SỞ GIÁO DỤC – ĐÀO TẠO LÀO CAI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÀO CAI

# CHUYÊN ĐỀ
# BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI

## MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH – HỆ PHƯƠNG TRÌNH

**Năm học 2020 – 2021**

***Giáo viên: Trần Hoài Vũ***
***Tổ chuyên môn: Toán – Tin***

## I. Phương pháp biến đổi đại số, rút thế

*Sử dụng các phép biến đổi tương đương cơ bản:*

1. *Nâng lên lũy thừa hai vế (Chú ý điều kiện)*
2. *Rút 1 ẩn hoặc một biểu thức từ 1 phương trình trong hệ thế vào phương trình còn lại*
3. *Phân tích 1 phương trình trong hệ hoặc tổ hợp 2 phương trình của hệ về phương trình tích.*

**Bài số 1:** Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2-(x+y)} = \dfrac{y}{\sqrt[3]{x-y}} \\ 2(x^2+y^2)-3\sqrt{2x-1}=11 \end{cases}$

***Giải***

Điều kiện: : $x^2-(x+y)\ge 0$; $x-y\ne 0; x\ge \dfrac{1}{2}$

Hệ phương trình tương $\begin{cases} \sqrt{x^2-(x+y)}.\sqrt[3]{x-y}=y & (1) \\ 2(x^2+y^2)-3\sqrt{2x-1}=11 & (2) \end{cases}$

Từ (1) suy ra $y\ge 0$ (Vì nếu y < 0 thì VT (1) $\ge$ 0 >VP(1): vô lý)

Dễ thấy y = 0 cũng không thỏa mãn

Xét y > 0

Phương trình (1) tương đương:

$$\sqrt{x^2-(x+y)}\ (\sqrt[3]{x-y}-1)+(\sqrt{x^2-(x+y)}-y)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-(x+y)}\left(\frac{x-y-1}{\sqrt[3]{(x-y)^2}+\sqrt[3]{x-y}+1}\right)+\frac{(x+y)(x-y-1)}{\sqrt{x^2-(x+y)}+y}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1)\left(\frac{\sqrt{x^2-(x+y)}}{\sqrt[3]{(x-y)^2}+\sqrt[3]{x-y}+1}+\frac{x+y}{\sqrt{x^2-(x+y)}+y}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x-y-1=0$$

Thế y = x - 1 vào (2) ta được:

$$4x^2-4x+2-3\sqrt{2x-1}=11 \Leftrightarrow (2x-1)^2-3\sqrt{2x-1}-10=0$$

Đặt t = $\sqrt{2x-1}$, ($t\ge 0$ ), ta có phương trình:

$$t^4-3t-10=0 \Leftrightarrow (t-2)(t^3+2t^2+4t+5)=0 \Leftrightarrow t=2$$

Với t = 2 ta giải ra được nghiệm của hệ là (x; y) = $(\frac{5}{2};\frac{3}{2})$

**Bài số 2** : Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y^2 = \dfrac{15\sqrt{x} - 17\sqrt{y}}{4\sqrt{xy}} \\ x^2 + 14xy + y^2 = \dfrac{17\sqrt{x} + 15\sqrt{y}}{x+y} \end{cases}$

***Giải***

Điều kiện: $x > 0, y > 0$. Đặt $\sqrt{x} = a, \sqrt{y} = b\left(a > 0, b > 0\right)$

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} a^4 - b^4 = \dfrac{15a - 17b}{4ab} \\ a^4 + 14a^2b^2 + b^4 = \dfrac{17a + 15b}{a^2 + b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4ab\left(a^2 - b^2\right) = \dfrac{15a - 17b}{a^2 + b^2} & (1) \\ a^4 + 14a^2b^2 + b^4 = \dfrac{17a + 15b}{a^2 + b^2} & (2) \end{cases}$$

Lấy hai vế của $(1)$ nhân với $a$ cộng hai vế của $(2)$ nhân với $b$ ta được:

$$4a^2b\left(a^2 - b^2\right) + a^4b + 14a^2b^3 + b^5 = 15 \quad (3)$$

Lấy hai vế của $(1)$ nhân với $-b$ cộng hai vế của $(2)$ nhân với $a$ ta được

$$-4ab^2\left(a^2 - b^2\right) + a^5 + 14a^3b^2 + ab^4 = 17 \quad (4)$$

Lấy $(4)$ cộng $(3)$ theo vế ta được : $(a+b)^5 = 32$

Lấy $(4)$ trừ $(3)$ theo vế ta được : $(a-b)^5 = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a+b)^5 = 32 \\ (a-b)^5 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ a - b = \sqrt[5]{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2 + \sqrt[5]{2}}{2} \\ b = \dfrac{2 - \sqrt[5]{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \dfrac{2 + \sqrt[5]{2}}{2} \\ \sqrt{y} = \dfrac{2 - \sqrt[5]{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \left(\dfrac{2 + \sqrt[5]{2}}{2}\right)^2 \\ y = \left(\dfrac{2 - \sqrt[5]{2}}{2}\right)^2 \end{cases}$$

Vậy hpt có một nghiệm duy nhất: $(x,y)=\left(\left(\frac{2+\sqrt[5]{2}}{2}\right)^2;\left(\frac{2-\sqrt[5]{2}}{2}\right)^2\right)$

**Bài số 3**: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2-y^2=1 \ (1) \\ 10x^2-6xy+3x-2y-6=0 \ (2) \end{cases}$

***Giải***

Từ (1) : $x^2=\frac{y^2+1}{2};|x| \ \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\,(*)$

$(2)\Leftrightarrow 2x^2+8x^2-6xy+3x-2y-6=0\Leftrightarrow 2x^2+8.\frac{y^2+1}{2}-6xy+3x-2y-6=0$

$\Leftrightarrow 2x^2+3x(1-2y)+4y^2-2y-2=0$

Coi vế trái là phương trình bậc hai đối với x, có

$\Delta=9(1-2y)^2-8(4y^2-2y-2)=(2y-5)^2$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{3(2y-1)+2y-5}{4}=2y-2 \\ x=\frac{3(2y-1)-2y+5}{4}=\frac{2y+1}{2} \end{array}\right.$$

+) Với x = 2y – 2 thay vào (1) ta được :

$2(4y^2-8y+4)-y^2=1$

$$\Leftrightarrow 7y^2-16y+7=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{8+\sqrt{15}}{7}\Rightarrow x=\frac{2+2\sqrt{15}}{7}(tm(*)) \\ y=\frac{8-\sqrt{15}}{7}\Rightarrow x=\frac{2-2\sqrt{15}}{7}(tm(*)) \end{array}\right.$$

+) Với $x=\frac{2y+1}{2}$ thay vào (1) ta được :

$\frac{(2y+1)^2}{2}-y^2=1\Leftrightarrow 4y^2+4y+1-2y^2-2=0$

$$\Leftrightarrow 2y^2+4y-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{-2+\sqrt{6}}{2}\Rightarrow x=\frac{-1+\sqrt{6}}{2}(tm(*)) \\ y=\frac{-2-\sqrt{6}}{2}\Rightarrow x=\frac{-1-\sqrt{6}}{2}(tm(*)) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm

$$(x;y)\in\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{2+2\sqrt{15}}{7};\frac{8+\sqrt{15}}{7}\right);\left(\frac{2-2\sqrt{15}}{7};\frac{8-\sqrt{15}}{7}\right);\\&\left(\frac{-1+\sqrt{6}}{2};\frac{-2+\sqrt{6}}{2}\right);\left(\frac{-1-\sqrt{6}}{2};\frac{-2-\sqrt{6}}{2}\right)\end{aligned}\right\}$$

**Bài số 4:** Giải hệ phương trình $\begin{cases}4x^3-y^3+x-y=3xy\left(2x-y\right) & (1)\\ \sqrt{3-y}+\sqrt{2+x}=x^2y+xy-4x-1 & (2)\end{cases}$

***Giải***

Điều kiện $\begin{cases}x\geq -2\\ y\leq 3\end{cases}$

$(1)\Leftrightarrow\left(2x-y\right)^3+\left(2x-y\right)=y^3+y$

$\Leftrightarrow\left(2x-y-y\right)\left(\left(2x-y\right)^2+y\left(2x-y\right)+y^2+1\right)\Leftrightarrow x=y.$

Thay *y*=*x* vào phương trình (2) ta được:

$\sqrt{3-x}+\sqrt{2+x}=x^3+x^2-4x-1\Leftrightarrow\left(\sqrt{3-x}-\frac{-x+5}{3}\right)+\left(\sqrt{2+x}-\frac{x+4}{3}\right)=$

$x^3+x^2-4x-1-\frac{-x+5}{3}-\frac{x+4}{3}(*)$

Với $-2\leq x\leq 3$, ta có $\begin{cases}\sqrt{3-x}+\dfrac{-x+5}{3}>0\\ \sqrt{2+x}+\dfrac{x+4}{3}>0\end{cases}$

$$(*)\Leftrightarrow\frac{1}{9}\left(\frac{-x^2+x+2}{\sqrt{3-x}+\frac{-x+5}{3}}+\frac{-x^2+x+2}{\sqrt{2+x}+\frac{x+4}{3}}\right)=-\left(-x^2+x+2\right)\left(x+2\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(-x^2+x+2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3-x}+\frac{-x+5}{3}}+\frac{1}{\sqrt{2+x}+\frac{x+4}{3}}+9\left(x+2\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -x^2+x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}x&=-1\\x&=2\end{aligned}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm (*x:y*) là (-1;-1) và (2;2)

**Bài số 5:** Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 - 2xy - y^2 = 2 \\ 2x^3 - 3x^2 - 3xy^2 - y^3 + 1 = 0 \end{cases}$

***Giải***

Phương trình (2) của hệ viết lại như sau

$$3x^3 + 3x^2y - 3x^2 + 1 - \ x + y \ ^3 = 0 \Leftrightarrow \ x + y \ ^3 - 3x^2 \ x + y \ = 1 - 3x^2 \ \ 3$$

Ta thấy $x = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình. Chia 2 vế của (3) cho $x^3$ ta có

phương trình $\left(\frac{y}{x} + 1\right)^3 - 3\left(\frac{y}{x} + 1\right) = \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{y}{x} + 1 - \frac{1}{x}\right)\left[\left(\frac{y}{x} + 1\right)^2 + \left(\frac{y}{x} + 1\right).\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 3\right] = 0$$

PT (1) của hệ được viết lại như sau

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2 = 3x^2 \Leftrightarrow \ x + y \ ^2 + 2 = 3x^2 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x} + 1\right)^2 + \frac{2}{x^2} = 3 \ \ 4$$

TH1: $\left(\frac{y}{x} + 1 - \frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{x} + 1 = \frac{1}{x}$ thay vào (4) ta có

$$\frac{3}{x^2} = 3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 2 \end{array}\right.$$

TH2: $\left(\frac{y}{x} + 1\right)^2 + \left(\frac{y}{x} + 1\right).\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 3 = 0$ kết hợp với (4) ta có

$$\left(\frac{y}{x} + 1\right).\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{x} + 1 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow y = 1 - x$$

Thay vào (4) ta cũng được hai nghiệm trùng với hai nghiệm ở trên

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\ x; y \ = \ 1; 0 \ ; \ -1; 2$

**Bài số 6:** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y\sqrt{x^2 + y^2} - y^2 = 0 \\ \sqrt{4y - 5} + 6\sqrt{x^2 + y^2} = 2y^2 + 4 \end{cases}$

***Giải***

ĐK: $y \ge \dfrac{5}{4}$

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - y\sqrt{x^2 + y^2} + 2y\sqrt{x^2 + y^2} - 2y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 + y^2} - y\right)\left(\sqrt{x^2 + y^2} + 2y\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = y$$

(do $\sqrt{x^2 + y^2} + 2y > 0$)

Với $\sqrt{x^2 + y^2} = y \Rightarrow x = 0$. Thay vào (2) ta được:

$$\sqrt{4y-5} = 2y^2 - 6y + 4 \ (*) \Leftrightarrow 2\sqrt{4y-5} = 4y^2 - 12y + 8$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{4y-5} + 1\right)^2 = (2y-2)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{4y-5} = 2y - 3 (3) \\ \sqrt{4y-5} = 1 - 2y (4) \end{array}\right.$$

Giải (3): $\begin{cases} y \ge \dfrac{3}{2} \\ 2y^2 - 8y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \dfrac{4 + \sqrt{2}}{2}$

Giải (4): $\begin{cases} y \le \dfrac{1}{2} \\ 2y^2 - 4y + 3 = 0 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Vậy hệ phương trình có nghiệm: $(x; y) = \left(0; \dfrac{4 + \sqrt{2}}{2}\right)$

**Bài số 7:** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + \dfrac{8xy}{x+y} = 16 \\ \dfrac{x^2}{8y} + \dfrac{2x}{3} = \sqrt{\dfrac{x^3}{3y} + \dfrac{x^2}{4}} - \dfrac{y}{2} \end{cases}$

***Giải***

ĐKXĐ: $\begin{cases} x + y \ge 0 \\ \dfrac{x^3}{3y} + \dfrac{x^2}{4} \ge 0 \end{cases}$

Từ phương trình thứ hai của hệ ta suy ra: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{8y} + \dfrac{2x}{3} + \dfrac{y}{2} \ge 0 \\ \dfrac{x}{3y} + \dfrac{1}{4} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x + \dfrac{3}{4}y \ge 0 \end{cases}$.

Ta có $x^2 + y^2 + \dfrac{8xy}{x+y} = 16 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 16 - 2xy + \dfrac{8xy}{x+y} = 0$

$\Leftrightarrow \left(x+y-4\right)\left[(x+y)^2 + 4(x+y) - 2xy\right] = 0$

$\Leftrightarrow \left(x+y-4\right)\left[x^2 + y^2 + 4(x+y)\right] = 0$ (*)

Do $x + y > x + \dfrac{3}{4}y \ge 0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow x + y = 4$

Mặt khác, do $\dfrac{2x}{3} + \dfrac{y}{2} = \dfrac{2}{3}\left(x + \dfrac{3}{4}y\right) > 0$ nên áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta

có: $\dfrac{x^2}{8y} + \left(\dfrac{2x}{3} + \dfrac{y}{2}\right) \ge 2\sqrt{\dfrac{x^2}{8y}\left(\dfrac{2x}{3} + \dfrac{y}{2}\right)} = \sqrt{\dfrac{x^3}{3y} + \dfrac{x^2}{4}}$

Suy ra phương trình thứ hai của hệ $\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{8y} = \dfrac{2x}{3} + \dfrac{y}{2}$

Do đó hệ đã cho

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ \dfrac{x^2}{8y} = \dfrac{2x}{3} + \dfrac{y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ 3x^2 - 16xy - 12y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ x = 6y, x = -\dfrac{2}{3}y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{24}{7} \\ y = \dfrac{4}{7} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -8 \\ y = 12 \end{cases}$ là nghiệm của hệ.

**Bài số 8:** Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-1)\left(y^2+6\right) = y\left(x^2+1\right) \\ (y-1)\left(x^2+6\right) = x\left(y^2+1\right) \end{cases}$

***Giải***

Cộng vế với vế của hai phương trình trong hệ và sau khi rút gọn ta thu được:

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{2}(1)$$

Trừ vế với vế của phương trình thứ hai cho phương trình thứ nhất và sau khi phân tích ta được: $(x-y)(x+y-2xy+7)=0$

Nếu x – y = 0, thay x = y vào một trong hai phương trình trong hệ ta giải được: x = y = 2 và x = y= 3.

