

CHƯƠNG 5. ĐẠO HÀM

BÀI 1. ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA ĐẠO HÀM

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – ĐẠO HÀM TẠI MỘT ĐIỂM

1. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 và kí hiệu là $f'(x_0)$ (hoặc $y'(x_0)$), tức là

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Chú ý:

Đại lượng $\Delta x = x - x_0$ gọi là số gia của đối số x tại x_0 .

Đại lượng $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ được gọi là số gia tương ứng của hàm số. Như vậy

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

2. Cách tính đạo hàm bằng định nghĩa

Bước 1. Giả sử Δx là số gia của đối số x tại x_0 , tính $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Bước 2. Lập tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Bước 3. Tìm $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

3. Quan hệ giữa sự tồn tại của đạo hàm và tính liên tục của hàm số

Định lý 1

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại x_0 .

Chú ý:

a) Nếu $y = f(x)$ gián đoạn tại x_0 thì nó không có đạo hàm tại x_0 .

b) Nếu $y = f(x)$ liên tục tại x_0 thì có thể không có đạo hàm tại x_0 .

4. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Định lý 2

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T của đồ thị hàm số tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.

Định lý 3

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ là

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

trong đó $y_0 = f(x_0)$.

5. Ý nghĩa vật lý của đạo hàm

Vận tốc tức thời: $v(t_0) = s'(t_0)$.

Cường độ tức thời: $I(t_0) = Q'(t_0)$.

II – ĐẠO HÀM TRÊN MỘT KHOẢNG

Định nghĩa

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm x trên khoảng đó.

Khi đó, ta gọi hàm số $f': (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f'(x)$$

là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a; b)$, kí hiệu là y' hay $f'(x)$.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Tính đạo hàm bằng định nghĩa

1. Phương pháp

- Tính số gia của hàm số $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
- Lập tỉ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
- Tính giới hạn $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho f là hàm số liên tục tại x_0 . Đạo hàm của f tại x_0 là:

- A. $f(x_0)$.
- B. $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.
- C. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).
- D. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Theo định nghĩa đạo hàm tại x_0 : $f'(x_0)$.

Ví dụ 2: Cho hàm f xác định bởi $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$. Giá trị $f'(0)$ bằng:

- A. 0. B. 1. C. $\frac{1}{2}$. D. Không tồn tại.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 3: Cho hàm f xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ bởi $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - 3x + 2} & (x \neq 1) \\ 0 & (x = 1) \end{cases}$.

Giá trị $f'(1)$ bằng:

- A. $\frac{3}{2}$. B. 1. C. 0. D. Không tồn tại.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{(x-1)(x^2 - 3x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-3)}{(x-1)(x-2)} = +\infty.$$

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x & \text{khi } x \leq 0 \\ 1-x & \text{khi } x > 0 \end{cases}$ và điểm có $x_0 = 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$.

B. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$.

C. $f'(0) = 1$.

D. Hàm số không có đạo hàm tại $x_0 = 0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1.$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-x}{x} = -\infty.$

Do đó hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$.

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ($-1 \leq x \leq 1$). Tính $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

A. $\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$.

B. $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

D. $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-(x+h)^2} - \sqrt{1-x^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2x+h}{\sqrt{1-(x+h)^2} + \sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x) = \sin x$. Tính $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

A. $\cos \frac{x}{2}$.

B. $2 \sin \frac{x}{2}$.

C. $\cos x$.

D. $-\cos x$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có:
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x \quad \left(\text{vì } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1 \right).$$

Ví dụ 7: Tìm a để hàm số sau liên tục và có đạo hàm tại x_0 .

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x \leq 1 \\ ax - 1 & \text{nếu } x > 1 \end{cases}; \quad x_0 = 1.$$

- A. $a = 1$. B. $a = 2$. C. $a = -1$. D. $a = -2$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

- Xét tính liên tục tại $x_0 = 1$. Ta có: $f(1) = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax - 1) = a - 1; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1.$$

Hàm số liên tục tại $x_0 = 1 \Leftrightarrow a - 1 = 1 \Leftrightarrow a = 2$.

- Xét đạo hàm của hàm số tại $x_0 = 1$.

$$\text{Ta có: } \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{[2(1 + \Delta x) - 1] - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2 = f'(1^+).$$

$$\text{Lại có: } \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{(1 + \Delta x)^2 - 1}{\Delta x} = 2 = f'(1^-).$$

Vậy $a = 2$, hàm số liên tục và có đạo hàm tại $x_0 = 1$.

Ví dụ 8: Cho hàm số $f(x) = |x|$ và $g(x) = 1 - |x|$.

Tìm đạo hàm của hàm số $f(x)$ và $f(x) + g(x)$ tại $x_0 = 0$.

- A. $f(x)$ không có đạo hàm và $f(x) + g(x)$ không có đạo hàm tại $x_0 = 0$.
 B. $f(x)$ không có đạo hàm tại $x_0 = 0$ và $f(x) + g(x)$ có đạo hàm tại $x_0 = 0$ và đạo hàm bằng 1 tại $x_0 = 0$.
 C. $f(x)$ không có đạo hàm tại $x_0 = 0$ và $f(x) + g(x)$ có đạo hàm tại $x_0 = 0$ và đạo hàm bằng 0.
 D. $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 = 0$ và bằng 0; $f(x) + g(x)$ có đạo hàm cũng bằng 0.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$\text{Ta có: } f(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 0; \quad f(0) = 0.$$

- $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$
- $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1 \neq 1.$

Vậy hàm số không có đạo hàm tại $x_0 = 0$.

Ta còn có: $h(x) = f(x) + g(x) = 1$. Hiển nhiên $h'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy $h'(0) = 0$.

Ví dụ 9: Cho f xác định trên $(0; +\infty)$ bởi $f(x) = \frac{1}{x}$. Đạo hàm của f tại $x_0 = \sqrt{2}$ là:

- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. D. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Cách 1: Giải bằng tự luận

Dùng định nghĩa tính được $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2} \Rightarrow f'(\sqrt{2}) = -\frac{1}{2}$.

Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

A calculator screen showing the expression $\frac{d}{dx}(\frac{1}{x})|_{x=\sqrt{2}}$ and the result -0.5 .

Ví dụ 10: Cho hàm f xác định trên $\mathbb{R}$ bởi $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Giá trị $f'(-8)$ bằng:

- A. $\frac{1}{12}$. B. $-\frac{1}{12}$. C. $\frac{1}{6}$. D. $-\frac{1}{6}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Cách 1: Giải bằng tự luận

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-8+h) - f(-8)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h-8} - \sqrt[3]{-8}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h-8} + 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 8 + 2^3}{h \left(\sqrt[3]{(h-8)^2} - 2\sqrt[3]{h-8} + 4 \right)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(h-8)^2} - 2\sqrt[3]{h-8} + 4} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Vậy $f'(-8) = \frac{1}{12}$.

Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

A calculator screen showing the expression $\frac{d}{dx}(\sqrt[3]{x})|_{x=-8}$ and the result 0.08333333334 .

Ấn tiếp

A calculator screen showing the fraction $0.08(3)$ and the result $\frac{1}{12}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Trong các phát biểu sau, phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. Nếu hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại điểm đó.
 B. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó không liên tục tại điểm đó.
 C. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

D. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại điểm đó.

Lời giải

Chọn C

Câu 2: Cho f là hàm số liên tục tại x_0 . Đạo hàm của f tại x_0 là:

A. $f(x_0)$.

B. $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

C. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).

D. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).

Lời giải

Chọn C

Ta có Cho f là hàm số liên tục tại x_0 .

Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ thì $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Đặt $h = x - x_0 \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

B. $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

C. $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

D. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x+x_0)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Đặt $h = \Delta x = x - x_0 \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3-\sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

A. $f'(0) = \frac{1}{4}$.

B. $f'(0) = \frac{1}{16}$.

C. $f'(0) = \frac{1}{32}$.

D. Không tồn tại.

Lời giải

Chọn B

Xét $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3-\sqrt{4-x}}{4} - \frac{1}{4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-\sqrt{4-x}}{4x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2-\sqrt{4-x})(2+\sqrt{4-x})}{4x(2+\sqrt{4-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{4x(2+\sqrt{4-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4(2+\sqrt{4-x})} = \frac{1}{16}$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

- A. $f'(0) = 0$. B. $f'(0) = 1$. C. $f'(0) = \frac{1}{2}$. D. Không tồn tại.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Xét } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x^2(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ bởi $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - 3x + 2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 0 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tính $f'(1)$.

- A. $f'(1) = \frac{3}{2}$. B. $f'(1) = 1$. C. $f'(1) = 0$. D. Không tồn tại.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-3)}{x-2} = 2.$$

Ta thấy: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$. Do đó, hàm số không liên tục tại điểm $x = 1$.

Vậy hàm số không tồn tại đạo hàm tại điểm $x = 1$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Hàm số không liên tục tại $x = 0$. B. Hàm số có đạo hàm tại $x = 2$.
C. Hàm số liên tục tại $x = 2$. D. Hàm số có đạo hàm tại $x = 0$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét các giới hạn } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2) = 0 \end{cases}.$$

Do $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ nên hàm số không liên tục tại $x = 0$.

Do đó, hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$.

Câu 8: Tìm tham số thực b để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 2 \\ -\frac{x^2}{2} + bx - 6 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x = 2$.

- A. $b = 3$. B. $b = 6$. C. $b = 1$. D. $b = -6$.

Lời giải

Chọn B

Để hàm số có đạo hàm tại $x = 2$ trước tiên hàm số phải liên tục tại $x = 2$, tức là

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(-\frac{x^2}{2} + bx - 6 \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 \Leftrightarrow -2 + 2b - 6 = 4 \Leftrightarrow b = 6.$$

Thử lại với $b = 6$, ta có

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-\frac{x^2}{2} + bx - 10}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-\frac{x^2}{2} + 6x - 10}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(10-x)}{2(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{10-x}{2} = 4;$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ nên hàm số có đạo hàm tại $x = 2$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} mx^2 + 2x + 2 & \text{khi } x > 0 \\ nx + 1 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số m, n sao cho $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = 0$.

A. Không tồn tại m, n . **B.** $m = 2, \forall n$. **C.** $n = 2, \forall m$. **D.** $m = n = 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{mx^2 + 2x + 2 - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{mx^2 + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (mx + 2) = 2. \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{nx + 2 - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{nx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} n = n \end{cases}$$

Hàm số có đạo hàm tại $x = 0$ khi và chỉ khi tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow n = 2.$$

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{khi } x \leq 1 \\ ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số a, b sao cho

$f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = 1$.

A. $a = 1, b = -\frac{1}{2}$. **B.** $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$. **C.** $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$. **D.** $a = 1, b = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

• Hàm số có đạo hàm tại $x = 1$, do đó hàm số liên tục tại $x = 1$.

$$\Rightarrow a + b = \frac{1}{2}. \quad (1)$$

$$\bullet \text{ Ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax + b - (a \cdot 1 + b)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} a = a \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+1)}{2} = 1 \end{cases}$$

Hàm số có đạo hàm tại $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow a = 1. \quad (2)$

Từ (1) và (2), ta có $a = 1, b = -\frac{1}{2}$.

Dạng 2. Số gia của hàm số

1. Phương pháp

- Số gia của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
- Chú ý rằng số gia Δy của hàm số là một hàm số của số gia biến số Δx .

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Số gia của hàm số $f(x) = x^2 + 1$ tại điểm $x_0 = -1$ ứng với số gia $\Delta x = 1$ bằng:

- A. -2. B. -1. C. 1. D. 3.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$$\text{Số gia } \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(0) - f(-1) = 1 - 2 = -1.$$

Ví dụ 2: Số gia của hàm số $y = 2x^2 + 2$ tại điểm $x_0 = 0$ ứng với số gia $\Delta x = 1$ bằng:

- A. 2. B. 0. C. -2. D. -8.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$$\text{Số gia } \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(1) - f(0) = 4 - 2 = 2.$$

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x) = x^2 - 3$; $x_0 = -1$; Δx . Chọn số gia tương ứng Δy dưới đây cho thích hợp.

- A. $\Delta y = (\Delta x)^2 - 10$. B. $\Delta y = (-1 + \Delta x)^2 + 2$.
C. $\Delta y = (-1 + \Delta x)^2 - 10$. D. $\Delta y = (-1 + \Delta x)^2 - 1$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(-1 + \Delta x) - f(-1) = [(-1 + \Delta x)^2 - 3] - [(-1)^2 - 3] \\ &= (-1 + \Delta x)^2 - 3 + 2 = (-1 + \Delta x)^2 - 1.\end{aligned}$$

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{1 - 3x}$; $x_0 = -\frac{1}{2}$; Δx . Chọn số gia tương ứng Δy dưới đây cho thích hợp.

- A. $\Delta y = \sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{5}{2}} + 3\Delta x$.
B. $\Delta y = \sqrt{1 - 3\Delta x} - \sqrt{1 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{1 - 3\Delta x} - \sqrt{\frac{5}{2}}$.
C. $\Delta y = \sqrt{1 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \Delta x\right)} - \sqrt{1 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{5}{2} - 3\Delta x} - \sqrt{\frac{5}{2}}$.
D. $\Delta y = \sqrt{1 - 3x} + \Delta x - \sqrt{1 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{1 - 3x} + \Delta x - \sqrt{\frac{5}{2}}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$\begin{aligned}\Delta y &= f\left(-\frac{1}{2} + \Delta x\right) - f\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \sqrt{1 - 3\left(\frac{1}{2} + \Delta x\right)} - \sqrt{1 - 3\left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{5}{2} - 3\Delta x} - \sqrt{\frac{5}{2}}.\end{aligned}$$

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x) = \sin x$; $x_0 = \frac{\pi}{2}$; Δx . Chọn Δy và $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dưới đây cho thích hợp.

A. $\Delta y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right) - 1$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

B. $\Delta y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right) - \frac{\pi}{2}$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right) - \frac{\pi}{2}}{\Delta x}$.

C. $\Delta y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right) - 1$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right) - 1}{\Delta x}$.

D. $\Delta y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right)$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right)}{\Delta x}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$\begin{aligned}\Delta y &= f\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right) - \sin\frac{\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right) - 1 \\ \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right) - 1}{\Delta x}.\end{aligned}$$

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x) = |x - 2|$; $x_0 = 2$; Δx . Chọn Δy và $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dưới đây cho thích hợp.

A. $\Delta y = |\Delta x|$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

B. $\Delta y = \Delta x$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$.

C. $\Delta y = |\Delta x - 2|$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x - 2|}{\Delta x}$.

D. $\Delta y = |\Delta x|$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(2 + \Delta x) - f(2) = |2 + \Delta x - 2| - 0 = |\Delta x| \\ \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.\end{aligned}$$

Ví dụ 7: Cho hàm số $f(x) = \sin 2x$; $x_0 = \frac{\pi}{3}$; Δx . Chọn số gia tương ứng Δy dưới đây cho thích hợp.

A. $\Delta y = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \Delta x - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

B. $\Delta y = \sin 2x + \Delta x - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

C. $\Delta y = \sin 2\left(\frac{\pi}{3} + \Delta x\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$. D. $\Delta y = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \Delta x\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \Rightarrow \Delta y = \sin^2\left(\frac{\pi}{3} + \Delta x\right) - \sin^2\frac{\pi}{3}.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tính số gia của hàm số $y = x^2 + 2$ tại điểm $x_0 = 2$ ứng với số gia $\Delta x = 1$.

- A. $\Delta y = 13$. B. $\Delta y = 9$. C. $\Delta y = 5$. D. $\Delta y = 2$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(2 + 1) - f(2) = f(3) - f(2) \\ &= (3^2 + 2) - (2^2 + 2) = 5. \end{aligned}$$

Câu 2: Tính số gia của hàm số $y = x^3 + x^2 + 1$ tại điểm x_0 ứng với số gia $\Delta x = 1$.

- A. $\Delta y = 3x_0^2 + 5x_0 + 3$. B. $\Delta y = 2x_0^3 + 3x_0^2 + 5x_0 + 2$.
C. $\Delta y = 3x_0^2 + 5x_0 + 2$. D. $\Delta y = 3x_0^2 - 5x_0 + 2$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x_0 + 1) - f(x_0) \\ &= [(x_0 + 1)^3 + (x_0 + 1)^2 + 1] - [x_0^3 + x_0^2 + 1] = 3x_0^2 + 5x_0 + 2. \end{aligned}$$

Câu 3: Tính số gia của hàm số $y = \frac{x^2}{2}$ tại điểm $x_0 = -1$ ứng với số gia Δx .

