

Chủ đề 4: NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

A. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Cho hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên K ta có công thức nguyên hàm từng phần: $\int u dv = uv - \int v du$.

Chú ý: Ta thường sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần nếu nguyên hàm có dạng $I = \int f(x).g(x)dx$, trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là 2 trong 4 hàm số: **Hàm số logarit, hàm số đa thức, hàm số lượng giác, hàm số mũ.**

Để tính nguyên hàm $\int f(x).g(x)dx$ từng phần ta làm như sau:

– **Bước 1.** Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = g(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = G(x) \end{cases}$ (trong đó $G(x)$ là một nguyên hàm **bất kỳ** của hàm số

$g(x)$)

– **Bước 2.** Khi đó theo công thức nguyên hàm từng phần ta có:

$$\int f(x).g(x)dx = f(x).G(x) - \int G(x).f'(x)dx.$$

Chú ý: Khi $I = \int f(x).g(x)dx$ và $f(x)$ và $g(x)$ là 2 trong 4 hàm số: **Hàm số logarit, hàm số đa thức, hàm số lượng giác, hàm số mũ** ta đặt theo quy tắc đặt u .

Nhất log (hàm log, ln) – Nhì đa (hàm đa thức)

Tam lượng (hàm lượng giác) – Tứ mũ (hàm mũ)

Tức là hàm số nào đứng trước trong câu nói trên ta sẽ đặt u bằng hàm đó. Ví dụ:

• Nếu $f(x)$ là **hàm log**, $g(x)$ là một trong 3 hàm còn lại, ta sẽ đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = g(x)dx \end{cases}$.

• Tương tự nếu $f(x)$ là **hàm mũ**, $g(x)$ là **hàm đa thức**, ta sẽ đặt $\begin{cases} u = g(x) \\ dv = f(x)dx \end{cases}$

Một số dạng nguyên hàm từng phần **thường gặp**.

☞ **Dạng 1:** $I = \int P(x)\ln(mx+n)dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Theo quy tắc ta đặt $\begin{cases} u = \ln(mx+n) \\ dv = P(x)dx \end{cases}$.

☞ **Dạng 2:** $I = \int P(x) \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Theo quy tắc ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} dx \end{cases}$.

✎ **Dạng 3:** $I = \int P(x)e^{ax+b}dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức

Theo quy tắc ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = a^{ax+b}dx \end{cases}$.

✎ **Dạng 4:** $I = \int \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right] e^x dx$.

Theo quy tắc ta đặt $\begin{cases} u = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right] \\ dv = e^x dx \end{cases}$.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $I_1 = \int x \sin x dx$

b) $I_2 = \int x e^{3x} dx$

c) $I_3 = \int x^2 \cos x dx$

d) $I_4 = \int x \ln x dx$

Lời giải:

a) $I_1 = \int x \sin x dx$

• **Cách 1:** Đặt $\begin{cases} u = x \\ \sin x dx = dv \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

$\longrightarrow I_1 = \int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$

• **Cách 2:** $I_1 = \int x \sin x dx = -\int x d(\cos x) = -\left[x \cos x - \int \cos x dx \right] = -x \cos x + \sin x + C$

b) $I_2 = \int x e^{3x} dx$

• **Cách 1:** Đặt $\begin{cases} u = x \\ e^{3x} dx = dv \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{cases}$

$\longrightarrow I_2 = \int x e^{3x} dx = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} \int e^{3x} d(3x) = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C$

• **Cách 2:**

$I_2 = \int x e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int x d(e^{3x}) = \frac{1}{3} \left[x e^{3x} - \int e^{3x} dx \right] = \frac{1}{3} \left[x e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} d(3x) \right] = \frac{1}{3} \left(x e^{3x} - \frac{1}{3} e^{3x} \right) + C$

c) $I_3 = \int x^2 \cos x dx$

• **Cách 1:** Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ \cos x dx = dv \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \sin x \end{cases}$

Khi đó $I_3 = \int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx = x^2 \sin x - 2J$

Xét $J = \int x \sin x dx$. Đặt

$$\begin{cases} u = x \\ \sin x dx = dv \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases} \longrightarrow J = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x$$

$$\longrightarrow I_3 = x^2 \sin x - 2(-x \cos x + \sin x) + C.$$

• **Cách 2:** $I_3 = \int x^2 \cos x dx = \int x^2 d(\sin x) = x^2 \sin x - \int \sin x d(x^2) = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx$
 $= x^2 \sin x + 2 \int x d(\cos x) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$

d) $I_4 = \int x \ln x dx$

• **Cách 1:** Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ x dx = dv \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases} \longrightarrow I_4 = \int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$

• **Cách 2:** Ta có:

$$I_4 = \int x \ln x dx = \int \ln x d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} d(\ln x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Ví dụ 2: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $I_5 = \int x^2 \ln x dx$

b) $I_6 = \int x \ln^2(x+1) dx$

c) $I_7 = \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$

d) $I_8 = \int e^x \sin x dx$

Lời giải:

a) $I_5 = \int x^2 \ln x dx$

• **Cách 1:**

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ x^2 dx = dv \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases} \longrightarrow I_5 = \int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.$

• **Cách 2:**

Ta có $I_5 = \int x^2 \ln x dx = \int \ln x d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} d(\ln x) = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.$

b) $I_6 = \int x \ln^2(x+1) dx$

Ta có $I_6 = \int x \ln^2(x+1) dx = \int \ln^2(x+1) d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} \ln^2(x+1) - \int \frac{x^2}{2} d(\ln^2(x+1))$

$$= \frac{x^2}{2} \ln^2(x+1) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2 \ln(x+1)}{x+1} dx = \frac{x^2}{2} \ln^2(x+1) - \int \frac{x^2}{x+1} \ln(x+1) dx = \frac{x^2}{2} \ln^2(x+1) - J$$

