

 Chuyên đề 9:

SỐ PHỨC

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. SỐ PHỨC

$$z = a + ib \text{ với } i^2 = -1$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

a là phần thực

b là phần ảo

Số phức liên hợp của z là: $\bar{z} = a - ib$

2. MÔĐUN $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

$$\text{Môđun: } |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

3. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC: $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

$M(a; b)$ là ảnh của z: $OM = r = \sqrt{a^2 + b^2}$ môđun của z

$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \varphi + k2\pi$ là Argument của z, $\arg z = \varphi$

4. DẠNG LƯỢNG GIÁC

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$z = re^{i\varphi}$$

$$r = |z|$$

$$\varphi = \arg z$$

5. CÁC PHÉP TOÁN VỀ SỐ PHỨC

– Phép cộng: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$

– Phép trừ: $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$

– Phép nhân: $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

– Phép chia: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 - i(a_1 b_2 - a_2 b_1)}{a_1^2 + b_1^2}$

Với dạng lượng giác: $z_1 z_2 = rr'[\cos(\varphi + \beta) + i \sin(\varphi + \beta)] = rr'e^{i(\varphi + \beta)}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{r'}[\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)] = \frac{r}{r'}e^{i(\alpha - \beta)}$$

6. LŨY THỪA SỐ PHỨC

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \text{ công thức de Moirve}$$

$$z^n = r^n e^{in\varphi}$$

7. CĂN BẬC n

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi} \quad (r > 0)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k2\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k2\pi}{n} \right) \right]$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k2\pi}{n} \right)}$$

B. ĐỀ THI

Bài 1: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2011

Tìm tất cả các số phức z , biết $z^2 = |z|^2 + \bar{z}$.

Giải

Giả sử $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có: $z^2 = |z|^2 + \bar{z} \Leftrightarrow (x + yi)^2 = x^2 + y^2 + x - iy$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = x^2 + y^2 + x - iy$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + x = x^2 - y^2 \\ -y = 2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y^2 \\ y = 0 \vee x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 4y^2 = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy $z = 0$, $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

Bài 2: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2011

Tính môđun của số phức z , biết $(2z - 1)(1 + i) + (\bar{z} + 1)(1 - i) = 2 - 2i$.

Giải

Giả sử $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có: $(2z - 1)(1 + i) + (\bar{z} + 1)(1 - i) = 2 - 2i$

$$\Leftrightarrow [2(x + yi) - 1](1 + i) + [(x - yi) + 1](1 - i) = 2 - 2i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}. \text{ Suy ra: } z = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$$

Do đó: $|z| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Bài 3: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2011

Tìm số phức z , biết $\bar{z} - \frac{5 + i\sqrt{3}}{z} - 1 = 0$.

Giải

Giả sử $z = x + yi$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \bar{z} - \frac{5+i\sqrt{3}}{z} - 1 = 0 &\Leftrightarrow z\bar{z} - (5+i\sqrt{3}) - z = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + y^2) - (5+i\sqrt{3}) - (x+yi) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + y^2 - x - 5) - (y + \sqrt{3})i = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - x - 5 = 0 \\ y + \sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ y = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \vee x = 2 \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy $z = -1 - i\sqrt{3}$ hoặc $z = 2 - i\sqrt{3}$.

Bài 4: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2011

Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} \right)^3$.

Giải

Cách 1:

$$\text{Ta có: } z = \frac{1+3i\sqrt{3}+9i^2+3\sqrt{3}i^3}{1+3i+3i^2+i^3} = \frac{1+3i\sqrt{3}-9-3\sqrt{3}i}{1+3i-3-i} = \frac{-4}{i-1} = \frac{-4(i+1)}{i^2-1} = 2+2i$$

Vậy số phức z có phần thực là 2 và phần ảo là 2.

Cách 2:

Có thể giải bằng cách chuyển về dạng lượng giác như sau:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } z &= \left[\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} \right]^3 = 2\sqrt{2} \frac{\cos\pi + i\sin\pi}{\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}} \\ &= 2\sqrt{2} \left[\cos\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) \right] = 2\sqrt{2} \left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \right] = 2+2i. \end{aligned}$$

Bài 5: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2011

Tìm số phức z , biết $z - (2+3i)\bar{z} = 1-9i$.

Giải

Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } z - (2+3i)\bar{z} = 1-9i \Leftrightarrow (x+yi) - (2+3i)(x-yi) = 1-9i$$

$$\Leftrightarrow (x+yi) - (2x-2yi+3xi+3y) = 1-9i$$

$$\Leftrightarrow (-x-3y) + (3y-3x)i = 1-9i \Leftrightarrow \begin{cases} -x-3y=1 \\ 3y-3x=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}.$$

Vậy $z = 2 - i$.

