

GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ - ĐÁNH GIÁ

PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

✚ **Dạng 1 : Bất phương trình có dạng $F(x) \geq 0$ với $F(x)$ là hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên D.**

Bước 1. Đưa bất phương trình về dạng $F(x) \geq 0$

Bước 2. Xét hàm số $y = F(x)$. Chỉ rõ hàm số $y = F(x)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên D

Bước 3. Dự đoán $F(x_0) = 0$, từ đó kết luận nghiệm của bất phương trình.

✚ **Dạng 2 : Bất phương trình có dạng $F(u) \geq F(v)$ với $F(x)$ là hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên D**

Bước 1. Đưa bất phương trình về dạng $F(u) \geq F(v)$

Bước 2. Xét hàm số $y = F(x)$. Chỉ rõ hàm số $y = F(x)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên D

**Bước 3. Bất phương trình $F(u) \geq F(v) \Leftrightarrow u \geq v$ nếu $y = F(x)$ là hàm đồng biến
và $F(u) \geq F(v) \Leftrightarrow u \leq v$ nếu $y = F(x)$ là hàm nghịch biến.**

Câu 1. Gọi S là tập hợp gồm tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_7 x < \log_3(\sqrt{x} + 2)$.

Tính tổng các phần tử của S .

A. 2176.

B. 1128

C. 1196.

D. 1176.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $t = \log_7 x \Rightarrow x = 7^t$ và bất phương trình đã cho trở thành $t < \log_3(7^{\frac{t}{2}} + 2)$

$$\Leftrightarrow 7^{\frac{t}{2}} + 2 > 3^t \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^t + 2\left(\frac{1}{3}\right)^t > 1 (*)$$

Vì hàm số $f(t) = \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^t + 2\left(\frac{1}{3}\right)^t$ nghịch biến trên tập $\mathbb{R}$ mà $f(2) = 1$ nên suy ra bất phương

trình (*) trở thành $f(t) > f(2) \Leftrightarrow t < 2$.

Ta có $t < 2$ suy ra $\log_7 x < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 49$.

Do đó tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(0; 49)$ suy ra $S = \{1, 2, 3, \dots, 48\}$.

Vậy tổng các phần tử của S bằng $1 + 2 + 3 + \dots + 48 = 1176$.

Câu 2. Số nghiệm nguyên của bất phương trình

$$\log_2(x^2 + 3) - \log_2 x + x^2 - 4x + 1 \leq 0$$
 là

A. 5.

B. 7.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x > 0$. Ta có

$$\log_2(x^2 + 3) - \log_2 x + x^2 - 4x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \log_2(x^2 + 3) + x^2 + 3 \leq \log_2 4x + 4x (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ trên $D = (0; +\infty)$. Ta có

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0 \quad \forall t \in D \Rightarrow \text{hàm số } f \text{ đồng biến trên } D.$$

$$\text{Suy ra } (*) \Leftrightarrow f(x^2 + 3) \leq f(4x) \Leftrightarrow x^2 + 3 \leq 4x \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3. \text{ (Thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy bất phương trình có 3 nghiệm nguyên.

Câu 3. Bất phương trình $\log_3 \frac{3x^2 + x + 1}{2x^2 + 2x + 3} + x^2 - x - 2 \leq 0$ có số nghiệm nguyên là

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \frac{3x^2 + x + 1}{2x^2 + 2x + 3} > 0 \\ 2x^2 + 2x + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \text{ (do } 3x^2 + x + 1 > 0, 2x^2 + 2x + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R})$$

$$\text{Ta có } \log_3 \frac{3x^2 + x + 1}{2x^2 + 2x + 3} + x^2 - x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \log_3 (3x^2 + x + 1) - \log_3 (2x^2 + 2x + 3) + x^2 - x - 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (3x^2 + x + 1) + 3x^2 + x + 1 \leq \log_3 (2x^2 + 2x + 3) + 2x^2 + 2x + 3 (*).$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ với $t > 0$. Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Khi đó } (*) \Leftrightarrow f(3x^2 + x + 1) < f(2x^2 + 2x + 3)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + x + 1 \leq 2x^2 + 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$$

Do $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-1; 0; 1; 2\}$. Vậy bất phương trình đã cho có 4 nghiệm nguyên.

Câu 4. Bất phương trình $\ln(1+x^2) < x^2$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thuộc khoảng $(-2021; 2022)$?

A. 4042.

B. 4040.

C. 4041.

D. 4039.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = \ln(1+x^2) - x^2$.

Ta có: $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x \left(\frac{1}{x^2+1} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

Suy ra: $f(x) = \ln(1+x^2) - x^2 < 0, \forall x \neq 0$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $\ln(1+x^2) < x^2$ là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ do đó số nghiệm nguyên thuộc khoảng $(-2021; 2022)$ là 4041.

Câu 5. Cho bất phương trình $\log_2 \left(x\sqrt{x^2+2} + 4 - x^2 \right) + 2x + \sqrt{x^2+2} \leq 1$. Biết tập nghiệm của bất phương trình là $(-\sqrt{a}; -\sqrt{b}]$. Khi đó $a.b$ bằng

A. $\frac{15}{16}$.

B. $\frac{12}{5}$.

C. $\frac{16}{15}$.

D. $\frac{5}{12}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $x\sqrt{x^2+2}-x^2=x(\sqrt{x^2+2}-x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+2}+x}$.

Ta có: $\log_2\left(x\sqrt{x^2+2}+4-x^2\right)+2x+\sqrt{x^2+2}\leq 1$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+2}+x}+4\right)+2x+\sqrt{x^2+2}\leq 1 \Leftrightarrow \log_2\frac{2(3x+2\sqrt{x^2+2})}{\sqrt{x^2+2}+x}+2x+\sqrt{x^2+2}\leq 1 \quad (1)$$

Ta có $\sqrt{x^2+2}+x>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Điều kiện: $3x+2\sqrt{x^2+2}>0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+2}>-3x \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x<0 \\ 4x^2+8>9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x>-\sqrt{\frac{8}{5}}, (*)$

Với điều kiện (*), ta có

$$(1) \Leftrightarrow \log_2\left(3x+2\sqrt{x^2+2}\right)+3x+2\sqrt{x^2+2}\leq \log_2\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)+\sqrt{x^2+2}+x, \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ với $t>0$ có $f'(t)=\frac{1}{t\ln 2}+1>0, \forall t\in(0;+\infty)$.

Do hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$, với điều kiện (*) thì các biểu thức $3x+2\sqrt{x^2+2}$ và $\sqrt{x^2+2}+x$ đều lấy giá trị trong khoảng $(0;+\infty)$ nên ta có

$$(2) \Leftrightarrow f\left(3x+2\sqrt{x^2+2}\right)\leq f\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)$$

$$\Leftrightarrow 3x+2\sqrt{x^2+2}\leq \sqrt{x^2+2}+x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2}\leq -2x \Leftrightarrow \begin{cases} -2x\geq 0 \\ x^2+2\leq 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 0 \\ 3x^2\geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x\leq -\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm bất phương trình là $\left(-\sqrt{\frac{8}{5}};-\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ hay $a.b=\frac{16}{15}$.

Câu 6. Gọi S là tổng tất cả các nghiệm nguyên không vượt quá 2022 của bất phương trình $\log_3(x^3-3x+25)+\log_3(x+1)\geq 3\log_3(x+1)+1$. Tìm chữ số hàng đơn vị của S .