$$\begin{aligned}\text{Xét } J &= \int \frac{x^2}{x+1} \ln(x+1) dx = \int \frac{(x^2-1)+1}{x+1} \ln(x+1) dx = \int \left(x-1 + \frac{1}{x+1} \right) \ln(x+1) dx = \\ &= \int (x-1) \ln(x+1) dx + \int \ln(x+1) \frac{dx}{x+1} = \int \ln(x+1) d\left(\frac{x^2}{2} - x\right) + \int \ln(x+1) d(\ln(x+1)) = \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \ln(x+1) - \int \left(\frac{x^2}{2} - x\right) d(\ln(x+1)) + \frac{\ln^2(x+1)}{2} = \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \ln(x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2-2x}{x+1} dx + \frac{\ln^2(x+1)}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Xét } K &= \int \frac{x^2-2x}{x+1} dx = \int \left(x-3 + \frac{3}{x+1} \right) dx = \frac{x^2}{2} - 3x + 3 \ln|x+1| \\ \longrightarrow J &= \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \ln(x+1) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - 3x + 3 \ln|x+1| \right) + \frac{\ln^2(x+1)}{2} + C.\end{aligned}$$

$$\text{Từ đó ta được } I_6 = \frac{x^2 \ln^2(x+1)}{2} - \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \ln(x+1) + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - 3x + 3 \ln|x+1| \right) - \frac{\ln^2(x+1)}{2} + C.$$

$$\text{c) } I_7 = \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$$

Ngầm hiểu $u = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$; $v = x$ ta có

$$\begin{aligned}I_7 &= x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int x d \left[\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right] = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} x dx \\ &= x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{\sqrt{1+x^2}} = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } I_7 = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.$$

$$\text{d) } I_8 = \int e^x \sin x dx$$

$$\begin{aligned}I_8 &= \int e^x \sin x dx = \int \sin x d(e^x) = e^x \sin x - \int e^x d(\sin x) = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int \cos x d(e^x) \\ &= e^x \sin x - \int \cos x d(e^x) = e^x \sin x - \left[e^x \cos x - \int e^x d(\cos x) \right] = e^x \sin x - \left[e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \right] \\ &= e^x \sin x - \left[e^x \cos x + I_8 \right] = e^x \sin x - e^x \cos x - I_8 \longrightarrow I_8 = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + C.\end{aligned}$$

Nhận xét: Trong nguyên hàm I_8 chúng ta thấy rất rõ là việc tính nguyên hàm gồm hai vòng lặp, trong mỗi vòng ta đều nhất quán đặt u là hàm lượng giác ($\sin x$ hoặc $\cos x$) và việc tính toán không thể tính trực tiếp được.

Ví dụ 3: Tính các nguyên hàm sau:

$$\text{a) } I_9 = \int \frac{\ln(x-1)}{(2x+1)^2} dx$$

$$\text{b) } I_{10} = \int \frac{\ln(2x+1)}{(1-3x)^2} dx$$

$$\text{c) } I_{11} = \int x \sin x \cos^2 x dx$$

$$\text{d) } I_{12} = \int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx$$

Lời giải

$$\text{a) Đặt } \begin{cases} u = \ln(x-1) \\ dv = \frac{1}{(2x+1)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x-1} dx \\ v = \frac{-1}{2(2x+1)} \end{cases} \cdot \text{ Khi đó: } I_9 = \frac{-\ln(x-1)}{2(2x+1)} + \int \frac{dx}{2(2x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{-\ln(x-1)}{2(2x+1)} + \frac{1}{6} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{2x+1} \right) dx = \frac{-\ln(x-1)}{2(2x+1)} + \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-1}{2x+1} \right| + C$$

$$\text{b) Đặt } \begin{cases} u = \ln(2x+1) \\ dv = \frac{1}{(1-3x)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{2x+1} dx \\ v = \frac{-1}{3(3x-1)} \end{cases} \cdot \text{ Khi đó: } I_{10} = \frac{-\ln(2x+1)}{3(3x-1)} + \int \frac{dx}{3(2x+1)(3x-1)}$$

$$= \frac{-\ln(2x+1)}{3(3x-1)} + \frac{1}{15} \int \left(\frac{3}{3x-1} - \frac{2}{2x+1} \right) dx = \frac{-\ln(2x+1)}{3(3x-1)} + \frac{1}{15} \ln \left| \frac{3x-1}{2x+1} \right| + C$$

$$\text{c) Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \sin x \cos^2 x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{-\cos^3 x}{3} \end{cases} \cdot \text{ Khi đó } I_{11} = \frac{-x \cos^3 x}{3} + \frac{1}{3} \int \cos^3 x dx$$

$$= \frac{-x \cos^3 x}{3} + \frac{1}{3} \int \frac{\cos 3x + 3 \cos x}{4} dx = \frac{-x \cos^3 x}{3} + \frac{\sin 3x}{36} + \frac{\sin x}{4} + C$$

$$\text{d) Đặt } \begin{cases} u = x^2 e^x \\ dv = \frac{dx}{(x+2)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = x(x+2)e^x dx \\ v = \frac{-1}{x+2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_{12} = \frac{-x^2 e^x}{x+2} + \int x e^x dx = \frac{-x^2 e^x}{x+2} + \int x e^x dx = -\frac{x^2 e^x}{x+2} + x e^x - e^x + C.$$

Ví dụ 4: Tính các nguyên hàm sau:

$$\text{a) } I_{13} = \int x \ln(x^2 + 1) dx$$

$$\text{b) } I_{14} = \int x \tan^2 x dx$$

$$\text{c) } I_{15} = \int x^2 \ln(x^2 + 1) dx$$

$$\text{d) } I_{16} = \int \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx$$

Lời giải

$$\text{a) } I_{13} = \int x \ln(x^2 + 1) dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = \ln(1 + x^2) \\ x dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2x dx}{1 + x^2} \\ v = \frac{x^2 + 1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_{13} = \int x \ln(1 + x^2) dx = \frac{(x^2 + 1)}{2} \ln(1 + x^2) - \int \frac{(x^2 + 1)}{2} \cdot \frac{2x}{1 + x^2} dx = \frac{(x^2 + 1)}{2} \ln(1 + x^2) - \int x dx$$

$$\Rightarrow I_{13} = \frac{(x^2 + 1)}{2} \ln(1 + x^2) - \frac{x^2}{2} + C = \frac{(x^2 + 1) \ln(1 + x^2) - x^2}{2} + C$$

$$\text{b) } I_{14} = \int x \tan^2 x dx = \int x \left(1 - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \int x dx - \int \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

$$\text{Ta đi tính } J = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = x \\ \frac{1}{\cos^2 x} dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}$$

$$\Rightarrow J = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x - \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = x \tan x + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = x \tan x + \ln |\cos x| + C$$

