

TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

Tuyển tập một số bài toán tổ hợp

SỬ TẦM VÀ LATEX

Hướng tới kỳ thi VMO 2021

Phát hành tại blog lovetoan.wordpress.com

Lời giới thiệu

Tổ hợp là một vấn đề khó của toán sơ cấp nói chung cũng như trong các kì thi toán các cấp thì chủ đề này luôn có một chỗ đứng nhất định. Các bài toán tổ hợp đôi khi không cần những biến đổi toán học phức tạp mà đòi hỏi tư duy nhạy bén của người làm bài, vì vậy việc luyện tập với nhiều bài toán sẽ giúp chúng ta luyện thêm kiến thức và kĩ năng xử lý các bài toán này. Với mong muốn tạo ra một tài liệu giúp các bạn học sinh ôn luyện chủ đề khó nhằn này, fanpage đã cố gắng tổng hợp nhiều bài đã sưu tầm được thành một tuyển tập nho nhỏ giúp các bạn luyện tập chuẩn bị cho các kì thi olympic toán sắp tới mà các bạn tham dự. Tài liệu là sự kết hợp của nhiều nguồn, nhiều tài liệu khác lại nhằm mang tới cho bạn đọc những bài toán thú vị nhất. Trong này sẽ không đề cập tới các phương pháp như: đếm bằng hai cách, truy hồi, song ánh, hàm sinh,... Các bạn có thể tìm đọc chúng ở các tài liệu khác. Hy vọng đây sẽ là công cụ đắc lực của các bạn.

Mọi ý kiến đóng góp và thắc mắc vui lòng gửi về địa chỉ

Tạp chí và tư liệu toán học

<https://www.facebook.com/OlympiadMathematical>

Chương 1

Lý thuyết về tổ hợp.

1.1 Các quy tắc tổ hợp cơ bản.

Định nghĩa 1. Tập không rỗng A là tập hữu hạn nếu tồn tại số nguyên dương n và một song ánh $f : 1, 2, \dots, n \rightarrow A$. Trong tập đó tập A bao gồm n phần tử, và chúng ta nói rằng A là một tập hợp n . Số số phần tử của tập hợp A được đặt bằng $|A|$. Tập rỗng $\emptyset$ hữu hạn bởi định nghĩa và $|\emptyset| = 0$. Một tập hợp được gọi là vô hạn nếu nó không hữu hạn. Một tập hợp con k của A là tập con của A bao gồm k phần tử.

Quy tắc song ánh. Hai tập hợp không rỗng A và B có cùng số số phần tử khi và chỉ khi nếu tồn tại một song ánh $f : A \rightarrow B$. Mặc dù quy tắc song ánh rất là hiển nhiên nhưng chúng ta đề ra nó bởi những lý do sau. Đôi khi người ta nên xác định các biến với các tính chất đưa ra và nên suy ra tập A của tất cả các biến như vậy. Nếu B là một tập hợp với số phần tử k và tồn tại một song ánh $f : A \rightarrow B$ thì sẽ cùng có số phần tử k .

Quy tắc nhân. Để A và B là hai tập hợp hữu hạn và $f : A \rightarrow B$ một hàm số như là đối với mỗi phần tử $b \in B$ tồn tại chính xác k phần tử từ tập A mà có ảnh là B . Sau đó $|A| = k \cdot |B|$. Chúng ta thường sử dụng quy tắc này để phân biệt số phần tử của các kết quả được sắp xếp và không sắp xếp khi chúng ta chọn các phần tử từ các tập đã cho.

Quy tắc cộng. Nếu A là một tập hữu hạn và $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ và $A_i \cap A_j = \emptyset$ với tất cả i khác j , và

$$|A| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$$

Chúng ta sử dụng quy tắc cộng khi xét câu hỏi tổ hợp để đếm số phần tử của tập A . Đôi khi nó rất tự nhiên và dễ dàng để phân chia tập hợp A thành các tập con (khối) để xác định số lượng phần tử trong mỗi khối và để tính được số phần tử thu được.

Quy tắc tích số. Cho $A_1, A_2, \dots, A_n$ là các tập hợp hữu hạn mà lần lượt chứa $k_1, k_2, \dots, k_n$ phần tử và tích Cartesian $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ là 1 tập hợp chứa $k_1 k_2 \dots k_n$ phần tử đó là

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n| \quad (1)$$

Đặc biệt, nếu A là tập hợp chứa m phần tử thì A_n là tập hợp chứa m^n phần tử đó là $|A^n| = |A|^n$.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh đẳng thức (1) bằng quy nạp. Với $n = 1$ thì đẳng thức (1) trở thành $|A_1| = k_1$ và luôn đúng. Cho đẳng thức (1) đúng với tập hợp chứa $n - 1$ phần tử. Bây giờ chúng ta hãy xét tập hợp chứa n phần tử như là $|A_i| = k_i$ với $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ và $A_n = \{x_1, x_2, \dots, x_{k_n}\}$. Theo giả thiết quy nạp ta có

$$|A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1}| = k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_{n-1} \quad (2)$$

Với $i \in \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$, đặt

$$S_i = \{a_1, a_2, \dots, a_n, x_i | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_{n-1} \in A_{n-1}\} \quad (3)$$

Đó hiển nhiên là một ánh xạ giữa S_i và $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ được cho bởi $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x_i) \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$. Do đó

$$|S_i| = k_1 \times k_2 \times \dots \times k_{n-1}, i \in \{1, 2, \dots, k_n\} \quad (4)$$

Lưu ý rằng các tập hợp $S_1, S_2, \dots, S_{k_n}$ là các tập hợp tách rời nhau, và

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_{k_n}$$

Sử dụng quy tắc cộng ta được $|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |S_1| + |S_2| + \dots + |S_{k_n}| = k_1 k_2 \dots k_n$. Định lý được chứng minh.

1.2 Chỉnh hợp lặp.

Định nghĩa 1. Cho $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ là một tập hợp sắp thứ tự tuyến tính $a_1 < a_2 < \dots < a_m$, và cho $k_1, k_2, \dots, k_m$ là các số nguyên không âm sao cho $n = k_1 + k_2 + \dots + k_m > 0$. Mỗi phần tử $v \in A^n$, sao cho với bất kì $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ phần tử a_i xuất hiện trong v đúng k_i lần, được gọi là một n -chỉnh hợp của những phần tử của tập A loại $(k_1, k_2, \dots, k_m)$.

Định lý 1. Cho những điều kiện trong định nghĩa trên được thỏa mãn, khi đó

① Số n -chỉnh hợp loại $(k_1, k_2, \dots, k_m)$ là $\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$.

② Số loại n -chỉnh hợp của những phần tử của m -tập A bằng $\binom{n+m-1}{n}$.

Chứng minh.

① Cho tập $B = \{a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^{k_1}, \dots, a_m^1, a_m^2, \dots, a_m^{k_m}\}$. Gọi S_1 là tập tất cả các hoán vị của tập B , và S_2 là tập các n -chỉnh hợp của những phần tử của A loại $(k_1, k_2, \dots, k_m)$. Tập S_1 bao gồm $(k_1 + k_2 + \dots + k_m)! = n!$ phần tử. Ta định nghĩa hàm $f : S_1 \rightarrow S_2$ như sau: mỗi hoán vị $p \in S_1$ tương ứng với một n -chỉnh hợp $v \in S_2$ thu được từ p bằng cách xóa đi chỉ số trên. Tập S_1 bao gồm đúng $k_1! k_2! \dots k_m!$ các hoán vị của B , trong đó với mỗi $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, thì các phần tử $a_j^1, a_j^2, \dots, a_j^{k_j}$ chiếm k_j vị trí cố định. Vì vậy mỗi phần tử $v \in S_2$ có đúng $k_1! k_2! \dots k_m!$ phần tử $u \in S_1$ sao cho $f(u) = v$ và

$$|S_2| = \frac{|S_1|}{k_1! k_2! \dots k_m!} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$$

② Cho $A = \{1, 2, \dots, m\}$ và S là tập tất cả các $(n+m-1)$ -chỉnh hợp của những phần tử của tập $\{0, 1, 2, \dots, m\}$ có dạng sau

$$v = \underbrace{11\dots1}_k 0 \underbrace{22\dots2}_k 0 \dots 0 \underbrace{mm\dots m}_k$$

Kí hiệu T là tập tất cả các loại n -chỉnh hợp của những phần tử của A . Khi đó, mỗi chỉnh hợp $v \in S$ chứa đúng $m-1$ số 0 và được xác định một cách duy nhất bởi vị trí của chúng. Vì vậy, $|S| = \binom{m+n-1}{m-1}$. Hàm số $f : S \rightarrow T$, xác định bởi $f(v) = (k_1, k_2, \dots, k_m)$ là một song ánh. Do đó ta có

$$|T| = |S| = \binom{m+n-1}{m-1} = \binom{n+m-1}{n}$$

Vậy định lý được chứng minh.

Ví dụ 1. Có bao nhiêu số nguyên dương có 7 chữ số, trong đó số 3 xuất hiện ba lần, và số 2 và 3 xuất hiện hai lần trong biểu diễn thập phân?

Lời giải.

Các số nguyên dương thỏa mãn tính chất trên là 7 – chỉnh hợp loại (3, 2, 2). Như vậy ta có $\frac{7!}{3!2!2!} = 210$ số nguyên dương. $\square$

Ví dụ 2. Có bao nhiêu từ khác nhau thu được từ việc hoán vị các chữ cái trong từ COMBINATORICS?

Lời giải.

Các chữ cái C, I và O xuất hiện hai lần, và các chữ cái M, B, N, A, T, R, và S xuất hiện một lần trong từ COMBINATORICS. Vì vậy, số từ phân biệt thu được từ việc hoán vị các chữ cái đó là $\frac{13!}{2!2!2!} = 778377600$. $\square$

1.3 Tổ hợp lập.

Định nghĩa 1. Định nghĩa Đặt $A = \{a_1; a_2; \dots; a_m\}$ là một tập sắp thứ tự nghiêm ngặt $a_1 < a_2 < \dots < a_m$. Một tổ hợp gồm n phần tử của tập A cho phép sự lặp lại các phần tử là một tổ hợp lập chập n ($f(1), f(2), \dots, f(n)$), trong đó $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow A$ là một hàm không giảm tức là

$$f(1) \leq f(2) \leq \dots \leq f(n)$$

Định lý 1. Số tổ hợp lập chập n của m phần tử của tập A là $\binom{n+m-1}{n}$.

Chứng minh. Đặt $A = \{a_1; a_2; \dots; a_m\}$ và giả sử rằng $a_1 < a_2 < \dots < a_m$. Đặt K là tập các tổ hợp lập chập n của m phần tử của A , và T là tập hợp các chỉnh hợp chập n của m phần tử của A . Xét hàm $f : T \rightarrow K$, thỏa mãn với mọi $(k_1; k_2; \dots; k_m) \in T$ thì

$$f((k_1; k_2; \dots; k_m)) = \underbrace{a_1 a_1 \dots a_1}_{k_1} \underbrace{a_2 a_2 \dots a_2}_{k_2} \dots \underbrace{a_m a_m \dots a_m}_{k_m \text{ lần}} \in K$$

Rõ ràng hàm f là toàn ánh. Như vậy ta được $|K| = |T| = \binom{n+m-1}{n}$.

Ví dụ 3.1. Đặt $A = \{a, b, c\}$ và $a < b < c$. ta có mười tổ hợp lập chập 10 của 3 phần tử của A là

$$aaa, bbb, ccc, aab, aac, abb, acc, bbc, bcc, abc.$$

Định lý 3.2. Số tổ hợp lập chập n của m phần tử của tập A , thỏa mãn mọi phần tử $a \in A$ xuất hiện ít nhất một lần thì bằng $\binom{n-1}{m-1}$.

Chứng minh. Đặt K là tổ hợp lập chập n phần tử của $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ thỏa mãn mọi phần tử $a \in A$ xuất hiện ít nhất một lần, và V là tập gồm các chỉnh hợp chập n của tập $A \cup \{0\}$. Xét hàm $f : K \rightarrow V$ xác định bởi, với mọi

$$u = \underbrace{a_1 a_1 \dots a_1}_{k_1} \underbrace{a_2 a_2 \dots a_2}_{k_2} \dots \underbrace{a_m a_m \dots a_m}_{k_m \text{ lần}} \in K,$$

$$\text{Đặt } f(u) = \underbrace{a_1 a_1 \dots a_1}_{k_1-1} \underbrace{0}_{k_2-1} \dots \underbrace{0}_{k_{m-1}-1} \underbrace{a_{m-1} a_{m-1} \dots a_{m-1}}_{k_{m-1}-1} \underbrace{0}_{k_m \text{ lần}} \underbrace{a_m a_m \dots a_m}_{k_m \text{ lần}}.$$

Như vậy định lý được chứng minh.

1.4 Nguyên lý bao hàm - loại trừ.

Việc đếm số phần tử của hợp của một vài tập hợp hữu hạn thường xuất hiện trong các bài toán tổ hợp. Ta xét hai ví dụ sau.

Ví dụ 1. Có 10 học sinh đạt điểm cao môn Toán, 12 học sinh đạt điểm cao môn Lý và 7 học sinh đạt điểm cao ở cả hai môn Toán và Lý. Hỏi có bao nhiêu học sinh đạt điểm cao trong ít nhất một trong hai môn này?

Lời giải.

Gọi A và B lần lượt là tập hợp các học sinh đạt điểm cao môn Toán và Lý. Yêu cầu bài toán chính là xác định số phần tử của tập hợp $A \cup B$. Những học sinh đạt điểm cao cả hai môn Toán và Lý đã được đếm hai lần trong phép tính $|A| + |B|$. Do đó

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Cuối cùng, ta có $|A \cup B| = 10 + 12 - 7 = 15$. □

Ví dụ 2. Có bao nhiêu số nguyên dương trong tập hợp $S = \{1, 2, \dots, 1000\}$ chia hết cho ít nhất một trong các số 2, 3 và 5?

Lời giải.

Gọi A, B và C lần lượt là các tập con của S chứa các phần tử chia hết cho 2, 3 và 5. Ta cần tìm số phần tử của tập hợp $A \cup B \cup C$. Xét tổng $|A| + |B| + |C|$. Những phần tử thuộc đúng hai trong ba tập hợp A, B và C được đếm hai lần, trong khi các phần tử thuộc cả ba tập trên thì được đếm ba lần. Vì thế

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|. \quad (*)$$

Chú ý rằng các tập hợp $A \cap B, A \cap C, B \cap C$ và $A \cap B \cap C$ chứa các số trong S lần lượt chia hết cho 6, 10, 15 và 30. Vì vậy,

$$|A| = 500, |B| = 333, |C| = 200, |A \cap B| = 166, |A \cap C| = 100, |B \cap C| = 66$$

và $|A \cap B \cap C| = 33$. Từ (*) ta được $|A \cup B \cup C| = 734$. □

Định lý 1. Cho $A_1, A_2, \dots, A_n$ là các tập con của tập hữu hạn S . Khi đó

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned} \quad (1)$$

Số $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$ ở vế trái của đẳng thức (1) và mỗi hạng ở trong vế phải có thể được viết thành tổng của các số 1 với dấu + hay - tương ứng. Mỗi phần tử $a \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ tương ứng với một hạng tử 1 ở vế trái của (1). Giả sử có đúng r tập trong số $A_1, A_2, \dots, A_n$ chứa a . Khi đó phần tử này tương ứng với tổng

$$r - \binom{r}{2} + \binom{r}{3} - \dots + (-1)^{r-1} \binom{r}{r} = 1 - (1-r)^r = 1$$

Vậy đẳng thức (1) đúng. Công thức (1) thường được xem như Nguyên lý bao hàm - loại trừ. Ta đã chứng minh nó thông qua các công thức tổ hợp đơn giản. Công thức này còn có thể được chứng minh bằng quy nạp như sau.

Chứng minh định lý bằng quy nạp toán học. Với $n = 1$ đẳng thức (1) hiển nhiên đúng. Với $n = 2$ công thức đã được chứng minh tại **ví dụ 2**. Giả sử (*) đúng với $n = m \geq 2$. Xét $A_1, A_2, \dots, A_m, A_{m+1}$ là các tập hữu hạn bất kì. Theo giả thiết quy nạp với các tập $A_1, A_2, \dots, A_m$ ta có đẳng thức

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m| &= \sum_{i=1}^m |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq m} |A_i \cap A_j| + \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m|. \end{aligned} \quad (2)$$

Chú ý rằng $|(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) \cap A_{m+1}| = \left| \bigcup_{j=1}^m (A_j \cap A_{m+1}) \right|$. Theo giả thiết quy nạp với các tập $A_1 \cap A_{m+1}, A_2 \cap A_{m+1}, \dots, A_m \cap A_{m+1}$ ta có

$$\begin{aligned} |(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) \cap A_{m+1}| &= \sum_{j=1}^m |A_j \cap A_{m+1}| - \sum_{1 \leq i < j \leq m} |A_i \cap A_j \cap A_{m+1}| \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_{m+1}| \\ &\quad - \dots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m \cap A_{m+1}|. \end{aligned} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) và **ví dụ 1** với $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$ và $B = A_{m+1}$, ta được

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m \cup A_{m+1}| &= |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m| + |A_{m+1}| - |(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) \cap A_{m+1}| \\ &= \sum_{j=1}^{m+1} |A_j| - \sum_{1 \leq i < j \leq m+1} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq m+1} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &\quad - \dots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m \cap A_{m+1}| \end{aligned}$$

tức là Nguyên lý bao hàm – loại trừ đúng với $n = m + 1$.

1.5 Một phương pháp hình học của chỉnh hợp.

Những bài toán về tổ hợp có thể được đưa ra dưới dạng đếm số chỉnh hợp chập n của các phần tử -1 và 1 với những điều kiện kèm theo được thỏa mãn. Mỗi chỉnh hợp chập n $c_1 c_2 \dots c_n$ mà nó chỉ chứa các số -1 và 1 có thể kết hợp với một quỹ đạo $Z_0 Z_1 \dots Z_n$ trong đó Z_k là điểm có tọa độ (x_k, y_k) sao cho các đẳng thức sau đây thỏa mãn $x_0 = 0, y_0 = 0$ và với mọi $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $x_k = x_{k-1} + 1$, $y_k = y_{k-1} + c_k$.

- ① Nếu $c_k = 1$ thì $y_k - y_{k-1} = 1$ và $Z_{k-1} Z_k$ là một phần đi lên của quỹ đạo.
- ② Nếu $c_k = -1$ thì $y_k - y_{k-1} = -1$ và $Z_{k-1} Z_k$ là một phần đi xuống của quỹ đạo. Z_0 là điểm đầu và Z_n là điểm cuối của quỹ đạo $Z_0 Z_1 \dots Z_n$.

Định lý.

- ① Gọi $M(m, n)$ là số quỹ đạo $Z_0 Z_1 \dots Z_n$ có điểm đầu $(0, 0)$, điểm cuối (m, n) với $m \geq n, m, n \in \mathbb{N}$. Khi đó

$$(a) \quad M(m, n) = \frac{m!}{\left(\frac{m+n}{2}\right)! \left(\frac{m-n}{2}\right)!} \text{ nếu } m-n \text{ chia hết cho } 2.$$

$$(b) \quad M(m, n) = 0 \text{ nếu } m-n \text{ không chia hết cho } 2.$$

- ② Giả sử $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)$ là các điểm mà tọa độ của chúng là các số nguyên sao cho $b_1 > a_1 \geq 0, a_2 > 0, b_2 \geq 0$. Gọi $A_1(a_1, -a_2)$ là điểm đối xứng với $A(a_1, a_2)$ qua trục hoành. Khi đó phát biểu sau đây luôn đúng: Số quỹ đạo với điểm đầu A và điểm cuối B sao cho có ít nhất một điểm chung với trục hoành là bằng với số quỹ đạo với điểm đầu A_1 và điểm cuối B .
- ③ Cho $n \in \mathbb{N}$ và gọi T_1 là tập hợp các quỹ đạo với điểm đầu $(0; 0)$ và điểm cuối $(2n; 0)$ sao cho tất cả các điểm của quỹ đạo bất kỳ, ngoại trừ điểm đầu và điểm cuối, có tung độ dương. Khi đó $|T_1| = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$.

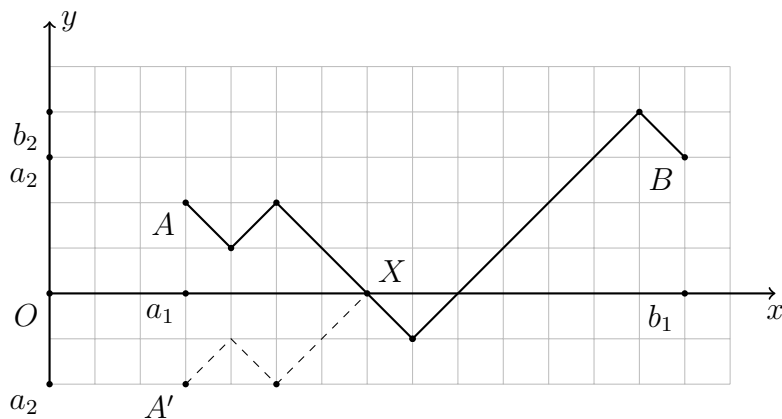
- ④ Cho $n \in \mathbb{N}$ và gọi T_2 là tập hợp các quỹ đạo với điểm đầu $(0; 0)$ và điểm cuối $(2n; 0)$ sao cho tất cả các điểm của quỹ đạo bất kỳ có tung độ không âm. Khi đó: $|T_2| = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.
- ⑤ Cho $n, k \in \mathbb{N}$ và T_3 là tập hợp các quỹ đạo với điểm đầu $(0; 0)$ và điểm cuối $(2n; 0)$ và không có điểm chung với đường thẳng $y = -k$. Khi đó $|T_3| = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+k}$.

Chứng minh.

① Gọi t là một quỹ đạo với điểm đầu $(0; 0)$ và điểm cuối $(m; n)$, α là số phần đi lên của t và β là số phần đi xuống của t . Khi đó ta có $\alpha + \beta = m$, $\alpha - \beta = n$, tức là $\alpha = \frac{m+n}{2}$, $\beta = \frac{m-n}{2}$. Vì α và β là các số nguyên không âm nên điều này dẫn đến không có quỹ đạo nào với điểm đầu $(0, 0)$, điểm cuối (m, n) nếu một trong các số nguyên m và n là số chẵn, số còn lại là lẻ. Nếu α và β cùng chẵn hoặc cùng lẻ, tức là $m+n$ và $m-n$ đều chia hết cho 2 thì ta có

$$M(m, n) = \binom{m}{\alpha} = \binom{m}{\frac{m+n}{2}} = \frac{m!}{\left(\frac{m+n}{2}\right)! \left(\frac{m-n}{2}\right)!}$$

② Gọi S_1 là tập các quỹ đạo với điểm đầu A và điểm cuối B sao cho có ít nhất một điểm chung với trục hoành và S_2 là tập quỹ đạo với điểm đầu A_1 và điểm cuối B .



Ta xác định hàm $f : S_1 \rightarrow S_2$ với ánh xạ $f(t)$ của quỹ đạo $t \in S_1$ được xác định như sau. Ký hiệu X là điểm chung của quỹ đạo t với trục hoành sao cho X có hoành độ nhỏ nhất. Đặt t_1 là phần của quỹ đạo t với điểm đầu A và điểm cuối X và t_2 là phần của quỹ đạo t với điểm đầu X và điểm cuối B . Đặt t'_1 là quỹ đạo thu được bằng cách đối xứng t_1 qua trục hoành và $f(t) = t'_1 \cup t_2$. Hàm f là một song ánh và do đó ta có $|S_1| = |S_2|$.

③ Mỗi quỹ đạo từ T_1 chứa các điểm $(1; 1)$ và $(2n-1, 1)$. Bài toán quy về đếm số quỹ đạo với điểm đầu $(1; 1)$ và điểm cuối $(2n-1, 1)$ và không có điểm chung với trục hoành. Số các quỹ đạo với điểm đầu $(1; 1)$ và điểm cuối $(2n-1, 1)$ là $\binom{2n-2}{n-1}$, bởi vì bất kỳ quỹ đạo nào đều bao gồm $n-1$ phần đi lên và $n-1$ phần đi xuống và tất cả phần này có thể được sắp xếp thành một dãy trong tất cả các cách có thể. Số các quỹ đạo với điểm đầu $(1; 1)$ và điểm cuối $(2n-1, 1)$ sao cho có ít nhất một điểm chung với trục hoành bằng với số quỹ đạo với điểm đầu $(1; -1)$ và điểm cuối $(2n-1, 1)$. Mỗi quỹ đạo với điểm đầu $(1; -1)$ và điểm cuối $(2n-1, 1)$ có n phần đi lên và $n-2$ phần đi xuống, và do đó số quỹ đạo như vậy bằng với $\binom{2n-2}{n}$. Do đó ta có

$$|T_1| = \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$$

④ Chứng minh tương tự trường hợp trên.

⑤ Sử dụng lập luận tương tự trường hợp 2) ta thu được số các quỹ đạo với điểm đầu $(0; 0)$ và điểm cuối $(2n; 0)$ sao cho chúng có ít nhất một điểm chung với đường thẳng $y = -k$ là bằng với số các quỹ đạo với điểm đầu $(0; -2k)$ và điểm cuối $(2n; 0)$, và đó là số $M(2n, 2k)$ của tất cả các quỹ đạo với điểm đầu $(0; 0)$ và điểm cuối $(2n; 2k)$. Sử dụng kết quả thu được ở trường hợp 1) ta có

$$|T_3| = M(2n, 0) - M(2n, 2k) = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+k}$$

Vậy các định lý được chứng minh.

Ví dụ 1. Có $2n$ người sắp thành một hàng trước quầy bán vé. Mỗi người trong họ có ý muốn mua một chiếc vé, và giá mỗi vé là 5\$. Giả sử rằng n người đầu tiên trong hàng có 10\$, và n người còn lại có 5\$. Không có tiền mặt trong máy đếm tiền tại thời điểm bắt đầu. Hỏi có bao nhiêu cách để xếp lại hàng sao cho không có bất kỳ người có 10\$ nào trong hàng phải đợi để đổi?

Chứng minh. Từ định lý ở trên, ta thu được số cách sắp xếp lại hàng sao cho điều kiện đưa ra được thỏa mãn là $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

Lưu ý. Dãy các số nguyên dương $(x_n)_{n \geq 1}$ cho bởi $x_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$, được biết đến như là một dãy các số Catalan. Lưu ý rằng $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 5, x_4 = 14, x_5 = 42, \dots$ Có thể chứng minh được rằng x_n là số nguyên lẻ nếu và chỉ nếu n có dạng $n = 2^k - 1$ với k là số nguyên dương. Số Catalan thường xuất hiện trong lời giải các bài toán tổ hợp liệt kê.

1.6 Phân hoạch nguyên

Ở đây ta sẽ xét sự biểu diễn một số nguyên dương cho trước thành tổng các số nguyên dương, cũng như sự biểu diễn một tập hợp hữu hạn cho trước thành các tập con khác rỗng đôi một không giao nhau. Sự biểu diễn này được gọi là phân hoạch số nguyên dương và phân hoạch tập hợp. Ở đây chúng ta chỉ xét số các phân hoạch thỏa một số điều kiện.

Định nghĩa 1. Một phân hoạch của số nguyên dương n thành k số hạng là một bộ $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$, thỏa mãn $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_k \in \mathbb{N}$ và

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n, \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k \quad (1)$$

Các số nguyên dương $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_k$ được gọi là các số hạng của phân hoạch α . Kí hiệu f_i là số lần xuất hiện số thứ i trong dãy $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_k$, khi đó phân hoạch α còn được kí hiệu $\alpha = (1^{f_1} 2^{f_2} 3^{f_3} \dots)$, ta có

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n = k, f_1 + 2f_2 + \dots + nf_n = n \quad (2)$$

Ví dụ.

① $5 + 3 + 3 + 1, (5, 3, 3, 1), (1^1 3^2 5^1)$ là các kí hiệu khác nhau của cùng một cách phân hoạch số 12 thành 4 số hạng.

② $8 + 8 + 5 + 5 + 5 + 5 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = (1^5 3^3 5^4 8^2)$ là một phân hoạch số 50 thành 14 số hạng.

③ Có 7 phân hoạch khác nhau của số 5, đó là

$$\alpha_1 = (5^1), \alpha_2 = (1^4 1), \alpha_3 = (2^1 3^1), \alpha_4 = (1^2 3^1), \alpha_5 = (1^1 2^2), \alpha_6 = (1^3 2^1), \alpha_7 = (1^5).$$

Gọi $p(n)$ là số các phân hoạch số nguyên dương n , qui ước $p(n) = 0$ với n là số nguyên âm và $p(0) = 1$. Dễ thấy $p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 3, p(4) = 5, p(5) = 7, p(6) = 11, \dots$ Công thức tính $p(n)$ được chứng minh bởi Hardy, Ramanujan, Rademacher. Ví dụ

$$p(10) = 42, p(20) = 627, p(50) = 204226, p(100) = 190569292, \\ p(200) = 3972999029338.$$

Hàm $p(n)$ tăng rất nhanh theo n .

Định lý 1. Cho $n_1, n_2, \dots, n_k$ là các số nguyên dương khác nhau. Kí hiệu $F(n_1, n_2, \dots, n_k; n)$ là số phân hoạch của số nguyên dương n thành các số hạng khác nhau mà mỗi số hạng đều thuộc tập hợp $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$. Ta có đẳng thức sau

$$F(n_1, n_2, \dots, n_k; n) = F(n_1, n_2, \dots, n_{k-1}; n - n_k) + F(n_1, n_2, \dots, n_{k-1}; n) \quad (*)$$

Trong đó, $F(n_1, n_2, \dots, n_j; m) = \begin{cases} 0 & \text{khi } m < 0 \\ 1 & \text{khi } m = 0 \end{cases}$

Chứng minh. Gọi S là tập hợp tất cả các phân hoạch số nguyên dương n thành các số hạng khác nhau mà mỗi số hạng đều thuộc tập hợp $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$. S_1 là tập con của S gồm những phân hoạch mà chứa một số hạng là n_k và S_2 là tập con của S gồm những phân hoạch mà không chứa số hạng n_k . Theo giả thiết ta có $|S| = F(n_1, n_2, \dots, n_k; n)$. Mỗi phân hoạch bất kì thuộc S_1 tương ứng với một phân hoạch của $n - n_k$ thành những số hạng khác nhau thuộc $\{n_1, n_2, \dots, n_{k-1}\}$ và ngược lại. Do đó

$$|S_1| = F(n_1, n_2, \dots, n_{k-1}; n - n_k)$$

Tương tự S_2 là tập hợp tất cả các phân hoạch của n thành những số hạng khác nhau mà mỗi số hạng đều thuộc tập $\{n_1, n_2, \dots, n_{k-1}\}$. Do đó $|S_2| = F(n_1, n_2, \dots, n_{k-1}; n)$. Vì $S = S_1 \cup S_2, S_1 \cap S_2 = \emptyset$ nên $|S| = |S_1| + |S_2|$.

Hệ quả. Đặt $n_1 = 1, n_2 = 2, \dots, n_k = k, F_k(n) = F(1, 2, \dots, k; n)$ và $F_k(0) = 1, F_k(m) = 0, \forall m < 0$. Khi đó

$$F_k(n) = F_{k-1}(n - k) + F_{k-1}(n) \quad (***)$$

Dễ thấy $F_1(1) = 1, F_1(n) = 0$ với $n > 1$ và $F_k(n) = F_n(n)$ với $k > n$. Sử dụng đẳng thức (*) ta có thể tính được $F_k(n)$ với k, n là các số tự nhiên bất kì.

Ví dụ. Chúng ta hãy tính vài giá trị của $F_k(n)$.

$$\textcircled{1} F_2(1) = 1, F_2(2) = 1, F_2(3) = 1, F_2(n) = 0, \forall n \geq 4.$$

$$\textcircled{2} F_3(1) = 1, F_3(2) = 1, F_3(3) = 1, F_3(4) = 1, F_3(5) = 1, F_3(6) = 1, F_3(n) = 0, \forall n \geq 7.$$

$$\textcircled{3} F_4(1) = 1, F_4(2) = 1, F_4(3) = 2, F_4(4) = 2, F_4(5) = 2, F_4(6) = 1, F_4(7) = 2, F_4(8) = 1, F_4(9) = 1, F_4(10) = 1, F_4(n) = 0, \forall n \geq 11.$$

$$\textcircled{4} F_5(8) = F_4(3) + F_4(8) = 2 + 1 = 3.$$

Định lý 2. Cho $n_1, n_2, \dots, n_k$ là các số nguyên dương khác nhau. Kí hiệu $G(n_1, n_2, \dots, n_k; n)$ là số phân hoạch của số nguyên dương n thành các số hạng khác nhau mà mỗi số hạng đều thuộc tập hợp $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$. Ta có đẳng thức sau

$$G(n_1, n_2, \dots, n_k; n) = G(n_1, n_2, \dots, n_k; n - n_k) + G(n_1, n_2, \dots, n_{k-1}; n) \quad (4*)$$

Trong đó, $G(n_1, n_2, \dots, n_j; m) = \begin{cases} 0 & \text{khi } m < 0 \\ 1 & \text{khi } m = 0 \end{cases}$

Chứng minh. Gọi S là tập hợp tất cả các phân hoạch số nguyên dương n thành các số hạng khác nhau mà mỗi số hạng đều thuộc tập hợp $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$. S_1 là tập con của S gồm những phân hoạch mà tồn tại một số hạng bằng n_k và S_2 là tập con của S gồm những phân hoạch mà không chứa số hạng trên. Theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned}|S| &= G(n_1, n_2, \dots, n_k; n). \\ |S_1| &= G(n_1, n_2, \dots, n_k; n - n_k) \\ |S_2| &= G(n_1, n_2, \dots, n_{k-1}; n)\end{aligned}$$

Ta có $|S| = |S_1| + |S_2|$.

Hệ quả. Đặt $n_1 = 1, n_2 = 2, \dots, n_k = k, G_k(n) = G(1, 2, \dots, k; n)$ và $G_k(0) = 1, G_k(m) = 0, \forall m < 0$. Khi đó

$$\begin{aligned}G_k(n) &= G_{k-1}(n) + G_k(n - k) \\ G_k(n) &= G_{k-1}(n) + G_{k-1}(n - k) + G_{k-1}(n - 2k) + \dots\end{aligned}$$

Từ định lý trên ta dễ dàng xác định được số phân hoạch của số nguyên dương thành các số hạng mà mỗi số hạng đều thuộc tập hợp số tự nhiên cho trước.

Ví dụ. Chúng ta hãy xác định xem có bao nhiêu cách có được 50 đô la từ các tờ tiền mệnh giá 1 đô la, 2 đô la, 5 đô la, 10 đô la và 20 đô la. Ta có $G(1, n) = 1 \forall n \geq 0$. Theo định lý ta có

- ① $G(1, 2; 2k) = 1 + G(1, 2; 2k - 2) = k + G(1, 2; 0) = k + 1, k \in \mathbb{N}$,
- ② $G(1, 2; 2k + 1) = 1 + G(1, 2; 2k - 1) = k + G(1, 2; 1) = k + 1, k \in \mathbb{N}$,
- ③ $G(1, 2, 5; 5) = G(1, 2, 5; 0) + G(1, 2; 5) = 1 + 3 = 4$,
- ④ $G(1, 2, 5; 10) = G(1, 2, 5; 5) + G(1, 2; 10) = 4 + 6 = 10$,
- ⑤ $G(1, 2, 5; 15) = G(1, 2, 5; 10) + G(1, 2; 15) = 10 + 8 = 18$,
- ⑥ $G(1, 2, 5; 20) = G(1, 2, 5; 15) + G(1, 2; 20) = 18 + 11 = 29$,
- ⑦ $G(1, 2, 5; 25) = G(1, 2, 5; 20) + G(1, 2; 25) = 29 + 13 = 42$,
- ⑧ $G(1, 2, 5; 30) = G(1, 2, 5; 25) + G(1, 2; 30) = 42 + 16 = 58$,
- ⑨ $G(1, 2, 5; 35) = G(1, 2, 5; 30) + G(1, 2; 35) = 58 + 18 = 76$,
- ⑩ $G(1, 2, 5; 40) = G(1, 2, 5; 35) + G(1, 2; 40) = 76 + 21 = 97$,
- ⑪ $G(1, 2, 5; 45) = G(1, 2, 5; 40) + G(1, 2; 45) = 97 + 23 = 120$,
- ⑫ $G(1, 2, 5; 50) = G(1, 2, 5; 45) + G(1, 2; 50) = 120 + 26 = 146$,
- ⑬ $G(1, 2, 5, 10; 10) = G(1, 2, 5, 10; 0) + G(1, 2, 5; 10) = 1 + 10 = 11$,
- ⑭ $G(1, 2, 5, 10; 20) = G(1, 2, 5, 10; 10) + G(1, 2, 5; 20) = 11 + 29 = 40$,
- ⑮ $G(1, 2, 5, 10; 30) = G(1, 2, 5; 20) + G(1, 2, 5; 30) = 40 + 58 = 98$,
- ⑯ $G(1, 2, 5, 10; 40) = G(1, 2, 5; 30) + G(1, 2, 5; 40) = 98 + 97 = 195$,
- ⑰ $G(1, 2, 5, 10; 50) = G(1, 2, 5; 40) + G(1, 2, 5; 50) = 195 + 146 = 341$,
- ⑱ $G(1, 2, 5, 10, 20; 30) = G(1, 2, 5, 10; 10) + G(1, 2, 5, 10; 30) = 11 + 98 = 109$,
- ⑲ $G(1, 2, 5, 10, 20; 50) = G(1, 2, 5, 10; 30) + G(1, 2, 5, 10; 50) = 109 + 341 = 450$.

1.7 Phân hoạch có thứ tự của số nguyên dương

Định nghĩa 1. Định nghĩa Một phân hoạch có thứ tự của số nguyên dương n thành k phần là một nghiệm của phương trình $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ trong tập hợp các số nguyên dương, tức là một k bộ (k -tuple) $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ của các số nguyên dương có tổng bằng n . Với phân hoạch có thứ tự $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ chúng ta ký hiệu $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$.

Ví dụ 1. Ta có

- ① Các phân hoạch của số 3 là $3, 2 + 1, 1 + 1 + 1$. Tất cả các phân hoạch có thứ tự của số 3 là $3, 2 + 1, 1 + 2, 1 + 1 + 1$.
- ② Tất cả các phân hoạch có thứ tự của số 7 thành ba bộ phận là $5 + 1 + 1, 1 + 5 + 1, 1 + 1 + 5, 4 + 2 + 1, 4 + 1 + 2, 2 + 4 + 1, 2 + 1 + 4, 1 + 4 + 2, 1 + 2 + 4, 3 + 3 + 1, 3 + 1 + 3, 1 + 3 + 3, 3 + 2 + 2, 2 + 3 + 2, 2 + 2 + 3$.

Ví dụ 2. Ký hiệu $\alpha = (1^{f_1} 2^{f_2} \dots n^{f_n})$ là một phân hoạch có thứ tự của số nguyên dương n . Khi đó có $\frac{(f_1 + f_2 + \dots + f_n)!}{f_1! f_2! \dots f_n!}$ phân hoạch có thứ tự của n , sao cho, với mỗi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ có đúng f_i thành phần bằng i .

Chứng minh. Với mỗi phân hoạch có thứ tự của số nguyên dương n với f_i thành phần bằng i cho mỗi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, hiển nhiên là một $(f_1 + f_2 + \dots + f_n)$ sự sắp xếp của các phân tử $1, 2, 3, \dots, n$ kiểu $(f_1, f_2, \dots, f_n)$.

Ví dụ 3. Ta có

- ① Số phân hoạch có thứ tự của số nguyên dương n thành k phần bằng $\binom{n-1}{k-1}$.
- ② Số các phân hoạch của số nguyên dương n là 2^{n-1} .

Chứng minh. Gọi A là tập hợp tất cả $(n + k - 1)$ sự sắp xếp của các số 0 và 1 với những tính chất sau

- ☑ Có đúng n phân tử trong A bằng 1.
- ☑ Không có hai số 0 đứng kề nhau.
- ☑ Số hạng đứng đầu và cuối là số 1.

Tập hợp A chứa tất cả $(n + k - 1)$ sự sắp xếp bao gồm các dãy k số 1 được tách bởi các số 0. Có một song ánh từ giữa tập A và tất cả các phân hoạch có thứ tự của số nguyên dương n trong k phần. Để tiếp tục chứng minh định lý này, ta sẽ xét bài toán sau.

Bài toán. Cho m, n là hai số tự nhiên. Gọi S_0 là tập sắp thứ tự của $m + n$ phần tử, trong đó gồm m chữ số 0 và n chữ số 1. Gọi S_1 là tập con của S_0 , mà các phần tử của nó gồm các chuỗi không chứa các số 0 liền nhau. S_2 là tập con của S_0 , gồm các phần tử mà bắt đầu và kết thúc bởi số 1. Tính $|S_0|, |S_1|, |S_2|$.

Lời giải.

Gọi K là tập gồm tổ hợp m phần tử của tập $\{1, 2, \dots, m + n\}$ và $f : S_0 \rightarrow K$ là hàm xác định bởi Ánh xạ chỉnh hợp $v = c_1 c_2 \dots c_{m+n}$ là một tổ hợp trong K chứa chỉ số của các số hạng $c_1, c_2, \dots, c_{m+n}$ thì bằng 0. Khi đó rõ ràng f là một song ánh. Do đó $|K| = |S_0| = \binom{m+n}{m}$. Trong mỗi chỉnh hợp của S_1 , số 0 có thể được đặt ở vị trí đầu tiên, giữa vị trí thứ nhất và số 1 thứ hai, ..., giữa vị trí thứ $n - 1$ và số 1 thứ n , cuối cùng là sau số 1 thứ n . Do đó có $n + 1$ vị trí cho số 0. Mà mỗi chỉnh hợp trong S_1 được xác định duy nhất bởi m trong $n + 1$ vị trí nên $|S_1| = \binom{n+1}{m}$. Tương tự hai trường

hợp trên ta có được $|S_2| = \binom{n-1}{m}$. Như vậy áp dụng bài toán này ta có $|A| = \binom{n-1}{k-1}$. Sử dụng kết quả này và đẳng thức tổ hợp quen thuộc $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$ chúng ta được tất cả sự phân hoạch của số n bằng $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} = 2^{n-1}$. $\square$

Định lý 1. Cho $n_1; n_2; \dots; n_k$ là các số nguyên dương phân biệt. Ký hiệu $H(n_1, \dots, n_k; n)$ là số phân hoạch có thứ tự của số nguyên dương n với các bộ (parts) thuộc tập hợp $\{n_1, \dots, n_k\}$.

Khi đó có đẳng thức $H(n_1, \dots, n_k; k) = \sum_{j=1}^k H(n_1, \dots, n_k; n - n_j)$, ở đây $H(n_1, \dots, n_j; m) = \begin{cases} 0, & m < 0 \\ 1, & m = 0 \end{cases}$.

Chứng minh. Gọi S là tập hợp tất cả các phân hoạch có thứ tự của số nguyên dương n sao cho mỗi phần của mỗi phân hoạch thuộc về tập hợp $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$. Gọi S_j là tập hợp các phân hoạch $(\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in S$ thỏa mãn $\alpha_1 = n_j$. Khi đó, tập hợp S là hợp của các tập hợp đôi một rời nhau $S_1, S_2, \dots, S_k$ do vậy chúng ta có

$$H(n_1, n_2, \dots, n_k; n) = |S| = \sum_{j=1}^k |S_j| = \sum_{j=1}^k H(n_1, n_2, \dots, n_k; n - n_j)$$

Ví dụ 4. Giả sử rằng một tin nhắn được bởi các ký hiệu có độ dài 0,1,2,3 hay 4 đơn vị thời gian. Hỏi có bao nhiêu tin nhắn khác nhau có thể được gửi đi trong suốt 10 đơn vị thời gian?

Trong thí dụ này bài toán được xác định là $H(1, 2, 3, 4; 10)$. Ta ký hiệu $H(n) = H(1, 2, 3, 4; n)$ với mỗi $n \in \mathbb{N}$. Dễ thấy $H(1) = 1; H(2) = 2; H(3) = 4; H(4) = 8$. Từ định lý trên chúng ta có

$$H(n) = H(n-1) + H(n-2) + H(n-3) + H(n-4)$$

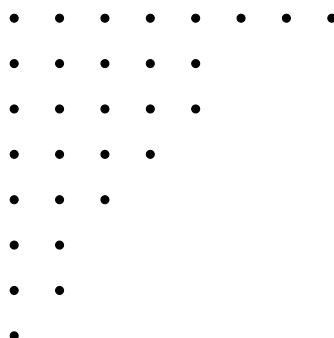
Từ những kết quả trên ta có $H(5) = 15; H(6) = 29; H(7) = 56; H(8) = 108; H(9) = 208; H(10) = 401$.

1.8 Biểu đồ của sự phân hoạch

Định nghĩa 1. Định nghĩa Biểu đồ biểu diễn Ferrer's của sự phân hoạch $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$, là tập hợp các điểm có tọa độ nguyên G_α trong mặt phẳng tọa độ Decartes thỏa mãn

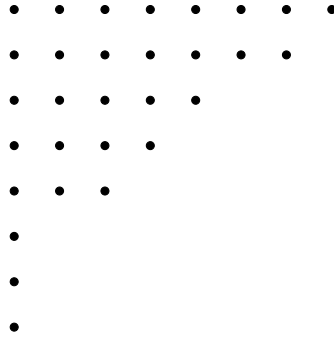
$$G_\alpha = \{(x; y) | -k+1 \leq y \leq 0, 0 \leq x \leq \alpha_{-y+1} - 1\}$$

Ví dụ 1. Biểu đồ biểu diễn Ferrer's của sự phân hoạch $30 = 8 + 5 + 5 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1$ là hình 6.3.1. Lưu ý rằng ở dòng thứ i trong biểu đồ biểu diễn Ferrer's của sự phân hoạch $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k)$ có đúng α_i điểm.



Định nghĩa 2. Định nghĩa Gọi $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ là sự phân hoạch của một số nguyên dương và đặt $m = \alpha_1$. Sự phân hoạch $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ được gọi là liên hợp của α , nếu $\forall j = \overline{1, m}$, thì β_j bằng số giá trị α_i của phân hoạch α mà $\alpha_i \geq j$.

Ví dụ 2. Cho phân hoạch $8 + 5 + 5 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1$ như trong ví dụ 1, phân hoạch liên hợp của phân hoạch trên là $8 + 7 + 5 + 4 + 3 + 1 + 1 + 1$.



Quan sát biểu đồ biểu diễn phân hoạch Ferrer's của phân hoạch β (là phân hoạch liên hợp của α), ta nhận thấy nó có được bằng cách lấy đối xứng biểu diễn Ferrer's phân hoạch α qua đường thẳng $y = -x$. Đường thẳng này được gọi là đường chéo của biểu đồ Ferrer's. Từ đó ta thấy nếu β là liên hợp của α thì α cũng là liên hợp của β .

Định lý 1. Số các phân hoạch của số nguyên dương n thành ít hơn hoặc bằng k số hạng bằng số phân hoạch của n thỏa mãn không có số hạng nào có giá trị nào lớn hơn k .

Chứng minh. Gọi S_1 là tập hợp tất cả các phân hoạch số nguyên dương n thành ít hơn hoặc bằng k số hạng và S_2 là tập hợp tất cả các phân hoạch của n thành các số hạng không lớn hơn k . Với α thuộc S_1 , khi đó liên hợp của α là β thuộc S_2 . Ánh xạ $f: S_1 \rightarrow S_2$ xác định bởi $f(\alpha) = \beta$ với β là liên hợp của α là song ánh. Do đó $|S_1| = |S_2|$.

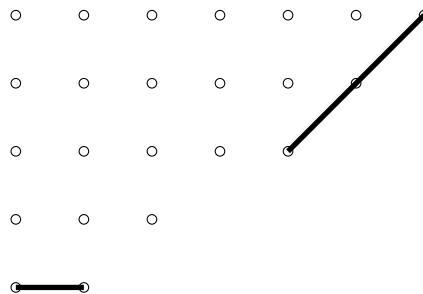
Định lý 2. Gọi $p_0(n)$ là số phân hoạch của số nguyên dương n thành chẵn số hạng phân biệt và $p_1(n)$ là số phân hoạch của n thành lẻ số hạng phân biệt. Khi đó ta có

$$p_0(n) - p_1(n) = \begin{cases} (-1)^k, & \text{khi } n = \frac{1}{2}k(3k \pm 1), k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{các trường hợp còn lại} \end{cases}$$

Chứng minh. Gọi $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ là một phân hoạch của n thành các số hạng phân biệt. Ta đặt

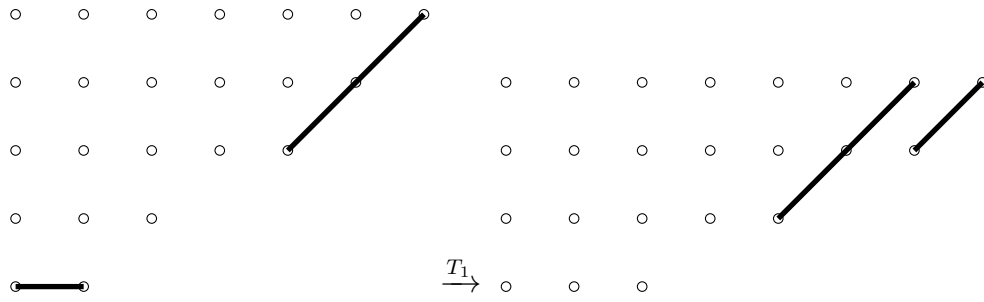
$$f_1(\alpha) = \alpha_k, f_2(\alpha) = \max \{j \mid \alpha_j = \alpha_1 - j + 1\}$$

Ví dụ, nếu $\alpha = (7, 6, 5, 3, 2)$, thì $f_1(\alpha) = 2$, $f_2(\alpha) = 3$. Xem hình vẽ dưới



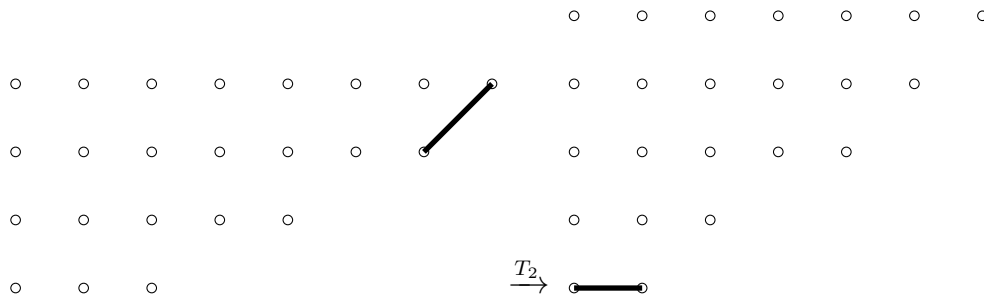
Gọi S là tập hợp tất cả các phân hoạch của n thành các số hạng phân biệt. Ta sẽ xây dựng các ánh xạ T_1 và T_2 từ tập S đến S .

- ① Xét phân hoạch $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in S$, với $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_k$, và giả sử $f_1(\alpha) \leq f_2(\alpha)$. Nếu $f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = k$ ta không làm gì. Ta xác định $T_1(\alpha)$ theo qui tắc: Ta bỏ đi số hạng nhỏ nhất $f_1(\alpha) = \alpha_k$ của phân hoạch α , và tăng thêm 1 ở các số hạng lớn nhất của phân hoạch α (tăng ở α_k số hạng). Ví dụ nếu $\alpha = (7, 6, 5, 3, 2)$, thì $T_1(\alpha) = (8, 7, 5, 3)$. Xem hình vẽ dưới

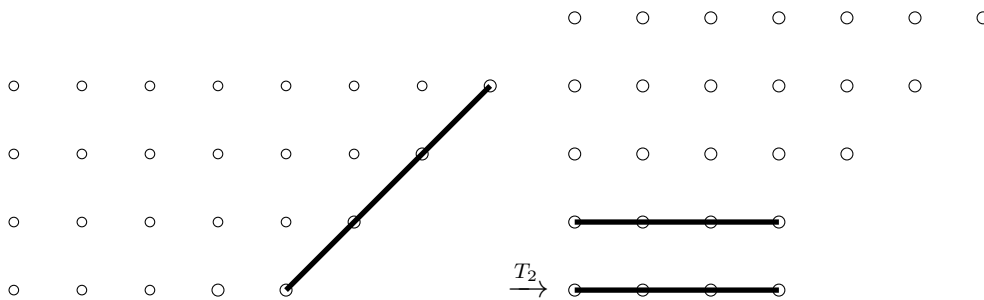


Nếu $f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = k$ (k là số số hạng của phân hoạch), thì phép biến đổi T_1 không các định. Thật vậy vì nếu chúng ta xóa “dòng” $\alpha_k = f_1(\alpha) = k$ thì ta chỉ còn $k - 1$ dòng nên không thể đủ k dòng để tăng mỗi dòng lên 1 được. Trong trường hợp này ta thấy $\alpha = (2k - 1, 2k - 2, \dots, k + 1, k)$, ta có đẳng thức $k + (k + 1) + \dots + (2k - 1) = \frac{1}{2}k(3k - 1)$.