Bài 6: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2011

Cho số phức z thỏa mãn $(1+2i)^2 z + \bar{z} = 4i - 20$. Tính môđun của z .

Giải

Đặt $z = a + bi$. Ta có: $(-3 + 4i)(a + bi) + (a - bi) = 4i - 20$

$$\Leftrightarrow -3a - 3bi + 4ai - 4b + a - bi = 4i - 20$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a - 4b = -20 \\ 4a - 4b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 10 \\ a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } z = 4 + 3i \Rightarrow |z| = 5.$$

Bài 7: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2011

Cho số phức z thỏa mãn $z^2 - 2(1 + i)z + 2i = 0$. Tìm phần thực và phần ảo của $\frac{1}{z}$.

Giải

$$\text{Ta có: } z^2 - 2(1 + i)z + 2i = 0 \Leftrightarrow (z - 1 - i)^2 = 0 \Leftrightarrow z = 1 + i \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}.$$

Vậy phần thực của $\frac{1}{z}$ là $\frac{1}{2}$ và phần ảo là $-\frac{1}{2}$.

Bài 8: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2010

Tìm phần ảo của số phức z , biết $\bar{z} = (\sqrt{2} + i)^2(1 - \sqrt{2}i)$

Giải

$$\text{Ta có: } \bar{z} = (\sqrt{2} + i)^2(1 - \sqrt{2}i) = (1 + 2\sqrt{2}i)(1 - \sqrt{2}i) = 5 + \sqrt{2}i \Leftrightarrow z = 5 - \sqrt{2}i$$

$\Rightarrow$ Phần ảo của số phức z là $-\sqrt{2}$.

Bài 9 : ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2010

Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z} = \frac{(1 - \sqrt{3}i)^2}{1 - i}$. Tìm môđun của số phức $\bar{z} + iz$.

Giải

$$\text{Ta có: } (1 - \sqrt{3}i) = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right)$$

$$\Rightarrow (1 - \sqrt{3}i)^3 = 8(\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)) = -8 \Rightarrow \bar{z} = \frac{-8}{1 - i} = \frac{-8(1 + i)}{2} = -4 - 4i$$

$$\Rightarrow \bar{z} + iz = -4 - 4i + i(-4 + 4i) = -8(1 + i) \Rightarrow |\bar{z} + iz| = 8\sqrt{2}.$$

Bài 10: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2010

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn: $|z - i| = |(1 + i)z|$.

Giải

Giả sử $z = x + yi$ (với $x, y \in \mathbb{R}$)

Suy ra : $z - i = x + (y - 1)i$ và $(1 + i)z = (1 + i)(x + yi) = (x - y) + (x + y)i$

$$\text{Ta có } |z - i| = |(1 + i)z| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(x - y)^2 + (x + y)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y^2 - 2y + 1) = 2(x^2 + y^2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y + 1)^2 = 2.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn tâm $I(0; -1)$ có bán kính $R = \sqrt{2}$.

Bài 11: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2010

Tìm số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo.

Giải

Đặt $z = a + bi$ (với $a, b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$

$$\text{Từ giả thiết ta có hệ phương trình } \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \end{cases}.$$

Vậy: $z_1 = 1 + i, z_2 = 1 - i, z_3 = -1 + i, z_4 = -1 - i$

Bài 12: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2009

Gọi z_1 và z_2 là 2 nghiệm phức của phương trình: $z^2 + 2z + 10 = 0$.

Tính giá trị của biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$

Giải

Ta có: $\Delta' = -9 = 9i^2$ do đó phương trình

$$\Leftrightarrow z = z_1 = -1 - 3i \text{ hay } z = z_2 = -1 + 3i$$

$$\Rightarrow A = |z_1|^2 + |z_2|^2 = (1 + 9) + (1 + 9) = 20$$

Bài 13: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2009

Tìm số phức z thỏa mãn: $|z - (2 + i)| = \sqrt{10}$ và $z \cdot \bar{z} = 25$.

Giải

Gọi $z = x + yi$ (với $x, y \in \mathbb{R}$) suy ra $z - (2 + i) = (x - 2) + (y - 1)i$

$$\text{Ta có } |z - (2 + i)| = \sqrt{10} \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10 \quad (1)$$

$$z \cdot \bar{z} = 25 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25 \quad (2)$$

Giải hệ (1) và (2) ta được: $(x; y) = (3; 4)$ hoặc $(x; y) = (5; 0)$

Vậy: $z = 3 + 4i$ hoặc $z = 5$

Bài 14: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2010

Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(2 - 3i)z + (4 + i)\bar{z} = -(1 + 3i)^2$. Tìm phần thực và phần ảo của z .