- A. $\Delta y = \frac{1}{2}(\Delta x)^2 - \Delta x$. B. $\Delta y = \frac{1}{2}[(\Delta x)^2 - \Delta x]$. C. $\Delta y = \frac{1}{2}[(\Delta x)^2 + \Delta x]$. D.

$$\Delta y = \frac{1}{2}(\Delta x)^2 + \Delta x.$$

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(-1 + \Delta x) - f(-1) \\ &= \frac{(-1 + \Delta x)^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1 - 2\Delta x + (\Delta x)^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\Delta x)^2 - \Delta x. \end{aligned}$$

Câu 4: Tính số gia của hàm số $y = x^2 - 4x + 1$ tại điểm x_0 ứng với số gia Δx là:

- A. $\Delta y = \Delta x(\Delta x + 2x_0 - 4)$. B. $\Delta y = 2x_0 + \Delta x$. C. $\Delta y = \Delta x(2x_0 - 4\Delta x)$. D.
 $\Delta y = 2x_0 - 4\Delta x$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = [(x_0 + \Delta x)^2 - 4(x_0 + \Delta x) + 1] - [x_0^2 - 4x_0 + 1] \\ &= \Delta x(\Delta x + 2x_0 - 4). \end{aligned}$$

Câu 5: Tính số gia của hàm số $y = \frac{1}{x}$ tại điểm x (bất kì khác 0) ứng với số gia Δx .

A. $\Delta y = \frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$. B. $\Delta y = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$. C. $\Delta y = -\frac{\Delta x}{x + \Delta x}$. D. $\Delta y = \frac{\Delta x}{x + \Delta x}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$.

Câu 6: Tính tỷ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y = 3x + 1$ theo x và Δx .

A. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. B. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$. C. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$. D. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = [3(x + \Delta x) + 1] - [3x + 1] = 3\Delta x \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$.

Câu 7: Tính tỷ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y = x^2 - 1$ theo x và Δx .

A. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. B. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x + 2x$. C. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$. D. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = [(x + \Delta x)^2 - 1] - (x^2 - 1) = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$

$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$.

Câu 8: Tính tỷ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y = 2x^3$ theo x và Δx .

A. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x^3 - 2(\Delta x)^3}{\Delta x}$. B. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2(\Delta x)^2$.
C. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2$. D. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 2(x + \Delta x)^3 - 2x^3 = 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3$

$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2$.

Câu 9: Tính tỷ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y = \frac{1}{x}$ theo x và Δx .

A. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x(x + \Delta x)}$. B. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)}$. C. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x + \Delta x}$. D. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x + \Delta x}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$

$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)}$.

Câu 10: Đạo hàm của hàm số $f(x) = x^2 - x$ tại điểm x_0 ứng với số gia Δx là:

A. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} ((\Delta x)^2 + 2x\Delta x - \Delta x).$

B. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 2x - 1).$

C. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 2x + 1).$

D. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} ((\Delta x)^2 + 2x\Delta x + \Delta x).$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = [(x_0 + \Delta x)^2 - (x_0 + \Delta x)] - (x_0^2 - x_0)$

$= (\Delta x)^2 + 2x_0\Delta x - \Delta x \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x + 2x_0 - 1.$

Khi đó $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 2x_0 - 1).$

Dạng 3. Ý nghĩa vật lý của đạo hàm

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 11: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 2$ giây.

A. 2m/s.

B. 3m/s.

C. 4m/s.

D. 5m/s.

Lời giải

Chọn C

Ta tính được $s'(t) = 2t.$

Vận tốc của chất điểm $v(t) = s'(t) = 2t \Rightarrow v(2) = 2.2 = 4\text{m/s}.$

Câu 12: Một viên đạn được bắn lên cao theo phương trình $s(t) = 196t - 4,9t^2$ trong đó $t > 0$, t tính bằng giây kể từ thời điểm viên đạn được bắn lên cao và $s(t)$ là khoảng cách của viên đạn so với mặt đất được tính bằng mét. Tại thời điểm vận tốc của viên đạn bằng 0 thì viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét?

A. 1690m.

B. 1069m.

C. 1906m.

D. 1960m.

Lời giải

Chọn D

Ta tính được $s'(t) = 196 - 9,8t.$

Vận tốc của viên đạn $v(t) = s'(t) = 196 - 9,8t \Rightarrow v(t) = 0 \Leftrightarrow 196 - 9,8t = 0 \Leftrightarrow t = 20.$

Khi đó viên đạn cách mặt đất một khoảng $h = s(20) = 196.20 - 4,9.20^2 = 1960\text{m}.$

Câu 13: Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 9t + 2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Hỏi tại thời điểm nào thì vận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $t = 1\text{s}.$

B. $t = 2\text{s}.$

C. $t = 3\text{s}.$

D. $t = 6\text{s}.$

Lời giải

Chọn A

Ta tính được $s'(t) = 3t^2 - 6t + 9.$

Vận tốc của chất điểm $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t + 9 = 3(t-1)^2 + 6 \geq 6.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t = 1$.

Câu 14: Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t) = 8t + 3t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng mét/giây. Tìm gia tốc của chất điểm tại thời điểm mà vận tốc chuyển động là 11 mét/giây.

- A. 6m/s^2 . B. 11m/s^2 . C. 14m/s^2 . D. 20m/s^2 .

Lời giải

Chọn C

Ta tính được $v'(t) = 8 + 6t$.

Ta có $v(t) = 11 \Leftrightarrow 8t + 3t^2 = 11 \Leftrightarrow t = 1$ ($t > 0$).

Gia tốc của chất điểm $a(t) = v'(t) = 8 + 6t \Rightarrow a(1) = v'(1) = 8 + 6.1 = 14\text{m/s}^2$.

Câu 15: Một vật rơi tự do theo phương trình $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9,8\text{m/s}^2$ là gia tốc trọng trường. Tìm vận tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian từ t ($t = 5\text{s}$) đến $t + \Delta t$ với $\Delta t = 0,001\text{s}$.

- A. $v_{tb} = 49\text{m/s}$. B. $v_{tb} = 49,49\text{m/s}$. C. $v_{tb} = 49,0049\text{m/s}$. D. $v_{tb} = 49,245\text{m/s}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } v_{tb} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}g(t + \Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{\Delta t} = gt + \frac{1}{2}g\Delta t = 49,0049\text{m/s}.$$

Dạng 4. Phương trình tiếp tuyến

1. Phương pháp

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; y_0)$ là:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Nếu tiếp tuyến có hệ số góc k thì ta giải phương trình $f'(x_0) = k$ tìm hoành độ tiếp điểm.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị (C) và điểm $M_0(x_0; f(x_0)) \in (C)$. Phương trình của tiếp tuyến với (C) tại M_0 là:

- A. $y = f'(x_0)(x - x_0)$. B. $y = f'(x)(x - x_0) + y_0$.
C. $y - y_0 = f'(x_0)x$. D. $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Phương trình tiếp tuyến của đường cong tại $M(x_0; y_0) \in (C)$:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \text{ hoặc } y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x) = x^2 + 5$ có $f'(x) = 2x$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của hàm số tại điểm M có hoành độ $x_0 = -1$.

A. $y = -2(x-1) + 6.$

B. $y = 2(x-1) + 6.$

C. $y = -2(x+1) - 6.$

D. $y = -2(x+1) + 6.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$$x_0 = -1 \Rightarrow f(x_0) = (-1)^2 + 5 = 6$$

$$f'(-1) = -2.$$

Phương trình tiếp tuyến: $y = -2(x+1) + 6.$

Ví dụ 3: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = x^4$ tại điểm có hoành độ bằng -1 là:

A. $y = -4x - 3.$

B. $y = -4x - 4.$

C. $y = -4x - 5.$

D. $y = -4x + 5.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $f(1) = 1; f'(x) = 4x^3$, do đó $f'(-1) = -4.$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -4(x+1) + 1 = -4x - 3.$

Ví dụ 4: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3$ tại điểm mà tiếp điểm có tung độ bằng -1 có phương trình là:

A. $y = 3x - 4.$

B. $y = 3x.$

C. $y = 3x + 2.$

D. $y = -3x - 4.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta có: Khi $y = -1$ thì $x^3 = -1$, do đó $x = -1.$

$$f(-1) = -1; f'(x) = 3x^2, \text{ do đó } f'(-1) = 3.$$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 3(x+1) - 1 = 3x + 2.$

Ví dụ 5: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = x^4$ có hệ số góc bằng 4.

A. $y = 4x - 3.$

B. $y = 4x.$

C. $y = 4x + 5.$

D. $y = 4x - 4.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $f'(x) = 4x^3.$

Hệ số góc của tiếp tuyến bằng 4 nên $4x^3 = 4$, do đó $x = 1; f(1) = 1.$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 4(x-1) + 1 = 4x - 3.$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 16: Tìm hệ số góc k của tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ tại điểm có hoành độ $\frac{1}{2}.$

A. $k = 0.$

B. $k = 1.$

C. $k = \frac{1}{4}.$

D. $k = -\frac{1}{2}.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } y'\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{2} + \Delta x\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{2} + \Delta x\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (1 + \Delta x) = 1.$$

Vậy $k = y' \left(\frac{1}{2} \right) = 1$.

Câu 17: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3$ tại điểm $(-1; -1)$.

- A. $y = -3x - 4$. B. $y = -1$. C. $y = 3x - 2$. D. $y = 3x + 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta tính được $k = y'(-1) = 3$.

Ta có $\begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -1 \\ k = 3 \end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến $y + 1 = 3(x + 1) \Leftrightarrow y = 3x + 2$.

Câu 18: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = \frac{1}{x}$ tại điểm có hoành độ bằng -1 .

- A. $x + y + 2 = 0$. B. $y = x + 2$. C. $y = x - 2$. D. $y = -x + 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta tính được $k = y'(-1) = -1$.

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -1$.

Ta có $\begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -1 \\ k = -1 \end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến $y + 1 = -1(x + 1) \Leftrightarrow y = -x - 2$.

Câu 19: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3$ tại điểm có tung độ bằng 8.

- A. $y = 8$. B. $y = -12x + 16$. C. $y = 12x - 24$. D. $y = 12x - 16$.

Lời giải

Chọn D

Với $y_0 = 8 \Rightarrow x_0 = 2$.

Ta tính được $k = y'(2) = 12$.

Ta có $\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 8 \\ k = 12 \end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến $y - 8 = 12(x - 2) \Leftrightarrow y = 12x - 16$.

Câu 20: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm với trục tung.

- A. $y = 2x$. B. $y = 2$. C. $y = 0$. D. $y = -2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có : $x_0 = 0; y_0 = 2; y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow k = y'(0) = 0$

Ta có : $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 2 \\ k = 0 \end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 2$.

Câu 21: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm với đường thẳng $y = -2$.

- A. $y = -9x + 7; y = -2$. B. $y = -2$. C. $y = 9x + 7; y = -2$. D. $y = 9x + 7; y = 2$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm : $y = x^3 - 3x^2 + 2 = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Với $x = -1 \rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ k = y'(-1) = 9 \end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 9x + 7$.

Với $x = 2 \rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ k = y'(2) = 0 \end{cases}$. suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -2$.

Câu 22: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 7$.

A. $y = 9x + 7$; $y = 9x - 25$. **B.** $y = 9x - 25$. **C.** $y = 9x - 7$; $y = 9x + 25$. **D.** $y = 9x + 25$.

Lời giải**Chọn B**

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta tính được $k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0$. Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 7$

nên có $k = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$.

Với $x_0 = -1 \rightarrow \begin{cases} y_0 = -2 \\ k = 9 \end{cases}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 9x + 7$ (loại) (vì trùng với đường thẳng đã cho).

Với $x_0 = 3 \rightarrow \begin{cases} y_0 = 2 \\ k = 9 \end{cases}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 9x - 25$.

Câu 23: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{45}x$.

A. $y = 45x - 173$; $y = 45x + 83$. **B.** $y = 45x - 173$.

C. $y = 45x + 173$; $y = 45x - 83$. **D.** $y = 45x - 83$.

Lời giải**Chọn A**

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta tính được $k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0$. Do tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{45}x$

nên có $k \cdot \left(-\frac{1}{45}\right) = -1 \Leftrightarrow k = 45 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 45 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 5 \\ x_0 = -3 \end{cases}$.

Với $x_0 = 5 \rightarrow \begin{cases} y_0 = 52 \\ k = 45 \end{cases}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 45x - 173$.

Với $x_0 = -3 \rightarrow \begin{cases} y_0 = -52 \\ k = 45 \end{cases}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 45x + 83$.

Câu 24: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = \frac{1}{x}$ biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng

$$-\frac{1}{4}.$$

A. $x + 4y - 1 = 0$; $x + 4y + 1 = 0$.

B. $x + 4y - 4 = 0$; $x + 4y + 4 = 0$.

C. $y = -\frac{1}{4}x - 4$; $y = -\frac{1}{4}x + 4$.

D. $y = -\frac{1}{4}x$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta tính được $k = y'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$.

Theo giả thiết ta có $k = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{x_0^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2$.

• Với $x_0 = 2 \rightarrow y_0 = \frac{1}{2}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

$$y = -\frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + 4y - 4 = 0.$$

• Với $x_0 = -2 \rightarrow y_0 = -\frac{1}{2}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

$$y = -\frac{1}{4}(x+2) - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + 4y + 4 = 0.$$

Câu 25: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết cosin góc tạo bởi tiếp tuyến và đường thẳng $\Delta: 4x - 3y = 0$ bằng $\frac{3}{5}$.

A. $y = 2; y = 1$.

B. $y = -2; y = 1$.

C. $y = -2; y = -1$.

D. $y = 2; y = -2$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm $\Rightarrow k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0$.

Phương trình tiếp tuyến d có dạng $y + y_0 = k(x - x_0)$.

Suy ra tiếp tuyến d có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_d = (-k; 1)$.

Đường thẳng Δ có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_\Delta = (4; -3)$.

Theo đề bài ta có: $\cos(d, \Delta) = \frac{|-4k - 3|}{\sqrt{k^2 + 1}\sqrt{16 + 9}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = -\frac{24}{7} \end{cases}$

Với $k = -\frac{24}{7} \Rightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = -\frac{24}{7}$: vô nghiệm.

Với $k = 0 \Rightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{cases}$.

• $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2$.

• $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = -2 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -2$.

BÀI 2. QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. ĐẠO HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

Định lý 1: Hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}, n > 1$) có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Nhận xét

$$(c)' = 0 \text{ (c là hằng số).}$$

$$(x)' = 1.$$

Định lý 2: Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm tại mọi x dương và $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

II. ĐẠO HÀM CỦA TỔNG, HIỆU, TÍCH, THƯƠNG

1. Định lý

Định lý 3: Giả sử $u = u(x), v = v(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định.

Ta có

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u - v)' = u' - v'$$

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

Bằng quy nạp toán học, ta chứng minh được

$$(u_1 \pm u_2 \pm \dots \pm u_n)' = u_1' \pm u_2' \pm \dots \pm u_n'.$$

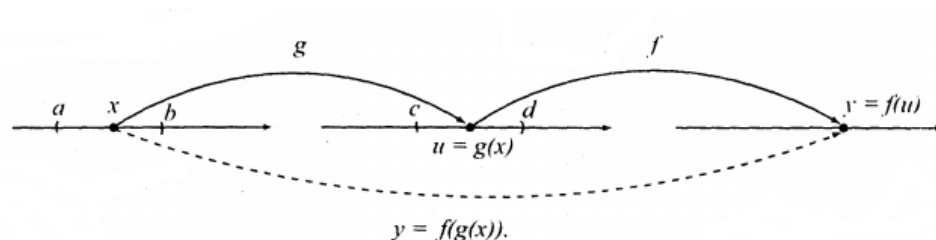
2. Hệ quả

Hệ quả 1: Nếu k là một hằng số thì $(ku)' = ku'.$

Hệ quả 2: $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}, (u \neq 0).$

III. ĐẠO HÀM CỦA HÀM HỢP

1. Hàm hợp



Giả sử $u = g(x)$ là hàm số của x , xác định trên khoảng (a, b) và lấy giá trị trên khoảng (c, d) ; $f(u)$ là hàm số của u , xác định trên (c, d) và lấy giá trị trên $\mathbb{R}$. Khi đó, ta lập một hàm số xác định trên (a, b) và lấy giá trị trên $\mathbb{R}$ theo quy tắc sau: $x \mapsto f(g(x))$.