- ② Nếu $f_1(\alpha) > f_2(\alpha)$ với phân hoạch $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$, với $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_k$. Nếu hai đẳng thức $f_2(\alpha) = k$, $f_1(\alpha) = k + 1$ không đồng thời xảy ra ta xác định $T_2(\alpha)$ theo quy tắc: giảm 1 ở các số hạng lớn nhất của phân hoạch α (giảm ở $f_2(\alpha)$ số hạng) và lập số hạng mới $\alpha_{k+1} = f_2(\alpha)$. Ví dụ nếu $\alpha = (8, 7, 5, 3)$ thì $T_2(\alpha) = (7, 6, 5, 3, 2)$. Xem hình vẽ dưới.



Nếu $f_2(\alpha) = k$, $f_1(\alpha) = k + 1$ xảy ra đồng thời thì T_2 không xác định, vì nó sẽ tạo thành 2 “dòng” bằng nhau (2 số hạng bằng nhau). Ví dụ $\alpha = (8, 7, 6, 5)$, $f_1(\alpha) = 5$, $f_2(\alpha) = 4$, $T_2(\alpha) = (7, 6, 5, 4, 4)$. Xem hình vẽ dưới



Trong trường hợp $f_2(\alpha) = k$, $f_1(\alpha) = k + 1$ ta thấy rằng $\alpha = (2k, 2k - 1, \dots, k + 2, k + 1)$, khi đó ta có

$$(k + 1) + (k + 2) + \dots + 2k = \frac{1}{2}k(3k + 1)$$

Ta thấy rằng sau khi thực hiện biến đổi T_1 thì số số hạng của phân hoạch giảm đi 1, khi thực hiện T_2 thì số số hạng tăng thêm 1. Ta xét 2 trường hợp sau.

- ① **Trường hợp 1.** Nếu n không có dạng $n = \frac{1}{2}k(3k \pm 1)$, với $k \in \mathbb{N}$. Khi đó với bất kì phân hoạch α thì chỉ có thể thực hiện được đúng một trong hai biến đổi T_1 hoặc T_2 . Ta xác định ánh xạ $T : S_1 \rightarrow S_2$ theo quy tắc

$$T(\alpha) = \begin{cases} T_1(\alpha), & \text{khi } f_1(\alpha) \leq f_2(\alpha) \\ T_2(\alpha), & \text{khi } f_1(\alpha) > f_2(\alpha) \end{cases}$$

Ta thấy T là một song ánh do đó $|S_1| = |S_2|$. Ta nhận được $p_0(n) = p_1(n)$.

② **Trường hợp 2.** Nếu $n = \frac{1}{2}k(3k \pm 1)$, với $k \in \mathbb{N}$ thì

$$\alpha_0 = \begin{cases} (2k, 2k-1, \dots, k+2, k+1) & \text{khi } n = \frac{1}{2}k(3k+1) \\ (2k-1, 2k-2, \dots, k+1, k) & \text{khi } n = \frac{1}{2}k(3k-1) \end{cases}$$

Ta gọi S_1 (S_2) là tập các phân hoạch của n thành lẻ (chẵn) số hạng mà khác phân hoạch α_0 . Tương tự trường hợp 1 ta suy ra $|S_1| = |S_2|$. Ta nhận được $p_0(n) = p_1(n) + (-1)^k$.

Nhận xét. Định lí trên còn được gọi là định lí Euler-Legendre. Số $\omega_k = \frac{1}{2}k(3k \pm 1)$, $k \in \mathbb{Z}$ gọi là pentagonal numbers. Nếu $p(n)$ là số phân hoạch của n thì ta có công thức sau

$$p(n) = \sum_{\omega_k \leq n} (-1)^{k-1} \left[p\left(n - \frac{k(3k-1)}{2}\right) + p\left(n - \frac{k(3k+1)}{2}\right) \right]$$

Ở đây $p(0) = 1$, và tổng trong công thức này chạy với các số pentagonal number không lớn hơn n .

1.9 Nguyên lý Dirichlet.

Nguyên lý Dirichlet - còn gọi là nguyên lý chim bồ câu (The Pigeonhole Principle) hoặc nguyên lý những cái lồng nhốt thỏ hoặc nguyên lý sắp xếp đồ vật vào ngăn kéo (The Drawer Principle) - đưa ra một nguyên tắc về phân chia phần tử các lớp.

Nguyên lý Dirichlet cơ bản. Nếu nhốt $n+1$ con thỏ vào n cái chuồng thì bao giờ cũng có một chuồng chứa ít nhất hai con thỏ.

Nguyên lý Dirichlet tổng quát. Nếu có N đồ vật được đặt vào trong k hộp thì sẽ tồn tại một hộp chứa ít nhất $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ đồ vật. (Ở đây $[x]$ là số nguyên nhỏ nhất có giá trị nhỏ hơn hoặc bằng x).

Nguyên lý Dirichlet mở rộng. Nếu nhốt n con thỏ vào $m \geq 2$ cái chuồng thì tồn tại một chuồng có ít nhất $\left\lceil \frac{n+m-1}{m} \right\rceil$ con thỏ.

Nguyên lý Dirichlet dạng tập hợp. Cho A và B là hai tập hợp khác rỗng có số phần tử hữu hạn, mà số lượng phần tử của A lớn hơn số lượng phần tử của B . Nếu với một quy tắc nào đó, mỗi phần tử của A cho tương ứng với một phần tử của B , thì tồn tại ít nhất hai phần tử khác nhau của A mà chúng tương ứng với một phần tử của B .

Chương 2

Tuyển tập các bài toán

Bài 1. Cho $2n$ số thực đôi một khác nhau $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$. Viết các số vào bảng $n \times n$ như sau: $\tilde{O}(i; j)$ (hàng i và cột j) là số $(a_i + b_j)$. Chứng minh rằng nếu tích tất cả các số trên các cột bằng nhau thì tích tất cả các số trên mỗi hàng cũng bằng nhau.

Lời giải.

Tích các số ở cột thứ j bằng

$$\pi_j = (b_j + a_1)(b_j + a_2) \dots (b_j + a_n).$$

Khi đó $\pi_i = \pi_j$ với mọi $i, j = 1, 2, \dots, n$ xét đa thức $P(x) = (x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n)$. Ta suy ra

$$P(b_1) = P(b_2) = \dots = P(b_n) = C$$

trong đó C là hằng số. Ta lại xét đa thức $G(x) = P(x) - C$.

Do $G(x)$ có n nghiệm $b_1, b_2, \dots, b_n$ nên nó là đa thức bậc n với hệ số cao nhất bằng 1. Từ đó suy ra

$$G(x) = (x - b_1)(x - b_2) \dots (x - b_n)$$

Vậy

$$(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n) - C = (x - b_1)(x - b_2) \dots (x - b_n)$$

Thay $x = -a_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) vào đẳng thức cuối ta được

$$-C = (-a_j - b_1)(-a_j - b_2) \dots (-a_j - b_n) = (-1)^n \cdot (a_j + b_1) \dots (a_j + b_n)$$

hay

$$(a_j + b_1) \dots (a_j + b_n) = (-1)^{n+1} C$$

Về trái đẳng thức cuối này là tích tất cả các số thuộc hàng j . Bài toán được chứng minh. $\square$

Bài 2. Một con bọ ở vị trí có tọa độ $x = 1$ trên trục số. Ở mỗi bước, từ vị trí có tọa độ $x = a$, con bọ có thể nhảy đến vị trí có tọa độ $x = a + 2$ hoặc $x = \frac{a}{2}$. Chứng minh rằng có tất cả $F_{n+4} - (n + 4)$ vị trí khác nhau (kể cả vị trí ban đầu) mà con bọ có thể nhảy đến với không quá n bước nhảy, trong đó (F_n) là dãy Fibonacci cho bởi $F_0 = F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ với $n \geq 2$.

Lời giải.

Đặt M là tập hợp các số thực có dạng $\frac{a}{2^b}$ với a nguyên dương lẻ, n nguyên không âm. Dễ thấy rằng đó là tất cả các vị trí mà con bọ có thể nhảy đến. Với mỗi $x \in M$, ta gọi $f(x)$ là số bước ít nhất cần

để nhảy từ 1 đến vị trí x . Rõ ràng $f(x)$ xác định và hữu hạn vì nhận thấy rằng với $x_0 = \frac{a}{2^b} \in M$ thì sau $\frac{a-1}{2}$ bước " $+$ 2", từ 1 con bọ có thể nhảy đến a . Tiếp theo, sau b bước nhảy " $/2$ ", con bọ có thể đến x_0 nên số bước không vượt quá $\frac{a-1}{2} + b$. Với mỗi số nguyên dương n , đặt

$$P_n = \{x \mid x \in M \wedge f(x) = n\}, Q_n = \left\{x \mid x \in P_n \wedge \frac{x}{2} \in P_{n+1}\right\} \text{ và } R_n = P_n \setminus Q_n$$

Dễ thấy rằng Q_n là tập hợp các số mà $\frac{x}{2}$ phải đến bước thứ $n+1$ mới thu được; còn R_n là tập hợp các số mà $\frac{x}{2} \in P_n$. Với cách đặt đó, ta thấy rằng số lượng các vị trí khác nhau mà con bọ có thể nhảy đến sau n bước sẽ là $|P_0| + |P_1| + \dots + |P_n|$. Ta sẽ tìm công thức cho P_n .

Ta có nhận xét rằng, nếu từ $1 \rightarrow x$ ta cần n bước thì để $1 \rightarrow x+2$, ta cần $n+1$ bước; ngoài ra, nếu từ $1 \rightarrow \frac{x}{2}$ ta cần $n+1$ bước thì để $1 \rightarrow x$, ta cần n bước. Do đó, với mọi $x \in M$ mà $f(x) = n$ thì $f(x+2) = n+1$. Vì thế nên ta có

$$|P_{n+1}| = |P_n| + |Q_n|, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng $x \in P_n \Leftrightarrow x+4 \in R_{n+2}$. Thật vậy, xét $x_0 \in P_n$ thì $x_0+4 \in R_{n+2}$, tuy nhiên $\frac{x_0+4}{2} = \frac{x_0}{2} + 2$ là số có thể thu được chỉ bằng $n+2$ bước nên $x_0+4 \in R_{n+2}$. Ngược lại, nếu $x_0+4 \in R_{n+2}$ thì cũng tương tự

$$\frac{x_0}{2} + 2 \in P_{n+2} \Rightarrow \frac{x_0}{2} \in P_{n+1} \Rightarrow x_0 \in P_n.$$

Từ đó suy ra $|P_n| = |R_{n+2}|$. Do đó, ta có quan hệ truy hồi

$$|P_n| = |Q_n| + |R_n| = |P_{n+1}| - |P_n| + |P_{n-2}| \Rightarrow |P_{n+1}| = 2|P_n| - |P_{n-2}|, n \geq 2.$$

Chú ý rằng $|P_0| = 1, |P_1| = 2, |P_2| = 4$ nên nếu đặt $u_n = |P_{n+1}| - |P_n|$ thì $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ và $u_0 = 1, u_1 = 2$ nên dễ thấy rằng $u_n = F_{n+2}$ với (F_n) là dãy Fibonacci. Do đó, ta đưa về được $|P_n| = F_{n+2} - 1$ với mọi $n \geq 0$. Cuối cùng, yêu cầu của bài toán tương đương với việc chứng minh

$$\sum_{k=0}^n (F_{k+2} - 1) = F_{n+4} - (n+4)$$

Tuy nhiên, điều này có thể dễ dàng thực hiện được bằng quy nạp với chú ý rằng

- ① Khi thay $n \rightarrow n+1$, vế trái tăng lên $F_{n+3} - 1$ đơn vị.
- ② Khi thay $n \rightarrow n+1$, vế phải thay đổi $(F_{n+5} - (n+5)) - (F_{n+4} - (n+4)) = F_{n+3} - 1$.

Vậy bài toán được giải quyết hoàn toàn. □

Nhận xét. Đây là một bài toán đẹp về ứng dụng của phép đếm bằng công thức truy hồi. Nó đã gây không ít khó khăn khi phải kiểm soát số lần nhảy ít nhất của bọ cần thực hiện để đến được số $\frac{a}{2^b}$.

Mấu chốt của bài toán là nhận xét: "hai bước $+2$ và một bước $/2$ " có thể quy đổi về "một bước $/2$ và một bước $+2$ ", từ đó thiết lập thành công hệ thức truy hồi. Thực ra nếu phát biểu yêu cầu đề bài từ "đúng n bước" thành "không quá n bước" cũng không làm thay đổi bản chất vấn đề, và cũng không làm bài khó hơn là bao, nhưng đó lại là một bài toán cũ. Dưới đây là một số bài toán tương tự có liên quan

① (Dãy Farey) Cho số nguyên dương n , xét dãy tăng các phân số có dạng $\frac{p}{q} \in [0; 1]$ với $p, q \in \mathbb{N}$

và $0 < q \leq n$. Khi đó, dãy này có độ dài đúng bằng $1 + \sum_{k=1}^n \varphi(k)$.

Ví dụ. Khi $n = 4$, ta có dãy $\frac{0}{1} \rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow \frac{2}{3} \rightarrow \frac{3}{4} \rightarrow \frac{1}{1}$.

② (APMO 2015) Cho (a_n) là dãy số xác định bởi $a_0 \in \mathbb{Z}^+$ còn a_{n+1} được tính bởi $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$ hoặc $a_{n+1} + 1 = \frac{2(a_n + 1)}{a_n + 2}$. Hỏi nếu tồn tại k nguyên dương để $a_k = 2014$ thì giá trị nhỏ nhất của k là mấy?

③ (Định lý Lamé – Knuth) Với mỗi n nguyên dương, gọi $u > v > 0$ là các số nguyên sao cho thuật toán Euclid áp dụng trên (u, v) sẽ kết thúc sau đúng n bước; ngoài ra, u là số nhỏ nhất thỏa mãn thì $(u, v) = (F_{n+2}, F_{n+1})$ với (F_n) là dãy Fibonacci.

④ (Tài liệu đội tuyển IMO 2011) Có một trò chơi truyền hình mà một người chơi phải trả lời n câu hỏi. Nếu trả lời đúng sẽ được cộng 1 điểm, sai sẽ bị chia đôi số điểm hiện có. Biết rằng ban đầu người chơi có 0 điểm. Gọi S_n là tập hợp các điểm số mà người chơi có thể nhận được sau khi trò chơi kết thúc. Chứng minh rằng $|S_n| = F_{n+3} - 1$.

Ví dụ. Khi $n = 2$ thì $S = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, 2\right\}$.

Bài 3. Cho bảng $(n^2 + n + 1) \times (n^2 + n + 1)$. Ta điền vào mỗi số của bảng số 0 hoặc số 1, sao cho không có bốn ô ghi số 1 nào là đỉnh của hình chữ nhật. Chứng minh rằng số số 1 không vượt quá $(n + 1)(n^2 + n + 1)$.

Lời giải.

Gọi x_i là số số 1 ở hàng thứ i . Ta cần chứng minh

$$S = \sum_{i=1}^{n^2+n+1} x_i \leq (n + 1)(n^2 + n + 1)$$

Gọi tập M gồm các cặp $(k; l)$ mà $1 \leq k < l \leq n^2 + n + 1$, ta có $|M| = \binom{n^2 + n + 1}{2}$.

Với mỗi $i = 1, 2, \dots, n^2 + n + 1$ ta xét tập M_i gồm các cặp $(k; l)$ mà hai ô giao của cột k và cột l với hàng thứ i đều chứa số 1. Ta có $|M_i| = \binom{x_i}{2} = \frac{x_i(x_i - 1)}{2}$. Vì không có 4 ô ghi số 1 là đỉnh của

hình chữ nhật nên $M_i \cap M_j = \emptyset, \forall i \neq j$. Do đó $\sum_{i=1}^{n^2+n+1} |M_i| \leq |M|$, hay

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - x_i) \leq \frac{(n^2 + n)(n^2 + n + 1)}{2} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n^2+n+1} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n^2+n+1} x_i \leq (n^2 + n)(n^2 + n + 1)$$

Mặt khác $\sum_{i=1}^{n^2+n+1} x_i^2 \geq \frac{1}{n^2 + n + 1} \left(\sum_{i=1}^{n^2+n+1} x_i \right)^2$ nên ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2 + n + 1} S^2 - S &\leq (n^2 + n)(n^2 + n + 1) \Leftrightarrow S^2 - (n^2 + n + 1)S - (n^2 + n)(n^2 + n + 1)^2 \leq 0 \\ &\Rightarrow S \leq (n + 1)(n^2 + n + 1) \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = \dots = x_{n^2+n+1} = n + 1$. □

Bài 4. Cho $n \geq 5$ điểm nằm trên mặt phẳng sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Tí và Tèo chơi trò chơi sau: Hai bạn luân phiên nhau kẻ các đoạn thẳng nối hai điểm trong số các điểm đã cho; ở lượt của mình, mỗi bạn chỉ kẻ đúng một đoạn thẳng và không có bạn nào kẻ lại đoạn thẳng đã được kẻ trước đó. Nếu sau lượt kẻ của một bạn nào đó mà mỗi điểm, trong n điểm đã cho, đều là đầu mút của ít nhất một đoạn thẳng (trong số các đoạn thẳng đã được kẻ) thì bạn đó được coi là thắng cuộc. Giả sử Tí là người kẻ đoạn thẳng đầu tiên. Hãy tìm tất cả các số nguyên $n \geq 5$ sao cho Tí có cách chơi để thắng cuộc, cho dù Tèo có thực hiện các lượt kẻ của mình như thế nào đi chăng nữa.

Lời giải.

Ta sẽ gọi một điểm là **điểm cô lập** nếu điểm đó không được nối với bất kì điểm nào khác trong số $n - 1$ điểm còn lại. Dễ thấy, Tí sẽ là người thắng cuộc khi và chỉ khi trước lượt kẻ cuối của Tí, trên mặt phẳng chỉ còn lại 1 hoặc 2 điểm cô lập. Rõ ràng, Tèo buộc phải chấp nhận để Tí có được điều trên trước lượt kẻ cuối của Tí khi và chỉ khi trước lượt kẻ của Tèo, trên mặt phẳng còn đúng 3 điểm cô lập và $n - 3$ điểm còn lại đôi một đã được nối với nhau bởi các đoạn thẳng. Vì Tí là người thực hiện việc kẻ đầu tiên nên điều vừa nêu chỉ có thể xảy ra khi số đoạn thẳng có cả hai đầu mút nằm trong số $n - 3$ điểm là một số lẻ; nghĩa là

$$\frac{(n-3)(n-4)}{2}$$

phải là số lẻ. Dễ thấy, điều vừa nêu trên có được khi và chỉ khi n có dạng $4k + 1$ hoặc $4k + 2$, với k là một số nguyên dương. Như vậy, Tí có thể có cách chơi đảm bảo chắc chắn thắng chỉ khi $n = 4k + 1$ hoặc $n = 4k + 2, k \in \mathbb{N}^*$. Ngược lại xét n có các dạng vừa nêu trên, ta có:

☑ **Trường hợp 1.** $n = 4k + 1, k \in \mathbb{N}^*$. Với $k = 1$, hiển nhiên Tí là người thắng cuộc. Xét $k \geq 2$.

Dễ thấy, sau mỗi lượt kẻ của Tí hoặc Tèo, số điểm cô lập (trong số n điểm đã cho) hoặc giữ nguyên, hoặc giảm 1 hoặc giảm 2. Xét cách chơi sau của Tí: Ở lượt đầu tiên, Tí kẻ một đoạn thẳng bất kì. Tiếp theo, một khi số điểm cô lập trên mặt phẳng còn lớn hơn 3 vào thời điểm Tèo thực hiện lượt kẻ của mình, sau mỗi lượt kẻ của Tèo, nếu số điểm cô lập giảm đi s (điểm), $s \in \{0; 1; 2\}$, thì Tí sẽ kẻ một đoạn thẳng sao cho số điểm cô lập giảm đi $2 - s$, bằng cách:

Nếu $s = 0$ (tức Tèo kẻ một đoạn thẳng nối hai điểm không cô lập) thì Tí kẻ đoạn thẳng nối hai điểm cô lập tùy ý;

Nếu $s = 1$ (tức Tèo kẻ một đoạn thẳng nối một điểm cô lập với một điểm không cô lập) thì Tí cũng kẻ một đoạn thẳng nối một điểm cô lập với một điểm không cô lập;

Nếu $s = 2$ (tức Tèo kẻ một đoạn thẳng nối hai điểm cô lập) thì Tí kẻ một đoạn thẳng nối hai điểm không cô lập.

Tí có thể thực hiện việc kẻ như trên do số điểm cô lập trên mặt phẳng lớn hơn 3 vào thời điểm Tèo thực hiện lượt kẻ của mình và khi nối hai điểm cô lập với nhau, Tèo đã tạo ra 2 điểm không cô lập mới, mà mỗi điểm chỉ được nối với đúng một điểm trong số các điểm không cô lập có trên mặt phẳng sau khi Tèo thực hiện lượt kẻ của mình. Với cách chơi nêu trên của Tí, sau lượt kẻ đầu tiên của Tí, cũng như sau mỗi cặp lượt kẻ Tèo-Tí, số điểm cô lập giảm đi đúng 2. Từ đó, do số điểm cô lập ban đầu là một số lẻ ($4k + 1, k \geq 2$) lớn hơn hoặc bằng 9 nên phải tồn tại thời điểm mà sau cặp lượt kẻ Tèo-Tí, số điểm cô lập bằng đúng 3 và người phải thực hiện lượt kẻ ngay sau khi tình huống này xảy ra là Tèo. Lúc này, nếu $n - 3$ điểm không cô lập đôi một đã được nối với nhau bởi các đoạn thẳng thì Tí sẽ là người thắng cuộc, theo nhận xét ở phần đầu lời giải. Trường hợp ngược lại, còn các điểm không cô lập chưa được nối với nhau, hiển nhiên, ở mỗi lượt của mình, cả Tèo và Tí sẽ kẻ một đoạn thẳng nối hai điểm không cô lập (một khi còn có thể). Do sau mỗi lượt kẻ của Tèo, số đoạn thẳng đã được kẻ (kể từ khi hai bạn bắt đầu chơi) luôn là một số chẵn, mà tổng số đoạn thẳng có cả hai đầu mút nằm trong số $n - 3$ điểm không cô lập là một số lẻ $((2k - 1) \cdot (4k - 3))$ nên một khi Tèo còn kẻ được đoạn thẳng nối hai điểm không cô lập thì Tí cũng làm được điều tương tự, và hơn nữa, phải tồn tại

thời điểm mà sau lượt kẻ của Tí, tất cả $n - 3$ điểm không cô lập sẽ đôi một được nối với nhau. Điều này, theo nhận xét ở phần đầu lời giải, buộc Tèo phải nhường phần thắng cuộc cho Tí.

☑ **Trường hợp 2.** $n = 4k + 2, k \in \mathbb{N}^*$. Với $k = 1$, dễ thấy, Tí là người thắng cuộc. Xét $k \geq 2$. Khi đó, sau lượt kẻ đầu tiên của Tí, có thể xảy ra một trong hai khả năng sau:

- **Khả năng 1.** Tèo kẻ một đoạn thẳng nối một trong hai điểm không cô lập với một điểm cô lập.
- **Khả năng 2.** Tèo kẻ một đoạn thẳng nối hai điểm cô lập với nhau.

Nếu khả năng 1 xảy ra, Tí sẽ kẻ một đoạn thẳng nối hai điểm không cô lập với nhau; nếu khả năng 2 xảy ra, Tí sẽ kẻ một đoạn thẳng nối một điểm không cô lập với một điểm cô lập. Bằng cách này, Tí sẽ làm cho số điểm cô lập bị giảm đi một số lẻ (3 hoặc 5) điểm, sau 3 lượt kẻ đầu tiên (gồm 2 lượt của Tí và 1 lượt của Tèo). Vì thế, do số điểm cô lập ban đầu là số chẵn nên bằng cách kẻ nêu trên, Tí sẽ buộc Tèo phải thực hiện lượt kẻ tiếp theo trong trạng thái số điểm cô lập trên mặt phẳng là một số lẻ lớn hơn 3. Điều này, cùng với việc số đoạn thẳng có cả hai đầu mút nằm trong số $n - 3$ điểm là một số lẻ $((2k - 1) \cdot (4k - 1))$, hiển nhiên, giúp Tí dùng cách chơi đã mô tả ở trường hợp 1 để trở thành người thắng cuộc.

Tóm lại, khi $n = 4k + 1$ hoặc $n = 4k + 2, k \in \mathbb{N}^*$, Tí sẽ có cách chơi đảm bảo chắc chắn thắng. Vậy, tất cả giá trị n cần tìm theo yêu cầu đề bài là $n = 4k + 1$ và $n = 4k + 2, k \in \mathbb{N}^*$. $\square$

Bài 5. Trong một bảng ô vuông kích thước 999×999 , mỗi ô được tô bởi một trong hai màu trắng hoặc đỏ. Gọi T là số bộ (C_1, C_2, C_3) các ô mà hai ô đầu trong cùng một hàng và hai ô cuối trong cùng một cột, với C_1 và C_3 màu trắng, C_2 màu đỏ. Tìm giá trị lớn nhất của T .

Lời giải.

Ta chứng minh trong một bảng vuông $n \times n$ có nhiều nhất $\frac{4n^4}{27}$ bộ như vậy. Giả sử hàng i và cột j chứa a_i và b_j ô trắng tương ứng, R là tập hợp các ô đỏ. Với mỗi ô đỏ (i, j) có $a_i b_j$ bộ (C_1, C_2, C_3) chấp nhận được với $C_2 = (i, j)$, vì vậy $T = \sum_{(i,j) \in R} a_i b_j$.

Sử dụng bất đẳng thức $2ab \leq a^2 + b^2$ ta được

$$T \leq \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in R} (a_i^2 + b_j^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (n - a_i) a_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (n - b_j) b_j^2$$

Do có $n - a_i$ ô đỏ trong hàng i và $n - b_j$ ô đỏ trong cột j . Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$(n - x) x^2 = \frac{1}{2} (2n - 2x) \cdot x \cdot x \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2n}{3} \right)^3 = \frac{4n^3}{27}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{2n}{3}$.

Do đó $T \leq \frac{n}{2} \cdot \frac{4n^3}{27} + \frac{n}{2} \cdot \frac{4n^3}{27} = \frac{4n^4}{27}$. Nếu $n = 999$ thì tô màu tùy ý bảng ô vuông với $x = \frac{2n}{3} = 666$ ô trắng trong mỗi hàng và cột. Chẳng hạn tô màu ô (i, j) trắng nếu $i - j \equiv 1, 2, \dots, 666 \pmod{999}$, và các ô khác màu đỏ. Vậy giá trị lớn nhất của T có thể đạt được là $T = \frac{4 \cdot 999^4}{27}$. $\square$

Bài 6. Cho dãy các số 21, 22, 23, ..., 22018. Ta biến đổi như sau mỗi số trong dãy đều được thay thế bởi tổng các chữ số của nó. Tiếp tục làm như vậy với các số nhận được cho tới khi tất cả các số đều có 1 chữ số. Chứng minh rằng trong dãy số cuối cùng nhận được thì số các

số 2 nhiều hơn số các số 1.

Lời giải.

Nhận xét "Số tự nhiên n và tổng các chữ số của n luôn cùng số dư trong phép chia cho 9". Thật vậy, giả sử $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$. Tức là $n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 10^2 + \dots + a_k 10^k, k \in \mathbb{N}$. Khi đó

$$n \equiv a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 1^2 + \dots + a_k 1^k \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k \pmod{9}$$

Mặt khác ta có

① $2^1 \equiv 2 \pmod{9};$

② $2^2 \equiv 4 \pmod{9};$

③ $2^3 \equiv 8 \pmod{9};$

④ $2^4 \equiv 7 \pmod{9};$

⑤ $2^5 \equiv 5 \pmod{9};$

⑥ $2^6 \equiv 1 \pmod{9};$

⑦ $2^7 \equiv 2 \pmod{9}.$

Như vậy tính bất biến ở đây là $26k + r$ lần lượt nhận các số dư trong phép chia cho 9 là 2, 4, 8, 7, 5, 1 tương ứng với các giá trị của r là 1, 2, 3, 4, 5, 0. Dãy cuối cùng nhận được gồm 2018 số thuộc tập hợp $\{2; 4; 8; 7; 5; 1\}$. Ta có $2018 = 336 \times 6 + 2$ số cuối cùng của dãy sau khi đã thực hiện các bước biến đổi là 2. Như vậy dãy cuối cùng nhận được có 337 số 2 (nhiều hơn số các số khác 1 số). Vậy số các số 2 nhiều hơn số các số 1 đúng 1 số. $\square$

Bài 7 (USAMO 2001). Cho S là một tập các số nguyên sao cho:

i) Tồn tại $a, b \in S$ với $\gcd(a, b) = \gcd(a - 2, b - 2) = 1$;

ii) Nếu x và y là hai phần tử của S (có thể bằng nhau) thì $x^2 - y$ cũng thuộc S .

Chứng minh rằng S là tập tất cả các số nguyên.

Lời giải.

Ta nói " S ổn định tại $x \mapsto f(x)$ " nếu $x \in S$ thì $f(x) \in S$. Nếu $c, d \in S$, thì theo (ii), tập S ổn định tại $x \mapsto c^2 - x$ và $x \mapsto d^2 - x$, do đó nó ổn định tại $x \mapsto c^2 - (d^2 - x) = x + (c^2 - d^2)$. Tương tự ta cũng có S ổn định tại $x \mapsto x + (d^2 - c^2)$. Do đó S ổn định tại $x \mapsto x + n$ và $x \mapsto x - n$ với mọi n là số nguyên có dạng $c^2 - d^2$ với $c, d \in S$. Khi đó, ta có thể cho $n = m$ với $m = \gcd(c^2 - d^2 : \forall c, d \in S)$. Thật vậy, ta đặt $P = \{c^2 - d^2 : \forall c, d \in S\}$ khi đó, theo một tính chất số học đơn giản (Định lý Euler), tồn tại dãy số nguyên x_k để $\sum_{a_k \in P} x_k a_k = m$. Từ nhận xét trên, ta thấy nếu có $x \mapsto x \pm n; x \mapsto x \pm m$

thì cũng có $x \mapsto x \pm m \pm n$. Vì thế ta có

$$x \mapsto x \pm a_k; \forall a_k \in P \Rightarrow x \mapsto x \pm \sum_{a_k \in P} x_k a_k \Rightarrow x \mapsto x \pm m.$$

Vậy nhận xét trên là đúng. Ta chứng minh $m = 1$. Phản chứng, giả sử $m \neq 1$. Gọi p là một ước nguyên tố của m . Khi đó $c^2 - d^2 \equiv 0 \pmod{p}$ với mọi $c, d \in S$. Nói cách khác, với mỗi $c, d \in S$, ta được $d \equiv c \pmod{p}$ hoặc $d \equiv -c \pmod{p}$. Với $c \in S$, theo (b) ta có $c^2 - c \in S$, nên $c^2 - c \equiv c \pmod{p}$ hoặc $c^2 - c \equiv -c \pmod{p}$. Do đó với mỗi $c \in S$, ta có

$$c \equiv 0, 2 \pmod{p} \quad (*)$$

Từ (i), tồn tại a và b trong S sao cho $\gcd(a, b) = 1$, từ đó ta được ít nhất một trong hai số a hoặc b không thể chia hết cho p . Điều đó có nghĩa là có một phần tử α của S mà $\alpha \not\equiv 0 \pmod{p}$. Tương tự, theo (i), $\gcd(a - 2, b - 2) = 1$, nên p không thể chia hết cả $a - 2$ và $b - 2$. Do đó tồn tại một phần tử β của S sao cho $\beta \not\equiv 2 \pmod{p}$. Theo (*), ta suy ra $\alpha \equiv 2 \pmod{p}$ và $\beta \equiv 0 \pmod{p}$. Theo (ii), $\beta^2 - \alpha \in S$. Chọn $c = \beta^2 - \alpha$, ta được cả $-2 \equiv 0 \pmod{p}$ hoặc $-2 \equiv 2 \pmod{p}$ đều cho $p = 2$. Từ (*) ta thấy tất cả các phần tử của S chẵn, trái với (i). Do đó giả thiết trên của chúng ta là sai, chứng tỏ $m = 1$ và ta được S là tập tất cả số nguyên. $\square$

Bài 8. Cho bảng ô vuông kích thước 111×2017 (bảng gồm 111 hàng và 2017 cột). Điền vào mỗi ô vuông con của bảng một số 0 hoặc 1 sao cho trong mỗi cột có ít nhất 85 số 1. Chứng minh rằng ta có thể bỏ đi 106 hàng sao cho ở bảng mới nhận được (gồm 5 hàng và 2017 cột), chỉ có thể có tối đa một cột chứa toàn số 0.

Lời giải.

Đánh số thứ tự các hàng, từ dưới lên trên, bởi $1, 2, \dots, 111$ và đánh số thứ tự các cột, từ trái qua phải, bởi $1, 2, \dots, 2017$. Với mỗi $i \in \{1; 2; \dots; 111\}$, kí hiệu r_i là số số 1 nằm ở hàng thứ i . Với mỗi $k \in \{1; 2; \dots; 2017\}$, kí hiệu c_k là số số 1 nằm ở cột thứ k . Hiển nhiên, ta có

$$\sum_{i=1}^{111} r_i = \sum_{k=1}^{2017} c_k. \quad (*)$$

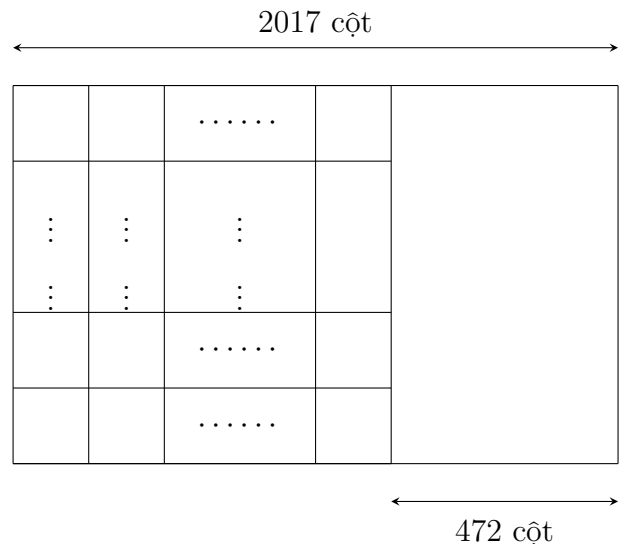
Do $c_k \geq 85$ với mọi $k \in \{1; 2; \dots, 2017\}$ nên $\sum_{k=1}^{2017} c_k \geq 85 \times 2017 = 171.445$. Do đó, từ (*), ta có

$$\sum_{i=1}^{111} r_i \geq 171.445.$$

Suy ra, theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại một hàng mà số số 1 ở hàng đó không ít hơn

$$\left\lceil \frac{171.445}{111} \right\rceil = 1.545 \text{ (số)}.$$

Tô màu xanh cho hàng này. Vì tính chất của bảng số đã cho không thay đổi khi hoán đổi vị trí của các cột nên không mất tính tổng quát, giả sử tất cả 1.545 ô đầu tiên (kể từ trái sang phải) của hàng được tô xanh đều chứa số 1. Xét bảng con A của bảng đã cho, gồm 111 hàng và 472 ($= 2017 - 1545$) cột cuối cùng của bảng đã cho (như hình bên).



Hiển nhiên, bảng A cũng có tính chất đúng như bảng đã cho, nghĩa là, ở mỗi cột của bảng A cũng có ít nhất 85 số 1. Vì thế, bằng các lập luận tương tự trên, suy ra trong bảng A , tồn tại một hàng mà số số 1 ở hàng đó không ít hơn

$$\left\lceil \frac{85 \times 472}{111} \right\rceil = 362 \text{ (số)}.$$

(Hàng này có thể là một phần của hàng đã được tô xanh). Tô hàng vừa nêu trên của bảng A bởi màu đỏ; trường hợp hàng đó là một phần của hàng đã được tô xanh, ta tô lại 472 ô, từ ô thứ 1546

đến ô thứ 2017 của hàng xanh, bởi màu đỏ. Tương tự trên, không mất tổng quát, giả sử tất cả 362 ô đầu tiên của hàng được tô đỏ, xét trong bảng A , đều chứa số 1. Xét bảng con B của bảng đã cho, gồm 111 hàng và 110 ($= 472 - 362$) cột cuối cùng của bảng đã cho. Cũng như với bảng A , suy ra trong bảng B , tồn tại một hàng mà số số 1 ở hàng đó không ít hơn

$$\left\lceil \frac{85 \times 110}{111} \right\rceil = 85(\text{số}).$$

(Hàng này có thể là một phần của hàng có chứa những ô đã được tô màu). Tô hàng vừa nêu trên của bảng B bởi màu hồng; trường hợp hàng đó là một phần của hàng chứa những ô đã được tô màu, ta tô lại 110 ô, từ ô thứ 1908 đến ô thứ 2017, bởi màu hồng. Tương tự trên, không mất tính tổng quát, giả sử tất cả 85 ô đầu tiên của hàng được tô hồng, xét trong bảng B , đều chứa số 1. Xét bảng con C của bảng đã cho, gồm 111 hàng và 25 ($= 110 - 85$) cột cuối cùng của bảng đã cho. Cũng như với bảng A , suy ra trong bảng C , tồn tại một hàng mà số số 1 ở hàng đó không ít hơn

$$\left\lceil \frac{85 \times 25}{111} \right\rceil = 20(\text{số}).$$

(Hàng này có thể là một phần của hàng có chứa những ô đã được tô màu). Tô hàng vừa nêu trên của bảng C bởi màu tím; trường hợp hàng đó là một phần của hàng đã được tô màu, ta tô lại 25 ô, từ ô thứ 1934 đến ô thứ 2017, bởi màu tím. Tương tự trên, không mất tính tổng quát, giả sử tất cả 20 ô đầu tiên hàng được tô tím, xét trong bảng C , đều chứa số 1.

Xét bảng con D của bảng đã cho, gồm 111 hàng và 5 ($= 25 - 20$) cột cuối cùng của bảng đã cho. Cũng như với bảng A , suy ra trong bảng D , tồn tại một hàng mà số số 1 ở hàng đó không ít hơn

$$\left\lceil \frac{85 \times 5}{111} \right\rceil = 4(\text{số}).$$

(Hàng này có thể là một phần của hàng có chứa những ô đã được tô màu). Tô hàng vừa nêu trên của bảng D bởi màu vàng; trường hợp hàng đó là một phần của hàng có chứa những ô đã được tô màu, ta tô lại 5 ô, từ ô thứ 2013 đến ô thứ 2017, bởi màu vàng. Như vậy, ta có tối đa 5 hàng, mà mỗi hàng đều chứa những ô đã được tô màu, và do đó, có tối thiểu 106 hàng, mà mỗi hàng đều không chứa ô nào đã được tô màu. Bỏ đi 106 hàng vừa nêu, ta sẽ có một bảng gồm 5 hàng và 2017 cột, mà số cột có chứa số 1 không ít hơn tổng số số 1 nằm ở các ô đã được tô màu. Theo trên, số số 1 nằm ở các ô được tô màu xanh, đỏ, hồng, tím, vàng tương ứng không ít hơn 1.545, 362, 85, 20, 4. Vì thế, tổng số số 1 nằm ở các ô đã được tô màu không ít hơn:

$$1.545 = 362 + 85 + 20 + 4 = 2016(\text{số}).$$

Từ đó suy ra, bảng gồm 5 hàng và 2017 cột vừa nêu trên chỉ có thể có tối đa một cột không chứa số 1, hay nói cách khác, chứa toàn số 0. Vậy bài toán được chứng minh. $\square$

Lưu ý. Với x là số thực, $[x]$ kí hiệu số nguyên nhỏ nhất không nhỏ hơn x . $\square$

Bài 9. Cho m, n là các số nguyên lớn hơn 1, S là một tập gồm n phần tử. Giả sử $A_1, A_2, \dots, A_m$ là các tập con của S sao cho với mọi $x, y \in S$ bao giờ cũng có một tập A_i để cho $x \in A_i$ và $y \notin A_i$ hoặc $x \notin A_i$ và $y \in A_i$. Chứng minh rằng $n \leq 2^m$.

Lời giải.

Gọi T là tập tất cả các xâu nhị phân có m ký tự. Xét một tương ứng đi từ S đến T như sau: Với mỗi $x \in S$, đặt $f(x) = x_1 x_2 \dots x_m$, trong đó $x_i = 1$ nếu $x \in A_i$ và $x_i = 0$ nếu $x \notin A_i$. Khi đó hiển nhiên f là một đơn ánh nên $|S| \leq |T|$ hay $n \leq 2^m$. $\square$

Bài 10. Cho đa giác lồi P . Bạn An muốn ghi vào mỗi đỉnh của P một số nguyên dương sao cho các điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn

- i) Trong các số được ghi, có ít nhất một số chẵn;
- ii) Tổng của ba số được ghi ở ba đỉnh liên tiếp tùy ý là một số lẻ.

Chứng minh rằng bạn An có thể thực hiện được cách ghi như trên khi và chỉ khi số đỉnh của P chia hết cho 3.

Lời giải.

Điều kiện cần. Giả sử bạn An đã thực hiện được cách ghi thỏa mãn đề bài. Xuất phát từ một đỉnh nào đó, lần lượt, theo chiều kim đồng hồ, kí hiệu các đỉnh của P là $A_1, A_2, \dots, A_n$. Với mỗi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, kí hiệu a_i là số được bạn An ghi vào đỉnh A_i .

Theo i), trong các số $a_1, a_2, \dots, a_n$ có ít nhất một số chẵn. Không mất tính tổng quát, có thể giả sử a_1 chẵn.

Trong phần trình bày sau đây ta coi các chỉ số $n+k$, $1 \leq k \leq n$, và chỉ số k là một (các chỉ số được xét theo modulo n). Nhận xét: Với mọi $i, j \in \{1; 2; 3; \dots; n\}$, nếu $(j-i)$ chia hết cho 3 thì a_i và a_j có cùng tính chẵn lẻ. Thật vậy, với $i \in \{1; 2; 3; \dots; n\}$ theo ii) ta có $a_i + a_{i+1} + a_{i+2}$ và $a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3}$ là các số lẻ nên $(a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3}) - (a_i + a_{i+1} + a_{i+2}) = a_{i+3} - a_i$ là một số chẵn. Vì thế a_i và a_{i+3} có cùng tính chẵn lẻ. Từ đó, do i tùy ý nên ta có nhận xét trên. Xét các trường hợp sau

- ① Nếu $n = 3k + 1$, $k \in \mathbb{N}^*$. Trong trường hợp này vì a_1 chẵn nên theo nhận xét thì a_{3k+1} cũng là số chẵn, lại có $a_{3k+1} + a_1 + a_2$ là số lẻ, suy ra a_2 là số lẻ. Do đó theo nhận xét $a_{3k+2} \equiv a_1$ là số lẻ, ta nhận được mâu thuẫn, chứng tỏ $n \neq 3k + 1$.
- ② Nếu $n = 3k + 2$, $k \in \mathbb{N}^*$. Trong trường hợp này vì a_1 chẵn nên theo nhận xét thì a_{3k+1} cũng là số chẵn, lại có $a_{3k+1} + a_{3k+2} + a_1$ là số lẻ, suy ra a_{3k+2} là số lẻ. Do đó theo nhận xét, a_2 là số lẻ, suy ra $a_{3k+2} + a_1 + a_2$ là số chẵn, trái với ii), ta nhận được mâu thuẫn, chứng tỏ $n \neq 3k + 2$.

Vì các trường hợp trên không xảy ra nên phải có n chia hết cho 3.

Điều kiện đủ. Giả sử P có $n = 3k$ đỉnh ($k \in \mathbb{N}^*$). Xuất phát từ một đỉnh nào đó, lần lượt, theo chiều kim đồng hồ, kí hiệu các đỉnh của P là $A_1, A_2, \dots, A_{3k}$. Xét cách ghi số như sau của bạn An: Với mỗi $i \in \{1; 2; 3; \dots; 3k\}$, ghi vào đỉnh A_i một số nguyên dương lẻ nếu $i \equiv 2 \pmod{3}$ và ghi vào đỉnh A_i một số nguyên dương chẵn trong trường hợp còn lại. Rõ ràng cách ghi như trên thỏa mãn điều kiện i) của đề bài. Do $n \equiv 0 \pmod{3}$ nên trong ba đỉnh liên tiếp tùy ý của P luôn có một đỉnh có chỉ số chia hết cho 3 dư 1, một đỉnh có chỉ số chia cho 3 dư 2 và một đỉnh có chỉ số chia hết cho 3. Vì thế, với cách ghi số nêu trên ta luôn có tổng của ba số được ghi ở 3 đỉnh liên tiếp của P là một số lẻ (do bằng tổng của một số lẻ và hai số chẵn). Vì vậy cách ghi số như trên thỏa mãn điều kiện ii) của đề bài. $\square$

Bài 11. Từ các số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có n chữ số (n nguyên dương) mà trong mỗi số đó chứa một số lẻ chữ số 1 và một số chẵn chữ số 2?

Lời giải.

Vì tổng số lượng số 1 và số 2 trong số đó là lẻ nên với mỗi số k lẻ cố định, ta tính xem có bao nhiêu số tự nhiên có n chữ số ($n \geq k$) trong đó có k chữ số cả 1 và 2.

Chọn k vị trí trong n vị trí để đặt chữ số 1 và 2, có $\binom{n}{k}$ cách.

Chọn i vị trí trong k vị trí đã được chọn (i lẻ và $i \leq k$) để đặt chữ số 1 và $k-i$ vị trí để đặt chữ số 2, có số cách làm là

$$\sum_{\substack{i \leq k \\ i \text{ lẻ}}} \binom{k}{i} = \binom{k}{1} + \binom{k}{3} + \dots = 2^{k-1}.$$

Trong $n - k$ vị trí còn lại, mỗi vị trí đặt một trong ba chữ số 3, 4, 5 có 3^{n-k} cách. Theo quy tắc nhân, có $\binom{n}{k} \cdot 2^{k-1} \cdot 3^{n-k}$ số tự nhiên mà trong đó có k chữ số 1 và 2.

Vậy số các số tự nhiên thỏa đề bài là

$$\sum_{\substack{k \leq n \\ k \text{ lẻ}}} \binom{n}{k} \cdot 2^{k-1} \cdot 3^{n-k} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k \leq n} \binom{n}{k} \cdot 2^k \cdot 3^{n-k} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{(3+2)^n - (3-2)^n}{2} \right] = \frac{5^n - 1}{4}.$$

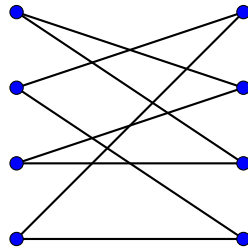
Bài toán được giải quyết. □

Bài 12. Mỗi ô vuông của bảng $n \times n$ ta ghi số 0 hoặc số 1 sao cho, với mỗi ô ghi số 0 thì có ít nhất n ô cùng hàng hoặc cùng cột với nó được ghi số 1. Chứng minh rằng có ít nhất $\left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil$ số 1 được ghi.

Lời giải.

Với $n = 4$ ta có cách điền như sau

0	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
1	0	1	0



Trong trường hợp tổng quát, ta xây dựng đồ thị hai phía gồm $2n$ đỉnh mà n đỉnh bên trái là n hàng và n đỉnh bên phải là n cột. Đỉnh H_i được nối với đỉnh C_j nếu ô $(i; j)$ được ghi số 1. Theo giả thiết đề bài, nếu đỉnh H_i không nối với đỉnh C_j thì $d(H_i) + d(C_j) \geq n$. Trong đó $d(H_i)$ là số số 1 ở hàng i và $d(C_j)$ là số số 1 ở cột j . Ta chứng minh số cạnh của đồ thị là $e \geq \frac{n^2}{2}$. Ta có

$$S = \sum_{(i;j)=0} (d(H_i) + d(C_j)) \geq (n^2 - e) n$$

Trong tổng trên với mỗi i , số hạng $d(H_i)$ xuất hiện $n - d(H_i)$ lần và với mỗi j thì số hạng $d(C_j)$ xuất hiện $n - d(C_j)$ lần. Mà $\sum_{i=1}^n d(H_i) = \sum_{j=1}^n d(C_j) = e$ nên ta suy ra được

$$S = \sum_{i=1}^n d(H_i) [n - d(H_i)] + \sum_{j=1}^n d(C_j) [n - d(C_j)] = 2ne - \sum_{i=1}^n d^2(H_i) - \sum_{j=1}^n d^2(C_j)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\sum_{i=1}^n d^2(H_i) \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n d(H_i) \right)^2 = \frac{1}{n} e^2 \text{ và } \sum_{j=1}^n d^2(C_j) \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n d(C_j) \right)^2 = \frac{e^2}{n}$$

Suy ra $S \leq 2ne - \frac{2e^2}{n}$. Từ đó dẫn đến

$$(n^2 - e)n \leq 2ne - \frac{2e^2}{n} \Leftrightarrow 2e^2 - 3n^2e + n^4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{n^2}{2} \leq e \leq n^2$$

Bài toán được giải quyết. □

Bài 13. Tìm số nguyên $n \geq 3$ nhỏ nhất có tính chất: Với mọi cách tô n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$, đôi một phân biệt và theo thứ tự đó nằm cách đều nhau trên một đường thẳng, bởi hai màu, luôn tồn tại ba điểm A_i, A_j, A_{2j-i} ($1 \leq i < 2j - i \leq n$) được tô cùng màu.

Lời giải.

Giả sử các điểm được tô bởi hai màu, đen và trắng. Xét 8 điểm $A_1, A_2, \dots, A_8$, được tô màu như sau: A_1, A_2, A_5, A_6 được tô màu trắng; A_3, A_4, A_7, A_8 được tô bởi màu đen. Dễ thấy, không có ba điểm A_i, A_j, A_{2j-i} ($1 \leq i < 2j - i \leq 8$) nào được tô cùng màu. Do đó $n \geq 9$. Ta sẽ chứng minh $n = 9$ là số có tính chất như đề bài yêu cầu. Thật vậy, giả sử ngược lại, tồn tại cách tô 9 điểm $A_1, A_2, \dots, A_9$ bởi hai màu, đen và trắng sao cho không có ba điểm A_i, A_j, A_{2j-i} ($1 \leq i < 2j - i \leq 9$) nào được tô cùng màu.

Trường hợp 1. Tồn tại $i \in \{3; 4; 5\}$, sao cho các điểm A_i và A_{i+2} được tô cùng màu, giả sử là màu trắng. Khi đó, các điểm $A_{i-2}, A_{i+1}, A_{i+4}$ phải được tô màu đen (chú ý $i - 2 \geq 1$ và $i + 4 \leq 9$), vô lý.

Trường hợp 2. Với mọi $i \in \{3; 4; 5\}$, các điểm A_i và A_{i+2} được tô khác màu. Không mất tính tổng quát, giả sử A_5 được tô màu trắng. Khi đó, A_3 và A_7 được tô màu đen. Nhờ tính đối xứng, ta có thể giả sử rằng A_4 được tô màu trắng và A_6 được tô màu đen. Khi đó A_8 được tô màu trắng (do A_6, A_7 và A_8 không được tô cùng màu); suy ra, A_2 được tô đen (do A_2, A_5 và A_8 không được tô cùng màu) và A_9 được tô trắng (do A_7, A_8 và A_9 không được tô cùng màu). Do đó, A_1 phải vừa được tô màu trắng (do A_1, A_2 và A_4 không được tô cùng màu), vừa được tô đen (do A_1, A_5 và A_9 không được tô cùng màu), là điều vô lý.

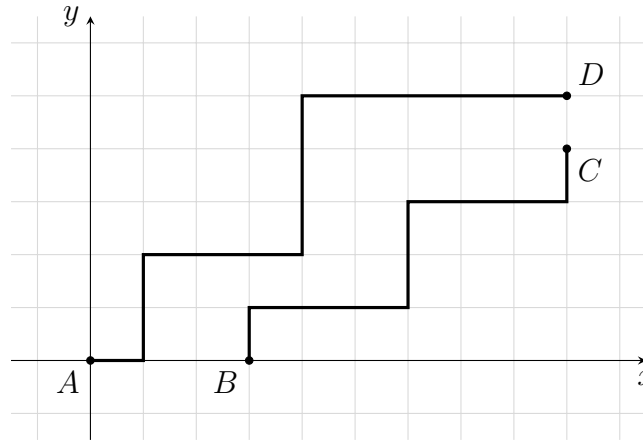
Những điều vô lý nhận nhận được ở trên cho ta điều muốn chứng minh. Vậy tóm lại, $n = 9$ là các số nguyên nhỏ nhất có tính chất như đề bài yêu cầu. □

Bài 14 (VN TST 2003). Cho bốn điểm phân biệt $A(0, 0)$, $B(p, 0)$, $C(m, q)$, $D(m, n)$ với m, n, p, q là bốn số nguyên dương thỏa mãn $p < m$, $q < n$. Xét các đường đi tốt f từ A đến D và các đường đi tốt g từ B đến C . Gọi S là số các cặp đường đi (f, g) sao cho chúng không có điểm chung. Chứng minh rằng

$$S = \binom{m+n}{n} \binom{m+q-p}{q} - \binom{m+q}{q} \binom{m+n-p}{n}.$$

Lời giải.

Bổ đề. Số đường đi f tốt là $\binom{m+n}{n}$, và số đường đi g tốt là $\binom{m+q-p}{q}$.



