{2}{2} + \frac{2}{2} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \dots + \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} \right) = \lim \left(\frac{2}{1} - \frac{2}{n+1} \right) = 2.$$

Câu 9.

$\lim \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ bằng

- A.** 0. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \lim \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2}) = \lim \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2}} = \lim \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Câu 10. Gọi $S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{2^n}{3^n} + \dots$. Giá trị của S bằng

- A.** 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{2^n}{3^n} + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}S = \frac{3}{2} + 1 + \frac{2}{3} + \dots + \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}} + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}S = \frac{3}{2} - \frac{2^n}{3^n} + \dots = \lim \left(\frac{3}{2} - \frac{2^n}{3^n} \right) = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow S = 3.$$

Câu 11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{2x+5}$ bằng:

- A.** 0. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Áp dụng quy tắc tìm giới hạn, ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{2x+5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x \left(2 + \frac{5}{x} \right)} = 0.$$

Câu 12. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{3x+2}$ bằng:

- A.** $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $-\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{3x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x}-1}{3+\frac{2}{x}} = -\frac{1}{3}$.

Câu 13. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{x+5}$ bằng:

- A.** 3. **B.** -3. **C.** $-\frac{1}{5}$. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{x+5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-\frac{1}{x}}{1+\frac{5}{x}} = 3$.

Câu 14. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$ bằng

- A.** 0. **B.** -2. **C.** $-\infty$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}} = -2$.

Câu 15. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-4x}{5x+2}$ bằng

- A.** $\frac{5}{4}$. **B.** $-\frac{5}{4}$. **C.** $-\frac{4}{5}$. **D.** $\frac{4}{5}$.

Lời giải

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-4x}{5x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(\frac{3}{x}-4\right)}{x\left(5+\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\frac{3}{x}-4\right)}{\left(5+\frac{2}{x}\right)} = \frac{-4}{5}$.

Câu 16. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2+2x+3}{x^2+1}$.

- A.** 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2+2x+3}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 5$.

Câu 17. Giới hạn của hàm số $f(x) = \frac{(x^2+1)(x+1)}{(2x^4+x)(x+1)}$ khi x tiến đến $-\infty$ có kết quả là:

- A.** 0 **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 2 **D.** $-\infty$

Lời giải

Chọn A

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2+1)(x+1)}{(2x^4+x)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(2+\frac{1}{x^3}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 0$$

Câu 18. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^4+x^2+2}{(x^3+1)(3x-1)}}$ có kết quả là:

- A. $-\sqrt{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Chọn D

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^4+x^2+2}{(x^3+1)(3x-1)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^4}}{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)\left(3-\frac{1}{x}\right)}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Câu 19. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x} = +\infty$ B. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x} = 1$ C. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x} = -\infty$ D. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x} = 0$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \cdot \sqrt{x^2 - \frac{1}{x}}}{x \left(\frac{1}{x} - 2x \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - \frac{1}{x}}}{\frac{1}{x} - 2x} = +\infty. \text{ Vậy A đúng.}$$

Câu 20. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2mx + 9}$ liên tục trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

- A. 6. B. 7. C. 5. D. Vô số.

Lời giải

Chọn B

Hàm số đã cho liên tục trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$x^2 - 2mx + 9 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 3.$$

Vậy có 7 giá trị nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 21. Giá trị của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-3x+2} & \text{khi } x \neq 2 \\ \frac{2a+1}{6} & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

- A. 2. B. $\frac{1}{2}$ C. 3. D. 1.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } f(2) = \frac{2a+1}{6}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x-1)(\sqrt{x-1}+1)} = \frac{1}{2}.$$

Hàm số liên tục tại $x = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \frac{2a+1}{6} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 1$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 3]$ sao cho $f(-2) = -5$; $f(3) = -1$. Hỏi phương trình $f(x) = -3$ có bao nhiêu nghiệm trên đoạn $[-2; 3]$?