Nếu $x+y-2xy+7=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{4}$ (2). Đặt $a=x-\frac{5}{2}, b=y-\frac{5}{2}$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a^2+b^2=\frac{1}{2} \\ (a+2)(b+2)=\frac{15}{4} \Rightarrow 2ab+4a+4b=-\frac{1}{2} \end{cases}$

Trừ vế với vế của hai phương trình trong hệ ta có: $(a-b)^2-4(a+b)=1(3)$

Cộng vế với vế của hai phương trình trong hệ ta có:

$$(a+b)^2+4(a+b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ a+b=-4 \end{array}\right.$$

Dễ thấy nếu a + b = - 4 thì mâu thuẫn với (3) do đó a + b = 0, thay a + b = 0 vào (3) ta có a – b = ±1. Giải hệ: $\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=\pm 1 \end{cases}$. Tìm được (a;b) = $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

**Bài số 9:** Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5x\left(1+\frac{1}{x^2+y^2}\right)=12 \\ 5y\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right)=4 \end{cases}$

***Giải***

Nếu ( x;y) là nghiệm của hệ thì x.y $\neq 0$.

Do đó: Hệ (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} 1+\frac{1}{x^2+y^2}=\frac{12}{5x} \\ 1-\frac{1}{x^2+y^2}=\frac{4}{5y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2}=\frac{6}{5x}-\frac{2}{5y} \\ 1=\frac{6}{5x}-\frac{2}{5y} \end{cases}$ (II)

Nhân vế với vế của 2 PT của hệ (II) ta được PT:

$$\frac{1}{x^2+y^2}=\frac{36}{25x^2}-\frac{4}{25y^2}\Leftrightarrow 36y^4+7x^2y^2-4x^4=0$$

$$\Leftrightarrow x^2=4y^2\Leftrightarrow x=2y;x=-2y$$

Thế x = 2y vào phương trình thứ hai của hệ (II) ta được y = 1; từ đó x = 2

Thử lại ta được tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là: $(2;1);\left(-\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)$

Thế x = -2y vào phương trình thứ hai của hệ (II) ta được $y=-\frac{1}{5}$; từ đó $x=\frac{2}{5}$

**Bài số 10:** Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(1+\frac{1}{x+y}\right)\sqrt{3x}=2\\ \left(1-\frac{1}{x+y}\right)\sqrt{7y}=4\sqrt{2}\end{cases}$

***Giải***

Điều kiện $x\ge 0;y\ge 0;x+y\ne 0$.

Nhận xét: Nếu $(x;y)$ là nghiệm của hệ phương trình thì $x>0;y>0$. Do đó ta viết lại hệ phương trình như sau: $\begin{cases}1+\frac{1}{x+y}=\frac{2}{\sqrt{3x}}\\ 1-\frac{1}{x+y}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7y}}\end{cases}$

Thực hiện phép trừ rồi cộng hai vế của hai phương trình trong hệ ta được

$$\begin{cases}\frac{1}{x+y}=\frac{1}{\sqrt{3x}}-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} & (1)\\ 1=\frac{1}{\sqrt{3x}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} & (2)\end{cases}$$

Nhân hai vế của hai phương trình (1) và (2) ta được

$$\frac{1}{x+y}=\frac{1}{3x}-\frac{8}{7y}\Leftrightarrow (y-6x)(7y+4x)=0\Leftrightarrow y=6x\ (\text{vì } x>0;y>0)$$

Thay vào ta giải được nghiệm của hệ là $\left(\frac{11+4\sqrt{7}}{21};\frac{22+8\sqrt{7}}{7}\right)$

## II. Phương pháp đạt ẩn số phụ

1. *Đặt ẩn phụ đưa phương trình đã cho về phương trình đại số không còn chứa căn thức với ẩn mới là ẩn phụ.*
2. *Đặt ẩn phụ mà vẫn còn ẩn chính, ta có thể tính ẩn này theo ẩn kia.*
3. *Đặt ẩn phụ để đưa phương trình về hệ hai phương trình với hai ẩn là hai ẩn phụ, cũng có thể hai ẩn gồm một ẩn chính và một ẩn phụ, thường khi đó ta được một hệ đối xứng.*
4. *Đặt ẩn phụ để được phương trình có hai ẩn phụ, ta biến đổi về phương trình tích với vế phải bằng 0.*
5. *Thường giải phương trình ta hay biến đổi tương đương, nếu biến đổi hệ quả thì nhớ phải thử lại nghiệm.*

**Bài số 11:** Giải phương trình $\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}=4-\left(x+\frac{1}{x}\right)$

***Giải***

Ta thấy $x<0$ không thỏa mãn.

Khi đó phương trình tương đương với hệ $\begin{cases} x>0 \\ 4-\left(x+\frac{1}{x}\right)>0 \\ \left(\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}\right)^2=\left(4-\left(x+\frac{1}{1}\right)\right)^2 \end{cases}$

Đặt $x+\frac{1}{x}=y$, ta được $\begin{cases} 2\le y<4(1) \\ 4-(y^2-2)+2\sqrt{5-2(y^2-2)}=(4-y)^2(2) \end{cases}$.

Xét $(2)\Leftrightarrow\sqrt{9-2y^2}=y^2-4y+5 \Leftrightarrow y^4-8y^3+28y^2-40y+16=0$

$$\Leftrightarrow (y-2)(y^3-6y^2+16y-8)=0$$
$$\Leftrightarrow (y-2)((y-2)(y^2-4y+8)+8)=0$$

Dẫn đến $y=2$ (do $((y-2)(y^2-4y+8)+8)>0$ với mọi $y$ thỏa mãn (1)).

Từ đó phương trình có nghiệm là $x=1$.

**Bài số 12:** Giải phương trình $2x^2+\sqrt{1-x}+2x\sqrt{1-x^2}=1$

***Giải***

Ta có phương trình tương đương với

$$\sqrt{1-x}=1-2x^2-2x\sqrt{1-x^2}\Rightarrow 1-x=1+4x^4+4x^2(1-x^2)-4x^2-4x\sqrt{1-x^2}+8x^3\sqrt{1-x^2}$$

$$\Leftrightarrow x(1-4\sqrt{1-x^2}+8x^2\sqrt{1-x^2})=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 1-4\sqrt{1-x^2}+8x^2\sqrt{1-x^2}=0(1) \end{array}\right.$$

Xét (1), đặt $y=\sqrt{1-x^2}$, suy ra $y\ge 0$ và $x^2=1-y^2$.

Ta được $1-4y+8y(1-y^2)=0\Leftrightarrow 8y^3-4y-1=0$

$$\Leftrightarrow (2y+1)(4y^2-2y-1)=0$$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$. Từ đó suy ra $x=\pm\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

Thử lại ta được nghiệm của phương trình là $x=0$ và $x=-\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

**Bài số 13:** Giải phương trình $x=\sqrt{3-x}.\sqrt{4-x}+\sqrt{4-x}.\sqrt{5-x}+\sqrt{5-x}.\sqrt{3-x}$

***Giải***

Điều kiện: $x\le 3$

Đặt $\sqrt{3-x}=a;\sqrt{4-x}=b;\sqrt{5-x}=c$ với a, b, c là số thực không âm.

Ta có $x=3-a^2=4-b^2=5-c^2=a.b+b.c+c.a$

Do đó $\begin{cases} 3-a^2=ab+bc+ca \\ 4-b^2=ab+bc+ca \\ 5-c^2=ab+bc+ca \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)(c+a)=3 \\ (b+c)(a+b)=4 \\ (c+a)(b+c)=5 \end{cases}$

Nhân từng vế ba phương trình ta được $(a+b)(b+c)(c+a)=2\sqrt{15}$

Suy ra $\begin{cases} a+b=\dfrac{2\sqrt{15}}{5} \\ b+c=\dfrac{2\sqrt{15}}{3} \\ c+a=\dfrac{2\sqrt{15}}{4} \end{cases}\Rightarrow a+b+c=\dfrac{\sqrt{15}}{5}+\dfrac{\sqrt{15}}{4}+\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

Suy ra $x=\frac{671}{240}$. Thử lại $x=\frac{671}{240}$ thỏa mãn phương trình.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x=\frac{671}{240}$.

**Bài số 14:** Giải phương trình $x^5+x+1=0$

***Giải***

***Nhận xét***: Hàm số $y=x^5+x+1$ luôn đồng biến nên nếu phương trình đã cho có nghiệm thì đó là nghiệm duy nhất.

Ta có: $x^5+x+1=0 \Leftrightarrow \left(x^2+x+1\right)\left(x^3-x^2+1\right)=0 \Leftrightarrow x^3-x^2+1=0\,(1)$

(vì $x^2+x+1>0, \forall x \in R$)

Đặt $x=t+\frac{1}{3}$ thì (2) thành: $t^3-\frac{1}{3}t+\frac{25}{27}=0 \quad (3)$

Ta tìm một nghiệm của (3) có dạng t = u+v.

Ta có : $(3) \Leftrightarrow u^3+v^3+3uv(u+v)-\frac{1}{3}(u+v)+\frac{25}{27}=0 \Leftrightarrow u^3+v^3+(u+v)\left(3uv-\frac{1}{3}\right)+\frac{25}{27}=0$

Ta tìm u, v thỏa mãn: $\begin{cases} u^3+v^3=-\frac{25}{27} \\ uv=\frac{1}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=\frac{-1}{3}\sqrt[3]{\frac{25+\sqrt{621}}{2}} \\ v=\frac{-1}{3}\sqrt[3]{\frac{25-\sqrt{621}}{2}} \end{cases}$

Vậy phương trình (1) có một nghiệm là $x=\frac{1}{3}\left(1-\sqrt[3]{\frac{25+\sqrt{621}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{25-\sqrt{621}}{2}}\right)$

Theo nhận xét trên, phương trình (1) có nghiệm duy nhất là:

$$x=\frac{1}{3}\left(1-\sqrt[3]{\frac{25+\sqrt{621}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{25-\sqrt{621}}{2}}\right)$$

**Bài số 15:** Giải phương trình

$$\left(6x-3\right)\sqrt{7-3x}+\left(15-6x\right)\sqrt{3x-2}=2\sqrt{-9x^2+27x-14}+11$$

***Giải***

Điều kiện: $\frac{2}{3} \le x \le \frac{7}{3}$.

Đặt $a=\sqrt{7-3x},\ b=\sqrt{3x-2}$ $(a,b\geq 0)$. Suy ra $\begin{cases} a^2+b^2=5 \\ \left(2b^2+1\right).a+\left(2a^2+1\right)b=2ab+11 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s^2-2p=5 \\ 2sp+s=2p+11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2p=s^2-5 \\ s\left(s^2-5\right)+s=s^2-5+11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2p=s^2-5 \\ s^3-s^2-4s-6=0 \end{cases}$$

$\left(s=a+b,\ p=ab\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2p=s^2-5 \\ \left(s-3\right)\left(s^2+2s+2\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=2 \\ s=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Thử lại thỏa mãn. Vậy nghiệm phương trình là $x=1$ hoặc $x=2$.

**Bài số 16:** Giải phương trình $x^3-5x^2+4x-5=(1-2x)\sqrt[3]{6x^2-2x+7}$

***Giải***

Tập xác định : $\mathbb{R}$. Ta có

(1) $\Leftrightarrow (x+1)^3-8x^2+x-6=(1-2x)\sqrt[3]{(1-2x)(x+1)+8x^2-x+6}$ (2)

Đặt u= x+1, v= $\sqrt[3]{(1-2x)(x+1)+8x^2-x+6}$ Kết hợp với (2) ta có:

$$\begin{cases} u^3-(8x^2-x+6)=(1-2x)\,v \\ v^3-(8x^2-x+6)=(1-2x)\,u \end{cases}$$

Lấy hai phương trình trừ cho nhau ta được:

$$u^3-v^3+(1-2x)(u-v)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u^2+uv+v^2+1-2x=0 \end{array}\right.$$

- Với u=v, ta được: $\sqrt[3]{6x^2-2x+7}=x+1 \Leftrightarrow x^3-3x^2+5x-6=0 \Leftrightarrow x=2$
- Ta có: $$u^2+uv+v^2+1-2x=(v+\frac{u}{2})^2+\frac{3u^2+4-8x}{4}\geq \frac{3(x+1)^2-8x+4}{4}$$ $$=\frac{3x^2-2x+7}{4}>0$$

Vậy $u^2+uv+v^2+1-2x=0$ không xảy ra.

Phương trình có nghiệm duy nhất x = 2

**Bài số 17:** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 5x^2 + 4x - 5 = (1-2x)\sqrt[3]{5x^2 + y + 3} & (1) \\ x^3 - 3x^2 + 6x - 4 = \sqrt{y^3 - 3y^2} & (2) \end{cases}$

***Giải***

ĐK : $\begin{cases} 5x^2 + y + 3 \geq 0 \\ y^3 - 3y^2 \geq 0 \end{cases}$

Xét phương trình (2) : $x^3 - 3x^2 + 6x - 4 = \sqrt{y^3 - 3y^2} \quad (y \geq 3)$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3 + 3(x-1) = (\sqrt{y-3})^3 + 3\sqrt{y-3}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3 - (\sqrt{y-3})^3 + 3(x-1) - 3\sqrt{y-3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[(x-1) - \sqrt{y-3}\right]\left[(x-1)^2 + (x-1)\sqrt{y-3} + (y-3) + 3\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{y-3} \text{ do } (x-1)^2 + (x-1)\sqrt{y-3} + (y-3) + 3 > 0$$

Với $x - 1 = \sqrt{y-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ (x-1)^2 = y - 3 \end{cases}$

Thay vào phương trình (1) ta được phương trình

$$x^3 - 5x^2 + 4x - 5 = (1-2x)\sqrt[3]{6x^2 - 2x + 7}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 - (8x^2 - x + 6) = (1-2x)\sqrt[3]{(1-2x)(x+1) + 8x^2 - x + 6} \quad (3)$$

Đặt $\begin{cases} u = x + 1 \\ v = \sqrt[3]{(1-2x)(x+1) + (8x^2 - x + 6)} \end{cases}$ kết hợp với phương trình (3) ta được

Hệ phương trình $\begin{cases} u^3 - (8x^2 - x + 6) = (1-2x)v \\ v^3 - (8x^2 - x + 6) = (1-2x)u \end{cases}$

Lấy hai vế phương trình trừ nhau ta được

$$u^3 - v^3 + (1-2x)(u-v) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 1 - 2x = 0 \end{array}\right.$$

TH1: Nếu $u = v$ thì $x + 1 = \sqrt[3]{(1-2x)(x+1) + (8x^2 - x + 6)}$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

TH2: Nếu $u^2 + uv + v^2 + 1 - 2x = 0$ (4)

Nhân xét :

$$u^2+uv+v^2+1-2x=(v+\frac{u}{2})^2+\frac{3}{4}u^2+1-2x\geq\frac{3(x+1)^2-8x+4}{4}>0$$

Suy ra phương trình (4) vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=(2;4)$

**Bài số 18:** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^2x+3x^2+y^2+3x-2y+1=0 \\ 2y^3+xy^2+y^2-3x-3=0 \end{cases}$

***Giải***

Hệ phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} (x+1)^3+(x+1)y^2=2y \\ (x+1)y^2+2y^3=3(x+1) \end{cases}$

Đặt $u=x+1$, ta có hệ phương trình $\begin{cases} u^3+uy^2=2y & (1) \\ uy^2+2y^3=2u \end{cases}$ $(*)$

Dễ thấy $u=y=0$ là một nghiệm của hệ $(*)$ .