Do đó, số cặp đường đi tốt (f, g) tùy ý chính là $\binom{m+n}{n} \binom{m+q-p}{q}$. Ta thấy rằng nếu hai đường f, g gặp nhau tại điểm K nào đó thì thay vì xét cặp đường gấp khúc $A \rightarrow K \rightarrow D, B \rightarrow K \rightarrow C$, ta có thể thay đổi hướng đi thành $A \rightarrow K \rightarrow C, B \rightarrow K \rightarrow D$. Từ đó, dễ dàng chứng minh được tồn tại song ánh từ cặp đường đi (f, g) có điểm chung đến cặp đường đi (f', g') từ $A \rightarrow C, B \rightarrow D$. Số đường đi đó là $\binom{m+q}{q} \binom{m+n-p}{n}$. Vậy số cặp đường đi (f, g) thỏa mãn đề bài là

$$\binom{m+n}{n} \binom{m+q-p}{q} - \binom{m+q}{q} \binom{m+n-p}{n}.$$

Bài toán được giải quyết. □

Bài 15 (IMO 2005). Trong một cuộc thi toán có n thí sinh ($n \in \mathbb{N}, n \geq 5$) và 6 bài toán được đặt ra. Biết rằng, với mỗi hai bài toán thì có nhiều hơn $\frac{2}{5}$ tổng số thí sinh cùng giải được và không có thí sinh nào giải được bài toán 6. Chứng minh rằng có ít nhất hai thí sinh sao cho mỗi người giải được đúng 5 bài toán.

Lời giải.

Với mỗi $1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq n$, đặt $a_{ij} = 1$ nếu người j giải được bài toán i và $a_{ij} = 0$ nếu người j không giải được bài i . Khi đó ta có ma trận $A = (a_{ij})$ cỡ $6 \times n$ mà trên mỗi cột của nó có nhiều nhất 5 số 1, hai hàng bất kì có nhiều hơn $\frac{2}{5}n$ cột chung (cột chung là cột mà các phần tử của hai hàng trên mỗi cột đó đều là số 1). Ta chứng minh bài toán bằng phản chứng bằng cách đếm số cặp số 1 như vậy. Giả sử có nhiều nhất một thí sinh giải được 5 bài toán, còn lại giải được không quá 4 bài. Khi đó A có nhiều nhất 1 cột có năm số 1 và các cột còn lại còn lại có nhiều nhất 4 số 1. Vậy,

$$T \leq (n-1) \binom{4}{2} + \binom{5}{2} = 6n + 4. \quad (2.1)$$

Giả sử $n = 5p + k, k = 0, 1, 2, 3, 4$. Do mỗi hàng của A có nhiều hơn $\frac{2}{5}n$ cặp số 1 chung nên

- ✓ Với $k = 0$ thì với mỗi hai bài có không ít hơn $2p+1$ thí sinh cùng giải được hay $T \geq 15(2p+1)$. Điều này mâu thuẫn với (2.1).
- ✓ Bằng cách làm tương tự ta cũng có kết quả tương tự cho $k = 1, 3, 4$.
- ✓ Với $k = 2$. Khi đó ta có $30p + 15 \leq T \leq 30p + 16$.

Nếu $T < 6n + 4$ thì có ít nhất một cột của A có 3 số 1. Khi đó,

$$T \leq (n-2) \binom{4}{2} + \binom{5}{3} + \binom{3}{2} = 6n + 1 = 30p + 13 < 30p + 15, \text{ (vô lý).}$$

Vậy $T = 30p + 16$. Khi đó có 2 bài có $2p + 2$ thí sinh cùng giải được, còn với mỗi hai bài còn lại có $2p + 1$ thí sinh cùng giải được. Như vậy, có đúng một người giải được 5 bài và $n - 1$ người giải được đúng 4 bài. Không mất tính tổng quát ta coi hai bài có cùng $2p + 2$ thí sinh giải được là bài 1 và 2 và thí sinh giải được bài 5 là thí sinh n . Gọi B là ma trận có được từ A khi bỏ đi cột n . Ta có mỗi cột của B có đúng 4 số 1. Ta sẽ tính số số 1 trên mỗi hàng của B .

Trường hợp 1. Thí sinh là được cả hai bài 1 và 2. Giả sử thí sinh n không làm được bài 6. Số cặp số 1 chung của mỗi hai hàng $(1; 2), (1; 6), (2; 6), (3; 6), (4; 6), (5; 6)$ là $2p + 1$, số cặp số 1 chung của mỗi hai hàng còn lại bằng $2p$. Do đó mỗi số 1 của hàng 1 trong B thì có 3 cặp số 1 nằm ở 3 trong số 5 cặp hàng $(1; 2); (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6)$ nên số số 1 của hàng 1 bằng $\frac{10p+2}{3}$. Tương tự ta có số số 1 của các hàng 2, 3, 4, 5, 6 lần lượt là $\frac{10p+2}{3}; \frac{10p+1}{3}; \frac{10p+1}{3}; \frac{10p+1}{3}; \frac{10p+1}{3}; \frac{10p+5}{3}$. Từ các kết quả trên suy ra các số $10p+1; 10p+2; 10p+5$ cùng chia hết cho 3. Vô lý.

Trường hợp 2. Thí sinh n không làm được một trong hai bài 1 hoặc 2. Giả sử thí sinh n không làm được bài 1. Tương tự trường hợp 1 ta tính được số số 1 trong mỗi hàng của ma trận B lần lượt là

$$\frac{10p+6}{3}; \frac{10p+2}{3}; \frac{10p+1}{3}; \frac{10p+1}{3}; \frac{10p+1}{3}; \frac{10p+1}{3}.$$

Suy ra các số $10p+1; 10p+2; 10p+6$ cùng chia hết cho 3. Vô lý.

Bài toán được giải quyết. □

Bài 16. Cho số nguyên dương lẻ n . Người ta dùng 3 màu để tô tất cả các đỉnh của một n -giác đều sao cho mỗi đỉnh được tô bởi một màu và mỗi màu được dùng để tô một số lẻ đỉnh. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác cân có 3 đỉnh được tô bởi cả 3 màu. (Một tam giác đều được coi là một tam giác cân).

Lời giải.

Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Gọi 3 màu là 1, 2, 3 và a, b, c lần lượt là số đỉnh của n -giác đều được tô bởi màu 1, màu 2, màu 3. Theo bài ra ta có a, b, c là các số nguyên dương lẻ. Giả sử, ngược lại với khẳng định của đề bài, không tồn tại tam giác cân có 3 đỉnh được tô bởi cả 3 màu. Khi đó mỗi tam giác cân sẽ có cả 3 đỉnh được tô bởi một màu hoặc bởi hai màu. Xét các cặp (T, C) , với T là một tam giác cân và C là cạnh có hai đầu mút khác màu của tam giác đó. Dưới đây ta sẽ gọi một cặp như vậy là một cặp dạng $(*)$. Vì không có tam giác cân có 3 đỉnh được tô bởi cả 3 màu nên nếu tam giác cân T có cạnh C có hai đầu mút khác màu thì T phải là tam giác cân có 3 đỉnh được tô bởi hai màu. Như vậy, các cặp dạng $(*)$ sẽ được tạo nên từ các tam giác cân có 3 đỉnh được tô bởi hai màu. Do mỗi tam giác cân có 3 đỉnh được tô bởi 2 màu có đúng hai cạnh có hai đầu mút khác màu nên số cặp dạng $(*)$ là $2s$, với s là số tam giác cân có 3 đỉnh được tô bởi hai màu. (1) Tiếp theo, ta sẽ đếm số cặp dạng $(*)$ theo các đoạn thẳng có hai đầu mút khác màu. Vì n -giác là đều và n là số lẻ nên với A, B là hai đỉnh tùy ý của n -giác thì đoạn thẳng AB là cạnh của đúng một tam giác đều (có cả 3 đỉnh là đỉnh của n -giác) hoặc là cạnh của đúng 3 tam giác cân (không đều và có cả 3 đỉnh là đỉnh của n -giác) đôi một khác nhau, gồm một tam giác nhận AB là cạnh đáy, một tam giác đỉnh A , nhận AB làm cạnh bên và một tam giác cân đỉnh B , nhận BA làm cạnh bên. Dễ thấy khả năng có 3 đỉnh lập thành một tam giác đều chỉ xảy ra khi n chia hết cho 3. Vì thế, với $A,$

B là hai đỉnh tùy ý khác màu của n -giác thì đoạn thẳng AB cho ta một cặp dạng $(*)$ hoặc 3 cặp dạng $(*)$. Do đó, gọi p, q và r ($p, q, r \in \mathbb{N}$) tương ứng là số cặp đỉnh được tô bởi hai màu $(1,2)$, số cặp đỉnh được tô bởi hai màu $(2,3)$ và số cặp đỉnh được tô bởi hai màu $(3,1)$, mà mỗi cặp đỉnh cho đúng một cặp dạng $(*)$. Khi đó số cặp dạng $(*)$ được tính bằng

$$3[(ab - p) + (bc - q) + (ca - r)] + p + q + r = 3(ab + bc + ca) - 2(p + q + r), \quad (2)$$

do đó ab cặp đỉnh được tô bởi hai màu $(1,2)$, bc cặp đỉnh được tô bởi hai màu $(2,3)$, ca cặp đỉnh được tô bởi hai màu $(3,1)$. Từ (1) và (2), ta được:

$$3(ab + bc + ca) - 2(p + q + r) = 2s.$$

Suy ra $ab + bc + ca$ là số chẵn, trái với giả thiết a, b, c là các số lẻ. Mâu thuẫn trên cho ta thấy điều giả sử ban đầu là sai hay luôn tồn tại một tam giác có 3 đỉnh được tô bởi cả 3 màu. Bài toán được chứng minh xong. $\square$

Bài 17. Trên bảng có một dãy 100 số nguyên. Hai bạn An và Bình chơi trò chơi theo luật sau: An được chọn một dãy con trong dãy trên bảng (gồm ít nhất một phần tử) sau đó Bình được phép tăng 1 hay giảm 1 với tất cả các số trong dãy mà An chọn. Sau đó đến lượt An chọn dãy, ... và cứ tiếp tục như thế. Nếu trên bảng có từ 98 số chia hết cho 4 thì An thắng. Chứng minh rằng An có chiến thuật để chiến thắng.

Lời giải.

Bổ đề. Với 4 số nguyên a, b, c, d theo thứ tự. An luôn có một thuật toán để xảy ra một trong các trường hợp sau, hoặc $a \equiv 0 \pmod{4}$ hoặc $d \equiv 0 \pmod{4}$ hoặc $b \equiv c \pmod{4}$ (*)

Chứng minh. Thật vậy

☑ An xử lý để a, d đều lẻ.

☑ Nếu a và d đồng dư với $\{1; 3\} \pmod{4}$ thì An chọn dãy a, b, c, d suy ra $(*)$.
Nếu $a \equiv d \equiv 1 \pmod{4}$. Biến đổi b, c đến khi b, c khác tính chẵn lẻ.

Nếu $b - c \equiv 1 \pmod{4}$ ta biến đổi dãy $\overline{c, d}$ thì được $\begin{cases} d \equiv 0 \pmod{4} & (-1) \\ b \equiv c \pmod{4} & (+1) \end{cases}$.

Nếu $b - c \equiv 3 \pmod{4}$ lý luận tương tự.

Trường hợp $a \equiv d \equiv 3 \pmod{4}$ ta cũng lý luận tương tự.

Vậy bổ đề được chứng minh.

Ta chứng minh bài toán tổng quát. Với n số An luôn có thuật toán để có $(n - 2)$ số chia hết cho 4. Với $n = 3$. Xét dãy a, b, c . Biến đổi để b chẵn và a, c lẻ.

☑ Nếu b chia hết cho 4 thì xong.

☑ Nếu b chia 4 dư 2. Nếu a, c chia 4 dư $\{1; 3\}$ thì ta biến đổi dãy $\overline{a, b, c}$ thì xong.

☑ Nếu a, c chia 4 dư 1 thì ta biến đổi $\overline{a, b}$ và $\overline{b, c}$ thì xong.

☑ Nếu a, c chia 4 dư 3 thì ta biến đổi tương tự.

Vậy $n = 3$ luôn có một số chia hết cho 4.

Không mất tính tổng quát ta giả sử với dãy $n - 1$ số luôn có $(n - 3)$ số chia hết cho 4. Xét trường hợp dãy trên bảng là $x_1; x_2; \dots; x_n$. Ta coi 4 số $x_1; x_2; \overline{x_3; \dots; x_{n-1}}; x_n$ (coi $\overline{x_3; \dots; x_{n-1}}$ là một số đại diện x_3) và thực hiện như bổ đề.

☑ Nếu x_1 hoặc x_4 chia hết cho 4 ta bỏ số đó ra và làm với dãy $(n - 1)$ số còn lại suy ra điều phải chứng minh.

- ✓ Nếu $x_2 \equiv x_3 \pmod{4}$ thì ta coi 2 số $\overline{x_2}; \overline{x_3}$ thành một số X . Thực hiện với dãy $x_1; X; \dots; x_n$ ta được $(n-3)$ số chia hết cho 4 nhưng thực chất là được $(n-2)$ số chia hết cho 4. Vậy ta có điều phải chứng minh.

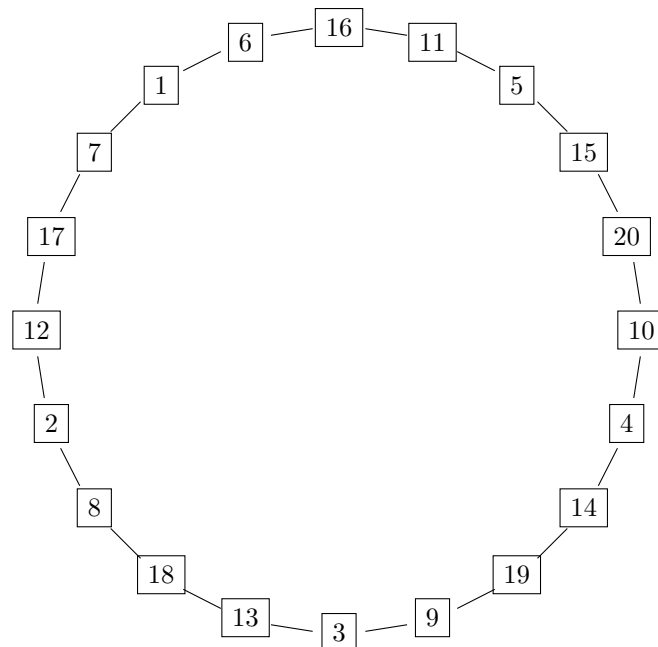
Bài toán được giải quyết. □

Bài 18. Cho một đa giác lồi, có 20 đỉnh. Ghi tất cả các số nguyên từ 1 đến 20 vào các đỉnh của đa giác đó sao cho mỗi số chỉ được ghi ở một đỉnh và ở mỗi đỉnh chỉ có một số được ghi.

- ① Hỏi có thể ghi sao cho giá trị tuyệt đối của hiệu hai số được ghi ở hai đỉnh kề nhau tùy ý lớn hơn 4 và đồng thời nhỏ hơn 11 hay không?
- ② Hỏi có thể ghi sao cho giá trị tuyệt đối của hiệu hai số được ghi ở hai đỉnh kề nhau tùy ý lớn hơn 5 và đồng thời nhỏ hơn 11 hay không?

Lời giải.

- ① Câu trả lời là “có thể”; chẳng hạn, ta có thể sắp xếp các số như ở hình bên dưới.



- ② Giả sử có thể ghi được các số theo yêu cầu của đề bài. Gọi X là một cách ghi như vậy. Nếu trong cách ghi X , hai số a, b được ghi ở hai đỉnh kề nhau thì ta nói chúng được nối với nhau, bằng một sợi chỉ chẳng hạn. Khi đó, mỗi sợi chỉ nối thể hiện một cạnh của đa giác đã cho. Chia 20 số thành 3 nhóm A, B, C như sau:

Nhóm A	Nhóm B		Nhóm C
1	6	11	16
2	7	12	17
3	8	13	18
4	9	14	19
5	10	15	20

Để thấy, trong cách ghi X , hai số trong nhóm A không thể được nối với nhau, các số trong nhóm A cũng không thể được nối với các số trong nhóm C . Từ đây, vì mỗi số đều phải được nối với đúng hai số khác nên từ nhóm A sẽ có 10 sợi chỉ nối đến nhóm B . Tương tự như vậy, từ nhóm C cũng có 10 sợi chỉ nối đến nhóm B . Mà tổng số sợi chỉ nối là 20 (bằng số cạnh của đa

giác) nên các số trong nhóm B không thể được nối với nhau. Xem số 6, ta thấy số này không thể nối sang nhóm A , lại không được phép nối với bất kì số nào trong nhóm B nên chỉ có thể được nối với số trong nhóm C ; mà trong nhóm này, nó cũng chỉ có thể nối được với duy nhất số 16. Như vậy, số 6 chỉ có thể được nối với tối đa một số khác, là điều vô lí. Điều vô lí này cho thấy giả sử ở trên là sai.

Vậy, không tồn tại cách ghi số thỏa mãn yêu cầu đề bài. □

Bài 19. Trong mặt phẳng, cho một đa giác lồi 2018 đỉnh, có độ dài mỗi cạnh là 2018 hoặc 2019. Chứng minh rằng nếu chu vi của đa giác đó là một số chẵn thì luôn tồn tại hai đỉnh chia đôi chu vi của đa giác ấy.

Lời giải.

Ta chứng minh tổng quát với số đỉnh của đa giác là $2n$, với n là một số nguyên lớn hơn 1 nào đó. Vì thế, ta có thể đặt tên các đỉnh của đa giác đã cho, lần lượt là theo chiều kim đồng hồ, bởi $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$.

Với mỗi $i = 1, 2, \dots, 2n$, kí hiệu x_i là độ dài cạnh $A_i A_{i+1}$ (quy ước A_{2n+1} là A_1). Vì độ dài mỗi cạnh là 2018 hoặc 2019 nên $x_i \in \{2018; 2019\}$ với mọi $i = 1, 2, \dots, 2n$. (1)

Vì chu vi của đa giác đã cho là một số chẵn nên $x_1 + x_2 + \dots + x_{2n} = 2p$, với p là một số nguyên dương. Với mỗi $i = 1, 2, \dots, n+1$, đặt $S_i = x_i + x_{i+1} + \dots + x_{i+n-1}$. Khi đó, điều phải chứng minh theo yêu cầu của đề bài tương đương với việc tồn tại chỉ số $1 \leq i \leq n+1$ sao cho $S_i = p$. (2)

Hiển nhiên, với một đa giác cho trước thỏa mãn điều kiện đề bài, chỉ có thể xảy ra một trong hai trường hợp sau

☑ **Trường hợp 1.** $S_1 = p$. Khi đó, hiển nhiên ta có điều phải chứng minh.

☑ **Trường hợp 2.** $S_1 \neq p$. Không mất tính tổng quát, giả sử $S_1 < p$ (trường hợp $S_1 > p$ được xét tương tự).

Khi đó, vì $S_1 + S_{n+1} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + (x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{2n}) = 2p$ nên $S_{n+1} > p$. Vì thế, $S_1, S_2, \dots, S_{n+1}$ là dãy số nguyên dương có số hạng đầu nhỏ hơn p , số hạng cuối lớn hơn p và với mọi $1 \leq i \leq n$, $|S_{i+1} - S_i| = |x_{i+n} - x_i| \in \{0; 1\}$ (do (1)). Mà p là số nguyên dương nên trong dãy trên chắc chắn phải có ít nhất một số hạng bằng p . Điều này có thể được lý giải như sau. Ta coi $S_1, S_2, \dots, S_{n+1}$ là các bậc của cầu thang từ bậc $S_1 < p$ đến bậc $S_{n+1} > p$ mà $|S_{i+1} - S_i| = |x_{i+n} - x_i| \in \{0; 1\}$, với mọi $1 \leq i \leq n$, nghĩa là mỗi lần bước chỉ leo lên tối đa một bậc thì chắc chắn ta phải bước chân lên tất cả các bậc, từ bậc thứ S_1 đến bậc thứ S_{n+1} , cấm có bỏ qua được bước nào, nên chắc chắn sẽ có một bậc bằng p . Điều này có nghĩa, tồn tại i , $1 < i < n+1$, sao cho $S_i = p$. Từ đó, theo (2), kết luận của bài đã ra được chứng minh. □

Bài 20. Vào ngày giỗ Tổ năm Đinh Dậu, Vua Hùng đã được dâng một chiếc bánh chưng rất to. Pi muốn xi phép Vua Hùng, cắt bánh chia cho đồng bào theo cách: Lần 1, cắt bánh thành 14 hoặc 20 phần; từ lần thứ hai, mỗi lần cắt một phần bánh tùy ý thành 14 hoặc 20 phần. Hỏi, bằng cách đó, Pi có thể cắt bánh chưng thành $1! + 2! + \dots + 2016! + 2017!$ phần hay không?

Lời giải.

Nhận thấy, mỗi lần Pi cắt một phần bánh nào đó thành 14 phần nhỏ hơn thì tổng số bánh sẽ tăng thêm 13 phần và mỗi lần Pi cắt một phần bánh thành 20 phần thì tổng số phần bánh sẽ tăng thêm 19 phần. Do đó, sau m lần cắt bánh thành 14 phần và n lần cắt bánh thành 20 phần (m, n là các số tự nhiên), Pi đã cắt chiếc bánh chưng thành $1 + 13m + 19n$ phần. Như vậy, Pi có thể cắt chiếc bánh chưng thành $1! + 2! + \dots + 2016! + 2017!$ phần khi và chỉ khi tồn tại các số tự nhiên m, n sao cho

$$1 + 13m + 19n = 1! + 2! + \dots + 2016! + 2017!,$$

hay

$$13m + 19n = 2! + \dots + 2016! + 2017!. \quad (*)$$

Ta có

$$\begin{aligned}2! + 3! + 4! + 5! &= 152 = 19 \cdot 8, \\6! + 8! &= 6! \cdot 57 = 19 \cdot 3 \cdot (6!), \\7! + 9! + 10! &= 7! \cdot 793 = 13 \cdot 61 \cdot (7!), \\11! + 12! &= 13 \cdot (11!), \\13! + 14! + \dots + 2016! + 2017! &= 13 \cdot M,\end{aligned}$$

trong đó M là một số nguyên dương. Từ đó, suy ra

$$2! + \dots + 2016! + 2017! = 13(61 \cdot (7!) + 11! + M) + 19 \cdot (8 + 3 \cdot (6!)).$$

Chọn $m = 61 \cdot (7!) + 11! + M$ và $n = 8 + 3 \cdot (6!)$, ta được các số tự nhiên m, n thỏa mãn (*).
Vậy câu trả lời của bài toán đã ra là “có thể”.

□

Bài 21. Một bảng ô vuông $ABCD$ kích thước 2018×2018 gồm 2018^2 ô vuông đơn vị, mỗi ô vuông đơn vị được điền bởi một trong ba số $-1; 0; 1$. Một cách điền số được gọi là đối xứng nếu mỗi ô có tâm trên đường chéo AC được điền số -1 và mỗi cặp ô đối xứng qua AC được điền cùng một số 0 hoặc 1 . Chứng minh rằng với một cách điền số đối xứng bất kì, luôn tồn tại hai hàng có các số trong mỗi ô vuông đơn vị lần lượt theo thứ tự từ trái sang phải là $a_1, a_2, \dots, a_{2018}$ ở hàng thứ nhất, $b_1, b_2, \dots, b_{2018}$ ở hàng thứ hai sao cho $S = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_{2018}b_{2018}$ là một số chẵn.

Lời giải.

Bổ đề. Trong một nhóm 2018 người bất kì $X_1; X_2; \dots; X_{2018}$, luôn tồn tại hai người có số người quen chung trong nhóm là số chẵn.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh bổ đề bằng phản chứng. Giả sử hai người bất kì trong nhóm đều có số người quen chung là lẻ.

☑ **Trường hợp 1:** Tồn tại một người có số người quen là lẻ; giả sử là X_1 . Không mất tính tổng quát, giả sử $X_1; X_2; \dots; X_{1+k}$ với k lẻ. Áp dụng bổ đề bất taym trong một nhóm lẻ người $X_2; X_3; \dots; X_{1+k}$ luôn tồn tại một người có số người quen trong nhóm là chẵn, giả sử là X_2 . Khi đó X_1 và X_2 có số người quen chung chẵn, mâu thuẫn. Ta có điều phải chứng minh.

☑ **Trường hợp 2:** Tất cả mọi người đều cso số người quen là chẵn. Gọi A là tập người quen của X_1 ; B là tập người X_1 không quen. Khi đó $|A| + |B| = 2017$ và A chẵn, B lẻ. Sử dụng giả thiết phản chúng do mỗi bạn tổng A có số người quen chung với X_1 là lẻ, do đó với $X_i \in A$ bất kỳ đều có lẻ người quen trong A và lẻ người quen trong B . Lập luận tương tự $X_j \in B$ bất kỳ đều có lẻ người quen trong A và lẻ người quen trong B . Gọi M là số cặp $(X_i; X_j)$ với $X_i \in A, X_j \in B$ và X_i quen X_j . Do $X_i \in A$ bất kỳ đều có lẻ người quen trong B và $|A|$ chẵn, nên M chẵn. Do $X_j \in B$ bất kỳ đều có lẻ người quen trong A và $|B|$ lẻ, nên M lẻ. Suy ra điều mâu thuẫn.

Vậy bổ đề được chứng minh.

Quay về bài toán. Ta gọi n_{ij} là số được điền ở ô vuông đơn vị hàng i và cột j (tính từ trên xuống và trái sang). Từ giả thiết bài toán ta có $n_{ij} = -1, \forall i = 1, 2, \dots, 2018$ và $n_{ij} = n_{ji} \in \{0; 1\} \forall i \neq j \in \{1; 2; \dots; 2018\}$. Yêu cầu bài toán là chứng minh tồn tại hai chỉ số $k; k' \in \{1; 2; \dots; 2018\}$. phân biệt

sao cho $S = \sum_{i=1}^{2018} n_{ki}n_{k'i}:2$. Do $n_{kk} = n_{k'k'} = -1$ và $n_{k'k} = n_{kk'}$ nên $n_{kk}n_{k'k} + n_{k'k}n_{kk'} = 2n_{kk}n_{k'k}:2$.

Khi đó ta chỉ cần chứng minh $S' = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k, k'}}^{2018} n_{ki}n_{k'i}:2$.

Từ 2018^2 số n_{ij} như trên, bây giờ ta xét 2018 người $X_1; X_2; \dots; X_{2018}$ có mối quan hệ như sau:

☑ Nếu $n_{ij} = 0 (i \neq j)$ thì X_i không quen X_j .

☑ Nếu $n_{ij} = 1 (i \neq j)$ thì X_i quen X_j .

Khi đó tổng $S' = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k, k'}}^{2018} n_{ki} n_{k'i}$ chính là số người quen chung trong nhóm 2018 người đang xét của

X_k và $X_{k'}$. Áp dụng bổ đề trên, ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài 22. Cho $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Chứng minh rằng tổng số các multiset có các phần tử lấy từ A và có số phần tử không vượt quá n thì chia hết cho $n + 1$.

Lời giải.

Gọi $x_1, x_2, \dots, x_n$ là số lần xuất hiện của $1, 2, \dots, n$ trong multiset đã nêu thì

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq n.$$

Xét phương trình tương ứng là $x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$ trong đó x_0 chỉ chênh lệch của tổng $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ và n . Số nghiệm của phương trình này là

$$\binom{n+1+n-1}{n+1-1} = \binom{2n}{n}.$$

Ta cần chứng minh rằng $n+1 \mid \binom{2n}{n}$. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} &= \frac{(2n)!}{(n+1)n!n!} = \frac{(2n)!(n+1-n)!}{(n+1)n!n!} \\ &= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} \\ &= \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}. \end{aligned}$$

Đẳng thức cuối cho ta điều phải chứng minh. $\square$

Bài 23. Cho tập A gồm 20 số nguyên dương đầu tiên. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho với mỗi cách lấy ra k số phân biệt bất kỳ từ tập A đều có thể chọn được hai số a, b trong các số được lấy mà $a + b$ là một số nguyên tố.

Lời giải.

Ta có $k \geq 2$. Với $k \leq 10$ ta lấy k số chẵn đầu tiên $2, 4, 6, \dots, 2k$. Tổng của hai số bất kỳ trong k số này luôn chẵn và lớn hơn 2, nên không phải là số nguyên tố. Suy ra $k \geq 11$. Ta chứng minh $k = 11$ là số cần tìm. Thật vậy, ta phân hoạch A thành 10 cặp (có nhiều cách), ví dụ

$$\{1; 2\}; \{3; 4\}; \{5; 6\}; \dots$$

Ta có tổng của hai số trong mỗi cặp đều là số nguyên tố. Khi lấy 11 số trong tập A , theo nguyên lý Dirichlet, có hai số nằm trong cùng một cặp ở trên, vì thế chúng có tổng là một số nguyên tố. Vậy số k nhỏ nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài là 11. $\square$

Bài 24. Với các tập hợp X, Y ta định nghĩa phép toán Δ như sau: $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$.

① Với A, B, C là ba tập hợp bất kỳ, chứng minh:

- i) $A \Delta A = \emptyset, A \Delta \emptyset = A,$
- ii) $A \Delta B = B \Delta A,$
- iii) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C).$
(Khi đó thay vì viết $(A \Delta B) \Delta C$ ta có thể viết $A \Delta B \Delta C$).

② Cho $S = \{1, 2, 3, \dots, n\} (n \geq 2)$. Chứng minh rằng trong $n + 1$ tập con khác rỗng bất kì của S , ta luôn có thể chọn ra một số tập hợp $X_1, X_2, \dots, X_k (2 \leq k \leq n + 1)$ sao cho $X_1 \Delta X_2 \Delta \dots \Delta X_k = \emptyset$.

Lời giải.

① Với A, B, C là ba tập hợp bất kì.

- i) Ta có $A \Delta A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \emptyset$. Ta có $A \Delta \emptyset = (A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A) = A$.
- ii) Ta có $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = B \Delta A$.
- iii) Ta có

$$\begin{aligned} (A \Delta B) \Delta C &= (((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \setminus C) \cup (C \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A))) \\ &= (A \setminus ((B \setminus C) \cup (C \setminus B))) \cup (((B \setminus C) \cup (C \setminus B)) \setminus A) \\ &= A \Delta (B \Delta C). \end{aligned}$$

② Ta chứng minh bằng phản chứng, giả sử không tồn tại.

Đặt $F = \{A_1, A_2, \dots, A_{n+1}\}$ là họ $n + 1$ tập con của S , $T = \{1, 2, \dots, n + 1\}$.

Với $J \subset T, |J| \geq 2$, đặt $\Delta_{j \in J} X_j = X_{j_1} \Delta \dots \Delta X_{j_h}$ với $J = \{j_1, \dots, j_h\}$.

Ta có $\Delta_{j \in J} X_j \subset S, J \subset T, |J| \geq 2$. Ta thấy S có $2^n - 1$ tập con khác rỗng, T có $2^{n+1} - n - 2$ tập con có từ 2 phần tử trở lên, với $n \geq 2, 2^{n+1} - n - 2 > 2^n - 1$. Khi đó theo Định lý Dirichlet, tồn tại hai tập $J, J' \subset T$ sao cho $\Delta_{j \in J} X_j = \Delta_{j' \in J'} X_{j'} \neq \emptyset$. Suy ra

$$\left(\Delta_{j \in J} X_j \right) \Delta \left(\Delta_{j' \in J'} X_{j'} \right) = \emptyset \Leftrightarrow \Delta_{j \in J \Delta J'} X_j = \emptyset$$

Trường hợp 1. $J \subset J'$. Khi đó $\Delta_{j \in J \Delta J'} X_j = \Delta_{j \in J' \setminus J} X_j = \emptyset$ suy ra $|J' \setminus J| \geq 2$.

Ta có điều phải chứng minh.

Trường hợp 2. $J \not\subset J', J' \not\subset J$, khi đó $|J \Delta J'| \geq 2$. Ta có điều phải chứng minh.

Bài toán được giải quyết. □

Bài 25. Một khu rừng phi lao chắn cát có dạng hình chữ nhật có chiều rộng là 222 m, chiều dài là 1000 m. Trong rừng có 4500 cây phi lao, cây to nhất có đường kính gốc là 0,5 m. Chứng minh rằng trong khu rừng có ít nhất 60 mảnh đất, diện tích mỗi mảnh là 40 m² mà không có một cây phi lao nào.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 222 &= 48 \cdot 4 + 47 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,9 \\ 1000 &= 95 \cdot 10 + 94 \cdot 0,52 + 2 \cdot 0,56 \end{aligned}$$

Ta chia chiều rộng của khu rừng thành 48 đoạn, mỗi đoạn dài 4 m; khoảng cách giữa hai đoạn là 0,6 m; ở hai đầu là hai đoạn 0,9 m. Chia chiều dài của khu rừng thành 95 đoạn, mỗi đoạn dài 10 m; khoảng cách giữa hai đoạn là 0,52 m; ở hai đầu là hai đoạn 0,56 m.

Ta có tất cả là $48 \cdot 95 = 4560$ mảnh đất có diện tích mỗi mảnh là 40 m^2 . Vì chỉ có 4500 cây phi lao và đường kính mỗi cây phi lao không vượt quá 0,5 m do đó mỗi cây thông bất kì không thể chiếm chỗ trên hai mảnh đất khác nhau. Theo nguyên lí Dirichlet, còn ít nhất 60 mảnh đất, mỗi mảnh có diện tích 40 m^2 , mà trong mỗi mảnh ấy không có cây phi lao nào. $\square$

Bài 26. Cho tập $A = \{1, 2, \dots, 2n\}$. Một tập hợp $B \subset A$ được gọi là tập cân nếu trong tập đó số các số chẵn và số các số lẻ bằng nhau (quy ước tập rỗng là tập cân). Hỏi A chứa bao nhiêu tập cân.

Lời giải.

Gọi X là tập các số chẵn của A , Y là tập các số lẻ của A , C là tập tất cả các tập cân chứa trong A và D là tập các tập con có n phần tử của A . Ta xây dựng ánh xạ f giữa C và $f(B) = B_1 \cup (Y \setminus B_2)$. Khi đó ta có

$$|f(B)| = |B_1| + |Y \setminus B_2| = |B_1| + |Y| - |B_2| = |Y| = n$$

do đó $f(B) \in D$. Ta chứng minh f là song ánh. Thật vậy giả sử

$$f(B) = f(E) \Leftrightarrow B_1 \cup (Y \setminus B_2) = E_1 \cup (Y \setminus E_2) \Rightarrow B_1 = E_1; Y \setminus B_2 = Y \setminus E_2$$

vì $B_1; E_1$ là các tập chỉ chứa số chẵn, $Y \setminus B_2, Y \setminus E_2$ chỉ chứa số lẻ, hay $B_1 = E_1; B_2 = E_2$, suy ra f là đơn ánh. Lấy $M \in D$ tùy ý, kí hiệu M_1, M_2 tương ứng là tập tất cả các số chẵn và tập tất cả các số lẻ của M . Đặt $B = M_1 \cup (Y \setminus M_2)$, ta có $|Y \setminus M_2| = |Y| - |M_2| = n - |M_2| = |M| - |M_2| = |M_1|$ suy ra B là tập cân và $f(B) = M$. Vậy tồn tại song ánh giữa C và D , do đó $|C| = |D| = C_{2n}^n$. $\square$

Bài 27 (P40, Tạp chí Pi, tháng 3 năm 2017). Chuẩn bị cho buổi giao lưu của Pi với các bạn học sinh Tiểu học yêu toán, cô Lê Hương được giao nhiệm vụ chia 500 thanh chocolate (sô-cô-la) thành các gói sao cho mỗi gói đều có một số lẻ thanh; cô Cẩm Thơ được giao nhiệm vụ chia 500 cái kẹo mút thành các gói sao cho không có 2 gói nào có số kẹo bằng nhau. Kí hiệu s và t tương ứng là số cách chia mà cô Lê Hương và cô Cẩm Thơ có thể thực hiện. Hãy so sánh s và t .

Lời giải.

Nhận thấy rằng

- ☒ Mỗi cách chia chocolate của cô Lê Hương là một cách phân tích 500 thành tổng của các số nguyên dương lẻ. Hai cách chia khác nhau của cô Lê Hương là hai cách phân tích khác nhau theo nghĩa: tồn tại một số nguyên dương lẻ có mặt trong phân tích này nhưng không có mặt trong phân tích kia, hoặc tồn tại một số nguyên dương lẻ mà số lần có mặt của nó trong phân tích này khác số lần có mặt của nó trong phân tích kia.
- ☒ Mỗi cách chia kẹo mút của cô Cẩm Thơ là một cách phân tích 500 thành tổng của các số nguyên dương đôi một khác nhau. Hai cách chia khác nhau của cô Cẩm Thơ là hai cách phân tích khác nhau theo nghĩa: tồn tại một số nguyên dương có mặt trong phân tích này nhưng không có mặt trong phân tích kia.

Như vậy:

- ☒ s chính là số phần tử của tập S gồm tất cả các cách phân tích 500 thành tổng các số nguyên dương lẻ;
- ☒ t chính là số phần tử của tập T gồm tất cả các cách phân tích 500 thành tổng của các số nguyên dương đôi một khác nhau.

Ta sẽ so sánh s và t nhờ việc xây dựng một ánh xạ thích hợp từ T đến S . Xét a tùy ý thuộc T và giả sử a là cách phân tích 500 thành tổng của $m \geq 1$ số nguyên dương đôi một khác nhau $a_1, a_2, \dots, a_m$. Với mỗi $i = \overline{1, m}$, a_i có duy nhất biểu diễn dạng $a_i = 2^{n_i} \cdot b_i$ (*) trong đó b_i là một số nguyên dương lẻ và n_i là một số tự nhiên. Vì thế, trong cách phân tích a , khi thay mỗi a_i bởi tổng của 2^{n_i} số nguyên dương lẻ b_i , ta sẽ có một cách phân tích (gọi là b) 500 thành tổng của các số nguyên dương lẻ; nói cách khác, ta sẽ có một cách phân tích b thuộc tập S . Hơn nữa, do tính duy nhất của biểu diễn (*) nên cách phân tích b được xác định như trên là duy nhất. Do đó, phép đặt ứng với mỗi cách phân tích a thuộc T với cách phân tích b được xác định như trên xác lập một ánh xạ, gọi là f , từ T đến S . Xét $b = f(a)$ với $a \in T$ (nghĩa là, b là ảnh của $a \in T$ qua f). Giả sử b là cách phân tích 500 thành tổng của m_1 số nguyên dương lẻ b_1 , m_2 số nguyên dương lẻ $b_2, \dots, m_k$ số nguyên dương lẻ b_k . Khi đó, từ cách xác định b , dễ thấy, mỗi $m_i, i = \overline{1, k}$, là một tổng các lũy thừa của 2. Từ đó, do tính duy nhất của biểu diễn dạng (*) và tính duy nhất của biểu diễn trong hệ nhị phân của các số nguyên dương, dễ dàng suy ra, nếu a và a' là hai phần tử khác nhau thuộc T thì $f(a)$ và $f(a')$ là hai phần tử khác nhau thuộc S . Điều này cho thấy f là đơn ánh. (1) Tiếp theo, ta sẽ chứng minh f là toàn ánh. Xét phần tử b tùy ý thuộc S và giả sử b là cách phân tích 500 thành tổng của m_1 số nguyên dương lẻ b_1 , m_2 số nguyên dương lẻ $b_2, \dots, m_k$ số nguyên dương lẻ b_k . Khi đó, ta có

$$500 = m_1 b_1 + m_2 b_2 + \dots + m_k b_k. \quad (2)$$

Biểu diễn m_1 trong hệ nhị phân:

$$m_1 = 2^{s_1} + 2^{s_2} + \dots + 2^{s_j},$$

trong đó, $s_1, s_2, \dots, s_j$ là các số tự nhiên đôi một khác nhau. Trong tổng (2), thay $m_1 b_1$ bởi tổng các số $2^{s_1} \cdot b_1, 2^{s_2} \cdot b_1, \dots, 2^{s_j} \cdot b_1$. Làm tương tự như vậy đối với $m_2 b_2, \dots, m_k b_k$. Khi đó, dễ thấy, ta sẽ có một phân tích của 500 thành tổng của các số nguyên dương đôi một khác nhau; nghĩa là, ta sẽ có một phần tử của T . Hiển nhiên, b là ảnh của phần tử này qua f . Như vậy, với mỗi phần tử $b \in S$, luôn tồn tại phần tử $a \in T$ sao cho $f(a) = b$. Do đó, f là toàn ánh. (3) Từ (1) và (3), suy ra f là song ánh. Vì thế $s = t$. $\square$

Bài 28. Trong trường học, mỗi học sinh có không quá 3 người khác bất đồng quan điểm (tạm gọi là "kẻ thù"). Để tổ chức ngày hội "Bóng nước" đoàn trường dự tính chia học sinh trong toàn trường thành 2 đội sao cho trong mỗi đội, mỗi một học sinh có không quá một "kẻ thù". Hỏi có đoàn trường có thể thực hiện được kế hoạch của mình hay không?

Lời giải.

Có nhiều cách giải khác nhau nhưng ở đây chúng ta sẽ trình bày một cách giải sử dụng nguyên lý cực hạn. Ý tưởng tuy đơn giản nhưng có rất nhiều ứng dụng (trong nhiều bài toán phức tạp hơn). Ta chia học sinh trong trường ra thành 2 nhóm A, B một cách bất kỳ. Với mỗi nhóm A, B , ta gọi $s(A), s(B)$ là tổng của tổng số các kẻ thù của mỗi thành viên tính trong viện đó. Vì số cách chia là hữu hạn nên phải tồn tại cách chia (A_0, B_0) sao cho $s(A_0) + s(B_0)$ nhỏ nhất. Ta chứng minh cách chia này thỏa mãn yêu cầu của bài toán. Giả sử rằng cách chia này vẫn chưa thỏa mãn yêu cầu, tức là vẫn có một học sinh nào đó có nhiều hơn 1 kẻ thù trong nhóm của mình. Không mất tính tổng quát, giả sử học sinh x thuộc A_0 có ít nhất 2 kẻ thù trong A_0 . Khi đó ta thực hiện phép biến đổi sau, chuyển x từ A_0 sang B_0 để được cách chia mới là $A' = A_0 \setminus \{x\}$ và $B' = B_0 \cup \{x\}$. Vì x có ít nhất 2 kẻ thù trong A_0 và A' không còn chứa x nên ta có $s(A') \leq s(A_0) - 4$ (trong tổng mất đi ít nhất 2 của $s(x)$ và 2 của các kẻ thù của x trong A_0). Vì x có không quá 3 kẻ thù và có ít nhất 2 kẻ thù trong A_0 nên x có nhiều nhất 1 kẻ thù trong B_0 (hay B'), cho nên $s(B') \leq s(B_0) + 2$. Từ đó

$$s(A') + s(B') \leq s(A_0) + s(B_0) - 2$$

Mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của $s(A_0) + s(B_0)$. Vậy điều giả sử là sai, tức là cách chia (A_0, B_0) thỏa mãn yêu cầu của bài toán. $\square$

Bài 29. Robinson Crusoe lạc trên đảo hoang hơn 28 năm. Trong chừng ấy quãng thời gian, mỗi năm, ông ta tìm một cái cây nào đó rồi khắc lên thân nó một hình đa giác lồi thật lớn để kỷ niệm. Biết rằng tổng tất cả các góc của các đa giác lồi ấy vừa đúng 1687π , năm mà ông ấy được cứu thoát, đưa trở về thế giới loài người. Bạn hãy cho biết có bao nhiêu cách ông khắc các đa giác lên cây thỏa mãn yêu cầu trên, biết rằng trong 10 năm đầu tiên, mỗi năm, ông ấy khắc lên cây một đa giác có ít nhất 100 cạnh.

Lời giải.

Đa giác có n cạnh thì có tổng các góc trong là $(n - 2)\pi$. Do đó, ta cần điểm số nghiệm của phương trình sau

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{28} (x_i - 2)\pi = 1687\pi, x_i \in \mathbb{N} \\ x_i \geq 100, i = \overline{1, 10}, x_i \geq 3, i = \overline{11, 28}. \end{cases}$$

Ta có

$$\sum_{i=1}^{28} (x_i - 2)\pi = 1687\pi \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{28} x_i = 1743.$$

Đặt $x_i = y_i + 100, i = \overline{1, 10}$ và $x_i = y_i + 3, i = \overline{11, 28}$, ta có phương trình

$$\sum_{i=1}^{10} y_i + 10 \cdot 100 + \sum_{i=11}^{28} y_i + 18 \cdot 3 = 1743 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{28} y_i = 689.$$

Vậy số nghiệm nguyên không âm của phương trình là $\binom{689 + 28 - 1}{28 - 1} = \binom{716}{27}$. $\square$

Bài 30. Cho p là một số nguyên tố lẻ. Tìm số tập con X của tập $\{1, 2, \dots, 2p\}$ biết rằng X chứa đúng p phần tử và tổng tất cả các phần tử của X chia hết cho p .

Lời giải.

Đặt $A = \{X \subset \{1, 2, \dots, 2p\} : |X| = p\}$; $A_j = \{X \in A : S(X) \equiv j \pmod{p}, j = \overline{0, p-1}\}$.

Khi đó ta có

$$|A| = \binom{2p}{p}$$

Vì $A = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{p-1}$ và $A_i \cap A_j \neq \emptyset, \forall i \neq j$ nên $|A| = |A_0| + |A_1| + \dots + |A_{p-1}|$. Xét đa thức

$$P(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1.$$

Đa thức này có $p - 1$ nghiệm phức phân biệt. Giả sử α là một nghiệm bất kỳ của $P(x)$ thì tập nghiệm của $P(x)$ là $\{\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{p-1}\}$ và $\alpha^p = 1$. Do phương trình $x^p = 1$ có p nghiệm phức phân biệt

$\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^p$ nên ta có thể viết $x^p - 1 = \prod_{k=1}^p (x - \alpha^k)$. Từ đó, ta có

$$\prod_{k=1}^{2p} (x - \alpha^k) = \prod_{k=1}^p (x - \alpha^k) \prod_{k=1}^p (x - \alpha^{p+k}) = \prod_{k=1}^p (x - \alpha^k) \prod_{k=1}^p (x - \alpha^k) = (x^p - 1)^2$$

So sánh hệ số x^p hai vế của $\prod_{k=1}^{2p} (x - \alpha^k) = (x^p - 1)^2$, ta được $(-1)^p \sum_{X \in A} \alpha^{S(X)} = -2$ với $S(X)$ là tổng tất cả các phần tử của tập X . Do p là số nguyên tố lẻ và $\alpha^{S(X)} = \alpha^k$ nếu $X \in A_k$ ta được

$$\sum_{k=0}^{p-1} |A_k| \alpha^k - 2 = 0$$

Do đó α là một nghiệm của đa thức $Q(x) = \sum_{k=0}^{p-1} |A_k| x^k + |A_0| - 2$.

Vì α là một nghiệm của đa thức $P(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$ nên

$$|A_1| = |A_2| = \dots = |A_{p-1}| = |A_0| - 2$$

Suy ra $|A_0| - 2 = \frac{|A_1| + |A_2| + \dots + |A_{p-1}| + |A_0| - 2}{p} = \frac{|A_0| - 2}{p}$, do đó $|A_0| = \frac{\binom{2p}{p} - 2}{p} + 2$.

Vậy số tập con X của tập $\{1, 2, \dots, 2p\}$ biết rằng X chứa đúng p phần tử và tổng tất cả các phần tử của X chia hết cho p là $\frac{\binom{2p}{p} - 2}{p} + 2$ □

Bài 31. Xét S là một tập hữu hạn n điểm trong mặt phẳng trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Xét đa giác lồi P với đỉnh là các điểm của S . Đặt $a(P)$ là số các đỉnh của P và $b(P)$ là số các đỉnh của S nằm ngoài đa giác P . Chứng minh rằng với mọi số thực x ta có

$$\sum_P x^{a(P)} (1-x)^{b(P)} = 1$$

gọi là tổng lấy trên các đa giác lồi với các đỉnh thuộc S .

Lời giải.

Với $n = 0, 1, 2$ thì đó là tập rỗng, một điểm, một đoạn thẳng. Do đó, ta chỉ xét $n \geq 3$.

Với mỗi đa giác lồi P với đỉnh là các điểm thuộc S . Đặt $c(P)$ là số các điểm của S nằm trong đa giác P . Khi đó $a(P) + b(P) + c(P) = n$ với n là số điểm của S . Kí hiệu $y = 1 - x$. Khi đó, ta có

$$\sum_P x^{a(P)} y^{b(P)} = \sum_P x^{a(P)} y^{b(P)} (x+y)^{c(P)} = \sum_P \sum_{i=0}^{c(P)} \binom{c(P)}{i} x^{a(P)+i} y^{b(P)+c(P)-i}$$

Chúng ta có thể xem biểu thức này như là một đa thức thuần nhất bậc n của hai biến độc lập x, y . Biểu thức này chính là tổng của các hạng tử có dạng $x^r y^{n-r}$ ($0 \leq r \leq n$) với các hệ số nguyên không âm. Với mỗi r cố định thì hệ số $\binom{n}{r}$ của $x^r y^{n-r}$ biểu diễn số cách chọn đa giác lồi P có r - đỉnh và đó là số cách chọn các điểm S nằm trong P do đó số đỉnh của P và số cách chọn các điểm trong P cùng tăng tới r .

Điều này tương đương với số cách chọn tập con r - phần tử của S là $\binom{n}{r}$. Tương ứng này là song ánh vì với mỗi tập hợp T các điểm của S thì đều có thể tách thành hai tập hợp rời nhau trong đó có một tập là tập tất cả các đỉnh của đa giác và tập còn lại là tập tất cả các điểm nằm trong đa giác T . Khi đó hệ số của $x^r y^{n-r}$ là $\binom{n}{r}$. Do đó, ta có

$$\sum_P x^{a(P)} y^{b(P)} = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r y^{n-r} = (x+y)^n = 1$$

Bài toán được giải quyết. □

Bài 32. Một cửa hàng bán thức ăn sáng có bán 4 loại thức ăn gồm cơm, mì, bún và phở. Một đoàn khách 40 ngày vào cửa hàng, mỗi người gọi một loại thức ăn, biết mỗi loại thức ăn có ít

nhất một người gọi và không có loại thức ăn nào có quá 15 người gọi. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách gọi thức ăn.

Lời giải.

Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 lần lượt là số người gọi cơm, mì, bún và phở hi đó, bài toán trở thành tìm số nghiệm nguyên của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 40 \quad (1)$$

với $1 \leq x_i \leq 15, i = 1, 2, 3, 4$. Đặt $y_i = x_i - 1 (\forall i = 1, 2, 3, 4)$. Khi đó, phương trình (1) trở thành

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 36 \quad (2)$$

Gọi X là tập hợp các nghiệm nguyên, không âm của phương trình (2). Áp dụng bài toán chia kẹo Euler, ta được $|X| = \binom{39}{36}$. Gọi A_1, A_2, A_3, A_4 lần lượt là tập hợp nghiệm nguyên của phương trình (2) với các điều kiện $y_1 \geq 15, y_2 \geq 15, y_3 \geq 15, y_4 \geq 15$.

☑ Xét A_1 , đặt $a_1 = y_1 - 15 \geq 0$, ta được phương trình (2) trở thành

$$a_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 21$$

, với $a_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0$. Áp dụng bài toán chia kẹo Euler, ta được $|A_1| = \binom{24}{21}$.

Tương tự, ta có

$$|A_2| = |A_3| = |A_4| = \binom{24}{21}$$

☑ Xét $A_1 \cap A_2$. Đặt $a_1 = y_1 - 15 \geq 0, a_2 = y_2 - 15 \geq 0$, ta được phương trình (2) trở thành

$$a_1 + a_2 + y_3 + y_4 = 6$$

, với $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0$. Khi đó, số nghiệm của phương trình trên là $|A_1 \cap A_2| = \binom{9}{6}$.

Tương tự, ta có

$$|A_1 \cap A_3| = |A_1 \cap A_4| = |A_2 \cap A_3| = |A_2 \cap A_4| = |A_3 \cap A_4| = \binom{9}{6}$$

☑ Xét $A_1 \cap A_2 \cap A_3$. Đặt $a_1 = y_1 - 15 \geq 0, a_2 = y_2 - 15 \geq 0, a_3 = y_3 - 15$, ta được phương trình (2) trở thành

$$a_1 + a_2 + a_3 + y_4 = -11$$

với $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, a_3 \geq 0, y_4 \geq 0$. Khi đó, số nghiệm của phương trình trên là $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$. Tương tự, ta có

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = |A_3 \cap A_4 \cap A_1| = |A_4 \cap A_1 \cap A_2| = 0;$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$$

$$\text{Do đó } |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 4\binom{24}{21} - 6\binom{9}{9}.$$

Vậy số cách gọi thức ăn thỏa mãn bài toán là

$$|X| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \binom{39}{36} - \left(4\binom{24}{21} - 6\binom{9}{9}\right) = 1547$$

Bài toán được giải quyết. □

Bài 33 (Vietnam TST 2004). Xét tập hợp S gồm 2004 số nguyên dương phân biệt $a_1, \dots, a_{2004}$ có tính chất: Nếu với mỗi $i = 1, 2, 3, \dots, 2004$, ta ký hiệu $f(a_i)$ là số các số thực thuộc S nguyên tố cùng nhau với a_i thì $d(a_i) < 2003$ và $f(a_i) = f(a_j)$ với mọi $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, 2004\}$. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho trong mỗi k -tập con của một tập S tùy ý có tính chất nêu trên đều tồn tại hai số phân biệt mà ước số chung lớn nhất của chúng khác 1. (k -tập con là tập con có k phần tử).