A. 3.

B. 8.

C. 0.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases} x+1>0 \\ x^3-3x+25>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>-1.$

Ta có: $(x+4)(x-2)^2\geq 0, \forall x>-1 \Rightarrow (x+4)(x^2-4x+4)\geq 0, \forall x>-1$

$$\Rightarrow x^3-3x+25\geq 9x+9, \forall x>-1 \Rightarrow \log_3(x^3-3x+25)\geq \log_3(9x+9), \forall x>-1$$

$$\Rightarrow \log_3(x^3-3x+25)+\log_3^2(x+1)-3\log_3(x+1)-1\geq \log_3^2(x+1)-2\log_3(x+1)+1, \forall x>-1.$$

Mà $\log_3^2(x+1)-2\log_3(x+1)+1=(\log_3(x+1)-1)^2\geq 0, \forall x>-1$ do đó bất phương trình

$$\log_3(x^3-3x+25)+\log_3^2(x+1)\geq 3\log_3(x+1)+1$$
 nghiệm đúng với mọi $x>-1$.

Suy ra bất phương trình $\log_3(x^3-3x+25)+\log_3^2(x+1)\geq 3\log_3(x+1)+1$ có tập nghiệm là khoảng $(-1;+\infty)$.

Vậy tập tất cả các nghiệm nguyên không vượt quá 2022 của bất phương trình đã cho là $A = \{0; 1; 2; 3; \dots; 2021; 2022\}$. Tổng S của tất cả các phần tử thuộc tập A là:

$$S = 1 + 2 + \dots + 2021 + 2022 = 2023.1011 = 2045253.$$

Câu 7. Biết rằng bất phương trình

$$2\log_2\left(\sqrt{2x^2-3x+1}+1-x\right)+x^3-x^2-3x+2 \leq 2\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{x-1} \text{ có tập nghiệm } S = \left[a; \frac{3+\sqrt{b}}{c}\right]$$

với $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Tính tổng $T = 2a + b - c$.

A. 0.

B. 5.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Điều kiện: } \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 2x^2-3x+1 \geq 0 \\ \sqrt{2x^2-3x+1}+1-x > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{2x^2-3x+1}+1-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{2x^2-3x+1} > x-1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x-1} > (\sqrt{x-1})^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x-1} > (\sqrt{x-1})^2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } 2\log_2\left(\sqrt{2x^2-3x+1}+1-x\right)+x^3-x^2-3x+2 \leq 2\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\sqrt{2x^2-3x+1}+1-x\right)^2+x^3-x^2-3x+2 \leq 2\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left[(x-1)\left(\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1}\right)^2\right]+x^3-x^2-3x+2 \leq 2\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\frac{(x-1)x^2}{\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1}\right)^2}+x^3-x^2-3x+2 \leq 2\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^3-x^2)-\log_2(3x-2+2\sqrt{2x^2-3x+1})+x^3-x^2 \leq 3x-2+2\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^3-x^2)+(x^3-x^2) \leq \log_2(3x-2+2\sqrt{2x^2-3x+1})+(3x-2+2\sqrt{2x^2-3x+1}) (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do vậy với điều kiện $x > 1$, bất phương trình (*)

$$\Leftrightarrow f(x^3-x^2) \leq f\left(\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1}\right)^2\right) \Leftrightarrow x^3-x^2 \leq \left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1}\right)^2 \Leftrightarrow x\sqrt{x-1} \leq \sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\sqrt{x-1} \leq \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow x^3-3x^2+x \leq 0 \Leftrightarrow x^2-3x+1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện, ta được: } 1 < x \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=5 \\ c=2 \end{cases} \Rightarrow T=5.$$

**GIẢI BPT LÔGARIT BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÀM ĐẶC TRƯNG
(KHÔNG CHỨA THAM SỐ)**

Lý thuyết:

Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ và $u, v \in (a; b)$ thì $f(u) \geq f(v) \Leftrightarrow u \geq v$

Cho hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$ và $u, v \in (a; b)$ thì $f(u) \geq f(v) \Leftrightarrow u \leq v$

Câu 1. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x\sqrt{x^2+2}+4-x^2)+2x+\sqrt{x^2+2} \leq 1$ là $(-\sqrt{a}; -\sqrt{b}]$.

Khi đó a, b bằng

A. $\frac{15}{16}$.

B. $\frac{12}{5}$.

C. $\frac{16}{15}$.

D. $\frac{5}{12}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $x\sqrt{x^2+2}-x^2 = x(\sqrt{x^2+2}-x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+2}+x}$.

Ta có: $\log_2(x\sqrt{x^2+2}+4-x^2)+2x+\sqrt{x^2+2} \leq 1 \Leftrightarrow \log_2(x(\sqrt{x^2+2}-x)+4)+2x+\sqrt{x^2+2} \leq 1$

$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+2}+x}+4\right)+2x+\sqrt{x^2+2} \leq 1 \Leftrightarrow \log_2\frac{2(3x+2\sqrt{x^2+2})}{\sqrt{x^2+2}+x}+2x+\sqrt{x^2+2} \leq 1, (1)$

Ta có $\sqrt{x^2+2}+x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Điều kiện: $3x+2\sqrt{x^2+2} > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+2} > -3x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 0 \\ 4x^2+8 > 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x > -\sqrt{\frac{8}{5}}, (*)$

Với điều kiện $(*)$, ta có

$(1) \Leftrightarrow \log_2(3x+2\sqrt{x^2+2})+3x+2\sqrt{x^2+2} \leq \log_2(\sqrt{x^2+2}+x)+\sqrt{x^2+2}+x, (2)$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ với $t > 0$. Có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$.

Hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ đồng biến trên $(0; +\infty)$, $(3x+2\sqrt{x^2+2}) \in (0; +\infty)$ và $(\sqrt{x^2+2}+x) \in (0; +\infty)$.

Nên $(2) \Leftrightarrow f(3x+2\sqrt{x^2+2}) \leq f(\sqrt{x^2+2}+x) \Leftrightarrow 3x+2\sqrt{x^2+2} \leq \sqrt{x^2+2}+x$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2} \leq -2x \Leftrightarrow \begin{cases} -2x \geq 0 \\ x^2+2 \leq 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 3x^2 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{\frac{2}{3}}.$

Kết hợp với ĐK ta có tập nghiệm bất phương trình là $\left(-\sqrt{\frac{8}{5}}; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ hay $a, b = \frac{16}{15}$.

Câu 2. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} \geq 2\log_3 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ là

- A.** $(1; 3 + 2\sqrt{2}]$. **B.** $[1; 3 + 2\sqrt{2}]$. **C.** $(1; \sqrt{2})$. **D.** $[1; \sqrt{2}]$.