Xét $u\neq 0$, đặt $y=tu, t\neq 0$, ta có hệ phương trình $\begin{cases} u^3+t^2u^3=2tu \\ tu^3+2t^3u^3=3u \end{cases}$

Chia vế theo vế của hai phương trình trong hệ trên ta được

$$\frac{1+t^2}{t\left(1+2t^2\right)}=\frac{2t}{3}\Leftrightarrow 4t^4-t^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t^2=-\frac{3}{4}\ (loai) \\ t^2=1\Leftrightarrow t=\pm 1 \end{array}\right.$$

Với $t=1$, ta có $y=u$, thế vào $(1)$ ta được

$$2y^3=2y\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=1\Rightarrow u=1\Rightarrow x=0 \\ y=-1\Rightarrow u=-1\Rightarrow x=-2 \end{array}\right.$$

Với $t=-1$, ta có $y=-u$, thế vào $(1)$ ta được

$$-2y^3=2y\text{ (phương trình vô nghiệm)}$$

Vậy, hệ đã cho có nghiệm là: $(0;0),(-2;-1),(0;-1)$

**Bài số 19:** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (12x+8y)(25-24xy)=16\left(9x^2+17y^2\right)+105 \\ 36x^2+16y^2+12x-8y=7. \end{cases}$$

***Giải***

Đặt $x=\dfrac{3a-1}{6}, y=\dfrac{3b+1}{2}$

Viết lại hệ đã cho thành $\begin{cases}-6b^3+9b^2=6a^3+14a-20 & (1)\\ a^2+b^2=1 & (2)\end{cases}$

Ta có phương trình $(1)\Leftrightarrow 3b^2(3-2b)=(a-1)(6a^2+6a+20)$

thay $b^2=1-a^2$ từ pt(2) ta thu được

$3(1-a^2)(3-2b)=(a-1)(6a^2+6a+20)$

$\Leftrightarrow (a-1)(6a^2+6a+20+9-6b+9a-6ab)=0$

- Với $a=1\Rightarrow b=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{6}, y=\dfrac{1}{4}$

- Với $6a^2+6a+20+9-6b+9a-6ab=0$ ta có

$VT\geq 6a^2+29-15-6-3=6a^2+5>0$. Vậy pt này vô nghiệm.

KL: Hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{4}\right)$

**Bài số 20:** Giải hệ phương trình $\begin{cases}y^2\sqrt{4x-1}+\sqrt{3}=5y^2-\sqrt{12x-3}\\ 2y^4(10x^2-17x+3)=3-15x\end{cases}$

***Giải***

Điều kiện $x\geq\dfrac{1}{4}$.

Biến đổi phương trình thứ hai có:

$$2y^4(5x-1)(2x-3)=3(1-5x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{5}\text{(loai)}\\ 4xy^4+3=6y^4\end{array}\right.$$

Ta đưa về hệ phương trình: $\begin{cases}y^2\sqrt{4x-1}+\sqrt{3}\sqrt{4x-1}=5y^2-\sqrt{3}\\ 4xy^4+3=6y^4\end{cases}$

Nhận thấy y = 0 không là nghiệm của hệ phương trình nên hai vế của phương trình thứ nhất cho $y^2$ và phương trình thứ hai cho $y^4$ có:

$$\begin{cases} \sqrt{4x-1}+\dfrac{\sqrt{3}}{y^2}\sqrt{4x-1}=5-\dfrac{\sqrt{3}}{y^2} \\ 4x-1+\dfrac{3}{y^4}=5 \end{cases}$$

Đặt $a=\sqrt{4x-1}; b=\dfrac{\sqrt{3}}{y^2}$ với $a\ge 0, b>0$

Ta có hệ pt $\begin{cases} a+ab+b=5 \\ a^2+b^2=5 \end{cases}$ ta được $\Rightarrow a=\dfrac{5-b}{1+b}$ thay vào (2)

$$(\frac{5-b}{1+b})^2+b^2=5 \Leftrightarrow b^4+2b^3-3b^2-20b-20=0$$

$$\Leftrightarrow (b-1)(b^3+3b^2-20)=0$$

$$\Leftrightarrow (b-1)(b-2)(b^2+5b+10)=0$$

Nên $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{4} \\ y=\pm\sqrt[4]{3} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\pm\dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Kết luận $(x;y)=\left(\dfrac{5}{4};\pm\sqrt{3}\right); \left(\dfrac{1}{2};\pm\dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}\right)$.

## III. Phương pháp hàm số

1. *Trên miền xác định* $D$ *của hàm số* $f(x)$, *nếu* $f'(x)\ge 0$ *(hoặc* $f'(x)<0$*) thì hàm số* $f(x)$ *đơn điệu và phương trình* $f(x)=0$ *có không quá một nghiệm.*
2. *Nếu hàm số* $f(x)$ *liên tục trên* $[a,b]$ *và* $f(a).f(b)<0$ *thì phương trình* $f(x)=0$ *có ít nhất một nghiệm trên* $(a,b)$.
3. *Giả sử* $f(x)$ *có đạo hàm đến cấp* $n$ *trên khoảng* $(a, b)$*. Khi đó, nếu phương trình* $f^{(n)}(x)=0$ *có* $k$ *nghiệm thì phương trình* $f^{(n-1)}(x)=0$ *chỉ có tối đa* $k+1$ *nghiệm. (hệ quả của định lí Rolle).*
4. *Nếu hàm số* $y=f(x)$ *liên tục trên đoạn* $[a, b]$ *và có đạo hàm trên khoảng* $(a, b)$ *thì tồn tại* $c\in(a, b)$ *sao cho* $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

**Bài số 21**:Giải hệ phương trình $\begin{cases} (7-2x)\sqrt{3-x}+(2y-11)\sqrt{5-y}=0 \\ (y-2)^2+\sqrt[3]{y(x^3+8)}=4x \end{cases}$

***Giải***

Điều kiện $x\le 3; y\le 5$.Phương trình ban đầu biến đổi thành

$$[2(3-x)+1]\sqrt{3-x}=[2(5-y)+1]\sqrt{5-y} \quad (*)$$

Đặt $f(t)=(2t+1)\sqrt{t}$ với $t\ge 0$ thì $(*): f(3-x)=f(5-y) \quad (1)$

Nhận xét. Với mỗi số không âm $0\le t_1\ne t_2$ thì

$$\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{2(t_2+\sqrt{t_2t_1}+t_1)+1}{\sqrt{t_2}+\sqrt{t_1}}>0$$

Vậy $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $[0;+\infty)$. Do đó

$(1): 3-x=5-y \Leftrightarrow y=x+2$

Thay vào phương trình còn lại được

$x^2+\sqrt[3]{(x+2)^2(x^2-2x+4)}=4x$

$\Leftrightarrow (x^2-2x+4)-2(x+2)+\sqrt[3]{(x+2)^2(x^2-2x+4)}=0$

Đặt $t=\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x^2-2x+4}}$ phương trình trên thành

$$2t^3-t^2-1=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow x+2=x^2-2x+4 \Rightarrow x\in\{1;2\}$$

Vậy hệ có nghiệm $(1;3);(2;4)$.

**Bài số 22**:Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+y)^4+3=4(x+y) \\ \dfrac{x^4-y^4}{64}+\dfrac{9(x^2-y^2)}{32}+\dfrac{7(x-y)}{8}+3\ln\left(\dfrac{x-3}{y-3}\right)=0 \end{cases}$

***Giải***

Theo bđt Cauchy ta có $(x+y)^4+1+1+1\ge 4\sqrt[4]{(x+y)^4.1.1.1}=4|x+y|\ge 4(x+y)$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x+y=1(*)$.

Từ đó kết hợp với đk $\dfrac{x-3}{y-3}>0 \Rightarrow -2<x,y<3$.

Pt thứ hai của hệ $\Leftrightarrow \frac{x^4}{64}+\frac{9x^2}{32}+\frac{7x}{8}+3\ln(3-x)=\frac{y^4}{64}+\frac{9y^2}{32}+\frac{7y}{8}+3\ln(3-y)$.

Xét hàm số f(x) = $\frac{x^4}{64}+\frac{9x^2}{32}+\frac{7x}{8}+3\ln(3-x)$ ( với x < 3 )

$$f'(x)=\frac{x^3}{16}+\frac{9x}{16}+\frac{7}{8}+\frac{3}{x-3}=\frac{(x^3+9x+14)(x-3)+48}{16(x-3)}$$

$$=\frac{x^4-3x^3+9x^2-13x+6}{16(x-3)}=\frac{(x-1)^2(x^2-x+6)}{16(x-3)}\le 0 \quad \text{( vì x < 3).}$$

Suy hàm số nghịch biến trên (-2; 3), vậy f(x) = f(y) $\Leftrightarrow x=y$ ( **).

Từ (*), (**) có x = y = $\frac{1}{2}$.

**Bài số 23**:Giải phương trình

$$(6^x-3^x)(19^x-5^x)(10^x-7^x)+(15^x-8^x)(9^x-4^x)(5^x-2^x)=231^x$$

***Giải***

Nhận xét1: Với $a>b>c>1$ thì $\begin{cases} a^x \ge b^x & \text{nếu } x\ge 0 \\ a^x \le b^x & x \le 0 \end{cases}$

Nhận xét 2: Hàm số $f(x)=a^x-b^x$ xác định đồng biến và liên tục trên tập D=$[0;+\infty)$ do $f'(x)=a^x\ln a-b^x\ln b>0\,\forall a\ge 0$ với a>b>0 cho tr□ớc

Nhận xét 3: Tích hai hàm số đồng biến, nhận giá trị d□ơng trên tập D là hàm đồng biến tổng hai hàm số đồng biến trên D là hàm số đồng biến

áp dụng (+) nếu $x\le 0: VT=(6^x-3^x)(19x-5^x)(10^x-7^x)+(15^x-8^x)(9^x-4^x)(5^x-2^x)\le 0$

$VP=231^x>0 \Rightarrow$ ph□ơng trình không có nghiệm d□ơng

(+) với $x$ >0 chia 2 vế ph□ơng trình cho $231^x$ = $(3.7.11)^x$ đ□ợc

$$(2^x-1)\left((\frac{19}{11})^x-(\frac{5}{11})^x\right)\left((\frac{10}{7})^x-1\right)+\left((\frac{15}{11})^x-(\frac{8}{11})^x\right)\left((\frac{9}{7})^x-(\frac{4}{7})^x\right)\left((\frac{5}{3})^x-(\frac{2}{3})^x\right)=1$$

Từ nhận xét (2) và nhận xét 3 hàm số.

$$g(x)=(2^x-1)\left(\left(\frac{19}{11}\right)^x-\left(\frac{5}{11}\right)^x\right)\left(\left(\frac{10}{7}\right)^x-1\right)+\left(\left(\frac{5}{11}\right)^x-\left(\frac{8}{11}\right)^x\right)\left(\left(\frac{9}{7}\right)^x-\left(\frac{4}{7}\right)^x\right)\left(\left(\frac{5}{3}\right)^x-\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)=1$$

Từ nhận xét (2) và nhận xét (3) hàm số

$$g(x)=(2^x-1)\left(\left(\frac{19}{11}\right)^x-\left(\frac{5}{11}\right)^x\right)\left(\left(\frac{10}{7}\right)^x-1\right)+\left(\left(\frac{5}{11}\right)^x-\left(\frac{8}{11}\right)^x\right)\left(\left(\frac{9}{7}\right)^x-\left(\frac{4}{7}\right)^x\right)\left(\left(\frac{5}{3}\right)^x-\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)$$

là hàm số đồng biến trên $D=(0;+\infty)$

và $g(1)=(2-1)\left(\frac{19}{11}-\frac{5}{11}\right)\left(\frac{10}{7}-1\right)+\left(\frac{5}{11}-\frac{8}{11}\right)\left(\frac{9}{7}-\frac{4}{7}\right)\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\right)$

$= 1.\frac{14}{11}.\frac{3}{7}+\frac{7}{11}.\frac{5}{7}.\frac{3}{3}=1$

ph□ơng trình đã cho $\Leftrightarrow$ g($x$)=g(1)$\Rightarrow x$=1 là nghiệm duy nhất của ph□ơng trình

**Bài số 24**:Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x-y)\left(x^2+xy+y^2-2\right)=6\ln\left(\dfrac{y+\sqrt{y^2+9}}{x+\sqrt{x^2+9}}\right)\\ x^5y-3xy-1=0\end{cases}$

***Giải***

Từ $(x-y)\left(x^2+xy+y^2-2\right)=6\ln\left(\dfrac{y+\sqrt{y^2+9}}{x+\sqrt{x^2+9}}\right)$

$\Leftrightarrow x^3-2x+6\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)=y^3-2y+6\ln\left(y+\sqrt{y^2+9}\right)\quad (1)$

Xét $f(t)=t^3-2t+6\ln\left(t+\sqrt{t^2+9}\right)\quad t\in\mathbb{R}$

$$f'(t)=3t^2-2+\frac{6}{\sqrt{t^2+9}}=3\left(t^2+\frac{2}{\sqrt{t^2+9}}-\frac{2}{3}\right)$$

Ta có

$$t^2+\frac{2}{\sqrt{t^2+9}}-\frac{2}{3}=t^2+9+\frac{2}{\sqrt{t^2+9}}-\frac{29}{3}=\frac{t^2+9}{27}+\frac{1}{\sqrt{t^2+9}}+\frac{1}{\sqrt{t^2+9}}+\frac{26}{27}\left(t^2+9\right)-\frac{29}{3}$$

$$\geq 1+\frac{26}{27}\left(t^2+9\right)-\frac{29}{3}\geq 1+\frac{26}{3}=\frac{29}{3}-\frac{29}{3}=0$$

Suy ra $f'(t)\geq 0\ \ \forall t\ \Rightarrow$hàm số đồng biến và liên tục trên R

Mà (1) $\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$

Thay vào phương trình còn lại của hệ ta có $x^6-3x^2-1=0\ (2)$

Đặt $x^2=u\ (u\geq 0)$ suy ra $u^3-3u=1\quad (3)$

Xét $g(u)=u^3-3u-1\quad$ với $u\geq 0$

$g'(u)=3u^2-3$ có $g'(u)=0\Leftrightarrow u=\pm 1$

Lập bảng biến thiên ta thấy phương trình (3) có nghiệm duy nhất thuộc (0; 2)

Đặt $u = 2\cos\alpha$ với $\alpha \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

(3) trở thành $\cos 3\alpha = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{9} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2\cos\dfrac{\pi}{9}}$

Vậy hệ có nghiệm $\left(\sqrt{2\cos\dfrac{\pi}{9}};\sqrt{2\cos\dfrac{\pi}{9}}\right)$ ; $\left(-\sqrt{2\cos\dfrac{\pi}{9}};-\sqrt{2\cos\dfrac{\pi}{9}}\right)$

**Bài số 25**:Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x\ln\sqrt{x^2+y^2+1} - y = 3y\ln\sqrt[3]{x^2+y^2+1} - x \\ x^3 - \sqrt[3]{x+2\ln y} - \dfrac{2}{3}\ln(y+2\ln x) = 0 \end{cases}$

***Giải***

ĐKXĐ: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ y + 2\ln x > 0 \end{cases}$ (*)

$$2x\ln\sqrt{x^2+y^2+1} - y = 3y\ln\sqrt[3]{x^2+y^2+1} - x \Leftrightarrow x\ln(x^2+y^2+1) - y = y\ln(x^2+y^2+1) - x$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\ln(x^2+y^2+1)+1\right) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

Thay vào phương trình (2): $x^3 - \sqrt[3]{x+2\ln x} - \dfrac{2}{3}\ln(x+2\ln x) = 0(3)$

Đặt: $u = \sqrt[3]{x+2\ln x} \Rightarrow u^3 = x + 2\ln x(*)$. Thay vào (3): $x^3 - u - 2\ln u = 0(**)$

Từ (*), (**) suy ra: $x^3 + x + 2\ln x = u^3 + u + 2\ln u$

Xét $f(t) = t^3 + t + 2\ln t \Rightarrow f'(t) = 2t^2 + 1 + \dfrac{2}{t} > \forall t > 0$

Vậy f(t) đồng biến trên $(0;+\infty)$. Mà f(x)=f(u) nên x= u

Hay $x = \sqrt[3]{x+2\ln x} \Leftrightarrow x^3 = x + \ln\dfrac{x^3}{x} \Leftrightarrow x^3 - \ln x^3 = x - \ln x$

Xét g(t)=$t^3$-lnt trên $(0;+\infty)$, $g'(t) = 1 - \dfrac{1}{t} = \dfrac{t-1}{t}$

Suy ra g(t) đồng biến trên $(1;+\infty)$, nghịch biến trên (0;1].