Ta gọi hàm số $y = f(g(x))$ là hàm hợp của hàm số $y = f(u)$ với $u = g(x)$.

2. Đạo hàm của hàm hợp

Định lý: Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại u là y'_u thì hàm hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm tại x là $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Đạo hàm của hàm đa thức

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 5$. Tìm x để $y' = 0$

Hướng dẫn giải

$$y = 2x^3 - 3x^2 - 5$$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = 3x^3 + x^2 + 1$. Giải bất phương trình $y' \leq 0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$$y = 3x^3 + x^2 + 1 \Rightarrow y' = 9x^2 + 2x$$

$$y' \leq 0 \Leftrightarrow 9x^2 + 2x \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{9} \leq x \leq 0.$$

Ví dụ 3: Cho hai hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x$; $g(x) = 9x - \frac{3}{2}x^2$. Tìm x để $f'(x) = g'(x)$

Hướng dẫn giải

$$f'(x) = x + 4; g'(x) = 9 - 3x. \text{ Do đó } f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow 4x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}.$$

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x) = mx - \frac{1}{3}x^3$. Tìm m để $x = -1$ là nghiệm của bất phương trình $f'(x) < 2$

Hướng dẫn giải

Ta có: $f'(x) = m - x^2$. Giá trị $x = -1$ là nghiệm của bất phương trình $f'(x) < 2$ khi và chỉ khi: $m - 1 < 2 \Leftrightarrow m < 3$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2\sqrt{2}x^2 + 8x - 1$, có đạo hàm là $f'(x)$. Tập hợp những giá trị của x để $f'(x) = 0$ là:

- A. $\{-2\sqrt{2}\}$. B. $\{2; \sqrt{2}\}$. C. $\{-4\sqrt{2}\}$. D. $\{2\sqrt{2}\}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x) = x^2 - 4\sqrt{2}x + 8$.

Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4\sqrt{2}x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}$.

Câu 2: Cho hàm số $y = 3x^3 + x^2 + 1$, có đạo hàm là y' . Để $y' \leq 0$ thì x nhận các giá trị thuộc tập nào sau đây?

- A. $\left[-\frac{2}{9}; 0\right]$. B. $\left[-\frac{9}{2}; 0\right]$.
C. $\left(-\infty; -\frac{9}{2}\right] \cup [0; +\infty)$. D. $\left(-\infty; -\frac{2}{9}\right] \cup [0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = 9x^2 + 2x$.

Do đó, $y' \leq 0 \Leftrightarrow y' = 9x^2 + 2x \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{9} \leq x \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{2}{9}; 0\right]$.

Câu 3: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ tại điểm $x = -1$.

- A. $f'(-1) = 4$. B. $f'(-1) = 14$. C. $f'(-1) = 15$. D. $f'(-1) = 24$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x) = -4x^3 + 12x^2 - 6x + 2$.

Suy ra $f'(-1) = -4(-1)^3 + 12(-1)^2 - 6(-1) + 2 = 24$.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (2m+1)x^2 - mx - 4$, có đạo hàm là y' . Tìm tất cả các giá trị của m để $y' \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

- A. $m \in \left[-1; -\frac{1}{4}\right]$. B. $m \in \left[-1; -\frac{1}{4}\right]$.

C. $m \in (-\infty; -1] \cup \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

D. $m \in \left[-1; \frac{1}{4}\right]$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = x^2 - 2(2m+1)x - m$.

Khi đó, $y' \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 2(2m+1)x - m \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta' = (2m+1)^2 + m \leq 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 5m + 1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq -\frac{1}{4}$.

Câu 5: Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 - mx + 3$, có đạo hàm là y' . Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

A. $m = -1 + \sqrt{2}$; $m = -1 - \sqrt{2}$.

B. $m = -1 - \sqrt{2}$.

C. $m = 1 - \sqrt{2}$; $m = 1 + \sqrt{2}$.

D. $m = -1 + \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = -mx^2 + 2(m-1)x - m$.

Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow -mx^2 + 2(m-1)x - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < \frac{1}{2} \end{cases}$.

Khi đó, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$.

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = 6 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 6 \Leftrightarrow \left(\frac{2(m-1)}{m}\right)^2 - 2 = 6$

$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \pm \sqrt{2}$.

So với điều kiện thì $m = -1 \pm \sqrt{2}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 6: Biết hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a > 0$) có đạo hàm $f'(x) > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $b^2 - 3ac > 0$.

B. $b^2 - 3ac \geq 0$.

C. $b^2 - 3ac < 0$.

D. $b^2 - 3ac \leq 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Vì $a > 0$ và $f'(x) > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $\Delta' < 0$ tức là $b^2 - 3ac < 0$.

Câu 7: Biết hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a < 0$) có đạo hàm $f'(x) < 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $b^2 - 3ac > 0$. B. $b^2 - 3ac \geq 0$. C. $b^2 - 3ac < 0$. D. $b^2 - 3ac \leq 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Vì $a < 0$ và $f'(x) < 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $\Delta' < 0$ tức là $b^2 - 3ac < 0$.

Câu 8: Tính đạo hàm của của hàm số $y = (x^3 - 2x^2)^2$.

- A. $f'(x) = 6x^5 - 20x^4 + 16x^3$. B. $f'(x) = 6x^5 + 16x^3$.
C. $f'(x) = 6x^5 - 20x^4 + 4x^3$. D. $f'(x) = 6x^5 - 20x^4 - 16x^3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = 2(x^3 - 2x^2)'(x^3 - 2x^2) = 2(3x^2 - 4x)(x^3 - 2x^2) = 6x^5 - 20x^4 + 16x^3$.

Câu 9: Cho hàm số $y = (2x^2 + 1)^3$, có đạo hàm là y' . Để $y' \geq 0$ thì x nhận các giá trị nào sau đây?

- A. Không có giá trị nào của x . B. $(-\infty; 0]$. C. $[0; +\infty)$. D. $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 3(2x^2 + 1)'(2x^2 + 1)^2 = 3 \cdot 4x(2x^2 + 1)^2 = 12x(2x^2 + 1)^2$.

Do đó, $y' \geq 0 \Leftrightarrow 12x(2x^2 + 1)^2 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Câu 10: Tính đạo hàm của hàm số $y = (1 - x^3)^5$.

- A. $y' = 5x^2(1 - x^3)^4$. B. $y' = -15x^2(1 - x^3)^4$.
C. $y' = -3x^2(1 - x^3)^4$. D. $y' = -5x^2(1 - x^3)^4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 5(1 - x^3)'(1 - x^3)^4 = 5(-3x^2)(1 - x^3)^4 = -15x^2(1 - x^3)^4$.

Câu 11: Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^3 - 2x^2)^{2016}$.

A. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)^{2015}$.

B. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)^{2015}(3x^2 - 4x)$.

C. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)(3x^2 - 4x)$.

D. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)(3x^2 - 2x)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 2016(x^3 - 2x^2)'(x^3 - 2x^2)^{2015} = 2016(3x^2 - 4x)(x^3 - 2x^2)^{2015}$.

Câu 12: Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2 - 2)(2x - 1)$.

A. $y' = 4x$.

B. $y' = 3x^2 - 6x + 2$.

C. $y' = 2x^2 - 2x + 4$.

D. $y' = 6x^2 - 2x - 4$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = (x^2 - 2)'(2x - 1) + (x^2 - 2)(2x - 1)' = 2x(2x - 1) + 2(x^2 - 2) = 6x^2 - 2x - 4$

Câu 13: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-2018)$ tại điểm $x = 0$.

A. $f'(0) = 0$.

B. $f'(0) = -2018!$.

C. $f'(0) = 2018!$.

D. $f'(0) = 2018$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = f_0(x)f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)$ ($n \geq 1; n \in \mathbb{Z}$).

Bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được:

$$f'(x) = f_0'(x)f_1(x)\dots f_n(x) + f_0(x)f_1'(x)\dots f_n(x) + \dots + f_0(x)f_1(x)\dots f_n'(x)$$

Áp dụng công thức trên cho hàm số $f(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-2018)$ và thay $x = 0$ với chú ý $f_0(0) = 0$ ta được:

$$f'(0) = (-1) \cdot (-2) \cdot \dots \cdot (-2018) + 0 \cdot (-2) \cdot \dots \cdot (-2018) + \dots + 0 \cdot (-1) \cdot \dots \cdot (-2017) = 2018!.$$

Câu 14: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x(x+1)(x+2)\dots(x+2018)$ tại điểm $x = -1004$.

A. $f'(-1004) = 0$.

B. $f'(-1004) = 1004!$.

C. $f'(-1004) = -1004!$.

D. $f''(-1004) = (1004!)^2$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x) = f_0(x)f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)$ ($n \geq 1; n \in \mathbb{Z}$).

Bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được:

$$f'(x) = f_0'(x)f_1(x)\dots f_n(x) + f_0(x)f_1'(x)\dots f_n(x) + \dots + f_0(x)f_1(x)\dots f_n'(x).$$

Áp dụng công thức trên cho hàm số $f(x) = x(x+1)(x+2)\dots(x+2018)$ và thay $x = -1004$ với chú ý $f_{1004}(-1004) = 0$ ta được

$$\begin{aligned} f'(-1004) &= [(-1004) \cdot (-1004+1) \dots (-1004+1003)] \cdot [(-1004+1005) \dots (-1004+2018)] \\ &= (-1) \cdot 1 \cdot (-2) \cdot 2 \dots (-1004) \cdot 1004 = (1004!)^2. \end{aligned}$$

Dạng 2. Đạo hàm của hàm phân thức

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: $y = \frac{x(1-3x)}{x+1}$

Hướng dẫn giải

$$y = \frac{x(1-3x)}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{(1-6x)(x+1) - 1(x-3x^2)}{(x+1)^2} = \frac{-3x^2 - 6x + 1}{(x+1)^2}.$$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x+3}{2x-1}$

Hướng dẫn giải

Dùng công thức nhanh: $y = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}.$

Do đó, với $y = \frac{2x+3}{2x-1}$ thì $y' = -\frac{8}{(2x-1)^2}.$

Ví dụ 3: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{x^2+1}$

Hướng dẫn giải

$$y' = \frac{-(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}.$$

Ví dụ 4: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}?$

Hướng dẫn giải

$$y = \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{x^2-1+2}{x^2-1} = 1 + \frac{2}{x^2-1}$$

Do đó $y' = \frac{-2(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}.$

Ví dụ 5: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{x^2+x-1}$

Hướng dẫn giải

$$y' = \frac{-(x^2 + x - 1)'}{(x^2 + x - 1)^2} = \frac{-2x - 1}{(x^2 + x - 1)^2}.$$

Ví dụ 6: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2 + x + 3}{x^2 + x - 1}$

Hướng dẫn giải

$$y = \frac{x^2 + x + 3}{x^2 + x - 1} = \frac{x^2 + x - 1 + 4}{x^2 + x - 1} = 1 + \frac{4}{x^2 + x - 1}.$$

$$\text{Do đó: } y' = \frac{-4(x^2 + x - 1)'}{(x^2 + x - 1)^2} = \frac{-4(2x + 1)}{(x^2 + x - 1)^2}.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ tại điểm $x = -1$.

A. $f'(-1) = 1$.

B. $f'(-1) = -\frac{1}{2}$.

C. $f'(-1) = -2$.

D. $f'(-1) = 0$.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(-1) = -\frac{1}{2}$$

Câu 2: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 2}$.

A. $y' = 1 + \frac{3}{(x+2)^2}$.

B. $y' = \frac{x^2 + 6x + 7}{(x+2)^2}$.

C. $y' = \frac{x^2 + 4x + 5}{(x+2)^2}$.

D. $y' = \frac{x^2 + 8x + 1}{(x+2)^2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y = x - \frac{3}{x+2} \Rightarrow y' = 1 + \frac{3}{(x+2)^2}.$$

Câu 3: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x(1-3x)}{x+1}$.

A. $y' = \frac{-9x^2 - 4x + 1}{(x+1)^2}$.

B. $y' = \frac{-3x^2 - 6x + 1}{(x+1)^2}$.

C. $y' = 1 - 6x^2$.

D. $y' = \frac{1 - 6x^2}{(x+1)^2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y = \frac{x(1-3x)}{x+1} = \frac{x-3x^2}{x+1}$

$$\Rightarrow y' = \frac{(x-3x^2)'(x+1) - (x-3x^2)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{(1-6x)(x+1) - (x-3x^2)}{(x+1)^2} = \frac{-3x^2-6x+1}{(x+1)^2}.$$

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \frac{1-3x+x^2}{x-1}$. Giải bất phương trình $f'(x) > 0$.

A. $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

B. $x \in \emptyset$.

C. $x \in (1; +\infty)$.

D. $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải**Chọn A**

Ta có: $f'(x) = \frac{(1-3x+x^2)'(x-1) - (1-3x+x^2)(x-1)'}{(x-1)^2}$

$$= \frac{(-3+2x)(x-1) - (1-3x+x^2)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}.$$

Bất phương trình $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+2 > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$. Phương trình $f'(x) = 0$ có tập nghiệm S là:

A. $S = \left\{0; \frac{2}{3}\right\}.$

B. $S = \left\{-\frac{2}{3}; 0\right\}.$

C. $S = \left\{0; \frac{3}{2}\right\}.$

D. $S = \left\{-\frac{3}{2}; 0\right\}.$

Lời giải**Chọn C**

Ta có $f'(x) = \frac{(x^3)'(x-1) - x^3(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} = \frac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2}.$

Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^3-3x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}.$

Câu 6: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{-2x^2+x-7}{x^2+3}.$

A. $y' = \frac{-3x^2-13x-10}{(x^2+3)^2}.$

B. $y' = \frac{-x^2+x+3}{(x^2+3)^2}.$

C. $y' = \frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}.$

D. $y' = \frac{-7x^2-13x-10}{(x^2+3)^2}.$

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } y' &= \frac{(-2x^2 + x - 7)'(x^2 + 3) - (x^2 + 3)'(-2x^2 + x - 7)}{(x^2 + 3)^2} \\ \Rightarrow y' &= \frac{(-4x + 1)(x^2 + 3) - 2x \cdot (-2x^2 + x - 7)}{(x^2 + 3)^2} = \frac{-x^2 + 2x + 3}{(x^2 + 3)^2}\end{aligned}$$

Dạng 3. Đạo hàm của hàm chứa căn

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = 4x - \sqrt{x}$. Tìm x để $y' = 0$?

Hướng dẫn giải

$$y = 4x - \sqrt{x} \Rightarrow y' = 4 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = \frac{1}{64}.$$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của hàm số $y = x^3 - \sqrt{x} + 1$

Hướng dẫn giải

$$y' = 3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 18x - 7$. Tìm x để $f'(x) \leq 0$

Hướng dẫn giải

$$f'(x) = x^2 - 6\sqrt{2}x + 18 = (x - 3\sqrt{2})^2.$$

$$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow (x - 3\sqrt{2})^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 3\sqrt{2}.$$

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{1+x}$. Tính $f(3) + (x-3) \cdot f'(3)$?

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \Rightarrow f'(3) = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Lại có: } f(3) = 2. \text{ Vậy } f(3) + (x-3) \cdot f'(3) = 2 + (x-3) \cdot \frac{1}{4} = \frac{x+5}{4}.$$

Ví dụ 5: Tính đạo hàm của hàm số: $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$?

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } y' = \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}^2} = \frac{-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}.$$

Ví dụ 6: Tính đạo hàm của hàm số: $y = x\sqrt{x^2 + 1}$?

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } y' = \sqrt{x^2 + 1} + x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Ví dụ 7: Tính đạo hàm của hàm số: $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$?

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } y' = \frac{1}{1-x} \left(\sqrt{1-x} + \frac{1+x}{2\sqrt{1-x}} \right) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{2-2x+1+x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{3-x}{2\sqrt{(1-x)^3}}.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hàm số $y = -2\sqrt{x} + 3x$. Tập nghiệm S của bất phương trình $y' > 0$ là:

- A. $S = (-\infty; +\infty)$. B. $S = \left[-\infty; \frac{1}{9}\right)$. C. $S = \left(\frac{1}{9}; +\infty\right)$. D. $S = \emptyset$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y = -2\sqrt{x} + 3x \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{x}} + 3.$$

$$\text{Do đó } y' > 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{x}} + 3 > 0 \Leftrightarrow 3 > \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x > \frac{1}{9}$$

Câu 2: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x-1}$ tại điểm $x = 1$.