Lời giải.

Xét tập hợp

$$S_0 = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_{1001}, p_{1002}, p_1 p_{1003}, p_2 p_{1004}, \dots, p_{1001} p_{2003}, p_{1002} p_{2004}\}$$

trong đó $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{2004}$ là các số nguyên tố đôi một khác nhau. Dễ thấy rằng tập hợp này thỏa mãn đề bài. Hơn nữa, trong 1002 tập con $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_{1002}\}$ của tập hợp đã cho, không có hai phần tử nào mà ước chung của chúng khác 1. Suy ra $k \geq 1003$. Xét một tập hợp S tùy ý thỏa mãn các điều kiện đề bài. Với mỗi $s \in S$, ta gọi $g(s)$ là số các số không nguyên tố cùng nhau với s . Từ giả thiết đã cho, ta có $g(s) \geq 1, \forall s \in S$ và $g(s) = g(t)$ với mọi $s, t \in S$ hay $g(s) = m, \forall s \in S$ với m là một số nguyên dương nào đó. Xét một 1003-tập con T tùy ý của S . Ta sẽ chứng minh rằng trong T , luôn tồn tại hai số mà ước chung lớn nhất của chúng lớn hơn 1. Thật vậy, giả sử ngược lại rằng trong T , không tồn tại hai số nào mà ước chung lớn nhất của chúng khác 1. Ký hiệu $A = \{a \in S | \exists t \in T, (a, t) \neq 1\}$, ta có $A \cap T = \emptyset$. Từ đó suy ra $|A| \leq 2004 - 1003 = 1001$. Mặt khác, số số thuộc S (kể cả lặp) mà mỗi số đều không nguyên tố cùng nhau với ít nhất một số thuộc T là $1003m$ và mỗi số có tính lặp tối đa m lần nên $|A| \geq \frac{1003m}{m} = 1003$. Mâu thuẫn này cho ta điều phải chứng minh. Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm của k là 1003. $\square$

Bài 34. Có 25 con lừa xếp trên một hàng và con lừa đứng ở bìa phải già nhất có tên là Eeyore. Ông chủ của chúng muốn tặng cho quả bóng với 1 trong 7 màu sao cho 2 con lừa đứng cạnh nhau thì có bóng khác màu nhau, đồng thời, màu nào cũng được sử dụng ít nhất 1 lần. Bà chủ của chúng thì lại tặng cho mỗi con các chiếc vòng với 1 trong 7 màu sao cho con lừa Eeyore nhận được chiếc vòng màu đỏ duy nhất, các con còn lại được nhận vòng với 1 trong 6 màu (2 con cạnh nhau không nhất thiết có vòng khác nhau). Hỏi cách tặng quà của ông chủ hay của bà chủ sẽ nhiều hơn và nhiều hơn bao nhiêu lần? Chú ý rằng các quả bóng hoặc vòng thì chỉ khác nhau ở màu sắc.

Lời giải.

Ta đặt (*) là điều kiện tặng bóng cho các con lừa sao cho 2 con lừa đứng cạnh nhau thì có bóng khác màu nhau. Đánh số các màu của quả bóng từ 1 đến 7 và gọi A_i với $1 \leq i \leq 7$ là các cách tặng quả bóng cho các con lừa sao cho các quả bóng màu thứ i không được dùng và thỏa mãn điều kiện (*). Đặt A_0 là các cách tặng các quả bóng sao cho chỉ có điều kiện (*) được thỏa. Ta có $|A_0| = 7 \cdot 6^{24}$. Ngoài ra, với $T \subset \{1, 2, 3, \dots, 7\}$ thì

$$\left| \bigcap_{i \in T} A_i \right| = (7 - |T|) (6 - |T|)^{24}$$

Do đó, ta tính được

$$\left| \bigcup_{k=1}^7 A_k \right| = \sum_{l=1}^7 (-1)^{l+1} \sum_{|T|=l} \left| \bigcup_{k \in T} A_k \right| = \sum_{m=0}^6 (-1)^m \binom{7}{m} \cdot m(m-1)^{24}$$

Suy ra số cách tặng các quả bóng thỏa mãn đề bài là

$$|A_0| - \left| \bigcup_{k=1}^7 A_k \right| = 7 \cdot 6^{24} - \sum_{m=1}^6 (-1)^{m-1} \binom{7}{m} \cdot m(m-1)^{24} = \sum_{m=1}^7 (-1)^{m-1} \binom{7}{m} \cdot m(m-1)^{24}$$

Bằng cách tương tự, ta tính được số cách tặng các vòng với 6 màu cho 24 con cừu và không có ràng buộc giống như (*) là

$$\sum_{m=0}^6 (-1)^m \binom{6}{m} \cdot m^{24} = \sum_{m=1}^7 (-1)^{m-1} \binom{6}{m-1} \cdot (m-1)^{24}$$

Chú ý rằng $\frac{\binom{7}{m} \cdot m(m-1)^{24}}{\binom{6}{m-1} \cdot (m-1)^{24}} = \frac{m \binom{7}{m}}{\binom{6}{m-1}} = \frac{7!m}{m!(7-m)!} : \frac{6!}{(m-1)!(7-m)!} = 7$ nên suy ra số

cách tặng bóng nhiều hơn gấp 7 lần số cách tặng vòng. $\square$

Bài 35. Một số nguyên dương k được gọi là "đẹp" nếu có thể phân hoạch tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{Z}^+$ thành k tập hợp $A_1, A_2, \dots, A_k$ sao cho với mỗi số nguyên dương $n \geq 15$ và với mọi $i \in \{1; 2; \dots; k\}$ đều tồn tại hai số thuộc tập A_i có tổng là n .

- ① Chứng minh rằng $k = 3$ là đẹp.
- ② Chứng minh rằng mọi $k \geq 4$ đều không đẹp.

Lời giải.

Với $k = 3$ ta chỉ ra một cách phân hoạch tập $\mathbb{N}^*$ thành 3 tập A_1, A_2, A_3 thỏa mãn như sau

$$A_1 = \{1; 2; 3\} \cup \{3m | m \geq 4\}$$

$$A_2 = \{4; 5; 6\} \cup \{3m - 1 | m \geq 4\}$$

$$A_3 = \{7; 8; 9\} \cup \{3m - 2 | m \geq 4\}$$

Vậy $k = 3$ là đẹp. Xét $k \geq 4$. Giả sử tồn tại cách chia $\mathbb{N}^*$ thành k tập $A_1, A_2, \dots, A_k$ thỏa mãn đề bài. Khi đó cách phân hoạch $\mathbb{N}^*$ thành 4 tập A_1, A_2, A_3 và $(A_4 \cup A_5 \cup \dots \cup A_k)$ cũng thỏa mãn đề bài. Do vậy chỉ cần xét với $k = 4$ là đủ. Đặt $B_i = A_i \cap \{1; 2; 3; \dots; 23\}$ với $i = 1, 2, 3, 4$. Ta thấy mỗi số thuộc tập $\{15; 16; 17; \dots; 24\}$ (gồm 10 số) đều viết được thành tổng của hai số thuộc tập B_i (với mọi $i = 1, 2, 3, 4$). Như vậy nếu $|B_i| = m$ thì số tổng là $\binom{m}{2} \geq 10 \Rightarrow m \geq 5$. Vậy mỗi tập B_i đều có ít nhất 5 phần tử. Mà $|B_1| + |B_2| + |B_3| + |B_4| = 23$ nên không thể xảy ra $|B_i| \geq 6, \forall i = 1, 2, 3, 4$. Do đó phải tồn tại một tập B_i sao cho $|B_i| = 5$.

Giả sử $B_i = \{a_1; a_2; a_3; a_4; a_5\}$. Khi đó

$$\{a_i + a_j; 1 \leq i < j \leq 5\} = \{15; 16; 17; \dots; 24\}$$

Suy ra $\sum_{1 \leq i < j \leq 5} (a_i + a_j) = 15 + 16 + \dots + 24$, hay $4(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) = 195$, vô lí. Vậy mọi $k \geq 4$

đều không đẹp. $\square$

Bài 36. Với m là số nguyên dương lớn hơn 1, cô giáo phát $7m$ viên kẹo cho 7 học sinh sao cho em nào cũng có kẹo nhưng không xảy ra trường hợp tất cả các học sinh nhận được số kẹo bằng nhau. Chứng minh rằng số cách phát kẹo là bội của 49.

Lời giải.

Rõ ràng số cách chia kẹo chính là $\binom{7m-1}{6} - 1$. Ta sẽ chứng minh rằng số này chia hết cho 49, thật vậy

$$\frac{(7m-1)!}{6!(7m-7)!} - 1 = \frac{(7m-6)(7m-5) \cdots (7m-1) - 6!}{6!}.$$

Do $(6!, 7) = 1$ nên ta chỉ cần chứng minh tử số trên chia hết cho 49.

Nếu coi $(7m - 6)(7m - 5) \cdots (7m - 1)$ là đa thức theo m thì nó có số hạng tự do là $6!$ (trệt tiêu với $6!$ có sẵn), hơn thế nữa, hệ số bậc nhất trong khai triển sẽ là

$$(7m)6! \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{6} \right) = 7! \left(\frac{7}{1 \cdot 6} + \frac{7}{2 \cdot 5} + \frac{7}{3 \cdot 4} \right) m$$

chia hết cho 49.

Các hệ số bậc cao hơn của m đều có chứa lũy thừa cao hơn của 7 tương ứng nên rõ ràng chia hết cho 49. Từ đó suy ra tử số của phân số trên chia hết cho 49, ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài 37 (Ấn Độ, 2012). Cho tam giác ABC và điểm P gọi là **tốt** nếu tìm được 27 tia chung gốc P cắt tam giác thành 27 tam giác con có diện tích bằng nhau. Đếm số điểm tốt.

Lời giải.

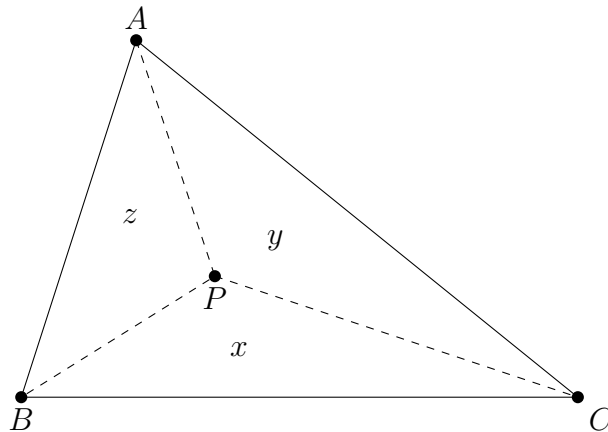
Trước hết ta thấy rằng PA, PB, PC phải là 3 trong 27 tia nên trong đề bài (nếu không thì sẽ có một phần trong các phần của tam giác ABC). Giả sử $S_{ABC} = 27$ thì diện tích mỗi tam giác nhỏ đều bằng 1. Đặt $S_{PBC} = x, S_{PCA} = y, S_{PAB} = z$ thì rõ ràng, các tam giác PBC, PCA, PAB đều phải chứa trong đó một số nguyên các tam giác có diện tích bằng 1 nên ta có $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ và

$$x + y + z = 27. \quad (2.2)$$

Chú ý rằng với mỗi P nằm trong tam giác thì

$$\overrightarrow{PA} \cdot S_{PBC} + \overrightarrow{PB} \cdot S_{PCA} + \overrightarrow{PC} \cdot S_{PAB} = \vec{0}$$

và ngược lại với mỗi bộ $(S_{PBC}, S_{PCA}, S_{PAB})$ như thế thì tồn tại duy nhất P thỏa mãn. (Ở đây ta còn có thể chứng minh tính duy nhất này bằng cách kẻ các đường thẳng song song với cạnh của tam giác).



Vậy số điểm cần tìm chính là số nghiệm của phương trình (2.2) và là $\binom{27-1}{3-1} = \binom{26}{2} = 325$. $\square$

Bài 38. Một hoán vị $\{x_1, x_2, \dots, x_{2n}\}$ của $\{1, 2, \dots, 2n\}$ được gọi là "đẹp" nếu $\exists i \in \{1, 2, \dots, 2n-1\}$ thỏa mãn $|x_i - x_{i+1}| = n$. Chứng minh rằng số hoán vị "đẹp" nhiều hơn số hoán vị không "đẹp".

Lời giải.

Bài này là đề thi IMO năm nào đó, ý tưởng là sử dụng tính chất của ánh xạ. Ta sẽ xây dựng một đơn ánh nhưng không là song ánh từ số hoán vị không đẹp vào số hoán vị đẹp. Ta thấy tập hợp $2n$ số nguyên dương đầu tiên có thể phân hoạch thành n cặp có khoảng cách bằng n là

$$(1, n+1); (2, n+2); \dots; (n, 2n)$$

Do đó với mỗi hoán vị không đẹp $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ tồn tại số nguyên dương $k \in \{1, 2, \dots, 2n-1\}$ sao cho (x_k, x_{2n}) là một trong những cặp số nêu trên. Xét tương ứng

$$(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_{2n}) \rightarrow (x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{2n}, x_{2n-1}, \dots, x_{k+1}, \dots)$$

Rõ ràng đây là một đơn ánh và nó không phải là song ánh do hoán vị đẹp $(1, 2, \dots, n-1, n+1, \dots, 2n-1, n, 2n)$ không có tạo ảnh tương ứng. Vậy số hoán vị đẹp nhiều hơn số hoán vị không đẹp. $\square$

Bài 39. Cho các số nguyên $a_1, a_2, \dots, a_{2013}$ với $0 \leq a_i \leq 100, i = \overline{1, 2013}$. Với mỗi cặp (a_i, a_{i+1}) ta cộng thêm 1 vào cả hai số và mỗi cặp đó không được xuất hiện quá k lần. Tìm k nhỏ nhất sao cho hữu hạn lần thực hiện thao tác trên ta được mọi số bằng nhau.

Lời giải.

Ta xét trường hợp các số cạnh nhau cách nhau xa nhất

$$\begin{cases} a_1 = a_3 = \dots = a_{2013} = 100 \\ a_2 = a_4 = \dots = a_{2012} = 0 \end{cases}$$

Đặt $S = (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2012} - a_{2013})$ lúc đầu tiên chưa tác động thì $S = -100 \cdot 1006$. Sau hữu hạn lần tác động tất cả các số bằng nhau do đó khi đó $S = 0$. Ta nhận xét rằng.

- ☒ Tác động lên các cặp $(a_2, a_3), (a_4, a_5), \dots, (a_{2012}, a_{2013})$ thì S không đổi.
- ☒ Tác động lên cặp (a_1, a_2) thì S tăng lên một đơn vị.
- ☒ Tác động lên cặp (a_{2013}, a_{2012}) thì S giảm 1 đơn vị.

Bộ (a_1, a_2) bị tác động lớn hơn hoặc bằng $100 \cdot 1006$ lần thì $k \geq 100 \cdot 1006$. Ta sẽ chứng minh $k = 100 \cdot 1006$ là giá trị nhỏ nhất thoả mãn.

- ☒ Tác động cặp (a_{i-1}, a_i) số lần là $a_{i+1} + a_{i+3} + \dots$.
- ☒ Tác động cặp (a_i, a_{i+1}) số lần là $a_{i+2} + a_{i+4} + \dots$.

Sau các lần tác động như vậy các số bằng nhau và bằng $a_1 + a_2 + \dots + a_{2012} + a_{2013}$ nên số lần tác động $\leq 100 \cdot 1006$ suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Bài 40 (AIME, 1986). Cho xâu nhị phân 001101001111011 có 4 cặp 01, 3 cặp 10, 5 cặp 11 và 2 cặp 00 đứng cạnh nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu xâu nhị phân cùng tính chất như thế?

Lời giải.

Ta thấy rằng các xâu nhị phân thoả mãn đề bài phải có dạng

$$XYXYXYXY,$$

trong đó X là một dãy các số 0 liên tiếp và Y là một dãy các số 1 liên tiếp. Như thế, có tổng cộng 4 dãy 0 và 4 dãy 1. Rõ ràng trong một dãy có độ dài là k thì số lượng cặp giống nhau là $k-1$. Gọi x, y, z, t là độ dài của 4 dãy 0 thì theo giả thiết, ta phải có

$$x-1 + y-1 + z-1 + t-1 = 2 \Leftrightarrow x+y+z+t = 6.$$

Số nghiệm nguyên dương của phương trình trên là $\binom{6-1}{4-1} = \binom{5}{3} = 10$.

Lại có m, n, p, q là độ dài của 4 dãy 1 thì

$$m-1 + n-1 + p-1 + q-1 = 5 \Leftrightarrow m+n+p+q = 9.$$

Số nghiệm nguyên dương của phương trình này là $\binom{9-1}{4-1} = \binom{8}{3} = 56$. Do hai dãy này chọn độc lập với nhau nên số xâu thỏa mãn là $10 \cdot 56 = 560$ xâu.

Nhận xét. Tổng quát. Hỏi với các số tự nhiên a, b, c, d nào thì tồn tại một xâu nhị phân có độ dài dương và có a cặp 01, b cặp 10, c cặp 11 và d cặp 00 đứng cạnh nhau? Ta thấy rằng nếu xếp các số này lên vòng tròn thì các số 0 và 1 sẽ được tạo thành các nhóm rời nhau. Rõ ràng số lượng nhóm 0 bằng số lượng nhóm 1. Do đó, nếu cắt xâu tại ranh giới giữa hai nhóm thì số lượng một trong hai bộ 01 hoặc 10 sẽ giảm đi 1 đơn vị so với bộ kia. Còn nếu cắt tại vị trí giữa các nhóm (trường hợp số lượng số trong nhóm lớn hơn 1) thì không làm thay đổi số lượng bộ 01 hoặc 10. Trước hết, ta luôn có $|a - b| \leq 1$. Ngoài ra, dễ thấy rằng nếu $c > 0, d > 0$ thì phải tồn tại ranh giới giữa hai bộ nên lúc đó, ta phải có hoặc $a > 0$ hoặc $b > 0$. Từ đây ta thấy điều kiện của các số a, b, c, d là

(1) Nếu $cd = 0$ thì $a = b = 0$.

(2) Nếu $cd \neq 0$ thì $|a - b| \leq 1$ và a, b không đồng thời bằng 0.

Đặt $k = \max\{a, b\}$ thì rõ ràng có tổng cộng k nhóm theo nhận xét ban đầu. Giả sử $k \geq 1$. Gọi $x_1, x_2, \dots, x_k$ là số lượng số 1 có trong từng nhóm thì rõ ràng

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = c + k.$$

số nghiệm dương của phương trình này là $\binom{c+k-1}{k-1}$. Tương tự số cách sắp xếp các số 0 là $\binom{d+k-1}{k-1}$. Vậy số các xâu nhị phân thỏa mãn là $\binom{c+k-1}{k-1} \binom{d+k-1}{k-1}$ với $k = \max\{a, b\}$ với $k \geq 1$. Trong trường hợp $k = 0$ thì dễ thấy có 1 xâu thỏa mãn đề bài. Bài toán được giải quyết. $\square$

Bài 41.

- ① Một đại hội thể thao của phường Nam Cường có n vận động viên tham gia thi đấu ở 7 nội dung gồm: chạy 100 mét, đẩy tạ, bắn nỏ, đua xe đạp, bơi tự do 100 mét, nhảy cao, nhảy xa. Biết rằng mỗi vận động viên tham gia thi đấu ít nhất một trong các nội dung thi đấu này. Theo thống kê của ban tổ chức cho thấy mỗi nội dung thi đấu có số vận động viên tham dự bằng nhau và bằng 40. Ngoài ra cứ hai nội dung thi đấu bất kỳ thì có không quá 9 vận động viên tham gia thi đấu cả hai nội dung đó. Chứng minh rằng $n \geq 120$.
- ② Có 16 học sinh tham gia một kì thi, đề thi có n câu hỏi và mỗi câu hỏi có 4 phương án lựa chọn. Biết rằng 2 học sinh bất kì có không quá 1 câu trả lời chung cho tất cả các câu hỏi. Tìm giá trị lớn nhất của n . Hãy chỉ ra một trường hợp để n đạt được giá trị lớn nhất đó.

Lời giải.

- ① Với vận động viên thứ j ký hiệu a_j là môn thi đấu vận động viên đó tham gia. Ta lập bảng có 7 hàng và n cột. Ô $(i; j)$ của dòng i , cột j được đánh dấu $\times$ nếu vận động viên j tham gia nội dung i . Tổng số các dấu $\times$ nếu tính theo cột là $a_1 + a_2 + \dots + a_n$, và tổng này là $7 \cdot 40 = 280$ nếu tính theo dòng (vì mỗi nội dung thi đấu có đúng 40 vận động viên tham gia). Bây giờ ta tính S là số cặp $(\times, \times)$ theo cùng cột. Trên cột j có $\binom{a_j}{2}$ cặp, cho nên số S các cặp $(\times, \times)$ theo cột là

$$\binom{a_1}{2} + \binom{a_2}{2} + \dots + \binom{a_n}{2} = \frac{1}{2} (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) - \frac{1}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n). \quad (1)$$

Thay $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 280$ và áp dụng bất đẳng thức quen thuộc

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{n},$$

từ (1) ta có $S \geq \frac{280^2}{2n} - 140$. (2)

Mặt khác, với mỗi cặp 2 dòng, chỉ nhiều lắm có 9 cột có cặp $(\times, \times)$ trên 2 dòng này, cho nên tổng số các cặp $(\times, \times)$ cùng một cột trên tất cả $\binom{7}{2}$ cặp 2 dòng không vượt quá $9\binom{7}{2}$ cặp $(\times, \times)$. Ta có bất đẳng thức $9\binom{7}{2} \geq S$. Thay vào (2), ta có $9\binom{7}{2} \geq \frac{280^2}{2n} - 140$ và có

$$n \geq \frac{280^2}{2\left(9\binom{7}{2} + 140\right)} > 119.$$

Vậy $n \geq 120$.

② Ta đếm số bộ (A, B, C) mà học sinh A, B có cùng lựa chọn C .

☑ Đếm theo học sinh, có $S \leq \binom{16}{2}$.

☑ Đếm theo lựa chọn.

Ta đặt a_i, b_i, c_i, d_i là số học sinh chọn đáp án 1, 2, 3, 4 ở câu hỏi i .

Ta có $S = \sum_{i=1}^n \left(\binom{a_i}{2} + \binom{b_i}{2} + \binom{c_i}{2} + \binom{d_i}{2} \right)$ với $a_i + b_i + c_i + d_i = 16$ và

$$\begin{aligned} \binom{a_i}{2} + \binom{b_i}{2} + \binom{c_i}{2} + \binom{d_i}{2} &= \frac{1}{2} (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + d_i^2) - \frac{1}{2} (a_i + b_i + c_i + d_i) \\ &\geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} (a_i + b_i + c_i + d_i)^2 - \frac{1}{2} (a_i + b_i + c_i + d_i). \end{aligned}$$

Suy ra $S \geq 24n$. Từ đó ta có $n \leq 5$.

Chứng minh $n = 5$ thỏa mãn từ đó suy ra giá trị lớn nhất của n là 5. Dưới đây là một cách:

	Bài 1	Bài 2	Bài 3	Bài 4	Bài 5
Sinh viên 1	A	A	A	A	A
Sinh viên 2	A	B	B	B	B
Sinh viên 3	A	C	C	C	C
Sinh viên 4	A	D	D	D	D
Sinh viên 5	B	A	C	D	B
Sinh viên 6	B	C	A	B	D
Sinh viên 7	B	D	B	A	C
Sinh viên 8	B	B	D	C	A
Sinh viên 9	C	A	D	B	C
Sinh viên 10	C	D	A	C	B
Sinh viên 11	C	B	C	A	D
Sinh viên 12	C	C	B	D	A
Sinh viên 13	D	A	B	C	D
Sinh viên 14	D	B	A	D	C
Sinh viên 15	D	C	D	A	B
Sinh viên 16	D	D	C	B	A

□

Bài 42 (Tây Ban Nha, 2012). Cho x và n là những số nguyên dương sao cho $1 \leq x \leq n$. Người ta có $x + 1$ cái hộp phân biệt và $n - x$ quả bóng giống nhau. Gọi $f(n, x)$ là số cách phân phối $n - x$ quả bóng vào $x + 1$ hộp. Với p là một số nguyên tố cho trước, hãy tìm số nguyên n lớn hơn 1 sao cho số nguyên tố p là ước của $f(n, x)$ với mọi $x \in \{1; 2; \dots; n - 1\}$.

Lời giải.

Theo công thức đã nêu, ta dễ dàng có được $f(n, x) = \binom{n}{x}$. Do đó, ta cần tìm n sao cho $p \mid \binom{n}{x}$ với mọi $x \in \{1; 2; \dots; n - 1\}$. Theo định lý Lucas thì

$$\binom{n}{x} \equiv \binom{n_1}{x_1} \binom{n_2}{x_2} \binom{n_3}{x_3} \cdots \binom{n_k}{x_k} \pmod{p}$$

trong đó $n_1, n_2, \dots, n_k$ và $x_1, x_2, \dots, x_k$ là các chữ số của n, x trong biểu diễn p phân. Nếu tồn tại một chữ số $n_i \geq 1$ thì tương ứng, ta chọn $x_i = 0$ và tất cả các chữ số còn lại của n, x giống nhau thì rõ ràng $\binom{n}{x} \not\equiv 0 \pmod{p}$, không thỏa mãn. Do đó, tất cả các chữ số của n , trừ chữ số đầu tiên, là phải khác 0. Ngoài ra, chữ số đầu tiên của n phải bằng 1 vì nếu không, $n_1 > 1$ thì ta chọn $x_1 = 1$ cũng dẫn đến trường hợp không thỏa mãn. Suy ra $n = \overline{100 \dots 0}_{(p)}$ hay nói cách khác, n là lũy thừa của p . $\square$

Bài 43 (Trường Đông TPHCM, 2014). Cho $n \geq 2$ là một số nguyên dương. Xét tập hợp các đường đi ngắn nhất trên lưới nguyên từ điểm $A(0; 0)$ đến điểm $B(n; n)$ (độ dài đường đi là số lượng các bước đi). Một đường đi như thế sẽ tương ứng với một dãy gồm n lệnh T (lên trên) và n lệnh P (sang phải). Trong dãy đó, một cặp lệnh (T, P) kề nhau được gọi là một bước chuyển (lưu ý, cặp (P, T) không được gọi là bước chuyển). Ví dụ dãy $PTTPTPPT$ có 2 bước chuyển. Hãy tìm số các đường đi từ A đến B sao cho có đúng:

- ① 1 bước chuyển.
- ② 2 bước chuyển.

Lời giải.

- ① Ta phát biểu lại bài toán là: Cho xâu nhị phân có độ dài $2n$ với n số 0 và n số 1. Xác định số xâu nhị phân thỏa mãn cặp 10 chỉ xuất hiện đúng một lần. Gọi A là các xâu nhị phân chứa toàn số 1, B là các xâu nhị phân chứa toàn số 0. Rõ ràng chỉ có các xâu dạng sau thỏa mãn đề bài: $AB, ABA, BAB, BABA$.

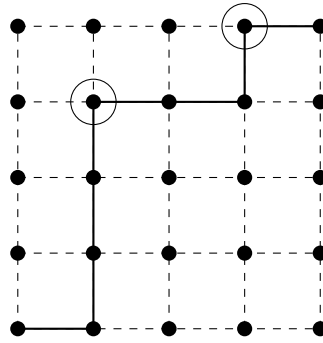
☑ Dạng 1 có 1 xâu.

☑ Dạng 2 có $\binom{n-1}{2-1} = n-1$ xâu (ta đếm số nghiệm nguyên dương của $x+y=n$).

☑ Dạng 3 có $n-1$ xâu.

☑ Dạng 4 có $(n-1)^2$ xâu (ta đếm số nghiệm nguyên dương của cặp phương trình $x+y=n$ rồi nhân lại vì BA phía trước xây dựng độc lập với BA phía sau).

Vậy tổng cộng có $(n-1)^2 + 2(n-1) + 1 = n^2$.



② Tương tự trên, ta có các dạng $ABAB$, $ABABA$, $BABAB$, $BABABA$.

☑ Dạng 1 có $(n-1)^2$ xâu.

☑ Dạng 2 có $\binom{n-1}{3-1} \binom{n-1}{2-1} = \frac{(n-1)^2(n-2)}{2}$ xâu.

☑ Dạng 3 có $\frac{(n-1)^2(n-2)}{2}$ xâu.

☑ Dạng 4 có $\binom{n-1}{3-1} \binom{n-1}{3-1} = \frac{(n-1)^2(n-2)^2}{4}$ xâu.

Vậy số đường đi tổng cộng thỏa mãn là

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)^2(n-2)^2}{4} + 2 \cdot \frac{(n-1)^2(n-2)}{2} + (n-1)^2 &= \frac{(n-1)^2}{4} [(n-2)^2 + 4(n-2) + 4] \\ &= \frac{(n-1)^2 n^2}{4}. \end{aligned}$$

Bài toán kết thúc. □

Bài 44. Cho tập $S = \{1, 2, \dots, 3n\}$, phân hoạch $S = A \cup B \cup C$ thỏa mãn $|A| = |B| = |C| = n$. Chứng minh rằng tồn tại $a \in A, b \in B, c \in C$ sao cho $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = 0$.

Lời giải.

Giả sử không tồn tại $a \in A, b \in B, c \in C$ sao cho $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = 0$.

Giả sử $1 \in A, k \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $1, 2, \dots, k-1 \in A$ mà $k \notin A$, giả sử $k \in B$ suy ra $2 \notin C$

Vì nếu $k = 2 \Rightarrow k \in B$. Nếu $k > 2 \Rightarrow k-1 \geq 2 \Rightarrow 2 \in A$.

Nhận xét. Nếu $x \in \mathbb{N}^*, x \in C, x-1 \in A$. Thật vậy giả sử $x \in C, x-1 \notin A \Rightarrow x-1 \in B \vee x-1 \in C$.

Ta có

☑ $(1, x-1, x) : 1 \in A, x \in C \Rightarrow x-1 \in C$.

☑ $(x-k, k, x) : k \in B, x \in C \Rightarrow x-k \in B \vee x-k \in C$.

☑ $(x-k, k-1, x-1) : k-1 \in A, x-1 \in C \Rightarrow x-k \in C$.

☑ $(x-k-1, k, x-1) : k \in B, x-1 \in C \Rightarrow x-k-1 \in B \vee x-k-1 \in C$.

☑ $(x-k-1, 1, x-k) : 1 \in A, x-k \in C \Rightarrow x-k-1 \in C$.

Từ đó suy ra $x \in C, x-1 \in C \Rightarrow x-k, x-k-1 \in C$ lập luận tương tự $\Rightarrow x-ik, x-ik-1 \in C$.

Chọn i sao cho $1 \leq x-ik-1 < k$ hoặc $1 \leq x-ik < k \Rightarrow x-ik-1 \in A$ hoặc $x-ik \in A$ vô lý. Vậy nếu $x \in C \Rightarrow x-1 \in A$. Đặt $C = \{c_1 < c_2 < \dots < c_n\} \Rightarrow c_1-1, c_2-1, \dots, c_n-1 \in A$, mà

$$c_i > 2 \Rightarrow c_i-1 \geq 2 \Rightarrow \{1, c_1-1, c_2-1, \dots, c_n-1\} \in A \Rightarrow |A| > n$$

, vô lý. Vậy tồn tại $a \in A, b \in B, c \in C$ sao cho $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = 0$ □

Bài 45. Cho X là tập gồm n số bất kỳ. Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_k$ là các số thỏa mãn điều kiện, $\forall u, v \in X, u \neq v$ tồn tại a_i sao cho $(u - a_i)(v - a_i) \leq 0$. Chứng minh rằng $n \leq 3^k$.

Lời giải.

Đặt $Y = \{(u_1, u_2, \dots, u_k) : u_i = 0, 1, 2\}$. Với mỗi $u \in X$, đặt $f(u) = \{u_1, u_2, \dots, u_k\} \in Y$, trong đó

$$u_i = \begin{cases} 0, & u < a_i \\ 1, & u = a_i \\ 2, & u > a_i \end{cases}$$

với mọi $i = 1, 2, \dots, k$. Ta sẽ chứng minh f là đơn ánh. Thật vậy, giả sử tồn tại $u, v \in X, u \neq v$ và

$$f(u) = (u_1, u_2, \dots, u_k) = (v_1, v_2, \dots, v_k) = f(v)$$

thì vì $u \neq v$ nên tồn tại a_i sao cho $(u - a_i)(v - a_i) \leq 0$. Để ý rằng $u_i = v_i, \forall i = 1, 2, \dots, k$ nên hoặc $u, v < a_i$ hoặc $u, v = a_i$ hoặc $u, v > a_i$. Cả ba trường hợp này đều không xảy ra nên f là đơn ánh. Từ đó suy ra $n = |X| \leq |Y| = 3^k$. $\square$

Bài 46. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ký hiệu H_n là tập tất cả các hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ của tập hợp $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Xét các tập hợp

$$S_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in H_n : a_i \geq i - 1, \forall i = 1, 2, \dots, n\},$$

$$T_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in H_n : a_i \leq i + 1, \forall i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $\frac{|T_n|}{|S_n|} > \frac{1}{3}$.

Lời giải.

Đặt $P_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in S_n : a_1 = 1\}$, $Q_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in S_n : a_n \neq 1\}$. Hiển nhiên

$$P_n \cap Q_n = \emptyset, P_n \cup Q_n = S_n$$

- ① Xét ánh xạ f đi từ P_n đến Q_n như sau: với $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in P_n$ ta cho tương ứng với $(a_2, a_1, \dots, a_n) \in Q_n$. Dễ thấy f là một song ánh nên $|P_n| = |Q_n| = \frac{1}{2}|S_n|$.
- ② Xét ánh xạ g đi từ P_n đến S_{n-1} như sau: với $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in P_n$ ta cho tương ứng với $(a_2 - 1, a_3 - 1, \dots, a_n - 1) \in S_{n-1}$. Dễ thấy g là song ánh nên $|P_n| = |S_{n-1}|$. Do đó ta có $|S_n| = 2|S_{n-1}|, n \geq 2$. Hơn nữa $|S_2| = 2, |S_1| = 1$ nên $|S_n| = 2^{n-1}$.
- ③ Xét ánh xạ h đi từ T_n đến $T_{n-1} \cup T_{n-2}$ xác định như sau: với mỗi $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in T_n$ ta cho tương ứng với $(a_2 - 1, a_3 - 1, \dots, a_n - 1)$ nếu $a_1 = 1$ và tương ứng với $(a_3 - 2, a_4 - 2, \dots, a_n - 2)$ nếu $a_1 = 2$. Dễ thấy h là một song ánh nên $|T_n| = |T_{n-1}| + |T_{n-2}|$, mà $|T_2| = 2, |T_1| = 1$ do đó

$$|T_n| = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

Từ đó giải được $\frac{|T_n|}{|S_n|} > \frac{1}{3} \Leftrightarrow n \leq 6$.

Bài toán được giải quyết. $\square$

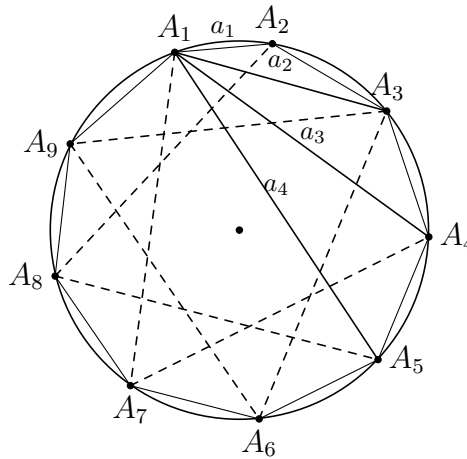
Bài 47. Xét đa giác đều 9 đỉnh. Với 3 đỉnh A, B, C cho trước, tính số bộ ba tam giác $(\Delta_1; \Delta_2; \Delta_3)$ được lập từ 9 đỉnh trên sao cho thỏa mãn các điều kiện sau

i.
$$\begin{cases} A \in \Delta_1 \\ B \in \Delta_2 \\ C \in \Delta_3 \end{cases}$$

ii. Các tam giác không có chung đỉnh.

iii. Từ mỗi tam giác ta có thể chọn 1 cạnh sao cho 3 cạnh này bằng nhau.

Lời giải.



Ký hiệu các thành phố lần lượt là $a_1, a_2, \dots, a_9$ như hình vẽ. Không mất tổng quát giả sử bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác bằng 1. Khi đó khoảng cách giữa 2 thành phố bằng khoảng cách cạnh hoặc đường chéo và có thể nhận 1 trong 4 giá trị sau

$$a_1 = 2 \sin \frac{\pi}{9}; a_2 = 2 \sin \frac{2\pi}{9}; a_3 = 2 \sin \frac{3\pi}{9}; a_4 = 2 \sin \frac{4\pi}{9}.$$

Khi đó độ dài các cạnh của một tam giác thuộc 1 trong 6 trường hợp sau

$$(a_1; a_1; a_2); (a_2; a_2; a_4); (a_1; a_3; a_4); (a_3; a_3; a_3); (a_2; a_3; a_4); (a_4; a_4; a_1).$$

Ta chứng minh rằng với bộ gồm 3 tam giác (không có chung đỉnh) bất kì luôn chọn được mỗi tam giác một cạnh sao cho 3 cạnh có độ dài bằng nhau. Ta phân hoạch tập đỉnh thành 3 tập

$$M = \{A_1; A_4; A_7\}; N = \{A_2; A_5; A_8\}; P = \{A_3; A_6; A_9\}.$$

Khi đó

- ☑ 1 tam giác đều phải có 3 đỉnh cùng thuộc 1 tập trong 3 tập trên.
- ☑ 1 tam giác cân (không đều) phải có 3 đỉnh thuộc cả 3 tập trên.
- ☑ 1 tam giác không cân phải có 2 cùng thuộc 1 tập và đỉnh còn lại thuộc tập khác.

Trường hợp 1. Tồn tại tam giác đều (hay có 1 tam giác mà cả 3 đỉnh thuộc cùng 1 trong 3 tập M, N, P). Giả sử đó là $(A_1; A_4; A_7)$ có cạnh là a_3 khi đó 2 tam giác còn lại có đỉnh là 1 trong 2 đỉnh của các bộ sau $\{A_2; A_3\}; \{A_5; A_6\}; \{A_8; A_9\}$.

Khi đó mỗi tam giác đều chứa 2 đỉnh $A_i; A_j$ thỏa $|i - j| = 0 \pmod{3}$ nên chứa cạnh có độ dài a_3 .

Trường hợp 2. Cả 3 tam giác cân, không có tam giác đều (cả 3 tam giác mỗi tam giác đều có đúng 1 đỉnh thuộc 1 trong 3 tập M, N, P) khi đó các độ dài các cạnh của chúng nhận giá trị trong các bộ sau $(a_1; a_1; a_2); (a_2; a_2; a_4); (a_4; a_4; a_1)$; tuy nhiên không thể nhận cả 3 bộ giá trị nên suy ra điều kiện bài toán thỏa.

Trường hợp 3. Có đúng 2 tam giác cân và 1 tam giác không cân (theo nhận xét trên trường hợp này không xảy ra).

Trường hợp 4. Có đúng 1 tam giác cân và 2 tam giác không cân khi đó 2 tam giác không cân có độ dài các cạnh của chúng nhận giá trị trong các bộ sau $(a_1; a_3; a_4); (a_2; a_3; a_4)$; tuy nhiên không thể nhận cả 2 bộ nên suy ra điều kiện bài toán thỏa.

Trường hợp 5. Cả 3 tam giác không cân khi đó các độ dài các cạnh của chúng nhận giá trị trong các bộ sau $(a_1; a_3; a_4); (a_2; a_3; a_4)$; luôn chứa a_3 .

Do đó số cách chọn thỏa điều kiện đề bài là $\binom{6}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{2} = 90$. □

Bài 48. Một đề thi có n câu hỏi, điểm của mỗi câu hỏi là 1 điểm. Một nhóm n học sinh tham gia giải đề thi này, mỗi em làm một bài thi độc lập với nhau và số điểm của nhóm là tổng số điểm của các em. Người ta thấy rằng cứ hai câu bất kì thì có tối đa 1 em giải đúng cả hai câu.

- ① Hãy tính số điểm lớn nhất có thể có của nhóm n em học sinh này.
- ② Chỉ ra một trường hợp số điểm lớn nhất khi $n = 6, n = 7$.

Lời giải.

- ① Ta giả sử các em $A_1, A_2, \dots, A_n$ tham gia giải các câu $a_1, a_2, \dots, a_n$. Đặt $S = \{(A_i, a_j, a_k)\}$ nghĩa là em A_i giải ra hai câu a_j, a_k . Ta kí hiệu $d(a_i)$ là số câu mà A_i giải được, vậy khi đó ta có $|S| = \sum_{i=1}^n \binom{d(a_i)}{2}$. Mặt khác, do hai câu bất kì thì có tối đa 1 em giải được nên

$$|S| \leq \binom{n}{2} \Rightarrow \sum_{i=1}^n \binom{d(a_i)}{2} \leq \binom{n}{2} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n d(a_i)(d(a_i) - 1) \leq n^2 - n$$

hay

$$n^2 - n + \sum_{i=1}^n d(a_i) \geq \sum_{i=1}^n d^2(a_i) \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n d(a_i) \right)^2.$$

Chú ý giá trị $E = \sum_{i=1}^n d(a_i)$ chính là tổng số điểm của cả nhóm nên lại có

$$E^2 - nE + n^2 - n^3 \leq 0 \Leftrightarrow E \leq \frac{1}{2} (n + n\sqrt{4n-3}).$$

Vậy giá trị lớn nhất của số điểm nhóm là $\left\lfloor \frac{n}{2} (1 + \sqrt{4n-3}) \right\rfloor$.

- ② Trong trường hợp $n = 7$ thì tổng số điểm lớn nhất của cả nhóm là 21. Đặt $A_i \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots\}$ là người thứ i giải được các câu $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots$. Ta xếp trong trường hợp 4 người với số điểm là 9

$$A_1 \{a_1, a_2, a_4\}; A_2 \{a_2, a_3\}; A_3 \{a_3, a_4\}; A_4 \{a_1, a_3\}$$

Trường hợp 5 người với số điểm là 12

$$A_1 \{a_1, a_2, a_4\}; A_2 \{a_2, a_3, a_5\}; A_3 \{a_3, a_4\}; A_4 \{a_1, a_3\}, A_5 \{a_5, a_1\}.$$

Trường hợp 6 người với số điểm là 16

$$A_1 \{a_1, a_2, a_4\}; A_2 \{a_2, a_3, a_5\}; A_3 \{a_3, a_4, a_6\}; A_4 \{a_1, a_3\}, A_5 \{a_5, a_1, a_6\}, A_6 \{a_6, a_2\}$$

Trường hợp 7 người với số điểm là 21

$$A_1 \{a_1, a_2, a_4\}; A_2 \{a_2, a_3, a_5\}; A_3 \{a_3, a_4, a_6\}; A_4 \{a_1, a_3, a_7\}, A_5 \{a_5, a_1, a_6\}, \\ A_6 \{a_6, a_2, a_7\}, A_7 \{a_7, a_4, a_5\}$$

Bài toán được giải quyết. □

Bài 49. Trong một buổi thi chọn đội dự tuyển chuẩn bị cho kỳ thi chọn học sinh giỏi quốc gia của Trường THPT chuyên X, giáo viên phát 5 đề thi khác nhau cho một nhóm gồm n học sinh ngồi quanh một bàn tròn sao cho không có hai học sinh nào ngồi cạnh nhau có cùng một đề thi ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$). Hỏi có bao nhiêu học sinh tham gia dự thi? Biết rằng số cách phát đề là 1048580.

Lời giải.

Gọi S_n là số cách phát đề cho học sinh sao cho không có hai học sinh nào ngồi cạnh nhau có cùng đề thi. Cố định một học sinh làm vị trí đầu tiên và các học sinh bên phải của học sinh đó lần lượt ở các vị trí thứ 2, thứ 3, ..., thứ n (học sinh ở vị trí thứ n ngồi cạnh học sinh ở vị trí thứ nhất). Ta thấy,

- ✓ Nếu học sinh ở vị trí thứ nhất và học sinh ở vị trí thứ $n - 1$ có đề thi khác nhau thì sẽ có 3 cách phát đề cho học sinh ở vị trí thứ n .
- ✓ Nếu học sinh ở vị trí thứ nhất và học sinh ở vị trí thứ $n - 1$ có đề thi giống nhau thì có 4 cách phát đề cho học sinh ở vị trí thứ n . Do đó ta có hệ thức $S_n = 3S_{n-1} + 4S_{n-2}$ ($n \geq 4$).

Xét phương trình đặc trưng $x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow S_n = a(-1)^n + b4^n.$

Do $S_2 = 5 \cdot 4 = 20, S_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ nên

$$\begin{cases} a + 16b = 20 \\ -a + 64b = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow S_n = 4(-1)^n + 4^n = 4 + 4^10 \Rightarrow n = 10.$$

Vậy có 10 học sinh tham gia dự thi. □

Bài 50 (IMO Shortlisted 2001, problem 12). Với mỗi số nguyên dương n , gọi một dãy gồm toàn số 0 và 1 là cân bằng nếu nó chứa n số 0 và n số 1. Hai dãy cân bằng a và b được gọi là hàng xóm nếu có thể chuyển vị trí 1 trong $2n$ ký tự của a để a chuyển thành b (VD: 01101001 chuyển được thành 00110101 bằng cách chuyển số 0 thứ 4 (hoặc thứ 3) sang vị trí đầu tiên hoặc thứ 2). Chứng minh rằng có tập S chứa cùng lắm $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ dãy cân bằng sao cho mọi dãy cân bằng đều bằng với hoặc là hàng xóm với ít nhất một dãy trong S .

Lời giải.

Vì trong đề bài có đề cập đến số $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ nên ta có ý tưởng là phân chia $\binom{2n}{n}$ dãy cân bằng thành $n+1$ lớp, chọn lớp có số phần tử nhỏ nhất (sẽ nhỏ hơn hoặc bằng $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$) và chứng minh

mọi dãy cân bằng đều thuộc lớp đó hoặc là hàng xóm với 1 phần tử của lớp đó. Quan trọng nhất ở đây là cách phân lớp sao cho phù hợp. Do có nhận xét là $\binom{2n}{n}$ chia hết cho $n + 1$ nên có thể nghĩ đến cách chia lớp theo kiểu đồng dư modulo $n + 1$ thì mỗi lớp có đúng $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ phần tử. Quan trọng là xem xét cái gì thay đổi khi chuyển vị trí để dựa vào đó làm căn cứ chia lớp theo modulo $n + 1$. Ta hãy bắt đầu với các trường hợp nhỏ lẻ. Trước hết, nghiên cứu sự thay đổi khi di chuyển một kí tự trong một dãy cân bằng nào đó. Xét $n = 3$, ví dụ với dãy ban đầu là 000111. Số 0 từ vị trí thứ 1 sang vị trí thứ k thì dãy 000111 sẽ không đổi nếu $k = 2, 3$, thành 001011 nếu sang vị trí thứ 4, 001101 nếu sang vị trí thứ 5, sang 001110 nếu sang vị trí số 6. Vị trí số 1 có thể được mô tả lại như sau

$$(4, 5, 6) \longrightarrow (3, 5, 6) \longrightarrow (3, 4, 6) \longrightarrow (3, 4, 5)$$

Nếu dãy ban đầu là 000111 và di chuyển số 1. Di chuyển số 1 từ vị trí cuối cùng sang vị trí thứ k , thì với $k = 5, 4$ vẫn không có gì thay đổi. Với $k = 3$ thì được dãy 001011; $k = 2$ được 010011; $k = 1$ được 100011. Vị trí số 1 như sau

$$(4, 5, 6) \longrightarrow (3, 5, 6) \longrightarrow (2, 5, 6) \longrightarrow (1, 5, 6)$$

Di chuyển số 1 từ vị trí thứ 5 sang vị trí thứ 4 hoặc 6, không có gì thay đổi, sang vị trí thứ 3, ta được 001011, thứ 2 được 010011, sang vị trí thứ 1 được 100011, các vị trí thay đổi như sau

$$(4, 5, 6) \longrightarrow (3, 5, 6) \longrightarrow (2, 5, 6) \longrightarrow (1, 5, 6)$$

Khi đó thì có cái gì thay đổi? Chỉ có vị trí số 1 trong dãy thay đổi. Xét theo modulo 4 thì có gì thay đổi theo quy luật? Chỉ có tổng vị trí của số 1 thay đổi, còn bản thân các số xét theo modulo 3 thì lại thay đổi không theo quy luật nào cả. Xét về tổng vị trí của số 1 thì với việc di chuyển số 0 với dãy ban đầu, ta thu được các số 15, 14, 13, 12 là 1 hệ thặng dư đầy đủ modulo 4. Với việc di chuyển số 1, ta thu được các số: 15, 14, 13, 12 cũng là hệ thặng dư đầy đủ modulo 4. Với việc di chuyển số 1 theo cách 2, ta thu được các số tương tự. Tiếp theo, xem xét kết quả khi $n = 2$, ta có $\binom{4}{2} = 6$ dãy sau: 1100; 1010; 1001; 0011; 0101; 0110, ta thấy 1100 nhận 1010; 1001 làm hàng xóm, tổng vị trí của số 1 trong 3 dãy này là: 3, 4, 5. 0011 nhận 0101; 0110 làm hàng xóm, tổng vị trí của số 1 trong 3 dãy là: 7, 6, 5. Xét theo modulo 3 thì các số trên lập thành hệ thặng dư đầy đủ modulo 3, nếu chọn tập $S = \{1100; 0011\}$ thì S là tập thỏa mãn. Như vậy, có khả năng ta sẽ chia lớp theo tổng các vị trí của số 1 trong dãy với modulo $n + 1$, tổng quát từ trường hợp $n = 2$, ta sẽ chia thành nhiều hệ thặng dư đầy đủ modulo $n + 1$, mỗi hệ đó chọn 1 dãy cân bằng đại diện, và với dãy cân bằng đó, hàng xóm của nó có vẻ như quét thành hệ thặng dư đầy đủ. Như thế, ta chọn mỗi hệ một phần tử theo lớp thặng dư để chia thành $n + 1$ lớp, thì nhiều khả năng đó là cách phân lớp thỏa mãn. Suy nghĩ theo hướng như vậy, cuối cùng, ta có lời giải như sau: Với mỗi dãy cân bằng $a = (a_1, a_2, \dots, a_{2n})$, xét $f(a)$ là tổng các số j sao cho $a_j = 1$. Ví dụ $f(10010011) = 1 + 4 + 7 + 8 = 20$. Phân chia $\binom{2n}{n}$ dãy cân bằng thành $n + 1$ lớp

$$A_i = \{a/f(a) \equiv i \pmod{n+1}\}, i = 1, 2, \dots, n+1$$

Gọi S là lớp có số phần tử ít nhất thì

$$|S| \leq \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Ta sẽ chứng minh mọi dãy cân bằng a đều thuộc S hoặc là hàng xóm với một phần tử của S . Xét 2 trường hợp

- i) Nếu $a_1 = 1$. Di chuyển số 1 về phía bên phải của số 0 thứ k , ta thu được dãy cân bằng b là hàng xóm của a với $f(b) = f(a) + k$. Vậy nếu $a \notin S$ thì tồn tại số $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ mà $b \in S$.
- ii) Nếu $a_1 = 0$. Di chuyển số 0 về phía bên phải số 1 thứ k thì ta được hàng xóm b của a mà $f(b) = f(a) - k$. Vậy tồn tại $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ mà $b \in S$.

Ta có điều phải chứng minh. □

Bài 51. Có n bóng đèn $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}$) được xếp thành một hàng ngang, mỗi bóng đèn chỉ có hai trạng thái là bật hoặc tắt. Ở thời điểm ban đầu, bóng đèn A_1 bật còn các bóng đèn khác đều tắt. Cứ sau mỗi giây, các bóng đèn thay đổi trạng thái như sau: nếu bóng đèn A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) đang có cùng trạng thái với các bóng đèn kề với nó thì A_i sẽ tắt; các trường hợp khác A_i sẽ được bật lên (trong đó, mỗi bóng đèn A_1 và A_n chỉ có một bóng đèn kề với nó). Chứng minh rằng

- ① Nếu $n = 2^m$, $m \in \mathbb{N}^*$ thì đến một thời điểm nào đó tất cả các bóng đèn đều bật.
- ② Tồn tại vô hạn giá trị n sao cho ở mọi thời điểm, tất cả các bóng đèn không thể cùng bật hoặc cùng tắt.

Lời giải.