A. Vô nghiệm.

B. Có ít nhất một nghiệm.

C. Có ít nhất hai nghiệm.

D. Có ít nhất ba nghiệm.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) = -3 \Leftrightarrow f(x) + 3 = 0$. Đặt $g(x) = f(x) + 3$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} g(-2) = f(-2) + 3 = -2 \\ g(3) = f(3) + 3 = 2 \end{cases} \Rightarrow g(-2) \cdot g(3) = (-2) \cdot 2 = -4 < 0$$

Vì $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 3]$ nên $g(x)$ liên tục trên $[-2; 3]$.

Do đó phương trình $g(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-2; 3)$.

Vậy phương trình $f(x) = -3$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-2; 3)$.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{|2x^2 - 7x + 6|}{x-2} & \text{khi } x < 2 \\ a + \frac{1-x}{2+x} & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$. Biết a là giá trị để hàm số $f(x)$ liên tục tại

$x_0 = 2$, tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $-x^2 + ax + \frac{7}{4} > 0$.

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Tại $x_0 = 2$, ta có:

☐ $f(2) = a - \frac{1}{4}$

☐ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(a + \frac{1-x}{2+x} \right) = a - \frac{1}{4}$.

☐ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2x^2 - 7x + 6|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|(x-2)(2x-3)|}{x-2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(2x-3)}{x-2} = -\lim_{x \rightarrow 2^-} (2x-3) = -1$.

Để hàm số liên tục tại $x_0 = 2$ thì $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

$$\Leftrightarrow a - \frac{1}{4} = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{4}.$$

Với $a = -\frac{3}{4}$, xét bất phương trình $-x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{7}{4} > 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{4} < x < 1$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-1; 0\}$.

Vậy bất phương trình đã cho có 2 nghiệm nguyên.

Câu 24. Nếu hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{khi } x < -5 \\ x + 17 & \text{khi } -5 \leq x \leq 10 \\ ax + b + 10 & \text{khi } x > 10 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $a + b$ bằng

A. -1.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Chọn A

Với $x < -5$ ta có $f(x) = x^2 + ax + b$, là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty; -5)$.

Với $-5 < x < 10$ ta có $f(x) = x + 7$, là hàm đa thức nên liên tục trên $(-5; 10)$.

Với $x > 10$ ta có $f(x) = ax + b + 10$, là hàm đa thức nên liên tục trên $(10; +\infty)$.

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục tại $x = -5$ và $x = 10$.

Ta có:

$$f(-5) = 12; f(10) = 17.$$

$$\lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5^-} (x^2 + ax + b) = -5a + b + 25.$$

$$\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5^+} (x + 7) = 12.$$

$$\lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 10^-} (x + 7) = 17.$$

$$\lim_{x \rightarrow 10^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 10^+} (ax + b + 10) = 10a + b + 10.$$

Hàm số liên tục tại $x = -5$ và $x = 10$ khi

$$\begin{cases} 5a + b + 25 = 12 \\ 10a + b + 10 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5a + b = -13 \\ 10a + b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow a + b = -1$$

Câu 25. Tìm tham số thực m để hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 12}{x + 4} & \text{khi } x \neq -4 \\ mx + 1 & \text{khi } x = -4 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = -4$.

A. $m = 4$.

B. $m = 3$.

C. $m = 2$.

D. $m = 5$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + x - 12}{x + 4} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x - 3)(x + 4)}{x + 4} = \lim_{x \rightarrow -4} (x - 3) = -7.$$

$$f(-4) = -4m + 1.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = -4$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = f(-4) \Leftrightarrow -4m + 1 = -7$

$$\Leftrightarrow m = 2.$$

Câu 26. Phép chiếu song song theo phương l không song song với a hoặc b , mặt phẳng chiếu là (P) , hai đường thẳng a và b biến thành a' và b' . Quan hệ nào giữa a và b không được bảo toàn trong phép chiếu song song?