Lại có $0 < x \le 1 \Leftrightarrow 0 < x^3 \le 1$ Vậy x, $x^3$ luôn cùng thuộc $(1;+\infty)$ hoặc $\left(0;1\right]$.

Nên g(x)=g(x$^3$) $\Leftrightarrow x = x^3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0(l) \\ x=1 \\ x=-1(l) \end{array}\right.$

Với x = 1 thì y = 1.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất (x; y) = (1;1)

**Bài số 26**:Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^2-2x-5+2x\sqrt{x^2+1}=2(y+1)\sqrt{y^2+2y+2} \\ x^2+2y^2=2x-4y+3 \end{cases}$

***Giải***

Trừ vế với vế của 2 phương trình (1), (2) ta có:

$$2x^2+2x.\sqrt{x^2+1}=2y^2+4y+2+2(y+1)\sqrt{y^2+2y+2}$$

$$\Leftrightarrow x^2+x\sqrt{x^2+1}=(y+1)^2+(y+1)\sqrt{(y+1)^2+1}$$

Đưa về xét hàm số: $f(t)=t^2+t\sqrt{t^2+1}$ có

$$f'(t)=2t+\sqrt{t^2+1}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)^2}{\sqrt{t^2+1}}>0\forall t$$

$\Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến trên R, lại có

$$f(x)=f(y+1)\Rightarrow x=y+1$$

$$x^2+2(x-1)^2=2x-4(x-1)+3 \Leftrightarrow 3x^2-2x-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow y=-2 \\ x=\frac{5}{2} \Rightarrow y=\frac{3}{2} \end{array}\right.$$

**Bài số 27**:Giải hệ phương trình $\begin{cases} (17-3x)\sqrt{5-x}+(3y-14)\sqrt{4-y}=0 \\ 2\sqrt{2x+y+5}+3\sqrt{3x+2y+11}=x^2+6x+13 \end{cases}$

***Giải***

- Điều kiện : $\begin{cases} x \le 5 \\ y \le 4 \\ 2x+y+5 \ge 0\ ,\ 3x+2y+11 \ge 0 \end{cases}$ (*)
- Với điều kiện (*), phương trình (1) tương đương

$$[3(5-x)+2].\sqrt{5-x}=[3(4-y)+2].\sqrt{4-y} \quad (3)$$

Xét hàm số : $f(t)=(3t+2).\sqrt{t}$ , $t\ge 0$

$\Rightarrow f'(t)=3\sqrt{t}+\dfrac{3t+2}{2\sqrt{t}}>0$ , $\forall t>0$

$f(t)$ liên tục $\forall t\ge 0$, suy ra $f(t)$ là hàm số luôn đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$

Khi đó : pt(3) $\Leftrightarrow f(5-x)=f(4-y)\Leftrightarrow 5-x=4-y\Leftrightarrow y=x-1$

- Thay $y=x-1$ vào phương trình (2), ta được :

$$2\sqrt{3x+4}+3\sqrt{5x+9}=x^2+6x+13 \quad \text{với } x\ge -\frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left[2\sqrt{3x+4}-2(x+2)\right]+\left[3\sqrt{5x+9}-3(x+3)\right]=x^2+x$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left[(3x+4)-(x+2)^2\right]}{\sqrt{3x+4}+(x+2)}+\frac{3\left[(5x+9)-(x+3)^2\right]}{\sqrt{5x+9}+(x+3)}=x^2+x$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x(x+1)}{\sqrt{3x+4}+(x+2)}+\frac{-3x(x+1)}{\sqrt{5x+9}+(x+3)}=x(x+1)$$

$$\Leftrightarrow x(x+1)\left(1+\frac{2}{\sqrt{3x+4}+(x+2)}+\frac{3}{\sqrt{5x+9}+(x+3)}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right. \ ; \ \text{vì : } 1+\frac{2}{\sqrt{3x+4}+(x+2)}+\frac{3}{\sqrt{5x+9}+(x+3)}>0 \ , \ \forall x\ge -\frac{4}{3}$$

Với $x=0$ suy ra $y=-1$

Với $x=-1$ suy ra $y=-2$

Thử lại ta thấy cả hai đều thỏa điều kiện (*)

- Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm : $(0;\ -1)$ , $(-1;\ -2)$

**Bài số 28**:Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+4x+2=\dfrac{3}{y-4}+4\sqrt{6-2y} \\ y^3+4y+2=\dfrac{3}{z-4}+4\sqrt{6-2z} \\ z^3+4z+2=\dfrac{3}{x-4}+4\sqrt{6-2x} \end{cases}$

***Giải***

Điều kiện: $x,y,z\le 3$.

Xét các hàm số $f(t)=t^3+4t+2, g(t)=\dfrac{3}{t-4}+4\sqrt{6-2t}$ trên $(-\infty;3]$.

Khi đó ta có $f'(t)=3t^2+4>0, g'(t)=-\frac{3}{(t-4)^2}-\frac{4}{\sqrt{6-2t}}<0, \forall t<3$.

Mà $f(t), g(t)$ là các hàm số liên tục trên $(-\infty;3]$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(-\infty;3]$ và $g(t)$ nghịch biến trên $(-\infty;3]$.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x=\min\{x,y,z\}$. Khi đó ta có:

Nếu $x<y\Rightarrow g(x)>g(y)\Rightarrow f(z)>f(x)\Rightarrow z>x\Rightarrow g(z)<g(x)\Rightarrow f(y)<f(z)$ suy ra $y<z\Rightarrow g(y)>g(z)\Rightarrow f(x)>f(y)\Rightarrow x>y$, vô lí vì $x<y$.

Do vậy $x=y$, tương tự lí luận như trên ta được $x=z$ suy ra $x=y=z$.

Thay trở lại hệ ta được $x^3+4x+2=\frac{3}{x-4}+4\sqrt{6-2x}$ (1).

Theo trên, bên trái là hàm đồng biến, bên phải là hàm nghịch biến, nên phương trình có nhiều nhất 1 nghiệm

Mà $x=1$ là nghiệm nên nó là nghiệm duy nhất của phương trình (1).

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $x=y=z=1$.

**Bài số 29**:Giải hệ phương trình $\begin{cases}\log_3\left(\frac{2x+y+1}{\sqrt{x^2+2}+1}\right)=3\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)-3\\ \left(2+3^{x+y}\right).5^{1-(x+y)}=7^{x+y}-2\end{cases}$

***Giải***

Điều kiện: $2x+y+1>0$ Ta có $(2)\Leftrightarrow 10.\left(\frac{1}{5}\right)^{x+y}+5.\left(\frac{3}{5}\right)^{x+y}-7^{x+y}+2=0$

Đặt $t=x+y$ ta có phương trình $10.\left(\frac{1}{5}\right)^t+5.\left(\frac{3}{5}\right)^t-7^t+2=0$ (*)

Xét hàm số $f(t)=10.\left(\frac{1}{5}\right)^t+5.\left(\frac{3}{5}\right)^t-7^t+2$ với $t\in\mathbb{R}$

Ta có $f'(t)=10.\left(\frac{1}{5}\right)^t\ln\frac{1}{5}+5.\left(\frac{3}{5}\right)^t\ln\frac{3}{5}-7^t\ln 7<0\ \forall t\in\mathbb{R}$

Nên hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Mà $f(1)=0$ suy ra phương trình (*) có nghiệm duy nhất $t=1$

Với $t = 1$ ta có $x + y = 1$

$$(2) \Leftrightarrow \log_3(2x + y + 1) - \log_3\left(\sqrt{x^2 + 2} + 1\right) = 3\sqrt{x^2 + 2} - 3x - 3$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x + 2) - \log_3\left(\sqrt{x^2 + 2} + 1\right) = 3\sqrt{x^2 + 2} - 3x - 3$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x + 2) + 3(x + 2) = \log_3\left(\sqrt{x^2 + 2} + 1\right) + 3\left(\sqrt{x^2 + 2} + 1\right) \quad (**)$$

Xét hàm số $g(t) = \log_3 t + 3t$ với $t > 0$ ta có $g'(t) = \dfrac{1}{t\ln 3} + 3 > 0\ \forall t > 0$

$\Rightarrow g(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

Do đó phương trình $(**)$ có dạng

$$g(x + 2) = g\left(\sqrt{x^2 + 2} + 1\right) \Leftrightarrow x + 2 = \sqrt{x^2 + 2} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2} = x + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \ge 0 \\ x^2 + 2 = (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Với $x = \dfrac{1}{2}$ ta có $y = \dfrac{1}{2}$ (thỏa mãn điều kiện $2x + y + 1 > 0$)

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$

**Bài số 30**:Giải phương trình : $8\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{(x-1)^2}{2x+1} = x^2 - 18x - 31$

***Giải***

Tập xác định $D = \left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{1\}$

Ta tìm $\alpha, \beta, \gamma$ sao cho

$$x^2 - 18x - 31 = \alpha(x-1)^2 + \beta(2x+1) + \gamma$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 18x - 31 = \alpha x^2 + (2\beta - 2\alpha)x + \alpha + \beta + \gamma$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ 2\beta - 2\alpha = -18 \\ \alpha + \beta + \gamma = -31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -8 \\ \gamma = -24 \end{cases}$$

Khi đó phương trình tương đương với

$$8\left[\log_{\frac{1}{2}}(x-1)^2-\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)\right]=(x-1)^2-8(2x+1)-24$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x-1)^2-\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)=\frac{1}{8}(x-1)^2-(2x+1)-3$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x-1)^2+3-\frac{1}{8}(x-1)^2=\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)-(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{8}(x-1)^2\right)-\frac{1}{8}(x-1)^2=\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)-(2x+1)$$

Xét hàm số $f(t)=\log_{\frac{1}{2}}t-t, t>0$ có đạo hàm $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln\frac{1}{2}}-1<0, \forall t>0$ nên hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$. Do đó phương trình tương đương với

$$f\left(\frac{1}{8}(x-1)^2\right)=f(2x+1)\Leftrightarrow \frac{1}{8}(x-1)^2=2x+1\Leftrightarrow x^2-18x-7=0\Leftrightarrow x=9\pm2\sqrt{22}\in D$$

## IV. Phương pháp đánh giá

*Khi giải phương trình vô tỷ (chẳng hạn $f(x)=g(x)$) bằng phương pháp đánh giá, thường là để ta chỉ ra phương trình chỉ có một nghiệm (nghiệm duy nhất).Ta thường sử dụng các bất đẳng thức cổ điển Cô si, Bunhiacopxki, đưa vế trái về tổng bình phương các biểu thức, đồng thời vế phải bằng 0. Ta cũng có thể sử dụng tính đơn điệu của hàm số (có thể thấy ngay hoặc sử dụng đạo hàm xét sự biến thiên của hàm số) để đánh giá một cách hợp lý.*

*Thường ta đánh giá như sau:* $\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)\ge C(\le C) \\ g(x)\le C(\ge C)\end{cases}\Leftrightarrow f(x)=g(x)=C$, *hoặc đánh giá* $f(x)\ge g(x)$ *cũng như là* $f(x)\le g(x)$ ...

**Bài số 31**: Giải phương trình

$$\sqrt{x^2-x+19}+\sqrt{7x^2+8x+13}+\sqrt{13x^2+17x+7}=3\sqrt{3}(x+2).$$

***Giải***

Đk $x \geq -2$. Với đk đó

$$VT = \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{75}{4}} + \sqrt{(2x-1)^2 + 3(x+2)^2} + \sqrt{\frac{1}{4}(2x-1)^2 + \frac{3}{4}(4x+3)^2}$$

$$\geq \sqrt{\frac{75}{4}} + \sqrt{3}\left|x+2\right| + \frac{\sqrt{3}}{2}\left|4x+3\right|$$

$$\geq \left|\frac{5}{2}\sqrt{3} + \sqrt{3}(x+2) + \frac{\sqrt{3}}{2}(4x+3)\right|$$

$$\geq 3\sqrt{3}.(x+2) = \text{VP}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \frac{1}{2}$.

**Bài số 32**: Giải phương trình $2\sqrt[4]{27x^2 + 24x + \frac{28}{3}} = 1 + \sqrt{\frac{27}{2}x + 6}$.

***Giải***

Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$2\sqrt[4]{\frac{(9x+4)^2}{3} + 4} = 1 + \sqrt{\frac{3(9x+4)}{2}}$$

Đk: $x \geq -\frac{4}{9}$. Đặt $(9x+4) = y$, suy ra $y \geq 0$.

Khi đó ta được $2\sqrt[4]{\frac{y^2}{3} + 4} = 1 + \sqrt{\frac{3y}{2}} \Leftrightarrow 4\sqrt{\frac{y^2}{3} + 4} = 1 + \frac{3y}{2} + \sqrt{6y}$ (bình phương hai vế).

Theo BĐT Cô-si ta được $\sqrt{6y} \leq \frac{y+6}{2}$, do đó

$$4\sqrt{\frac{y^2}{3} + 4} \leq 2y + 4 \Leftrightarrow 4\left(\frac{y^2}{3} + 4\right) \leq (y+2)^2$$

$$\Leftrightarrow 4y^2 + 48 \leq 3y^2 + 12y + 12$$
$$\Leftrightarrow y^2 - 12y + 36 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow (y-6)^2 \leq 0.$$

Từ đó ta được $y = 6$, suy ra $x = \frac{2}{9}$ thỏa mãn đk.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \frac{2}{9}$.

**Bài số 33**: Giải phương trình

$$\frac{7}{\sqrt{x^2-10x+26}+\sqrt{x^2-10x+29}+\sqrt{x^2-10x+41}}=x^4-9x^3+16x^2+15x+26$$

***Giải***

Nhận xét:

$$x^4-9x^3+16x^2+15x+26=(x^2+x+1)(x-5)^2+1\geq 1 \qquad (*)$$

$$\frac{7}{\sqrt{x^2-10x+26}+\sqrt{x^2-10x+29}+\sqrt{x^2-10x+41}}$$
$$=\frac{7}{\sqrt{(x-5)^2+1}+\sqrt{(x-5)^2+4}+\sqrt{(x-5)^2+16}}\leq\frac{7}{1+2+4}=1 \qquad (**)$$

Vậy ph□ơng trình đã cho t□ơng đ□ơng dấu bằng ở các bất đẳng thức (*) và (**) xẩy ra, từ đó ta đ□ợc x = 5 là nghiệm duy nhất của ph□ơng trình.

**Bài số 33**: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+6\sqrt{xy}=y+6 \\ x+\dfrac{6\left(x^3+y^3\right)}{x^2+xy+y^2}-\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}=3 \end{cases}$

***Giải***

Điều kiện: $\begin{cases} xy\geq 0 \\ x^2+xy+y^2\neq 0 \end{cases}$.