- A. $f'(1) = \frac{1}{2}$. B. $f'(1) = 1$. C. $f'(1) = 0$. D. Không tồn tại.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}.$$

Tại $x = 1$ thì $f'(x)$ không xác định.

Câu 3: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{1-2x^2}$.

- A. $y' = \frac{1}{2\sqrt{1-2x^2}}$. B. $y' = \frac{-4x}{\sqrt{1-2x^2}}$. C. $y' = \frac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}}$. D. $y' = \frac{2x}{\sqrt{1-2x^2}}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y' = \frac{(1-2x^2)'}{2\sqrt{1-2x^2}} = \frac{-4x}{2\sqrt{1-2x^2}} = \frac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}}.$$

Câu 4: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x^3}$.

A. $y' = \frac{x - 6x^2}{\sqrt{x^2 - 4x^3}}$.

B. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 4x^3}}$.

C. $y' = \frac{x - 12x^2}{2\sqrt{x^2 - 4x^3}}$.

D. $y' = \frac{x - 6x^2}{2\sqrt{x^2 - 4x^3}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = \frac{2x - 12x^2}{2\sqrt{x^2 - 4x^3}} = \frac{x - 6x^2}{\sqrt{x^2 - 4x^3}}$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. Tập nghiệm S của bất phương trình $f'(x) \geq f(x)$ có bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = \frac{(x^2 - 2x)'}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$.

Khi đó, $f'(x) \geq f(x) \Leftrightarrow \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}} \geq \sqrt{x^2 - 2x}$

$$\Leftrightarrow x - 1 \geq x^2 - 2x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \{1; 2\} \Rightarrow$ tập S có 2 giá trị nguyên.

Câu 6: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x\sqrt{x}$.

A. $f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$.

B. $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

C. $f'(x) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x}}{x}$.

D.

$$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2}.$$

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x) = x' \cdot \sqrt{x} + x \cdot (\sqrt{x})' = \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

Câu 7: Tính đạo hàm của hàm số $y = x\sqrt{x^2 - 2x}$.

A. $y' = \frac{2x - 2}{\sqrt{x^2 - 2x}}$.

B. $y' = \frac{3x^2 - 4x}{\sqrt{x^2 - 2x}}$.

C. $y' = \frac{2x^2 - 3x}{\sqrt{x^2 - 2x}}.$

D. $y' = \frac{2x^2 - 2x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = \sqrt{x^2 - 2x} + x \cdot \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{x^2 - 2x + x^2 - x}{\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{2x^2 - 3x}{\sqrt{x^2 - 2x}}.$

Câu 8: Tính đạo hàm của hàm số $y = (2x - 1)\sqrt{x^2 + x}.$

A. $y' = 2\sqrt{x^2 + x} - \frac{4x^2 - 1}{2\sqrt{x^2 + x}}.$

B. $y' = 2\sqrt{x^2 + x} + \frac{4x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + x}}.$

C. $y' = 2\sqrt{x^2 + x} + \frac{4x^2 - 1}{2\sqrt{x^2 + x}}.$

D. $y' = 2\sqrt{x^2 + x} + \frac{4x^2 + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = (2x - 1)' \cdot \sqrt{x^2 + x} + (2x - 1) \cdot (\sqrt{x^2 + x})'$
 $= 2 \cdot \sqrt{x^2 + x} + \frac{(2x - 1)(2x + 1)}{2\sqrt{x^2 + x}} = 2\sqrt{x^2 + x} + \frac{4x^2 - 1}{2\sqrt{x^2 + x}}.$

Câu 9: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$

A. $y' = \frac{x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}.$

B. $y' = -\frac{x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}.$

C. $y' = \frac{x}{2(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}.$

D. $y' = -\frac{x(x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 1}}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)' = \frac{-(\sqrt{x^2 + 1})'}{x^2 + 1} = \frac{-(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}(x^2 + 1)}$
 $= \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 1}(x^2 + 1)}.$

Câu 10: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$

A. $y' = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$

B. $y' = \frac{1 + x}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}.$

C. $y' = \frac{2(x+1)}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

D. $y' = \frac{x^2-x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } y' &= \frac{(x-1)' \cdot \sqrt{x^2+1} - (x-1)(\sqrt{x^2+1})'}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \frac{\sqrt{x^2+1} - (x-1) \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2} \\ &= \frac{x^2+1-x^2+x}{(\sqrt{x^2+1})^3} = \frac{1+x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}. \end{aligned}$$

Câu 11: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}$.

A. $y' = \frac{5}{(2x-1)^2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$.

B. $y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{(2x-1)^2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$.

C. $y' = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$.

D. $y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{(x+2)^2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}} \cdot \left(\frac{2x-1}{x+2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{(x+2)^2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}.$$

Câu 12: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$.

A. $y' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{x^2+1}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$.

B. $y' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$.

C. $y' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{x^2+1}} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$.

D. $y' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{x^2+1}} \left(x - \frac{1}{x^2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}} \left(\frac{x^2+1}{x}\right)' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{x^2+1}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

Câu 13: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$.

A. $y' = -\frac{1}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2}$.

B. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x-1}}$.

C. $y' = \frac{1}{4\sqrt{x+1}} + \frac{1}{4\sqrt{x-1}}.$

D. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2}.$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right) = \frac{1}{4\sqrt{x+1}} + \frac{1}{4\sqrt{x-1}}.$$

Câu 14: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 1}{2\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 1}}$ tại điểm $x = 0$.

A. $f'(0) = 0.$

B. $f'(0) = \frac{1}{2}.$

C. Không tồn tại.

D. $f'(0) = 1.$

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f'(x) &= \frac{(3x^2 + 2x + 1)' \cdot 2\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 1} - (3x^2 + 2x + 1) \cdot (2\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 1})'}{(2\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 1})^2} \\ &= \frac{(6x + 2)2\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 1} - (3x^2 + 2x + 1) \frac{9x^2 + 4x}{\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 1}}}{(2\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 1})^2} = \frac{9x^4 + 6x^3 - 9x^2 + 8x + 4}{4(3x^3 + 2x^2 + 1)\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 1}} \\ \Rightarrow f'(0) &= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Câu 15: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{a^3}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ (a là hằng số).

A. $y' = \frac{a^3 x}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}.$

B. $y' = \frac{a^3 x}{a^2 - x^2}.$

C. $y' = \frac{a^3 x}{2(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}.$

D. $y' = \frac{a^3(3a^2 - 2x)}{2(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}.$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y' = \frac{-a^3(\sqrt{a^2 - x^2})'}{a^2 - x^2} = \frac{-a^3(-2x)}{2\sqrt{a^2 - x^2} \cdot (a^2 - x^2)} = \frac{a^3 x}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

BÀI 3. ĐẠO HÀM HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Giới hạn của $\frac{\sin x}{x}$

Định lý 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$.

2. Đạo hàm của hàm số $y = \sin x$

Định lý 2

Hàm số $y = \sin x$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và $(\sin x)' = \cos x$.

Nếu $y = \sin u$ và $u = u(x)$ thì $(\sin u)' = u' \cdot \cos u$.

3. Đạo hàm của hàm số $y = \cos x$

Định lý 3

Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và $(\cos x)' = -\sin x$.

Nếu $y = \cos u$ và $u = u(x)$ thì $(\cos u)' = -u' \sin u$.

4. Đạo hàm của hàm số $y = \tan x$

Định lý 4

Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Nếu $y = \tan u$ và $u = u(x)$ thì $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$.

5. Đạo hàm của hàm số $y = \cot x$

Định lý 5

Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq k\pi$ và $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Nếu $y = \cot u$ và $u = u(x)$ thì $(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Tính Đạo Hàm của các hàm số lượng gics

1. Phương pháp

- Áp dụng quy tắc tính đạo hàm.
- Áp dụng các đạo hàm lượng giác cơ bản.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan 7x$

Hướng dẫn giải

$$y' = \frac{(7x)'}{\cos^2 7x} = \frac{7}{\cos^2 7x}.$$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\cos x}$

Hướng dẫn giải

$$y' = \frac{(\cos x)'}{2\sqrt{\cos x}} = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}.$$

Ví dụ 3: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\cos 2x}$

Hướng dẫn giải

$$y' = \frac{(\cos 2x)'}{2\sqrt{\cos 2x}} = \frac{-2\sin 2x}{2\sqrt{\cos 2x}} = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}.$$

Ví dụ 4: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\sin x}$

Hướng dẫn giải

$$y = \sqrt{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{(\sin x)'}{2\sqrt{\sin x}} = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}.$$

Ví dụ 5: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\sin 3x}$

Hướng dẫn giải

$$y' = \frac{(\sin 3x)'}{2\sqrt{\sin 3x}} = \frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}.$$

Ví dụ 6: Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan^2 5x$

Hướng dẫn giải

$$y' = 2 \tan 5x \cdot \frac{(5x)'}{\cos^2 5x} = \frac{10 \sin 5x}{\cos^3 5x}.$$

Ví dụ 7: Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)$

Hướng dẫn giải

$$y = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) \Rightarrow y' = \left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)' \cdot \left(-\sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)\right) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right).$$

Ví dụ 8: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

Hướng dẫn giải

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos 2x \Rightarrow y' = -2 \sin 2x.$$

Ví dụ 9: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin 2x + \cos 2x$

Hướng dẫn giải

$$y' = 2(\sin 2x)' + (\cos 2x)' = 4 \cos 2x - 2 \sin 2x.$$

Ví dụ 10: Cho $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$. Tính $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

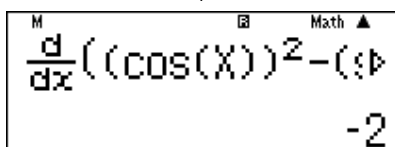
Ta có $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$. Do đó $f'(x) = -2 \sin 2x$.

$$\text{Vậy } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \sin \frac{\pi}{2} = -2.$$

Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Chuyển sang chế độ rad bằng cách ấn phím SHIFT MODE 4

Nhập vào màn hình $\frac{d}{dx}((\cos(X))^2 + (\sin(X))^2) \Big|_{x=\frac{\pi}{4}}$ rồi ấn phím = ta được kết quả



The image shows a calculator screen with the expression $\frac{d}{dx}((\cos(X))^2 + (\sin(X))^2)$ entered, followed by a right arrow and $x = \frac{\pi}{4}$. The result displayed is -2.

Ví dụ 11: Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos^3 4x$

Hướng dẫn giải

$$y = \cos^3 4x \Rightarrow y' = 3 \cos^2 4x \cdot (\cos 4x)' = 3 \cos^2 4x \cdot (-4 \sin 4x) = -12 \cos^2 4x \cdot \sin 4x.$$

Ví dụ 12: Với $y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$ thì $\frac{y'\left(\frac{\pi}{8}\right)}{y'\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ có giá trị bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

$$y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \Rightarrow y' = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$$

$$y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2 \left(\sin \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = 0; y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right) \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{y'\left(\frac{\pi}{8}\right)}{y'\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 0.$$

Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Chuyển sang chế độ rad bằng cách ấn phím SHIFT MODE 4

Câu 4: Tính đạo hàm của hàm số $y = x^2 \tan x + \sqrt{x}$.

A. $y' = 2x \tan x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

B. $y' = 2x \tan x + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

C. $y' = 2x \tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

D. $y' = 2x \tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = (x^2)' \tan x + (\tan x)' \cdot x^2 + (\sqrt{x})' = 2x \tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Câu 5: Tính đạo hàm của hàm số $y = 2 \cos x^2$.

A. $y' = -2 \sin x^2$.

B. $y' = -4x \cos x^2$.

C. $y' = -2x \sin x^2$.

D. $y' = -4x \sin x^2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = -2 \cdot (x^2)' \cdot \sin x^2 = -2 \cdot 2x \cdot \sin x^2 = -4x \sin x^2$.

Câu 6: Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan \frac{x+1}{2}$.

A. $y' = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x+1}{2}}$.

B. $y' = \frac{1}{\cos^2 \frac{x+1}{2}}$.

C. $y' = -\frac{1}{2 \cos^2 \frac{x+1}{2}}$.

D. $y' = -\frac{1}{\cos^2 \frac{x+1}{2}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = \left(\tan \frac{x+1}{2} \right)' = \frac{\left(\frac{x+1}{2} \right)'}{\cos^2 \frac{x+1}{2}} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x+1}{2}}$.

Câu 7: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin \sqrt{2+x^2}$.

A. $y' = \frac{2x+2}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}$.

B. $y' = -\frac{x}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}$.

C. $y' = \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}$.

D. $y' = \frac{x+1}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = (\sqrt{2+x^2})' \cos \sqrt{2+x^2} = \frac{(2+x^2)'}{2\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2} = \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}$

Câu 8: Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos \sqrt{2x+1}$.

A. $y' = -\frac{\sin \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$.

B. $y' = \frac{\sin \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$.

C. $y' = -\sin \sqrt{2x+1}$.

D. $y' = -\frac{\sin \sqrt{2x+1}}{2\sqrt{2x+1}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = -(\sqrt{2x+1})' \sin \sqrt{2x+1} = \frac{(2x+1)'}{2\sqrt{2x+1}} \sin \sqrt{2x+1} = -\frac{\sin \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$.

Câu 9: Tính đạo hàm của hàm số $y = \cot \sqrt{x^2+1}$.

A. $y' = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1} \cdot \sin^2 \sqrt{x^2+1}}$.

B. $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1} \cdot \sin^2 \sqrt{x^2+1}}$.

C. $y' = -\frac{1}{\sin^2 \sqrt{x^2+1}}$.

D. $y' = \frac{1}{\sin^2 \sqrt{x^2+1}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = -\frac{(\sqrt{x^2+1})'}{\sin^2 \sqrt{x^2+1}} = -\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sin^2 \sqrt{x^2+1}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1} \cdot \sin^2 \sqrt{x^2+1}}$.

Câu 10: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin(\sin x)$.

A. $y' = \cos(\sin x)$.

B. $y' = \cos(\cos x)$.

C. $y' = \cos x \cdot \cos(\sin x)$.

D. $y' = \cos x \cdot \cos(\cos x)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = [\sin(\sin x)]' = (\sin x)' \cdot \cos(\sin x) = \cos x \cdot \cos(\sin x)$.

Câu 11: Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos(\tan x)$.

A. $y' = \sin(\tan x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$.

B. $y' = -\sin(\tan x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$.

C. $y' = \sin(\tan x)$.

D. $y' = -\sin(\tan x)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = -(\tan x)' \sin(\tan x) = -\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \sin(\tan x)$.

Câu 12: Tính đạo hàm của hàm số $y = 2 \sin^2 x - \cos 2x + x$.

A. $y' = 4 \sin x + \sin 2x + 1$.

B. $y' = 4 \sin 2x + 1$.

C. $y' = 4 \cos x + 2 \sin 2x + 1$.

D. $y' = 4 \sin x - 2 \sin 2x + 1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 2 \cdot 2(\sin x)' \cdot \sin x + (2x)' \sin 2x + 1 = 4 \cos x \sin x + 2 \sin 2x + 1$

$= 2 \sin 2x + 2 \sin 2x + 1 = 4 \sin 2x + 1$

Câu 13: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) + \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}$.

A. $y' = -2 \sin(\pi - 4x) + \frac{\pi}{2}$.

B. $y' = 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \frac{\pi}{2}$.

C. $y' = 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \frac{\pi}{2}x$.

D. $y' = -2 \sin(\pi - 4x)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) + \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4} = \frac{1 - \cos(\pi - 4x)}{2} + \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}$

$= -\frac{1}{2} \cos(\pi - 4x) + \frac{\pi}{2}x + \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$

Suy ra $y' = \left(-\frac{1}{2} \cos(\pi - 4x) + \frac{\pi}{2}x + \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right)'$

$= \frac{1}{2}(\pi - 4x)' \sin(\pi - 4x) + \frac{\pi}{2} = -2 \sin(\pi - 4x) + \frac{\pi}{2}$.

Câu 14: Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos^3(2x - 1)$.