- ① Không mất tính tổng quát, ta coi các bóng đèn được xếp thành một hàng ngang cách đều nhau. Gọi O là điểm chính giữa $A_1 A_n$. Ta chứng minh nếu $n = 2^m$, $m \in \mathbb{N}^*$ thì sau $n - 1 = 2^m - 1$ bước các bóng đèn đều bật bằng phương pháp quy nạp theo m .
 - ☑ Dễ thấy mệnh đề đúng với $m = 1, m = 2$.
 - ☑ Giả sử mệnh đề đúng đến m , ta chứng minh mệnh đề đúng với $m + 1$. Thật vậy, giả sử $k = \frac{n}{2} = 2^m$ bóng đèn bên trái $A_1, A_2, \dots, A_k$ đều bật sau $k - 1$ bước. Để ý rằng k bóng đèn bên phải $A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_n$ không thay đổi trạng thái trong suốt $k - 1$ bước ban đầu. Đến bước thứ k , tất cả các bóng đèn đều tắt trừ hai bóng chính giữa A_k, A_{k+1} được bật. Sau bước này, do tính chất đối xứng, các bóng đèn đối xứng qua tâm O đều có cùng trạng thái. Xét k bóng đèn bên phải $A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_n$, sau bước thứ k , chỉ có A_{k+1} bật còn các bóng khác đều tắt. Trạng thái này trùng với trạng thái ban đầu của k bóng đèn bên trái $A_1, A_2, \dots, A_k$. Như vậy sau bước thứ $k + j$ dãy k bóng đèn bên phải $A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_n$ trùng trạng thái với dãy k bóng đèn bên trái $A_1, A_2, \dots, A_k$ sau j bước. Theo giả thiết quy nạp, sau bước thứ $k + (k - 1) = n - 1$, tất cả các bóng đèn bên phải $A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_n$ đều bật. Do tính đối xứng qua tâm O , k bóng đèn bên trái $A_1, A_2, \dots, A_k$ cũng đều bật. Như vậy, tất cả n bóng đèn đều bật sau bước thứ $n - 1$. Phép chứng minh quy nạp được hoàn tất.
- ② Ta chứng minh, nếu $n = 2^m + 1, m \in \mathbb{N}^*$ thì ở mọi thời điểm, các bóng đèn không thể có cùng trạng thái. Lập luận tương tự như phần a), ta thấy, trong suốt $n - 2 = 2^m - 1$ bước ban đầu, không có thời điểm nào mà các bóng đèn $A_1, A_2, \dots, A_n$ có cùng trạng thái. Sau bước thứ $n - 1 = 2^m$, chỉ có hai bóng đèn A_{n-1} và A_n bật, các bóng còn lại đều tắt. Khi đó, dãy $(A_n, A_{n-1}, \dots, A_2, A_1)$ trùng trạng thái với dãy $(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n)$ sau bước thứ nhất. Như vậy, trạng thái của dãy $(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n)$ sau bước thứ j trùng với trạng thái của dãy $(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n)$ sau bước thứ $n - 2 + j$. Suy ra, trạng thái của dãy $(A_n, A_{n-1}, \dots, A_2, A_1)$ sau bước thứ j trùng với trạng thái của dãy $(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n)$ sau bước thứ $2(n - 2) + j$. Vậy trạng thái của dãy $(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n)$ là tuần hoàn với chu kỳ nhỏ nhất là $2(n - 2)$. Trong mỗi chu kỳ, không tồn tại thời điểm mà tất cả các bóng đèn có cùng trạng thái. Từ đó, tại mọi thời điểm, tất cả các bóng đèn không thể cùng bật hoặc cùng tắt. Suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán được giải quyết. □

Bài 52. Mười hai hiệp sĩ ngồi quanh một bàn tròn. Mỗi hiệp sĩ ghét hai hiệp sĩ ngồi bên cạnh anh ta, nhưng không ghét ai trong số các hiệp sĩ khác. Một nhóm gồm năm hiệp sĩ được cử đi bảo vệ người yêu của admin Minh Tuấn. Hai hiệp sĩ ghét nhau thì không được vào cùng 1 nhóm. Hỏi có thể lập được bao nhiêu nhóm hiệp sỹ đi bảo vệ girl xinh.

Lời giải.

Ta đi chứng minh bài toán tổng quát hơn.

Tổng quát. Cho $n > 2$ người ngồi quanh một bàn tròn. Mỗi người ghét hai người ngồi ở hai bên cạnh mình. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một nhóm gồm $m \left(m \left[\frac{n}{2}\right]\right)$ người sao cho trong mỗi nhóm không có hai người nào ghét nhau. Cho tương ứng theo thứ tự từ trái sang phải mỗi người ngồi trong bàn tròn với một trong n số nguyên dương đầu tiên. Bài toán đặt ra là tìm số tập con có m phần tử của tập hợp n số nguyên dương đầu tiên sao cho không có hai phần tử nào có khoảng cách bằng 1 hoặc $n - 1$. Gọi A, B theo thứ tự là họ các tập con có m phần tử của tập n số nguyên dương đầu tiên sao cho không có hai phần tử nào có khoảng cách bằng 1, bằng 1 và tồn tại hai phần tử có khoảng cách bằng $n - 1$. Rõ ràng số tập con thỏa mãn đúng bằng $|A| - |B|$. Ta sẽ tính lực lượng của A và B .

- ① Tính lực lượng của A . Gọi $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ là một phần tử của họ A . Không mất tính tổng quát giả sử $a_1 < a_2 < \dots < a_m$, vì $a_{i+1} > a_i + 1, \forall i = \overline{1, n-1}$ nên

$$1a_1 < a_2 - 1 < a_3 - 2 < \dots < a_m - m + 1n - m + 1$$

Nếu đặt $b_i = a_i - i + 1$ thì dễ thấy $\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ là một tập con của tập $n - m + 1$ số nguyên dương đầu tiên. Xét ánh xạ đi từ tập A đến họ các tập con có m phần tử của tập $n - m + 1$ số nguyên dương đầu tiên sau

$$(a_1, a_2, \dots, a_m) \rightarrow (b_1, b_2, \dots, b_m)$$

Dễ dàng chứng minh được đây là song ánh nên

$$|A| = \binom{n - m + 1}{m}$$

- ② Tính lực lượng của tập B . Vì mỗi phần tử của họ B có chứa hai phần tử có khoảng cách bằng $n - 1$ nên nếu $\{a_1, a_2, \dots, a_m\} \in B$ và $a_1 < a_2 < \dots < a_m$ thì $a_1 = 1, a_m = n$. Do đó

$$3a_2 < a_3 < \dots < a_{m-1}n - 2$$

Xây dựng song ánh tương tự ta có

$$|B| = \binom{n - m - 2}{m - 2}$$

Vậy số tập con cần xác định là $|A| - |B| = \binom{n - m + 1}{m} - \binom{n - m - 2}{m - 2}$. □

Bài 53. Cho tập hợp T gồm n phần tử ($n \in \mathbb{N}^*$) và $F(T)$ là họ tất cả các tập con khác nhau của T thỏa mãn mỗi tập con này có 3 phần tử và không có hai tập con nào rời nhau. Tìm giá trị lớn nhất của $|F(T)|$. (Hai tập A và B được gọi là rời nhau nếu $A \cap B = \emptyset$ và $|A|$ là ký hiệu số phần tử của tập hợp A).

Lời giải.

Gọi $k(n) = \max |F(T)|$ là số cần tìm. Khi đó ta có

☑ Nếu $1 \leq n \leq 2$ thì $F(T) = \emptyset \Rightarrow k(n) = 0$.

☑ Nếu $3 \leq n \leq 5$ thì tất cả các tập con gồm 3 phần tử của T đều đôi một có phần tử chung, suy ra $k(n) = \binom{n}{3}$.

☑ Nếu $n \geq 6$, giả sử $T = \{1; 2; \dots; n\}$. Khi đó xét $\binom{n-1}{2}$ tập con gồm 2 phần tử của tập $T \setminus \{1\}$, với mỗi tập con A gồm 2 phần tử của $T \setminus \{1\}$ thì $A \cup \{1\} \in F(T)$, suy ra

$$k(n) \geq \binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Tiếp theo ta chứng minh $k(n) \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ khi $n \geq 6$.

Giả sử khẳng định $k(m) \leq \binom{m-1}{2}$ đúng với mọi $6 \leq m \leq n$, xét tập $A \in F(T)$, không mất tính tổng quát ta giả sử $A = \{1; 2; 3\}$. Nếu mọi $B \in F(T)$ đều chứa 2 phần tử của A thì $|F(T)| = 1 + 3(n-3) < \binom{n-1}{2}$ (do $n \geq 7$). Nếu có ít nhất một tập $B \in F(T)$ chỉ chứa một phần tử của A , ta giả sử $B = \{1; 4; 5\}$. Nếu tất cả các phần tử của $F(T)$ đều chứa 1 thì $|F(T)| = \binom{n-1}{2}$, ngược lại giả sử tập $C \in F(T)$ không chứa 1, do $A \cap C \neq \emptyset, B \cap C \neq \emptyset$ nên ta giả sử $C = \{2; 4; 6\}$. Từ đẳng thức

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{(n-2)(n-3)}{2} = n-2$$

nên nếu có không quá $n-2$ tập chứa 7 thì theo giả thiết quy nạp ta có khẳng định đúng.

Trái lại, giả sử 7 thuộc ít nhất $n-1$ tập, với mỗi tập như thế phải chứa 1, 2 hoặc 3.

- Nếu nó chứa 1 thì nó phải chứa 2, 4 hoặc 6, điều này xảy ra nếu tập hợp đó là $\{1; 2; 7\}$, $\{1; 4; 7\}$ hoặc $\{1; 6; 7\}$.
- Nếu nó chứa 2 thì nó phải chứa 1, 4 hoặc 5. Như vậy có thêm 2 khả năng nữa là các tập $\{2; 4; 7\}$ hoặc $\{2; 5; 7\}$.
- Nếu nó chứa 3 thì nó phải chứa 1, 4, 5 do đó chỉ có một khả năng là $\{3; 4; 7\}$ (vì các tập đó phải giao nhau khác rỗng với các tập $\{1; 4; 5\}, \{2; 4; 6\}$). Như vậy chỉ có 6 khả năng cho các tập con chứa 7. Vì thế nếu $n-2 \geq 6 \Leftrightarrow n \geq 8$ thì không có quá $n-2$ tập chứa 7. Xét $n = 7$ thì $T = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$, ta lý luận tương tự và đi đến kết luận rằng không quá $n-2$ tập chứa 6.

$$\text{Như vậy ta có } k(n) = \begin{cases} 0 & 1 \leq n \leq 2 \\ \binom{n}{3} & 3 \leq n \leq 5 \\ \binom{n-1}{2} & n \geq 6. \end{cases}$$

□

Bài 54. Chứng minh rằng tồn tại một tập con A của tập hợp $\{1; 2; \dots; 2^{100} - 1\}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

(i) $1 \in A$ và $2^{100} - 1 \in A$;

(ii) Mọi phần tử của A (ngoại trừ số 1) đều là tổng của hai phần tử (không nhất thiết phân

biệt) của A ;

(iii) Số các phần tử của A không vượt quá 109.

Lời giải.

Với mỗi số nguyên dương m , gọi A_m là một tập con của $\{1; 2; \dots; m\}$ có số phần tử nhỏ nhất mà thỏa (i) và (ii) và gọi $f(m)$ là số phần tử của A_m . Khi đó, ta sẽ chứng minh rằng $A_{2^{100}-1}$ thỏa (iii), tức là $f(2^{100}-1) \leq 109$. Với mỗi $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ ta đặt

$$B = A_{2^n-1} \cup \{2^{n+1}-2; 2^{n+1}-1\}$$

thì $1 \in B$ và $2^{n+1}-1 \in B$ tức là (i) được thỏa mãn. Mọi phần tử của A_{2^n-1} trừ phần tử 1 đều thỏa mãn là tổng của hai phần tử nào đó của A_{2^n-1} . Ngoài ra $2^{n+1}-1 = (2^{n+1}-2) + 1$ và $2^{n+1}-2 = (2^n-1) + (2^n-1)$. Cho nên B thỏa (ii). Khi đó,

$$f(2^{n+1}-1) \leq |B| = f(2^n-1) + 2 \quad (1)$$

Mặt khác, với mỗi $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ ta đặt

$$B = A_{2^n-1} \cup \{2(2^n-1); 2^2(2^n-1); \dots; 2^n(2^n-1); 2^{2^n}-1\}$$

thì tương tự trên ta có B thỏa (i). Mọi phần tử của A_{2^n-1} trừ phần tử 1 đều là tổng của hai phần tử nào đó của A_{2^n-1} . Mặt khác,

$$\begin{aligned} 2^{2^n}-1 &= (2^n-1)(2^n+1) = 2^n(2^n-1) + (2^n-1), \\ 2^n(2^n-1) &= 2^{n-1}(2^n-1) + 2^{n-1}(2^n-1), \\ &\dots\dots\dots \\ 2^2(2^n-1) &= 2(2^n-1) + 2(2^n-1), \\ 2(2^n-1) &= (2^n-1) + (2^n-1). \end{aligned}$$

Cho nên B thỏa (ii). Khi đó, $f(2^{2^n}-1) \leq |B| = f(2^n-1) + n + 1$. (2)

Áp dụng (1), (2) ta được

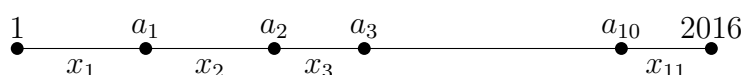
$$\begin{aligned} f(2^{100}-1) &\leq f(2^{50}-1) + 51 \leq f(2^{25}-1) + 51 + 26 \leq f(2^{12}-1) + 51 + 26 + 2 \\ &\leq f(2^6-1) + 51 + 26 + 2 + 13 \leq f(2^3-1) + 51 + 26 + 2 + 13 + 7 + 4 \\ &\leq f(2^2-1) + 105 = 3 + 105 = 108 < 109. \end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Bài 55. Có bao nhiêu cách chọn từ 2016 số nguyên dương đầu tiên ra 10 số $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ sao cho $|a_i - a_j| > 1$ với mọi $i \neq j$?

Lời giải.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1 < a_2 < \dots < a_{10}$ thì khi đó, ta có thể đưa ra giả thiết đã cho về $a_{i+1} - a_i \geq 2$ với $i = \overline{1, 9}$. Như thế, các số a_i này không đứng cạnh nhau. Gọi x_1 là số các số trước a_1 , x_{11} là các số sau a_{10} , còn lại x_k là số các số nằm giữa a_{k-1} và a_k .



Theo giả thiết, ta phải có $x_1 \geq 0, x_{11} \geq 0$ và $x_i \geq 1$ với $i = \overline{2, 10}$. Ngoài ra,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{11} = 2006.$$

Đặt $y_i = x_i - 1 \geq 0, i = \overline{2, 10}$ thì ta đưa về phương trình

$$x_1 + y_2 + \cdots + y_{10} + x_{11} = 1997.$$

Số nghiệm của phương trình này là $\binom{1997 + 11 - 1}{11 - 1} = \binom{2007}{10}$. Dễ thấy rằng một bộ nghiệm này cho ta một cách chọn ra một bộ 10 số thỏa mãn đề bài. Do đó, số các bộ cần tìm là $\binom{2007}{10}$. $\square$

Bài 56. Gọi a_n là số các xâu nhị phân độ dài n không chứa ba bit 0, 1, 0 liên tiếp. Gọi b_n là số các xâu nhị phân độ dài n không chứa bốn bit 0, 0, 1, 1 hoặc 1, 1, 0, 0 liên tiếp. Chứng minh rằng $b_{n+1} = 2a_n$ với mọi số nguyên dương n .

Lời giải.

Gọi A_n, B_n lần lượt là tập các xâu nhị phân độ dài n thỏa mãn điều kiện thứ nhất và thứ hai. Với mỗi xâu nhị phân $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ta cho tương ứng với một xâu nhị phân $(y_0, y_1, \dots, y_n)$ xác định bởi $y_0 = 0$ và

$$y_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_i \bmod 2, i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3)$$

Khi đó

$$x_i = y_i - y_{i-1} \bmod 2, i = 1, 2, \dots, n.$$

Dễ thấy (2.3) là một song ánh giữa tập tất cả các xâu nhị phân độ dài n và tập tất cả các xâu nhị phân độ dài $n + 1$ trong đó có bit đầu tiên là 0. Hơn nữa, xâu nhị phân $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ có ba bit 0, 1, 0 liên tiếp theo thứ tự này khi và chỉ khi xâu nhị phân tương ứng $(y_0, y_1, \dots, y_n)$ có bốn bit liên tiếp theo thứ tự là 0, 0, 1, 1 hoặc 1, 1, 0, 0. Nói cách khác một xâu nhị phân thuộc A_n sẽ tương ứng với một xâu nhị phân thuộc B_{n+1} bắt đầu bằng bit 0. Vì số xâu nhị phân thuộc vào B_{n+1} bắt đầu bằng bit 0 đúng bằng một nửa số xâu nhị phân thuộc vào B_{n+1} do đó ta có $b_{n+1} = 2a_n$ (điều phải chứng minh). $\square$

Bài 57. Gọi M là số nguyên dương trong hệ thập phân có $2n$ chữ số trong đó có n chữ số 1 và n chữ số 2. Gọi N là số nguyên dương có n chữ số trong hệ thập phân trong đó chỉ có các chữ số 1, 2, 3, 4 và số chữ số 1 bằng số chữ số 2. Chứng minh $|M| = |N|$.

Lời giải.

Ta sẽ chứng minh rằng có một song ánh đi từ N vào M . Lấy một số bất kỳ thuộc vào N , ta sẽ cho tương ứng với một số thuộc vào M theo cách: đầu tiên viết hai số này liên nhau ta sẽ được một số có $2n$ chữ số, sau đó các chữ số 3 ở n chữ số đầu tiên được đổi thành chữ số 1, các chữ số 3 ở n chữ số tiếp theo được đổi thành chữ số 2. Tương tự, các chữ số 4 ở n chữ số đầu tiên được đổi thành chữ số 2, các chữ số 4 ở n chữ số tiếp theo được đổi thành các chữ số 1. Với cách làm này ta thu được một số thuộc vào M và hiển nhiên đây là một đơn ánh. Để chứng minh đây là một song ánh ta xây dựng ánh xạ ngược như sau: Với một số có n chữ số 1 và n chữ số 2 ta cắt đôi n chữ số đầu và n chữ số cuối sau đó đặt chúng song song nhau và thực hiện **phép cộng** như sau

$$1 + 1 = 1, 2 + 2 = 2, 1 + 2 = 3, 2 + 1 = 4.$$

Khi đó ta sẽ thu được một số thuộc N . Như vậy có một song ánh giữa hai tập M và N nên $|M| = |N|$. $\square$

Bài 58. Cho $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Một tập con A của X được gọi là **tập béo** nếu mỗi phần tử của A đều không nhỏ hơn số phần tử của nó. Tập rỗng cũng là một tập béo. Đặt a_n là số các tập béo của X mà trong mỗi tập không chứa hai số liên tiếp, b_n là số các tập con của X mà hai phần tử bất kỳ hơn kém nhau ít nhất 3 đơn vị. Chứng minh $a_n = b_n$.

Lời giải.

Gọi A là học các tập béo thỏa mãn yêu cầu đề bài, B là họ các tập con của X có tính chất hai phần tử bất kỳ hơn kém nhau 3 đơn vị. Ta thiết lập một ánh xạ f đi từ A đến B như sau: giả sử $x = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \in A$, ta có thể giả sử $k \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n$.

Đặt $b_1 = a_1 - k + 1, b_2 = a_2 - k + 2, \dots, b_k = a_k$. Khi đó

$$a_{i+1} \geq a_i + 2, i = 1, 2, \dots, k - 1.$$

Suy ra $a_{i+1} - a_i \geq 2$ do đó $b_{i+1} - b_i \geq 3$ và $b_1 \geq 1, b_k \leq n$. Định nghĩa $f(x) = y = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$, suy ra $y \in B$. Vậy f là một ánh xạ, hơn nữa dễ thấy f là một song ánh, do đó ta có điều cần chứng minh. $\square$

Bài 59. Với mỗi n , xét tập hợp $S_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Tìm số tập hợp con khác rỗng của S_n không chứa 2 số nguyên liên tiếp tùy theo n .

Lời giải.

Trước hết, ta bắt đầu với những trường hợp nhỏ

- ✓ Với $n = 1$, ta được 1 tập hợp thỏa mãn là $\{1\}$.
- ✓ Với $n = 2$, ta được 2 tập hợp thỏa mãn là $\{1\}; \{2\}$.
- ✓ Với $n = 3$, ta được 4 tập thỏa mãn là $\{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1, 3\}$.
- ✓ Với $n = 4$, ta được 7 tập thỏa mãn là $\{1\}; \{2\}; \{3\}; \{4\}; \{1, 3\}; \{1, 4\}; \{2, 4\}$.
- ✓ Với $n = 5$, ta được 12 tập thỏa mãn là

$$\{1\}; \{2\}; \{3\}; \{4\}; \{5\}; \{1, 3\}; \{1, 4\}; \{1, 5\}; \{2, 4\}; \{2, 5\}; \{3, 5\}; \{1, 3, 5\}.$$

Bây giờ, quan sát sự thay đổi các tập thu được khi n tăng dần, ta có thể thấy khi n tăng lên 1 đơn vị, ngoài các tập thu được ứng với giá trị n trước đó, thì còn các tập mới được tạo ra bằng cách thêm chính số n vào, tuy nhiên chỉ được phép thêm vào những tập không chứa số $n - 1$. Chẳng hạn với $n = 4$, các tập là $\{1\}; \{2\}; \{3\}; \{4\}; \{1, 3\}; \{1, 4\}; \{2, 4\}$. Thì với $n = 5$, vẫn có các tập đó, nhưng thêm vào các tập

- ✓ $\{5\}$, tạo từ tập $\emptyset$ bằng cách thêm số 5.
- ✓ $\{1, 5\}; \{2, 5\}; \{3, 5\}$, tạo từ các tập $\{1\}; \{2\}; \{3\}$ bằng cách thêm vào số 5.
- ✓ $\{1, 3, 5\}$, tạo từ tập $\{1, 3\}$ bằng cách thêm vào số 5.

Những tập chứa số 4 không tạo được tập nào thỏa mãn. Như vậy, tổng quát hóa suy nghĩ này, ta thu được lời giải nhờ truy hồi (từ trường hợp trước tạo ra trường hợp sau) như sau. Gọi a_n là số tập con tập S_n thỏa mãn đề bài, ta có $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 7, a_5 = 12$. Xét với tập S_{n+1} , một tập con thỏa mãn thuộc một trong hai loại

- ✓ **Loại 1.** Không chứa $n + 1$, có a_n tập loại này.

☑ **Loại 2.** Chứa $n + 1$, các tập loại này được tạo ra nhờ thêm vào $n + 1$ từ các tập con của S_n thỏa mãn đề bài, nhưng các tập con này không chứa n , đó chính là các tập con của S_{n-1} thỏa mãn đề bài. Ngoài ra có thêm tập $\{n + 1\}$. Vậy có $a_{n-1} + 1$ tập loại này.

Từ đó ta được
$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} + 1 \quad \text{khi } n \geq 2 \end{cases}$$

Giải phương trình sai phân thu được ở trên, ta được:

$$a_n = \frac{\sqrt{5} - 3}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{\sqrt{5} + 3}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - 1.$$

Với kiểu lập luận tương tự trên, ta có thể có lời giải cho bài toán sau □

Bài 60. Xét một hoán vị $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ của tập $S_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Vị trí $i, 1 \leq i \leq n$ được gọi là vị trí cực đại nếu $x_i > x_{i-1}, x_i > x_{i+1}$ (vị trí 1 và n không phải là vị trí cực đại). Gọi $p(n, k)$ là số hoán vị có đúng k vị trí cực đại. Chứng minh rằng

$$p(n + 1, k + 1) = (2k + 4) \cdot p(n, k + 1) + (n - 2k + 1) \cdot p(n, k).$$

Lời giải.

Nhận xét. Nếu i là vị trí cực đại của $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ thì $i - 1, i + 1$ không phải là vị trí cực đại. Gọi $p(n, k)$ là số hoán vị của S_k có đúng k vị trí cực đại. Xét $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là một hoán vị của S_n , có k vị trí cực đại $i_1 < i_2 < \dots < i_k$. Đưa $x_1, x_2, \dots, x_n$ vào các ô như sau (x_i luôn đứng giữa hai ô trống, có $n + 1$ ô trống)

	x_1		x_2		$\dots$		x_{i_1-1}		x_{i_1}		x_{i_1+1}		$\dots$		x_{n-1}		x_n	
--	-------	--	-------	--	---------	--	-------------	--	-----------	--	-------------	--	---------	--	-----------	--	-------	--

Khi đưa $n + 1$ vào hoán vị $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ để thành một hoán vị của S_{n+1} , ta đặt $n + 1$ vào một trong $n + 1$ ô trống. Ta có các trường hợp sau

Trường hợp 1. Nếu $n + 1$ được đặt vào ô trống đầu tiên hoặc cuối cùng thì số vị trí cực đại của hoán vị mới không đổi (không ảnh hưởng đến vị trí cực đại).

Trường hợp 2. Nếu $n + 1$ được đặt vào 1 trong $2k$ ô trống cạnh $i_1, i_2, \dots, i_k$ thì tạo ra một hoán vị có đúng k vị trí cực đại (thêm một vị trí cực đại là vị trí của $n + 1$ nhưng bớt đi một vị trí cực đại i_k nếu $n + 1$ đứng cạnh i_k , nghĩa là số vị trí cực đại không đổi).

Trường hợp 3. Nếu $n + 1$ được đặt tại các ô trống còn lại (có $n - 2k - 1$ ô) thì đều làm tăng thêm một vị trí cực đại, là vị trí của $n + 1$.

Vậy mỗi hoán vị của S_n có k vị trí cực đại sẽ tạo ra $2k + 2$ hoán vị của S_{n+1} có k vị trí cực đại và $n - 2k - 1$ hoán vị của S_{n+1} có $k + 1$ vị trí cực đại bằng cách thêm $n + 1$ vào giữa. $n!$ hoán vị của S_n mỗi hoán vị tạo ra $n + 1$ hoán vị của S_{n+1} bằng cách thêm $n + 1$ vào giữa, 2 hoán vị của S_n không tạo ra cùng một hoán vị của S_{n+1} , $n!$ hoán vị này được chia làm 3 loại

Loại 1. Có k vị trí cực đại: $p(n, k)$ hoán vị.

Loại 2. Có $k + 1$ vị trí cực đại: $p(n, k + 1)$ hoán vị.

Loại 3. Có không quá $k - 1$ vị trí cực đại.

Mỗi hoán vị loại 1 cho $n - 2k - 1$ hoán vị của S_{n+1} có $k + 1$ vị trí cực đại. Mỗi hoán vị loại 2 cho $2(k + 1) + 2 = 2k + 4$ hoán vị của S_{n+1} có $k + 1$ vị trí cực đại. Mỗi hoán vị loại 3 không cho hoán vị nào của S_{n+1} có $k + 1$ vị trí cực đại. Vậy $p(n + 1, k + 1) = (2k + 4) \cdot p(n, k + 1) + (n - 2k + 1) \cdot p(n, k)$. Với $k = 0$ thì $p(n + 1, 1) = 4p(n, 1) + (n + 1)p(n, 0)$. □

Bài 61 (German MO 1996). Cho một viên đá đang ở vị trí $(1; 1)$ trên trục tọa độ *Descartes* và nó được dịch chuyển theo các nguyên tắc sau

- a) Khi ở vị trí $(a; b)$ nó có thể dịch chuyển tới vị trí $(2a; b)$ hoặc $(a; 2b)$.
- b) Khi ở vị trí $(a; b)$ nó có thể dịch chuyển tới vị trí $(a - b; b)$ nếu $a > b$ hoặc dịch chuyển tới vị trí $(a; b - a)$ nếu $b > a$.

Với cặp số nguyên $(x; y)$ nào thì hòn đá có thể dịch chuyển tới?

Lời giải.

Kí hiệu $\gcd(x; y)$ là ước chung lớn nhất của x và y . Ta có nhận xét

- ✓ Nếu sử dụng nguyên tắc (a) thì ước chung lớn nhất của hai số mới hoặc bằng hoặc là gấp đôi ước chung lớn nhất của hai số cũ.
- ✓ Nếu sử dụng quy tắc (b) thì ước chung lớn nhất của hai số mới vẫn bằng ước chung lớn nhất của hai số cũ.

Giả sử rằng vị trí $(x; y)$ là có thể tới được khi bắt đầu từ vị trí $(a; b)$ thì do nhận xét trên thì phải tồn tại số tự nhiên n nào đó để $\gcd(x; y) = 2^n \cdot \gcd(a; b)$. Với bài toán này thì có $a = b = 1$ nên $\gcd(x; y) = 2^n$. Bây giờ ta chứng minh rằng, với mọi cặp số $(x; y)$ có $\gcd(x; y) = 2^n$ thì viên đá có thể dịch chuyển tới sau hữu hạn bước. Thật vậy, trong tập hợp các vị trí ban đầu có thể tới vị trí $(x; y)$, xét vị trí $(a; b)$ có $a + b$ nhỏ nhất.

- ✓ Nếu a hoặc b chẵn thì trước đó bắt đầu từ vị trí $\left(\frac{a}{2}; b\right)$ hoặc $\left(a; \frac{b}{2}\right)$ cũng thỏa mãn và có tổng nhỏ hơn $a + b$, điều này trái với giả sử $a + b$ nhỏ nhất. Do đó, a và b cùng là số lẻ.
- ✓ Nếu $a > b$ hoặc $a < b$ thì trước đó ta bắt đầu từ vị trí $\left(\frac{a+b}{2}; b\right)$ hoặc $\left(a; \frac{a+b}{2}\right)$ (dùng nguyên tắc (a) rồi dùng nguyên tắc (b) cũng thỏa mãn và có tổng nhỏ hơn $a + b$, điều này trái với giả sử $a + b$ nhỏ nhất. Do đó, ta có $a = b$. Theo nhận xét đầu tiên thì ta có $\exists m \in \mathbb{N} : 2^m = \gcd(x; y) = 2^m \cdot \gcd(a; b)$ nhưng do a, b lẻ và $a = b$ nên $a = b = \gcd(a; b) = 1$. Điều đó, chứng tỏ rằng ta có thể bắt đầu từ vị trí $(1; 1)$ đến vị trí $(x; y)$.

Như vậy, kết luận của bài toán là $\gcd(x; y) = 2^n$. □

Bài 62. Vé xe buýt có dạng $\overline{abcdef}$ với $a, b, c, d, e, f \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Một vé như trên thỏa mãn điều kiện $a + b + c = d + e + f$ được gọi là “vé hạnh phúc”.

- ① Chứng minh rằng số nghiệm của phương trình $a + b + c = d + e + f$ bằng số nghiệm của phương trình $a + b + c + d + e + f = 27$ với $0 \leq a, b, c, d, e, f \leq 9$.
- ② Tính số vé hạnh phúc.

Lời giải.

- ① Gọi A, B lần lượt là số nghiệm của phương trình $a + b + c = d + e + f$ và phương trình $a + b + c + d + e + f = 27$. Ta thấy rằng

$$a + b + c + d + e + f = 27 \Leftrightarrow a + b + c = (9 - d) + (9 - e) + (9 - f).$$

Nếu đặt $d' = 9 - d, e' = 9 - e, f' = 9 - f$ thì ta được $a + b + c = d' + e' + f'$. Do đó, một bộ nghiệm của phương trình $a + b + c + d + e + f = 27$ sinh ra một bộ nghiệm của phương trình $a + b + c = d + e + f$ nên $|A| \leq |B|$. Chứng minh tương tự, ta có $|B| \leq |A|$ nên $|A| = |B|$.

② Đếm số nghiệm của phương trình

$$a + b + c + d + e + f = 27, \quad (2.4)$$

với $0 \leq a, b, c, d, e, f \leq 9$. Gọi $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ lần lượt là tập hợp nghiệm của phương trình (2.4) nhưng có các điều kiện $a \geq 10, b \geq 10, c \geq 10, d \geq 10, e \geq 10, f \geq 10$.

Số nghiệm của (2.4) là $\binom{27+6-1}{6-1} = \binom{32}{5}$ nên ta cần tính $\binom{32}{5} - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_6|$.

Xét A_1 : Đặt $a' = a - 10 \geq 0$ thì ta có $a' + b + c + d + e + f = 17$ dễ thấy $|A_1| = \frac{22}{5}$. Tương tự,

ta cũng có $|A_2| = |A_3| = |A_4| = |A_5| = |A_6| = \binom{22}{5}$.

Xét $A_1 \cap A_2$: Đặt $a' = a - 10 \geq 0, b' = b - 10 \geq 0$ thì ta có $a' + b' + c + d + e + f = 7$ và dễ thấy $|A_1 \cap A_2| = \binom{12}{5}$. Ngoài ra, ta thấy rằng $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 0$ với mọi $1 \leq i < j < k \leq 6$ nên

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_6| = \sum_{i=1}^6 |A_i| - \binom{6}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq 6} |A_i \cap A_j| = 6 \cdot \binom{22}{5} - 15 \cdot \binom{12}{5}.$$

Vậy số các số may mắn là $\binom{32}{5} - \left[6 \cdot \binom{22}{5} - 15 \cdot \binom{12}{5} \right] = 55252$.

Bài toán được giải quyết. □

Bài 63. Có một dãy gồm 100 quyển vở giống nhau đặt trên bàn và Đạt được cô giáo thưởng 5 quyển vở trong số đó. Đạt rất ghét số 5 nên bạn ấy muốn chọn các quyển vở sao cho không có hai quyển liên tiếp được chọn nào có thứ tự chênh lệch nhau một lượng chia hết cho 5. Biết rằng Đạt đã chọn ra hai quyển vở ở hai đầu của dãy. Hỏi Đạt có tổng cộng bao nhiêu cách chọn ra thêm 3 quyển nữa theo ràng buộc trên? Ví dụ một cách chọn vở của Đạt thỏa mãn là 1, 10, 19, 28, 100 với chênh lệch là 9, 9, 9, 72.

Lời giải.

Gọi x, y, z, t là số quyển vở nằm giữa các quyển có thứ tự 1-2, 2-3, 3-4, 4-5. Ta có $x+y+z+t = 95$ và $x+1, y+1, z+1, t+1$ không chia hết cho 5. Đặt a, b, c, d lần lượt là số dư của x, y, z, t khi chia cho 5 thì $a, b, c, d \in \{0; 1; 2; 3\}$ và $a+b+c+d$ chia hết cho 5. Viết $x = 5X + a, y = 5Y + b, z = 5Z + c, t = 5T + d$ thì $X + Y + Z + T = 19 - \frac{a+b+c+d}{5}$, với $X, Y, Z, T \geq 0$. Đến đây, ta có các trường hợp sau (giả sử $a \geq b \geq c \geq d$ cho gọn rồi nhân với hoán vị lặp)

① Nếu $a+b+c+d = 0$ thì có tất cả 1 bộ.

② Nếu $a+b+c+d = 5$ thì có 40 bộ.

③ Nếu $a+b+c+d = 10$ thì có 10 bộ.

Vậy đáp số của bài toán là $\binom{22}{3} + 40 \binom{21}{3} + 10 \binom{20}{3} = 66140$ cách chọn. □

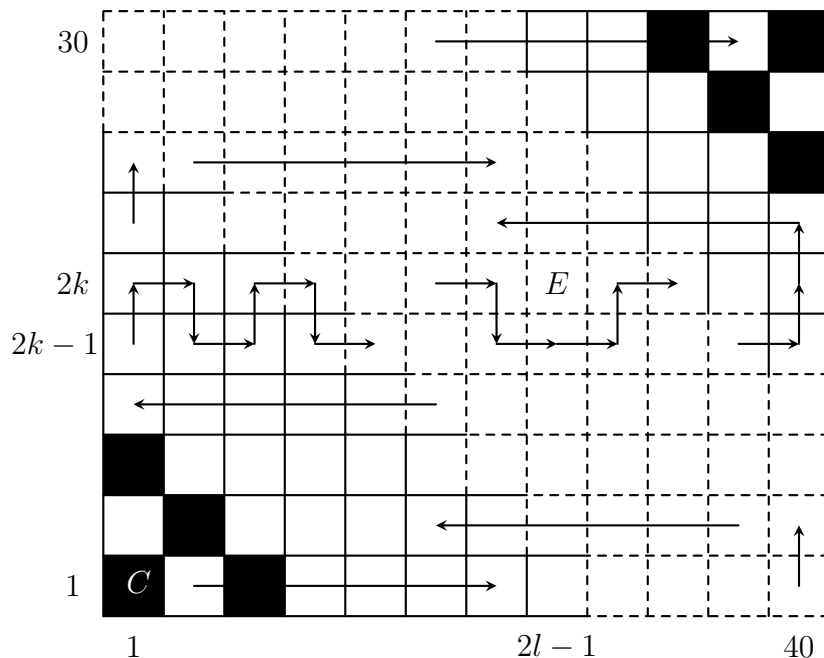
Bài 64. Trên một khoảng sân hình chữ nhật được lát bởi các viên gạch hình vuông, hàng ngang có 40 viên gạch, hàng dọc có 30 viên gạch. Các hàng ngang được đánh số từ 1 đến 30, các hàng dọc được đánh số từ 1 đến 40. Trên viên gạch $(i; j)$ ở hàng thứ i cột thứ j có một con ếch. Một con cào cào dự định thực hiện một chuyến thám hiểm: Xuất phát từ viên gạch $(1; 1)$ để nhảy đến viên $(30; 40)$, mỗi bước nhảy từ một viên gạch sang viên khác có chung cạnh, mỗi

viên gạch chỉ nhảy qua một lần và không qua viên gạch có con ếch.

- ① Chứng minh rằng khi con ếch ở viên gạch $(19; 19)$ thì con cào cào không thể thực hiện được chuyển thám hiểm.
- ② Tìm vị trí của viên gạch có con ếch để con cào cào có thể thực hiện được chuyển thám hiểm.

Lời giải.

- ① Ta tô màu các ô vuông của hình chữ nhật tương tự bàn cờ vua, ô $(1; 1)$ màu đen và các ô $(i; j)$ với $i + j$ chẵn màu đen, còn lại màu trắng. Do bảng 30×40 nên số ô đen bằng số ô trắng. Ban đầu, con cào cào ở ô đen và kết thúc cũng ở một ô đen. Mỗi bước nhảy luân phiên từ ô đen sang ô trắng và từ ô trắng sang ô đen. Vì vậy số ô đen con cào cào đi qua nhiều hơn 1 so với số ô trắng. Để con cào cào đi qua mỗi ô một lần trừ ô có con ếch thì con ếch phải ở ô trắng. Do ô $(19; 19)$ có $19 + 19 = 38$ chẵn nên là ô đen, vì vậy con cào cào không thể thực hiện được chuyển thám hiểm, điều phải chứng minh.



- ② Ta chứng minh nếu con ếch ở ô $(i; j)$ mà $i + j$ lẻ thì con cào cào sẽ thực hiện được chuyển thám hiểm. Không mất tính tổng quát ta xét con ếch ở ô $(2k; 2l - 1)$, $1 \leq k \leq 15$, $1 \leq l \leq 20$. Cào cào đi đích dắc từ ô $(1; 1)$ đến ô $(2k - 1; 1)$ theo hàng ngang (chiều mũi tên). Trên 2 hàng $2k - 1$ và $2k$, cào cào đi đích dắc (chiều mũi tên), vòng qua ô $(2k; 2l - 1)$ có con ếch để đến ô $(2k; 40)$. Từ ô $(2k + 1; 40)$ đến ô $(30; 40)$ cào cào đi đích dắc theo hàng ngang và hoàn thành chuyển thám hiểm.

Vậy con cào cào sẽ thực hiện được chuyển thám hiểm khi và chỉ khi con ếch ở viên gạch $(i; j)$ với $i + j$ là số lẻ. □

Bài 65. Dãy $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ được gọi là một “cấp số cộng hai phía” nếu với mọi số nguyên n thì $a_{n+1} - a_n = d$ là hằng số (d được gọi là công sai của dãy). Kí hiệu M là tập tất cả các cấp số cộng hai phía với các số hạng nguyên và công sai lớn hơn 1.

- ① Chứng minh rằng tồn tại 5 cấp số cộng thuộc M có công sai đôi một khác nhau sao cho

mỗi số nguyên bất kì đều là phần tử của một trong các cấp số cộng đó.

- ② Cho m ($m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$) cấp số cộng thuộc M sao cho các công sai của chúng đôi một nguyên tố cùng nhau. Chứng minh tồn tại một số nguyên không phải là phần tử của bất kì cấp số cộng nào trong m cấp số cộng đó.

Lời giải.

- ① Xét các cấp số cộng $A_1 = \{2k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, $A_2 = \{3k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ và $A_3 = \{6k+1\}_{k \in \mathbb{Z}}$, các số nguyên còn lại có dạng $6k+5$ được phân hoạch theo k chẵn và k lẻ nằm trong các cấp số cộng $A_4 = \{4k+1\}_{k \in \mathbb{Z}}$ và $A_5 = \{12k+11\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Hơn nữa $\mathbb{Z} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$ và các cấp số cộng A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 có công sai lần lượt là 2, 3, 6, 4, 12.
- ② Giả sử tồn tại m ($m \in \mathbb{N}^*$, $m \geq 2$) cấp số cộng $A_j = \{d_j k + a_j\}_{k \in \mathbb{Z}}$ thuộc M ($j = 1, 2, \dots, m$) trong đó $d_1, d_2, \dots, d_m > 1$ là các số đôi một nguyên tố cùng nhau và $\mathbb{Z} = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$. Cố định $j = 1, 2, \dots, m$ ta thấy rằng $x \in A_j$ khi và chỉ khi $x \equiv a_j \pmod{d_j}$. Xét hệ $x \equiv 1 + a_j \pmod{d_j}$, $j = 1, \dots, m$. Theo định lí phần dư Trung Hoa, hệ này có nghiệm nguyên x mà $x \notin A_j$ với mọi $j = 1, 2, \dots, m$. Vậy ta có điều cần chứng minh.

Bài toán được giải quyết. □

Bài 66. Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn 10^6 mà tổng các chữ số bằng 23?

Lời giải.

Số cần tìm có dạng $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6}$ với

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 23, \quad (2.5)$$

và $0 \leq a_i \leq 9, i = \overline{1, 6}$. Gọi $|A_i|, i = \overline{1, 6}$ là tập hợp các nghiệm không âm của (2.5) nhưng $a_i \geq 10$. Trước hết, ta thấy số nghiệm của (2.5) là $\binom{23+6-1}{6-1} = \binom{28}{5}$. Ta sẽ tính $\left| \bigcup_{i=1}^6 A_i \right|$ với chú ý rằng $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 0$ với $1 \leq i < j < k \leq 6$ vì tổng các số là 23.

- ✓ Tính $|A_1|$. Đặt $a'_1 = a_1 - 10 \geq 0$ thì $a'_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 13$. Phương trình này có số nghiệm là $\binom{13+6-1}{6-1} = \binom{18}{5}$. Tương tự với $|A_i|, i = \overline{2, 6}$.
- ✓ Tính $|A_1 \cap A_2|$. Đặt $a'_1 = a_1 - 10 \geq 0, a'_2 = a_2 - 10 \geq 0$ thì $a'_1 + a'_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 3$. Phương trình này có số nghiệm là $\binom{3+6-1}{6-1} = \binom{8}{5}$. Tương tự với $|A_i \cap A_j|$ mà $1 \leq i < j \leq 6$ khác.

Do đó

$$\left| \bigcup_{i=1}^6 A_i \right| = \sum_{i=1}^6 |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq 6} |A_i \cap A_j| = 6 \cdot \binom{18}{5} - \binom{6}{2} \binom{8}{5}.$$

Vậy số lượng các số cần tìm là

$$\binom{28}{5} - \binom{6}{2} \cdot \binom{8}{5} - \left(6 \cdot \binom{18}{5} - \binom{6}{2} \binom{8}{5} \right) = 47712.$$

Bài toán được giải quyết. □

Bài 67. Có hai dãy ghế được xếp đối diện nhau, mỗi dãy có 10 ghế, mỗi ghế trong một dãy đối diện với một ghế của dãy còn lại. Có 19 học sinh tham gia một trò chơi. Ban đầu mỗi học sinh ngồi một ghế và còn một ghế để trống. Cứ sau 10 giây, một học sinh nào đó ngồi ở dãy không có ghế trống chuyển sang ngồi ghế trống của dãy đối diện. Hỏi có tồn tại hay không một thời điểm mà toàn bộ các học sinh đều được chuyển dãy và các cặp học sinh đối diện nhau không thay đổi so với ban đầu?

Lời giải.

Giả sử có một người vô hình ngồi ghế trống. Như vậy mỗi lần một học sinh đổi chỗ với người vô hình. Đánh số cho 19 học sinh là $1, 2, \dots, 19$ và người vô hình là 20 sao cho ban đầu các học sinh $1, 2, \dots, 10$ thuộc một dãy và các học sinh $11, 12, \dots, 20$ thuộc dãy còn lại và học sinh i đối diện học sinh $i + 10$ với mọi $1 \leq i \leq 10$.

Với mỗi hoán vị σ của $(1, 2, \dots, 20)$ thì cặp (i, j) được gọi là một nghịch thế của σ nếu $\sigma(i) > \sigma(j)$ và $i < j$. Sự sắp xếp các học sinh ban đầu cho ta hoán vị $\sigma = (1, 2, \dots, 10, 11, 12, \dots, 20)$, số nghịch thế của hoán vị này là 0. Mỗi bước, học sinh 20 đổi chỗ với một học sinh của dãy đối diện và ta lại thu được một hoán vị mới. Giả sử tồn tại một thời điểm mà yêu cầu của bài toán được thỏa mãn, khi đó học sinh 20 chuyển sang dãy đối diện nên tổng số bước phải là lẻ. Ta biết rằng mỗi bước, số nghịch thế của hoán vị thay đổi tính chẵn lẻ nên tại thời điểm đó số nghịch thế của hoán vị thu được phải là số lẻ. Mặt khác, hoán vị thu được $\sigma' = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{20})$, trong đó $(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{20})$ là hoán vị của $(1, 2, \dots, 10)$ và $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{10})$ là hoán vị của $(11, 12, \dots, 20)$; cặp học sinh α_i, α_{i+10} là một cặp ngồi đối diện lúc ban đầu với mọi $1 \leq i \leq 10$. Dễ thấy từ σ có thể thu được σ' thông qua một số chẵn lần đổi chỗ hai học sinh như sau: i đổi chỗ cho $i + 10$ với $1 \leq i \leq 10$ và thêm vào đó số lần đổi chỗ từ $(1, 2, \dots, 10)$ thành $(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{20})$ bằng số lần đổi chỗ từ $(11, 12, \dots, 20)$ thành $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{10})$. Theo đó số nghịch thế của σ' phải là số chẵn, mâu thuẫn. Vậy không tồn tại thời điểm mà toàn bộ các học sinh đều được chuyển dãy và các cặp học sinh đối diện nhau không thay đổi so với ban đầu. $\square$

Bài 68. Cho n là số nguyên dương. Người ta muốn tạo một bộ sưu tập các tấm thẻ mà trên mỗi tấm thẻ có ghi đúng một số dạng $m!$ với m là số nguyên dương nào đó, sao cho với mọi số nguyên dương $k \leq n!$, luôn chọn được một số tấm thẻ trong bộ sưu tập mà tổng tất cả các số chỉ trên các tấm thẻ được chọn này có giá trị là k . Tìm giá trị nhỏ nhất của số lượng các tấm thẻ trong mỗi bộ sưu tập thỏa mãn yêu cầu.

Lời giải.

Xét một bộ sưu tập gồm $\frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$ tấm thẻ, bao gồm i tấm thẻ mang số $i!$ và một tấm thẻ mang số $n!$. Ta chứng minh bộ sưu tập này thỏa mãn yêu cầu. Thật vậy, $k = n! = 1.n!$. Với $1 \leq k < n!$, ta chứng minh bằng quy nạp. Với $k = 1; 2$ hiển nhiên. Vì $1 \leq k < n!$ nên chọn $t \leq n - 1$ lớn nhất sao cho $t! \leq k < (t + 1)!$, khi đó $k = qt! + h$ với $0 \leq h < t!, 1 \leq q \leq t$ áp dụng giả thiết quy nạp đối với h ta có bộ sưu tập trên thỏa mãn. Xét một bộ sưu tập có ít thẻ nhất và thỏa mãn với các số $1 \leq k \leq n! - 1$, gọi c_i là số thẻ mang số $i!, i = 1, 2, \dots, n - 1$. Nếu $c_i \geq i + 1$, ta thay c_i thẻ này thành thẻ $(i + 1)!$ và $c_i - i$ thẻ $i!$. Khi đó bộ sưu tập mới vẫn thỏa mãn yêu cầu, mâu thuẫn với tính nhỏ nhất nên $c_i \leq i$. Hơn nữa

$$n! - 1 = \sum d_i i! \leq \sum c_i i! \leq \sum i(i!) = n! - 1$$

nên $c_i = i$. Tức là toàn bộ sưu tập này có $\frac{1}{2}n(n - 1)$ thẻ. Giả sử có bộ sưu tập gồm $\frac{1}{2}n(n - 1)$ thẻ thỏa mãn với các $1 \leq k < n!$ thì nó phải chứa i thẻ mang số $i!, i = 1, 2, \dots, n - 1$ khi đó $k = n!$ không thể là tổng của các số trên thẻ trong bộ sưu tập này. Vậy đáp số là $\frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$. $\square$

Bài 69. Trong các tập hợp con của tập hợp gồm 2016 số nguyên dương đầu tiên $\{1, 2, 3, \dots, 2016\}$ có tính chất: hiệu hai phần tử bất kỳ của tập hợp con luôn khác 4 và 7, hãy tìm giá trị lớn nhất của số lượng các phần tử của mỗi tập hợp con này.

Lời giải.

Xét $T = \{1, 2, \dots, 11\}$, gọi S là một tập con của T có tính chất như yêu cầu. Xét các cặp không đồng thời thuộc S là $\{1, 5\}, \{2, 9\}, \{3, 7\}, \{4, 11\}, \{6, 10\}$. Nên S có không quá 6 phần tử. Nếu S có 6 phần tử thì $8 \in S$ và mỗi cặp có đúng một phần tử thuộc S . Khi đó $1, 4 \notin S$ nên $11, 5 \in S$ và $7, 9 \notin S$ nên $3, 2 \in S$ suy ra $10, 6 \notin S$ vô lý. Nên một tập con có số phần tử lớn nhất của T là $T' = \{1, 3, 4, 6, 9\}$. Khi đó $T^* = \{a + 1, a + 3, a + 4, a + 6, a + 9\}$ có tính chất như T' . Để bổ sung thêm T^* vào T' mà thỏa mãn yêu cầu bài toán, ta xét tính chất của một phần tử a . Hiệu các phần tử của T' là

$$\textcircled{1} \pm 1 \Rightarrow a \neq 3, a \neq 5, a \neq 6, a \neq 8.$$

$$\textcircled{2} \pm 2 \Rightarrow a \neq 2, a \neq 9.$$

$$\textcircled{3} \pm 3 \Rightarrow a \neq 4, a \neq 7, a \neq 10.$$

$$\textcircled{4} \pm 5 \Rightarrow a \neq 1.$$

$$\textcircled{5} \pm 6.$$

$$\textcircled{6} \pm 8.$$

Nếu $a = 11$ thì $11 - 6, 11 - 5, 11 - 8 \notin \{4, 7\}$ nên ta có thể bổ sung $T'_1 = \{11 + 1, 11 + 3, 11 + 4, 11 + 6, 11 + 9\}$. Tiếp tục quá trình trên ta thu được tập S^* có số phần tử lớn nhất bằng

$$S^* = \{k + 11a | k \in T', a = 0, 1, 2, \dots, 183\}$$

vì $2016 = 183 \cdot 11 + 3$. Số phần tử của S^* bằng $183 \cdot 5 = 927$. □

Bài 70. Trên một giá sách có n cuốn sách được đánh số từ 1 đến n ($n \in \mathbb{N}^+$ cho trước), ban đầu các cuốn sách được sắp xếp theo một thứ tự nào đó. Một thủ thư muốn xếp lại theo đúng thứ tự $1, 2, \dots, n$ từ trái sang phải, quy tắc xếp như sau: Chọn quyển sách đầu tiên số số không đúng vị trí (tính từ bên phải sang) và chuyển cuốn sách về đúng vị trí của nó, ví dụ trên giá có 4 cuốn sách theo thứ tự 3, 1, 4, 2, sau một bước chuyển quyển số 2 về đúng vị trí ta xếp lại thành 3, 2, 1, 4. Chứng minh rằng người thủ thư đó có thể hoàn thành công việc của mình sau ít hơn 2^n lần sắp xếp theo quy tắc.

Lời giải.

Nhận xét. Cuốn mang số n không bao giờ được chọn, cuốn mang số 1 được chọn nhiều nhất 1 lần, cuốn mang số 2 được chọn nhiều nhất 2 lần (sau lần 1 được xếp đúng vị trí, khi cuốn mang số 1 đúng vị trí thì cuốn số 2 bị đẩy khỏi vị trí, và đến khi nó đẩy đến cuối thì nó được chọn thêm lần nữa). Kí hiệu $f(k)$ là số lần chuyển sách tính đến lần cuối cùng để xếp đúng vị trí của cuốn sách mang số k (tính đến khi không bị dịch chuyển thêm lần nào nữa). Vì mỗi lần cuốn sách số $1, 2, \dots, k - 1$ được chuyển về đúng vị trí thì cuốn số k lại bị đẩy khỏi vị trí nên ta có

$$f(k) \leq 1 + f(k - 1) + \dots + f(1)$$

Mà $f(1) = 1 = 2^0$ nên bằng quy nạp ta dễ dàng có $f(k) \leq 2^{k-1}$ hay $f(n) \leq 2^{n-1} < 2^n$. □

Bài 71. Một số nguyên dương $n \geq 2$ được gọi là “tốt” nếu với mọi số nguyên dương k thỏa mãn $2 \leq k \leq n$, n có thể biểu diễn dưới dạng $n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ sao cho $a_i \in \mathbb{N}^+$ và $\gcd(a_i, n) = 1$ với mọi $i = 1, 2, \dots, k$. Tính tổng các số nguyên dương tốt nhỏ hơn 2016.