Lời giải

Chọn A

$$\log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2 \log_3 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \Leftrightarrow \log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2 \log_3 \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{Đk: } \begin{cases} x > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1 (*)$$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \log_5 (2\sqrt{x}+1) - \log_5 x \geq \log_3 (x-1)^2 - \log_3 4x$$

$$\Leftrightarrow \log_5 (2\sqrt{x}+1) + \log_3 4x \geq \log_5 x + \log_3 (x-1)^2 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = 2\sqrt{x}+1 \Rightarrow 4x = (t-1)^2.$$

$$(1) \text{ trở thành } \log_5 t + \log_3 (t-1)^2 \geq \log_5 x + \log_3 (x-1)^2 \quad (2)$$

$$\text{Xét } f(y) = \log_5 y + \log_3 (y-1)^2, \text{ do } x > 1 \Rightarrow t > 3 \Rightarrow y > 1.$$

$$\text{Xét } y > 1: f'(y) = \frac{1}{y \ln 5} + \frac{1}{(y-1)^2 \ln 3} \cdot 2(y-1) > 0$$

$\Rightarrow f(y)$ là hàm đồng biến trên miền $(1; +\infty)$

$$(2) \text{ có dạng } f(t) \geq f(x) \Leftrightarrow t \geq x \Leftrightarrow 2\sqrt{x}+1 \geq x \Leftrightarrow x-2\sqrt{x}-1 \leq 0$$

$$\text{Đặt } u = \sqrt{x}, u \geq 0, (2) \Leftrightarrow u^2 - 2u - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} \leq u \leq 1 + \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} \leq 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow x \leq 3 + 2\sqrt{2} \quad (3)$$

$$\text{Từ } (3), (*) \Rightarrow 1 < x \leq 3 + 2\sqrt{2}$$

Câu 3. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 (x^2 + 3) - \log_2 x + x^2 - 4x + 1 \leq 0$ là

- A.** $S = (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$. **B.** $[-1; 3]$. **C.** $[1; +\infty)$. **D.** $S = [1; 3]$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x > 0$.

$$\text{Ta có } \log_2 (x^2 + 3) - \log_2 x + x^2 - 4x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \log_2 (x^2 + 3) + x^2 + 3 \leq \log_2 4x + 4x \quad (*).$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ trên $D = (0; +\infty)$. Ta có

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0 \quad \forall t \in D \Rightarrow \text{hàm số } f \text{ đồng biến trên } D.$$

$$\text{Suy ra } (*) \Leftrightarrow f(x^2 + 3) \leq f(4x) \Leftrightarrow x^2 + 3 \leq 4x \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3.$$

Câu 4. Bất phương trình $x^2 - 4x + 2 + \log_3 (x^2 - 4x + 6) > 0$ có tập nghiệm $S = (-\infty; a) \cup (b; +\infty)$. Tính $T = ab + b^2$.

- A.** 12. **B.** 15. **C.** 13. **D.** 21.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } t = x^2 - 4x + 2 = (x-2)^2 - 2, t \geq -2. \text{ Ta có bất phương trình } t + \log_3 (t+4) > 0.$$

$$\text{Đặt } f(t) = t + \log_3 (t+4), t \geq -2$$

Ta có $f'(t) = 1 + \frac{1}{(t+4)\ln 3} > 0, \forall t \geq -2$. Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[-2; +\infty)$.

Mặt khác $f(-1) = 0$.

Do đó $f(t) > 0 \Rightarrow t > -1 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 > -1 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$, khi đó $a = 1; b = 3 \Rightarrow ab + b^2 = 1.3 + 3^2 = 12$.

- Câu 5.** Bất phương trình Cho bất phương trình $\ln \frac{x^3 - 2x^2 + 2}{x^2 + 2} + x^3 - 3x^2 \geq 0$ có tập nghiệm S . Tập $S \cap (-\infty; 100)$ có số phần tử nguyên là
- A. 99. B. 101. C. 97. D. 96.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\frac{x^3 - 2x^2 + 2}{x^2 + 2} > 0$ do $x^2 + 2$ nên $x^3 - 2x^2 + 2 > 0$

Bất phương trình $\Leftrightarrow \ln(x^3 - 2x^2 + 2) - \ln(x^2 + 2) + x^3 - 2x^2 + 2 - (x^2 + 2) \geq 0$

$\Leftrightarrow \ln(x^3 - 2x^2 + 2) + x^3 - 2x^2 + 2 \geq \ln(x^2 + 2) + x^2 + 2$ (1)

Xét hàm: $f(t) = \ln t + t$ trên $(0; +\infty)$.

$f'(t) = \frac{1}{t} + 1 > 0$ với $\forall t \in (0; +\infty) \Rightarrow f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 2 \geq x^2 + 2 \Leftrightarrow 0 \leq x^3 - 3x^2 \Leftrightarrow 0 \leq x^2(x - 3) \Leftrightarrow x \geq 3$ suy ra $S = [3; +\infty)$
 $\Rightarrow T = S \cap (-\infty; 100) = [3; 100)$.

Tập các phần tử nguyên của T là $\{3; 4; 5; \dots; 99\}$ có 97 phần tử nguyên.

- Câu 6.** Tổng bình phương các nghiệm nguyên của bất phương trình $2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) \leq 4^{|x-2|} \cdot \log_2(2|x-2| + 2)$ bằng
- A. 2. B. 0. C. 3. D. 1.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(t) = 2^t \cdot \log_2(t + 2)$, $f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 \cdot \log_2(t + 2) + 2^t \cdot \frac{1}{(t+2)\ln 2} > 0, \forall t \geq 0$.

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Ta có $2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) \leq 4^{|x-2|} \cdot \log_2(2|x-2| + 2)$

$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2} \cdot \log_2((x-1)^2 + 2) \leq 2^{2|x-2|} \cdot \log_2(2|x-2| + 2) \Leftrightarrow f[(x-1)^2] \leq f[2|x-2|]$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 \leq 2|x-2| \Leftrightarrow (x-1)^4 \leq (2(x-2))^4 \Leftrightarrow [(x-1)^2 - 2(x-2)] \cdot [(x-1)^2 + 2(x-2)] \leq 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 5)(x^2 - 3) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-1; 0; 1\}$.

Khi đó $(-1)^2 + 0^2 + 1^2 = 2$.

Câu 7. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_7 \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x} \right) + 4x^2 + 1 < 6x$ là

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } \log_7 \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x} \right) + 4x^2 + 1 < 6x \Leftrightarrow \log_7 \left(\frac{(2x-1)^2}{2x} \right) + 4x^2 - 4x + 1 < 2x$$

$$\Leftrightarrow \log_7 (2x-1)^2 + (2x-1)^2 < \log_7 2x + 2x \quad (1)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \log_7 t + t \Leftrightarrow f'(t) = \frac{1}{t \ln 7} + 1 > 0 \text{ với } t > 0.$$

Vậy hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Bất phương trình (1) trở thành } f((2x-1)^2) < f(2x) \Leftrightarrow (2x-1)^2 < 2x \Leftrightarrow 4x^2 - 6x + 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{4} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{4}.$$

$$\text{Kết hợp điều kiện ta được } x \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}; \frac{3+\sqrt{5}}{4} \right) \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x = 1$.

Câu 8. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2 \frac{4x^2 - 12x + 8}{2x^2 + x + 1} - x^2 - 4x \leq 1$ trên khoảng $(-2021; 2021)$ là

A. 4035.

B. 4034.

C. 4037.

D. 4036.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện: } \frac{4x^2 - 12x + 8}{2x^2 + x + 1} > 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 8 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty).$$

$$\text{Khi đó } \log_2 \frac{4x^2 - 12x + 8}{2x^2 + x + 1} - x^2 - 4x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 + x + 1} \leq (2x^2 + x + 1) - (x^2 - 3x + 2)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x^2 - 3x + 2) + (x^2 - 3x + 2) \leq \log_2 (2x^2 + x + 1) + (2x^2 + x + 1). \quad (1)$$

Xét hàm $f(t) = \log_2 t + t$ với $t > 0$ có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$. Vì vậy, $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Do đó (1) } \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 2x^2 + x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; -2 - \sqrt{5}] \cup [-2 + \sqrt{5}; +\infty).$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$, $x \in (-2021; 2021)$ và kết hợp điều kiện ta được

$$x \in \{-2020; -2019; \dots; -5\} \cup \{3; 4; \dots; 2020\}.$$

Vậy có 4034 số nguyên thỏa mãn yêu cầu.