$$\Rightarrow I_{14} = \frac{x^2}{2} + x \tan x + \ln |\cos x| + C$$

$$\text{c) } I_{15} = \int x^2 \ln(x^2 + 1) dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = \ln(1 + x^2) \\ x^2 dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2x dx}{1 + x^2} \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_{15} = \int x^2 \ln(x^2 + 1) dx = \frac{x^3}{3} \ln(x^2 + 1) - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{x^3}{3} \ln(x^2 + 1) - \frac{2}{3} \int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx$$

$$\text{Ta đi tính } K = \int \frac{x^4}{1 + x^2} dx$$

$$\text{Đặt } x = \tan t \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \text{ và } x^2 + 1 = \tan^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t} \Rightarrow K = \int \frac{x^4}{1 + x^2} dx = \arctan x + \frac{x^3 - 3x}{3} + C$$

$$\text{Do đó: } I_{15} = \int x^2 \ln(x^2 + 1) dx = \frac{x^3 \ln(x^2 + 1)}{3} + \frac{2}{3} \left(\arctan x + \frac{x^3 - 3x}{3} \right) + C$$

$$\text{d) } I_{16} = \int \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx$$

$$\text{Đặt } \sqrt{x} = t \Rightarrow dt = \frac{1}{2} \sqrt{x} dx \Rightarrow 2dt = dx \Rightarrow I_{16} = \int 2t \sin t dt. \text{ Đặt } \begin{cases} u = t \\ \sin t dt = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = -\cos t \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_{16} = \int 2t \sin t dt = 2 \left[-t \cos t + \int \cos t \right] = -2t \cos t + 2 \sin t + C \Rightarrow I_{16} = -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + C$$

Ví dụ 5: Tính nguyên hàm $I = \int \ln(x + 2) dx$.

A. $I = x \ln(x+2) - x + C.$

B. $I = (x+2) \ln(x+2) - x + C.$

C. $I = x \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} + C.$

D. $I = x \ln(x+2) - \frac{1}{x+2} + C.$

Lời giải:

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+2) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x+2} \\ v = x+2 \end{cases}$ (Ta có thể chọn $v = x; v = x+1 \dots$, tuy nhiên ta nên chọn $v = x+2$ để

tính toán dễ dàng hơn).

Khi đó $I = (x+2) \ln(x+2) - \int dx = (x+2) \ln(x+2) - x + C.$ **Chọn B.**

Ví dụ 6: Tính nguyên hàm $I = \int x \ln(x-1) dx.$

A. $I = \frac{x^2}{2} \ln(x-1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + C.$

B. $I = \frac{x^2-1}{2} \ln(x-1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + C.$

C. $I = \frac{x^2-1}{2} \ln(x-1) + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + C.$

D. $I = \frac{x^2-1}{2} \ln(x-1) - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + C.$

Lời giải:

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x-1) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x-1} \\ v = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{x^2-1}{2} = \frac{(x-1)(x+1)}{2} \end{cases}$

Khi đó $I = \frac{x^2-1}{2} \ln(x-1) - \int \frac{x+1}{2} dx = \frac{x^2-1}{2} \ln(x-1) - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + C.$ **Chọn D.**

Ví dụ 7: Tính nguyên hàm $I = \int (x-2) e^x dx.$

A. $I = (x-3) e^x + C.$

B. $I = (x-1) e^x + C.$

C. $I = x e^x + C.$

D. $I = (x+1) e^x + C.$

Lời giải:

Đặt $\begin{cases} u = x-2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow I = (x-2) e^x - \int e^x dx = (x-2) e^x - e^x + C = (x-3) e^x + C.$ **Chọn A.**

Ví dụ 8: Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x+1) \sin x.$

Biết $F(0) = 3$, tìm $F(x).$

A. $F(x) = (2x+1) \cos x + 2 \sin x + 2.$

B. $F(x) = -(2x+1) \cos x + 2 \sin x + 4.$

C. $F(x) = (2x+1)\cos x - 2\sin x + 2.$

D. $F(x) = -(2x+1)\cos x - 2\sin x + 4.$

Lời giải:

Ta có: $F(x) = \int (2x+1)\sin x dx$. Đặt $\begin{cases} u = 2x+1 \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

$\Rightarrow F(x) = -(2x+1)\cos x + \int 2\sin x dx = -(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$

Mặt khác $F(0) = -1 + C = 3 \Rightarrow C = 4 \Rightarrow F(x) = -(2x+1)\cos x + 2\sin x + 4$. **Chọn B.**

Ví dụ 9: Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{\ln x dx}{(x+1)^2}.$

A. $I = \frac{\ln x}{x+1} - \ln|x+1| + C.$

B. $I = \frac{2x \ln x}{x+1} - \ln|x+1| + C.$

C. $I = \frac{x \ln x}{x+1} - \ln|x+1| + C.$

D. $I = \frac{x \ln x}{x+1} + \ln|x+1| + C.$

Lời giải:

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{(x+1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = -\frac{1}{x+1} + 1 = \frac{x}{x+1} \end{cases} \Rightarrow I = \frac{x \ln x}{x+1} - \int \frac{dx}{x+1} = \frac{x \ln x}{x+1} - \ln|x+1| + C$. **Chọn C.**

Ví dụ 10: Tìm nguyên hàm $I = \int (2-x)\cos x dx.$

A. $I = (2-x)\sin x + \cos x + C.$

B. $I = (2-x)\sin x - \cos x + C.$

C. $I = (2-x)\cos x - \sin x + C.$

D. $I = (2-x)\cos x + \sin x + C.$

Lời giải:

Đặt $\begin{cases} u = 2-x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -dx \\ v = \sin x \end{cases} \Rightarrow I = (2-x)\sin x + \int \sin x dx = (2-x)\sin x - \cos x + C$. **Chọn B.**

Ví dụ 11: Tìm nguyên hàm $I = \int (x+1).3^x dx$ ta được:

A. $I = \frac{x.3^x}{\ln 3} + C.$

B. $I = \frac{(x+1)3^x}{\ln 3} + \frac{3^x}{\ln^2 3} + C.$

C. $I = \frac{(x+1)3^x}{\ln 3} - 3^x + C.$

D. $I = \frac{(x+1)3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{\ln^2 3} + C.$

Lời giải:

Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ dv = 3^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{3^x}{\ln 3} \end{cases} \Rightarrow I = \frac{(x+1)3^x}{\ln 3} - \int \frac{3^x dx}{\ln 3} \Rightarrow I = \frac{(x+1)3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{\ln^2 3} + C.$ **Chọn D.**

Ví dụ 12: Cho nguyên hàm $\int x \cos^2 x dx = m.x^2 + n.x \sin 2x + p.\cos 2x + C$ trong đó $m; n; p; C \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của $P = m + n + p$.