Lời giải.

Rõ ràng $n = 2$ là số tốt. Xét $n > 2$, nếu n chẵn, chọn $k = 3$ thì trong mọi cách biểu diễn n thành tổng 3 số nguyên dương luôn tồn tại một số chẵn, số này không nguyên tố cùng nhau với n nên không thỏa mãn. Do đó n lẻ. Ngược lại với n lẻ lớn hơn 2, ta chứng minh n là tốt. Thật vậy, biểu diễn n dưới dạng tổng các lũy thừa phân biệt của 2 ta có $n = 2^{\alpha_1} + 2^{\alpha_2} + \dots + 2^{\alpha_j}$, $j < \log_2 n + 1$. Khi đó $j \leq k \leq n$, thì n có thể viết dưới dạng $n = 2^{\alpha_1} + 2^{\alpha_2} + \dots + 2^{\alpha_k}$ với $\alpha_i \in \mathbb{N}$, và điều đó suy ra n là tổng của k số nguyên dương nguyên tố cùng nhau với n . Thật vậy, nếu $k < n$ thì tồn tại một số α_i nguyên dương, giả sử α_1 . Khi đó $n = 2^{\alpha_1-1} + 2^{\alpha_1-1} + 2^{\alpha_2} + \dots + 2^{\alpha_k}$ là tổng của $k + 1$ lũy thừa của 2.

Với $k = 2$. Chọn 2^α là lũy thừa 2 lớn nhất mà $2^\alpha < n$, khi đó $n = 2^\alpha + (n - 2^\alpha)$ là tổng 2 số nguyên tố cùng nhau với n . Tiếp tục cách tách như ở trên, 2^α là tổng của k lũy thừa của 2 với $1 < k < 2^\alpha$. Chú ý là $2^\alpha > \frac{n}{2}$ nên $2 \leq k < \frac{n}{2} + 1$ và do $\frac{n}{2} + 1 > \log_2 n$ với $n \geq 3$ nên khẳng định đúng với mọi $2 \leq k \leq n$ khi n lẻ, tức là n tốt. Vậy $S = 2 + 3 + 5 + \dots + 2015 = 1008^2 + 1 = 1.016.065$. Bài toán được giải quyết. $\square$

Bài 72. Cho $m, n \in \mathbb{Z}^+$ và một bảng có kích thước $m \times n$ gồm mn ô vuông đơn vị. Mỗi ô vuông có không quá một con bọ. Biết rằng với mỗi số nguyên dương k thuộc tập hợp $\{1, 2, 3, \dots, 78\}$, tồn tại một hàng hoặc một cột trong bảng có đúng k con bọ.

- Tìm giá trị nhỏ nhất có thể của $m + n$
- Tìm giá trị nhỏ nhất có thể của số con bọ trên bảng đã cho.

Lời giải.

a) Không mất tổng quát ta giả sử $m \leq n$. Vì có một hàng hoặc một cột chứa đúng 78 con bọ nên $n \geq 78$. Giả sử $m < \frac{n}{2}$, khi đó chỉ có các hàng có thể chứa đúng k con bọ với $k \geq \frac{n}{2}$. Do đó số hàng ít nhất là $\frac{n}{2}$, hay $m \geq \frac{n}{2}$, mâu thuẫn với điều giả sử. Vậy $m \geq \frac{n}{2}$, suy ra $m \geq 39$. Với một bảng 39×78 ta sắp xếp các con bọ vào các ô (i, j) sao cho $j \geq i$. Khi đó các cột k chứa đúng k con bọ ($k = \overline{1, 39}$) và các hàng $79 - k$ chứa đúng k con bọ ($k = \overline{40, 78}$). Cách xếp trên thỏa mãn điều kiện bài toán, do đó giá trị nhỏ nhất của $m + n$ là $39 + 78 = 117$.

b) Với mỗi trong 52 giá trị $k = \overline{27, 78}$ ta chọn một hàng hoặc một cột chứa đúng k con bọ. Giả sử ta chọn được p hàng và q cột, khi đó $p + q = 52$. Gọi T là tập con bọ trên p hàng và q cột đó. Giả sử t_2 là số con bọ thuộc T mà nằm trên một ô giao của p hàng và q cột, đồng thời t_1 là số con bọ còn lại thuộc T . Khi đó ta có $t_1 + 2t_2 = 27 + 28 + \dots + 78 = 2730$. Mặt khác, có t_2 con bọ nằm trong pq ô giao của p hàng và q cột nên $t_2 \leq pq \leq \frac{(p+q)^2}{4} = 676$. Vì thế số con bọ không ít hơn

$$|T| = t_1 + t_2 = 2730 - t_2 \geq 2730 - 676 = 2054$$

Ta chỉ ra một cách sắp xếp có đúng 2054 con bọ như sau: xếp $26 + k$ con bọ vào các ô đầu tiên của hàng k với $k = \overline{1, 26}$; xếp $52 + k$ con bọ vào các ô đầu tiên của k cột với $k = \overline{1, 26}$; các ô còn lại không chứa bọ. Khi đó, các cột $26 + k$ chứa đúng k con bọ với $k = \overline{1, 26}$. Khi đó các con bọ chỉ nằm ở 26 hàng đầu tiên và 26 cột đầu tiên, đồng thời có $26^2 = 676$ con bọ thuộc các ô giao của 26 hàng và 26 cột đó. Cách xếp bọ như vậy thỏa mãn điều kiện bài toán. Vậy giá trị nhỏ nhất của số bọ trên bảng là 2054.

Bài toán được giải quyết. $\square$

Bài 73. Tại một số ô của hình vuông 100×100 người ta đặt một quân cờ màu đỏ hoặc màu xanh; các ô còn lại bỏ trống. Một quân cờ nhìn thấy một quân cờ khác nếu chúng cùng hàng

hoặc cùng cột. Biết rằng mỗi một quân cờ nhìn thấy đúng 5 quân cờ khác màu (và có thể một số con cùng màu). Tìm số lớn nhất các quân cờ có ở các ô của hình vuông.

Lời giải.

Đáp số là 1800 quân cờ.

Ví dụ đặt được 1800 quân cờ được xây dựng như nhau. Ta lấy ra từ hình vuông 100×100 một cái hình bao chiều rộng 5. Hình bao này gồm 4 hình vuông 5×5 ở 4 góc và 4 hình chữ nhật 5×90 . Ta đặt các quân cờ vào 4 hình chữ nhật này. Hình bên trái và bên ta đặt các quân cờ đỏ, hình bên phải và bên dưới ta đặt các quân cờ xanh. Cách sắp này rõ ràng thoả điều kiện av2 có 90×10 quân đỏ 90×10 quân xanh, tổng cộng q là 1800 quân. Ta chứng minh rằng số quân cờ không thể quá 1800. Xét một cách đặt quân thoả mãn điều kiện đề bài. Ta gọi một dãy (hàng hay là cột) là khác nhau màu nếu dãy đó có đủ cả hai màu. Ta có hai nhận xét bổ ích sau. Thứ nhất là mỗi một quân cờ đều thấy một quân cờ nào đó, đó đó mỗi quân cờ thuộc ít nhất một dãy khác màu. Ngoài ra, vì dãy khác màu chứa quân cờ màu đỏ nên trong dãy này có không quá 5 quân cờ màu xanh. Tương tự trong dãy không có quá 5 quân cờ màu đỏ, tức là dãy khác màu chứa không quá 10 quân cờ. Giả sử trên bảng có a cột khác màu và $b \geq a$ dòng khác màu. Nếu như $b \leq 90$ thì tổng số quân cờ không vượt quá $10a + 10b \leq 1800$. Giả sử $b > 90$. Khi đó trong b dòng có tối đa mỗi dòng 10 quân cờ. Mặt khác, mỗi một quân cờ đều phải thuộc vào một dãy khác màu, từ c là chúng không thể nằm ở giao của $100 - a$ cột cùng màu và $100 - b$ dòng cùng màu. Vì thế trong $100 - b$ dòng cùng màu có không quá $a (\leq b)$ quân cờ và tổng số quân cờ không quá

$$10b + (100 - b)b = (110 - b)b \leq 1800$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng vì $110 - b + b = 20 + 90$ và $110 - b < 20 < 90 < b$. $\square$

Bài 74. An và Bảo cùng nhau chơi một trò chơi: họ lần lượt viết các số tùy thích lên bảng thành một dòng, mỗi người 3 số, An viết trước. Sau đó Bảo “nhường” An điền dấu + hoặc - tùy ý vào giữa các số đã viết. An thắng nếu kết quả trên bảng không chia hết cho bất cứ số tự nhiên nào từ 11 đến 18. Bảo thắng nếu xảy ra trường hợp ngược lại. An nói rằng mình kiểm soát nhiều hơn, nên chắc chắn chiến thắng. bạn có đồng ý không? Tại sao?

Lời giải.

Bảo mới là người có chiến thuật thắng. thật vậy, ở hai lượt đầu tiên Bảo điền số 11, 12, 13, ..., 18. Ta sẽ chứng minh Bảo có cách điền ở lượt cuối cùng để đảm bảo thắng. Gọi số Bảo cần điền ở lượt cuối là x . Sau lượt đi thứ ba của An, bỏ qua các số Bảo đã điền (do chúng chia hết cho 11, 12, 13, ..., 18. Ta có 8 kết quả có thể thu được (do có $2^3 = 8$ cách đặt dấu) là $a_1, a_2, \dots, a_8$ Do các số này cùng tính chẵn, lẻ nên chỉ có hai loại số dư khi chia 8 số này cho 4. Hơn thế có đúng 4 số đồng dư với nhau theo mod 4. Có 3 số đồng dư với nhau theo mod 3 theo nguyên lí Dirichlet, giả sử là $a_1 \equiv a_2 \equiv a_3 (\text{mod } 3)$. Không mất tính tổng quát giả sử $a_4 \equiv a_3 (\text{mod } 4)$ Đến đây ta chỉ cần chứng minh tồn tại x sao cho $a_1 + x, a_2 + x, \dots, a_8 + x$ chia hết cho ít nhất một trong các số 11, 12, 13, ..., 18. Khi đó bài toán được chứng minh do với mỗi i luôn tồn tại j sao cho $a_i - x = -(a_j + x)$.

Theo định lý thặng dư Trung Hoa, ta chọn được

$$a_1 + x:9; a_2 + x:5; a_4 + x:16; a_5 + x:11; a_6 + x:13; a_7 + x:17; a_8 + x:7$$

Khi đó $a_1 + x:18; a_2 + x:15; a_3 + x:12; a_4 + x:16; a_5 + x:11; a_6 + x:13; a_7 + x:16; a_8 + x:14$. $\square$

Bài 75. Tập hợp X có 2^n ($n \in \mathbb{N}^*$) phần tử được chia thành các tập con đôi một không giao nhau. Xét quy tắc chuyển phần tử giữa các tập như sau: nếu A, B là các tập con của X và số phần tử của A không nhỏ hơn số phần tử của B thì ta được phép chuyển từ tập A vào tập B số phần tử bằng số phần tử của tập B . Chứng minh rằng sau một số hữu hạn các bước chuyển

theo quy tắc trên, ta nhận được tập X .

Lời giải.

Cách 1.

Do tập X có số phần tử chẵn nên số tập con có số phần tử lẻ là chẵn. Giả sử có $2k$, ($k \in \mathbb{N}^*$) tập con có số phần tử lẻ, chia $2k$ tập trên thành k cặp, rồi thực hiện quy tắc chuyển như trên ta sẽ đưa về các tập con có số phần tử chẵn. Khi đó ta đưa về trường hợp các tập con đều có số phần tử chẵn. Nếu $n = 1$, bài toán được chứng minh.

Xét $n \geq 2$. Do $2^n \not\vdots 4$, suy ra số tập con có số phần tử chẵn nhưng không chia hết cho 4 phải chẵn. Giả sử có $2m$, ($m \in \mathbb{N}^*$) tập con có số phần tử chẵn nhưng không chia hết cho 4. Chia chúng thành m cặp rồi thực hiện phép chuyển phần tử theo quy tắc trên ta sẽ thu được các tập con có số phần tử chia hết cho 4. Thực hiện tương tự như trên, sau hữu hạn bước ta sẽ được tập con có số phần tử chia hết cho 2^n , khi đó ta nhận được tập X .

Cách 2. Gọi M là tập hợp các tập con ban đầu. Ta chia tập M thành hai tập

☑ Tập P gồm các tập con có số phần tử là chẵn.

☑ Tập Q gồm các tập con có số phần tử là lẻ.

Gọi số phần tử của tập Q là q . Dễ thấy q là số không lẻ. Ta thấy

☑ Nếu $q = 0$ ta có các tập của M đều có số phần tử là bội của 2.

☑ Nếu $q = 2k > 0$ ta chọn hai tập bất kì thuộc Q và thực hiện phép chuyển

- Nếu hai tập đó có số phần tử bằng nhau thì chúng hợp thành một tập có số phần tử là bội của 2.
- Nếu hai tập đó có số phần tử là $2m + 1$ và $2n + 1$ với ($m > n$) thì sau phép chuyển ta có hai tập hợp có số phần tử là $2(m - n)$ và $4n + 2$ đều là bội của 2.

Như vậy, sau k phép chuyển ($k \geq 0$), ta nhận được các tập hợp có số phần tử đều là bội của 2. Gọi M_1 là tập các tập con đó. Ta chia tập M_1 thành hai tập

☑ Tập P_1 gồm các tập con có số phần tử là bội của 2^2 .

☑ Tập Q_1 gồm các tập con có số phần tử là bội của 2^2 cộng thêm 2.

Gọi q_1 là số phần tử của tập Q_1 . Dễ thấy q_1 là số chẵn. Giả sử $q_1 = 2k_1$. Ta thực hiện phép chuyển

☑ Nếu hai tập đó có số phần tử bằng nhau thì chúng hợp thành một tập có số phần tử là bội của 2^2 .

☑ Nếu hai tập đó có số phần tử là $4m_1 + 2$ và $4n_1 + 2$ với ($m_1 > n_1$) thì sau phép chuyển ta được hai tập hợp có số phần tử là $4(m_1 - n_1)$ và $8n_1 + 4$ đều là bội của 2^2 .

Như vậy, sau k_1 phép chuyển ta nhận được các tập con có số phần tử đều là bội của 2^2 . Gọi M_2 là tập các tập con đó. Tiếp tục chia tập M_2 thành hai tập P_2 và Q_2 , và thực hiện tương tự như trên. Tiếp tục thực hiện tương tự như trên, sau hữu hạn bước ta nhận được các tập con có số phần tử đều là bội của 2^{n-1} . Dễ thấy rằng, khi đó có đúng hai tập hợp con có số phần tử là 2^{n-1} . Thực hiện phép chuyển cuối cùng, ta được tập hợp X . $\square$

Bài 76. Xét hai tập hợp con $A, B \subset \{1, 2, \dots, 2^{2018}\}$ thỏa mãn điều kiện $\forall a \in A, b \in B$, ta có $ab + 1$ là số chính phương. Chứng minh rằng $\min\{|A|, |B|\} \leq 2018$.

Lời giải.

Giả sử $A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_q\}$, $a_1 < a_2 < \dots < a_p$, $b_1 < b_2 < \dots < b_q$, $q \leq p$. Ta sẽ so sánh $a_p b_q$ với $a_{p-1} b_{q-1}$.

$$\begin{aligned} & \text{Từ } (a_p - a_{p-1})(b_q - b_{q-1}) > 0 \Rightarrow (1 + a_p b_q)(1 + a_{p-1} b_{q-1}) > (1 + a_{p-1} b_q)(1 + a_p b_{q-1}). \\ & \Rightarrow \sqrt{(1 + a_p b_q)(1 + a_{p-1} b_{q-1})} > \sqrt{(1 + a_{p-1} b_q)(1 + a_p b_{q-1})}. \\ & \Rightarrow \sqrt{(1 + a_p b_q)(1 + a_{p-1} b_{q-1})} \geq \sqrt{(1 + a_{p-1} b_q)(1 + a_p b_{q-1})} + 1. \\ & \Rightarrow (1 + a_p b_q)(1 + a_{p-1} b_{q-1}) \geq (1 + a_{p-1} b_q)(1 + a_p b_{q-1}) + 2\sqrt{(1 + a_{p-1} b_q)(1 + a_p b_{q-1})} + 1. \\ & \Rightarrow 1 + a_p b_q + a_{p-1} b_{q-1} \geq 1 + a_{p-1} b_{q-1} + a_{p-1} b_q + 2\sqrt{(1 + a_{p-1} b_q)(1 + a_p b_{q-1})} + 1. \\ & \Rightarrow 1 + a_p b_q + a_{p-1} b_{q-1} \geq 1 + a_{p-1} b_{q-1} + a_{p-1} b_q + 2\sqrt{(a_p b_{q-1})(a_{p-1} b_q)} + 1. \\ & \Rightarrow a_p b_q > 2\sqrt{(a_p b_{q-1})(a_{p-1} b_q)} \Rightarrow a_p b_q > 4a_{p-1} b_{q-1}. \end{aligned}$$

Từ bất đẳng thức này ta được

$$(2^{2018})^2 \geq a_p b_1 > 4a_{p-1} b_{q-1} > 4^2 a_{p-2} b_{q-2} > \dots > 4^{q-2} a_{p-q+2} b_2 \geq 4^q \Rightarrow q < 2018$$

Bài toán được giải quyết. □

Bài 77. Cho m là một số nguyên dương nhỏ hơn 2017, và tập $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ là tập hợp con của tập $\{1, 2, 3, \dots, 2017\}$. Giả sử với $1 \leq i \leq j \leq m$, nếu ta có $x_i + x_j \leq 2017$ thì $x_i + x_j \in A$. Chứng minh rằng $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_m}{m} \geq 1009$.

Lời giải.

Giả sử $x_1 > x_2 > \dots > x_m$. Nhận xét $x_i + x_{m+1-i} \geq 2018, \forall i = 1, 2, \dots, m$.

Thật vậy, giả sử tồn tại $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ sao cho $x_i + x_{m+1-i} \leq 2017$. Suy ra

$$x_i, x_i + x_m, x_i + x_{m-1}, \dots, x_i + x_{m+1-i} \in A$$

Mặt khác các phần tử $x_m < x_{m-1} < \dots < x_i \in A$. Do đó $|A| \geq m - i + 1 + i = m + 1$, điều này vô lý. Do đó nhận xét trên đã được chứng minh. Sử dụng nhận xét trên ta được

$$\sum_{i=1}^m (x_i + x_{m+1-i}) \geq 2018m \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2 + \dots + x_m) \geq 2018m \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_m}{m} \geq 1009$$

Bài toán được giải quyết. □

Bài 78. Cho số nguyên dương n và $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Gọi c_n là số các tập con của S mà chứa đúng hai số nguyên dương liên tiếp. Chứng minh rằng $c_n = \frac{2nF_{n+1} - (n+1)F_n}{5}$, trong đó (F_n) là dãy Fibonacci.

Lời giải.

Gọi C_n là họ các tập con của S mà chứa đúng hai số nguyên dương liên tiếp và A_n là họ các tập con của S (kể cả tập rỗng) mà không chứa hai số nguyên dương liên tiếp. Mỗi tập $C \in C_{n+2}$ gồm 3 loại

Loại 1. Gồm các tập chứa $n+2, n+1$.

Loại 2. Gồm các tập không chứa $n+2$.

Loại 3. Gồm các tập chứa $n+2$ nhưng không chứa $n+1$.

Ta thấy rằng

- ① Nếu C là tập loại 1 thì C cũng không chứa n (vì nếu chứa n thì C chứa hai cặp số nguyên liên tiếp là $n, n+1$ và $n+1, n+2$). Bỏ đi khỏi C phần tử $n+1, n+2$, ta được một tập con của $\{1, 2, \dots, n-1\}$ không chứa hai số nguyên dương liên tiếp, suy ra nó là phần tử của A_{n-1} . Ngược lại với mỗi tập con A của A_{n-1} thì tập $C = A \cup \{n+2, n+1\}$ là tập loại 1 của C_{n+2} . Phép tương ứng này là song ánh. Vậy, số tập loại 1 chính là số phần tử của A_{n-1} hay chính là $|A_{n-1}|$.

- ② Mỗi tập loại 2 rõ ràng là một tập con của C_{n+1} và ngược lại. Vậy, số tập loại 2 là c_{n+1} .
- ③ Nếu C là tập loại 3 thì C không chứa $n+1$. Do đó nếu loại bỏ đi khỏi C phần tử $n+2$, ta được một tập con của C_n . Ngược lại, với mỗi tập con B của C_n thì tập $C = B \cup \{n+2\}$ là tập loại 3 của C_{n+2} . Vậy, số tập loại 3 là c_n . Từ đó ta có hệ thức sau $c_{n+2} = c_{n+1} + c_n + |A_{n-1}|$. (1)

Bây giờ ta cần đi tìm $a_n = |A_n|$. Dễ thấy $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5$. Mỗi tập $A \in A_{n+2}$ gồm 2 loại: Loại 1 gồm các tập chứa $n+2$. Loại 2 gồm các tập không chứa $n+2$. Nếu A là tập loại 1 thì A cũng không chứa $n+1$ (vì nếu chứa $n+1$ thì A chứa hai cặp số nguyên liên tiếp là $n+1$ và $n+2$). Do đó nếu bỏ đi khỏi A phần tử $n+2$, ta được một tập con của A_n . Ngược lại với mỗi tập con B của A_n thì tập $A = B \cup \{n+2\}$ là tập loại 1 của A_{n+2} . Do đó số tập con loại 1 là a_n . Mỗi tập loại 2 rõ ràng là một tập con của A_{n+1} và ngược lại. Vì thế số tập loại 2 là a_{n+1} . Do đó ta có hệ thức

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

Mặt khác, với dãy Fibonacci, ta có

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Vì $a_1 = F_3 = 2, a_2 = F_4 = 3, a_3 = F_5 = 5$. Ta suy ra $a_n = F_{n+2}$. (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ thức $c_{n+2} = c_{n+1} + c_n + F_{n+1}$. (3)

Từ đó bằng quy nạp và sử dụng hệ thức truy hồi của dãy Fibonacci cho (3), ta có công thức

$$c_n = \frac{2nF_{n+1} - (n+1)F_n}{5}.$$

Bài toán được giải quyết. □

Bài 79.

- ① Có bao nhiêu số có 2017 chữ số lấy từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sao cho số đó chứa một số lẻ các chữ số 1 và một số chẵn các chữ số 2?
- ② Cho n điểm trên mặt phẳng ($n \geq 5$), trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh có không ít hơn $\binom{n-3}{2}$ tứ giác lồi mà tất cả các đỉnh được lấy trong n điểm đã cho.

Lời giải.

- ① Gọi LC_n là các tập hợp các số gồm n chữ số bao gồm một số lẻ các chữ số 1, một số chẵn các chữ số 2, CL_n là các tập hợp các số gồm n chữ số bao gồm một số chẵn các chữ số 1, một số lẻ các chữ số 2, LL_n là các tập hợp các số gồm n chữ số bao gồm một số lẻ các chữ số 1, một số lẻ các chữ số 2, CC_n là các tập hợp các số gồm n chữ số bao gồm một số chẵn các chữ số 1; một số chẵn các chữ số 2. Ta có $|LC_n| = |CL_n|$; $|LC_n| + |CL_n| + |LL_n| + |CC_n| = 7^n$. Mỗi số trong LC_{n+1} có được bằng cách

- ☑ Thêm một trong 5 số 3, 4, 5, 6, 7 vào sau chữ số cuối cùng của số trong LC_n
- ☑ Thêm chữ số 2 vào sau chữ số cuối cùng của số trong LL_n
- ☑ Thêm chữ số 1 vào sau chữ số cuối cùng của số trong CC_n

Suy ra $|LC_{n+1}| = 5|LC_n| + |LL_n| + |CC_n| = 4|LC_n| + |CL_n| + |LL_n| + |CC_n|$

$$\Rightarrow |LC_{n+1}| = 3|LC_n| + 7^n$$

$$\Rightarrow |LC_{n+1}| - \frac{1}{4} \cdot 7^{n+1} = 3 \left(|LC_n| - \frac{1}{4} \cdot 7^n \right) = \dots 3^n \left(|LC_1| - \frac{1}{4} \cdot 7 \right) = -\frac{1}{4} \cdot 3^{n+1}$$

$$\Rightarrow |LC_{n+1}| = \frac{1}{4} (7^{n+1} - 3^{n+1}).$$

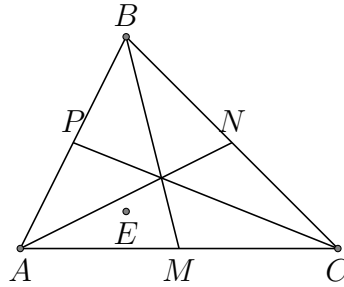
Vậy có $\frac{7^{2017} - 3^{2017}}{4}$ số thỏa mãn.

② Ta chứng minh bằng quy nạp

☑ Với $n = 5$ cho 5 điểm đó là A, B, C, D, E . Ta lấy bao lồi của năm điểm A, B, C, D, E nói trên. Có những trường hợp sau:

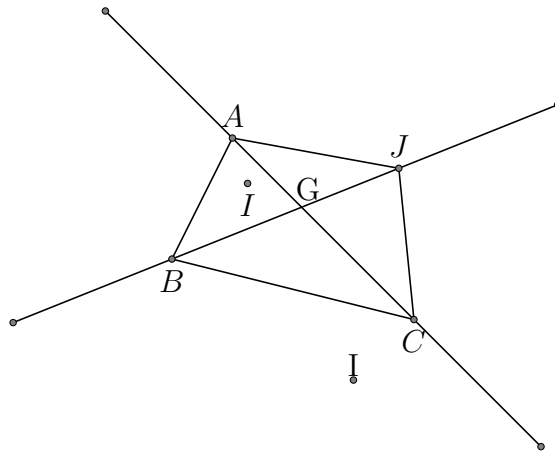
- Nếu bao lồi là ngũ giác thì 4 điểm bất kì là 4 đỉnh của tứ giác lồi.
- Nếu bao lồi là tứ giác thì 4 đỉnh của bao lồi thỏa yêu cầu.
- Nếu bao lồi là tam giác. Chẳng hạn tam giác ABC .

Khi đó D và E là các điểm trong của tam giác (do không có 3 điểm nào thẳng hàng). Kẻ các tam giác như hình vẽ



Khi đó E nằm trong một trong 6 tam giác, chẳng hạn tam giác ADM , khi đó tứ giác $ABDE$ là tứ giác lồi.

☑ Giả sử bài toán đúng với $n = k$, ta chứng minh bài toán đúng với $n = k + 1$. Lấy k điểm trong $k + 1$ điểm trên ta có ít nhất $\binom{k-3}{2}$ tứ giác lồi. Cố định 3 điểm A, B, C trong k điểm nói trên, với điểm thứ $k + 1$ là I , ta lấy thêm một điểm trong $k - 3$ điểm còn lại, J chẳng hạn. Khi đó tồn tại thêm ít nhất 1 tứ giác lồi trong 5 điểm A, B, C, I, J . Thật vậy, nếu đã tồn tại tứ giác lồi $ABCJ$ trong $\binom{k-3}{2}$ nói trên.



Khi đó đỉnh I thuộc một trong 8 miền do các cạnh và hai đường thẳng đi qua các đỉnh đối diện tạo nên. Ta luôn có một tứ giác lồi mới với I, J là 2 trong số các đỉnh. Có $\binom{k-3}{1}$ cách lấy điểm J nên có thêm $\binom{k-3}{1}$ tứ giác lồi. Vậy có ít nhất $\binom{k-3}{1} + \binom{k-3}{2} = \binom{k-2}{2}$ tứ giác lồi có đỉnh trong $k + 1$ điểm.

Theo nguyên lí quy nạp, bài toán được chứng minh hoàn toàn. □

Bài 80. Có 2019 đồng tiền xu trên mặt bàn, mỗi đồng xu có 2 mặt sấp và ngửa. Theo thứ tự $i = 1, 2, \dots, 2019$, mỗi bước thứ i được phép chọn i đồng xu và lật mặt của chúng (bước 1

chọn 1 đồng, bước 2 chọn 2 đồng, ..., bước thứ 2019 chọn 2019 đồng). Chứng minh rằng sau 2019 bước luôn có thể làm cho tất cả các đồng xu về cùng 1 trạng thái. Giả sử ban đầu chỉ có 1 đồng sấp, hỏi sau 2019 bước có thể đưa tất cả các đồng xu về cùng ngửa được không?

Lời giải.

- ① Trước hết chứng minh có thể chuyển tất cả đồng xu về cùng 1 trạng thái. Chứng minh quy nạp theo số đồng xu là số lẻ. Nếu có 1 đồng xu, có điều chứng minh. Giả sử với $2k + 1$ đồng xu có thể chuyển tất cả về cùng 1 trạng thái. Xét $2k + 3$ đồng xu. Nếu có 2 đồng xu C_1, C_2 không cùng trạng thái, giả sử C_1 sấp và C_2 ngửa. Theo giả thiết quy nạp ta có thể chuyển $2k + 1$ đồng xu còn lại về cùng trạng thái sau $2k + 1$ bước, giả sử các đồng xu cùng sấp. Bước thứ $2k + 2$ chuyển $2k + 1$ đồng xu này và C_1 về cùng ngửa, bước thứ $2k + 3$ chuyển tất cả đồng xu về cùng sấp, có điều chứng minh. Nếu tất cả các đồng xu cùng trạng thái. Ta sắp xếp chúng theo thứ tự trên đường tròn. Bước 1 chọn đồng xu thứ 1, bước 2 chọn 2 đồng thứ 2 và 3, tiếp tục quá trình đến hết $2k + 3$ bước. Khi đó tổng số lần thay đổi của tất cả các đồng xu là $1 + 2 + \dots + (2k + 3) = (2k + 3)(k + 2)$, điều này chứng tỏ mỗi đồng xu được thay đổi đúng $k + 2$ lần, suy ra chúng vẫn cùng trạng thái.
- ② Chứng minh không thể làm cho các đồng xu cùng ngửa. Nếu đồng xu đang ngửa thì đánh số 1 và đang sấp thì đánh số -1 . Sau 2019 bước, tổng số lần thay đổi của tất cả các đồng xu là $1 + 2 + \dots + 2019 = 1010 \cdot 2019$ là số chẵn, hay số lần thay đổi dấu của tất cả các đồng xu là chẵn. Suy ra tích tất cả các số sau 2019 bước sẽ cùng dấu với tích tất cả các số ban đầu. Mà ban đầu có 1 đồng sấp nên tích ban đầu âm, suy ra tích của các số sau 2019 bước là âm, hay không thể thu được trạng thái tất cả cùng ngửa. Ta có điều phải chứng minh.

Bài toán được giải quyết. □

Bài 81. An và Bình luân phiên đánh dấu các ô vuông của hình vuông 101×101 ô. An là người bắt đầu. Một ô sẽ không thể được đánh dấu nếu trên cùng hàng với nó hoặc cùng cột với nó đã có ít nhất 2 ô được đánh dấu. Ai không đi được nữa sẽ thua. Hãy xác định ai là người có chiến thuật thắng.

Lời giải.

Cách 1. Để đơn giản, ta gọi hai người chơi là A và B thay vì An và Bình. Ta sẽ chứng minh rằng B có chiến thuật để thắng. Điều này cũng đúng khi thay 101 bằng một số nguyên dương $n \geq 2$ bất kỳ. Rõ ràng theo luật chơi thì có không quá $2n$ ô được đánh dấu. Vì thế nên chiến thuật ở đây là B sẽ tìm cách đánh được ô cuối cùng. Chiến thuật là: người đi trước đánh ô nào thì người sau sẽ đánh một ô bất kỳ cùng dòng với nó sao cho số cột được đánh là nhiều nhất có thể. Đặc điểm của chiến thuật này là:

- ☑ Sau mỗi lượt của A, B thì có thêm một hàng có hai ô được đánh; không có hàng nào chứa một ô.
- ☑ Sau mỗi lượt của A thì trên hàng mà A vừa đánh, còn đúng $n - 1$ ô chưa được đánh và B sẽ đánh tùy ý vào ô thuộc cột chưa có ô nào được đánh; nếu như tất cả các cột đều có ô được đánh thì B sẽ chọn cột tùy ý mà chỉ có 1 ô được đánh trên đó.

Bằng cách đó, trong $n - 1$ lượt đầu tiên, một khi A còn đi được thì B vẫn đi được vì vẫn luôn còn hàng trống và các cột vẫn chưa đầy 2 ô. Do đó, sau $n - 1$ lượt của A, B , bảng còn lại sẽ có đặc điểm là:

- ☑ Chỉ còn một hàng duy nhất mà chưa có ô nào được đánh, $n - 1$ hàng kia đều có ô đã được đánh.

☑ Tất cả các cột đều có ô được đánh (có cột có 1 ô, có cột có 2 ô).

Tổng số ô đã đánh là $2n - 2$ nên gọi a, b lần lượt là số cột có 1 ô, 2 ô được đánh thì

$$a + b = n \text{ và } a + 2b = 2n - 2.$$

Suy ra $a = 2, b = n - 2$, nghĩa là có đúng hai cột mà trên đó có 1 ô được đánh. Hai ô nằm ở vị trí giao giữa hai cột đó và dòng chưa được đánh là hai vị trí cuối cùng có thể đánh. A, B thay phiên đánh vào hai ô đó và B là người đánh cuối cùng nên chiến thắng.

Cách 2. Ta có nhận xét rằng:

- (1) Nếu ở lượt đầu tiên, An đánh vào ô $(1, 51)$ giữa hàng 1 thì Bình sẽ đánh vào ô $(101, 51)$ giữa hàng cuối. Khi đó, hai bạn sẽ không thể điền vào ô trung tâm nữa. Tiếp theo, mỗi khi An đánh dấu ô nào thì Bình sẽ đánh dấu vào ô đối xứng với ô đó qua tâm. Mỗi khi An điền được thì Bình cũng điền được, vậy Bình sẽ thắng.
- (2) Nếu ở lượt đầu tiên, An đánh vào ô (a, b) thì ta có thể đưa về nhận xét (1) bằng cách xây dựng một bảng tương ứng cùng kích thước nhưng hàng 1 và hàng a , cột 51 và cột b đổi chỗ cho nhau. Khi đó, An đánh vào ô nào thì Bình sẽ đánh vào ô ở chỉ số hàng/cột tương ứng ở bảng đối chiếu; Bình sẽ đánh vào ô đối xứng như ở chiến lược (1) rồi đánh vào ô có cùng chỉ số hàng/cột ở bảng gốc. Dễ thấy rằng đánh dấu được của mỗi hàng và cột ở hai bảng là giống nhau.

	1	2	3	4	5		1	2	5	4	3
1	A3				B1	5			A1		B3
2		A5		B2		2		A5		B2	
3	A4		B4			3	A4				B4
4		A2		B5		4		A2		B5	
5			B3		A1	1	A3		B1		

Hình minh họa cho trường hợp 5×5 khi An đánh vào ô $(5, 5)$ trong nước đi đầu tiên. Từ hai nhận xét trên, ta thấy Bình là người có chiến lược thắng trò chơi. □

Nhận xét. Rõ ràng theo cách thứ nhất thì bài toán không chỉ đúng với số 101 hay các số lẻ mà còn đúng với bảng vuông có kích thước bất kỳ không nhỏ hơn 2. Để cảm nhận và đoán được ai là người có chiến lược thắng cuộc, ta có thể thử với trường hợp $n = 2, n = 3$. Khi $n = 2$, ta thấy tất cả ô vuông đều có thể được đánh dấu nên Bình hiển nhiên thắng. Khi $n = 3$, ta thấy ô ở trung tâm có vai trò rất quan trọng cho chiến lược chơi. Chú ý rằng vẫn còn nhiều chiến lược khác thú vị hơn cho Bình để thắng trò chơi này.

Bài 82 (IMO shortlisted 2005). Cho số tự nhiên $n, n > 3$. Ta đánh số mỗi cạnh và mỗi đường chéo của n -giác $P_1P_2 \cdots P_n$ bởi một số nguyên dương nhỏ hơn hoặc bằng r thỏa mãn:

- (i) Mọi số nguyên dương từ 1 đến r đều được đánh số.
- (ii) Với mỗi tam giác $P_iP_jP_k$, hai cạnh được đánh số bởi cùng một số và cạnh còn lại đánh bởi số nhỏ hơn.

Hãy thực hiện các yêu cầu sau

- ① Xác định số nguyên dương r lớn nhất mà điều đó có thể thực hiện được.

② Với r thu được ở trên, có bao nhiêu cách đánh số thỏa mãn.

Lời giải.

Trước tiên, ta kí hiệu $|XY| = k$ nếu đoạn XY được đánh số bởi k . Ta xét một số trường hợp cụ thể sau

- ✓ Xét $n = 3$, ta có một tam giác duy nhất. Khi đó, ta có đúng hai số nguyên dương phải dùng là 1 và 2, trong đó số 2 được dùng cho hai cạnh, số 1 được dùng cho cạnh còn lại nên có 3 cách đánh số.
- ✓ Xét $n = 4$, ta có một tứ giác. Có tất cả 6 cạnh và đường chéo, nên các số nguyên được dùng không thể vượt quá 6, nếu số 6 được đánh một đoạn nào đó, do đoạn này là cạnh của hai tam giác khác nhau, nên tồn tại thêm hai đoạn khác được đánh số 6. Như vậy, chỉ còn ba đoạn, nhưng buộc phải đánh số từ 1 đến 5, mâu thuẫn. Vậy $r < 6$.
- ① Nếu $r = 5$, tương tự, còn phải đánh số 1, 2, 3, 4 cho ba cạnh, cũng mâu thuẫn.
- ② Nếu $r = 4$, giả sử $|P_1P_2| = 4$ thì hai tam giác $P_1P_2P_3$ và $P_1P_2P_4$ còn có thêm một cạnh đánh số 4 nữa.
 - Giả sử $|P_1P_2| = |P_1P_4| = 4$ thì ba cạnh P_2P_3, P_2P_4, P_3P_4 được đánh bởi ba số 1, 2, 3, trái điều kiện (ii).
 - Giả sử $|P_1P_3| = |P_2P_4| = 4$ thì tam giác $P_1P_3P_4, P_2P_3P_4$ còn một cạnh nữa được đánh số 4, nên có hai cạnh phải đánh bởi 3 số. Mâu thuẫn.
- ③ Nếu $r = 3$, dễ dàng có thể đánh số được. Giả sử P_1 là đỉnh mà từ đó có ít nhất hai cạnh đánh số bởi 3, có 2 trường hợp sau

Trường hợp 1. Có ba đoạn từ P_1 đánh số bởi 3 thì $|P_1P_2| = |P_1P_3| = |P_1P_4| = 3$. Khi đó

$$|P_2P_3|, |P_2P_4|, |P_3P_4| \in \{1; 2\},$$

có 3 cách đánh số (xem trường hợp $n = 3$).

Trường hợp 2. Có đúng hai đoạn từ P_1 được đánh số bởi 3, có 3 cách chọn hai đỉnh tạo ra hai đoạn đó. Xét một cách chọn, giả sử $|P_1P_2| = |P_1P_3| = 3, |P_1P_4| < 3$. Khi đó, chia tập $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ thành hai tập $A = \{P_2, P_3\}, B = \{P_1, P_4\}$ thì đoạn nối một điểm thuộc tập A với một điểm thuộc B phải đánh số bởi 3, $\{|P_2P_3|, |P_1P_4|\} = \{1; 2\}$ nên có 2 cách chọn $|P_2P_3|$ và $|P_1P_4|$. Vậy có 6 cách đánh số thỏa mãn.

Tổng cộng có 9 cách đánh số thỏa mãn với P_1 làm đỉnh trung tâm, như vậy có 36 cách đánh số, mỗi cách lặp lại 2 lần nên cuối cùng có 18 cách đánh số thỏa mãn.

Dựa vào lời giải trong trường hợp trên, ta có thể dự đoán r lớn nhất bằng $n - 1$ và đồng thời đưa ra được cách đếm trong trường hợp $r = n - 1$. Từ đó, có lời giải tổng quát sau. Xét một đỉnh V mà từ đó có $k \leq 2$ cạnh đánh số bởi r , đỉnh như thế phải tồn tại vì tồn tại một tam giác có hai cạnh đánh số r . Gọi A là tập các đỉnh từ V được đánh số r thì $|A| = k$ và B là tập các đỉnh còn lại (gồm cả V) thì $|B| = n - k$. Khi đó

- (i) Mọi cạnh nối từ một điểm thuộc A đến một điểm thuộc B đều được đánh số bởi r , vì nếu giả sử có X thuộc A, Y thuộc B mà $|XY| < r$ thì $Y \neq V$ và do đó $|XV| = r, |YV| < r$, do điều kiện ii) nên $|XY| = r$. Mâu thuẫn.
- (ii) Mọi cạnh nối hai điểm trong A đều đánh số nhỏ hơn r , vì nếu $X, Y \in A$ thì $|XV| = |YV| = r$ nên $|XY| < r$.
- (iii) Mọi cạnh nối hai điểm trong B đều đánh số nhỏ hơn r , vì nếu $X, Y \in B$ mà $|XY| = r$ thì hoặc $|XV| = r$ hoặc $|YV| = r$. Mâu thuẫn.

- ① Ta chứng minh bằng quy nạp rằng giá trị lớn nhất của r là $n - 1$. Giả sử với mọi đa giác $k \leq n$ cạnh, số số được dùng nhiều nhất là $k - 1$. Xét đa giác $n + 1$ đỉnh, giả sử V, A, B là đỉnh và các tập được nói đến ở trên. Ta có

$$r \leq |A| - 1 + |B| - 1 + 1 = k - 1 + (n + 1 - k - 1) + 1 = n.$$

Điều phải chứng minh.

- ② Như trên, nếu đa giác có n cạnh và tập A có k phần tử thì tập A có nhiều nhất $k - 1$ số được dùng và tập B có nhiều nhất $n - k - 1$ số được dùng. Vậy để đánh số từ 1 đến $n - 1$ cho các đoạn tạo được từ đa giác, ta phải chọn $k - 1$ số trong các số $\{1; 2; \dots; n - 2\}$ để đánh số cho các đoạn tạo được từ các điểm trong tập A và $n - k - 1$ số còn lại trong tập đó để đánh số cho các đoạn tạo được từ các điểm thuộc tập B . Mặt khác, số cách chọn hai tập A, B sao cho $|A| = k, |B| = n - k$ là $\binom{n}{k}$. Từ đó ta có hệ thức truy hồi sau (với $f(n)$ là số cách đánh số trong trường hợp đa giác có n cạnh)

$$\begin{aligned} 2f(n) &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot \binom{n-2}{k-1} \cdot f(k) \cdot f(n-k) \\ &= n!(n-2)! \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{f(k)}{k!(k-1)!} \right) \cdot \left(\frac{f(n-k)}{(n-k)!(n-k-1)!} \right). \end{aligned}$$

Có $2f(n)$ là vì theo cách đếm như vậy, mỗi số $\binom{n}{k} \cdot \binom{n-2}{k-1} \cdot f(k) \cdot f(n-k)$ được tính 2 lần.

Đặt $f(x) = x!(x-1)!g(x)$ ta có $2(n-1)g(n) = \sum_{k=1}^{n-1} g(k) \cdot g(n-k)$. Đến đây, bằng một số trường hợp nhỏ lẻ, ta có thể đoán được đáp số $f(n) = \frac{n!(n-1)!}{2^{n-1}}$ và chứng minh kết quả đó bằng quy

nạp. Bây giờ, với ý b), ta xem xét theo một khía cạnh khác, vẫn bắt đầu từ trường hợp $n = 4$, vẫn đánh số bởi ba số 1, 2, 3 nhưng ta thử bắt đầu đánh số từ 1. Nhận thấy nếu $|P_1P_2| = 1$ thì $|P_1P_3|, |P_2P_3|, |P_2P_4|, |P_1P_4|$ đều khác 1, giả sử $|P_3P_4| = 1$ thì xét tam giác $P_1P_3P_4$, ta thấy chỉ dùng tối đa hai số, chẳng hạn là 1 và 2, tam giác $P_2P_3P_4$ cũng dùng tối đa hai số, suy ra phải dùng 1 và 3. Ta có $|P_1P_3| = 2, |P_1P_2| = 1, |P_2P_3| = 3$. Mâu thuẫn điều kiện (ii) của yêu cầu đề. Vậy không còn cạnh nào được phép đánh số 1. Từ đây, ta không quan tâm đến việc đánh số 1 nữa mà chỉ còn đánh số 2 và 3 cho các đoạn. Nhận xét $|P_1P_2| = 1$ nên $|P_1P_3| = |P_2P_3|, |P_1P_4| = |P_2P_4|$. Như vậy mỗi cách đánh số cho tam giác $P_1P_3P_4$ cho tương ứng đúng một cách đánh số cả tứ giác. Vậy có thể coi P_1 và P_2 là 1 điểm. Bài toán được kéo về trường hợp $n = 3$. Công việc rất cuộc được chia làm 2 công đoạn.

(a) Chọn 1 đoạn để đánh số 1: Có $\binom{4}{2} = 6$ cách.

(b) Đánh số 1 tam giác sau khi coi 2 điểm đầu mút của đoạn vừa chọn trùng nhau, có 3 cách.

Kết quả là có 18 cách. Với cách suy luận ở trên, ta có lời giải thứ hai. Gọi a_n là số cách đánh số khi dùng đến $n - 1$ số cho các đoạn tạo được từ n điểm. Ta chứng minh chỉ tồn tại duy nhất một cạnh được đánh số 1. Thật vậy, giả sử $|P_1P_2| = 1$, khi đó $|P_1P_i| = |P_2P_i|, \forall i \neq 1, 2$. Vậy một cách đánh số thỏa mãn $|P_1P_2| = 1$ tương ứng với 1 cách đánh số cho $n - 1$ điểm $P_1, P_3, P_4, \dots, P_n$. Nếu số 1 được dùng một lần nữa, thì $n - 1$ điểm trên vẫn được đánh số bởi $n - 1$ số, trong khi theo câu a), chỉ đánh số được bởi tối đa $n - 2$ điểm. Mâu thuẫn. Vậy, chỉ có duy nhất 1 cạnh được đánh số 1. Chọn cạnh này, có $\binom{n}{2}$ cách. Với mỗi cạnh được chọn,

có thể coi hai đỉnh của cạnh đó là một đỉnh (lập luận như trên), ta còn a_{n-1} cách đánh số với $n - 1$ đỉnh bằng $n - 2$ số. Vậy có

$$a_n = \binom{n}{2} \cdot a_{n-1}, a_3 = 3, a_4 = 18.$$

$$\text{Dễ dàng có được } a_n = \frac{n!(n-1)!}{2^{n-1}}.$$

Bài toán được giải quyết. □

Bài 83. Một cô thợ săn và một con thỏ tàng hình chơi trò chơi sau trên mặt phẳng. Điểm xuất phát A_0 của con thỏ và điểm xuất phát B_0 của cô thợ săn trùng nhau. Sau $n - 1$ lượt chơi, con thỏ ở điểm A_{n-1} và cô thợ săn ở điểm B_{n-1} . Ở lượt chơi thứ n , có ba điều lần lượt xảy ra theo thứ tự dưới đây:

- (i) Con thỏ di chuyển một cách không quan sát được tới điểm A_n sao cho khoảng cách giữa A_{n-1} và A_n bằng đúng 1.
- (ii) Một thiết bị định vị thông báo cho cô thợ săn về một điểm P_n , đảm bảo khoảng cách giữa P_n và A_n không lớn hơn 1.
- (iii) Cô thợ săn di chuyển một cách quan sát được tới điểm B_n sao cho khoảng cách giữa B_{n-1} và B_n bằng đúng 1.

Hỏi điều sau đây sai hay đúng: cho dù con thỏ có di chuyển như thế nào và các điểm được thiết bị định vị thông báo có là những điểm nào, cô thợ săn luôn có thể chọn cho mình cách di chuyển sao cho sau 10^9 lượt chơi, cô ta có thể khẳng định chắc chắn rằng khoảng cách giữa mình và con thỏ không vượt quá 100?

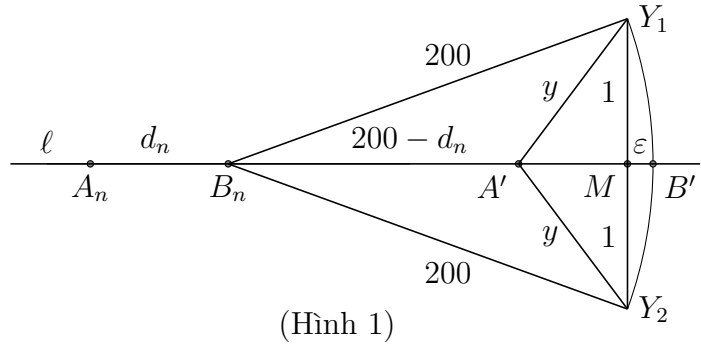
Lời giải.

Nếu câu trả lời là “đúng” thì cô thợ săn phải có một chiến lược mà dù cho thỏ di chuyển như thế nào, dù thiết bị định vị có thông báo những điểm nào, cô ấy vẫn có thể đảm bảo khoảng cách giữa mình và con thỏ không vượt quá 100, sau 10^9 lượt chơi. Dưới đây ta sẽ chứng minh điều ngược lại: khi gặp “vận rủi” với các điểm do thiết bị định vị thông báo, cô thợ săn không thể có một chiến lược di chuyển nào đảm bảo chắc chắn khoảng cách giữa cô ấy và con thỏ không vượt quá 100 sau 10^9 lượt chơi. Gọi d_n là khoảng cách giữa cô thợ săn và con thỏ sau n lượt chơi. Hiển nhiên, nếu $d_n > 100$ với mọi $n < 10^9$ thì con thỏ sẽ thắng, vì ở mỗi lượt chơi, chỉ cần di chuyển ngay tức thì (theo đường thẳng) ra xa cô thợ săn thì ngay sau đó, khoảng cách giữa nó và cô thợ săn luôn lớn hơn 100. Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng nếu $d_n \leq 100$ thì dù cô thợ săn có di chuyển theo chiến lược nào, thỏ vẫn có phương án di chuyển sao cho d_n^2 tăng thêm hơn $\frac{1}{2}$, sau mỗi 200 lượt chơi (một khoảng thời gian vừa đủ để con thỏ tận dụng được sự may mắn mà thiết bị định vị mang đến cho nó). Dễ thấy, với phương án di chuyển như vậy của thỏ, d_n^2 sẽ vượt quá 10^4 sau ít hơn

$$2 \cdot 10^4 \cdot 200 = 4 \cdot 10^6 < 10^9$$

lượt chơi, và do đó, thỏ sẽ thắng. Giả sử sau lượt chơi thứ n , cô thợ săn ở điểm A_n và con thỏ ở điểm B_n . Giả sử rằng con thỏ thậm chí còn tiết lộ cho cô thợ săn biết vị trí của nó ở thời điểm ngay sau lượt chơi thứ n (giả sử này cho phép ta “thoát khỏi” các điểm mà thiết bị định vị đã thông báo trước đó).

Gọi ℓ là đường thẳng đi qua hai điểm A_n và B_n , và gọi Y_1, Y_2 là các điểm có khoảng cách đến ℓ bằng 1, đồng thời, cách B_n một khoảng bằng 200 (xem Hình 1). Kế hoạch của thỏ giản đơn là chọn một trong hai điểm, Y_1 hoặc Y_2 , và mong muốn thẳng tiến đến điểm đó sau 200 lượt chơi.



(Hình 1)

Vì tất cả các điểm mong muốn di chuyển đến (trong 200 lượt chơi) của thỏ đều có khoảng cách đến ℓ nhỏ hơn 1 nên có thể xảy ra tình huống là mọi điểm mà thiết bị định vị thông báo (trong 200 lượt chơi) đều thuộc ℓ . Trong trường hợp đó, cô thợ săn sẽ không có cách nào để biết con thỏ chọn Y_1 hay Y_2 .

Câu hỏi đặt ra: Cô thợ săn sẽ làm gì, khi các điểm do thiết bị định vị thông báo đều thuộc ℓ ? Nếu chiến lược của cô thợ săn là cứ đường thẳng mà tiến thì sau 200 lượt chơi, cô ấy sẽ đến điểm A' trong Hình 1 ở trên. Có thể thấy, cô thợ săn không thể chọn một chiến lược nào khác tốt hơn. Thật vậy, trong suốt 200 lượt chơi, các điểm đến của cô thợ săn đều nằm ở phía bên trái điểm A' . Vì thế, nếu cô thợ săn chọn chiến lược sẽ di chuyển đến các điểm nằm phía trên ℓ thì sau 200 lượt chơi, cô ấy sẽ đến một điểm thậm chí còn nằm xa điểm Y_2 hơn, so với A' ; trường hợp cô thợ săn chọn chiến lược sẽ di chuyển đến các điểm nằm phía dưới ℓ thì sau 200 lượt chơi, cô ấy sẽ đến một điểm thậm chí còn nằm xa điểm Y_1 hơn, so với A' . Nói cách khác, dù cô thợ săn có di chuyển theo chiến lược nào thì cô ấy vẫn không bao giờ có thể tin chắc rằng khoảng cách giữa mình và con thỏ sẽ nhỏ hơn

$$y = A'Y_1 = A'Y_2$$

sau 200 lượt chơi.