A. Cắt nhau.

B. Trùng nhau.

C. Song song.

D. Chéo nhau.

Lời giải

Chọn D.

Do a' và b' cùng được chứa trong mặt phẳng chiếu (P) . Suy ra tính chất chéo nhau không được bảo toàn.

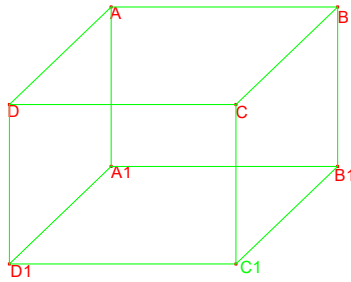
Câu 27. Cho $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là hình hộp, trong các khẳng định sau khẳng định sai:

A. $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = 2\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{CA_1} + 2\overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$

C. $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{AA_1}$ **D.** $\overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CC_1}$

Lời giải

Chọn C



Ta có: $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{AA_1}$ $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AC_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{C_1A_1}$

Câu 28. Cho ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng xét các vector $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}$; $\vec{y} = -4\vec{a} + 2\vec{b}$; $\vec{z} = -3\vec{a} - 2\vec{c}$ Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A. Hai vec tơ $\vec{y}, \vec{z}$ cùng phương
- B. Hai vec tơ $\vec{x}, \vec{y}$ cùng phương**
- C. Hai vec tơ $\vec{x}, \vec{z}$ cùng phương
- D. Hai vec tơ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng

Lời giải

Chọn B

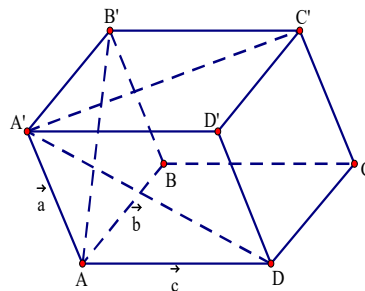
Ta thấy $\vec{y} = -2\vec{x}$ nên $\vec{x}, \vec{y}$ cùng phương.

Câu 29. Hãy chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

- A. Ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng nếu có hai trong ba vector đó cùng phương.
- B. Ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng nếu có một trong ba vector đó bằng vector $\vec{0}$.
- C. vector $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ luôn luôn đồng phẳng với hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.**
- D. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ba vector $\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{DA'}$ đồng phẳng

Lời giải

Chọn C



- A. Đúng vì theo định nghĩa đồng phẳng.
- B. Đúng vì theo định nghĩa đồng phẳng.
- C. Sai**

$$\text{D. Đúng vì } \begin{cases} \overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AD} = \vec{a} - \vec{c} \\ \overrightarrow{AB'} = \vec{a} + \vec{b} \\ \overrightarrow{C'A'} = \overrightarrow{CA} = -\vec{b} - \vec{c} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{DA'} - \overrightarrow{CA'}$$

$\Rightarrow 3$ vector $\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{DA'}$ đồng phẳng.

Câu 30. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$; $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. M là điểm xác định bởi $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. M là tâm hình bình hành $ABB'A'$.

B. M là tâm hình bình hành $BCC'B'$.

C. M là trung điểm BB' .

D. M là trung điểm CC' .

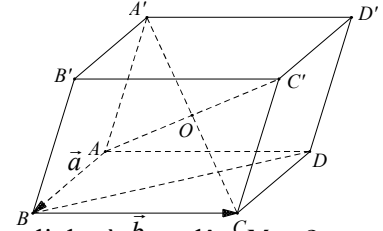
Lời giải

Chọn C.

Ta phân tích:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}.$$

$\Rightarrow M$ là trung điểm của BB' .



Câu 31. Trong không gian cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Nếu a và b cùng vuông góc với c thì $a \parallel b$.