Nếu $x\leq 0; y\leq 0$ thì $x+\dfrac{6\left(x^3+y^3\right)}{x^2+xy+y^2}-\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}<0<3$ . Điều này dẫn đến hệ vô nghiệm. Vì thế, ta chỉ giải hệ phương trình khi $x>0; y>0$.

Khi đó phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\frac{x}{2}+3\sqrt{xy}=\frac{y}{2}+3\Leftrightarrow x+2\sqrt{xy}=\frac{x}{2}-\sqrt{xy}+\frac{y}{2}+3\Leftrightarrow x+2\sqrt{xy}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2+3$$

Suy ra: $x+2\sqrt{xy}\geq 3$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$.

Ta sẽ chứng minh: $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}\geq\dfrac{x+y}{3}$ $\qquad$ (*)

Thật vậy, $(*)\Leftrightarrow\dfrac{(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)}{x^2+xy+y^2}\geq\dfrac{x+y}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2} \ge \frac{1}{3} \text{ ( do } x+y>0 \text{ )}$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2-xy+y^2\right) \ge x^2+xy+y^2 \Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Suy ra: $x+\dfrac{6\left(x^3+y^3\right)}{x^2+xy+y^2}-\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)} \ge x+2(x+y)-\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}$

Mặt khác, ta có:

$$2(x+y)-\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)} \ge 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow 2\left[(x+y)-\sqrt{xy}\right] \ge \sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow 4\left(x^2+y^2+xy-2x\sqrt{xy}-2y\sqrt{xy}+2xy\right) \ge 2\left(x^2+y^2\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+6xy-4x\sqrt{xy}-4y\sqrt{xy} \ge 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^4 \ge 0 \text{ (luôn đúng).}$$

Khi đó: $x+\dfrac{6\left(x^3+y^3\right)}{x^2+xy+y^2}-\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)} \ge x+2\sqrt{xy} \ge 3.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

**Bài số 34**: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3\sqrt{xy}(2x+3y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}-15xy \\ \dfrac{1}{12x\sqrt{y}}+\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{x}{y}}=\dfrac{10}{3}-2\sqrt{xy}-18y\sqrt{x} \end{cases}$

***Giải***

Điều kiện: $x, y \ge 0$

Viết lại phương trình đầu của hệ thành

$$\left(6x\sqrt{y}+9y\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=\sqrt{x}+\sqrt{y} \Leftrightarrow 12x\sqrt{y}+18y\sqrt{x}=2$$

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$18y\sqrt{x}+\frac{1}{12x\sqrt{y}}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{x}{y}}+\frac{6\sqrt{xy}}{3}=\frac{10}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}.9y+3\sqrt{y}.\frac{1}{36xy}+\frac{1}{6\sqrt{xy}}.4x+\frac{6\sqrt{xy}}{2+1}=\frac{10}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}.9y+3\sqrt{y}.\frac{1}{36xy}+\frac{1}{6\sqrt{xy}}.4x+\frac{6\sqrt{xy}}{12x\sqrt{y}+18y\sqrt{x}+1}=\frac{10}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}.9y+3\sqrt{y}.\frac{1}{36xy}+\frac{1}{6\sqrt{xy}}.4x+\frac{1}{3\sqrt{y}+2\sqrt{x}+\frac{1}{6\sqrt{xy}}}=\frac{10}{3}$$

Đặt $a=2\sqrt{x},b=3\sqrt{y},c=\frac{1}{6\sqrt{xy}}$ ta có $a,b,c>0$ và $abc=1$.

Khi đó phương trình thứ hai trở thành $ab^2+bc^2+ca^2+\frac{1}{a+b+c}=\frac{10}{3}$

*<u>Bổ đề:</u>* Cho các số thực $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Khi đó ta có bất đẳng thức

$$ab^2+bc^2+ca^2+\frac{1}{a+b+c}\geq\frac{10}{3}$$

<u>Chứng minh bổ đề:</u>

Áp dụng bđt AM-GM ta có

$$ab^2+ab^2+bc^2\geq 3\sqrt[3]{a^2b^5c^2}=3b$$

tương tự $ca^2+ca^2+ab^2\geq 3a,\ bc^2+bc^2+ca^2\geq 3c$

Cộng từng vế của 3 bđt trên ta được $ab^2+bc^2+ca^2\geq a+b+c$

Đặt $t=a+b+c$ ta có $t\geq 3$. Ta sẽ chứng minh $t+\frac{1}{t}\geq\frac{10}{3}$. Bđt này

$\Leftrightarrow (t-3)(3t-1)\geq 0$ (luôn đúng). Từ đó ta có bổ đề được chứng minh và dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$.

Quay lại bài toán, từ bổ đề ta thu được

$$a=2\sqrt{x},=b=3\sqrt{y}=c=\frac{1}{6\sqrt{xy}}=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{4},\ y=\frac{1}{9}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=\left(\frac{1}{4};\frac{1}{9}\right)$

**Bài số 35**: Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x+3y}}+\frac{1}{\sqrt{y+3x}}\right)=2 & (1)\\ x^2+2y+9=4\sqrt{x+3}+\sqrt{19-3y} & (2)\end{cases}$

***Giải***

Điều kiện $\begin{cases} x \ge 0, \dfrac{19}{3} \ge y \ge 0 \\ x + y > 0 \end{cases}$

Từ $(1)$ : sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3y}} = \sqrt{\dfrac{x}{x+y} \cdot \dfrac{x+y}{x+3y}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x+y} + \dfrac{x+y}{x+3y}\right)$ và

$\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x+3y}} = \sqrt{\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2y}{x+3y}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{2y}{x+3y}\right)$, cộng hai kết quả trên ta được

$\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+3y}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x+y} + \dfrac{3}{2}\right)$, tương tự ta cũng có $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{y+3x}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x+y} + \dfrac{3}{2}\right)$,

suy ra $VT^{(1)} = \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+3y}} + \dfrac{1}{\sqrt{y+3x}}\right) \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x+y}{x+y} + 3\right) = 2 = VP^{(1)}$

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $x = y \ (3)$

Thế vào phương trình $(2)$ ta được pt : $x^2 + 2x + 9 = 4\sqrt{x+3} + \sqrt{19-3x} \ (4)$

Giải pt $(4) \Leftrightarrow 3\left(x^2 + x - 2\right) = 4\left[3\sqrt{x+3} - (x+5)\right] + \left[3\sqrt{19-3x} - (13-x)\right]$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2 + x - 2\right) = 4 \cdot \frac{\left(-x^2 - x + 2\right)}{3\sqrt{x+3} + (x+5)} + 9 \cdot \frac{\left(-x^2 - x + 2\right)}{3\sqrt{19-3x} + (13-x)}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + x - 2\right)\left(3 + \frac{4}{3\sqrt{x+3} + (x+5)} + \frac{9}{3\sqrt{19-3x} + (13-x)}\right) = 0.$$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2(Loai)$

Khi $x = 1 \xrightarrow{(3)} y = x = 1$. Thử lại $(x;y) = (1;1)$ thỏa mãn hệ phương trình

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = (1;1)$

**Bài số 36**: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(\sqrt{x}+\sqrt{y+1})(\dfrac{1}{\sqrt{x+3y+3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3\text{x}+y+1}})=2\\ \sqrt{2\text{x}^2+8y-2}+\sqrt{2y^2+4y+2\text{x}-2}=3(\sqrt{x+5}+\sqrt{y+3}+1)\end{cases}$$

***Giải***

Điều kiện: $\begin{cases}x\ge 0\\ y\ge -1\\ 2\text{x}^2+8y-2\ge 0\\ 2y^2+4y+2\text{x}-2\ge 0\end{cases}$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho vế trái của (1) ta có:

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3y+3}}\le\dfrac{1}{2}(\dfrac{x}{x+y+1}+\dfrac{x+y+1}{x+3y+3})\\ \dfrac{\sqrt{y+1}}{\sqrt{x+3y+3}}\le\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2(y+1)}{x+3y+3})\end{cases}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y+1}}{\sqrt{x+3y+3}}\le\dfrac{1}{2}(\dfrac{x}{x+y+1}+\dfrac{3}{2})$$

Chứng minh tương tự ta cũng có: $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y+1}}{\sqrt{3\text{x}+y+1}}\le\dfrac{1}{2}(\dfrac{y+1}{x+y+1}+\dfrac{3}{2})$

Cộng lại ta được: $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y+1}}{\sqrt{x+3y+3}}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y+1}}{\sqrt{3\text{x}+y+1}}\le 2$

Dấu đẳng thức xảy ra x = y+1 hay y= x – 1

Thế vào (2) ta có phương trình

$$\sqrt{2x^2+8x-10}+\sqrt{2x^2+2x-4}=3\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x+2}+1\right)\qquad(4)$$

Điều kiện xác định của (4) là: $x\ge 1$ (*). Với đk (*), ta có:

$$(4)\Leftrightarrow\sqrt{(2x-2)(x+5)}+\sqrt{(2x-2)(x+2)}-3\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x+2}\right)=3$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2x-2}\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x+2}\right)-3\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x+2}\right)=3$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{2x-2}-3\right)=3$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2x-2}-3=\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2x-2}-\sqrt{x+5})+(\sqrt{x+2}-3)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-7}{\sqrt{2x-2}+\sqrt{x+5}}+\frac{x-7}{\sqrt{x+2}+3}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-7)\left(\frac{1}{\sqrt{2x-2}+\sqrt{x+5}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+3}\right)=0$$

$\Leftrightarrow x=7$ (tm (*)) ( Vì $\dfrac{1}{\sqrt{2x-2}+\sqrt{x+5}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+3}>0\ \forall x\geq 1$)

Với $x=7\Rightarrow y=6$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(7;6)$.

**Bài số 37**: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+2x\sqrt{xy}=y^2\sqrt{y} \\ \left(4x^3+y^3+3x^2\sqrt{x}\right)\left(15\sqrt{x}+y\right)=3\sqrt{x}\left(y\sqrt{y}+x\sqrt{y}+4x\sqrt{x}\right)^2 \end{cases}$$

***Giải***

Điều kiện: $x\geq 0, y\geq 0$.

Đặt $a=\sqrt{x}, b=\sqrt{y}$ ($a\geq 0, b\geq 0$). Hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} a^4+2a^3b=b^5 & (1) \\ \left(4a^6+b^6+3a^5\right)\left(15a+b^2\right)=3a\left(b^3+a^2b+4a^3\right)^2 & (2) \end{cases}$$

Nhận xét: $a=0\Rightarrow b=0$; $b=0\Rightarrow a=0$. Do đó $(a,b)=(0,0)$ là một nghiệm của hệ.

Bây giờ ta xét $a>0, b>0$. Đặt $b=ka\Rightarrow k>0$. Với cách đặt này thì

- Phương trình (1) trở thành:

$$1+2k=ak^5\Leftrightarrow a=\frac{1+2k}{k^5} \qquad (3)$$

- Phương trình (2) trở thành:

$$\left(4a^6+a^6k^6+3a^5\right)\left(15a^2+k^2a^2\right)=3a\left(k^3a^3+a^3k+4a^3\right)^2 \qquad (4)$$

Thay (3) vào (4) ta được: $\left(4+k^6+\dfrac{3k^5}{1+2k}\right)\left(5+\dfrac{1+2k}{3k^3}\right)=\left(k^3+k+4\right)^2$ (5)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz cho vế trái của (5) ta được:

$$\left(4+k^6+\frac{3k^5}{1+2k}\right)\left(5+\frac{1+2k}{3k^3}\right)\ge\left(\sqrt{5\left(4+k^6\right)}+\sqrt{\frac{3k^5}{1+2k}.\frac{1+2k}{3k^3}}\right)^2$$

$$=\left(\sqrt{\left(2^2+1^2\right)\left(4+k^6\right)}+k\right)^2\ge\left(4+k^3+k\right)^2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $k=1$. Khi đó $a=b=3$ hay $x=y=9$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm $(x;y)$ là $(0;0),(9;9)$.

**Bài số 38**: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^6+2x^3-10y^2=\sqrt{xy-x^2y^2} \\ 4x^3(2y+1)-28y^2+3=2\sqrt{x^2+4\left(y^2+1\right)-4xy} \end{cases}$$

***Giải***

Điều kiện : $\begin{cases} xy-x^2y^2\ge 0 \\ x^2+4(y^2+1)-4xy\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le xy\le 1 \\ (x-2y)^2+4\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0\le xy\le 1$

Ta có : $xy-x^2y^2=\frac{1}{4}-\left(xy-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{4}\Leftarrow\sqrt{xy-x^2y^2}\le\frac{1}{2}$ ( dấu = xảy ra khi xy $=\frac{1}{2}$)

Do đó từ (1) $\Rightarrow 2x^6+4x^3-20y^2\le 1$ (3)

Từ (2) và (3) ta suy ra : $8x^3y+4x^3-28y^2+4\ge 2x^6+4x^3-20y^2+2\sqrt{(x-2y)^2+4}$

$$\Leftrightarrow 8x^3y+4\ge 2x^6+8y^2+2\sqrt{(x-2y)^2+4}$$

$$\Leftrightarrow 4x^3y+2\ge x^6+4y^2+\sqrt{(x-2y)^2+4}$$

$$\Leftrightarrow 2\ge\left(x^3-2y\right)^2+\sqrt{(x-2y)^2+4} \qquad (4)$$

Ta lại có $\left(x^3-2y\right)^2+\sqrt{(x-2y)^2+4}\ge 2$

Do đó (4) $\Leftrightarrow\begin{cases} x^3-2y=0 \\ x-2y=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-1 \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$ 0,5

Thử lại ta thấy chỉ có $\begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$ là nghiệm của hpt.

**Bài số 39**: Giảiphương trình $1+3x=(x-x^2)\left(5+\sqrt{15+6x-9x^2}\right)$.

***Giải***

Điều kiện: $-1 \le x \le \frac{5}{3}.$

Vì $x=0$ và $x=1$ đều không phải là nghiệm của phương trình nên phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{1+3x}{x-x^2} = 5+\sqrt{15+6x-9x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{4}{1-x} = 5+\sqrt{15+6x-9x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x}{x}+\frac{4x}{1-x} = \sqrt{16-(3x-1)^2} \quad (2).$$

Nếu $x \in [-1;0) \cup \left(1;\frac{5}{3}\right]$ thì $\frac{1-x}{x}+\frac{4x}{1-x} < 0$ trong khi đó $\sqrt{16-(3x-1)^2} \ge 0.$ Vậy $x \in [-1;0) \cup \left(1;\frac{5}{3}\right]$ không thỏa phương trình.

Nếu $x \in (0;1)$ thì $\frac{1-x}{x} > 0, \frac{4x}{1-x} > 0.$ Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $\frac{1-x}{x}+\frac{4x}{1-x} \ge 4.$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=\frac{1}{3}.$

Mặt khác $\sqrt{16-(3x-1)^2} \le 16$ với mọi $x \in (0;1)$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=\frac{1}{3}.$ Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{3}.$

**Bài số 40**: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ z^2+2z(x+y)=8 \\ z(y-x)=\sqrt{48} \end{cases}$

***Giải***

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=2 & (1) \\ z^2+2z(x+y)=8 & (2) \\ z(y-x)=\sqrt{48} & (3) \end{cases}$

Từ (1) và (2) ta suy ra $2x^2+2y^2+z^2+2zx+2zy=12 \Leftrightarrow \left(x+\frac{z}{2}\right)^2+\left(y+\frac{z}{2}\right)^2=6 \quad (4)$

Từ (1) ta suy ra $(2y)^2+(-2x)^2=8 \quad (5)$

Đặt $\vec{u}=\left(x+\frac{z}{2};y+\frac{z}{2}\right)$, suy ra $\left|\vec{u}\right|=\sqrt{6}$ ( do (4) )

$\vec{v}=(2y;-2x)$, từ (5) suy ra $\left|\vec{v}\right|=\sqrt{8}$ ( do (5) )

Ta có $\vec{u}.\vec{v}=yz-zx=z(y-x)=\sqrt{48}$.