A. $P = \frac{3}{4}.$

B. $P = \frac{5}{4}.$

C. $P = \frac{3}{2}.$

D. $P = \frac{5}{8}.$

Lời giải:

Ta có: $I = \int x \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int x dx + \frac{1}{2} \int x \cos 2x dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{\sin 2x}{2} \end{cases} \Rightarrow \int x \cos 2x dx = \frac{x \sin 2x}{2} - \int \frac{\sin 2x dx}{2} = \frac{x \sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C$

$\Rightarrow I = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x \sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C \Rightarrow m + n + p = \frac{5}{8}.$ **Chọn D.**

Ví dụ 13: Cho $F(x) = \frac{1}{x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{\cos^2 x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \tan x$

A. $\int f'(x) \tan x dx = -\frac{x + \sin 2x}{x^3} + C.$

B. $\int f'(x) \tan x dx = \frac{x + \sin 2x}{x^3} + C.$

C. $\int f'(x) \tan x dx = -\frac{x + \cos^2 x}{x^3} + C.$

D. $\int f'(x) \tan x dx = \frac{x + \cos^2 x}{x^3} + C.$

Lời giải:

Tính nguyên hàm $I = \int f'(x) \tan x dx$

Đặt $\begin{cases} u = \tan x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{\cos^2 x} \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow I = f(x) \cdot \tan x - \int \frac{f(x) dx}{\cos^2 x} = f(x) \tan x - \frac{1}{x^2} + C$

Mặt khác $\frac{f(x)}{\cos^2 x} = F'(x) = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3} \Rightarrow f(x) = \frac{-2 \cos^2 x}{x^3}$

Do đó $I = \frac{-2 \cos^2 x}{x^3} \cdot \tan x - \frac{1}{x^2} + C = \frac{-\sin 2x}{x^3} - \frac{1}{x^2} + C.$ **Chọn A.**

Ví dụ 14: Cho $F(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \cos x + x \sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) \sin x$. Nguyên hàm của hàm số $f'(x) \cos x$ là:

A. $\cos x - x \sin x + C$.

B. $\sin x + x \cos x + C$.

C. $\cos x + x \sin x + C$.

D. $\sin x - x \cos x + C$.

Lời giải:

Tính nguyên hàm $I = \int f'(x) \cos x dx$

Đặt $\begin{cases} u = \cos x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin x dx \\ v = f(x) \end{cases}$

$\Rightarrow I = f(x) \cdot \cos x + \int f(x) \sin x dx = f(x) \cos x + \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \cos x + x \sin x$

Mặt khác $F'(x) = -x \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \sin x + \sin x + x \cos x = \frac{x^2 \sin x}{2} = f(x) \sin x$

Do đó $f(x) = \frac{x^2}{2} \Rightarrow I = \cos x + x \sin x$. **Chọn C.**

Ví dụ 15: Cho $F(x) = e^x + x$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$.

Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \ln x$.

A. $x(e^x + x) \ln x - e^x - x + C$.

B. $x(e^x + 1) \ln x - e^x - x + C$.

C. $x(e^x + 1) \ln x - e^x + x + C$.

D. $x(e^x + x) \ln x + e^x + x + C$.

Lời giải:

Tính nguyên hàm $I = \int f'(x) \ln x dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow I = f(x) \ln x - \int \frac{f(x) dx}{x} = f(x) \ln x - e^x - x + C$.

Mặt khác $\frac{f(x)}{x} = F'(x) = e^x + 1 \Rightarrow f(x) = x(e^x + 1)$

Suy ra $I = x(e^x + 1) \ln x - e^x - x + C$. **Chọn B.**

Ví dụ 16: Cho $F(x) = x \sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) e^x$.

Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^x$

A. $x(\sin x + \cos x) + \sin x + C.$

B. $e^x(\cos x - \sin x) + \sin x + C.$

C. $x(\cos x - 2\sin x) + \sin x + C.$

D. $x(\cos x - \sin x) + \sin x + C.$

Lời giải:

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = e^x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow I = \int f'(x)e^x dx = e^x \cdot f(x) - \int f(x) \cdot e^x dx \\ = f(x)e^x - x \sin x + C.$$

Lại có: $f(x) \cdot e^x = F'(x) = \sin x + x \cos x$

$\Rightarrow I = \sin x + x \cos x - x \sin x + C = x(\cos x - \sin x) + \sin x + C.$ **Chọn D.**

Ví dụ 17: Cho $F(x) = x^2 + 1$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của $f'(x)\ln x$.

A. $\int f'(x)\ln x dx = x^2(2\ln x + 1) + C.$

B. $\int f'(x)\ln x dx = x^2(1 - 2\ln x) + C.$

C. $\int f'(x)\ln x dx = -x^2(2\ln x + 1) + C.$

D. $\int f'(x)\ln x dx = x^2(2\ln x - 1) + C.$

Lời giải:

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = f(x) \end{cases} \text{ suy ra } \int f'(x) \cdot \ln x dx = \ln x \cdot f(x) - \int \frac{f(x)}{x} dx$$

Ta có $F'(x) = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow 2x = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow f(x) = 2x^2$

Do đó $\int f'(x) \cdot \ln x dx = 2x^2 \cdot \ln x - x^2 - 1 + C = x^2(2\ln x - 1) + C.$ **Chọn D.**

Ví dụ 18: Cho $F(x) = \ln x$ là một nguyên hàm của $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của $f'(x)\ln x$.