Gọi M là trung điểm của Y_1Y_2 ; gọi B' là điểm thuộc ℓ và cách B_n một khoảng bằng 200 (xem Hình 1 ở trên). Đặt $\varepsilon = MB'$ (lưu ý rằng $A'B' = d_n$). Ta có

$$y^2 = 1 + A'M^2 = 1 + (d_n - \varepsilon)^2, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 200 - B_nM = 200 - \sqrt{200^2 - 1} \\ &= \frac{1}{200 + \sqrt{200^2 - 1}} > \frac{1}{400}. \end{aligned} \quad (2)$$

Để ý rằng $\varepsilon^2 + 1 = 400\varepsilon$ (do $\varepsilon = 200 - \sqrt{200^2 - 1}$), từ (1) ta có

$$y^2 = d_n^2 - 2\varepsilon d_n + \varepsilon^2 + 1 = d_n^2 + \varepsilon(400 - 2d_n).$$

Từ đó, vì $d_n \leq 100$ và $\varepsilon > \frac{1}{400}$ (theo (2)), suy ra

$$y^2 > d_n^2 + \frac{1}{2}.$$

Như vậy, trong tình huống tất cả các điểm mà thiết bị định vị thông báo đều thuộc ℓ , dù cô thợ săn có di chuyển như thế nào, thỏ vẫn có thể đạt được

$$d_{n+200}^2 > d_n^2 + \frac{1}{2}.$$

Vì vậy, câu trả lời cho câu hỏi của bài ra là **sai**. □

Bài 84. Gọi S là tập con của $\{1, 2, \dots, 2017\}$ sao cho S không chứa hai phần tử mà phần tử này chia hết cho phần tử kia và cũng không chứa hai phần tử nguyên tố cùng nhau. Hỏi S chứa nhiều nhất bao nhiêu phần tử?

Lời giải.

Xét tập hợp các số $S = \{1010, 1012, 1014, \dots, 2016\}$ thì rõ ràng tất cả đều chẵn nên không có hai số nào nguyên tố cùng nhau. Hơn thế nữa, số lớn nhất nhỏ hơn 2 lần số nhỏ nhất nên cũng không có hai số nào mà số này chia hết cho số kia. Khi đó, S thỏa mãn đề bài và có 504 phần tử. Ta sẽ chứng minh rằng đây chính là giá trị lớn nhất cần tìm. Giả sử ngược lại rằng tồn tại một tập hợp S' thỏa mãn tính chất đề bài và có ít nhất 505 phần tử. Với mỗi số chẵn i từ 1010 $\rightarrow$ 2016 với dạng $i = 2^\alpha \cdot m$ và $(m, 2) = 1$, xét tập hợp A_i có dạng $A_i = \{2^k \cdot m | 0 \leq k \leq \alpha\}$. Rõ ràng 2017 nguyên tố nên 2017 không thuộc S (vì nếu không thì tất cả các số còn lại đều nguyên tố cùng nhau với nó, mâu thuẫn với tính chất của S). Ta sẽ chỉ ra rằng mọi số nguyên dương a không vượt quá 1008 đều thuộc về ít nhất một tập hợp A_i nào đó nêu trên. Thật vậy, xét các số $2a, 2^2a, 2^3a, \dots$ và giả sử rằng không có số k nào để $1010 \leq 2^k a \leq 2016$. Khi đó, phải có số m để $2^m a < 1010 < 2016 < 2^{m+1}a$, suy ra

$$\begin{cases} 2^m a \leq 1008 \\ 2^{m+1} a \geq 2018 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^m a \leq 1008 \\ 2^m a \geq 1009. \end{cases}$$

Điều vô lý này cho thấy nhận xét được chứng minh. Tiếp theo, ta xét 504 tập

$$A_{1010} \cup \{1009\}, A_{1012} \cup \{1011\}, \dots, A_{2016} \cup \{2015\}$$

thì các tập hợp này chứa tất cả các số từ 1 đến 2016. Vì S' có ít nhất 505 phần tử nên phải có ít nhất hai phần tử $a < b$ thuộc cùng một tập nào đó trong 504 tập hợp ở trên. Ta có hai trường hợp:

- ☑ Nếu $b = i - 1$ và $a \in A_i$ thì rõ ràng $(i, i - 1) = 1$ nên b nguyên tố cùng nhau với tất cả các số thuộc A_i , dẫn đến $(a, b) = 1$, không thỏa.
- ☑ Nếu $a, b \in A_i$ thì theo cách xây dựng tập A_i , ta sẽ có $a|b$, cũng không thỏa.

Vậy không tồn tại tập S' nên giá trị lớn nhất cần tìm là 504. □

Nhận xét. Ta biết các kết quả quen thuộc sau

- ① Nếu chọn $n + 1$ số nguyên dương bất kỳ từ $2n$ số nguyên dương đầu tiên thì luôn có số này chia hết cho số kia (chứng minh bằng cách xét các lũy thừa của 2). Giá trị $n + 1$ cũng là tốt nhất vì nếu chỉ chọn n số, ta có thể chọn các số từ $n + 1, n + 2, \dots, 2n$ và không có hai số nào chia hết cho nhau.
- ② Nếu chọn $n + 1$ số nguyên dương bất kỳ từ $2n$ số nguyên dương đầu tiên thì luôn có hai số nguyên tố cùng nhau (chứng minh bằng cách chia n nhóm các cặp số lẻ và chẵn liên tiếp). Giá trị $n + 1$ cũng là tốt nhất vì nếu chỉ chọn n , ta có thể chọn tất cả các số chẵn thì không có hai số nào nguyên tố cùng nhau.

Bài toán và lời giải ở trên có thể nói là một kết hợp rất thú vị, độc đáo của hai bài toán rất đơn giản và quen thuộc vừa nêu.

Bài 85. Cho n là số tự nhiên lớn hơn 2 và $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Với mỗi song ánh $f : X \rightarrow X$, gọi A_f là tập hợp tất cả các bộ số (i, j) sao cho $i < j$ và $f(i) > f(j)$.

- ① Có bao nhiêu song ánh f thỏa $|A_f| = 1$?
- ② Giả sử f là một song ánh mà $A_f = k > 0$. Chứng minh rằng tồn tại một song ánh

$$g : X \longrightarrow X \text{ sao cho } |A_g| = k - 1 \text{ và } \sum_{i=1}^n |f(i) - i| \geq \sum_{i=1}^n |g(i) - i|.$$

($|X|$ chỉ số phần tử của tập hợp X).

Lời giải.

- ① Với mỗi song ánh f , đặt $a_i = f(i)$ thì rõ ràng $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ chính là hoán vị của $(1, 2, \dots, n)$. Gọi S_n là số song ánh f có $|A_f| = 1$ ứng với tập hợp n số nguyên dương đầu tiên. Dễ thấy với $n = 3$, ta có hai hoán vị thỏa mãn là $1, 3, 2$ và $2, 1, 3$ nên $S_3 = 2$. Xét quan hệ giữa S_{n+1}, S_n thông qua hoán vị của dãy $(1, 2, \dots, n, n+1)$.

☑ Nếu $a_{n+1} = n+1$ thì loại $n+1$ ra, ta có một hoán vị thỏa mãn đề bài của n số nguyên dương đầu tiên, có tất cả S_n hoán vị như thế.

☑ Nếu $a_{n+1} \neq n+1$ thì rõ ràng $a_n = n+1$ vì nếu $a_i = n+1$ với $i < n$ thì $|A_f| \geq 2$, không thỏa. Khi đó, phải có $a_{n+1} = n, a_n = n+1$ và $a_i = 1$ với $1 \leq i \leq n-1$. Nghĩa là có thêm đúng 1 hoán vị nữa.

Từ đó suy ra $S_{n+1} = S_n + 1$ và có $S_n = n - 1$ với mọi n . Số song ánh cần tìm là $n - 1$.

- ② Trong song ánh f đang xét, gọi j là số lớn nhất sao cho $a_j = t < j$. Rõ ràng j luôn tồn tại vì $|A_f| = k > 0$. Khi đó, ta cũng có $a_i = i$ với mọi $j+1 \leq i \leq n$. Xét số m sao cho $a_m = t+1 \leq j$ thì rõ ràng $1 \leq m \leq j$. Khi đổi chỗ hai số (a_j, a_m) này sẽ làm giảm giá trị $|A_f|$ đi đúng một đơn vị. Khi đó, giả sử ta có song ánh g mới tương ứng với việc đổi chỗ này mà $|A_g| = k - 1$ và

đặt $b_i = g(i)$. Ta sẽ chứng minh rằng $T = \sum_{i=1}^n |b_i - i| - \sum_{i=1}^n |a_i - i| \leq 0$. Thật vậy,

$$\begin{aligned} T &= |b_j - m| + |b_m - j| - |a_j - j| - |a_m - m| \\ &= |t+1 - j| + |t - m| - |t - j| - |t+1 - m| \end{aligned}$$

Vì $t+1 \leq j$ nên ta có

$$T = j - (t+1) - (j-t) + |t-m| - |t+1-m| = |t-m| - |t+1-m| - 1.$$

Vì $t-m$ và $t+1-m$ là hai số nguyên liên tiếp nên chênh lệch của chúng đúng bằng 1, suy ra $T \leq 1 - 1 = 0$. Do đó, hoán vị g như trên thỏa mãn điều kiện đề bài.

Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Ta biết rằng số lượng A_f được nêu trong bài chính là số nghịch thế. Nếu gọi S_k là "độ lệch" nhỏ nhất của song ánh có k nghịch thế thì theo kết quả ở câu b), ta có dãy S_k là một dãy không giảm. Từ đó suy ra rằng độ lệch ở trên lớn nhất khi số nghịch thế là lớn nhất, điều này đạt được khi hai nửa của các số $1, 2, \dots, n$ được đổi chỗ cho nhau. Ở câu a), nếu yêu cầu tính số song ánh f để $|A_f| = 2$ thì bài toán sẽ thú vị hơn nhiều. Khi đó, vẫn bằng cách truy hồi tương tự, ta sẽ có được công thức là $S_n = S_{n-1} + n - 2$ và $S_3 = 1$ hay $S_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Bài 86. Một câu lạc bộ có 100 thành viên, mỗi thành viên đều quen với một số thành viên khác trong câu lạc bộ. Chứng minh rằng tồn tại hai thành viên của câu lạc bộ có số người quen chung là số chẵn. (hai người không có người quen chung được coi là thỏa mãn bài toán).

Lời giải.

Coi mỗi người là một đỉnh trên mặt phẳng, ta có các đỉnh: $A_1, A_2, \dots, A_{100}$. Hai người quen nhau thì hai đỉnh đó được nối với nhau bởi một đoạn thẳng.

- ① Nếu tồn tại đỉnh A_n bậc lẻ. Xét tập X gồm các người quen của A_n . Trong tập X có lẻ người. Nếu mỗi người trong tập X có lẻ người quen trong tập X . Suy ra bậc của các đỉnh A_i trong X là bậc lẻ. Suy ra tổng bậc của các đỉnh trong X là lẻ. Mà mỗi đoạn thẳng tương ứng với hai đỉnh nên có chẵn bậc trong X (mâu thuẫn). Do đó, tồn tại đỉnh A_i thuộc X có chẵn người quen trong X . Vậy A_n và A_i có chẵn người quen chung.
- ② Nếu không có đỉnh nào bậc lẻ. Xét A_n có chẵn người quen thuộc tập Y . Số người không quen A_n là số lẻ thuộc tập Z . Trong tập Z có lẻ người nên tồn tại A_i trong Z có số người quen trong Z là chẵn. Mà bậc của A_i chẵn nên số người quen của A_i trong Y là chẵn.

Vậy A_n và A_i có số người quen là số chẵn. □

Bài 87. Gọi M là tập tất cả các số tự nhiên mà các chữ số của nó là một hoán vị của tập $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Sắp xếp các phần tử của M theo thứ tự tăng dần $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, trong đó n là số phần tử của tập M . Chứng minh rằng $a_i + a_{n+1-i} = a_k + a_{n+1-k}, \forall 1 \leq i < k \leq n$.

Lời giải.

Xét tương ứng f biến mỗi $x \in M$ thành $8888888 - x$. Với $x \in M, x$ có dạng $x = \overline{x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7}$ với $x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Khi đó

$$f(x) = \overline{(8 - x_1)(8 - x_2)(8 - x_3)(8 - x_4)(8 - x_5)(8 - x_6)(8 - x_7)}.$$

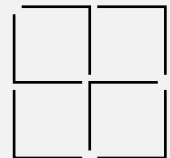
Do $x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ nên $8 - x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ và ngược lại. Nên $x \in M \Leftrightarrow f(x) \in M$. Hơn nữa, với $x, y \in M$ thì $x = y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ nên f là một song ánh. Suy ra

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = M = \{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)\}$$

Lại có, từ định nghĩa của f suy ra với $x < y$ thì $f(x) > f(y)$ với mọi $x, y \in M$. Cùng với giả thiết $a_1 < a_2 < \dots < a_n \Rightarrow f(a_n) < f(a_{n-1}) < \dots < f(a_1)$ suy ra $f(a_i) = f(a_{n+1-i})$ với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Vậy $a_i + a_{n+1-i} = 8888888$ với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ □

Bài 88.

Cho số nguyên dương n . Hình vuông kích thước $n \times n$ được tạo thành từ $2n(n+1)$ đoạn thẳng đơn vị. Hỏi có bao nhiêu cách phân hoạch các đoạn thẳng đơn vị đó thành $n(n+1)$ cặp, mỗi cặp gồm 2 đoạn thẳng thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

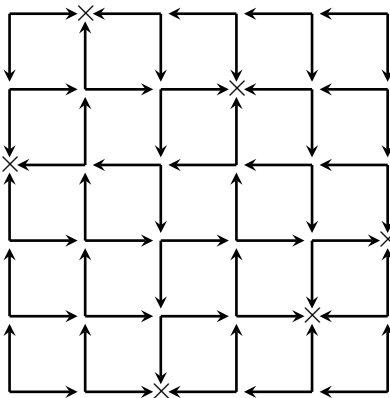


- 1) Trong mỗi cặp, có 1 đoạn thẳng nằm dọc và có 1 đoạn thẳng nằm ngang và hai đoạn thẳng này có chung đỉnh (tạo thành một chữ L)
- 2) Không có 2 cặp nào của phân hoạch chứa 4 đoạn thẳng chung đỉnh. Nói cách khác, không có hai chữ L nào có chung đỉnh.

(Trong hình minh họa là một cách phân hoạch đúng cho $n = 2$)

Lời giải.

Lưới có $(n+1)^2$ đỉnh. Ta gọi các đỉnh mà ở đó có đỉnh của một chữ L là đỉnh nổi. Theo điều kiện không có 2 cặp nào có chung đỉnh, do đó số đỉnh nổi bằng với số cặp, tức là bằng $n(n+1)$.



Suy ra có $(n+1)^2 - n(n+1) = n+1$ đỉnh không phải là đỉnh nối. Ta gọi các đỉnh này là đỉnh cô lập. Xét trên 1 hàng, vì chỉ có n đoạn thẳng nằm ngang nên có tối đa n đỉnh trên hàng là đỉnh nối. Suy ra trên mỗi hàng có ít nhất 1 đỉnh cô lập. Từ đây có thể suy ra dễ dàng là trên mỗi hàng, mỗi cột có đúng 1 đỉnh cô lập. Ta gọi tập S gồm $n+1$ đỉnh của lưới được gọi là được phép nếu không có 2 đỉnh chung hàng hoặc chung cột.

- ☒ Ta đã chứng minh được với mỗi phân hoạch thỏa mãn điều kiện thì tập các đỉnh cô lập của phân hoạch là được phép.
- ☒ Ta chứng minh ngược lại, mỗi một tập được phép sẽ tương ứng với duy nhất một phân hoạch thỏa mãn điều kiện.

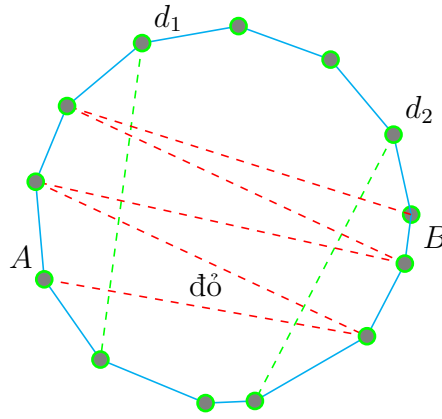
Nguyên tắc xây dựng là các đoạn thẳng trên mỗi hàng sẽ có mũi tên quay về hướng điểm cô lập. Sẽ không có 1 đoạn thẳng nào được dùng trong 2 chữ V vì nếu thế đoạn thẳng này sẽ có hai chiều dẫn đến trên hàng hoặc cột chứa đoạn thẳng sẽ có 2 điểm, mâu thuẫn với điều kiện của tập được phép. Giả sử có một phân hoạch khác với phân hoạch trên. Thế thì sẽ có 1 đoạn thẳng có mũi tên khác chiều với cách đặt mũi tên chuẩn (ta gọi là đoạn xấu). Không mất tính tổng quát, giả sử phân hoạch có 1 đoạn xấu nằm ngang. Cạnh này sẽ chỉ vào điểm Q . Q là một điểm nối, do đó cạnh ngang xuất phát từ Q sẽ tiếp tục là một cạnh xấu... Cứ như thế, ta sẽ đi đến điểm R nằm ở biên được một cạnh xấu chỉ vào. Từ đó R là đỉnh cô lập, mâu thuẫn (cạnh xấu không hướng về đỉnh cô lập). Vậy số phân hoạch thỏa mãn điều kiện bằng số tập được phép. Dễ thấy số tập được phép bằng $(n + 1)!$, do đó đáp số bài toán là $(n + 1)!$. $\square$

Bài 89. Cho M là đa giác lồi có n đỉnh ($n \geq 4$). Tô đỏ $n - 3$ đường chéo và tô xanh $n - 3$ đường chéo khác sao cho không có hai đường chéo cùng màu nào cắt nhau ở miền trong đa giác (giao điểm hai đường chéo bất kì chỉ tính ở miền trong đa giác).

- a) Với mỗi đường chéo xanh d ta gọi C_d là số các giao điểm của đường chéo này với các đường chéo đỏ. Cho hai đường chéo xanh $d_1; d_2$ sao cho phần của đa giác M nằm giữa hai đường chéo này là một đa giác m đỉnh. Chứng minh rằng $C_{d_1} + C_{d_2} \leq 2n - m - 4$.
- b) Với $n = 2k + 1$, chứng minh rằng số lượng lớn nhất các giao điểm của các đường chéo xanh và các đường chéo đỏ của đa giác M kể trên là $3(k - 1)^2$.

Lời giải.

- a) Có $n - m$ đỉnh còn lại của M nằm phía ngoài miền giới hạn hai đường thẳng $d_1; d_2$. Do đó có nhiều nhất là $n - m - 1$ đường chéo đồ cắt $d_1; d_2$ tại hai điểm (cụ thể lấy một lượt chạy theo hình zích zắc từ A đến B).



Vì tổng số đường chéo xanh là $n - 3$, do đó còn lại tương ứng $m - 2$ đường chéo mà chỉ cắt $d_1; d_2$ tại một điểm. Do đó $C_{d_1} + C_{d_2} \leq 2(n - m - 1) + m - 2 = 2n - m - 4$.

- b) Với các đường chéo $d_1, d_2, \dots, d_{n-3}$. Ta xây dựng hai đường chéo $d_1; d_2$ để chia đa giác M thành hai tam giác và $(n - 2)$ -giác. Tiếp tục kẻ $d_3; d_4$ để chia $(n - 2)$ -giác này thành hai tam giác và $(n - 4)$ -giác. Cứ tiếp tục làm như thế cho đến khi chỉ còn lại một tam giác ở giữa bởi vì n lẻ (xem hình vẽ phía dưới). Ta có $n - 3 = 2k - 2 = 2(k - 1)$. Hơn nữa, ở giữa hai đường thẳng $d_{2s-1}; d_{2s}$ có là $n - 2s$ đỉnh với $1 \leq s \leq k - 1$. Theo ý a) thì ta có

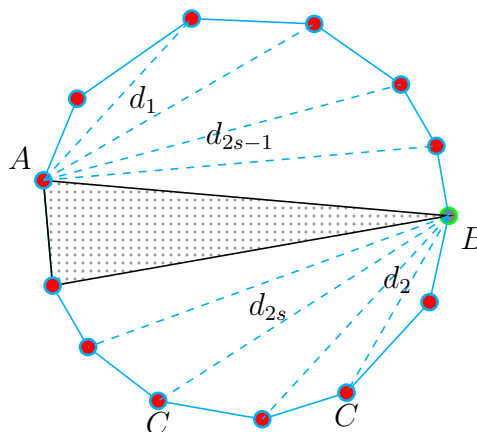
$$C_{d_{2s-1}} + C_{d_{2s}} \leq 2n - (n - 2s) - 4 = n + 2s - 4 = 2k + 2s - 3$$

Do đó, số giao điểm là

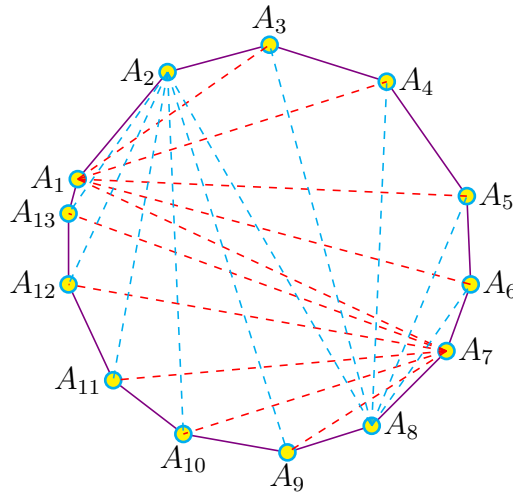
$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + \dots + C_{2s-1} + C_{2s} + \dots + C_{2k-1} + C_{2k} \\ \leq \sum_{s=1}^{k-1} (2k + 2s - 3) = (2k - 3)(k - 1) + 2 \frac{k(k-1)}{2} = 3k^2 - 6k + 3 = 3(k - 1)^2$$

Bây giờ ta chỉ ra giá trị lớn nhất đó đạt được. Xét đa giác $A_1A_2 \dots A_{2k+1}$. Tô màu đỏ các đường chéo A_1A_i với $i = 3, 4, \dots, k + 1$ và $A_{k+1}A_j$ với $j = k + 3, k + 4, \dots, 2k + 1$ màu đỏ. Còn lại ta tô màu xanh các đường chéo A_2A_i với $i = k + 2, k + 3, \dots, 2k + 1$ và $A_{k+2}A_j$ với $j = 3, 4, \dots, k$.

Cụ thể một phép tô màu với $n = 13$ thì $k = 6$ như sau



Minh họa cho chia đa giác 13 đỉnh



Minh họa cho đa giác 13 đỉnh max giao điểm.

Bài toán được giải quyết. □

Bài 90. Cho tập $M = \{1, 2, \dots, 40\}$. Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho $M = \bigcup_{i=1}^k A_i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ và không tồn tại $1 \leq i \leq k$ sao cho tồn tại $a, b, c \in A_i$ (a, b, c không nhất thiết phân biệt) mà $a + b = c$.

Lời giải.

Giả sử $M = X \cup Y \cup Z$ thỏa mãn bài toán $|X| \geq |Y| \geq |Z| \Rightarrow |X| \geq 14$. Đặt $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{|X|}\}$, giả sử $x_1 < x_2 < \dots < x_{|X|}$ suy ra dãy $x_1, x_2, \dots, x_{|X|}, x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_{|X|} - x_1$ chứa các số nguyên dương thuộc M . Từ đó ta có $2|x| - 1 \leq |M| = 40 \Rightarrow |X| \leq 20$. Số cặp $(x, y) \in X \times Y$ là $|X||Y| \geq \frac{1}{2}|X|(40 - |X|)$, mà

$$14 \leq |X| \leq 20 \Rightarrow |X||Y| \geq \min \left\{ \frac{1}{2} \cdot 14(40 - 14); \frac{1}{2} \cdot 20(40 - 20) \right\} = 182$$

Mà tổng hai số bất kỳ thuộc đoạn $[2; 80] \Rightarrow x + y$ nhận 79 giá trị do $182 > 2.79$ nên tồn tại các cặp sau

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$$

sao cho $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \neq x_3 + y_3$. Giả sử $x_1 \leq x_2 < x_3 \Rightarrow y_1 > y_2 > y_3 \Rightarrow \forall 1 \leq j \leq k$ thì

$$x_k - x_j \in M, x_k - x_j \notin X, y_k - y_j \in M, y_k - y_j \notin Y$$

Đặt $a = x_2 - x_1 = y_1 - y_2; b = x_3 - x_2 = y_2 - y_3; c = x_3 - x_1 = y_1 - y_3$, từ đây ta có $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $a + b = c \Rightarrow$ vô lý. Vậy $k \geq 4$. Ta sẽ chứng minh $k_{\min} = 4$.

Tổng quát. Tập $S = \left\{ 1, 2, \dots, \frac{1}{2}(3^k - 1) \right\}$ có thể phân hoạch thành k tập rời nhau thỏa mãn $a, b, c \in \mathbb{Z}$ cùng thuộc một tập thì $a + b \neq c$.

Chứng minh. Ta có $a_i \in \{0, 1, 2\}, \forall i \in \mathbb{N}, a_i = 0 \forall i \geq k$. $(a_N a_{N-1} \dots a_1 a_0) = \sum_{i=0}^N a_i 3^i$ đây là biểu diễn

tam phân của $m = (a_N a_{N-1} \dots a_1 a_0)$. Ta phân hoạch S như sau

① Nếu $m = (\dots a_2 a_1 a_0), a_0 = 1$ thì $m \in A_0$.

② Nếu $m = (\dots a_2 a_1 a_0), a_0 \neq 1$ thì tồn tại $l \geq 1 : a_{l-1} \neq 0, a_l = 0$ ta chọn l nhỏ nhất có tính chất đó xếp $m \in A_l$

Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng nếu $m_1, m_2 \in A_i \Rightarrow m_1 + m_2 \notin A_i$.

③ Nếu $m_1, m_2 \in A_0 \Rightarrow m_1 + m_2 \notin A_i$ vì $m_1 + m_2 = (\dots a_2 a_1 2)$.

④ Nếu $m_1, m_2 \in A_l (l \geq 1)$ thì $\left(\underbrace{0 \overline{11 \dots 1}}_{l \text{ số}} \right) < m_1, m_2 < \left(\underbrace{1 \overline{00 \dots 0}}_{l \text{ số}} \right)$, suy ra

$$\left(\underbrace{0 \overline{22 \dots 2}}_{l \text{ số}} \right) < m_1 + m_2 < \left(\underbrace{2 \overline{00 \dots 0}}_{l \text{ số}} \right) \Rightarrow m_1 + m_2 = (\dots a_2 a_1 a_0)$$

mà $a_l = 1 \Rightarrow m_1 + m_2 \notin A_l$. Nhận thấy rằng $m = \frac{1}{2}(3^k - 1) \in A_0, \forall m : 1 \leq m < \frac{1}{2}(3^k - 1)$ thì chắc chắn trong biểu diễn của m có ít nhất một chữ số 0 ở vị trí $a_t, (t \leq k - 1) \Rightarrow m \in A_1, A_2, \dots, A_{k-1} \Rightarrow \forall m \in S$ đều thuộc A_l nào đó. Vậy phân hoạch trên thỏa mãn. $\square$

Bài 91. Đặt $S = \{(a, b, c, d) | a, b, c, d \in \mathbb{N}\}$. Ánh xạ f đi từ S vào S được định nghĩa bởi

$$\forall X = (a, b, c, d) \in S : f(X) = (|a - b|, |b - c|, |c - d|, |d - a|).$$

Chứng minh rằng với mọi $X \in S$ thì:

① $f_4(X)$ là bộ gồm toàn những số chẵn,

② tồn tại số tự nhiên n sao cho $f_n(X) = (0, 0, 0, 0)$.

(Trong đó $f_1(X) = f(X), f_n(X) = f(f_{n-1}(X)), \forall n \geq 2$.)

Lời giải.

① Để ý rằng $|a - b| \equiv a + b \pmod{2}$. Suy ra

$$\begin{aligned} f(X) &\equiv (a + b, b + c, c + d, d + a) \pmod{2}, \\ f_2(X) &\equiv (a + c, b + d, c + a, d + b) \pmod{2}, \\ f_3(X) &\equiv (a + b + c + d, a + b + c + d, a + b + c + d, a + b + c + d) \pmod{2}, \\ f_4(X) &\equiv (0, 0, 0, 0) \pmod{2}. \end{aligned}$$

② Nhận xét rằng $f(2X) = 2f(X)$. Ta kí hiệu m_k là số lớn nhất trong 4 thành phần của $f_k(X)$. Rõ ràng $m_k \geq m_{k+1}$. Từ hai ý trên, kết hợp với câu 1), ta suy ra dãy

$$m_0, \frac{m_4}{2}, \frac{m_8}{4}, \dots, \frac{m_{4k}}{2^k}, \dots$$

là dãy gồm các số tự nhiên, không tăng. Nên nếu $m_{4k} > 0, \forall k$ thì dãy trên là dãy giảm thực sự, vô lí. Vậy tồn tại $m_{4k} = 0$ với k nào đó. Ta thu được điều phải chứng minh.

Bài toán được giải quyết. $\square$

Bài 92. Cho tập $S = \{1; 2; \dots; 2017\}$ và $A_1, A_2, \dots, A_k$ là các tập con của S sao cho với mọi $1 \leq i < j \leq k$ có đúng một trong các tập $A_i \cap A_j, A'_i \cap A_j, A_i \cap A'_j, A'_i \cap A'_j$ là tập rỗng. Tìm giá trị lớn nhất có thể có của k . (Với $A \subset S, A'$ kí hiệu là phần bù của tập A trong S).

Lời giải.

Gọi k là giá trị lớn nhất có thể có. Khi đó, bằng phương pháp quy nạp, ta sẽ chứng tỏ rằng nếu $S = \{1; 2; \dots; n\}$ thì $k = 2n - 3$. Trước hết ta thấy rằng các tập

$$\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}, \{1; 2\}, \{1; 2; 3\}, \dots, \{1; 2; \dots; n - 2\}$$

gồm $2n - 3$ các tập con của S thỏa mãn điều kiện bài toán. Với $n = 2$, rõ ràng $k = 1$. Với $n = 3$ dễ dàng kiểm tra được rằng $k \leq 3$ và các tập $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ thỏa điều kiện đề bài, nên suy ra $k = 3$. Giả thiết quy nạp rằng kết quả đúng với $n - 1 \geq 3$ (thì $k = 2n - 5$). Ta cần chứng minh kết quả cũng đúng với các tập $S = \{1; 2; \dots; n\}$. Theo nhận xét ban đầu suy ra $k \geq 2n - 3$. Gọi $M = \{A_1; A_2; \dots; A_k\}$ là tập có số phần tử nhiều nhất thỏa mãn điều kiện của bài toán. Ta nhận xét rằng:

- ☑ Tập $\emptyset$ và S đều không thuộc M .
- ☑ Nếu tồn tại i sao cho $1 \geq i \geq n$ mà $\{i\}$ hay $\{i\}'$ không thuộc M thì ta có thể thêm một trong các số này vào M để mở rộng tập M .
- ☑ Cả hai tập $\{i\}$ và $\{i\}'$ không thể cùng thuộc tập M , do đó chỉ có đúng $\{i\}$ hoặc $\{i\}'$ thuộc M . Vì vậy ta có thể giả sử $|A_i| \leq \frac{n}{2}$ với mọi $1 \leq i \leq n$.

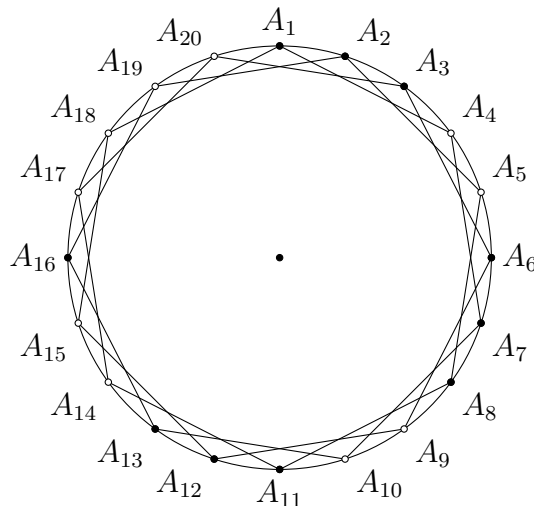
Do $2n - 3 > n$, nên trong M có một tập có số phần tử lớn hơn hoặc bằng 2, vì thế ta có thể chọn một tập $A \in M$ sao cho $|A| \geq 2$ và $|A| \leq |X|$ với mọi $X \in M$ mà $|X| \geq 2$. Không mất tính tổng quát ta giả sử $1, 2 \in A$. Khi đó xét bất kỳ tập $B \in M$ khác $\{1\}, \{2\}$ và A .

- ☑ Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì $1, 2 \in B$.
- ☑ Nếu $A \cap B' = \emptyset$ thì $A \subset B$.
- ☑ Nếu $A' \cap B = \emptyset$ thì $B \subset A$ và khi đó $|B| = 1$, theo cách chọn A và lấy $B \in M$, suy ra $1, 2 \notin B$.
- ☑ Nếu $A' \cap B' = \emptyset$ thì $A \cup B = S$. Khi đó, nếu n là số lẻ thì do $|A|, |B| \leq \frac{n-1}{2}$ ta có $|A \cup B| \leq n-1$ (vô lý); khi n là số chẵn thì chỉ có một trường hợp có thể xảy ra đó là $|A| = |B| = \frac{n}{2}$, nhưng khi đó $B = A'$ và $A \cap B = \emptyset$, suy ra $1, 2 \notin B$.

Do vậy ta kết luận $\{1; 2\} \subset B$ hoặc $\{1; 2\} \cap B = \emptyset$ với mọi $B \in M$, khác $\{1\}, \{2\}$ và A . Khi đó, bằng cách loại bỏ $\{1\}$ và $\{2\}$ từ M và loại bỏ 1 từ mỗi phần tử của M ta nhận được một tập M mới ứng với $n - 1$ phần tử của tập hợp $S = \{2; 3; \dots; n\}$. Theo giả thiết quy nạp ta có $k - 2 \leq 2n - 5$ mà $k \geq 2n - 5$ nên ta được $k = 2n - 3$. Vậy khi $n = 2017$ thì giá trị lớn nhất cần tìm có thể có của k là $k = 2 \cdot 2017 - 3 = 4031$. $\square$

Bài 93 (Ả Rập, 2015). Mười đỉnh của đa giác đều 20 cạnh $A_1A_2 \dots A_{20}$ được tô đen và các đỉnh còn lại được tô trắng. Xét tập hợp S bao gồm đường chéo A_1A_4 và tất cả các đường chéo có cùng độ dài với nó. Chứng minh rằng trong S , số đường chéo có hai đầu mút cùng màu đen bằng với số đường chéo có hai đầu mút cùng màu trắng. Từ đó tìm tất cả các giá trị có thể có của hai đường chéo có hai đầu mút cùng màu đen trong S .

Lời giải.



Kí hiệu như hình vẽ, vì $\gcd(20, 3) = 1$ nên các đường chéo thuộc S có thể tạo thành một dãy đi qua hết tất cả các đỉnh của đa giác đã cho. Vì mỗi đỉnh tô đen hoặc trắng nên ta có thể chia chúng thành các nhóm gồm các đỉnh đen liên tiếp và các đỉnh trắng liên tiếp. Rõ ràng một nhóm đen nằm giữa hai nhóm trắng và một nhóm trắng nằm giữa hai nhóm đen. Suy ra số lượng nhóm trắng và nhóm đen bằng nhau, đặt là k . Trong một nhóm có kích thước là a thì số đường chéo là $a - 1$. Từ đó, tính tổng các đường chéo trong các nhóm trắng và đen, ta có tổng số đường chéo có hai đầu mút đen và trắng cùng bằng $10 - k$. Từ đó ta thấy số đường chéo đó có thể nhận các giá trị $1, 2, 3, \dots, 10$. $\square$

Bài 94.

- Cho đa giác đều $A_1A_2\dots A_{2017}$. Có bao nhiêu tam giác nhọn có đỉnh là đỉnh của đa giác trên?
- Cho $2n + 3$ điểm phân biệt trên mặt phẳng sao cho 3 điểm bất kì không thẳng hàng và 4 điểm bất kì không cùng nằm trên một đường tròn.
 - Chứng minh tồn tại đường tròn (C) đi qua 3 trong số các điểm trên sao cho trong các điểm còn lại có n điểm nằm trong và n điểm nằm ngoài đường tròn.
 - Xét $2n$ điểm đã cho và không thuộc đường tròn (C) , nối tất cả các đoạn thẳng có đầu mút là 2 trong số các điểm này. Các đoạn thẳng này và đường tròn (C) có thể có nhiều nhất bao nhiêu điểm chung?

Lời giải.

- Ta có tam giác $A_iA_1A_j$ là tam giác tù tại A_1 khi và chỉ khi trên cung A_iA_j không chứa A_1 chứa ít nhất 1008 điểm còn lại.

Gọi x_1, x_2, x_3 là số đỉnh thuộc các cung $\widehat{A_iA_1}, \widehat{A_1A_j}, \widehat{A_jA_i}$ (theo chiều kim đồng hồ) không tính điểm mút. Do đó số tam giác tù có đỉnh A_1 là số nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2014 \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}^* \\ x_3 \geq 1008 \end{cases}.$$

Theo bài toán chia kẹo Euler ta có số tam giác tù có đỉnh A_1 là $\binom{1008}{2}$. Suy ra số tam giác tù

là: $2017 \cdot \binom{1008}{2}$. Vì 2017 là số lẻ nên không có tam giác vuông. Do đó số tam giác nhọn cần tính

là $\binom{2017}{3} - 2017 \cdot \binom{1008}{2}$.

- Nhận thấy tồn tại đường thẳng đi qua 2 trong số các điểm đã cho sao cho tất cả các điểm còn lại nằm cùng phía so với đường thẳng này, giả sử đường này đi qua A, B . Tính tất cả các góc mà các điểm còn lại nhìn A, B . Do không có 4 điểm cùng thuộc đường tròn nên không có 2 góc bằng nhau, khi đó ta có thể giả sử các điểm còn lại là $X_1, X_2, \dots, X_{n+1}, \dots, X_{2n+1}$ thỏa mãn

$$\widehat{AX_1B} < \widehat{AX_2B} < \dots < \widehat{AX_{2n+1}B}.$$

Xét đường tròn đi qua ba điểm A, B, X_{n+1} . Do các điểm $X_1, X_2, \dots, X_n$ nhìn AB dưới một góc nhỏ hơn góc nội tiếp chắn cung AB nên các điểm này nằm ngoài đường tròn. Tương tự các điểm $X_{n+1}, \dots, X_{2n+1}$ nằm trong đường tròn. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

- Nối các đoạn thẳng, có 3 loại

- ☒ Đoạn có đầu mút là 2 điểm nằm trong đường tròn thì không có điểm chung với đường tròn.

- ☑ Đoạn có 1 đầu mút nằm trong và 1 đầu mút nằm ngoài thì mỗi đoạn có đúng 1 điểm chung với đường tròn. Có tất cả n^2 đoạn nên có n^2 điểm chung.
- ☑ Đoạn có 2 đầu mút nằm ngoài đường tròn. Mỗi đoạn này có nhiều nhất 2 điểm chung với đường tròn. Có tất cả $\binom{n}{2}$ đoạn nên có ít nhất $2 \cdot \binom{n}{2}$ điểm chung.

Vậy số điểm chung ít nhất $n^2 + 2 \cdot \binom{n}{2}$. Ta chỉ ra cách dựng để có dấu " $=$ ". Dựng đa giác lồi có n đỉnh mà mỗi cạnh cắt đường tròn tại 2 điểm. Dễ thấy bất kì đường chéo nào của đa giác cũng cắt đường tròn tại 2 điểm. Xét thêm n điểm bất kì trong đường tròn sao cho n điểm này cùng với các đỉnh của đa giác thỏa mãn điều kiện bài toán.

□

Bài 95. Cho $P = \{P_1, P_2, \dots, P_{2017}\}$ là tập hợp gồm 2017 điểm phân biệt nằm trong hình tròn tâm P_1 bán kính bằng 1. Với mỗi $k = 1, 2, \dots, 2017$ đặt x_k là khoảng cách nhỏ nhất từ P_k đến một điểm của P (khác P_k). Chứng minh rằng $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2017}^2 \leq 9$.

Lời giải.

Với mỗi P_j trong P , vẽ đường tròn chứa điểm P_j có bán kính $\frac{x_j}{2}$. Ta sẽ chứng minh không có bất kỳ hai đường tròn nào trong chúng cắt nhau tại hai điểm phân biệt. Thật vậy, giả sử có hai đường tròn tâm P_{j_1} và P_{j_2} cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì $P_{j_1}P_{j_2} < \frac{x_{j_1}}{2} + \frac{x_{j_2}}{2}$ nhưng điều này không xảy ra vì $P_{j_1}P_{j_2}$ không nhỏ hơn x_{j_1} và x_{j_2} . Vì P_1 là tâm của đường tròn cho trước có bán kính bằng 1 nên mỗi x_j không vượt quá 1 và do đó mỗi đường tròn vẽ thêm có bán kính không vượt quá $\frac{1}{2}$. Giả sử A_j là điểm nằm trong đường tròn mới với tâm P_j . Ta có $A_jP_j \leq \frac{1}{2}$; $P_1P_j \leq 1$ nên theo bất đẳng thức tam giác thì $A_jP_1 \leq \frac{3}{2}$. Điều này chứng tỏ các điểm của P nằm trong các đường tròn mới và do đó nằm trong đường tròn tâm P_1 bán kính $\frac{3}{2}$ và các đường tròn mới này không giao nhau nên cũng nằm trong đường tròn tâm P_1 bán kính $\frac{3}{2}$. Do đó

$$\pi \left(\frac{x_1}{2} \right)^2 + \pi \left(\frac{x_2}{2} \right)^2 + \dots + \pi \left(\frac{x_{2017}}{2} \right)^2 \leq \pi \left(\frac{3}{2} \right)^2 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2017}^2 \leq 9.$$

Bài toán được giải quyết.

□

Bài 96. Số 20162017 khi viết trong hệ nhị phân có dạng 1001100111010010111100001. Đây là một dãy số nhị phân có các tính chất sau

- ☑ Có 6 cặp 00.
- ☑ Có 6 cặp 11.
- ☑ Có 6 cặp 10.
- ☑ Có 6 cặp 01.

Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên khi viết trong hệ nhị phân cũng có các tính chất như trên?

Lời giải.

Ta kí hiệu một dãy các số 1 liên nhau là dãy A và dãy các số 0 liên nhau là dãy B . Khi đó, theo đề bài thì dãy số nhị phân thỏa mãn dạng $ABABABABABABA$ gồm 7 dãy A và 6 dãy B (chú ý rằng

ta không cần xét trường hợp B đứng đầu). Rõ ràng trong một dãy có độ dài k thì tạo thành $k - 1$ cặp (00 hoặc 11) nên số lượng số 1 là $6 + 7 = 13$ và số lượng số 0 là $6 + 6 = 12$. Gọi $x_1, x_2, \dots, x_7$ là độ dài các dãy A thì $x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 13$. Số nghiệm dương của phương trình này là $\binom{12}{6}$ cũng chính là cách tạo thành các dãy A . Tương tự ta tìm được $\binom{11}{5}$ cách tạo thành các dãy B . Mỗi dãy A, B như trên cho ta đúng một dãy nhị phân, và mỗi dãy nhị phân cũng cho ta đúng một số tự nhiên thỏa mãn đề bài. Vậy có tất cả $\binom{12}{6} \binom{11}{5}$ số nguyên dương thỏa mãn đề bài. $\square$

Bài 97.

- ① Cho S là tập gồm 2017 số nguyên tố phân biệt và M là tập gồm 2018 số tự nhiên phân biệt sao cho mỗi số trong M đều không là số chính phương và chỉ có ước nguyên tố thuộc S . Chứng minh rằng có thể chọn ra trong M một số có tích là một số chính phương.
- ② Có 32 học sinh tham gia 33 câu lạc bộ, mỗi học sinh có thể tham gia nhiều câu lạc bộ và mỗi câu lạc bộ có đúng 3 học sinh tham gia. Biết rằng không có 2 câu lạc bộ nào có 3 học sinh giống nhau. Chứng minh rằng có 2 câu lạc bộ chung nhau đúng 1 học sinh.

Lời giải.

- ① Số tập con phân biệt khác tập rỗng của M là $2^{2018} - 1$. Gọi các tập con đó là $M_1, M_2, \dots, M_{2^{2018}-1}$ và a_i là tích phần tử của M_i . Giả sử các phần tử của S là $p_1 < p_2 < \dots < p_{2017}$. Ta viết các tích a_i dưới dạng $a_i = b_i^2 p_1^{k_{i1}} p_2^{k_{i2}} \dots p_{2017}^{k_{i2017}}$, trong đó $k_{ij} \in \{0; 1\}$. Ta có $2^{2018} - 1$ bộ $(k_{i1}, k_{i2}, \dots, k_{i2017})$, và do $k_{ij} \in \{0; 1\}$, nên có tối đa 2^{2017} bộ phân biệt. Do đó tồn tại 2 bộ trùng nhau, giả sử 2 bộ đó ứng với hai tích a_m, a_n . Khi đó tích $a_m \cdot a_n$ là số chính phương. Bây giờ ta chỉ cần bỏ các phần tử thuộc giao của M_m và M_n ta còn lại các phần tử khác nhau mà tích là một số chính phương. Do đó bài toán được chứng minh.
- ② Giả sử không có 2 câu lạc bộ nào chung nhau đúng 1 học sinh. Nếu mỗi học sinh tham gia đúng 3 câu lạc bộ thì có tất cả 32 câu lạc bộ, mâu thuẫn. Suy ra có học sinh tham gia nhiều hơn 3 câu lạc bộ, giả sử là A tham gia câu lạc bộ thứ 1, 2, 3 và 4. Xét câu lạc bộ đầu tiên có A, B và C . Câu lạc bộ thứ 2 có đúng 1 trong B hoặc C , giả sử là A, B và D . Nếu câu lạc bộ thứ 3 không có B thì phải có cả C và D , nghĩa là có A, C và D . Khi đó không tồn tại cách chọn câu lạc bộ thứ 4. Suy ra câu lạc bộ thứ 3 có B , khi đó có A, B và E . Lập luận tương tự ta suy ra câu lạc bộ có A thì có B và ngược lại có B thì có A . Giả sử A tham gia k câu lạc bộ thì B cũng tham gia k câu lạc bộ. Mỗi học sinh còn lại chỉ tham gia nhiều nhất 1 trong k câu lạc bộ này và nếu học sinh đó cùng câu lạc bộ với A, B thì không tham gia câu lạc bộ nào nữa (nếu C tham gia 1 câu lạc bộ khác thì câu lạc bộ đó chung với A, B, C đúng 1 học sinh C , trái giả sử). Lúc này còn $30 - k$ học sinh tham gia $33 - k$ câu lạc bộ. Lập luận lại từ đầu (do $30 - k$ nhỏ hơn $33 - k$), tồn tại học sinh tham gia nhiều hơn 3 câu lạc bộ. Quá trình diễn ra vô hạn, điều này là vô lý do ta có hữu hạn học sinh và hữu hạn câu lạc bộ. Bài toán có thể tổng quát: Có n học sinh tham gia $n + 1$ câu lạc bộ, mỗi học sinh có thể tham gia nhiều câu lạc bộ và mỗi câu lạc bộ có đúng 3 học sinh tham gia. Biết rằng không có 2 câu lạc bộ nào có 3 học sinh giống nhau. Chứng minh rằng có 2 câu lạc bộ chung nhau đúng 1 học sinh.

Bài toán được giải quyết. $\square$

Bài 98 (Việt Nam, 2014). Cho đa giác đều 103 cạnh. Tô màu đỏ 79 đỉnh của đa giác và tô màu xanh các đỉnh còn lại. Gọi A là số các cặp đỉnh đỏ kề nhau và B là số cặp đỉnh xanh kề nhau.

- ① Tìm tất cả các giá trị có thể nhận được của cặp (A, B) .
- ② Xác định số cách tô màu các đỉnh của đa giác đều $B = 14$. Biết rằng hai cách tô màu được xem là như nhau nếu chúng có thể nhận được nhau qua một phép quay quanh tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác.

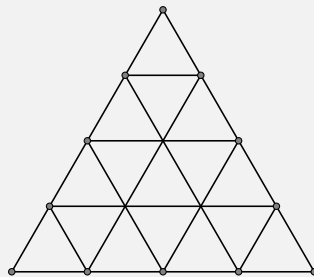
Lời giải.

- ① Gọi k là số dãy gồm các đỉnh liên tiếp được tô xanh và bị chặn hai đầu bởi đỉnh màu đỏ và h là số dãy gồm các đỉnh liên tiếp được tô đỏ và bị chặn hai đầu bởi đỉnh màu xanh. Dễ thấy giữa 2 dãy đỏ là 1 dãy xanh và giữa 2 dãy xanh là 1 dãy đỏ nên $h = k$. Gọi $a_1, a_2, \dots, a_k$ là số lượng các đỉnh trong các dãy xanh; $b_1, b_2, \dots, b_k$ là số lượng đỉnh trong các dãy đỏ thì $\sum_{i=1}^k a_i = 24$, $\sum_{i=1}^k b_i = 79$. Ngoài ra, rõ ràng nếu một dãy cùng màu có số lượng t thì có $t - 1$ cặp đỉnh liên tiếp cùng màu. Suy ra $A = \sum_{i=1}^k (a_i - 1) = 79 - k$ và tương tự $B = 24 - k$. Do đó, các cặp (A, B) sẽ có dạng $(79 - k, 24 - k)$ với $0 \leq k \leq 24$. Có tổng cộng 25 cặp như thế.

- ② Do $B = 14$ nên theo đẳng thức đã xây dựng ở trên thì $14 = 24 - k \Leftrightarrow k = 10$. Như thế, có tổng cộng 10 dãy xanh và 10 dãy đỏ. Số nghiệm nguyên dương của các phương trình sau $\sum_{i=1}^{10} a_i = 24$, $\sum_{i=1}^{10} b_i = 79$ lần lượt là $\binom{23}{9}$, $\binom{78}{9}$. Do xếp trên một vòng tròn nên chỉ xét vị trí tương đối của nhóm với nhau chứ không xét vị trí cố định của từng nhóm.

Vậy số cách tô cần tìm là $\frac{1}{10} \binom{23}{9} \binom{78}{9}$. □

Bài 99. Cho tam giác đều (T) . Trên mỗi cạnh của (T) lấy n điểm ($n \geq 1, n \in \mathbb{N}$) sao cho n điểm đó chia cạnh này thành $n + 1$ đoạn thẳng có độ dài bằng nhau. Nối các điểm đã lấy bằng các đoạn thẳng song song với các cạnh của (T) (chẳng hạn với $n = 3$ ta vẽ được hình bên dưới). Gọi S_n là số tam giác đều trên hình vẽ thu được. Tính S_n theo n .



Lời giải.

Với mỗi $n \geq 1$ ta có S_{n+1} sẽ gồm:

☑ S_n .

☑ Số tam giác có đỉnh hướng "lên" $(n + 2) + (n + 1) + \dots + 1 = \frac{(n + 2)(n + 3)}{2}$.

☑ Số tam giác có đỉnh hướng "xuống"

$$(n+1) + (n-1) + (n-3) + \dots + \frac{3 + (-1)^{n+1}}{2} = \frac{(n+1)(n+3) + \frac{1 + (-1)^n}{2}}{4}.$$

Suy ra $S_n = S_{n-1} + \frac{(n+2)(3n+2)}{4} + \frac{1 + (-1)^{n-1}}{8}$, $\forall n \geq 2$ với $S_1 = 5$. Ta có

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^n (S_k - S_{k-1}) + S_1 \\ &= \sum_{k=2}^n \left(\frac{(k+2)(3k+2)}{4} + \frac{1 + (-1)^{k-1}}{8} \right) + 5 \\ &= \frac{1}{4} \left(3 \sum_{k=2}^n k^2 + 8 \sum_{k=2}^n k + \sum_{k=2}^n 1 \right) + \frac{1}{8} \sum_{k=2}^n 1 + \frac{1}{8} \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} + 5 \\ &= \frac{3}{4} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 \right] + 2 \left[\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right] + \frac{9(n-1)}{8} - \frac{1 + (-1)^n}{16} + 5 \\ &= \frac{2n^3 + 11n^2 + 18n + 8 + \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2}}{8} \quad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Ngoài cách giải trên, ta có thể tách riêng trường hợp chẵn lẻ như sau:

$$\begin{aligned} S_{2n} &= S_{2n-1} + \binom{2n+2}{2} + 1 + 2 + 3 + \dots + n + n + (n-1) + \dots + 1 \\ &= S_{2n-1} + \binom{2n+2}{2} + n(n+1), \quad \forall n \geq 1. \\ S_{2n+1} &= S_{2n} + \binom{2n+3}{2} + 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) + n + (n-1) + \dots + 1 \\ &= S_{2n} + \binom{2n+3}{2} + (n+1)^2, \quad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Suy ra $S_{2n+1} = S_{2n-1} + 6n^2 + 11n + 5$, $\forall n \geq 1$.