Câu 9. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(x+1) > \log_3(2-x) + 4(1-2x)$ là

- A. $(-1; 2)$. B. $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$. C. $(-1; 2)$. D. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} x+1 > 0 \\ 2-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 2.$$

Bất phương trình tương đương với: $\log_3(x+1) + 4(x+1) > \log_3(2-x) + 4(2-x)$ (*).

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + 4t$ trên $(0; +\infty)$. Ta có: $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 4 > 0$ với mọi $t \in (0; +\infty)$.

$$\text{Do đó: } (*) \Leftrightarrow f(x+1) > f(2-x) \Leftrightarrow x+1 > 2-x \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$$

Kết hợp điều kiện ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Câu 10. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x+5) - \log_2(4-2x) + 3(1+3x) \geq 0$ là

- A. $\left[-\frac{1}{3}; 2\right)$. B. $\left(-\frac{1}{3}; 2\right)$. C. $(-\infty; 2)$. D. $(-5; 2)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} x+5 > 0 \\ 4-2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -5 < x < 2.$$

Bất phương trình tương đương với: $\log_2(x+5) + 3(x+5) \geq \log_2(4-2x) + 3(4-2x)$ (*).

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + 3t$ trên $(0; +\infty)$. Ta có: $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 3 > 0$ với mọi $t \in (0; +\infty)$.

$$\text{Do đó: } (*) \Leftrightarrow f(x+5) \geq f(4-2x) \Leftrightarrow x+5 \geq 4-2x \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}.$$

Kết hợp điều kiện ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[-\frac{1}{3}; 2\right)$.

Câu 11. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x+5) - \log_2(4-x) + 2x+1 \leq 0$ là

- A. $\left[-\frac{1}{5}; 2\right)$. B. $\left(-5; \frac{1}{2}\right)$. C. $\left(-5; -\frac{1}{2}\right]$. D. $(-5; 2)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} x+5 > 0 \\ 4-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -5 < x < 4.$$

Bất phương trình tương đương với: $\log_2(x+5) + x+5 \leq \log_2(4-x) + 4-x$ (*).

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ trên $(0; +\infty)$. Ta có: $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0$ với mọi $t \in (0; +\infty)$.

Do đó: $(*) \Leftrightarrow f(x+5) \leq f(4-x) \Leftrightarrow x+5 \leq 4-x \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$.

Kết hợp điều kiện ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-5; -\frac{1}{2}\right]$.

Câu 12. Tính tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2 \sqrt{\frac{x^2+x+1}{5x-1}} + x^2 - 4x + 2 < 0$.

A. 6.

B. 7.

C. 8.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Với điều kiện: $x > \frac{1}{5}$, ta có:

$$\log_2 \sqrt{\frac{x^2+x+1}{5x-1}} + x^2 - 4x + 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_2 (x^2+x+1) + (x^2+x+1) < \frac{1}{2} \log_2 (5x-1) + (5x-1).$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{2} \log_2 t + t$; $f'(t) = \frac{1}{2t \ln 2} + 1 > 0$ với $\forall t \in (0; +\infty)$. Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$, suy ra

$$f(x^2+x+1) < f(5x-1) \Leftrightarrow x^2+x+1 < 5x-1 \Leftrightarrow 2-\sqrt{2} < x < 2+\sqrt{2} \text{ (tmdk)}, x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{1; 2; 3\}$$

Vậy tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình là 6.

Câu 13. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 (x\sqrt{x^2+2} + 4 - x^2) + 2x + \sqrt{x^2+2} \leq 1$ là $(-\sqrt{a}; -\sqrt{b}]$.

Khi đó a, b bằng

A. $\frac{15}{16}$.

B. $\frac{12}{5}$.

C. $\frac{5}{12}$.

D. $\frac{16}{15}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } x\sqrt{x^2+2} - x^2 = x(\sqrt{x^2+2} - x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+2} + x}.$$

$$\text{Theo bài } \log_2 (x\sqrt{x^2+2} + 4 - x^2) + 2x + \sqrt{x^2+2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x(\sqrt{x^2+2} - x) + 4) + 2x + \sqrt{x^2+2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+2} + x} + 4 \right) + 2x + \sqrt{x^2+2} \leq 1 \Leftrightarrow \log_2 \frac{2(3x + 2\sqrt{x^2+2})}{\sqrt{x^2+2} + x} + 2x + \sqrt{x^2+2} \leq 1, (1)$$

Ta có $\sqrt{x^2+2} + x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Điều kiện: } 3x + 2\sqrt{x^2+2} > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+2} > -3x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 0 \\ 4x^2 + 8 > 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x > -\sqrt{\frac{8}{5}}, (*)$$

Với điều kiện $(*)$, ta có

$$(1) \Leftrightarrow \log_2 (3x + 2\sqrt{x^2+2}) + 3x + 2\sqrt{x^2+2} \leq \log_2 (\sqrt{x^2+2} + x) + \sqrt{x^2+2} + x, (2)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ với $t > 0$. Có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$.

Hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ đồng biến trên $(0; +\infty)$, $(3x + 2\sqrt{x^2 + 2}) \in (0; +\infty)$ và $(\sqrt{x^2 + 2} + x) \in (0; +\infty)$

Nên $(2) \Leftrightarrow f(3x + 2\sqrt{x^2 + 2}) \leq f(\sqrt{x^2 + 2} + x)$

$$\Leftrightarrow 3x + 2\sqrt{x^2 + 2} \leq \sqrt{x^2 + 2} + x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2} \leq -2x \Leftrightarrow \begin{cases} -2x \geq 0 \\ x^2 + 2 \leq 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 3x^2 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Kết hợp với ĐK ta có tập nghiệm bất phương trình là $\left[-\sqrt{\frac{8}{5}}; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ hay $a.b = \frac{16}{15}$.

Câu 14. Biết bất phương trình $\log_2 \left(\frac{x^2 + x + 1}{16x + 3} \right) + (\sqrt{x} - 2)^2 + x \leq 1$ có tập nghiệm là $S = (a; b)$. Hãy tính tổng $T = 20a + 10b$.