Mặt khác, ta có $\vec{u}.\vec{v}\le\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|=\sqrt{48}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng hướng, suy ra

$$\frac{x+\frac{z}{2}}{2y}=\frac{y+\frac{z}{2}}{-2x}\Leftrightarrow 2(x^2+y^2)=-z(x+y)$$

Suy ra $z(x+y)=-4$, từ (2) suy ra $z^2=16\Leftrightarrow z=\pm4$

+ với $z=4$ thay vào hệ ta đươc $\begin{cases}x+y=-1\\ y-x=\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\\ y=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

+ với $z=-4$ thay vào hệ ta đươc $\begin{cases}x+y=1\\ y-x=-\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\\ y=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

Thử lại, ta thấy các giá trị trên đều thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có hai bộ nghiệm $(x;y;z)$ là $(4;\frac{-1-\sqrt{3}}{2};\frac{-1+\sqrt{3}}{2})$ , $(-4;\frac{1+\sqrt{3}}{2};\frac{1-\sqrt{3}}{2})$

## V. Phương pháp lượng giác hóa

1. *Nếu $x^2+y^2=1$ thì đặt* $\begin{cases}x=\sin t\\ y=\cos t\end{cases}$ *với* $t\in[0;2\pi]$.
2. *Nếu $x^2+y^2=a^2 (a>0)$ thì đặt* $\begin{cases}x=a\sin t\\ y=a\cos t\end{cases}$ *với* $t\in[0;2\pi]$.
3. *Nếu* $|x|\le1$ *thì đặt* $\left[\begin{array}{l}x=\sin t, t\in\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\\ x=\cos t, t\in[0;\pi]\end{array}\right.$.

4. *Nếu* $|x| \le a$ *thì đặt* $\left[\begin{array}{l} x = a\sin t, t \in \left[\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]. \\ x = a\cos t, t \in [0;\pi] \end{array}\right.$

5. *Nếu* $|x| \ge 1$ *hoặc bài toán có chứa* $\sqrt{x^2 - 1}$ *thì đặt* $x = \dfrac{1}{\cos t}$ *với* $t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

6. *Nếu* $|x| \ge a$ *hoặc bài toán có chứa* $\sqrt{x^2 - a^2}$ *thì đặt* $x = \dfrac{a}{\cos t}$, $t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

7. *Nếu bài toán không ràng buộc điều kiện biến số và có biểu thức* $\sqrt{x^2 + 1}$ *thì đặt* $x =$ *tant với* $t \in \left(\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

8. *Nếu bài toán không ràng buộc điều kiện biến số và có biểu thức* $\sqrt{x^2 + a^2}$ *thì đặt* $x =$ *atant với* $t \in \left(\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

**Bài số 41**: Giải phương trình $x(x+2)(x^2-2) = x^4 - 4x^2 + 2$

***Giải***

Xét $x \in [-2;2]: x = 2\cos t, t \in [0;\pi]$, ta có:

$$\text{PT} \Leftrightarrow 2\cos t(2\cos t + 2)(4\cos^2 t - 2) = 2(8\cos^4 t - 8\cos^2 t + 1)$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2\frac{t}{2} \cdot 2\cos t \cdot 2\cos 2t = 2\cos 4t$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{t}{2} \cdot \frac{\sin t}{\sin\frac{t}{2}} \cdot \frac{\sin 2t}{\sin t} \cdot \frac{\sin 4t}{\sin 2t} = 2\cos 4t$$

$$\Leftrightarrow \tan 4t = \tan\frac{t}{2} \left(\text{ĐK}: \sin\frac{t}{2}, \sin t, \sin 2t, \cos\frac{t}{2}, \cos 4t \ne 0\right)$$

$$\Leftrightarrow 4t = \frac{t}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = \frac{k2\pi}{7} \ (k = 1,2,3)$$

Mà đây là phương trình bậc 3 nên có 3 nghiệm $x = 2\cos\dfrac{k2\pi}{7}$ $(k = 1,2,3)$.

**Bài số 42**: Giải phương trình $x^5 + 10x^3 + 20x - 18 = 0$

***Giải***

Đặt $x = 2\sqrt{3}\cos t$, khi đó phương trình (3) trở thành:

$$288\sqrt{3}\cos^5 t-360\sqrt{3}\cos^3 t+90\sqrt{3}\cos t-27=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(16\cos^5 t-20\cos^3 t+5\cos t\right)-\sqrt{3}=0$$

$$\Leftrightarrow \cos 5t=\cos\frac{\pi}{6}$$

Từ phương trình trên ta suy ra phương trình có 5 nghiệm là

$$\left\{2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{30};2\sqrt{3}\cos\frac{13\pi}{30};2\sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{6};2\sqrt{3}\cos\frac{37\pi}{30};2\sqrt{3}\cos\frac{49\pi}{30}\right\}$$

**Nhận xét:** Phép đặt này chỉ thực hiện được khi $|x|\le 2\sqrt{3}$.

**Bài số 43**: Giải phương trình $64x^6-112x^4+56x^2-7=2\sqrt{1-x^2}$ (1)

***Giải***

Điều kiện $1 - x^2\ge 0\Leftrightarrow -1\le x\le 1$.

Ta thấy x=0 không phải là nghiệm của phương trình.

Ta xét $x\ne 0$. Khi đó

$$(1)\Leftrightarrow 64x^7-112x^5+56x^3-7x=2x\sqrt{1-x^2}$$

Đặt $x=\cos t, t\in[0;\pi]$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$\cos 7t=2\sin t\cos t\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}-7t\right)=\sin 2t$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{\pi}{18}-\frac{k2\pi}{9} \\ t=-\frac{\pi}{10}-\frac{k2\pi}{5} \end{array}\right. (k\in Z)$$

Với $t=\frac{\pi}{18}-\frac{k2\pi}{9}, t\in[0;\pi]\Rightarrow k\in\{-4;-3;-2;-1;0\}$.

- $k=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{18}\Rightarrow x=\cos\frac{\pi}{18}$.
- $k=-1\Rightarrow t=\frac{5\pi}{18}\Rightarrow x=\cos\frac{5\pi}{18}$.
- $k=-2\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\cos\frac{\pi}{2}=0$ (loại)

- $k=-3 \Rightarrow t=\frac{13\pi}{18} \Rightarrow x=\cos\frac{13\pi}{18}$.
- $k=-4 \Rightarrow t=\frac{17\pi}{18} \Rightarrow x=\cos\frac{17\pi}{18}$.

Với $t=-\frac{\pi}{10}-\frac{k2\pi}{5}, t\in[0;\pi] \Rightarrow k\in\{-2;-1\}$

- $k=-2 \Rightarrow t=\frac{7\pi}{10} \Rightarrow x=\cos\frac{7\pi}{10}$.
- $k=-1 \Rightarrow t=\frac{3\pi}{10} \Rightarrow x=\cos\frac{3\pi}{10}$.

Vậy phương trình (1) có 6 nghiệm.

**Bài số 44**: Giải phương trình

$$\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{(1-x)^3}-\sqrt{(1+x)^3}\right)=2+\sqrt{1-x^2}$$

***Giải***

Điều kiện $\begin{cases}1+x\geq 0\\ 1-x\geq 0\\ 1-x^2\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow -1\leq x\leq 1.$

Đặt $x=\cos t, t\in[0;\pi]$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$\sqrt{1-\sin t}\left[\sqrt{(1-\cos t)^3}-\sqrt{(1+\cos t)^3}\right]=2+\sin t$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}\right)^2}\left[\sqrt{\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^3}-\sqrt{\left(2\cos^2\frac{t}{2}\right)^3}\right]=2+\sin t$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\left(\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}\right)\left(\sin^3\frac{t}{2}-\cos^3\frac{t}{2}\right)=2+\sin t$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\left(\sin^2\frac{t}{2}-\cos^2\frac{t}{2}\right)\left(\sin^2\frac{t}{2}+\cos^2\frac{t}{2}+\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\right)=2+\sin t$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2}\cos t(2+\sin t)=2+\sin t \Leftrightarrow \cos t=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Suy ra $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

**Bài số 45**: Giải phương trình $2x+\sqrt{1+x^2}=-\dfrac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}{1-x^2}$.

***Giải***

Điều kiện: $x\neq\pm1.$

Đặt $x=\tan t,t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right),t\neq\pm\dfrac{\pi}{4}$. Phương trình đã cho trở thành:

$$2\tan t+\sqrt{1+\tan^2 t}=\frac{\sqrt{\left(1+\tan^2 t\right)^3}}{1-\tan^2 t}\Leftrightarrow\frac{2\sin t+1}{\cos t}=\frac{1}{\cos t.\cos 2t}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin t\left(2\sin^2 t+\sin t-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin t=0\\ \sin t=-1(L)\\ \sin t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

-Với $\sin t=0\Rightarrow t=0\Rightarrow x=0.$

-Với $\sin t=\dfrac{1}{2}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x=0;x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

**Bài số 46**: Giải phương trình $\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=2x(1)$

***Giải***

Điều kiện: $-1\le x\le 1.$

Ta nhận thấy rằng $\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{2}}\right)^2+\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}\right)^2=1$

Do đó ta đặt $\sqrt{\dfrac{1+x}{2}}=\cos t;\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}=\sin t,0\le t\le\dfrac{\pi}{2}.$

Từ đó suy ra $\sqrt{1+x}=\sqrt{2}\cos t;\sqrt{1-x}=\sqrt{2}\sin t;x=2\cos^2 t-1.$

Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt{2}\cos t - 1)(\sqrt{2}\sin t + 1) = 2(2\cos^2 t - 1)$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{2}\cos t - 1)(\sqrt{2}\sin t - 2\sqrt{2}\cos t - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\cos t = 1 \\ \sqrt{2}\sin t - 2\sqrt{2}\cos t - 1 = 0 \end{array}\right.$$

+)Với $\sqrt{2}\text{cost}=1 \Leftrightarrow \text{cost}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 0.$

+)Với $\sqrt{2}\sin t - 2\sqrt{2}\text{cost -1=0} \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin t = 2\sqrt{2}\text{cost+1}$

(Do $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \text{cost} \ge 0; \sin t \ge 0$ )

$$\Leftrightarrow 2(1-\cos^2 t) = 1 + 8\cos^2 t + 4\sqrt{2}\cos t$$
$$\Leftrightarrow 10\cos^2 t + 4\sqrt{2}\cos t - 1 = 0 \Rightarrow \cos t = \frac{\sqrt{2}}{10}$$
$$\Leftrightarrow 2\left(1-\cos^2 \text{t}\right) = 1 + 4\sqrt{2}\text{cost+8cos}^2 t$$
$$\Leftrightarrow 10\cos^2 t + 4\sqrt{2}\text{cost-1=0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{cost=}\dfrac{\sqrt{2}}{10} \Rightarrow x = -\dfrac{24}{25} \\ \text{cost=-}\dfrac{\sqrt{2}}{2}(L) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm $x = 0; x = -\dfrac{24}{25}$.

**Bài số 47**: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{y}{x} = 2 + xy \\ y(y+2z) = 1 \quad (x, y, z \in \mathbb{R}). \\ z(z-2x) = 1 \end{cases}$

***Giải***

*/ Từ (1) biến đổi được $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$. Đặt $x = \tan\alpha \Rightarrow y = \tan 2\alpha$

*/ Từ (2) biến đổi được $z = \dfrac{1-y^2}{2y} = \dfrac{1-\tan^2 2\alpha}{2\tan^2 2\alpha} = \cot 4\alpha$

*/ Từ (3) biến đổi được $x = -\dfrac{1-z^2}{2z} \Rightarrow x = -\cot 8\alpha$

*/ Giải phương trình $\tan\alpha = -\cot 8\alpha$ hay $\cot 8\alpha = \cot(\alpha + \frac{\pi}{2})$ ta được

$\alpha = \frac{\pi}{14} + k\frac{\pi}{7}$. Từ đó thu được nghiệm của hệ là $\begin{cases} x = -\cot(\frac{4\pi}{7} + \frac{k8\pi}{7}) \\ y = \tan(\frac{\pi}{7} + \frac{k2\pi}{7}) \\ z = \cot(\frac{2\pi}{7} + \frac{k4\pi}{7}) \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

**Bài số 48**: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 3x^2y = y \\ y^3 + 3y^2z = z \\ z^3 + 3z^2x = x \end{cases}$

***Giải***

Rõ ràng nếu $xyz = 0$ thì hệ có nghiệm $(0;0;0)$. (1)

Xét khi $xyz \neq 0$.

$$x^3 + 3x^2y = y \Leftrightarrow x^3 = (1 - 3x^2)y \Leftrightarrow \frac{1}{y} = \left(\frac{1}{x}\right)^3 - 3\cdot\frac{1}{x}$$

Khi $|x| \geq \frac{1}{2}$, đặt $x = \frac{1}{2\cos\alpha}, \alpha \in [0;\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ thì

$$y = \frac{1}{2\cos 3\alpha}, z = \frac{1}{2\cos 9\alpha}, x = \frac{1}{2\cos 27\alpha}$$

Nên $\cos 27\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow 27\alpha = \pm\alpha + k2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{k_1\pi}{13}, k_1 \in \{0;1;...;13\} \\ \alpha = \frac{k_2\pi}{14}, k_2 \in \{1;2;...;13\} \setminus \{7\} \end{array}\right.$ (2)

Ngoài ra rõ ràng hệ có tối đa 27 nghiệm nên (1) và (2) là tất cả nghiệm của hệ.

**Bài số 49**: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2(x+1) = 2(y^3 - x) + 1 \\ y^2(y+1) = 2(z^3 - y) + 1 \\ z^2(z+1) = 2(x^3 - z) + 1 \end{cases}$ (I)

***Giải***

Ta có: $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+x^2+2x=2y^3+1 \\ y^3+y^2+2y=2z^3+1 \\ z^3+z^2+2z=2x^3+1 \end{cases}$ *hay* $\begin{cases} \mathrm{f}(x)=g(y) \\ \mathrm{f}(y)=g(z) \\ \mathrm{f}(z)=g(x) \end{cases}$

Trong đó $\mathrm{f}(t)=t^3+t^2+2t$ và $\mathrm{g}(t)=2t^3+1$.

Ta thấy g($t$), f($t$) là hàm đồng biến trên R vì:

$$\mathrm{f}'(t)=3t^2+2t+2>0,\ \mathrm{g}'(t)=6t^2\ge 0,\ \forall t\in \mathrm{R}.$$

Từ đó suy ra hệ (I) tương đương với hệ: $\begin{cases} x=y=z \\ \mathrm{h}(x)=0 \end{cases}$ $(II)$

Trong đó $\mathrm{h}(t)=t^3-t^2-2t+1$ và $\mathrm{h}(t)$ liên tục trên R. Hơn nữa ta có:

$\mathrm{h}(-2)<0,\ \mathrm{h}(0)>0,\ \mathrm{h}(1)<0,\ \mathrm{h}(2)>0$ nên phương trình $\mathrm{h}(t)=0$ có ba nghiệm phân biệt đều nằm trong khoảng $(-2;\,2)$.