Giải

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

Ta có $(2 - 3i)z + (4 + i)\bar{z} = -(1 + 3i)^2$

$$\Leftrightarrow (2 - 3i)(x + yi) + (4 + i)(x - yi) = 8 - 6i$$

$$\Leftrightarrow (6x + 4y) - (2x + 2y)i = 8 - 6i$$

$$\Leftrightarrow 6x + 4y = 8 \text{ và } 2x + 2y = 6 \Leftrightarrow x = -2 \text{ và } y = 5$$

Vậy phần thực của z là -2 và phần ảo của z là 5 .

Bài 15: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2010

Giải phương trình $z^2 - (1 + i)z + 6 + 3i = 0$ trên tập hợp các số phức.

Giải

Ta có: $\Delta = -24 - 10i = (1 - 5i)^2$

Do đó $z^2 - (1 + i)z + 6 + 3i = 0 \Leftrightarrow z = 1 - 2i$ hay $z = 3i$.

Bài 16: TNPT NĂM 2010

Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Xác định phần thực và phần ảo của số phức $z_1 - 2z_2$.

Giải

Ta có: $z_1 - 2z_2 = (1 + 2i) - 2(2 - 3i) = -3 + 8i$

Suy ra số phức $z_1 - 2z_2$ có phần thực là -3 và phần ảo là 8 .

Bài 17: TNPT NĂM 2010

Cho hai số phức $z_1 = 2 + 5i$ và $z_2 = 3 - 4i$. Xác định phần thực và phần ảo của số phức $z_1 \cdot z_2$.

Giải

Ta có: $z_1 z_2 = (2 + 5i)(3 - 4i) = 6 - 8i + 15i - 20i^2 = 26 + 7i$

$\Rightarrow$ số phức $z_1 z_2$ có phần thực là 26 và phần ảo là 7 .

Bài 18: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2009

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - (3 - 4i)| = 2$.

Giải

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$); suy ra $z - 3 + 4i = (x - 3) + (y + 4)i$

Từ giả thiết, ta có:

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2} = 2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 = 4$$

Tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn tâm $I(3; -4)$ bán kính $R = 2$

Bài 19: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2009

Cho số phức z thỏa mãn $(1 + i)^2(2 - i)z = 8 + i + (1 + 2i)z$. Tìm phần thực và phần ảo của z .

Giải

Ta có: $(1 + i)^2(2 - i)z = 8 + i + (1 + 2i)z$

$$\Leftrightarrow (2i)(2 - i)z - (1 + 2i)z = 8 + i \Leftrightarrow z[4i + 2 - 1 - 2i] = 8 + i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{8 + i}{1 + 2i} = \frac{(8 + i)(1 - 2i)}{5} = \frac{8 - 15i + 2}{5} = \frac{10 - 15i}{5} = 2 - 3i$$

Phần thực của z là 2. Phần ảo của z là -3 .

Bài 20: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2009

Giải phương trình sau trên tập hợp các số phức: $\frac{4z - 3 - 7i}{z - i} = z - 2i$

Giải

Ta có: $\frac{4z - 3 - 7i}{z - i} = z - 2i \Leftrightarrow z^2 - (4 + 3i)z + 1 + 7i = 0$ (với $z \neq i$)

$$\Delta = (4 + 3i)^2 - 4(1 + 7i) = 3 - 4i = (2 - i)^2$$

$$\text{Vậy: } z = \frac{4 + 3i + 2 - i}{2} = 3 + i \text{ hay } z = \frac{4 + 3i - 2 + i}{2} = 1 + 2i$$

Kết hợp với điều kiện nên phương trình có nghiệm $z = 3 + i$; $z = 1 + 2i$

Bài 21: TNPT NĂM 2009

Giải phương trình (S): $8z^2 - 4z + 1 = 0$ trên tập số phức.

Giải

Ta có: $\Delta = 16 - 32 = -16 = (4i)^2$

Do đó, phương trình đã cho có 2 nghiệm là:

$$z_1 = \frac{4 + 4i}{16} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i \text{ và } z_2 = \frac{4 - 4i}{16} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$$

Bài 22: TNPT NĂM 2009

Giải phương trình $2z^2 - iz + 1 = 0$ trên tập số phức.

Giải

Ta có: $\Delta = i^2 - 8 = -9 = (3i)^2$.

Do đó, phương trình đã cho có 2 nghiệm là:

$$z_1 = \frac{i + 3i}{4} = i \text{ và } z_2 = \frac{i - 3i}{4} = -\frac{1}{2}i$$