A. $T = 46 - 10\sqrt{2}$. **B.** $T = 45 - 10\sqrt{2}$. **C.** $T = 46 - 11\sqrt{2}$. **D.** $T = 47 - 11\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x \geq 0$.

$$\log_2 \left(\frac{x^2 + x + 1}{16x + 3} \right) + (\sqrt{x} - 2)^2 + x \leq 1 \Leftrightarrow \log_2 (x^2 + x + 1) - \log_2 (16x + 3) + 2x - 4\sqrt{x} + 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \left(\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right) + 2 \left(\left(x + \frac{1}{2} \right) + \frac{3}{4} \right) \leq \log_2 \left((2\sqrt{x})^2 + \frac{3}{4} \right) + 2 \left(2\sqrt{x} + \frac{3}{4} \right)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 \left(t^2 + \frac{3}{4} \right) + 2 \left(t + \frac{3}{4} \right)$ với $t > 0$ có $f'(t) = \frac{2t}{\left(t^2 + \frac{3}{4} \right) \ln 2} + 2 > 0, \forall t > 0$

nên $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Suy ra } \left(x + \frac{1}{2} \right) + \frac{3}{4} \leq 2\sqrt{x} + \frac{3}{4} \Leftrightarrow 2\sqrt{x} \geq x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 3x + \frac{1}{4} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}; b = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow T = 20a + 10b = 45 - 10\sqrt{2}.$$

Câu 15. Tập nghiệm của bất phương trình $3 - x + \log_2 \sqrt{2 - x} < \left(1 - \frac{1}{x} \right)^2 + 2\sqrt{2 - x} + \log_2 \left(2 - \frac{1}{x} \right)$ là $S = (a; b) \cup (c; d)$ với a, b, c, d là các số thực. Khi đó giá trị $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ được quy tròn bằng

A. 16. **B.** 12. **C.** 9. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Bất phương trình } 3 - x + \log_2 \sqrt{2 - x} < \left(1 - \frac{1}{x} \right)^2 + 2\sqrt{2 - x} + \log_2 \left(2 - \frac{1}{x} \right) \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2-x > 0 \\ x \neq 0 \\ 2-\frac{1}{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \neq 0 \\ x < 0 \vee x > 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 0,5 < x < 2 \end{cases} \quad (2).$$

Bất phương trình (1) trở thành:

$$\left(\sqrt{2-x}-1\right)^2 + \log_2 \sqrt{2-x} < \left[\left(2-\frac{1}{x}\right)-1\right]^2 + \log_2 \left(2-\frac{1}{x}\right) \quad (3)$$

Hàm đặc trưng $f(t) = (t-1)^2 + \log_2 t$.

Vì $f'(t) = 2(t-1) + \frac{1}{t \cdot \ln 2} = \frac{2 \ln 2 t^2 - 2 \ln 2 t + 1}{t \cdot \ln 2} > 0, \forall t > 0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Do đó (3) trở thành: $\sqrt{2-x} < 2 - \frac{1}{x} \quad (4)$

Kết hợp (2), (4), chúng ta được $\begin{cases} x \in (-\infty; 0) \cup (0, 5; 2) \\ \frac{x^3 + 2x^2 - 4x + 1}{x^2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{-3-\sqrt{13}}{2}; 0\right) \cup (1; 2)$

$$\text{Vậy } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \frac{21+3\sqrt{13}}{2}.$$

Câu 16. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\sqrt[3]{2}}(x+3) + x^2 + 12x < \frac{12}{x} + \frac{1}{x^2} + 4\log_2 \frac{3x+1}{x}$ là

$S = (a; b) \cup (c; d)$ với a, b, c, d là các số thực. Khi đó giá trị $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ bằng

A. 8.

B. 2.

C. 10.

D. 11.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Bất phương trình } \log_{\sqrt[3]{2}}(x+3) + x^2 + 12x < \frac{12}{x} + \frac{1}{x^2} + 4\log_2 \frac{3x+1}{x} \quad (1).$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x+3 > 0 \\ \frac{3x+1}{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-3; -\frac{1}{3}\right) \cup (0; +\infty).$$

$$\text{Bất phương trình (1) trở thành } 4\log_2(x+3) + x^2 + 12x < 4\log_2\left(\frac{1}{x}+3\right) + \frac{1}{x^2} + 12 \cdot \frac{1}{x} \quad (2).$$

Hàm đặc trưng $f(t) = 4\log_2(t+3) + t^2 + 12t$.

Vì $f'(t) = 4 \cdot \frac{1}{(t+3) \cdot \ln 2} + 2t + 12 = 4 \cdot \frac{1}{(t+3) \cdot \ln 2} + 2(t+3) + 6 > 0, \forall t > -3$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(-3; +\infty)$.

Ngoài ra $x > -3$ và $\frac{1}{x} > -3$.

$$\text{Do đó (2)} \Leftrightarrow x < \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x} < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1).$$

Đổi chiều với điều kiện, chúng ta được tập nghiệm $S = (-3; -1) \cup (0; 1)$.

Vậy $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (-3)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 = 11$.

Câu 17. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x\sqrt{x^2+2}+4-x^2)+2x+\sqrt{x^2+2} \leq 1$ là $(a; b]$. Khi đó $a^2 + b^2$ bằng

A. $\frac{34}{15}$.

B. $\frac{15}{16}$.

C. $\frac{16}{15}$.

D. $\frac{12}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình $\log_2(x\sqrt{x^2+2}+4-x^2)+2x+\sqrt{x^2+2} \leq 1$ (1)

Điều kiện: $x\sqrt{x^2+2}+4-x^2 > 0 \Leftrightarrow x(\sqrt{x^2+2}-x)+4 > 0 \Leftrightarrow \frac{6x+4\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}+x} > 0$ (2).

Vì $\sqrt{x^2+2} > |x| \geq -x$ nên $\sqrt{x^2+2}+x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Dẫn đến (2) $\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+2} > -3x \Leftrightarrow \begin{cases} -3x \leq 0 \\ x^2+2 \geq 0 \\ -3x > 0 \\ 4(x^2+2) > 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 0 \\ 5x^2 < 8 \end{cases} \Leftrightarrow x > -\sqrt{\frac{8}{5}}$.

(1) $\Leftrightarrow \log_2 \frac{2(3x+2\sqrt{x^2+2})}{\sqrt{x^2+2}+x} + 2x + \sqrt{x^2+2} \leq 1$
 $\Leftrightarrow \log_2(3x+2\sqrt{x^2+2}) + (3x+2\sqrt{x^2+2}) \leq \log_2(\sqrt{x^2+2}+x) + (\sqrt{x^2+2}+x)$ (3)

Hàm đặc trưng $f(t) = \log_2 t + t$.

Vì $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$ nên hàm đặc trưng $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Do đó (3) $\Leftrightarrow 3x+2\sqrt{x^2+2} \leq \sqrt{x^2+2}+x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2} \leq -2x \Leftrightarrow \begin{cases} -2x \geq 0 \\ x^2+2 \geq 0 \\ x^2+2 \leq 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Đổi chiều với điều kiện, chúng ta được tập nghiệm $S = \left(-\sqrt{\frac{8}{5}}; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$.

Vậy $a^2 + b^2 = \frac{8}{5} + \frac{2}{3} = \frac{34}{15}$.

Câu 18. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn bất đẳng thức $\log \frac{x+1}{3y+1} \leq 9y^4 + 6y^3 - x^2y^2 - 2y^2x$ (1)

. Biết $y \leq 1000$, hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn bất đẳng thức (1)?

A. 1501100.

B. 1501300.

C. 1501400.

D. 1501500.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log \frac{x+1}{3y+1} \leq 9y^4 + 6y^3 - x^2y^2 - 2y^2x$

$$\Leftrightarrow \log \frac{xy+y}{3y^2+y} \leq (9y^4+6y^3+y^2) - (x^2y^2+2xy.y+y^2)$$

$$\Leftrightarrow \log(xy+y) - \log(3y^2+y) \leq (3y^2+y)^2 - (xy+y)^2$$

$$\Leftrightarrow \log(xy+y) + (xy+y)^2 \leq \log(3y^2+y) + (3y^2+y)^2 \quad (*)$$

Xét hàm $f(t) = \log t + t^2$ với $t \in (0; +\infty)$

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 10} + 2t > 0, \forall t \in (0; +\infty). \text{ Suy ra } f(t) \text{ là hàm đồng biến trên } t \in (0; +\infty).$$

$$(*) \Leftrightarrow f(xy+y) \leq f(3y^2+y) \Leftrightarrow xy+y \leq 3y^2+y \Leftrightarrow x \leq 3y.$$

Vì $y \leq 1000$ nên ta có các trường hợp sau

$$y=1 \Rightarrow x \in \{1; 2; 3\}.$$

$$y=2 \Rightarrow x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

.

$$y=1000 \Rightarrow x \in \{1; 2; \dots; 3000\}.$$

Vậy số cặp nghiệm thỏa mãn điều kiện đề bài là: $3+6+9+\dots+3000=1501500$.