A. $y' = -3 \sin(4x - 2) \cos(2x - 1)$.

B. $y' = 3 \cos^2(2x - 1) \sin(2x - 1)$.

C. $y' = -3 \cos^2(2x - 1) \sin(2x - 1)$.

D. $y' = 6 \cos^2(2x - 1) \sin(2x - 1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = [\cos^3(2x - 1)]' = 3 \cos^2(2x - 1) [\cos(2x - 1)]'$

$= -6 \sin(2x - 1) \cos^2(2x - 1)$

$= -3 [2 \sin(2x - 1) \cos(2x - 1)] \cos(2x - 1) = -3 \sin(4x - 2) \cos(2x - 1)$.

Câu 15: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin^3(1-x)$.

A. $y' = \cos^3(1-x)$.

B. $y' = -\cos^3(1-x)$.

C. $y' = -3 \sin^2(1-x) \cdot \cos(1-x)$.

D. $y' = 3 \sin^2(1-x) \cdot \cos(1-x)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = [\sin^3(1-x)]' = 3 \cdot [\sin(1-x)]' \cdot \sin^2(1-x) = -3 \cdot \cos(1-x) \cdot \sin^2(1-x)$.

Câu 16: Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan^3 x + \cot 2x$.

A. $y' = 3 \tan^2 x \cdot \cot x + 2 \tan 2x$.

B. $y' = -\frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x} + \frac{2}{\sin^2 2x}$.

C. $y' = 3 \tan^2 x - \frac{1}{\sin^2 2x}$.

D. $y' = \frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x} - \frac{2}{\sin^2 2x}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = (\tan^3 x + \cot 2x)' = 3 \tan^2 x (\tan x)' - \frac{2}{\sin^2 2x} = \frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x} - \frac{2}{\sin^2 2x}$

Câu 17: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

A. $y' = \frac{-\sin 2x}{(\sin x - \cos x)^2}$.

B. $y' = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{(\sin x - \cos x)^2}$.

C. $y' = \frac{2 - 2 \sin 2x}{(\sin x - \cos x)^2}$.

D. $y' = \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = \frac{\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{-\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = -\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Suy ra $y' = -\frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{1}{\left(\frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$.

Câu 18: Tính đạo hàm của hàm số $y = -\frac{2}{\tan(1-2x)}$.

A. $y' = \frac{4x}{\sin^2(1-2x)}$.

B. $y' = \frac{-4}{\sin(1-2x)}$.

$$\text{C. } y' = \frac{-4x}{\sin^2(1-2x)}.$$

$$\text{D. } y' = \frac{-4}{\sin^2(1-2x)}.$$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = -\frac{2(\tan(1-2x))'}{\tan^2(1-2x)} = \frac{-4 \cdot \frac{1}{\cos^2(1-2x)}}{\tan^2(1-2x)} = \frac{-4}{\sin^2(1-2x)}.$$

Câu 19: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{\cos 2x}{3x+1}$.

$$\text{A. } y' = \frac{-2(3x+1)\sin 2x - 3\cos 2x}{(3x+1)^2}.$$

$$\text{B. } y' = \frac{-2(3x+1)\sin 2x - 3\cos 2x}{3x+1}.$$

$$\text{C. } y' = \frac{-(3x+1)\sin 2x - 3\cos 2x}{(3x+1)^2}.$$

$$\text{D. } y' = \frac{2(3x+1)\sin 2x + 3\cos 2x}{(3x+1)^2}.$$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y' = \frac{(\cos 2x)'(3x+1) - (3x+1)' \cdot \cos 2x}{(3x+1)^2} = \frac{-2(3x+1)\sin 2x - 3\cos 2x}{(3x+1)^2}.$$

Câu 20: Cho $f(x) = 2x^2 - x + 2$ và $g(x) = f(\sin x)$. Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$.

$$\text{A. } g'(x) = 2\cos 2x - \sin x.$$

$$\text{B. } g'(x) = 2\sin 2x + \cos x.$$

$$\text{C. } g'(x) = 2\sin 2x - \cos x.$$

$$\text{D. } g'(x) = 2\cos 2x + \sin x.$$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } g(x) = f(\sin x) = 2\sin^2 x - \sin x + 2$$

$$\Rightarrow g'(x) = (2\sin^2 x - \sin x + 2)' = 2 \cdot 2\sin x \cdot \cos x - \cos x = 2\sin 2x - \cos x.$$

Dạng 2. Tính đạo hàm tại một điểm

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 5\sin x - 3\cos x$ tại điểm $x = \frac{\pi}{2}$.

$$\text{A. } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3.$$

$$\text{B. } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3.$$

$$\text{C. } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -5.$$

$$\text{D. } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5.$$

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = (5 \sin x - 3 \cos x)' = 5(\sin x)' - 3(\cos x)' = 5 \cos x + 3 \sin x$.

Suy ra $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5 \cos \frac{\pi}{2} + 3 \sin \frac{\pi}{2} = 3$

Câu 2: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin\left(\frac{3\pi}{5} - 2x\right)$ tại điểm $x = -\frac{\pi}{5}$.

- A. $f'\left(-\frac{\pi}{5}\right) = 4$. B. $f'\left(-\frac{\pi}{5}\right) = -4$. C. $f'\left(-\frac{\pi}{5}\right) = 2$. D. $f'\left(-\frac{\pi}{5}\right) = -2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = \left[2 \sin\left(\frac{3\pi}{5} - 2x\right)\right]' = 2\left(\frac{3\pi}{5} - 2x\right)' \cos\left(\frac{3\pi}{5} - 2x\right) = -4 \cos\left(\frac{3\pi}{5} - 2x\right)$.

Suy ra $f'\left(-\frac{\pi}{5}\right) = -4 \cos\left(\frac{3\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}\right) = -4 \cos \pi = 4$.

Câu 3: Hàm số $f(x) = x^4$ có đạo hàm là $f'(x)$, hàm số $g(x) = 2x + \sin \frac{\pi x}{2}$ có đạo hàm là $g'(x)$.

Tính giá trị biểu thức $P = \frac{f'(1)}{g'(1)}$.

- A. $P = \frac{4}{3}$. B. $P = 2$. C. $P = -2$. D. $P = -\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x) = 4x^3$ và $g'(x) = \left(2x + \sin \frac{\pi x}{2}\right)' = 2 + \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}$.

Suy ra $P = \frac{f'(1)}{g'(1)} = \frac{4}{2 + \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}} = 2$.

Câu 4: Hàm số $f(x) = 4x$ có đạo hàm là $f'(x)$, hàm số $g(x) = 4x + \sin \frac{\pi x}{4}$ có đạo hàm là $g'(x)$.

Tính giá trị biểu thức $P = \frac{f'(2)}{g'(2)}$.

- A. $P = 1$. B. $P = \frac{16}{16 + \pi}$. C. $P = \frac{16}{17}$. D. $P = \frac{1}{16}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = 4$ và $g'(x) = 4 + \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi x}{4}$.

$$\text{Suy ra } P = \frac{f'(2)}{g'(2)} = \frac{4}{4 + \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi \cdot 2}{4}} = 1$$

Câu 5: Hàm số $f(x) = a \sin x + b \cos x + 1$ có đạo hàm là $f'(x)$. Để $f'(0) = \frac{1}{2}$ và $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1$ thì giá trị của a và b bằng bao nhiêu?

A. $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $a = \frac{\sqrt{2}}{2}; b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $a = \frac{1}{2}; b = -\frac{1}{2}$.

D. $a = b = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = a \cos x - b \sin x$. Khi đó
$$\begin{cases} f'(0) = \frac{1}{2} \\ f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \cos 0 - b \sin 0 = \frac{1}{2} \\ a \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + b \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{\sqrt{2}}{2}b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x) - \cos^2 x$ với $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các biểu thức dưới đây, biểu thức nào xác định hàm số $f(x)$ thỏa mãn $y'(x) = 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$?

A. $f(x) = x + \frac{1}{2} \cos 2x$. **B.** $f(x) = x - \frac{1}{2} \cos 2x$. **C.** $f(x) = x - \sin 2x$. **D.**

$f(x) = x + \sin 2x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'(x) = f'(x) + 2 \sin x \cos x = f'(x) + \sin 2x$.

Suy ra $y'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) + \sin 2x = 1 \Leftrightarrow f'(x) = 1 - \sin 2x$.

Đến đây ta lần lượt xét từng đáp án, ví dụ xét đáp án A ta có

$$f'(x) = \left(x + \frac{1}{2} \cos 2x\right)' = x' + \frac{1}{2}(\cos 2x)' = 1 - \sin 2x \text{ (thỏa mãn)}$$

Dạng 3: Giải phương trình $f'(x) = 0$

1. Phương pháp

✓ Tính đạo hàm $f'(x)$

✓ Để giải phương trình $f'(x) = 0$, ta áp dụng cách giải các phương trình lượng giác cơ bản và một số phương trình lượng giác thường gặp.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Với $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}x\right)$ thì phương trình $y' = 0$ có nghiệm là:

A. $x = \frac{\pi}{3} - k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = -\frac{\pi}{3} - k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}x\right) \Rightarrow y' = \frac{-1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}x\right)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}x\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} - k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 2: Với $y = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right)$ thì phương trình $y' = 0$ có nghiệm là:

A. $x = -\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}$.

B. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.

C. $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}$.

D. $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$$y = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right) \Rightarrow y' = -2 \sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} + 2x = k\pi$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{2\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 3: Hàm số $y = \cot^2 \frac{x}{4}$, nghiệm của phương trình $y' = 0$ là:

A. $2\pi + k\pi$.

B. $\pi + k\pi$.

C. $2\pi + k4\pi$.

D. Một kết quả khác.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$y = \cot^2 \frac{x}{4} \Rightarrow y' = 2 \cot \frac{x}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{4}} = -\frac{1}{2} \frac{\cos \frac{x}{4}}{\sin^3 \frac{x}{4}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \cos \frac{x}{4} = 0 \Leftrightarrow x = 2\pi + k4\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 4: Giải phương trình: $f'(x) = 0$, biết $f(x) = \cos x - \sin x + x$.

A. $x = k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = k\pi; x = \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $f'(x) = -\sin x - \cos x + 1$.

Vậy: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}.$$

Ví dụ 5: Giả sử $f(x) = \frac{\sin 2x}{4} - \cos x + \frac{3}{2}x$. Khi đó tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) \geq 0$ là:

- A. $[-1; 1]$. B. $\emptyset$. C. $(-\infty; +\infty)$. D. $(0; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta có: $f(x) = \frac{\sin 2x}{4} - \cos x + \frac{3}{2}x$

• $f'(x) = \frac{1}{2}\cos 2x + \sin x + \frac{3}{2}$.

• $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x + \sin x + \frac{3}{2} \geq 0$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + 2\sin x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \sin^2 x - \sin x - 2 \geq 0 \quad (*)$$

Đặt $t = \sin x$, $-1 \leq t \leq 1$, phương trình trở thành: $t^2 - t - 2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 2$ (so điều kiện ta được nghiệm $-1 \leq t \leq 1$).

Do đó $(*) \Leftrightarrow -1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow \forall x \in (-\infty; +\infty)$.

Ví dụ 6: Với $f(x) = \frac{\sin 3x}{3} + \cos x - \sqrt{3}\left(\sin x + \frac{\cos 3x}{3}\right)$ thì tập nghiệm của $f'(x) = 0$ là:

- A. $\left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. B. $\left\{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
C. $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. D. $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $f(x) = \frac{\sin 3x}{3} + \cos x - \sqrt{3}\left(\sin x + \frac{\cos 3x}{3}\right)$

$$f'(x) = \cos 3x - \sin x - \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 3x - \sin x - \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x + \sqrt{3}\sin 3x = \sin x + \sqrt{3}\cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x = \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{3}\cos 3x + \sin \frac{\pi}{3}\sin 3x = \cos \frac{\pi}{3}\sin x + \sin \frac{\pi}{3}\cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} - x + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{12} + k\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}.$$

3. Bài tập Trắc nghiệm

Câu 1: Cho hàm số $y = \cos^2 x + \sin x$. Phương trình $y' = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$.

- A. 1 nghiệm.** **B. 2 nghiệm.**
C. 3 nghiệm. **D. 4 nghiệm.**

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$y' = -2 \cos x \sin x + \cos x = \cos x(1 - 2 \sin x)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} ; (k \in \mathbb{Z})$$

$\forall x \in (0; \pi) \Rightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6} \right\}$. Vậy có 3 nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$

Câu 2: Cho hàm số $y = (m + 1)\sin x + m \cos x - (m + 2)x + 1$. Tìm giá trị của m để $y' = 0$ có nghiệm?

- A.** $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{cases}$ **B.** $m \geq 2$.
C. $-1 \leq m \leq 3$. **D.** $m \leq -2$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$$y' = (m + 1)\cos x - m\sin x - (m + 2)$$

Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow (m+1)\cos x - m\sin x = (m+2)$

Điều kiện phương trình có nghiệm là $a^2 + b^2 \geq c^2$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 + m^2 \geq (m+2)^2 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{cases}$$

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$. Biểu diễn nghiệm của phương trình lượng giác $f'(x) = 0$ trên

đường tròn lượng giác ta được mấy điểm phân biệt?

- A. 1 điểm.** **B. 2 điểm.**
C. 3 điểm. **D. 4 điểm.**

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$$f'(x) = \frac{-\sin x \cdot \sqrt{\cos 2x} - \cos x \cdot \frac{1}{2\sqrt{\cos 2x}}(-\sin 2x)}{\cos 2x} = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos 2x}}$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ta biểu diễn được 2 điểm phân biệt trên đường tròn lượng giác.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = -\cos x + \sin x - \cos 2x$. Phương trình $f'(x) = 1$ tương đương với phương trình nào sau đây?

- A. $\sin x = 0$.
B. $\sin x - 1 = 0$.
C. $(\sin x - 1)(\cos x - 1) = 0$.
D. $\cos x = 0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$f'(x) = \sin x + \cos x + 2\sin 2x$$

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \sin x + \cos x + 2\sin 2x = 1$$

$$\text{Đặt } t = \sin x + \cos x \quad (|t| \leq \sqrt{2}) \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$$

$$\text{Khi đó phương trình } \Leftrightarrow 2t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Với } t = 1 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Nghiệm trên cũng là nghiệm của phương trình $(\sin x - 1)(\cos x - 1) = 0$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = 2\frac{\cos^3 x}{3} + \sin^3 x - 2\cos x - 3\sin x$. Biểu diễn nghiệm của phương trình lượng giác $f'(x)$ trên đường tròn ta được mấy điểm phân biệt?

- A. 1 điểm.
B. 2 điểm.
C. 4 điểm.
D. 6 điểm.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$$f'(x) = 2\sin^3 x - 3\cos^3 x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \tan^3 x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \tan x = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}.$$

Vậy có hai điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.

BÀI 4. VI PHÂN

A. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$ và có đạo hàm tại $x \in (a; b)$. Giả sử Δx là số gia của x .

Ta gọi tích $f'(x)\Delta x$ là vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại x ứng với số gia Δx , kí hiệu là $df(x)$ hoặc dy , tức là : $dy = df(x) = f'(x)\Delta x$.