A. $\int f'(x)\ln x dx = \frac{1}{x^2} \left(\ln x + \frac{1}{2} \right) + C.$

B. $\int f'(x)\ln x dx = \frac{1}{x} \left(\ln x + \frac{1}{2} \right) + C.$

C. $\int f'(x)\ln x dx = \frac{1}{x^2} \left(\ln x + \frac{1}{2} \right) + C.$

D. $\int f'(x)\ln x dx = \frac{1}{x^2} (2\ln x + 1) + C.$

Lời giải:

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = f(x) \end{cases} \text{ suy ra } \int f'(x) \cdot \ln x dx = \ln x \cdot f(x) - \int \frac{f(x)}{x} dx$$

Ta có $F'(x) = x.f(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = x.f(x) \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x^2}$

Do đó $\int f'(x). \ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} - \int \frac{dx}{x^3} + C = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C$. **Chọn A.**

Ví dụ 19: Cho $F(x) = \ln x$ là một nguyên hàm của $\frac{f(x)}{x^3}$. Tìm nguyên hàm của $f'(x) \ln x$.

A. $\int f'(x) \ln x dx = x^2 \left(\frac{1}{2} - \ln x \right) + C$.

B. $\int f'(x) \ln x dx = x^2 \left(\ln x + \frac{1}{2} \right) + C$.

C. $\int f'(x) \ln x dx = x^2 (2 \ln x - 1) + C$.

D. $\int f'(x) \ln x dx = x^2 \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + C$.

Lời giải:

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = f(x) \end{cases}$ suy ra $\int f'(x). \ln x dx = \ln x.f(x) - \int \frac{f(x)}{x} dx$

Ta có $F'(x) = \frac{f(x)}{x^3} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{f(x)}{x^3} \Leftrightarrow f(x) = x^2$

Do đó $\int f'(x). \ln x dx = x^2 \ln x - \int x dx = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} + C$. **Chọn D.**

Ví dụ 20: Cho $F(x) = x \tan x + \ln |\cos x|$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{\cos^2 x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \tan x$.

A. $\int f'(x) \tan x dx = \ln |\cos x| + C$.

B. $\int f'(x) \tan x dx = \ln |\sin x| + C$.

C. $\int f'(x) \tan x dx = -\ln |\cos x| + C$.

D. $\int f'(x) \tan x dx = -\ln |\sin x| + C$.

Lời giải:

Đặt $\begin{cases} u = \tan x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{\cos^2 x} \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow \int f'(x). \tan x dx = f(x). \tan x - \int \frac{f(x)}{\cos^2 x} dx$

Ta có $F'(x) = \frac{f(x)}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \cot x + \frac{x}{\cos^2 x} - \tan x = \frac{f(x)}{\cos^2 x} \Leftrightarrow f(x) = x$.

Do đó $\int f'(x). \tan x dx = x. \tan x - x. \tan x - \ln |\cos x| + C = -\ln |\cos x| + C$. **Chọn C.**

Ví dụ 21: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \ln x$ thỏa mãn điều kiện $F(1) = 3$. Tính giá trị

của biểu thức $T = 2^{F(e)} + \log_4 3 \cdot \log_3 [F(e)]$.

- A. $T = 2$. B. $T = 8$. C. $T = \frac{9}{2}$. D. $T = 17$.

Lời giải:

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = x \end{cases} \text{ suy ra } \int f(x) dx = x \cdot \ln x - \int dx = x \cdot \ln x - x + C$$

Mà $F(1) = 3 \longrightarrow 1 \cdot \ln 1 - 1 + C = 3 \Leftrightarrow C = 4$. Vậy $T = 17$. **Chọn D.**

Ví dụ 22: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{2x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

Tính $\ln \left| F\left(\frac{5}{2}\right) \right|$.

- A. $\ln \left| F\left(\frac{5}{2}\right) \right| = -2$. B. $\ln \left| F\left(\frac{5}{2}\right) \right| = 1$. C. $\ln \left| F\left(\frac{5}{2}\right) \right| = 5$. D. $\ln \left| F\left(\frac{5}{2}\right) \right| = 6$.

Lời giải:

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{e^{2x}}{2} \end{cases} \Rightarrow \int f(x) dx = \frac{x \cdot e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} dx = \frac{x \cdot e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$$

Mà $F\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \longrightarrow C = 0 \longrightarrow F(x) = \frac{x \cdot e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}$. Vậy $\ln \left| F\left(\frac{5}{2}\right) \right| = 5$. **Chọn C.**

Ví dụ 23: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \cdot e^{-x}$ thỏa mãn $F(0) = -1$. Tính tổng S các nghiệm của phương trình $F(x) + x + 1 = 0$.

- A. $S = -3$. B. $S = 0$. C. $S = 2$. D. $S = -1$.

Lời giải:

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \int f(x) dx = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + C$$

Mà $F(0) = -1 \longrightarrow C - 1 = -1 \Leftrightarrow C = 0 \longrightarrow F(x) = -x \cdot e^{-x} - e^{-x}$.

Do đó $F(x) + x + 1 = 0 \Leftrightarrow -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(1-e^{-x}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$. **Chọn D.**

Ví dụ 24: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \sin x$ thỏa mãn $F(\pi) = 2\pi$. Tính giá trị của

biểu thức $T = 2F(0) - 8F(2\pi)$.

A. $T = 6\pi$.

B. $T = 4\pi$.

C. $T = 8\pi$.

D. $T = 10\pi$.

Lời giải:

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases} \Rightarrow \int x \cdot \sin x dx = -x \cdot \cos x + \int \cos x dx = -x \cdot \cos x + \sin x + C$$

Mà $F(\pi) = 2\pi \longrightarrow C = 4\pi$. Do đó $F(x) = -x \cdot \cos x + \sin x + 4\pi$.

Vậy $T = 2 \cdot 4\pi - 8 \cdot 2\pi = -8\pi$. **Chọn C.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x \cos x$ thỏa mãn $F(\pi) = 2017$.

A. $F(x) = x \sin x - \cos x + 2019$.

B. $F(x) = x \sin x + \cos x + 2018$.

C. $F(x) = -x \sin x + \cos x - 1$.

D. $F(x) = -x \sin x - \cos x + 2017$.

Câu 2: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$.

A. $-x \cot x - \ln |\cos x| + C$.

B. $x \tan x + \ln |\cos x| + C$.

C. $-x \cot x + \ln |\cos x| + C$.

D. $-x \tan x + \ln |\cos x| + C$.

Câu 3: Tìm nguyên hàm của $y = xe^x$.

A. $\int f(x) dx = x^2 e^x + C$.

B. $\int f(x) dx = xe^x + C$.

C. $\int f(x) dx = (x+1)e^x + C$.

D. $\int f(x) dx = (x-1)e^x + C$.

Câu 4: Tìm nguyên hàm của $y = x \ln x$.