Câu 19. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 \frac{4(x+1)}{\sqrt{x}+2} > 2(x-\sqrt{x})$ là $S = \left[a; \frac{b+\sqrt{c}}{2} \right)$, trong đó

a, b, c là các số nguyên không âm. Tính $a+b+c$.

A. 8.

B. 10.

C. 12.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x \geq 0$

$$\log_2 \frac{4(x+1)}{\sqrt{x}+2} > 2(x-\sqrt{x}) \Leftrightarrow \log_2 4(x+1) - \log_2 (\sqrt{x}+2) > 2(x-\sqrt{x})$$

$$\Leftrightarrow 2 + \log_2 (x+1) > \log_2 (\sqrt{x}+2) + 2(x-\sqrt{x})$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x+1) - 2x > \log_2 (\sqrt{x}+1+1) - 2(\sqrt{x}+1)$$

Xét hàm số $f(x) = \log_2 (x+1) - 2x$, $x \in [0; +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1) \ln 2} - 2 < 0 \forall x \in [0; +\infty). \text{ Do đó hàm số } f(x) \text{ nghịch biến trên } [0; +\infty).$$

$$\text{Khi đó } \log_2 (x+1) - 2x > \log_2 (\sqrt{x}+1+1) - 2(\sqrt{x}+1)$$

$$\Leftrightarrow f(x) > f(\sqrt{x}+1) \Leftrightarrow x < \sqrt{x}+1 \Leftrightarrow x-1 < \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 < 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Do đó $S = \left[0; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$. Vậy $a+b+c=0+3+5=8$

Câu 20. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x\sqrt{x^2+2}+4-x^2)+2x+\sqrt{x^2+2} \leq 1$ là $(-\sqrt{a}; -\sqrt{b}]$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Khi đó $a.b$ bằng

A. $\frac{15}{16}$.

B. $\frac{12}{5}$.

C. $\frac{16}{15}$.

D. $\frac{5}{12}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $x\sqrt{x^2+2}-x^2 = x(\sqrt{x^2+2}-x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+2}+x}$.

Khi đó

$$\log_2(x\sqrt{x^2+2}+4-x^2)+2x+\sqrt{x^2+2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(x(\sqrt{x^2+2}-x)+4\right)+2x+\sqrt{x^2+2} \leq 1 \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+2}+x}+4\right)+2x+\sqrt{x^2+2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2\frac{2(3x+2\sqrt{x^2+2})}{\sqrt{x^2+2}+x}+2x+\sqrt{x^2+2} \leq 1, (1)$$

Mà $\sqrt{x^2+2}+x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, nên điều kiện $3x+2\sqrt{x^2+2} > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+2} > -3x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 0 \\ 4x^2+8 > 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x > -\sqrt{\frac{8}{5}}, (*)$$

Với điều kiện (*), ta có

$$(1) \Leftrightarrow \log_2(3x+2\sqrt{x^2+2})+3x+2\sqrt{x^2+2} \leq \log_2(\sqrt{x^2+2}+x)+\sqrt{x^2+2}+x, (2)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$.

Nên hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ đồng biến trên $(0; +\infty)$, $(3x+2\sqrt{x^2+2}) \in (0; +\infty)$ và

$$(\sqrt{x^2+2}+x) \in (0; +\infty)$$

$$\text{Do đó } (2) \Leftrightarrow f(3x+2\sqrt{x^2+2}) \leq f(\sqrt{x^2+2}+x)$$

$$\Leftrightarrow 3x+2\sqrt{x^2+2} \leq \sqrt{x^2+2}+x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2} \leq -2x \Leftrightarrow \begin{cases} -2x \geq 0 \\ x^2+2 \leq 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 3x^2 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Kết hợp với ĐK ta có tập nghiệm bất phương trình là $\left[-\sqrt{\frac{8}{5}}; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ hay $a.b = \frac{16}{15}$.

Câu 21 Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn bất phương trình

$$(x^2+y^2-2x-24) \left[\log_2\left(\frac{x^2+y^2}{5x+2y-20}\right) + x^2+y^2-20x-8y+78 \right] < 0?$$

A. 116.

B. 119.

C. 113.

D. 120.

Lời giải

Chọn C

$$(x^2 + y^2 - 2x - 24) \left[\log_2 \left(\frac{x^2 + y^2}{5x + 2y - 20} \right) + x^2 + y^2 - 20x - 8y + 78 \right] < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 24 > 0 \\ \log_2 \left(\frac{x^2 + y^2}{5x + 2y - 20} \right) + x^2 + y^2 - 20x - 8y + 78 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 24 < 0 \\ \log_2 \left(\frac{x^2 + y^2}{5x + 2y - 20} \right) + x^2 + y^2 - 20x - 8y + 78 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 > 5^2 \\ 5x + 2y - 20 > 0 \\ \log_2 (x^2 + y^2) + x^2 + y^2 - \log_2 (5x + 2y - 20) - 4(5x + 2y - 20) - 2 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 < 5^2 \\ 5x + 2y - 20 > 0 \\ \log_2 (x^2 + y^2) + x^2 + y^2 - \log_2 (5x + 2y - 20) - 4(5x + 2y - 20) - 2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 > 5^2 \\ 5x + 2y - 20 > 0 \\ \log_2 \left(\frac{x^2 + y^2}{4} \right) + x^2 + y^2 < \log_2 (5x + 2y - 20) + 4(5x + 2y - 20) \end{cases} \quad (I)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 < 5^2 \\ 5x + 2y - 20 > 0 \\ \log_2 \left(\frac{x^2 + y^2}{4} \right) + x^2 + y^2 > \log_2 (5x + 2y - 20) + 4(5x + 2y - 20) \end{cases}$$

Xét bất phương trình $\log_2 \left(\frac{x^2 + y^2}{4} \right) + x^2 + y^2 > \log_2 (5x + 2y - 20) + 4(5x + 2y - 20)$ (a).

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + 4t$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có, $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 4 > 0, \forall t > 0$.