Chú ý:

Áp dụng định nghĩa trên vào hàm số $y = x$ ta có

$$dx = d(x) = x' \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x.$$

Do đó, với hàm số $y = f(x)$ ta có

$$dy = df(x) = f'(x)dx.$$

2. Ứng dụng phép tính gần đúng

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Tìm vi phân của hàm số $y=f(x)$

1. Phương pháp

- ✓ Tính đạo hàm $y=f(x)$
- ✓ Vi phân của hàm số $y=f(x)$ tại x là $df(x) = f'(x)dx$
- ✓ Vi phân của hàm số $y=f(x)$ tại x_0 là $df(x_0) = f'(x_0)dx$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Vi phân của hàm số $f(x) = 3x^2 - x$ tại điểm $x = 2$, ứng với $\Delta x = 0,1$ là:

- A. -0,07.
- B. 10.
- C. 1,1.
- D. -0,4.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta có: $f'(x) = 6x - 1 \Rightarrow f'(2) = 11$

$$df(2) = f'(2)\Delta x = 11 \cdot 0,1 = 1,1$$

Ví dụ 2: Vi phân của hàm số $y = 2x^5 - \frac{2}{x} + 5$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $dy = \left(10x^4 + \frac{2}{x^2} + 5\right)dx.$

B. $dy = \left(10x^4 - \frac{2}{x^2}\right)dx.$

C. $dy = \left(10x^4 + \frac{2}{x^2}\right)dx.$

D. $dy = \left(10x + \frac{2}{x^2}\right)dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$y = 2x^5 - \frac{2}{x} + 5$ thì $y' = 10x^4 + \frac{2}{x^2}$. Vậy $dy = \left(10x^4 + \frac{2}{x^2}\right)dx.$

Ví dụ 3: Vi phân của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 5x}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $dy = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 5x}}dx.$

B. $dy = \frac{2x - 5}{\sqrt{x^2 - 5x}}dx.$

C. $dy = -\frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x}}dx.$

D. $dy = \frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x}}dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$y = \sqrt{x^2 - 5x}$ thì $y' = \frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x}}$. Vậy $dy = \frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x}}dx.$

Ví dụ 4: Vi phân của hàm số $y = \frac{2x + 3}{2x - 1}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $dy = -\frac{7}{(2x - 1)^2}dx.$

B. $dy = -\frac{8}{(2x - 1)^2}dx.$

C. $dy = -\frac{4}{(2x - 1)^2}dx.$

D. $dy = \frac{4}{(2x - 1)^2}dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$y = \frac{2x + 3}{2x - 1}$ thì $y' = -\frac{8}{(2x - 1)^2}$. Vậy $dy = -\frac{8}{(2x - 1)^2}dx.$

Ví dụ 5: Vi phân của hàm số $y = \tan 5x$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $dy = \frac{5}{\cos^2 5x}dx.$

B. $dy = \frac{5x}{\cos^2 5x}dx.$

C. $dy = -\frac{5}{\cos^2 5x} dx.$

D. $dy = -\frac{5}{\sin^2 5x} dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$y = \tan 5x$ thì $y' = \frac{5}{\cos^2 5x}$. Vậy $dy = \frac{5}{\cos^2 5x} dx.$

Ví dụ 6: Vi phân của hàm số $y = \sqrt{\cos x}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $dy = \frac{\cos x}{2\sqrt{\cos x}} dx.$ B. $dy = \frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} dx.$

C. $dy = \frac{-\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx.$

D. $dy = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$y = \sqrt{\cos x}$ thì $y' = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$. Vậy $dy = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} dx.$

Ví dụ 7: Vi phân của hàm số $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $dy = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) dx.$

B. $dy = -2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) dx.$

C. $dy = -\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) dx.$

D. $dy = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$ thì $y' = -2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$. Vậy $dy = -2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) dx.$

Ví dụ 8: Cho hàm số $y = 5 \sin 2x$. Vi phân của hàm số tại $x = \frac{\pi}{3}$ là:

A. $dy = 5dx.$

B. $dy = 10 \cos 2x dx.$

C. $dy = -10 \cos 2x dx.$

D. $dy = -5dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$y = 5 \sin 2x \Rightarrow y' = 10 \cos 2x.$

$$dy = y'dx \Rightarrow dx = 10 \cos 2x dx.$$

Vi phân của hàm tại $x = \frac{\pi}{3}$: $dy = 10 \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) dx.$

$$dy = -5dx.$$

Ví dụ 9: Cho hàm số $y = \frac{x+3}{1-2x}$. Vi phân của hàm số tại $x = -3$ là:

- A. $dy = \frac{1}{7}dx.$ B. $dy = 7dx.$ C. $dy = -\frac{1}{7}dx.$ D. $dy = -7dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$$y = \frac{x+3}{1-2x} \Rightarrow y' = \frac{7}{(1-2x)^2} \Rightarrow y'(-3) = \frac{7}{49} = \frac{1}{7}.$$

$$\Rightarrow \text{Vi phân của hàm số tại } x = -3 \text{ là: } dy = \frac{1}{7}dx.$$

Ví dụ 10: Cho hàm số $y = \sin(\sin x)$. Vi phân của hàm số tại x là:

- A. $dy = \cos(\sin x)dx.$ B. $dy = \sin x(\cos x)dx.$
C. $dy = \cos(\sin x)\cos x dx.$ D. $dy = \cos(\sin x)\sin x dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ví dụ 11: Cho hàm số $y = \tan \sqrt{x}$. Vi phân của hàm số tại x là:

- A. $dy = \frac{1}{2\sqrt{x} \cos \sqrt{x}} dx.$ B. $dy = \frac{1}{2\sqrt{x} \cos^2 x} dx.$
C. $dy = \frac{1}{2\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx.$ D. $dy = \frac{1}{2\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x} dx}.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$y = \tan \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}}.$$

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx.$$

Ví dụ 12: Cho hàm số $y = \cos^2 2x$. Vi phân của hàm số tại x là:

A. $dy = 4 \cos 2x \sin 2x dx.$

B. $dy = 2 \cos 2x \sin 2x dx.$

C. $dy = -4 \cos 2x \sin 2x dx.$

D. $dy = -2 \cos 2x \sin 2x dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$y = \cos^2 2x \Rightarrow y' = -2 \cos 2x \cdot 2 \sin 2x = -4 \cos 2x \sin 2x.$$

$$dy = -4 \cos 2x \sin 2x dx.$$

Ví dụ 13: Vi phân của hàm số $y = \sqrt{x^2 + 3x - 1}$ là:

A. $dy = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3x - 1}} dx.$

B. $dy = \frac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 3x - 1}} dx.$

C. $dy = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3x - 1}} dx.$

D. $dy = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x - 1}} dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có:

$$y = \sqrt{x^2 + 3x - 1} \Rightarrow dy = \left(\sqrt{x^2 + 3x - 1} \right)' dx = \frac{(x^2 + 3x - 1)'}{2\sqrt{x^2 + 3x - 1}} dx = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x - 1}} dx.$$

Ví dụ 14: Vi phân của hàm số $y = \sqrt{3x + 1} + \sqrt{x + 1}$ là:

A. $dy = \left(\frac{3}{2\sqrt{3x + 1}} + \frac{1}{2\sqrt{x + 1}} \right) dx.$

B. $dy = \left(\frac{3}{\sqrt{3x + 1}} + \frac{1}{\sqrt{x + 1}} \right) dx.$

C. $dy = \left(\frac{1}{2\sqrt{3x + 1}} + \frac{1}{2\sqrt{x + 1}} \right) dx.$

D. $dy = \left(\frac{1}{\sqrt{3x + 1}} + \frac{1}{\sqrt{x + 1}} \right) dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Ta có:

$$\begin{aligned} y = \sqrt{3x + 1} + \sqrt{x + 1} \Rightarrow dy &= \left(\sqrt{3x + 1} + \sqrt{x + 1} \right)' dx = \left(\frac{(3x + 1)'}{2\sqrt{3x + 1}} + \frac{(x + 1)'}{2\sqrt{x + 1}} \right) dx \\ &= \left(\frac{3}{2\sqrt{3x + 1}} + \frac{1}{2\sqrt{x + 1}} \right) dx \end{aligned}$$

Ví dụ 15: Vi phân của hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}{2x + 1}$ là:

$$\text{A. } dy = \frac{x-7}{(2x+1)^2 \sqrt{x^2-2x+3}} dx.$$

$$\text{B. } dy = \frac{3x-7}{(2x+1)^2 \sqrt{x^2-2x+3}} dx.$$

$$\text{C. } dy = \frac{3x-7}{(2x+1)^2} dx.$$

$$\text{D. } dy = \frac{(3x-7)\sqrt{x^2-2x+3}}{(2x+1)^2} dx.$$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$$\text{Ta có: } y = \frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{2x+1} \Rightarrow dy = y' dx = \frac{3x-7}{(2x+1)^2 \sqrt{x^2-2x+3}} dx.$$

Ví dụ 16: Vi phân của hàm số $y = (\sqrt{x^2+1} + x)^{10}$ là:

$$\text{A. } dy = \frac{5(\sqrt{x^2+1} + x)^5}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

$$\text{B. } dy = \frac{5(\sqrt{x^2+1} + x)^{10}}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

$$\text{C. } dy = \frac{10(\sqrt{x^2+1} + x)^9}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

$$\text{D. } dy = \frac{10(\sqrt{x^2+1} + x)^{10}}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$$\text{Ta có: } y = (\sqrt{x^2+1} + x)^{10}$$

$$\Rightarrow dy = y' dx = 10(\sqrt{x^2+1} + x)^9 \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1 \right) dx = \frac{10(\sqrt{x^2+1} + x)^{10}}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

3. Bài tập rèn luyện tốc độ

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$. Vi phân của hàm số tại x là:

$$\text{A. } dy = \frac{-4}{(1+x^2)^2} dx.$$

$$\text{B. } dy = \frac{-4x}{(1+x^2)^2} dx.$$

$$\text{C. } dy = \frac{-dx}{(1+x^2)^2}.$$

$$\text{D. } dy = \frac{-4}{1+x^2} dx.$$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Câu 2: Vi phân của hàm số $y = \frac{2x+1}{x^2+x-2}$ là:

A. $dy = \frac{-2x^2 - 2x - 5}{(x^2 + x - 2)^2} dx.$

B. $dy = \frac{x^2 - x - 5}{(x^2 + x - 2)^2} dx.$

C. $dy = \frac{-2x^2 + x - 1}{(x^2 + x - 2)^2} dx.$

D. $dy = \frac{2x - 5}{(x^2 + x - 2)} dx.$

Hướng dẫn giải**ĐÁP ÁN A**

Ta có: $dy = y' dx = \frac{(2x+1)'(x^2+x-2) - (2x+1)(x^2+x-2)'}{(x^2+x-2)^2} = \frac{-2x^2 - 2x - 5}{(x^2+x-2)^2} dx.$

Câu 3: Vi phân của hàm số $y = (5x-3)\sqrt{9x^2+1}$ là:

A. $dy = \frac{-2x+3}{2\sqrt{9x^2+1}} dx.$

B. $dy = \frac{90x^2 - 27x + 5}{\sqrt{9x^2+1}} dx.$

C. $dy = -\frac{5}{\sqrt{9x^2+1}} dx.$

D. $dy = \frac{x^2 - 2x + 2}{\sqrt{9x^2+1}} dx.$

Hướng dẫn giải**ĐÁP ÁN B**

Ta có:

$$\begin{aligned} dy &= y' dx = \left[(5x-3)' \sqrt{9x^2+1} + (5x-3) (\sqrt{9x^2+1})' \right] dx \\ &= 5\sqrt{9x^2+1} + (5x-3) \frac{(9x^2+1)'}{2\sqrt{9x^2+1}} = 5\sqrt{9x^2+1} + (5x-3) \cdot \frac{18x}{2\sqrt{9x^2+1}} \\ &= 5\sqrt{9x^2+1} + (5x-3) \frac{9x}{\sqrt{9x^2+1}} \\ &= \frac{5(9x^2+1) + (5x-3)9x}{\sqrt{9x^2+1}} = \frac{90x^2 - 27x + 5}{\sqrt{9x^2+1}} \end{aligned}$$

Câu 4: Vi phân của hàm số $y = \sin^2 x + \cos 2x - x$ là:

A. $dy = (1 - \cos 2x) dx.$

B. $dy = (x + \sin 2x) dx.$

C. $dy = -(\sin 2x + 1)dx.$

D. $dy = (\sin 2x + 1)dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta có: $dy = y'dx = \left[2\sin x (\sin x)' - \sin 2x \cdot (2x)' - 1 \right] dx$
 $= \left[2\sin x \cos x - 2\sin 2x - 1 \right] dx = -(\sin 2x + 1)dx .$

Câu 5: Vi phân của hàm số $y = \sqrt{1 + 2 \tan x}$ là:

A. $dy = \frac{\tan x}{\sqrt{1 + 2 \tan x}} dx.$

B. $dy = \frac{1 + \tan^2 x}{2\sqrt{1 + 2 \tan x}} dx.$

C. $dy = \frac{2 \tan x}{\sqrt{1 + 2 \tan x}} dx.$

D. $dy = \frac{1 + \tan^2 x}{\sqrt{1 + 2 \tan x}} dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có: $y = \sqrt{1 + 2 \tan x} \Rightarrow dy = y'dx = \left(\sqrt{1 + 2 \tan x} \right)' dx$
 $= \left(\frac{(1 + 2 \tan x)'}{2\sqrt{1 + 2 \tan x}} \right) dx = \frac{1 + \tan^2 x}{\sqrt{1 + 2 \tan x}} dx .$

Câu 6: Vi phân của hàm số $y = \frac{2 - 2x + x^2}{x^2 - 1}$ là:

A. $dy = \frac{-2x^2 - 6x + 2}{(x^2 - 1)^2} dx.$

B. $dy = \frac{-6x + 2}{(x^2 - 1)^2} dx.$

C. $dy = \frac{-2x - 3}{(x^2 - 1)^2} dx.$

D. $dy = \frac{-2x^2 - x + 1}{(x^2 - 1)^2} dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $y = \frac{2 - 2x + x^2}{x^2 - 1} \Rightarrow dy = y'dx = \left(\frac{2 - 2x + x^2}{x^2 - 1} \right)' dx = \frac{-2x^2 - 6x + 2}{(x^2 - 1)^2} dx.$

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x) = (x - 1)^2$. Biểu thức nào sau đây chỉ vi phân của hàm số f?

A. $dy = 2(x-1)dx.$

B. $dy = (x-1)^2 dx.$

C. $dy = 2(x-1)dx.$

D. $dy = (x-1)dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ được xác định bởi biểu thức $\sin y = \cos x$ và $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$. Chọn kết quả đúng:

A. $y' = \tan x.$

B. $y' = -\tan x.$

C. $y' = 1.$

D. $y' = -1.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$$\cos y dy = -\sin x dx.$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-\sin x}{\cos y} = \frac{-\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{-\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{-\sin x}{|\sin x|} = -1$$

Câu 9: Xét hàm số $y = f(x) = \sqrt{1 + \cos^2 2x}$. Chọn câu đúng:

A. $df(x) = \frac{-\sin 4x}{2\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx.$

B. $df(x) = \frac{-\sin 4x}{\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx.$

C. $df(x) = \frac{\cos 2x}{\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx.$

D. $df(x) = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$$df(x) = \frac{(1 + \cos^2 2x)'}{2\sqrt{1 + \cos^2 2x}} = \frac{-\sin 4x}{\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx.$$

Câu 10: Vi phân của hàm số $y = 2x^3 - \sqrt{x} + 1$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $dy = \left(6x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 \right) dx.$

B. $dy = \left(6x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx.$

C. $dy = \left(6x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx.$

D. $dy = \left(6x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$y = 2x^3 - \sqrt{x} + 1 \Rightarrow y' = 6x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\text{Do đó: } dy = \left(6x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx.$$

Câu 11: Cho hàm số $y = \frac{x+3}{1-2x}$. Vi phân của hàm số tại $x = -3$ là:

A. $dy = \frac{1}{7}dx.$

B. $dy = 7dx.$

C. $dy = -\frac{1}{7}dx.$

D. $dy = -7dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$$\text{Ta có } y' = \frac{7}{(1-2x)^2} \Rightarrow y'(-3) = \frac{1}{7}. \text{ Do đó } dy = \frac{1}{7}dx.$$

Câu 12: Vi phân của $y = \tan 5x$ là:

A. $dy = \frac{5x}{\cos^2 5x}dx.$

B. $dy = -\frac{5}{\sin^2 5x}dx.$

C. $dy = \frac{5}{\cos^2 5x}dx.$

D. $dy = -\frac{5}{\cos^2 5x}dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$y = \tan 5x \Rightarrow y' = \frac{5}{\cos^2 5x}. \text{ Do đó } dy = \frac{5}{\cos^2 5x}dx$$

Câu 13: Cho hàm số $y = \cos^2 2x$. Vi phân của hàm số là:

A. $dy = 4 \cos 2x \sin 2x dx.$

B. $dy = 2 \cos 2x \sin 2x dx.$

C. $dy = -2 \cos 2x \sin 2x dx.$

D. $dy = -2 \sin 4x dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$$\text{Ta có: } dy = d(\cos^2 2x) = 2 \cos 2x \cdot (\cos 2x)' dx = -4 \cos 2x \cdot \sin 2x dx = -2 \sin 4x dx.$$

Câu 14: Cho hàm số $y = \tan \sqrt{x}$. Vi phân của hàm số là:

A. $dy = \frac{1}{2\sqrt{x} \cos^2 x} dx.$

B. $dy = \frac{1}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx.$

C. $dy = \frac{1}{2\sqrt{x} \cos \sqrt{x}} dx.$

D. $dy = \frac{1}{2\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có : $dy = d\left(\tan \sqrt{x}\right) = \left(\frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}}\right) \cdot (\sqrt{x})' dx = \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot \cos^2 \sqrt{x}} dx.$

Câu 15 : Cho hàm số $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$. Vi phân của hàm số là:

A. $dy = \frac{-4x}{(1+x^2)^2} dx.$

B. $dy = \frac{-4}{(1+x^2)^2} dx.$

C. $dy = \frac{-4}{1+x^2} dx.$

D. $dy = \frac{-dx}{(1+x^2)^2}.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có : $dy = d\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2} dx.$

Dạng 2: Tính gần đúng giá trị của một biểu thức

1. Phương pháp

Lập hàm số $y = f(x)$ và chọn $x_0, \Delta x$ một cách thích hợp

1. Tính đạo hàm $f'(x), f'(x_0)$ và $f(x_0)$
2. Giá trị gần đúng của biểu thức $P = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Dùng vi phân tính gần đúng $\sqrt[3]{26,7}$ có giá trị là:

- A. 2,999. B. 2,98. C. 2,97. D. 2,89.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Xét $f(x) = \sqrt[3]{x}$ thì $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Cho $x_0 = 27, \Delta x = -0,3$.