A. $\frac{x^2}{2} \ln x + \frac{1}{4} x^2 + C$.

B. $x^2 \ln x - \frac{1}{2} x^2 + C$.

C. $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$.

D. $x \ln x + \frac{1}{2} x + C$.

Câu 5: (THPT Chuyên Bến Tre 2017) Tìm nguyên hàm của $f(x) = \ln x$.

A. $x \ln x + C$.

B. $x - x \ln x + C$.

C. $x \ln x + x + C$.

D. $x \ln x - x + C$.

Câu 6: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x \sin x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2019$.

A. $F(x) = x \sin x + \cos x + 2019$.

B. $F(x) = \sin x - x \cos x + 2018$.

C. $F(x) = x \sin x - \cos x + 2019$.

D. $F(x) = \sin x + x \cos x + 2018$.

Câu 7: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x+1) \sin x$.

A. $(x+1) \cos x + \sin x + C$.

B. $-(x+1) \cos x + \sin x + C$.

C. $-(x+1) \cos x - \sin x + C$.

D. $(x+1) \cos x - \sin x + C$.

Câu 8: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x-1)e^{-x}$.

A. $-(2x+1)e^{-x} + C$.

B. $-(2x-1)e^{-x} + C$.

C. $-(2x+3)e^{-x} + C$.

D. $-(2x-3)e^{-x} + C$.

Câu 9: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x+1) \cos x$.

A. $(x+1) \sin x - \cos x + C$.

B. $(x+1) \sin x + \cos x + C$.

C. $-(x+1) \sin x - \cos x + C$.

D. $-(x+1) \sin x + \cos x + C$.

Câu 10: Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \ln x$ thỏa mãn $F(1) = 3$. Tính $F(e)$.

- A. $F(e) = 3$. B. $F(e) = 1$. C. $F(e) = 4$. D. $F(e) = 0$.

Câu 11: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x.e^{-x}$ thỏa mãn $F(0) = 1$.

- A. $-(x+1)e^{-x} + 1$. B. $-(x+1)e^{-x} + 2$. C. $(x+1)e^{-x} + 1$. D. $(x+1)e^{-x} + 2$.

Câu 12: Tìm một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x^2 + 2x)e^x$.

- A. $(2x+2)e^x$. B. x^2e^x . C. $(x^2+x)e^x$. D. $(x^2-2x)e^x$.

Câu 13: (THPT Chuyên Đại học Vinh 2017) Cho $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = (x+1)e^x$ và $\int f(x)dx = (ax+b)e^x + c$, với $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tính $a+b$.

- A. $a+b = 0$. B. $a+b = 3$. C. $a+b = 2$. D. $a+b = 1$.

Câu 14: (Đề thi THPT Quốc gia năm 2017) Cho $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x).e^{2x}$.

Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x).e^{2x}$.

- A. $\int f'(x).e^{2x}dx = -x^2 + 2x + C$. B. $\int f'(x).e^{2x}dx = -x^2 + x + C$.
C. $\int f'(x).e^{2x}dx = 2x^2 - 2x + C$. D. $\int f'(x).e^{2x}dx = -2x^2 + 2x + C$.

Câu 15: (Đề thi THPT Quốc gia năm 2017) Cho $F(x) = (x-1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x).e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x).e^{2x}$.

- A. $\int f'(x).e^{2x}dx = (x-2)e^x + C$. B. $\int f'(x).e^{2x}dx = \frac{2-x}{2}e^x + C$.
C. $\int f'(x).e^{2x}dx = (2-x)e^x + C$. D. $\int f'(x).e^{2x}dx = (4-2x)e^x + C$.

Câu 16: (Đề thi THPT Quốc gia năm 2017) Cho $F(x) = -\frac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$.

Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

- A. $\int f'(x)\ln xdx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{5x^5} + C$. B. $\int f'(x)\ln xdx = \frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{5x^5} + C$.
C. $\int f'(x)\ln xdx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$. D. $\int f'(x)\ln xdx = -\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$.

Câu 17: (Đề thi THPT Quốc gia năm 2017) Cho $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm

nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

- A. $\int f'(x)\ln xdx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C$. B. $\int f'(x)\ln xdx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + C$.

$$\text{C. } \int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C.$$

$$\text{D. } \int f'(x) \ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) + C.$$

Câu 18: Cho $F(x) = \frac{1}{x^2}$ là một nguyên hàm của $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \ln x$.

$$\text{A. } \int f'(x) \ln x dx = \frac{2 \ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + C.$$

$$\text{B. } \int f'(x) \ln x dx = -\left(\frac{2 \ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) + C.$$

$$\text{C. } \int f'(x) \ln x dx = \frac{2 \ln x}{x^2} - \frac{1}{x^2} + C.$$

$$\text{D. } \int f'(x) \ln x dx = -\left(\frac{2 \ln x}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right) + C.$$

Câu 19: Cho $F(x) = \ln x$ là một nguyên hàm của $\frac{f(x)}{x^2}$. Tìm nguyên hàm của $f'(x) \ln x$.

$$\text{A. } \int f'(x) \ln x dx = x(\ln x + 1) + C.$$

$$\text{B. } \int f'(x) \ln x dx = x(\ln x - 1) + C.$$

$$\text{C. } \int f'(x) \ln x dx = x(\ln x - x) + C.$$

$$\text{D. } \int f'(x) \ln x dx = x(1 - \ln x) + C.$$

Câu 20: Cho $F(x) = \frac{1}{x^3}$ là một nguyên hàm của $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \ln x$.

$$\text{A. } \int f'(x) \ln x dx = -\frac{3 \ln x}{x^2} + \frac{3}{2x^2} + C.$$

$$\text{B. } \int f'(x) \ln x dx = \frac{3 \ln x}{x^2} - \frac{3}{2x^2} + C.$$

$$\text{C. } \int f'(x) \ln x dx = -\frac{3 \ln x}{x^2} - \frac{3}{2x^2} + C.$$

$$\text{D. } \int f'(x) \ln x dx = \frac{3 \ln x}{x^2} - \frac{3}{2x^2} + C.$$

Câu 21: Cho $F(x) = \frac{1}{x^2}$ là một nguyên hàm của $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \cdot x \ln x$.