Nên hàm số $f(t) = \log_2 t + 4t$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Mà (a) $\Leftrightarrow f\left(\frac{x^2 + y^2}{4}\right) > f(5x + 2y - 20) \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{4} > 5x + 2y - 20$

$$\text{Do đó (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 > 5^2 \\ 5x+2y-20 > 0 \\ x^2 + y^2 < 4(5x+2y-20) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 > 5^2 \\ 5x+2y-20 > 0 \\ (x-10)^2 + (y-4)^2 < 6^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 < 5^2 \\ 5x+2y-20 > 0 \\ x^2 + y^2 > 4(5x+2y-20) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 < 5^2 \\ 5x+2y-20 > 0 \\ (x-10)^2 + (y-4)^2 > 6^2 \end{cases}.$$

$$\text{Xét } \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 < 5^2 \\ 5x+2y-20 > 0 \\ (x-10)^2 + (y-4)^2 > 6^2 \end{cases}.$$

$$\text{Do } (x-1)^2 + y^2 < 5^2 \Rightarrow \begin{cases} |x-1| < 5 \\ |y| < 5 \\ x, y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \{\pm 3; \pm 2; \pm 1; 0; 4; 5\} \\ y = \{\pm 4; \pm 3; \pm 2; \pm 1; 0\} \end{cases}.$$

Thay vào $5x+2y-20 > 0$ và $(x-10)^2 + (y-4)^2 > 6^2$

Ta có 8 cặp số: $(5,0); (5,-1); (5,-2); (4,1); (4,2); (4,3); (3,3); (3,4)$ thỏa mãn.

$$\text{Xét } \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 > 5^2 \\ 5x+2y-20 > 0 \\ (x-10)^2 + (y-4)^2 < 6^2 \end{cases},$$

$$(x-10)^2 + (y-4)^2 < 6^2 \Rightarrow \begin{cases} |x-10| < 6 \\ |y-4| < 6 \\ x, y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 < x < 16 \\ -2 < y < 10 \\ x, y \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Thử trực tiếp ta được các cặp số:

$(5;4), \dots, (5;7), (6;1), \dots, (6;8), (7;-1), \dots, (7;9), (8;-1), \dots, (8;9),$
 $(9;-1), \dots, (9;9), (10;-1), \dots, (10;9), (11;-1), \dots, (11;9), (12;-1), \dots, (12;9),$
 $(13;-1), \dots, (13;9), (14;0), \dots, (14;8), (15;1), \dots, (15;7)$ nên có 105 cặp số.

Vậy có $105+8=113$ cặp số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 22. Cho x, y là các số thực thỏa mãn bất phương trình: $\log_2(2x+2) + x - 3y \geq 8^y$. Biết $0 \leq x \leq 20$, số các cặp x, y nguyên không âm thỏa mãn bất phương trình trên là

A. 2.

B. 33.

C. 35.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_2(2x+2) + x - 3y \geq 8^y \Leftrightarrow 2^{\log_2(x+1)} + \log_2(x+1) \geq 2^{3y} + 3y$. (1)

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$.

Ta có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Nên hàm số $f(t) = 2^t + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow f(\log_2(x+1)) \geq f(3y) \Leftrightarrow \log_2(x+1) \geq 3y \Leftrightarrow x \geq 2^{3y} - 1$.

Với $0 \leq x \leq 20 \Rightarrow 1 \leq 2^{3y} \leq 21 \Rightarrow 0 \leq y \leq \log_8 21$. Vì $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{0; 1\}$.

Với $y = 0$ thì $x \geq 0$ nên có 21 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn.

Với $y = 1$ thì $x \geq 7$ nên có 14 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn.

Vậy có tất cả 35 cặp $(x; y)$ thỏa mãn.

Câu 23. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2^3 x + \sqrt{\log_2^3 x} \leq (\log_2 x + 4)(\log_2 x + 5)$ là

A. 17.

B. 15.

C. 16.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn C

$$\log_2^3 x + \sqrt{\log_2^3 x} \leq (\log_2 x + 4)(\log_2 x + 5) \quad (1)$$

$$\text{ĐK: } \begin{cases} \log_2 x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Đặt $t = \log_2 x$, điều kiện $t \geq 0$.

$$\text{Bất phương trình (1) trở thành } t^3 + \sqrt{t^3} \leq (t+4)(t+5) \Leftrightarrow t^3 + \sqrt{t^3} \leq (t+4)^2 + \sqrt{(t+4)^2} \quad (2).$$

Xét hàm số $f(u) = u + \sqrt{u}$ trên $[0; +\infty)$.

Ta có $f'(u) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{u}} > 0, \forall u > 0$. Nên hàm số $f(u) = u + \sqrt{u}$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

$$\text{Mà } (2) \Leftrightarrow f(t^3) \leq f((t+4)^2) \Leftrightarrow t^3 \leq t^2 + 8t + 16$$

$$\Leftrightarrow (t-4)(t^2 + 3t + 4) \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 4. \text{ Kết hợp với } t \geq 0 \text{ ta được } 0 \leq t \leq 4.$$

Với $0 \leq t \leq 4$ thì $0 \leq \log_2 x \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 16$ (thỏa điều kiện).

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên có 16 giá trị nguyên của x .

**GIẢI PT LÔGARIT BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ KHÔNG HOÀN TOÀN
(KHÔNG CHỨA THAM SỐ)**

PHƯƠNG PHÁP

-  **Đặt ẩn phụ t theo biểu thức logarit của ẩn x . Khi đó, thu được phương trình ẩn t .**
-  **Giải phương trình ẩn t ta được nghiệm t theo ẩn x .**
-  **Giải phương trình thu được nghiệm của phương trình.**

Câu 01. Số nghiệm của phương trình $\log_2^2 x + (4x-3)\log_2 x - 8x + 2 = 0$ là

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.**

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $t = \log_2 x$, phương trình trở thành: $t^2 + (4x-3)t - 8x + 2 = 0$.

Ta có $\Delta = (4x-3)^2 - 4(-8x+2) = 16x^2 + 8x + 1 = (4x+1)^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \frac{-(4x-3) - (4x+1)}{2} = -4x+1 \\ t = \frac{-(4x-3) + (4x+1)}{2} = 2 \end{cases}.$$

Với $t = 2 \Rightarrow \log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 4$ (tmđk).

Với $t = -4x+1 \Rightarrow \log_2 x = -4x+1 \Leftrightarrow \log_2 x + 4x - 1 = 0$.

Xét hàm số $f(x) = \log_2 x + 4x - 1$ trên $(0; +\infty)$

Có $f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} + 4 > 0, \forall x > 0 \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Mặt khác $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ (tmđk) là nghiệm duy nhất của phương trình $\log_2 x = -4x+1$.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 2. Cho phương trình $\log_2^2 x + (5-x)\log_{\frac{1}{4}} x^2 + 6 - 2x = 0$. Tích các nghiệm của phương trình bằng

- A. 4. B. 8. C. 6. D. 2.**

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x > 0$.

Ta có $\log_2^2 x + (5-x)\log_{\frac{1}{4}} x^2 + 6 - 2x = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x + (x-5)\log_2 x + 6 - 2x = 0$

Đặt $t = \log_2 x$, phương trình trở thành: $t^2 + (x-5)t + 6 - 2x = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t+x-3) = 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 3 - x \end{cases}.$$

Với $t = 2 \Rightarrow \log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 2^2 = 4$ (tmđk).

Với $t = 3 - x \Rightarrow \log_2 x = 3 - x \Leftrightarrow \log_2 x + x - 3 = 0$.

Xét hàm số $f(x) = \log_2 x + x - 3$ trên $(0; +\infty)$

Có $f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} + 1 > 0, \forall x > 0 \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Mặt khác $f(2) = 0 \Rightarrow x = 2$ (tmđk) là nghiệm duy nhất của phương trình $\log_2 x = 3 - x$.

Vậy tích các nghiệm của phương trình bằng $4.2 = 8$.