Đặt $x=2\cos u,\ u\in(0;\,\pi)$. Khi đó $\sin u\neq 0$ và (II) có dạng:

$$\begin{cases} x=y=z=2\cos u,\ u\in(0;\,\pi) \\ 8\cos^3 u-4\cos^2 u-4\cos u+1=0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x=y=z=2\cos u,\ u\in(0;\,\pi) \\ \sin u\left(8\cos^3 u-4\cos^2 u-4\cos u+1\right)=0 \end{cases}$$

Hay $\begin{cases} x=y=z=2\cos u,\ u\in(0;\,\pi) \\ \sin 4u=\sin 3u \end{cases}$ (III).

Giải hệ (III) ta được $u\in\left\{\frac{\pi}{7};\frac{3\pi}{7};\frac{5\pi}{7}\right\}$ và $\begin{cases} x=y=z=2\cos u,\ u\in(0;\,\pi) \\ u\in\left\{\frac{\pi}{7};\frac{3\pi}{7};\frac{5\pi}{7}\right\} \end{cases}$.

**Bài số 50**: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3\left(x+\frac{1}{x}\right)=4\left(y+\frac{1}{y}\right)=5\left(z+\frac{1}{z}\right) \\ xy+yz+zx=1 \end{cases}$

***Giải***

Vì $\frac{x}{3(x^2+1)}=\frac{y}{4(y^2+1)}=\frac{z}{5(z^2+1)}$ nên x, y, z có cùng dấu, ngoài ra, nếu (x, y, z) là nghiệm của hệ thì (-x, -y, -z) cũng là nghiệm. Như vậy ta chỉ cần đi tìm các nghiệm dương.

Đặt $x=\tan\frac{\alpha}{2}, y=\tan\frac{\beta}{2}, z=\tan\frac{\gamma}{2}$ ( $0<\alpha,\beta,\gamma<\pi$, $\alpha+\beta+\gamma=\pi$), ta được

$$\frac{\sin\alpha}{3}=\frac{\sin\beta}{4}=\frac{\sin\gamma}{5}.$$

Từ định lý hàm số sin bây giờ suy ra $\alpha, \beta, \gamma$ là các góc của tam giác có độ dài các cạnh tương ứng là 3, 4, 5.

Do tam giác vuông nên ta có : $\gamma=\frac{\pi}{2},\sin\alpha=\frac{3}{5},\sin\beta=\frac{4}{5}$.

Vì vậy $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3},\tan\frac{\beta}{2}=\frac{1}{2},\tan\frac{\gamma}{2}=1.$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là: $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2};1\right),\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{2};-1\right)$.

**Bài số 51**: Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+3y=4y^3\\ y+3z=4z^3\\ z+3x=4x^3\end{cases}$

***Giải***

Ta viết lại hệ dưới dạng $\begin{cases}x=4y^3-3y\\ y=4z^3-3z\\ z=4x^3-3x\end{cases}$

Ta chứng minh rằng tất cả các số x, y, z theo trị tuyệt đối không vượt quá 1. Thật vậy, giả sử x là số lớn nhất trong các số này và x > 1 thì ta có $z = 4x^3 - 3x > x$. Ta đi đến mâu thuẫn.

Nếu giả sử x là số nhỏ nhất và x < - 1 thì ta cũng có $z = 4x^3 - 3x < x$, cũng mâu thuẫn.

Như vậy $-1 \le x, y, z \le 1$ và ta có thể thực hiện đặt $x = \cos\alpha$ $(0 \le \alpha \le \pi)$. Khi đó $z = \cos3\alpha$, $y = \cos9\alpha$, $x = \cos27\alpha$. Bây giờ rõ ràng rằng số nghiệm của hệ phương trình ban đầu bằng số nghiệm của phương trình $\cos\alpha = \cos27\alpha$ trên $[0 ; \pi]$.

Dễ dàng thấy rằng số nghiệm này đúng bằng 27:

$$\alpha=\frac{k\pi}{13},k=0,1,2,...,13;\quad \alpha=\frac{k\pi}{14},k=1,2,...,13.$$

## VI. Phương pháp sử dụng lượng liên hợp

*Một số hằng đẳng thức thường dùng*

+ $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$

+ $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$

+ $x^4 - y^4 = (x-y)(x+y)(x^2+y^2)$

...

+ $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+...+xy^{n-2}+y^{n-1})$

*Sử dụng những hằng đẳng thức này, ta có thể quy phương trình vô tỉ ban đầu về dạng phương trình tích bằng việc làm xuất hiện các nhân tử chung. Từ đó ta có thể dễ dàng giải quyết tiếp.*

*Thường thì ở các bài toán sử dụng phương pháp này thì ý tưởng tổng quát của ta như sau: Giả sử nếu ta có phương trình dạng* $F(x)=0$ *với* $F(x)$ *xác định trên một miền D nào đó và ta nhẩm được một nghiệm x = a của phương trình thì ta có thể biến đổi phương trình đã cho lại thành* $(x-a)G(x)=0$.

**Bài số 52**: Giải phương trình $3\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x^2+8}-2=\sqrt{x^2+15}$ (1)

***Giải***

Ta dự đoán được nghiệm $x=\pm 1$, và ta viết lại phương trình như sau:

$$(1)\Leftrightarrow 3\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)+\left(\sqrt{x^2+8}-3\right)=\left(\sqrt{x^2+15}-4\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x^2-1)}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}+\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+8}+3}=\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+15}+4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+8}+3}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+15}+4} \end{array}\right.$$

Mặt khác, ta có:

$$\sqrt{x^2+15}>\sqrt{x^2+8}\Rightarrow \sqrt{x^2+15}+4>\sqrt{x^2+8}+3\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+15}+4}<\frac{1}{\sqrt{x^2+8}+3}$$

Nên phương trình thứ hai vô nghiệm.

Vậy (1) có 2 nghiệm $x=1, x=-1$.

**Bài số 53**: Giải phương trình $\sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3\left(x^2-x-1\right)}-\sqrt{x^2-3x+4}$ (1)

***Giải***

Trước hết, kiểm tra ta thấy được rằng phương trình đã cho có một nghiệm $x=2$ nên ta sẽ cố gắng đưa phương trình trên về phương trình tích xuất hiện nhân tử $\left(x-2\right)$. Ta có nhận xét rằng:

$\left(3x^2-5x+1\right)-\left(3x^2-3x-3\right)=-2\left(x-2\right)$ và $\left(x^2-2\right)-\left(x^2-3x+4\right)=3\left(x-2\right)$

Ta đi đến lời giải như sau:

$$(1)\Leftrightarrow\sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{3\left(x^2-x-1\right)}=\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2-3x+4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{-2x+4}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3\left(x^2-x+1\right)}}=\frac{3x-6}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}$$

$$\Leftrightarrow\left(x-2\right)\left[\frac{2}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3\left(x^2-x-1\right)}}+\frac{3}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}\right]=0$$

Mặt khác, ta có:

$$\frac{2}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3\left(x^2-x-1\right)}}+\frac{3}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}>0 \text{ với mọi } x$$

Vậy phương trình (1) có một nghiệm duy nhất $x = 2$.

**Bài số 54**: Giải phương trình $2\sqrt{x^2-7x+10}=x+\sqrt{x^2-12x+20}$ (1)

***Giải***

Cũng bằng cách kiểm tra, ta thấy pt (1) nhận $x = 1$ làm một nghiệm nên ta có thể đưa phương trình (1) về dạng phương trình tích xuất hiện nhân tử $\left(x-1\right)$.

Ta viết lại như sau:

$$(1)\Leftrightarrow 2\left[\sqrt{x^2-7x+10}-\left(x+1\right)\right]=\left[\sqrt{x^2-12x+20}-\left(x+2\right)\right] \quad (2)$$

Để ý rằng hai phương trình $\sqrt{x^2-7x+10}-\left(x+1\right)=0$ và $\sqrt{x^2-12x+20}-\left(x+2\right)=0$ vô nghiệm nên nhân liên hợp hai vế của (2) ta có:

$$\frac{-18\left(x-1\right)}{\sqrt{x^2-7x+10}+x+1}=\frac{-16\left(x-1\right)}{\sqrt{x^2-12x+20}+x+2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \dfrac{9}{\sqrt{x^2-7x+10}+x+1}=\dfrac{8}{\sqrt{x^2-12x+20}+x+2} \quad (*) \end{array}\right.$$

Pt (*) $\Leftrightarrow 8\sqrt{x^2-7x+10}-9\sqrt{x^2-12x+20}=x+10$

Kết hợp với pt (1) ta có hệ sau

$$\begin{cases} 8\sqrt{x^2-7x+10}-9\sqrt{x^2-12x+20}=x+10 \\ 2\sqrt{x^2-7x+10}-\sqrt{x^2-12x+20}=x \end{cases}$$

Lấy phương trình thứ nhất trừ đi 9 lần phương trình thứ hai, ta thu được:

$$5\sqrt{x^2-7x+10}=4x-5 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{5}{4} \\ x^2-15x+25=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{15+5\sqrt{5}}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x=1, x=\dfrac{15+5\sqrt{5}}{2}$.

**Bài số 55**: Giải phương trình $\sqrt[3]{162x^3+2}-\sqrt{27x^2-9x+1}=1$

***Giải***

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{162x^3-6}{\left(\sqrt[3]{162x^3+2}\right)^2+2\sqrt[3]{162x^3+2}+4}-\frac{3x(3x-1)}{\sqrt{27x^2-9x+1}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(3x-1)(9x^2+3x+1)}{\left(\sqrt[3]{162x^3+2}\right)^2+2\sqrt[3]{162x^3+2}+4}-\frac{3x(3x-1)}{\sqrt{27x^2-9x+1}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)\left[\frac{2(9x^2+3x+1)}{\left(\sqrt[3]{162x^3+2}\right)^2+2\sqrt[3]{162x^3+2}+4}-\frac{3x}{\sqrt{27x^2-9x+1}+1}\right]=0$$

Xét phương trình:

$$\frac{2(9x^2+3x+1)}{\left(\sqrt[3]{162x^3+2}\right)^2+2\sqrt[3]{162x^3+2}+4}-\frac{3x}{\sqrt{27x^2-9x+1}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(9x^2+3x+1\right)}{\left(\sqrt[3]{162x^3+2}\right)^2+2\sqrt[3]{162x^3+2}+4}=\frac{3x}{\sqrt[3]{162x^3+2}}$$

Ta đặt $a=\sqrt[3]{162x^3+2}$ suy ra:

$$2\left(3x+\frac{1}{3x}+1\right)=a+\frac{4}{a}+2\Leftrightarrow 3x+\frac{1}{3x}+1=\frac{a}{2}+\frac{2}{a}+1\Rightarrow 3x=\frac{a}{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{3}$.

**Bài số 56**: Giải phương trình $x^3-3x+1=\sqrt{8-3x^2}$

***Giải***

Ta có phương trình viết lại thành: $x^3-2x-1+4\frac{x^2-x-1}{\sqrt{8-3x^2}+2-x}=0$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-x-1\right)\left(x+1+\frac{4}{\sqrt{8-3x^2}+2-x}\right)=0$$

Xét $f\left(x\right)=\sqrt{8-3x^2}+2-x$ ta có: $f'\left(x\right)=\frac{-3x}{\sqrt{8-3x^2}}-1$

$$\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow \frac{-3x}{\sqrt{8-3x^2}}=1\Leftrightarrow x=-\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Ta có bảng biến thiên:

| $x$ | $-\frac{2\sqrt{6}}{3}$ | | $-\sqrt{\frac{2}{3}}$ | | $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $\frac{6+4\sqrt{6}}{3}$ | $\searrow$ | |

$$\Rightarrow f\left(x\right)\le\frac{6+4\sqrt{6}}{3} \text{ kết hợp với } |x|\le\frac{2\sqrt{6}}{3}\ \Rightarrow 0<f\left(x\right)\le\frac{6+4\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow x+1+\frac{4}{\sqrt{8-3x^2}+2-x}=x+1+\frac{4}{f\left(x\right)}\ge-\frac{2\sqrt{6}}{3}+1+\frac{4}{\frac{6+4\sqrt{6}}{3}}>0$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

**Bài số 57**: Giải phương trình $\sqrt{3-x}+\sqrt{2+x}=x^3+x^2-4x-4+|x|+|x-1|$

***Giải***

ĐK: $-2\le x\le 3$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\left(\sqrt{3-x}-|x-1|\right)+\left(\sqrt{2+x}-|x|\right)=x^3+x^2-4x-4$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+x+2}{\sqrt{3-x}+|x-1|}+\frac{-x^2+x+2}{\sqrt{2+x}+|x|}=(x+2)(x+1)(x-2)$$

$$\Leftrightarrow (2-x)(x+1)\left[\frac{1}{\sqrt{3-x}+|x-1|}+\frac{1}{\sqrt{2+x}+|x|}+(x+2)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right..$$

**Bài số 58**: Giải phương trình: $\sqrt[3]{x^2-1}+x=\sqrt{x^3-2}$.

***Giải***

Điều kiện: $x\ge\sqrt[3]{2}$ .Phương trình đã cho tương đương với:

$$(\sqrt[3]{x^2-1}-2)+(x-3)=(\sqrt{x^3-2}-5)\Leftrightarrow(x-3)\left[1+\frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+2\sqrt[3]{(x^2-1)}+4}\right]=(x-3).\frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=3 \\ 1+\dfrac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+2\sqrt[3]{(x^2-1)}+4}=\dfrac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5} \quad (*) \end{array}\right.$$

Ta sẽ chứng minh ở (*), VP >2 >VT

$$VP=\frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}>2\Leftrightarrow x^2+3x-1>2\sqrt{x^3-2}\Leftrightarrow(x^2+3x-1)^2-4(x^3-2)>0$$

$$\Leftrightarrow x^4+2x^3+7x^2-6x+9>0\Leftrightarrow(x^2+x)^2+(x-3)^2+5x^2>0,\forall x\ge\sqrt[3]{2}$$

$$VT=1+\frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+2\sqrt[3]{(x^2-1)}+4}<2\Leftrightarrow x<\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+2\sqrt[3]{(x^2-1)}+1$$

Đặt t = $\sqrt[3]{(x^2-1)}>0$.

Cần chứng minh: $\sqrt{t^3+1}<t^2+2t+1\Leftrightarrow t^4+3t^3+6t^2+4t>0,\forall t>0$, đúng.

Vậy (*) vô nghiệm hay phương trình đã cho có nghiệm duy nhất x = 3.

**Bài số 59**: Giải phương trình $\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt{x-3}+\sqrt{x+1}+x=\dfrac{x+3}{x^2-6}+5$

***Giải***

Đk: $x\geq 3$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$\left(\sqrt[3]{x^2-1}-2\right)+\sqrt{x-3}+\left(\sqrt{x+1}-2\right)+\left(x-3\right)=\frac{x+3}{x^2-6}-2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1-8}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}+\sqrt{x-3}+\frac{x+1-4}{\sqrt{x+1}+2}+\left(x-3\right)=\frac{15+x-2x^2}{x^2-6}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-3}\left[\frac{\sqrt{x-3}\left(x+3\right)}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}+1+\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+1}+2}+\sqrt{x-3}+\frac{\sqrt{x-3}\left(2x+5\right)}{x^2-6}\right]=0$$

$\Leftrightarrow x=3$.