$$\text{A. } \int f'(x) x \ln x dx = -4\left(\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x^2}\right) + C.$$

$$\text{B. } \int f'(x) x \ln x dx = 4\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x}\right) + C.$$

$$\text{C. } \int f'(x) x \ln x dx = 4\left(\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x^2}\right) + C.$$

$$\text{D. } \int f'(x) x \ln x dx = -4\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x}\right) + C.$$

Câu 22: Cho $F(x) = \frac{1}{x^2}$ là một nguyên hàm của $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của $f'(x) \cdot (x^3 + 1)$.

$$\text{A. } \int f'(x)(x^3 + 1) dx = 4x + \frac{2}{x^2} + C.$$

$$\text{B. } \int f'(x)(x^3 + 1) dx = 4x - \frac{2}{x^2} + C.$$

$$\text{C. } \int f'(x)(x^3 + 1) dx = -4x - \frac{2}{x^2} + C.$$

$$\text{D. } \int f'(x)(x^3 + 1) dx = x + \frac{2}{x^2} + C.$$

Câu 23: Cho $F(x) = \frac{x^2}{4}$ là một nguyên hàm của $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của $f'(x) \ln x$.

$$\text{A. } \int f'(x) \ln x dx = \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + C.$$

$$\text{B. } \int f'(x) \ln x dx = \frac{x^2}{2} \left(\ln x + \frac{1}{2} \right) + C.$$

$$\text{C. } \int f'(x) \ln x dx = \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2x} \right) + C.$$

$$\text{D. } \int f'(x) \ln x dx = \frac{x^2}{2} \left(\ln x + \frac{1}{2x} \right) + C.$$

Câu 24: Cho $F(x) = -xe^x$ là một nguyên hàm của $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của $f'(x)e^{2x}$.

A. $\int f'(x)e^{2x}dx = 2(1-x)e^x + C.$

B. $\int f'(x)e^{2x}dx = \frac{1-x}{2}e^x + C.$

C. $\int f'(x)e^{2x}dx = (x-1)e^x + C.$

D. $\int f'(x)e^{2x}dx = (x-2)e^x + C.$

Câu 25: Cho $F(x) = 2(x-1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^x$ và $f(0) = 0$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)e^x$.

A. $\int f(x)e^x dx = (x^2 - 2x + 1)e^x + C.$

B. $\int f(x)e^x dx = (x^2 + 2x - 2)e^x + C.$

C. $\int f(x)e^x dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + C.$

D. $\int f(x)e^x dx = (x^2 + 2x - 1)e^x + C.$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases} \Rightarrow F(x) = \int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx$

$$= x \sin x + \cos x + C. \text{ Lại có } F(\pi) = \pi \sin \pi + \cos \pi + C = -1 + C = 2017 \Rightarrow C = 2018$$

Do đó $F(x) = x \sin x + \cos x + 2018$. **Chọn B.**

Câu 2: Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases} \Rightarrow \int f(x) dx = x \tan x - \int \tan x dx$

$$= x \tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = x \sin x + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = x \sin x + \ln |\cos x| + C. \text{ **Chọn B.**}$$

Câu 3: Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$\text{Khi đó } \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = (x-1)e^x + C. \text{ **Chọn D.**}$$

Câu 4: Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \int x \ln x dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C. \text{ **Chọn C.**}$

Câu 5: Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = x \end{cases} \Rightarrow \int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C. \text{ **Chọn D.**}$

Câu 6: Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases} \Rightarrow \int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx$

$$= -x \cos x + \sin x + C \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \sin x - x \cos x + C.$$

$$\text{Lại có: } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} + C = 1 + C = 2019 \Rightarrow C = 2018$$

Vậy $F(x) = \sin x - x \cos x + 2018$. **Chọn B.**

Câu 7: Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases} \Rightarrow \int f(x) dx = -(x+1) \cos x + \int \cos x dx$

$$= -(x+1) \cos x + \sin x + C. \text{ **Chọn B.**}$$

Câu 8: Đặt $\begin{cases} u = 2x-1 \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$

$$\text{Khi đó } \int (2x-1) e^{-x} dx = -(2x-1) e^{-x} + \int 2e^{-x} dx = (1-2x) e^{-x} - 2e^{-x} + C$$

$$= (-1-2x) e^{-x} + C = -(2x+1) e^{-x} + C. \text{ **Chọn A.**}$$

Câu 9: Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases} \Rightarrow \int (x+1) \cos x dx = (x+1) \sin x - \int \sin x dx$
 $= (x+1) \sin x + \cos x + C$. **Chọn B.**

Câu 10: Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = x \end{cases} \Rightarrow F(x) = \int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$.

Lại có: $F(1) = 1 \cdot \ln 1 - 1 + C = 3 \Rightarrow C = 4 \Rightarrow F(e) = e \ln e - e + 4 = 4$. **Chọn C.**

Câu 11: Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$

Khi đó $F(x) = \int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C = -(x+1) e^{-x} + C$.

Mặt khác $F(0) = -1 + C = 1 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow F(x) = -(x+1) e^{-x} + 2$. **Chọn B.**

Câu 12: Đặt $\begin{cases} u = x^2 + 2x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (2x+2) dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow \int f(x) dx = (x^2 + 2x) e^x - \int (2x+2) e^x dx$

Xét nguyên hàm $\int (2x+2) e^x dx$

Đặt $\begin{cases} u_1 = 2x+2 \\ dv_1 = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = 2 dx \\ v_1 = e^x \end{cases} \Rightarrow \int (2x+2) e^x dx = (2x+2) e^x - 2 \int e^x dx$
 $= (2x+2) e^x - 2 e^x = 2x e^x + C$.

Do đó $\int f(x) dx = (x^2 + 2x) e^x - 2x e^x + C = x^2 e^x + C$. **Chọn B.**

Câu 13: Ta có $\int f(x) dx = (ax+b) e^x + c$.