Câu 3. Cho phương trình $\log_3^2(x+1) + (x-5) \cdot \log_3(3x+3) - 3x + 11 = 0$. Lập phương của tổng các nghiệm của phương trình bằng

A. 520.

B. 100.

C. 1000.

D. 10.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

Ta có: $\log_3^2(x+1) + (x-5) \cdot \log_3(3x+3) - 3x + 11 = 0$

$$\Leftrightarrow \log_3^2(x+1) + (x-5) \cdot \log_3(x+1) - 2x + 6 = 0$$

Đặt $t = \log_3(x+1)$, phương trình trở thành: $t^2 + (x-5)t - 2x + 6 = 0$

$$\text{Mà } \Delta = (x-5)^2 - 4.1.(6-2x) = (x-1)^2 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 3-x \end{cases}$$

Với $t = 2 \Rightarrow \log_3(x+1) = 2 \Leftrightarrow x = 8$ (tmđk)

Với $t = 3-x \Rightarrow \log_3(x+1) = 3-x \Leftrightarrow \log_3(x+1) + x - 3 = 0$.

Xét hàm số $f(x) = \log_3(x+1) + x - 3$ trên $(-1; +\infty)$

Có $f'(x) = \frac{1}{(x+1)\ln 3} + 1 > 0, \forall x > -1 \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-1; +\infty)$.

Mặt khác $f(2) = 0 \Rightarrow x = 2$ (tmđk) là nghiệm duy nhất của phương trình $\log_3(x+1) = 3 - x$.

Vậy lập phương của tổng các nghiệm bằng $(2+8)^3 = 10^3 = 1000$.

Câu 4. Cho phương trình $-\log_2^2 x + (12-x) \cdot \log_2 x + x - 11 = 0$. Tổng lập phương các nghiệm của phương trình bằng

A. 4.

B. 520.

C. 100.

D. 230.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x > 0$. Đặt $t = \log_2 x$, phương trình trở thành: $-t^2 + (12-x)t + x - 11 = 0$.

$$\text{Mà } -1 + (12-x) + x - 11 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 11-x \end{cases}$$

Với $t = 1 \Rightarrow \log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2$ (tmđk).

Với $t = 11-x \Rightarrow \log_2 x = 11-x \Leftrightarrow \log_2 x + x - 11 = 0$.

Xét hàm số $f(x) = \log_2 x + x - 11$ trên $(0; +\infty)$

Có $f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} + 1 > 0, \forall x > 0 \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Mặt khác $f(8) = 0 \Rightarrow x = 8$ (tmđk) là nghiệm duy nhất của phương trình $\log_2 x = 11 - x$.

Vậy tổng lập phương các nghiệm là: $2^3 + 8^3 = 520$.

Câu 5. Tích các nghiệm của phương trình $(x+1)\log_{0,5}^2 x + (2x+5)\log_{0,5} x + 6 = 0$ là

A. -4.

B. 16.

C. 8.

D. 32.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $t = \log_{0,5} x$, phương trình trở thành: $(x+1)t^2 + (2x+5)t + 6 = 0$.

Có $\Delta = (2x+5)^2 - 4.6(x+1) = 4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \frac{-(2x+5) - (2x-1)}{2(x+1)} = -2 \\ t = \frac{-(2x+5) + 2x-1}{2(x+1)} = \frac{-3}{x+1} \end{cases}$$

Với $t = -2 \Rightarrow \log_{0,5} x = -2 \Leftrightarrow x = 4$ (tmđk).

Với $t = \frac{-3}{x+1} \Rightarrow \log_{0,5} x = \frac{-3}{x+1} \Leftrightarrow \log_{0,5} x + \frac{3}{x+1} = 0$.

Xét hàm số $f(x) = \log_{0,5} x + \frac{3}{x+1}$ trên $(0; +\infty)$ có $f'(x) = \frac{1}{x \ln 0,5} - \frac{3}{(x+1)^2} < 0, \forall x > 0 \Rightarrow$

hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Mặt khác, $f(2) = 0 \Rightarrow x = 2$ (tmđk) là nghiệm duy nhất của phương trình $\log_{0,5} x = \frac{-3}{x+1}$.

Vậy tích các nghiệm của phương trình đã cho là $4.2 = 8$.

Câu 6. Cho phương trình $(x+2)\log_2^2 x - (x+5) \cdot \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2x} + 3x + 18 = 0$. Tích các nghiệm của phương trình bằng:

A. 4.

B. 8.

C. 6.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x > 0$.

Ta có: $(x+2)\log_2^2 x - (x+5) \cdot \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2x} + 3x + 18 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+2)\log_2^2 x - 2(x+5) \cdot \log_2(2x) + 3x + 18 = 0$$

Đặt $t = \log_2 x$, phương trình trở thành: $(x+2)t^2 - 2(x+5)t + x + 8 = 0$ (*)

Do $(x+2) - 2 \cdot (x+5) + (x+8) = 0$ nên phương trình (*) có hai nghiệm $t = 1, t = \frac{x+8}{x+2}$.

Với $t = 1 \Rightarrow \log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2$ (tmđk).

Với $t = \frac{x+8}{x+2} \Rightarrow \log_2 x = \frac{x+8}{x+2} \Leftrightarrow \log_2 x - 1 - \frac{6}{x+2} = 0$.

Xét hàm số $f(x) = \log_2 x - 1 - \frac{6}{x+2}$ trên $(0; +\infty)$

Có $f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} + \frac{6}{(x+2)^2} > 0, \forall x > 0 \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Mặt khác $f(4) = 0 \Rightarrow x = 4$ (tmđk) là nghiệm duy nhất của phương trình $\log_2 x = \frac{x+8}{x+2}$.

Vậy tích các nghiệm bằng $2.4 = 8$.

Câu 7. Cho phương trình

$(3x+1)\log_3^2(2x-1) + 7(x+1)\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) + 2x+10 = 0$. Tổng lập phương các nghiệm của phương trình thuộc khoảng nào sau đây?

- A. (80;110). B. (100;130) C. (110;140). D. (140;160).

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > \frac{1}{2}$.

Ta có: $(3x+1)\log_3^2(2x-1) + 7(x+1)\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) + 2x+10 = 0$

$$\Leftrightarrow (3x+1)\log_3^2(2x-1) - 7(x+1)\log_3(2x-1) + 2x+10 = 0$$

Đặt $t = \log_3(2x-1)$, phương trình trở thành: $(3x+1)t^2 - 7(x+1)t + 2x+10 = 0$ (*)

Ta có: $\Delta = 49(x+1)^2 - 4(3x+1)(2x+10) = (5x-3)^2 \geq 0$ nên phương trình (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{x+5}{3x+1} \end{cases}$

Với $t = 2 \Rightarrow \log_3(2x-1) = 2 \Leftrightarrow x = 5$ (tmđk).

Với $t = \frac{x+5}{3x+1} \Rightarrow \log_3(2x-1) = \frac{x+5}{3x+1} \Leftrightarrow \log_3(2x-1) - \frac{x+5}{3x+1} = 0$ (**)

Xét hàm số $f(x) = \log_3(2x-1) - \frac{x+5}{3x+1}$ trên $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Có $f'(x) = \frac{2}{(2x-1)\ln 3} + \frac{14}{(3x+1)^2} > 0, \forall x > \frac{1}{2}$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Mặt khác $f(2) = 0 \Rightarrow x = 2$ (tmđk) là nghiệm duy nhất của phương trình (**).

Vậy tổng lập phương các nghiệm bằng $5^3 + 2^3 = 133 \in (110; 140)$.

TOANMATH.com