**Bài số 60**: Giải phương trình $\sum\limits_{k=2}^{100}\sqrt[3]{x^2+k^3}=x^2+5049\,(*)$

***Giải***

Ta nhẩm thấy x= 0 là nghiệm của phương trình nên ta biến đổi:

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}\Rightarrow\sum_{k=2}^{100}k=\frac{100.(100+1)}{2}-1=5049\,)$$

$$(*)\Leftrightarrow\sum_{k=2}^{100}(\sqrt[3]{x^2+k^3}-k)=x^2+5049-\sum_{k=2}^{100}k\Leftrightarrow\sum_{k=2}^{100}\frac{x^2+k^3-k^3}{\sqrt[3]{(x^2+k^3)^2}+k\sqrt[3]{x^2+k^3}+k^2}=x^2+5049-5049$$

$$\Leftrightarrow\sum_{k=2}^{100}\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^2+k^3)^2}+k\sqrt[3]{x^2+k^3}+k^2}=x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \sum\limits_{k=2}^{100}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x^2+k^3)^2}+k\sqrt[3]{x^2+k^3}+k^2}=1\qquad(**)\end{array}\right.$$

Xét phương trình (**), ta có: $VT<\sum\limits_{k=2}^{100}\dfrac{1}{k^2}<\sum\limits_{k=2}^{100}\dfrac{1}{k(k-1)}=\sum\limits_{k=2}^{100}(\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k})=1-\dfrac{1}{100}<1=VP$

Suy ra (**) vô nghiệm. Vậy (*) có nghiệm duy nhất là x = 0.

## VII. Phương pháp sử dụng tọa độ vector

**Bổ đề 1**: Cho hai vectơ $\vec{u},\vec{v}$. Khi đó:

i) $\left|\vec{u}+\vec{v}\right| \le \left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right|$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v}$

ii) $\left|\vec{u}+\vec{v}\right| \ge \left|\left|\vec{u}\right| - \left|\vec{v}\right|\right|$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u} \uparrow\downarrow \vec{v}$

Trong ii) nếu ta thay $\vec{v}$ bởi $-\vec{v}$ thì ta có:

iii) $\left|\vec{u}-\vec{v}\right| \ge \left|\left|\vec{u}\right| - \left|\vec{v}\right|\right|$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v}$

***Chứng minh***

i) Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow \vec{u}+\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ .

Với 3 điểm A, B, C luôn có: $AC \le AB + BC$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó $\Leftrightarrow \vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v}$

ii) Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow \vec{u}+\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

Với 3 điểm A, B, C luôn có: $AC \ge \left|AB - BC\right|$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ A, C, B thẳng hàng theo thứ tự đó $\Leftrightarrow \vec{u} \uparrow\downarrow \vec{v}$

iii) Hiển nhiên có được từ ii)

**Bổ đề 2:** Với mọi vectơ $\vec{u}$, ta có: $\vec{u}^2 \ge 0$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

***Chứng minh***

(Dễ dàng)

**Bổ đề 3:** Cho hai vectơ $\vec{u},\vec{v}$. Khi đó:

i) $\vec{u}.\vec{v} \le \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v}$

ii) $\vec{u}.\vec{v} \ge -\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u} \uparrow\downarrow \vec{v}$

***Chứng minh***

i) Ta có: $\begin{cases} \vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|\cos(\vec{u},\vec{v}) \\ \cos(\vec{u},\vec{v}) \le 1 \end{cases} \Rightarrow đpcm.$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \cos(\vec{u},\vec{v}) = 1 \Leftrightarrow \vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v}$

ii) Ta có: $\begin{cases} \vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|\cos(\vec{u},\vec{v}) \\ \cos(\vec{u},\vec{v}) \ge -1 \end{cases} \Rightarrow đpcm.$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \cos(\vec{u},\vec{v}) = -1 \Leftrightarrow \vec{u} \uparrow\downarrow \vec{v}$

**Bài số 61:** Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 + 2x + 10} = \sqrt{29}$ (1)

***Giải***

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + 2^2} + \sqrt{(x+1)^2 + 3^2} = \sqrt{29}$

Chọn $\vec{u}(x-1;2), \vec{v}(-x-1;3) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (-2;5) \Rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{29}$

(1) trở thành: $|\vec{u}| + |\vec{v}| = |\vec{u} + \vec{v}|$.

Mặt khác, ta luôn có: $|\vec{u}| + |\vec{v}| \ge |\vec{u} + \vec{v}|$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v} \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{-x-1}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{5}$

***Bình luận :*** Mấu chốt của việc chọn tọa độ cho hai vectơ trên là gì? Rất đơn giản, phải thỏa mãn 2 điều kiện:

***Một là***: Vectơ tổng phải là vectơ không đổi ( có tọa độ cụ thể) và $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{29}$

***Hai là***: Hai vectơ chọn phải có tung độ ( hoặc hoành độ) cùng dấu.

Chẳng hạn: 2 và 3 hoặc -2 và -3.

**Bài số 62**: Giải phương trình: $\left|\sqrt{x^2 - 2x + 5} - \sqrt{x^2 - 6x + 10}\right| = \sqrt{5}$ (2)

***Giải***

$(2) \Leftrightarrow \left|\sqrt{(x-1)^2+2^2}-\sqrt{(x-3)^2+1^2}\right|=\sqrt{5}$.

Chọn $\vec{u}(x-1;2),\vec{v}(x-3;1)\Rightarrow \vec{u}-\vec{v}=(2;1)$.

(2) trở thành: $\left|\left|\vec{u}\right|-\left|\vec{v}\right|\right|=\left|\vec{u}-\vec{v}\right|$. Mặt khác, luôn có: $\left|\left|\vec{u}\right|-\left|\vec{v}\right|\right|\le\left|\vec{u}-\vec{v}\right|$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u}\uparrow\uparrow\vec{v}\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{x-3}{1}\Leftrightarrow x=5$

***Cách khác***:

Chọn $\vec{u}(x-1;2),\vec{v}(3-x;-1)\Rightarrow \vec{u}+\vec{v}=(2;1)$.

(2) trở thành: $\left|\left|\vec{u}\right|-\left|\vec{v}\right|\right|=\left|\vec{u}+\vec{v}\right|$. Mặt khác, luôn có: $\left|\left|\vec{u}\right|-\left|\vec{v}\right|\right|\le\left|\vec{u}+\vec{v}\right|$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u}\uparrow\downarrow\vec{v}\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{3-x}{-1}\Leftrightarrow x=5$

***Bình luận***:

Nếu đề bài ra như sau thì giải quyết thế nào?

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2-2x+5}-\sqrt{x^2-6x+10}=\sqrt{5}\\ \sqrt{x^2-6x+10}-\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{5}\end{array}\right..$$

Rất đơn giản, đặt điều kiện để VT > 0, giải bình thường sau đó kiểm tra no tìm được với điều kiện.

**Bài số 63**: Giải phương trình: $\sqrt{9x^3-18x^2}+\sqrt{36x^2-9x^3}=9+x^2$ (3)

***Giải***

Bài trên ko giống dạng 2 bài trước, ta tìm hướng giải quyết khác.

Viết lại pt(3) như sau: $1.\sqrt{9x^3-18x^2}+1.\sqrt{36x^2-9x^3}=9+x^2$ (3)

Điều kiện: $2\le x\le 4$.

Chọn $\vec{u}(1;1),\vec{v}(\sqrt{9x^3-18x^2};\sqrt{36x^2-9x^3})\Rightarrow\begin{cases}\left|\vec{u}\right|=\sqrt{2}\\ \left|\vec{v}\right|=3\sqrt{2}x\end{cases}\Rightarrow\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|=6x$

Mặt khác, luôn có: $\vec{u}.\vec{v}\le\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\vec{u}\uparrow\uparrow\vec{v}$

Kết hợp với pt(3), ta có: $9+x^2 \le 6x \Leftrightarrow x=3$. Với x = 3 thì $\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v}$

Vậy pt(3) có no x = 3.

**Bài số 64**: Giải bpt: $x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x} \ge 2\sqrt{x^2+1}$ (4)

***Giải***

Điều kiện: $-1 \le x \le 3$.

Viết lại (4) như sau: $x\sqrt{x+1}+1.\sqrt{3-x} \ge 2\sqrt{x^2+1}$ (4)

Chọn $\vec{u}(x;1),\ \vec{v}(\sqrt{x+1};\sqrt{3-x}) \Rightarrow \begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{x^2+1} \\ |\vec{v}| = 2 \end{cases}$

(4) trở thành: $\vec{u}.\vec{v} \ge |\vec{u}|.|\vec{v}|$ (*). Mặt khác, luôn có: $\vec{u}.\vec{v} \le |\vec{u}|.|\vec{v}|$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}| \Leftrightarrow \vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v} \Leftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{3-x}} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(3-x) = x+1 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-3x^2+x+1=0 \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1+\sqrt{2} \end{array}\right.$$

**Bài số 65**: Giải bpt: $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-2} \ge \sqrt{3x^2+9x-3}$ (5)

***Giải***

Điều kiện: …………………..

Hình thức ko khác gì bài số 4, tuy nhiên nếu chỉ làm đơn thuần như bài số 4 thì ko thể có vế phải được. Vì thế phải biến đổi ***" nghệ thuật"*** như sau:

$$(5) \Leftrightarrow 1.\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2x-2}}{\sqrt{2}} \ge \sqrt{3x^2+9x-3} \ (5)$$

Ta chọn các vector sao cho:

$$\vec{u}(1;\sqrt{2}),\vec{v}(\sqrt{x^2+2x};\frac{\sqrt{2x-2}}{\sqrt{2}}) \Rightarrow \begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{3} \\ |\vec{v}| = \sqrt{x^2+3x-1} \end{cases} \Rightarrow |\vec{u}|.|\vec{v}| = \sqrt{3x^2+9x-3}$$

Bpt(5) trở thành: $\vec{u}.\vec{v} \geq |\vec{u}|.|\vec{v}|$ (*). Mặt khác, luôn có: $\vec{u}.\vec{v} \leq |\vec{u}|.|\vec{v}|$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}| \Leftrightarrow \vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x} = \frac{\sqrt{2x-2}}{2} \Leftrightarrow x^2+2x = \frac{x-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+3x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1(l) \\ x=-\frac{1}{2}(l) \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \varnothing$$

***Bình luận:*** Việc viết ra 2 con số 1 và $\sqrt{2}$ thật ko tự nhiên chút nào? Mò chăng? Ta thấy rằng VP ko âm, vì thế ta sẽ viết vế trái như sau:

$$\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-2} = \alpha.\frac{\sqrt{x^2+2x}}{\alpha}+\beta.\frac{\sqrt{2x-2}}{\beta}, (\alpha, \beta > 0)$$

Chọn

$$\vec{u}(\alpha;\beta), \vec{v}\left(\frac{\sqrt{x^2+2x}}{\alpha}; \frac{\sqrt{2x-2}}{\beta}\right) \Rightarrow |\vec{u}|.|\vec{v}| = \sqrt{(\alpha^2+\beta^2)\left(\frac{x^2+2x}{\alpha^2}+\frac{2x-2}{\beta^2}\right)}$$

Hay là: $|\vec{u}|.|\vec{v}| = \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}x^2 + \frac{2(\alpha^2+\beta^2)^2}{\alpha^2\beta^2}x - \frac{2(\alpha^2+\beta^2)}{\beta^2}}$

Đến đây thì mọi việc thật đơn giản, chỉ cần tìm $\alpha, \beta$ sao cho:

$$\begin{cases} \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2} = 3 \\ \frac{2(\alpha^2+\beta^2)^2}{\alpha^2\beta^2} = 9 \\ -\frac{2(\alpha^2+\beta^2)}{\beta^2} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \beta = \sqrt{2}\alpha, (\beta, \alpha > 0)$$

Ta chỉ cần chọn $\alpha = 1, \beta = \sqrt{2}$ là xong.

**Bài số 66**: Xác định m để pt sau có nghiệm:

$$\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1} = m \ (6)$$

***Giải***

$$(6) \Leftrightarrow \sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}-\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=m$$

Chọn $\vec{u}(x-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}),\ \vec{v}(x+\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow \vec{u}-\vec{v}=(-1;0) \Rightarrow \left|\vec{u}-\vec{v}\right|=1$

Ta có: $|m|=\left||\vec{u}|-|\vec{v}|\right| \le \left|\vec{u}-\vec{v}\right|=1 \Rightarrow |m|\le 1.$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow x\in\varnothing$.

Vậy: Để pt có no thì $-1<m<1$

***Bình luận***:

Từ bài toán trên ta có thể dẫn xuất ra 2 bài toán sau:

+) Bài toán 1: Xác định m đề pt sau có nghiệm:

$$\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1}=m$$

( Tất nhiên đáp số ko thay đổi)

+) Bài toán 2: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

$-1<\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1}<1$ và $-1<\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}<1$

**Bài số 67**: Xác định m đề pt sau có nghiệm:

$$\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=m \ \ (7)$$

*Lời giải bài toán trên thật đơn giản, ko khác gì lời giải bài toán 6. Tuy nhiên, độc giải hãy bình luận về các lời giải sau đây*:

****)Lời giải 1:***

$$(7) \Leftrightarrow \sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=m$$

Chọn $\vec{u}(x-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}),\ \vec{v}(-x-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2})\Rightarrow \vec{u}+\vec{v}=(-1;0)\Rightarrow \left|\vec{u}+\vec{v}\right|=1$

Ta có: $m=\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\geq\left|\vec{u}+\vec{v}\right|=1\Rightarrow m\geq 1.$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{-x-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\Leftrightarrow x\in\varnothing$.

Vậy: Để pt có no thì  m > 1.

***)Lời giải 2:***

Ta có:

$\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$ (*); $\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$ (**)

Vì đẳng thức ko đồng thời xảy ra ở (*) và (**) nên có: $m>\sqrt{3}$.

***)Lời giải 3***:

Đặt $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}+\dfrac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}=\dfrac{\frac{1}{2}-x}{\sqrt{(\frac{1}{2}-x)^2+\frac{3}{4}}}\Leftrightarrow x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-x\Leftrightarrow x=0$$

( Vì hàm $g(u)=\dfrac{u}{\sqrt{u^2+\frac{3}{4}}}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$).

Lập bảng biến thiên, ta thấy: $m\geq\min f(x)=f(0)=2$. Vậy $m\geq 2$.

***Bình luận***:

*Với 3 cách giải cho ta 3 đáp số?!. Cách giải nào đúng? Cách giải nào sai? Sai ở đâu? Nếu sai thì sửa sao cho đúng?*

****) Lời giải 1***:

Ta luôn có: $\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\ge\left|\vec{u}+\vec{v}\right|$, nhưng lưu ý rằng có đẳng thức khi hai vectơ cùng chiều. Chính cách chọn vectơ đã vi phạm điều cấm này.

Chọn lại như sau:

Chọn $\vec{u}(x-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}),\ \vec{v}(-x-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2})\Rightarrow\vec{u}+\vec{v}=(-1;\sqrt{3})\Rightarrow\left|\vec{u}+\vec{v}\right|=2$

Ta có: $m=\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\ge\left|\vec{u}+\vec{v}\right|=2\Rightarrow m\ge 2$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\dfrac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{-x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Leftrightarrow x=0$.Vậy: Để pt có no thì $m\ge 2$.

****)Lời giải 2:***

Sử dụng đánh giá trong lời giải 2 là hết sức cục bộ( đánh giá cùng lúc tổng 2 biểu thức chứ ko được đánh giá từng biểu thức một). Chẳng hạn ta có thể đánh giá vài cách khác như sau:

$$+)\,m=\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}>\sqrt{3}$$

$$+)\,m=\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}(x+2)^2}+\sqrt{\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}(x-2)^2}>0$$

$$+)\,m=\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}}>\sqrt{2}$$

$$+)\,m=\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}(x+\frac{2}{3})^2+\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}(x-\frac{2}{3})^2+\frac{2}{3}}>\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

.................................................

***Lào Cai, tháng 4 năm 2021***

***Trần Hoài Vũ***