B. Nếu $a \parallel b$ và $c \perp a$ thì $c \perp b$.

C. Nếu góc giữa a và c bằng góc giữa b và c thì $a \parallel b$.

D. Nếu a và b cùng nằm trong mp $(\alpha) \parallel c$ thì góc giữa a và c bằng góc giữa b và c .

Lời giải

Chọn B.

Nếu a và b cùng vuông góc với c thì a và b hoặc song song hoặc chéo nhau.

C sai do:

Giả sử hai đường thẳng a và b chéo nhau, ta dựng đường thẳng c là đường vuông góc chung của a và b . Khi đó góc giữa a và c bằng với góc giữa b và c và cùng bằng 90° , nhưng hiển nhiên hai đường thẳng a và b không song song.

D sai do: giả sử a vuông góc với c , b song song với c , khi đó góc giữa a và c bằng 90° , còn góc giữa b và c bằng 0° .

Do đó B đúng.

Câu 32. Cho hình lập phương $ABCDEFGH$, góc giữa hai đường thẳng EG và BC là:

A. 0° .

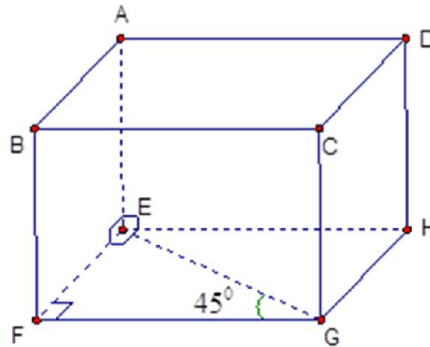
B. 45° .

C. 90° .

D. 30°

Lời giải

Chọn B



$ABCDEFGH$ là hình lập phương $\Rightarrow BC \parallel EG \Rightarrow$ góc giữa hai đường thẳng EG và BC là $\widehat{EGF} = 45^\circ$

Vậy góc giữa AC và DA_1 bằng 60° .

Câu 33. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa AC và DA' là:

A. 45° .

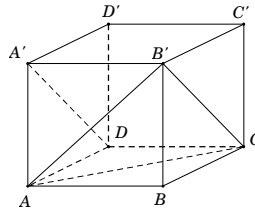
B. 90° .

C. 60° .

D. 120° .

Lời giải

Chọn C



Gọi a là độ dài cạnh hình lập phương. Khi đó, tam giác $AB'C$ đều ($AB' = B'C = CA = a\sqrt{2}$) do đó $\widehat{B'CA} = 60^\circ$.

Lại có, DA' song song CB' nên $(AC, DA') = (AC, CB') = \widehat{ACB'} = 60^\circ$.

Câu 34. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD . Góc (IE, JF) bằng

A. 30° .

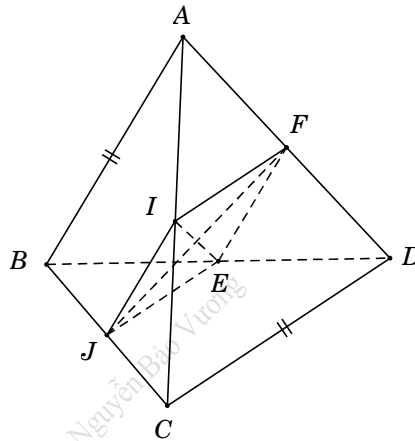
B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn D



Ta có IF là đường trung bình của $\triangle ACD \Rightarrow \begin{cases} IF \parallel CD \\ IF = \frac{1}{2}CD \end{cases}$.

Lại có JE là đường trung bình của $\triangle BCD \Rightarrow \begin{cases} JE \parallel CD \\ JE = \frac{1}{2}CD \end{cases}$.

$\Rightarrow \begin{cases} IF = JE \\ IF \parallel JE \end{cases} \Rightarrow$ Tứ giác $IJEF$ là hình bình hành.