Đạo hàm 2 vế ta được $\left[\int f(x) dx \right]' = \left[(ax+b) e^x + c \right]'$

$\Leftrightarrow f(x) = a e^x + (ax+b) e^x = (ax+a+b) e^x$

Tiếp tục đạo hàm 2 vế ta được: $f'(x) = a e^x + (ax+a+b) e^x = (ax+2a+b) e^x = (x+1) e^x$

Đồng nhất 2 vế ta có: $\begin{cases} a = 1 \\ 2a+b = 1 \end{cases} \Rightarrow a+b = 0$. **Chọn A.**

Câu 14: Đặt $\begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2e^{2x} dx \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow \int f'(x) \cdot e^{2x} dx = e^{2x} \cdot f(x) - \int 2e^{2x} \cdot f(x) dx$
 $= e^{2x} \cdot f(x) - 2x^2 + C$

Mặt khác $f(x) \cdot e^{2x} = F'(x) = 2x \Rightarrow \int f'(x) \cdot e^{2x} dx = 2x - 2x^2 + C$. **Chọn D.**

Câu 15: Đặt $\begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2e^{2x}dx \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow \int f'(x).e^{2x}dx = e^{2x}.f(x) - \int 2e^{2x}.f(x)dx$

$$= e^{2x}.f(x) - 2(x-1)e^x + C$$

Mặt khác $f(x).e^{2x} = F'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$

$\int f'(x).e^{2x}dx = xe^x - 2(x-1)e^x + C = (2-x)e^x + C$. **Chọn C.**

Câu 16: Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow \int f'(x)\ln x dx = f(x)\ln x - \int \frac{f(x)}{x}dx$

$$= f(x)\ln x + \frac{1}{3x^3} + C$$

Lại có: $\frac{f(x)}{x} = F'(x) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{-3x^2}{x^6} = \frac{1}{x^4} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^3} \Rightarrow f(x)\ln x = \frac{\ln x}{x^3}$

Do đó $\int f'(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$. **Chọn C.**

Câu 17: Ta có $\frac{f(x)}{x} = F'(x) = \frac{-1}{x^3} \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{x^2}$ suy ra $f'(x)\ln x = \frac{2}{x^3} \cdot \ln x$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{2}{x^3}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{-1}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \int f'(x)\ln x dx = -\frac{\ln x}{x^2} + \int \frac{dx}{x^3} = \frac{-\ln x}{x^2} - \frac{1}{2x^2} + C$.

Cách 2: Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow \int f'(x)dx = f(x)\ln x - \int \frac{f(x)}{x}dx$

$$= f(x)\ln x - \frac{1}{2x^2} + C$$

Mặt khác $\frac{f(x)}{x} = F'(x) = \frac{-1}{x^3} \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow f(x)\ln x = \frac{-\ln x}{x^2}$

Do đó $\int f'(x)\ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C$. **Chọn A.**

Câu 18: Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow \int f'(x).\ln x dx = f(x).\ln x - \int \frac{f(x)}{x}dx$

Ta có $F'(x) = -\frac{2}{x^3} = \frac{f(x)}{x} \longrightarrow f(x) = -\frac{2}{x^2}$. Vậy $\int f'(x).\ln x dx = -\left(\frac{2.\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) + C$.

Chọn B.

Câu 19: Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = f(x) \end{cases}$ suy ra $\int f'(x) \cdot \ln x dx = \ln x \cdot f(x) - \int \frac{f(x)}{x} dx$

Ta có $F'(x) = \frac{f(x)}{x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{f(x)}{x^2} \Leftrightarrow f(x) = x$

Do đó $\int f'(x) \cdot \ln x dx = x \cdot \ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + C$. **Chọn B.**

Câu 20: Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow \int f'(x) \cdot \ln x dx = f(x) \cdot \ln x - \int \frac{f(x)}{x} dx$

Ta có $F'(x) = -\frac{3}{x^4} = \frac{f(x)}{x} \longrightarrow f(x) = -\frac{3}{x^3}$.

Vậy $\int f'(x) \cdot \ln x dx = -\left(\frac{2 \cdot \ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) + C$. **Chọn B.**

Câu 21: Đặt $\begin{cases} u = x \cdot \ln x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \ln x + 1 \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow \int f'(x) \cdot x \ln x dx = f(x) \cdot x \ln x - \int \frac{f(x)}{x} dx$

Ta có $F'(x) = -\frac{2}{x^3} = \frac{f(x)}{x} \longrightarrow f(x) = -\frac{2}{x^2}$.

Vậy $\int f'(x) \cdot \ln x dx = -\left(\frac{2 \cdot \ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) + C$. **Chọn B.**

Câu 22: Đặt $\begin{cases} u = x^3 + 1 \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = 3x^2 dx \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow \int f'(x) \cdot (x^3 + 1) dx = (x^3 + 1) \cdot f(x) - \int 3x^2 \cdot f(x) dx$.

Ta có $F'(x) = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow -\frac{2}{x^3} = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow f(x) = -\frac{2}{x^2}$.

Khi đó $\int f'(x) \cdot (x^3 + 1) dx = -\frac{2(x^3 + 1)}{x^2} + \int 6x dx = 4x - \frac{2}{x^2} + C$. **Chọn B.**

Câu 23: Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = f(x) \end{cases}$ suy ra $\int f'(x) \cdot \ln x dx = \ln x \cdot f(x) - \int \frac{f(x)}{x} dx$

Ta có $F'(x) = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2}{2}$

Do đó $\int f'(x) \cdot \ln x dx = \frac{x^2 \cdot \ln x}{2} - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2 \cdot \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$. **Chọn A.**

Câu 24: Đặt $\begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = 2e^{2x} dx \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow \int f'(x) e^{2x} dx = f(x) \cdot e^{2x} - 2 \int f(x) \cdot e^{2x} dx$

Ta có $F'(x) = f(x).e^{2x} \Leftrightarrow (-x.e^x)' = f(x).e^{2x} \Leftrightarrow -e^x(x+1) = f(x).e^{2x} \Leftrightarrow f(x) = -\frac{x+1}{e^x}$.

Khi đó $\int f'(x)e^{2x}dx = e^{2x}.\left(-\frac{x+1}{e^x}\right) - 2(-x.e^x) + C = (x-1)e^x + C$. **Chọn C.**

Câu 25: Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = e^x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow \int f(x).e^x dx = f(x).e^x - \int f'(x).e^x dx$

Ta có $F'(x) = f'(x).e^x \Leftrightarrow [2(x-1)e^x]' = f'(x).e^x \Leftrightarrow 2x.e^x = f'(x).e^x \Leftrightarrow f'(x) = 2x$

Lại có $f(x) = \int f'(x)dx = \int 2xdx = x^2 + C$ mà $f(0) = 0 \longrightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = x^2$.

Do đó $\int f(x).e^x dx = x^2.e^x - 2(x-1)e^x + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$. **Chọn C.**