Theo công thức gần đúng $f(x_0 + \Delta x) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x + f(x_0)$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{27,3} \approx \sqrt[3]{27} + \frac{1}{27}(-0,3) \approx 2,999.$$

Ví dụ 2: Dùng vi phân tính gần đúng $\sin 29^\circ$ có giá trị là:

- A. 0,4849. B. 0,5464. C. 0,4989. D. 0,4949.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Xét $f(x) = \sin x$ với $29^\circ = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}$ (rad).

Có $f'(x) = \cos x$.

Chọn $x_0 = \frac{\pi}{6}$,

$$\Delta x = -\frac{\pi}{180} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right) \approx 0,4849.$$

3. Bài tập rèn luyện tốc độ

Câu 1: Dùng vi phân tính gần đúng $\frac{1}{0,9995}$ có giá trị là:

- A. 1,0005. B. 1,005. C. 1,0015. D. 1,05.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Ta có: $\frac{1}{0,9995} = f(1 - 0,0005) \approx f(1) - f'(1) \cdot 0,0005 = 1 + 1 \cdot 0,0005 = 1,0005.$

Câu 2: Dùng vi phân tính gần đúng $\cos 45^\circ 30'$ có giá trị là:

- A. 0,7. B. 0,7009. C. 0,7019. D. 0,8.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Xét hàm số $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$.

Khi đó

$$\cos 45^\circ 30' = f\left(45^\circ + 30'\right) \approx f\left(45^\circ\right) + f'\left(45^\circ\right) \cdot \frac{3,14}{6} = 0,7009.$$

Câu 3: Dùng vi phân tính gần đúng $\frac{1}{\sqrt{20,3}}$ có giá trị là:

- A. 0,7. B. 0,7009. C. 0,7019. D. 0,8.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

Khi đó: $\frac{1}{\sqrt{20,3}} = f(20,25 + 0,05) \approx f(20,25) + f'(20,25) \cdot 0,05 = 0,222.$

BÀI 5. ĐẠO HÀM CẤP HAI

A. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN NẮM

I. Định nghĩa

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại mỗi điểm $x \in (a, b)$. Khi đó, hệ thức $y' = f'(x)$ xác định một hàm số mới trên khoảng (a, b) . Nếu hàm số $y' = f'(x)$ lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ tại x và kí hiệu là y'' hoặc $f''(x)$.

Chú ý

- Đạo hàm cấp 3 của hàm số $y = f(x)$ được định nghĩa tương tự và kí hiệu y''' hoặc $f'''(x)$ hoặc $f^{(3)}(x)$.
- Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp $n - 1$, kí hiệu $f^{(n-1)}(x)$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 4$). Nếu $f^{(n-1)}(x)$ có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp n của $y = f(x)$, kí hiệu $y^{(n)}$ hoặc $f^{(n)}(x)$.

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x) \right)'.$$

II. Ý NGHĨA CƠ HỌC CỦA ĐẠO HÀM CẤP HAI

Đạo hàm cấp hai $f''(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động $s = f(t)$ tại thời điểm t .

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Tính đạo hàm cấp cao của hàm số $y = f(x)$

1. Phương pháp

- ✓ Tính đạo hàm cấp 1: $f'(x)$
- ✓ Tính đạo hàm cấp 2: $f''(x) = \left[f'(x) \right]'$
- ✓ Tính đạo hàm cấp 3: $f^{(3)}(x) = \left[f''(x) \right]'$
- ✓ Tính đạo hàm cấp 4: $f^{(4)}(x) = \left[f^{(3)}(x) \right]'$
- ✓ Tính đạo hàm đến cấp được chỉ ra

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x) = \frac{4}{5}x^5 - 3x^2 - x + 4$ bằng biểu thức nào sau đây?

- A. $16x^3 - 6$. B. $16x^3 - 6x$. C. $4x^3 - 6$. D. $16x^2 - 6$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$f(x) = \frac{4}{5}x^5 - 3x^2 - x + 4$ thì $f'(x) = 4x^4 - 6x - 1$, do đó: $f''(x) = 16x^3 - 6$.

Ví dụ 2: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \cos 2x$ bằng biểu thức nào sau đây?

- A. $-2\sin 2x$. B. $-4\cos 2x$. C. $-4\sin 2x$. D. $4\cos 2x$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$y = \cos 2x$ thì $y' = -2\sin 2x$. Do đó $y'' = -4\cos 2x$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 12x - 1$. Tập hợp các giá trị x để đạo hàm cấp 2 của $f(x)$ không âm là:

- A. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$. B. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. C. $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. D. $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Hướng dẫn giải**ĐÁP ÁN D**

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 12x - 1$ thì $f'(x) = x^2 + x - 12$; $f''(x) = 2x + 1$.

Do đó $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = \frac{1}{x+1}$. Tính y'' ?

- A. $y'' = \frac{2}{(x+1)^4}$. B. $y'' = \frac{2}{(x+1)^3}$. C. $y'' = \frac{-2}{(x+1)^3}$. D. $y'' = \frac{-2}{(x+1)^4}$.

Hướng dẫn giải**ĐÁP ÁN B**

Ta có: $y' = -\frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow y'' = \frac{2}{(x+1)^3}$.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+4}$. Tính $M = 2(y')^2 + (1-y) \cdot y''$.

- A. $M = 0$. B. $M = 1$. C. $M = \frac{1}{x+4}$. D. $M = \frac{2x}{(x+4)^2}$.

Hướng dẫn giải**ĐÁP ÁN A**

Ta có: $y' = \frac{7}{(x+4)^2} \Rightarrow y'' = -\frac{14}{(x+4)^3}$

Lại có $1-y = 1 - \frac{x-3}{x+4} = \frac{7}{x+4}$

Vậy: $M = 2(y')^2 + (1-y) \cdot y'' = 2 \cdot \frac{49}{(x+4)^4} + \frac{7}{x+4} \cdot \left(-\frac{14}{(x+4)^3}\right) = 0$.

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$. Tính $y'^2 - 2y \cdot y''$.

- A. 0. B. 2. C. -1. D. 1.

Hướng dẫn giải**ĐÁP ÁN C**

Ta có: $y' = x + 1 \Rightarrow y'' = 1$.

Vậy: $y'^2 - 2y.y'' = (x+1)^2 - 2\left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right).1 = x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x - 2 = -1$.

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = x \sin x$. Tính $xy - 2(y' - \sin x) + xy''$.

- A. 1. B. 0. C. 2. D. $\sin x$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $y' = \sin x + \cos x \Rightarrow y'' = \cos x + (\cos x - x \sin x) = 2 \cos x - x \sin x$.

Vậy:

$xy - 2(y' - \sin x) + xy'' = x^2 \sin x - 2(\sin x + x \cos x - \sin x) + 2x \cos x - x^2 \sin x = 0$. **Ví dụ 8:** Cho hàm số $y = A \sin(\omega x + \varphi)$. Tính $M = y'' + \omega^2.y$.

- A. $M = 1$. B. $M = -1$.
C. $M = \cos^2(\omega x + 4)$. D. $M = 0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có: $y' = A\omega \cos(\omega x + \varphi) \Rightarrow y'' = -A\omega^2 \sin(\omega x + \varphi)$

$\Rightarrow y'' + \omega^2 y = -A\omega^2 \sin(\omega x + \varphi) + A\omega^2 \sin(\omega x + \varphi) = 0$.

Ví dụ 9: Cho hàm số $y = \sin 2x - \cos 2x$. Giải phương trình $y'' = 0$.

- A. $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{\pi}{8} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $y' = 2 \cos 2x + 2 \sin 2x \Rightarrow y'' = -4 \sin 2x + 4 \cos 2x$.

Phương trình $y'' = 0 \Leftrightarrow -4 \sin 2x + 4 \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 10: Cho hàm số: $y = (m-4)\frac{x^2}{2} + \cos x$.

Tìm m sao cho $y'' \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

- A. $m \leq 3$. B. $m \leq 2$. C. $m \geq 3$. D. $m \geq 2$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $y' = (m-4)x - \sin x \Rightarrow y'' = m-4 - \cos x$

$y'' \leq 0 \Leftrightarrow m-4 - \cos x \leq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq m-4 \quad (*)$

Vì $\cos x \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy bất phương trình (*) luôn nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -1 \geq m-4 \Leftrightarrow m \leq 3$.

Ví dụ 11: Cho hàm số $y = \frac{3x-2}{1-x}$. Giải bất phương trình $y'' > 0$.

- A. $x > 1$. B. $x < 1$. C. $x \neq 1$. D. Vô nghiệm.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$$\text{Ta có: } y' = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow y'' = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

$$\text{Vậy } y'' > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{(1-x)^3} > 0 \Leftrightarrow 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1.$$

Ví dụ 12: Cho hàm số $y = -3x^3 + 3x^2 - x + 5$; $y^{(3)}(3)$ bằng:

- A. $y^{(3)}(3) = -162$. B. $y^{(3)}(3) = 0$.
C. $y^{(3)}(3) = 54$. D. $y^{(3)}(3) = -18$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$$\begin{aligned} y &= -3x^3 + 3x^2 - x + 5 \Rightarrow y' = -9x^2 + 6x - 1 \\ y'' &= -18x + 6 \\ y^{(3)} &= -18 \Rightarrow y^{(3)}(3) = -18. \end{aligned}$$

Ví dụ 13: Cho hàm số $y = \sin^2 x$. Đạo hàm cấp 4 của hàm số là:

- A. $-\cos^2 2x$. B. $8\cos 2x$.
C. $-8\cos 2x$. D. Một kết quả khác.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$\begin{aligned} y &= \sin^2 x \\ y' &= 2\sin x \cos x = \sin 2x \\ y'' &= 2\cos 2x \\ y''' &= -4\sin 2x \\ y^{(4)} &= -8\cos 2x. \end{aligned}$$

Ví dụ 14: Cho hàm số $y = f(x) = \sin 2x$. Hãy chọn câu đúng.

- A. $4y - y'' = 0$. B. $4y + y'' = 0$. C. $y = y' \tan 2x$. D. $y^2 + (y')^2 = 4$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$$\begin{cases} y' = 2\cos 2x \\ y'' = -4\sin 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y - y'' = 8\sin 2x \\ 4y + y'' = 0 \end{cases}.$$

Ví dụ 15: Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1}$. Xét hai quan hệ:

(I) $y \cdot y' = 2x$;

(II) $y^2 \cdot y'' = y'$.

Quan hệ nào đúng?

A. Chỉ (I).

B. Chỉ (II).

C. Cả hai đều đúng.

D. Cả hai đều sai.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có:

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \text{ và } y'' = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}, \text{ suy ra } y \cdot y' = x \text{ và } y^2 \cdot y'' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \neq y'.$$

3. Bài tập rèn luyện tốc độ

Câu 1: Đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x) = 2x^5 - \frac{4}{x} + 1$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $40x^3 - \frac{4}{x^3}.$

B. $40x^3 + \frac{4}{x^3}.$

C. $40x^3 - \frac{8}{x^3}.$

D. $40x^3 + \frac{8}{x^3}.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$f(x) = 2x^5 - \frac{4}{x} + 1 \text{ thì } f'(x) = 10x^4 + \frac{4}{x^2}, \text{ do đó } f''(x) = 40x^3 - \frac{8}{x^3}.$$

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{2}{1+x}; y^{(3)}(1)$ bằng:

A. $-\frac{3}{4}.$

B. $\frac{3}{4}.$

C. $-\frac{4}{3}.$

D. Một kết quả khác.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$$y = \frac{2}{1+x} \Rightarrow y^{(3)} = \frac{-12}{(1+x)^4}$$

$$y^{(3)}(1) = \frac{-12}{16} = -\frac{3}{4}.$$

Câu 3: Cho hàm số $y = \cos^2 x; y^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ bằng:

A. 2.

B. $2\sqrt{3}.$

C. $-2\sqrt{3}.$

D. -2.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$$y = \cos^2 x \Rightarrow y' = -2 \cos x \sin x = -\sin 2x$$

$$y'' = -2 \cos 2x$$

$$y''' = 4 \sin 2x$$

$$y^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}.$$

Câu 4: Cho hàm số $y = \sin x + \cos x; y^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ bằng:

A. $\sqrt{2}.$

B. $-\sqrt{2}.$

C. 0.

D. Một kết quả khác.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$y = \sin x + \cos x \Rightarrow y' = \cos x - \sin x$$

$$y'' = -\sin x - \cos x$$

$$y''' = -\cos x + \sin x$$

$$y^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Câu 5: Với hàm số $y = \frac{1}{x^2 - 1}$, $y^{(3)}(2)$ là:

A. $\frac{80}{27}$.

B. $-\frac{80}{27}$.

C. $\frac{40}{27}$.

D. $-\frac{40}{27}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$$y = \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$\Rightarrow y^{(3)} = -\frac{1}{2} \cdot 3! \left[\frac{1}{(x-1)^4} - \frac{1}{(x+1)^4} \right]$$

$$y^{(3)} = -3 \left[\frac{1}{(x-1)^4} - \frac{1}{(x+1)^4} \right]$$

$$y^{(3)}(2) = \frac{-80}{27}.$$

Câu 6: Cho hàm số $y = \cos^2 2x$ và các đạo hàm y' , y'' , y''' . Giá trị của biểu thức $y''' + 16y' + y'' + 16y - 8$ là kết quả nào sau đây?

A. 0.

B. 8.

C. -8.

D. $\cos 4x$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$$y = \cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$$

$$\Rightarrow y' = -2\sin 4x; y'' = -8\cos 4x; y''' = 32\sin 4x.$$

$$\Rightarrow y''' + 16y' + y'' + 16y - 8 = 32\sin 4x - 32\sin 4x - 8\cos 4x + 8 + 8\cos 4x - 8 = 0.$$

Câu 7: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \sin 2x$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $-\sin 2x$.

B. $-4\sin x$.

C. $-4\sin 2x$.

D. $-2\sin 2x$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$y = \sin 2x \text{ thì } y' = 2\cos 2x. \text{ Do đó } y'' = -4\sin 2x.$$

Câu 8: Xét hàm số $y = f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. Phương trình $f^{(4)}(x) = -8$ có nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là:

A. $x = \frac{\pi}{2}$.

B. $x = 0; x = \frac{\pi}{6}$.

C. $x = 0; x = \frac{\pi}{3}$.

D. $x = 0; x = \frac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Từ giả thiết ta có:

$$16 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -8 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}.$$

Câu 7: Cho hàm số $y = \cos^2 x$.

Tính y'' ?

- A. $y'' = -2 \cos 2x$. B. $y'' = -4 \cos 2x$. C. $y'' = 2 \cos 2x$. D. $y'' = 4 \cos 2x$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $y' = -2 \cos x \sin x = -\sin 2x \Rightarrow y'' = -2 \cos 2x$.

Câu 9: Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$. Tính $M = y^3 \cdot y'' + 1$.

- A. -2. B. 0. C. -1. D. $\frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } y' &= \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} \Rightarrow y'' = \frac{1}{(2x-x^2)} \cdot \left[-1 \cdot \sqrt{2x-x^2} - \frac{(1-x)^2}{\sqrt{2x-x^2}} \right] \\ &= \frac{-1}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}} \Rightarrow y^3 \cdot y'' = -1 \Rightarrow y^3 \cdot y'' + 1 = 0. \end{aligned}$$

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = (x+1)^4$. Tính $f''(2)$.