Mặt khác: $\begin{cases} IJ = \frac{1}{2}AB \\ JE = \frac{1}{2}CD \end{cases}$. Mà $AB = CD \Rightarrow IJ = JE$.

Do đó $IJEF$ là hình thoi. Suy ra $(IE, JF) = 90^\circ$.

Câu 35. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{CAD} = 90^\circ$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?

A. 120° .

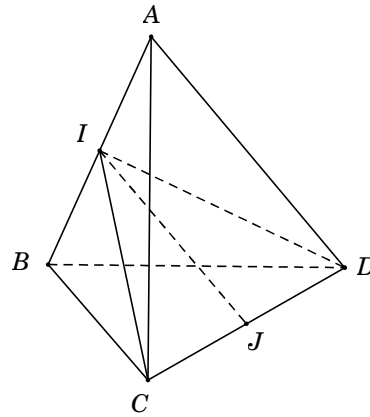
B. 90° .

C. 60° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn B



Xét tam giác ICD có J là trung điểm đoạn $CD \Rightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID})$.

Tam giác ABC có $AB = AC$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ \Rightarrow \Delta ABC$ đều $\Rightarrow CI \perp AB$.
Tương tự, ta có ΔABD đều nên $DI \perp AB$.

Ta có $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}) \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$
 $\Rightarrow \overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IJ}) = 90^\circ$.

Phần 2. Tự luận

Câu 36. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^3 + bn^2 + 2n + 4}{n^2 + 1} = 1$. Tính $2a + b$

Lời giải

Do $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^3 + bn^2 + 2n + 4}{n^2 + 1} = 1 \Rightarrow a = 0$ (vì nếu $a \neq 0$ thì bậc cao nhất của tử lớn hơn bậc cao nhất của mẫu thì giới hạn là vô cực).

Lúc đó: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^3 + bn^2 + 2n + 4}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn^2 + 2n + 4}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = b = 1$.

Vậy $2a + b = 1$.

Câu 37. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 3x + 13} - 2x - 1}{7x}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 3x + 13} - 2x - 1}{7x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{4 + \frac{3}{x} + \frac{13}{x^2}} - 2x - 1}{7x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \cdot \sqrt{4 + \frac{3}{x} + \frac{13}{x^2}} - 2x - 1}{7x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4 + \frac{3}{x} + \frac{13}{x^2}} - 2 - \frac{1}{x}}{7} \\ &= -\frac{4}{7}. \end{aligned}$$

Câu 38. Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m :
 $\cos x + m \cos 2x = 0$

Lời giải

Đặt $f(x) = \cos x + m \cos 2x$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ (1)

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} + m \cos \left(\frac{2\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

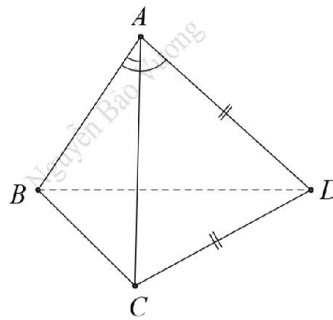
$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos \frac{3\pi}{4} + m \cos \left(\frac{6\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot f\left(\frac{3\pi}{4}\right) < 0, \forall m \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra phương trình $f(x) = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm trong khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$ hay phương trình $\cos x + m \cos 2x = 0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m .

Câu 39. Cho tứ diện $ABCD$ với $AC = \frac{3}{2}AD$, $\widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60^\circ$, $CD = AD$. Gọi φ là góc giữa AB và CD . Tính $\cos \varphi$

Lời giải



$$\text{Ta có : } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{AB \cdot CD}$$

Mặt khác :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB} (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ - AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ \\ &= AB \cdot AD \cdot \frac{1}{2} - AB \cdot \frac{3}{2} AD \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} AB \cdot AD = -\frac{1}{4} AB \cdot CD. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó : } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{-\frac{1}{4} AB \cdot CD}{AB \cdot CD} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{1}{4}.$$