- A. 27. B. 81. C. 96. D. 108.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có: $f'(x) = 4(x+1)^3 \Rightarrow f''(x) = 12(x+1)^2$. Vậy $f''(2) = 108$.

Câu 11: Cho hàm số $y = \sin^3 x$. Tính $M = y'' + 9y$.

- A. $\sin x$. B. $6 \sin x$. C. $6 \cos x$. D. $-6 \sin x$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $y' = 3 \sin^2 x \cos x \Rightarrow y'' = 6 \sin x \cos^2 x - 3 \sin^3 x$.

Vậy:

$$M = y'' + 9y = 6 \sin x \cos^2 x - 3 \sin^3 x + 9 \sin^3 x = 6 \sin x (\cos^2 x + \sin^2 x) = 6 \sin x.$$

Câu 12: Cho hàm số $y = x \tan x$. Tính $M = x^2 y'' - 2(x^2 + y^2)(1 + y)$.

- A. $\frac{x^2}{\cos^2 x}$. B. 1. C. $x^2 - \tan^2 x$. D. 0.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có: $y' = \tan x + \frac{x}{\cos^2 x} \Rightarrow y'' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x + 2x \sin x + \cos x}{\cos^4 x}$

Lại có $x^2 + y^2 = x^2 + x^2 \tan^2 x = x^2 (1 + \tan^2 x) = \frac{x^2}{\cos^2 x}$

$1 + y = 1 + x \tan x$.

Vậy $2(x^2 + y^2)(1 + y) = \frac{2x^2}{\cos^2 x} (1 + x \tan x) \quad (1)$

$$x^2 y'' = x^2 \left(\frac{\cos^2 x + \cos^2 x + 2x \sin x \cos x}{\cos^4 x} \right) \\ = \frac{2x^2 (\cos^2 x + x \sin x \cos x)}{\cos^4 x} = \frac{2x^2}{\cos^2 x} (1 + x \tan x) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow M = x^2 y'' - 2(x^2 + y^2)(1 + y) = 0$.

Câu 13: Cho hàm số $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$. Giải bất phương trình $y'' < 0$.

A. $x \in (-\infty; 1) \setminus \{0\}$.

B. $x \in (1; +\infty)$.

C. $x \in (-1; 1)$.

D. $x \in (-2; 2)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $y' = 15x^4 - 20x^3 + 3 \Rightarrow y'' = 60x^3 - 60x^2$.

$$y'' < 0 \Leftrightarrow 60x^3 - 60x^2 < 0 \Leftrightarrow 60x^2(x - 1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Câu 14: Cho hàm số $y = \frac{1}{(x+1)^3}$. Giải bất phương trình $y'' < 0$.

A. $x < -1$.

B. $x > -1$.

C. $x \neq 1$.

D. Vô nghiệm.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $y' = \frac{-3}{(x+1)^4} \Rightarrow y'' = \frac{12}{(x+1)^5}$.

Vậy $y'' < 0 \Leftrightarrow \frac{12}{(x+1)^5} < 0 \Leftrightarrow x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x) = \sin x$. Hãy chọn câu **sai**.

A. $y' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

B. $y'' = \sin(x + \pi)$.

C. $y''' = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$.

D. $y^{(4)} = \sin(2\pi - x)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$$y^{(4)} = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin x.$$

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{1-x}$. Đạo hàm cấp 2 của f là:

A. $y'' = 2 + \frac{1}{(1-x)^2}$. B. $y'' = \frac{2}{(1-x)^3}$.

C. $y'' = \frac{-2}{(1-x)^3}$.

D. $y'' = \frac{2}{(1-x)^4}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$$y = 2x - 1 + \frac{1}{1-x} \Rightarrow y' = 2 + \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow y'' = \frac{2(1-x)(-1)}{(1-x)^3} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x) = -\frac{1}{x}$. Xét hai mệnh đề:

(I) $y'' = f''(x) = \frac{2}{x^3}$.

(II) $y''' = f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$.

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ (I).

B. Chỉ (II).

C. Cả hai đều đúng.

D. Cả hai đều sai.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$$y' = \frac{1}{x^2} \Rightarrow y'' = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3} \text{ (do đó (I) sai).}$$

$$\Rightarrow y''' = 2 \cdot \frac{3x^2}{x^6} = \frac{6}{x^4} \text{ (do đó (II) sai).}$$

Câu 18: Cho hàm số: $y = (2-m)x^4 + 2x^3 + 2mx^2 + 2m - 1$.

Tìm m để phương trình $y'' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right) \setminus \{2\}$.

B. $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{2\}$.

C. $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{2\}$.

D. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right) \setminus \{2\}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$$\text{Ta có: } y' = 4(2-m)x^3 + 6x^2 + 4mx \Rightarrow y'' = 12(2-m)x^2 + 12x + 4m.$$

Phương trình $y'' = 0$ có hai nghiệm phân biệt hay phương trình: $3(2-m)x^2 + 3x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-m \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-m \neq 0 \\ 4m^2 - 8m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m < \frac{1}{2} \\ m > \frac{3}{2} \end{cases}$$

Dạng 2: Tìm đạo hàm cấp n của hàm số y=f(x)

1. Phương pháp

- ✓ Tính đạo hàm $f'(x), f''(x), f^{(3)}(x)$.
- ✓ Dự đoán công thức đạo hàm cấp n của hàm số.
- ✓ Chứng minh công thức dự đoán bằng quy nạp toán học.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = \sin x$, dự đoán công thức $y^{(n)}(x)$ bằng:

- A. $y^{(n)} = \sin(x + n\pi)$. B. $y^{(n)} = \cos(x + n\pi)$.
- C. $y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$. D. $y^{(n)} = \cos\left(x - n\frac{\pi}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta chứng minh bằng quy nạp

- Với $n = 1$, ta có $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ đúng.
- Giả sử công thức đúng với $n = k$, tức là $y^{(k)} = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$.
- Ta chứng minh công thức đúng với $n = k + 1$, tức là chứng minh:

$y^{(k+1)} = \sin\left(x + (k+1)\frac{\pi}{2}\right)$. Thật vậy:

$$y^{(k+1)} = [y^{(k)}]' = \left[\sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) \right]' = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (k+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Vậy, ta được

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = \frac{1}{2x+1}$, dự đoán công thức $y^{(n)}(x)$ bằng:

- A. $y^{(n)} = \sin(x + n\pi)$. B. $y^{(n)} = \cos(x + n\pi)$.
- C. $y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$. D. $y^{(n)} = \cos\left(x - n\frac{\pi}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

$$y' = -\frac{2}{(2x+1)^2}; y'' = \frac{2^2 \cdot 2}{(2x+1)^3} \text{ và } y''' = -\frac{2^3 \cdot 2 \cdot 3}{(1+x)^4}.$$

Dự đoán:

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot n!}{(2x+1)^{n+1}}.$$

Ta đi chứng minh dự đoán trên bằng phương pháp quy nạp.

□ Với $n = 1$, ta có:

$$y' = \frac{(-1) \cdot 2 \cdot 1!}{(2x+1)^{1+1}} = -\frac{2}{(2x+1)^2} \text{ đúng.}$$

□ Giả sử công thức đúng với $n = k$, tức là $y^{(k)} = \frac{(-1)^k \cdot 2^k \cdot k!}{(2x+1)^{k+1}}$. (*)

□ Ta đi chứng minh (2) đúng với $n = k + 1$, tức là chứng minh:

$$y^{(k+1)} = \frac{(-1)^{k+1} \cdot 2^{k+1} \cdot (k+1)!}{(2x+1)^{k+2}}.$$

Thật vậy:

$$\begin{aligned} y^{(k+1)} &= [y^{(k)}]' = \left[\frac{(-1)^k \cdot 2^k \cdot k!}{(2x+1)^{k+1}} \right]' = (-1)^k \cdot 2^k \cdot k! \left[\frac{1}{(2x+1)^{k+1}} \right]' \\ &= (-1)^k \cdot 2^k \cdot k! \left[-\frac{2(k+1)}{(2x+1)^{k+2}} \right] = \frac{(-1)^{k+1} \cdot 2^{k+1} \cdot (k+1)!}{(2x+1)^{k+2}}, \text{ đpcm.} \end{aligned}$$

Vậy, ta được: $y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot n!}{(2x+1)^{n+1}}.$

3. Bài tập rèn luyện tốc độ

Câu 19: Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = \frac{2x+1}{x^2-5x+6}$.

A. $y^{(n)} = \frac{(2)^n \cdot 7 \cdot n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(1)^n \cdot 5 \cdot n!}{(x-3)^{n+1}}.$

B. $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 7 \cdot n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(-1)^{n+1} \cdot 5 \cdot n!}{(x-3)^{n+1}}.$

C. $y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot 7 \cdot n!}{(x-2)^n} - \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot n!}{(x-3)^n}.$

D. $y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot 7 \cdot n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot n!}{(x-3)^{n+1}}.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có: $2x+1 = 7(x-2) - 5(x-3)$; $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

Suy ra $y = \frac{7}{x-3} - \frac{5}{x-2}.$

Mà $\left(\frac{1}{x-2} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot 1^n \cdot n!}{(x-2)^{n+1}} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-2)^{n+1}}, \left(\frac{1}{x-2} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-3)^{n+1}}$

Nên $y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot 7 \cdot n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot n!}{(x-3)^{n+1}}.$

Câu 20: Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = \cos 2x$.

A. $y^{(n)} = (-1)^n \cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

B. $y^{(n)} = 2^n \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

C. $y^{(n)} = 2^{n+1} \cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

D. $y^{(n)} = 2^n \cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải:

ĐÁP ÁN D

Ta có $y' = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right), y'' = 2^2 \cos\left(2x + 2\frac{\pi}{2}\right)$,

$y''' = 2^3 \cos\left(2x + 3\frac{\pi}{2}\right)$.

Bằng quy nạp ta chứng minh được $y^{(n)} = 2^n \cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 21: Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = \sqrt{2x+1}$.

A. $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3 \cdot 5 \dots (3n-1)}{\sqrt{(2x+1)^{2n-1}}}$.

B. $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{\sqrt{(2x+1)^{2n-1}}}$.

C. $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{\sqrt{(2x+1)^{2n+1}}}$.

D. $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{\sqrt{(2x+1)^{2n-1}}}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có $y' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}, y'' = -\frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}, y''' = \frac{3}{\sqrt{(2x+1)^5}}$

Bằng quy nạp ta chứng minh được: $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{\sqrt{(2x+1)^{2n-1}}}$.

Câu 22: Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = \frac{2x+1}{x^2-3x+2}$.

A. $y^{(n)} = \frac{5 \cdot (-1)^n \cdot n!}{(x-2)^{n+1}} + \frac{3 \cdot (-1)^n \cdot n!}{(x-1)^{n+1}}$.

$$\text{B. } y^{(n)} = \frac{5 \cdot (-1)^n \cdot n!}{(x+2)^{n+1}} - \frac{3 \cdot (-1)^n \cdot n!}{(x-1)^{n+1}}.$$

$$\text{C. } y^{(n)} = \frac{5 \cdot (-1)^n \cdot n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{3 \cdot (-1)^n \cdot n!}{(x-1)^{n+1}}.$$

$$\text{D. } y^{(n)} = \frac{5 \cdot (-1)^n \cdot n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{3 \cdot (-1)^n \cdot n!}{(x-1)^{n+1}}.$$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$$\text{Ta có: } y = \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x-1}$$

$$\text{Bằng quy nạp ta chứng minh được: } y^{(n)} = \frac{5 \cdot (-1)^n \cdot n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{3 \cdot (-1)^n \cdot n!}{(x-1)^{n+1}}.$$

Câu 23: Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = \frac{x}{x^2 + 5x + 6}$

$$\text{A. } y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot n!}{(x+3)^{n+1}} + \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot n!}{(x+2)^{n+1}}.$$

$$\text{B. } y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot n!}{(x+3)^n} - \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot n!}{(x+2)^n}.$$

$$\text{C. } y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot n!}{(x+3)^{n+1}} - \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot n!}{(x+2)^{n+1}}.$$

$$\text{D. } y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot n!}{(x+3)^{n-1}} - \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot n!}{(x+2)^{n-1}}.$$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$\text{Ta có: } x = 3(x+2) - 2(x+3); \quad x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$$

$$\text{Suy ra } y = \frac{3}{x+3} - \frac{2}{x+2}.$$

$$\text{Mà } \left(\frac{1}{x+2} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot 1^n \cdot n!}{(x+2)^{n+1}} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+2)^{n+1}}, \quad \left(\frac{1}{x+3} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+3)^{n+1}}$$

$$\text{Nên ta có: } y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot n!}{(x+3)^{n+1}} - \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot n!}{(x+2)^{n+1}}.$$

Câu 24: Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = \cos 2x$.

$$\text{A. } y^{(n)} = 2^n \cos \left(2x + n \frac{\pi}{2} \right).$$

$$\text{B. } y^{(n)} = 2^{n-1} \cos \left(2x + n \frac{\pi}{2} \right).$$

$$\text{C. } y^{(n)} = 2^n \cos \left(2x + \frac{\pi}{2} \right).$$

$$D. y^{(n)} = 2^{n+1} \cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có :

$$y' = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right), y'' = 2^2 \cos\left(2x + 2\frac{\pi}{2}\right), y''' = 2^3 \cos\left(2x + 3\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{Bằng quy nạp ta chứng minh được } y^{(n)} = 2^n \cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Dạng 3: Ý nghĩa vật lý của đạo hàm cấp hai

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = t^3 - 3t^2$ (t: tính bằng giây, s: tính bằng mét).

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Vận tốc của chuyển động khi $t = 3s$ là $v = 12m/s$.

B. Vận tốc của chuyển động khi $t = 3s$ là $v = 24m/s$.

C. Gia tốc của chuyển động khi $t = 4s$ là $a = 18m/s^2$.

D. Gia tốc của chuyển động khi $t = 4s$ là $a = 9m/s^2$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$\bullet \quad S = t^3 - 3t^2 \Rightarrow v(t) = S' = 3t^2 - 6t$$

$$\Rightarrow v(3) = 3.3^2 - 18 = 9(m/s).$$

$$\bullet \quad S = t^3 - 3t^2 \Rightarrow a = S'' = 6t - 6$$

$$a_{(t=4s)} = 6.4 - 6 = 18(m/s^2).$$

Ví dụ 2: Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình: $S = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t = 3$ là:

$$A. 24(m/s^2). \quad B. 17(m/s^2). \quad C. 14(m/s^2). \quad D. 12(m/s^2).$$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Gia tốc của chuyển động khi $t = 3$ bằng $S''(3)$.

$$S'(t) = 3t^2 - 6t + 5; S''(t) = 6t - 6 \text{ nên } S''(3) = 18 - 6 = 12(m/s^2).$$

3. bài tập rèn luyện tốc độ

Câu 25: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình:

$$S = t^3 - 3t^2 - 9t + 2 \quad (t: \text{tính bằng giây, } s: \text{tính bằng mét}).$$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Vận tốc của chuyển động bằng 0 khi $t = 0$ hoặc $t = 3$.

B. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 1$ là $a = 12 \text{ m/s}^2$.

C. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3$ là $a = 12 \text{ m/s}^2$.

D. Gia tốc của chuyển động bằng 0 khi $t = 0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

- $S = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$

$$\Rightarrow v(t) = S' = 3t^2 - 6t - 9$$

$$v(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 3 \end{cases}$$

- $S = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$

$$\Rightarrow a = S'' = 6t - 6$$

$$\Rightarrow a_{(t=3s)} = 6 \cdot 3 - 6 = 12 \left(\text{m/s}^2 \right).$$

Câu 26: Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình: $S = t^3 - 2t^2 + 4t + 1$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t = 2$ là:

A. $12 \left(\text{m/s}^2 \right)$. B. $8 \left(\text{m/s}^2 \right)$. C. $7 \left(\text{m/s}^2 \right)$. D. $6 \left(\text{m/s}^2 \right)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Gia tốc của chuyển động khi $t = 2$ bằng $S''(2)$.

$$S'(t) = 3t^2 - 4t + 4; S''(t) = 6t - 4 \text{ nên } S''(2) = 12 - 4 = 8 \left(\text{m/s}^2 \right).$$