Do vậy $S_{2n+1} = 2n^3 + \frac{17}{2}n^2 + \frac{23}{2}n + 5$, $\forall n \geq 1$.

Từ đó thay ngược lại ta cũng có $S_{2n} = 2n^3 + \frac{11}{2}n^2 + \frac{9}{2}n + 1$, $\forall n \geq 1$.

Chú ý $S_1 = 5$, $S_2 = 13$, $S_3 = 27$, $S_4 = 48$, $S_5 = 78$, $S_6 = 118$. □

Bài 100. Một câu lạc bộ toán học tổ chức các giải đấu cầu lông giao hữu đơn, mỗi vận động viên sẽ thi đấu các trận đấu đơn với vận động viên khác (không quan tâm đến kết quả thắng thua). Ta gọi chỉ số của một vận động viên là số trận đấu mà vận động viên đó tham gia thi đấu. Trước mỗi giải đấu ban tổ chức đưa ra một dãy số nguyên dương tăng ngặt $(a_1; a_2; \dots; a_k)$ và lịch thi đấu theo mã số để các vận động viên bốc thăm mã số và thi đấu. Cuối giải ban tổ chức sẽ trao kỉ niệm chương cho các vận động viên có chỉ số thuộc dãy số đã cho. Một số hạng của dãy số ban đầu được gọi là “số hạng đẹp” nếu có ít nhất 1 vận động viên có chỉ số bằng số hạng đó. Một giải đấu “**đẹp**” nếu mọi số hạng của dãy số ban đầu đều là “số hạng đẹp”.

- ① Tạo một lịch thi đấu cho giải đấu “**đẹp**” cho giải đấu có 6 vận động viên tham gia (đánh số các mã A, B, C, D, E, F) và dãy số ban đầu là $(1; 2; 3; 4; 5)$ theo mẫu

Ghi chú:

- Nếu vận động viên A thi đấu với vận động viên B thì các ô giao nhau giữa hàng A , cột B và hàng B , cột A đều đánh dấu X .
- Nếu vận động viên A không thi đấu với vận động viên B thì các ô giao nhau giữa hàng A , cột B và hàng B , cột A đều bỏ trống.

② Chứng minh rằng với dãy số cho trước luôn có thể xếp lịch thi đấu cho giải đấu “đẹp” có $a_k + 1$ vận động viên

Lời giải.

① Tạo một lịch thi đấu cho giải đấu “đẹp” cho giải đấu có 6 vận động viên tham gia (đánh số các mã A, B, C, D, E, F) và dãy số ban đầu là $(1; 2; 3; 4; 5)$ theo mẫu. Học sinh chỉ cần điền đúng lịch thi đấu

	A	B	C	D	E	F
A		X	X	X	X	X
B	X		X	X	X	
C	X	X		X		
D	X	X	X			
E	X	X				
F	X					

Bây giờ, ta chứng minh với dãy số $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ cho trước luôn có thể xếp lịch thi đấu cho giải đấu “đẹp” có $a_k + 1$ vận động viên. Mô hình hoá dạng đồ thị: mỗi vận động viên tham gia là một đỉnh, hai vận động viên thi đấu với nhau ta có một cạnh. Ta chứng minh rằng dãy số $(a_1; a_2; \dots; a_k)$ cho trước có thể xây dựng một đồ thị gồm $a_k + 1$ sao cho với mỗi $i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq k$ luôn tồn tại một đỉnh của đồ thị mà $\deg A = a_i$ bằng phương pháp quy nạp theo k . Với $k = 1$: đánh số các đỉnh của đồ thị là $B_1; B_2; \dots; B_{a_1+1}$ và nối đỉnh B_{a_1+1} với tất cả các đỉnh còn lại ta thu được đồ thị thoả điều kiện đề bài. Với $k = 2$: đánh số các đỉnh của đồ thị là $B_1; B_2; \dots; B_{a_2+1}$ và nối đỉnh B_{a_2+1} với tất cả các đỉnh; đỉnh B_{a_1} với các đỉnh $B_1; B_2; \dots; B_{a_2-1}$ ta thu được đồ thị thoả điều kiện đề bài.

② Giả sử nó đúng với mọi giá trị nhỏ hơn k , Ta chứng minh đúng khi $k \geq 3$: đánh số các đỉnh của đồ thị là $B_1; B_2; \dots; B_{a_k+1}$ ta chia tập đỉnh làm 3 tập hợp

$$\begin{cases} S_1 = \{B_i | i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq a_1\} \\ S_2 = \{B_i | i \in \mathbb{Z}, a_1 + 1 \leq i \leq a_{k-1} + 1\} \\ S_3 = \{B_i | i \in \mathbb{Z}, a_{k-1} + 2 \leq i \leq a_k + 1\} \end{cases}$$

Ta có $\begin{cases} |S_1| = a_1 \\ |S_2| = a_{k-1} - a_1 + 1 \\ |S_3| = a_k - (a_{k-1} + 1) \end{cases}$. Theo giả thiết quy nạp ta có thể xây dựng đồ thị trên các đỉnh

thuộc S_2 sao cho nhận tất cả các số hạng của dãy $(a_2 - a_1; a_3 - a_2; \dots; a_{k-1} - a_2)$ làm bậc.

(a) Nối mỗi đỉnh của S_2 với tất cả các đỉnh của S_1 trừ đỉnh B_1 : có $a_1 - 1$ đỉnh.

(b) Nối đỉnh B_1 với các đỉnh còn lại trong S_1 .

(c) Nối đỉnh B_{a_k+1} với tất cả các đỉnh khác.

Khi đó ta có $\begin{cases} \deg B_1 = a_1 \\ \deg B_{a_k+1} = a_k \end{cases}$ và các đỉnh thuộc S_2 nhận tất cả các số hạng của dãy $(a_2; a_3; \dots; a_{k-1})$ làm bậc.

Bài toán được giải quyết. □

Bài 101 (Vietnam TST 2014). Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy , xét các điểm nguyên có tọa độ thuộc tập hợp sau

$$T = \{(x; y) : -20 \leq x, y \leq 20, (x; y) \neq (0; 0)\}.$$

Tô màu các điểm thuộc T sao cho với mọi điểm có tọa độ $(x, y) \in T$ thì có đúng một trong hai điểm $(x; y)$ và $(-x; -y)$ được tô màu. Với mỗi cách tô như thế, gọi N là số các bộ $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ mà cả hai điểm này cùng được tô màu và $x_1 \equiv 2x_2, y_1 \equiv 2y_2 \pmod{41}$. Tìm tất cả các giá trị có thể có của N .

Lời giải.

Trước hết, ta chuyển bài toán từ 2 chiều thành 1 chiều. Ta có $2^{10} \equiv -1 \pmod{41}$ nên 40 số nguyên khác 0 có giá trị tuyệt đối không vượt quá 20 có thể chia thành 2 dãy, mỗi dãy có độ dài 20 sao cho nếu số hạng đầu chia 41 dư x thì số hạng sau chia 41 dư $2x$. Tô màu các số của dãy sao cho cứ 2 số đối nhau thì có đúng 1 số được tô màu. Ta quan tâm đến số lượng các cặp số liên tiếp cùng được tô màu trong dãy. Dễ thấy $2^{20} \equiv 1 \pmod{41}$ nên nếu thêm số hạng đầu của mỗi dãy vào cuối thì dãy mới gồm 21 số vẫn thỏa mãn tính chất trên nên ta có thể chuyển thành vòng tròn và phát biểu lại bài toán như sau: Cho đa giác đều 20 đỉnh nội tiếp trong một đường tròn sao cho trong 2 điểm đối xứng qua tâm thì có đúng 1 đỉnh được tô màu. Tính số các cặp đỉnh liên tiếp được tô màu có thể có. Với n là số chẵn, gọi S_n là tập hợp số các cặp kề nhau cùng được tô màu có thể có của đa giác có n đỉnh. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng $S_{4n} = \{2k+1 | 0 \leq k \leq n-1\}$ và $S_{4n-2} = \{2k | 0 \leq k \leq n-1\}$. Điều này có thể chứng minh bằng quy nạp như sau Với $n=2$ thì dễ thấy nhận xét đúng. Giả sử nhận xét đúng đến $n \geq 2$. Xét đa giác có $4n+2$ đỉnh. Đa giác này có thể tạo thành bằng cách thêm đỉnh A vào giữa hai đỉnh thứ $2n, 2n+1$ và thêm đỉnh B vào giữa hai đỉnh thứ $4n, 1$. Ta xét các trường hợp

- ① Nếu đỉnh $2n, 2n+1$ đều được tô và A không được tô thì tương ứng: đỉnh $4n, 1$ không được tô và B được tô. Lúc này, số cặp kề nhau cùng được tô giảm đi 1.
- ② Nếu đỉnh $2n, 2n+1$ đều được tô và A cũng được tô thì tương ứng: đỉnh $4n, 1$ không được tô và B không được tô. Số cặp kề nhau tăng lên 1.
- ③ Nếu trong hai đỉnh $2n, 2n+1$ có 1 đỉnh được tô và A cũng được tô thì tương ứng: trong hai đỉnh $4n, 1$ có 1 đỉnh được tô và B không được tô. Số cặp kề nhau tăng lên 1.
- ④ Nếu trong hai đỉnh $2n, 2n+1$, có 1 đỉnh được tô và A không được tô thì tương ứng: trong hai đỉnh $4n, 1$ có 1 đỉnh được tô và B được tô. Số cặp kề nhau tăng lên 1.

Do đó, $S_{4n+2} = \{x \pm 1 | x \in S_{4n}\}$ hay $S_{4n+2} = \{2k | 0 \leq k \leq n\}$. Tương tự, ta cũng có $S_{4n+4} = \{x \pm 1 | x \in S_{4n+2}\}$. Tất nhiên không xảy ra trường hợp S_{4n+4} có chứa số -1 vì để có trường hợp 0 cặp số ở $4n+2$, các đỉnh phải được tô xen kẽ và trường hợp giảm đi số bộ không xảy ra, suy ra $S_{4n+4} = \{2k+1 | 0 \leq k \leq n\}$. Rõ ràng trong cách chứng minh trên, ta cũng đã chỉ ra được cách xây dựng các trường hợp để có thể tô màu thỏa mãn được tất cả các giá trị trong tập hợp tương ứng. Nhận xét được chứng minh. Từ đó suy ra $S_{20} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Do đó, kết quả cho bài toán phụ sẽ là $2S_{20}$ với định nghĩa $2S = S + S = \{a+b | a, b \in S\}$. Quay trở lại bài toán ban đầu, để chuyển từ

1 thành phần x ở trên thành 2 thành phần (x, y) , ta có thể thực hiện như sau: Ứng với mỗi vòng tròn chứa các số thuộc dãy A , ta lấy một vòng tròn mới cũng gồm các số thuộc dãy A đặt lên đó sao cho mỗi số thuộc đường tròn cũ khớp với đúng một số thuộc đường tròn mới. Viết các cặp số khớp nhau thành một dãy, dãy đó chính là dãy các tọa độ điểm mà liền sau của (x_1, y_1) là $(2x_1, 2y_1)$ theo mod 41. Để thấy có tất cả 20 cách ghép như thế (cố định vòng tròn cũ và xoay vòng tròn mới). Tương tự với việc ghép các dãy $A - B, B - A, B - B$ nên có tổng cộng là 80 cách ghép tạo thành 80 dãy. Tuy nhiên, ta cũng xét thêm 4 dãy đặc biệt, tương ứng với các điểm nằm trên trục tung và trục hoành. Cụ thể là xét thêm dãy C gồm 20 số 0 và xét 4 cách ghép: $A - C, C - A, B - C, C - B$. Do đó, tổng cộng có 84 dãy các tọa độ. Theo chứng minh ở trên thì ở mỗi dãy, số các cặp có thể có là S_{20} vậy nên đáp số của bài toán là $84S_{20}$, cũng chính là các số chẵn từ $1 \cdot 84 = 84$ đến $9 \cdot 84 = 756$. Một cách tự nhiên khi ta lấy x, y thì nghĩ đến việc tìm $2x, 2y$ thay vì ngược lại là xét các điểm cùng được tô màu). Từ đó, khi biết các số có thể xoay thành 1 vòng tròn thì sẽ nhận thấy được miền giá trị kia chính là số cạnh và việc đưa thành 1 mô hình như đã nêu sẽ dễ trình bày nhất, mọi thứ đều sáng sủa hơn. Sẽ có ích khi ta phát biểu bài toán tổng quát sau đó làm việc với các tham số nhỏ để tìm ra quy luật. Bài này bản chất không khó, nhưng rất dễ sai nhất là khi kết luận vội vàng thông qua 1 số nhận xét nhỏ. Điểm mấu chốt là việc tách riêng hoành độ, tung độ, mô hình hóa dưới dạng đa giác đều và chú ý đến đồng dư thức $2^{10} = 1024 \equiv -1 \pmod{41}$. Bài này khá mới mẻ là dạng tổ hợp đếm có kết hợp số học, tuy phát biểu có phần gượng ép trong việc đặt vào trục tọa độ nhưng lại giúp học sinh dễ tưởng tượng. Việc giải quyết bài toán trong trường hợp 1 chiều mang tính quyết định để xử lý bài toán với nhiều chiều hơn. Chẳng hạn, trong không gian $Oxyz$ xét các điểm nguyên có tọa độ thuộc tập hợp

$$T = \{(x, y, z) : -20 \leq x, y, z \leq 20, (x, y, z) \neq (0; 0; 0)\}$$

Tô màu các điểm thuộc T sao cho với mọi điểm có tọa độ $(x, y, z) \in T$ thì có đúng 1 trong 2 điểm (x, y, z) và $(-x, -y, -z)$ được tô màu. Với mọi cách tô như thế, gọi N là số các bộ $(x_1; y_1; z_1), (x_2; y_2; z_2)$ mà cả 2 điểm này cùng được tô màu và các tọa độ của chúng thỏa mãn điều kiện $x_1 \equiv 2x_2, y_1 \equiv 2y_2, z_1 \equiv 2z_2 \pmod{41}$. Tìm tất cả các giá trị có thể có của N . $\square$

Bài 102. Xét tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 2^n\}, n \geq 2$. Tìm số các tập con B của A sao cho nếu tổng của hai phần tử của A là một lũy thừa của 2 thì đúng một trong hai số đó thuộc B .

Lời giải.

Giả sử B là một tập con của A có tính chất đã cho. Do $1 + 3 = 2^2$, ta có đúng một trong các số 1 hoặc 3 thuộc B .

- ① Nếu $1 \in B$ thì $3 \notin B$. Ta chứng minh bằng quy nạp rằng với số nguyên t bất kỳ, $0 \leq t < 2^{n-2}$, các số dạng $4t + 1$ thuộc B và các số dạng $4t + 3$ không thuộc B . Khẳng định đúng cho $t = 0$ và giả sử khẳng định đúng cho $t \leq s$. Do $4(s + 1) + 1$ là số lẻ nên tồn tại l sao cho $2^l < 4(s + 1) + 1 < 2^{l+1}$. Vì vậy $2(4s + 5) > 2 \cdot 2^l = 2^{l+1}$ suy ra $0 < 2^{l+1} - (4s + 5) < 4s + 5$. Đặt $x = 4s + 5$ và $y = 2^{l+1} - (4s + 5)$ thì $x + y = 2^{l+1}$ và do y có dạng $4m + 3$ ta kết luận $y \notin B$ và do đó $4(s + 1) + 1 \in B$. Tương tự $4(s + 1) + 3 \notin B$.
- ② Nếu $1 \notin B$ thì $3 \in B$ và ta chứng minh như trên rằng các số nguyên có dạng $4t + 1$ không thuộc B và các số nguyên có dạng $4t + 3$ thuộc B .

Như vậy các số lẻ trong B là hoặc tất cả các số nguyên có dạng $4t + 1$ hoặc tất cả các số nguyên dạng $4t + 3$. Đặt $x = 2^p x_0$ và $y = 2^q y_0$, với x_0, y_0 là lẻ và $p, q \in \mathbb{Z}^+$. Nếu $2^p x_0 + 2^q y_0 = 2^k$ và $p \neq q$, giả sử $p < q$, thì $x_0 + 2^{q-p} y_0 = 2^{k-p}$, điều này là không thể. Vì vậy $p = q$ và suy ra tổng các phần tử của các tập phân biệt $A_i = 2^i a : a$ là số nguyên lẻ, $i = 1, 2, \dots, n$ không là lũy thừa của 2. Với A_i bất kỳ, sau khi chia cho 2^i và áp dụng lý luận trên ta được hoặc tất cả các số nguyên dạng $2^i (4t + 1)$ thuộc B hoặc tất cả các số nguyên dạng $2^i (4t + 3)$ thuộc B . Vậy tồn tại 2^{n+1} tập B với tính chất đã cho. $\square$

Bài 103. Cho m, n ($m > n > 4$) là các số nguyên dương và A là một tập hợp con có đúng n phần tử của tập hợp $S = \{1, 2, 3, \dots, m\}$. Chứng minh rằng nếu

$$m > (n-1) \left(1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} \right)$$

thì ta luôn chọn được $n+1$ phần tử đôi một phân biệt $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in S$ sao cho các tập hợp $A_i = \{x + y + x_i \mid x \in A, y \in A\}$, $i = \overline{1, n+1}$ thỏa mãn $A_j \cap A_k = \emptyset$ với mọi $j \neq k$ và $j, k = \overline{1, n+1}$.

Lời giải.

Xét tập hợp $B = \{|x + y - z - t| \mid x, y, z, t \in A\}$. Ta sẽ chỉ ra bất đẳng thức sau

$$|B| \leq 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} \quad (1)$$

Thật vậy, ta xét các trường hợp sau

- ① Nếu 4 số x, y, z, t đều bằng nhau thì số các số dạng $|x + y - z - t|$ bằng 1.
- ② Nếu trong 4 số x, y, z, t có đúng 3 số bằng nhau, giả sử $x = y = z \neq t$. Khi đó $|x + y - z - t| = |x - t|$ suy ra có tối đa $\binom{n}{2}$ số $|x + y - z - t|$.
- ③ Nếu 4 số x, y, z, t có đúng 2 số bằng nhau. Khi đó nếu $x = y$ thì có tối đa $\binom{n}{3}$ số dạng này, còn nếu $x = z$ thì $|x + y - z - t| = |y - t|$ thì có tối đa $\binom{n}{2}$ số dạng này và đã xét ở trên.
- ④ Nếu 4 số x, y, z, t đôi một khác nhau thì có tối đa $\binom{n}{4}$ số $|x + y - z - t|$.

Do đó có nhiều nhất $1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4}$ số dạng $|x + y - z - t|$, từ đó suy ra bất đẳng thức (1).

Kiểm tra được ngay $A_2 \cap A_3 = \emptyset$, $A_1 \cap A_3 = \emptyset$. Cứ tiếp tục như vậy đến bước thứ n , ta đặt $C_n = C_{n-1} \setminus \{x + x_{n-1} \mid x \in B\}$ thì

$$|C_n| \geq |C_{n-1}| - |B| > (n-n)|B| = 0 \Rightarrow \exists x_{n+1} \in C_n \Rightarrow x_{n+1} > x_n$$

Khi đó ta kiểm tra được $A_i \cap A_j = \emptyset$ với mọi $i \neq j$. Vậy luôn tồn tại các phần tử $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in S$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. $\square$

Bài 104. Cho số nguyên dương $n \geq 2$ và trong mặt phẳng, xét $2n$ điểm phân biệt sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Nối $n^2 + 1$ cặp điểm trong số đó. Chứng minh rằng

- a) Có ít nhất 1 tam giác tạo thành.
- b) Có ít nhất n tam giác tạo thành.

Lời giải.

a) Bài toán này có thể giải quyết dễ dàng bằng quy nạp. Với $n = 2$, ta có 4 điểm được nối bởi 5 đoạn thẳng (tối đa là 6 đoạn) thì hiển nhiên phải tồn tại 1 tam giác. Giả sử khẳng định đúng với $n = k \geq 2$. Ta xét $2n + 2$ điểm và $(n+1)^2 + 1 = (n^2 + 1) + 2n + 1$ đoạn thẳng được nối thêm. Xét hai điểm A, B nào đó được nối với nhau.

- ☑ Nếu trong $2k$ điểm còn lại, có điểm nào đó cùng nối với A hoặc B thì rõ ràng điểm đó cùng với A, B tạo thành tam giác.
- ☑ Ngược lại, với mỗi điểm C trong các điểm còn lại thì sẽ không có đoạn CA hoặc CB nên với $2k$ điểm thì có không quá $2k$ đoạn nối với A hoặc B từ $2k$ điểm còn lại. Bỏ điểm A, B đi thì số cạnh sẽ giảm đi không quá $2k + 1$ và số còn lại ít nhất là $k^2 + 1$, Theo giả thiết quy nạp thì cũng tồn tại tam giác trong số các điểm này.

Ta có điều phải chứng minh.

b) Với $n = 2$, dễ thấy cũng có 2 tam giác được tạo thành. Giả sử khẳng định đúng với $n = k \geq 2$. Xét bộ $2k + 2$ điểm và có $(k + 1)^2 + 1$ đoạn thẳng được nối. Khi đó, theo câu a, tồn tại một tam giác, đặt là ABC . Gọi S_a, S_b, S_c lần lượt là tập hợp các điểm trong $2k - 1$ điểm còn lại và có nối với A, B, C . Khi đó, dễ thấy rằng có ít nhất $t = |S_a \cap S_b| + |S_b \cap S_c| + |S_c \cap S_a|$ tam giác được tạo thành. Theo nguyên lý bù trừ, ta có

$$|S_a \cup S_b \cup S_c| = |S_a| + |S_b| + |S_c| - t + |S_a \cap S_b \cap S_c|$$

Do $|S_a \cup S_b \cup S_c| \leq 2k - 1$ và $|S_a \cap S_b \cap S_c| \geq 0$ nên $t \geq |S_a| + |S_b| + |S_c| - (2k - 1)$. Ta xét 2 trường hợp

- ☑ Nếu $|S_a| + |S_b| + |S_c| \geq 3k - 1$ thì $t \geq k$ nên ngoài tam giác ABC , ta còn có thêm k tam giác nữa và tổng cộng có ít nhất $k + 1$ tam giác.
- ☑ Nếu $|S_a| + |S_b| + |S_c| \leq 3k - 1$, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $|S_a| \geq |S_b| \geq |S_c|$ thì rõ ràng, ta có

$$|S_b| + |S_c| \leq \frac{2}{3}(3k - 1) \Leftrightarrow |S_b| + |S_c| \leq 2k - 1$$

Khi đó, ta xóa đi điểm B, C thì sẽ mất đi không quá $2k$ đoạn thẳng và còn lại ít nhất $k^2 + 1$ đoạn thẳng nối $2k$ điểm. Theo giả thiết quy nạp thì trong đó sẽ có ít nhất k tam giác. Vậy theo nguyên lý quy nạp, khẳng định đúng với mọi n . $\square$

Bài 105. Giả sử m là một số nguyên dương. Tập con A của tập hợp các số nguyên dương được gọi là tập m -đầy nếu tổng các phần tử của A không vượt quá m và với mỗi $k = 1, 2, \dots, m$, tồn tại các phần tử phân biệt của A có tổng bằng k . Ví dụ, tập $A = \{1; 2; 3\}$ là một tập 6-đầy. Chứng minh rằng tồn tại các tập m -đầy khi và chỉ khi $m \neq 2, 4, 5, 9$.

Lời giải.

Trước hết, ta chứng minh nhận xét sau.

Nhận xét. Xét tập con của tập số nguyên dương

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n : a_1 < a_2 < \dots < a_n\}.$$

Đặt $m = \sum_{i=1}^n a_i$. Khi đó A là tập m -đầy nếu và chỉ nếu $a_1 = 1$ và $a_i \leq \sum_{j=1}^{i-1} a_j + 1$ với mỗi $i = \overline{2, n}$.

Chứng minh.

a) Giả sử A là tập m -đầy. Khi đó hiển nhiên ta phải có $a_1 = 1$. Tiếp theo, nếu $\exists i \in \{2, \dots, n\}$ và

$$a_i > \sum_{j=1}^{i-1} a_j + 1 \text{ thì } s = \sum_{j=1}^{i-1} a_j + 1 < m \text{ không thể là tổng các phần tử phân biệt của } A, \text{ trái với}$$

tính m -đầy của A . Vì vậy, phải có $a_i \leq \sum_{j=1}^{i-1} a_j + 1$ với mỗi $i = \overline{2, n}$.

- b) Giả sử $a_1 = 1$ và $a_i \leq \sum_{j=1}^{i-1} a_j + 1$ với mỗi $i = \overline{2, n}(*).$ Ta sẽ chứng minh A là tập m -đầy, bằng quy nạp theo n . Thật vậy, hiển nhiên ta có điều cần chứng minh khi $n = 1$. Giả sử ta đã có điều cần chứng minh khi $n = k - 1$ ($k \in \mathbb{Z}, k \geq 2$). Xét tập

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_k : a_1 < a_2 < \dots < a_k\}.$$

Hiển nhiên tập $B = A \setminus \{a_k\}$ thỏa mãn điều kiện $(*)$. Vì vậy, theo giả thiết quy nạp, B là tập m' -đầy, với $m' = \sum_{i=1}^{k-1} a_i$. Do đó, với mỗi số s , mà $1 \leq s \leq m'$, đều tồn tại các phần tử phân biệt của A có tổng bằng s . (1)

Xét s , mà $m' + 1 \leq s \leq m$. Do $a_k \leq m' + 1$ (theo $(*)$) nên $s \geq a_k$. Do đó, s có dạng $s = a_k + a$, với $a \in \mathbb{N}$ và $a \leq m'$ (vì $s \leq m = m' + a_k$). Nếu $a = 0$ thì $s = a_k$. Trường hợp $a \geq 1$, do $a \leq m'$ và do B là tập m' -đầy nên phải tồn tại các phần tử phân biệt $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r} \in B$ (cũng tức là thuộc A) sao cho $a = a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_r}$. Do đó $s = a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_r} + a_k$, với $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}$ và a_k là các phần tử phân biệt thuộc A . (2)

Từ (1) và (2), suy ra A là tập m -đầy. Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều cần chứng minh.

Ta trở lại bài toán. Bằng cách kiểm tra trực tiếp, dễ thấy không tồn tại các tập m -đầy khi $m = 2, 4, 5, 8, 9$. Với $m = 1, 3, 6, 7, 10$, các tập $\{1\}, \{1; 2\}, \{1; 2; 3\}, \{1; 2; 4\}, \{1; 2; 3; 4\}$, tương ứng, là tập m -đầy. Tiếp theo ta sẽ đi chứng minh nếu có tập m -đầy, với $m \geq 10$, thì sẽ chỉ ra được tập $(m + 1)$ -đầy. Giả sử

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n : a_1 < a_2 < \dots < a_n\} \subset \mathbb{Z}$$

là tập m -đầy, với $m \geq 10$. Từ định nghĩa tập m -đầy, hiển nhiên suy ra phải có $m = \sum_{i=1}^n a_i$. Xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1. Tồn tại i sao cho $a_i < a_1 + a_2 + \dots + a_{i-1} + 1$. (3)

Gọi j là số lớn nhất trong các số i thỏa mãn (3). Ta có $j \geq 3$, vì $a_1 = 1, a_2 = 2$ và $a_3 \in \{3; 4\}$. Nếu $j = n$, nghĩa là $a_n \leq \sum_{i=1}^{n-1} a_i + 1$, thì $T = (A \setminus \{a_n\}) \cup \{a_n + 1\}$ là tập có tính chất

$$(a) \sum_{a \in T} a = m + 1;$$

$$(b) \begin{aligned} a_1 = 1, a_k &\leq \sum_{i=1}^{k-1} a_i + 1 \text{ với mỗi } k = \overline{2, n-1} \text{ (do } A \text{ là tập } m\text{-đầy)} \text{ và đồng thời} \\ (a_n + 1) &\leq \sum_{i=1}^{n-1} a_i + 1. \end{aligned}$$

Vì vậy theo Nhận xét, T là tập $(m + 1)$ -đầy. Xét $3 \leq j < n$. Khi đó từ định nghĩa của j và theo Nhận xét, ta có

$$a_j < \sum_{i=1}^{j-1} a_i + 1 \text{ và } a_{j+1} = \sum_{i=1}^j a_i + 1.$$

Suy ra $a_{j+1} \neq a_j + 1$. Do đó, với lý do tương tự như ở trường hợp $j = n$, tập

$$T = (A \setminus \{a_j\}) \cup \{a_j + 1\}$$

là tập $(m + 1)$ -đầy.

Trường hợp 2. Với mọi $i = \overline{2, n}$, đều có $a_i \geq a_1 + a_2 + \dots + a_{i-1} + 1$. Khi đó, do A là tập m -đầy nên theo Nhận xét, ta có $a_i \geq a_1 + a_2 + \dots + a_{i-1} + 1$ với mọi $i = \overline{2, n}$. Suy ra $A = \{1; 2; 4; \dots; 2^{n-1}\}$ và $m = 2^n - 1$. Do $m \geq 10$ nên $n \geq 4$. Với $n = 4$, dễ dàng kiểm tra tập $\{1; 2; 3; 4; 6\}$ là tập 2^4 -đầy. Giả sử đã có

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_s : b_1 < b_2 < \dots < b_s\}$$

là tập 2^k -đầy ($k \geq 4$). Khi đó dễ thấy tập

$$B' = \{1, 2b_1, 2b_2, \dots, 2b_{s-1}, 2b_s - 1\}$$

là tập 2^{k+1} -đầy. Từ các lập luận trên suy ra, từ tập Am -đầy ($m \geq 10$) ta có thể xây dựng được tập $(m+1)$ -đầy.

Bài toán được giải quyết. □

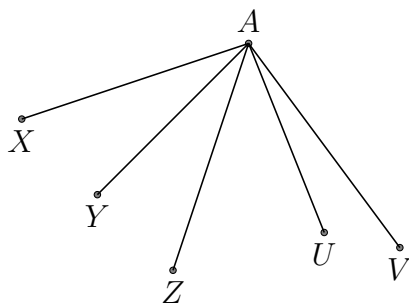
Bài 106. Người ta tô tất cả các cạnh và các đường chéo của một 2017-giác đều bởi k màu, sao cho các điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn

- ① Với mỗi màu x và với mỗi cặp đỉnh A, B của 2017-giác đều, hoặc đoạn thẳng AB được tô màu bởi x , hoặc tồn tại đỉnh C (của 2017-giác đều) sao cho các đoạn thẳng AC và BC cùng được tô bởi màu x ;
- ② Với X, Y, Z là 3 đỉnh đôi một phân biệt tùy ý của 2017-giác đều, tất cả các cạnh của tam giác XYZ được tô bởi tối đa 2 màu.

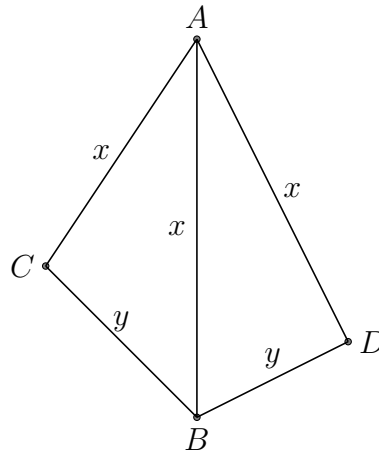
Chứng minh rằng $k \leq 2$ (2017-giác đều là đa giác đều có 2017 đỉnh).

Lời giải.

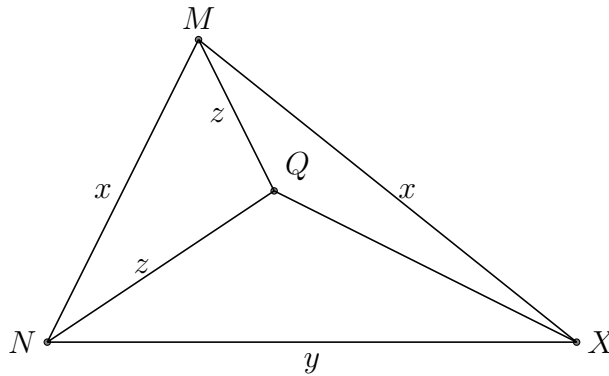
Ta sẽ giải bằng phương pháp phản chứng. Giả sử ngược lại, $k \geq 3$. Ta gọi mỗi tập hợp các đoạn thẳng (mỗi đoạn thẳng là một cạnh hoặc một đường chéo của đa giác đã cho) có chung một đầu mút và cùng được tô bởi một màu là một **chùm**. Nếu đầu mút chung của các đoạn thẳng trong chùm là đỉnh A (của đa giác đã cho) thì ta gọi chùm đó là chùm A . Tập hợp tất cả các đầu mút khác A của tất cả các đoạn thẳng thuộc chùm A được kí hiệu bởi S_A ; chẳng hạn, với chùm A trong hình dưới đây thì $S_A = \{X, Y, Z, U, V\}$.



Ta nói chùm A có màu x (hoặc màu của chùm A là x) nếu tất cả các đoạn thẳng thuộc chùm đó được tô màu x . Ta nói chùm A có tính chất P nếu trong tập S_A tồn tại một điểm, gọi là B , sao cho tập hợp tất cả các đoạn thẳng nối B với tất cả các điểm còn lại trong S_A là một chùm và đồng thời màu của chùm B khác màu của chùm A . Chẳng hạn, chùm A trong hình dưới đây là một chùm có tính chất P .



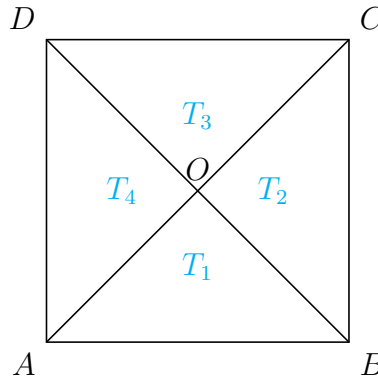
Xét hai đỉnh X, Y tùy ý của đa giác đã cho và giả sử đoạn thẳng XY được tô màu x . Vì $k \geq 3$ nên tồn tại một màu khác x , gọi là y . Do đoạn XY không được tô màu y nên theo điều kiện 1/ của bài ra, tồn tại đỉnh Z sao cho các đoạn ZX và ZY cùng được tô màu y . Như thế, các đoạn thẳng ZX, ZY tạo thành một chùm, chùm Z , mà trong S_Z có điểm X có tính chất: tất cả các đoạn thẳng nối X với tất cả các điểm còn lại trong S_Z tạo thành một chùm và đồng thời màu của chùm này (màu x) khác với màu của chùm Z (màu y). Do đó, chùm Z vừa nêu là chùm có tính chất P . Điều này cho thấy sự tồn tại của các chùm có tính chất P . Vì đa giác chỉ có 2017 đỉnh và mỗi đỉnh chỉ có thể sinh ra hữu hạn chùm nên số chùm là hữu hạn và do đó, chỉ có hữu hạn (lớn hơn 0) chùm có tính chất P . Vì thế, sự tồn tại chùm M có tính chất P sao cho tập S_M là tập gồm nhiều điểm nhất, trong đó các tập S_T mà chùm T là chùm có tính chất P . Giả sử màu của chùm M là màu x . Vì chùm M có tính chất P nên trong tập S_M tồn tại một điểm, gọi là N , sao cho tất cả các đoạn thẳng nối N với tất cả các điểm còn lại trong S_M đều được tô bởi màu khác x , gọi là y . Vì $k \geq 3$ nên ngoài các màu x và y , phải có ít nhất một màu nữa, gọi là z , đã được sử dụng để tô các cạnh, các đường chéo của đa giác đã cho. Vì đoạn MN được tô màu x , khác z , nên điều kiện 1/ của bài ra, phải tồn tại đỉnh Q sao cho MQ và NQ cùng được tô màu z . Do NQ được tô màu z , khác y , nên hiển nhiên $Q \notin S_M$. Xét điểm X bất kì, khác N , thuộc S_M .



Do tam giác MXQ có MX được tô màu x (vì $X \in S_M$) và MQ được tô màu z nên theo điều kiện 2/ của bài ra, đoạn QX phải được tô hoặc màu x hoặc màu z . Nếu QX được tô màu x thì tam giác NQX sẽ vi phạm điều kiện 2/ của bài ra (do NX được tô màu y (vì $X \in S_M$ và $X \neq N$), NQ được tô màu z). Suy ra, QX được tô màu z . Như vậy, tất cả các đoạn thẳng nối Q với tất cả các điểm thuộc tập hợp $\{M\} \cup S_M$ đều được tô màu z . Do đó, ta có chùm Q , với $S_Q = \{M\} \cup S_M$. Hơn nữa, do trong S_Q có điểm M mà tất cả các đoạn thẳng nối M với tất cả các điểm còn lại trong S_Q (chính là tất cả các điểm thuộc S_M) đều được tô cùng màu (màu x) nên chùm Q là chùm có tính chất P . Điều này mâu thuẫn với định nghĩa chùm M , do tập S_Q gồm nhiều điểm hơn tập S_M . Mâu thuẫn nhận được chứng tỏ giả sử phản chứng ở trên là sai và vì thế, ta có điều cần chứng minh. $\square$

Bài 107. Cho bảng hình vuông $k \times k$ với $k \in \mathbb{N}$ và n là một số nguyên dương cho trước. Người ta tô mỗi ô của bảng hình vuông bởi một trong n màu đã cho. Hỏi có bao nhiêu cách tô màu khác nhau bảng hình vuông đã cho, biết rằng hai cách tô màu được coi là giống nhau nếu chúng là ảnh của nhau qua phép quay quanh tâm của bảng hình vuông.

Lời giải.



Trường hợp 1. k là số chẵn, ta chia các ô trong bảng hình vuông thành 4 miền

- ☑ Miền T_1 : Không chứa các ô vuông nằm trên cạnh OA .
- ☑ Miền T_2 : Không chứa các ô vuông nằm trên cạnh OB .
- ☑ Miền T_3 : Không chứa các ô vuông nằm trên cạnh OC .
- ☑ Miền T_4 : Không chứa các ô vuông nằm trên cạnh OD .

Các phép quay nói sau đây là ngược chiều kim đồng hồ. Số cách tô màu của một miền là $a = n^{\frac{k^2}{4}}$. Ta gọi một cách tô màu là chu kì d nếu d là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho cách tô màu ảnh của chính nó qua phép quay $d \cdot 90^\circ$ là không đổi. Ta thấy d chỉ có thể bằng 1, 2, 4. Số cách tô màu chu kì $d = 1$ là a vì ta chỉ cần tô màu miền T_1 còn các miền T_2, T_3, T_4 lần lượt là ảnh của T_1 qua các phép quay $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$. Số cách tô màu chu kì $d = 2$ là $a^2 - a$ vì ta chỉ cần tô màu miền T_1, T_2 còn miền T_3, T_4 lần lượt là ảnh của T_1, T_2 qua phép quay 180° . Số cách tô màu chu kì $d = 4$ là

$$a^4 - (a^2 - a) - a = a^4 - a^2$$

Khi đó đáp số của bài toán là

$$\frac{a^4 - a^2}{4} + \frac{a^2 - a}{2} + a = \frac{a^4 + a^2 + 2a}{4}$$

Trường hợp 2. k là số lẻ. Số cách tô màu riêng cho ô ở tâm O là n vì nó không bị ảnh hưởng bởi phép quay. Các ô còn lại ta chia làm 4 miền giống như trường hợp 1. Đặt $a = n^{\frac{k^2-1}{4}}$. Và kết quả bài toán là

$$n \left(\frac{a^4 - a^2}{4} + \frac{a^2 - a}{2} + a \right) = n \cdot \frac{a^4 + a^2 + 2a}{4}$$

Bài toán được giải quyết. □

Bài 108. Trong mặt phẳng, cho đa giác lồi có 17 đỉnh $A_1 A_2 A_3 \dots A_{17}$, với mỗi cặp đỉnh A_i, A_j ($1 \leq i < j \leq 17$) bất kì trong số các đỉnh của đa giác, ta sẽ vẽ đúng một trong hai vector $\overrightarrow{A_i A_j}$ hoặc $\overrightarrow{A_j A_i}$. Sau khi thực hiện với mọi cặp đỉnh, gọi n là số tam giác có tổng các vector đặt

trên 3 cạnh bằng $\vec{0}$. Chứng minh rằng $n \leq 204$.

Lời giải.

Ta gọi S là số cặp vector kiểu $\{\vec{AC}, \vec{BC}\}$ hoặc cặp $\{\vec{CA}, \vec{CB}\}$ tức là số cặp vector có chung điểm đầu hoặc chung điểm cuối.

Với mỗi tam giác mà tổng các vector đặt trên các cạnh bằng $\vec{0}$ thì số cặp như trên bằng 0.

Với mỗi tam giác mà tổng các vector đặt trên các cạnh khác $\vec{0}$ thì số cặp như trên bằng 2.

$$\text{Vậy } S = 2 \left(\binom{17}{3} - n \right) = 1360 - 2n.$$

Với mỗi điểm A_i ($1 \leq i \leq 17$) ta gọi d_i là vector nhận A_i là điểm đầu và c_i là số vector nhận A_i là điểm cuối. Ta có $d_i + c_i = 16$ và $S = \sum_{i=1}^{17} \left(\binom{c_i}{2} + \binom{d_i}{2} \right)$, mặt khác

$$\binom{c_i}{2} + \binom{d_i}{2} = \frac{c_i^2 + d_i^2}{2} - \frac{c_i + d_i}{2} \geq \frac{(c_i + d_i)^2}{4} - \frac{c_i + d_i}{2} = \frac{16^2}{4} - \frac{16}{2} = 56$$

Nên $S \geq 56 \cdot 17 = 952$. Suy ra $1360 - 2n \geq 952$. Hay $n \leq 204$. □

Bài 109. Có 6 đội bóng đá tham gia một giải thi đấu bóng đá học sinh của một trường Trung học phổ thông chuyên. Biết rằng, giải đấu kéo dài 45 ngày và được tổ chức theo thể thức thi đấu vòng tròn (nghĩa là, hai đội bất kì đều thi đấu với nhau đúng một trận). Hỏi ban tổ chức giải có tất cả bao nhiêu phương án sắp xếp lịch thi đấu sao cho các điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn:

1. Ba trận đấu đầu tiên có sự góp mặt của cả 6 đội và diễn ra trong ba ngày liên tiếp, mỗi ngày một trận.
2. Kể từ trận đấu thứ ba, giữa hai trận đấu liên tiếp có ít nhất hai ngày không có trận đấu nào.

(Hai phương án sắp xếp được coi là khác nhau nếu tồn tại trận đấu thứ k , ($k \geq 1$) sao cho ở trận đấu đó, hai đội gặp nhau trong phương án này khác hai đội gặp nhau trong phương án kia hoặc tồn tại trận đấu thứ k , ($k \geq 3$) mà thời gian giữa trận đó và trận thứ $k + 1$ ở phương án này khác ở phương án kia).

Lời giải.

Theo giả thiết bài ra, tổng số trận đấu của toàn giải là

$$\frac{5 \cdot 6}{2} = 15 \text{ (trận)}.$$

Vì thế, căn cứ thời gian kéo dài của giải và các yêu cầu đối với lịch thi đấu, ban tổ chức giải có thể sắp xếp các trận đấu của giải bằng cách thực hiện lần lượt 3 bước sau:

- ☑ Bước 1. Sắp xếp 3 trận đấu cho 3 ngày đầu tiên của giải, đảm bảo điều kiện 1 được thỏa mãn.
- ☑ Bước 2. Ấn định 11 ngày thi đấu, trong 41 ngày (từ ngày thứ 4 đến ngày thứ 44 của giải), đảm bảo trước ngày tổ chức trận thứ 4, giữa 2 ngày liên tiếp không có trận đấu, cũng như sau ngày tổ chức trận thứ 14 phải có ít nhất 2 ngày không có trận đấu nào.
- ☑ Bước 3. Sắp xếp 12 trận đấu còn lại của giải vào 12 ngày thi đấu, gồm 11 ngày thi đấu đã được ấn định ở bước 2 và ngày thứ 45 của giải.

Khi đó, kí hiệu s_1, s_2, s_3 và s tương ứng là số phương án thực hiện bước 1, số phương án thực hiện bước 2, số phương án thực hiện bước 3 và phương án sắp xếp lịch thi đấu cho toàn giải, theo qui tắc nhân, ta có

$$s = s_1 \cdot s_2 \cdot s_3. \quad (1)$$

☑ Tính s_3 . Do mỗi cách sắp xếp 12 trận đấu vào 12 ngày thi đấu là một hoán vị của 12 trận đấu đó nên ta có $s_3 = 12!$. (2)

☑ Tính s_1 . Vì 3 trận đấu đầu tiên phải có sự góp mặt của cả 6 đội nên sẽ có $\binom{6}{2}$ cách chọn 2 đội cho trận đầu tiên, $\binom{4}{2}$ cách chọn 2 đội cho trận thứ hai và $\binom{2}{2}$ cách chọn 2 đội cho trận thứ ba. Vì thế, theo qui tắc nhân, ta có

$$s_1 = \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = \frac{6!}{(2!)^3}. \quad (3)$$

☑ Tính s_2 . Ta sẽ ấn định 11 ngày thi đấu bằng cách: Ngày nào không có trận đấu, ghi 0 và ngày có trận đấu, ghi 1.

Bằng cách trên, ứng với mỗi phương án thực hiện ở bước 2, ta sẽ có một dãy số gồm 11 số 1 và 30 số 0, thỏa mãn điều kiện trước số 1 đầu tiên, sau số 1 cuối cùng, cũng như giữa hai số 1 liên tiếp đều có ít nhất hai số 0. Ngược lại, ứng với mỗi dãy có tính chất như vừa nêu, ta sẽ có đúng một phương án thực hiện bước 2. Vì thế, kí hiệu S là tập hợp tất cả các dãy như vậy, ta sẽ có

$$s_2 = |S|. \quad (4)$$

($|X|$ kí hiệu là số phần tử của tập hữu hạn X).

Với mỗi dãy thuộc S , ta xóa đi đúng 2 số 0 trước số 1 đầu tiên, đúng 2 số 0 giữa mỗi cặp hai số 1 liên tiếp và đúng 2 số 0 sau số 1 cuối cùng. Khi đó, số 0 bị xóa đi ở mỗi dãy thuộc S là

$$2 \cdot 12 = 24 \text{ (số)}.$$

Vì thế, ứng với mỗi dãy thuộc S , ta sẽ có một dãy gồm 17 số, trong đó có 11 số 1 và 6 ($= 30 - 24$) số 0. Do đó, bằng cách xóa nêu trên, ta đã thiết lập một ánh xạ f từ tập S đến tập T gồm tất cả các dãy có 17 số, trong đó có 11 số 1 và 6 số 0. Dễ dàng chứng minh được f là một song ánh từ S đến T . Bởi thế

$$|S| = |T|. \quad (5)$$

Hiển nhiên, số phần tử của tập T chính bằng số cách chọn ra 6 vị trí (để ghi số 0) từ 17 vị trí cho trước. Do đó, từ (4) và (5), ta có

$$s_2 = |S| = |T| = \binom{17}{6} = \frac{17!}{6! \cdot 11!}. \quad (6)$$

Tóm lại, từ (1), (2), (3) và (6), ta được

$$s = \frac{6!}{(2!)^3} \cdot (12!) \cdot \frac{17!}{6! \cdot 11!} = \frac{3 \cdot 17!}{2}.$$

Bài toán được giải quyết hoàn toàn. □

Bài 110. Có 2017 tham dự một Festival quốc tế. Biết rằng, trong mỗi nhóm tùy ý gồm 7 người (trong 2017 người vừa nêu) đều có tối đa 12 cặp quen nhau. Hỏi, trong Festival có thể có tối đa bao nhiêu cặp quen nhau?

Lời giải.

Dưới đây, khi nói Festival, ta hiểu là Festival mà ở, trong mỗi nhóm tùy ý 7 người (trong số những người tham dự Festival) đều có không quá 12 cặp quen nhau.

- ☑ Trước hết, xét tính huống nhận được từ bài toán đã ra bằng cách thay 2017 bởi số nguyên dương $n \geq 7$ tùy ý; nghĩa là xét các Festival có n người tham dự ($n \geq 7$). Với Festival X có n người tham dự, kí hiệu $f_X(n)$ là số cặp quen nhau trong Festival đó. Bằng quy nạp theo $n \geq 7$, ta sẽ chứng minh

$$\begin{cases} f_X(n) \leq k^2 & \text{nếu } n = 2k, k \geq 4, \\ f_X(n) \leq k(k+1) & \text{nếu } n = 2k+1, k \geq 3, \end{cases} \quad (1)$$

với Festival có n người tham dự. Thật vậy

- Với $n = 7 = 2 \cdot 3 + 1$, theo giả thiết của bài ra, ta có

$$f_X(7) \leq 12 = 3(3+1),$$

với mọi Festival có 7 người tham dự. Như vậy (1) đúng, với $n = 7$.

- Giả sử (1) đã đúng với $n = 2k - 1 = 2(k - 1) + 1$, $k \geq 4$; nghĩa là, ta có

$$f_X(2k - 1) \leq (k - 1)k, \quad k \geq 4,$$

với mọi Festival X có $2k - 1$ người tham dự. Giả sử ngược lại, tồn tại một Festival X có $2k$ người tham dự và trong Festival này

$$f_X(2k) \geq k^2 + 1.$$

Khi đó, bằng cách cho một số thích hợp các cặp quen nhau trở thành không quen nhau, ta sẽ có Festival Y có $2k$ người tham dự và

$$f_Y(2k) = k^2 + 1. \quad (2)$$

Dễ thấy, ở Festival Y , phải tồn tại một người quen với tối đa k người khác, vì nếu ngược lại, một người quen với ít nhất $k + 1$ người khác thì

$$f_Y(2k) \geq \frac{2k(k+1)}{2} = k^2 + k \geq k^2 + 4 \quad (\text{do } k \geq 4),$$

mâu thuẫn với (2). Tách người quen với tối đa k người khác ra khỏi Festival Y , ta sẽ có Festival Z có $2k - 1$ người tham dự và

$$f_Z(2k - 1) \geq k^2 + 1 - k = (k - 1)k + 1,$$

trái với giả thiết quy nạp. Vì vậy, ta có điều phải chứng minh.

- Giả sử (1) đúng với $n = 2k$, $k \geq 4$; nghĩa là, ta có

$$f_X(2k) \leq k^2, \quad k \geq 4,$$

với mọi Festival X có $2k$ người tham dự. Xét $n = 2k + 1$. Ta cần chứng minh

$$f_X(2k + 1) \leq k(k + 1),$$

với mọi Festival X có $2k + 1$ người tham dự. Giả sử ngược lại, tồn tại một Festival X có $2k + 1$ người tham dự và

$$f_X(2k + 1) \geq k(k + 1) + 1 = k^2 + k + 1.$$

Khi đó bằng cách cho một số thích hợp các cặp quen nhau trở thành không quen nhau, ta sẽ có Festival Y có $2k + 1$ người tham dự và

$$f_Y(2k + 1) = k^2 + k + 1. \quad (3)$$

Dễ thấy, ở Festival Y , phải tồn tại một người quen với tối đa k người khác, vì nếu ngược lại, một người quen với ít nhất $k + 1$ người khác thì

$$f_Y(2k + 1) \geq \frac{(2k + 1)(k + 1)}{2} \geq k^2 + k \geq k^2 + 4$$

(do $k \geq 4$ và $f_Y(2k + 1) \in \mathbb{Z}$), mâu thuẫn với (3). Tách người quen với tối đa k người khác ra khỏi Festival Y , ta sẽ có Festival Z có $2k$ người tham dự và

$$f_Z(2k) \geq k^2 + k + 1 - k = k^2 + 1,$$

trái với giả thiết quy nạp. Vì vậy, ta có điều cần chứng minh.

- Vậy, tóm lại, theo nguyên lí quy nạp, (1) được chứng minh.

☑ Trở lại bài toán đã ra.

Ta có $n = 2017 = 2 \times 1008 + 1$. Vì thế, theo kết quả đã chứng minh ở trên, ta có

$$f_X(2017) \leq 1008 \times 1009 = 1017072,$$

với mọi Festival X có 2017 người tham dự.

Hơn nữa, xét một nhóm có 2017 người, mà 2017 người này có thể tách thành hai nhóm con, một nhóm con gồm có 1008 người và một nhóm con gồm 1009 người, sao cho hai người trong cùng một nhóm con không quen nhau và mỗi người ở nhóm con này đều quen với tất cả mọi người ở nhóm con kia. Dễ thấy, nhóm người này cho ta một Festival X_0 có 2017 người tham dự và có

$$f_{X_0}(2017) = 1008 \times 1009 = 1017072.$$

Vậy số cặp quen tối đa có thể ở Festival nêu trong bài ra là 1017072. □

Bài 111. Với $n \in \{1; 2; 3\}$, ta gọi một số tự nhiên k là **số kiểu** n nếu: $k = 0$ hoặc k là một số hạng của dãy $1, n + 2, (n + 2)^2, (n + 2)^3, \dots$; hoặc k là tổng của một số số hạng của dãy trên. Chứng minh rằng bất kỳ số nguyên dương nào cũng biểu diễn được dưới dạng tổng của một số kiểu 1 với một số kiểu 2 và một số kiểu 3.

Lời giải.

Xét dãy số (a_k) với $\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_{3k+2} = 3^{k+1} \\ a_{3k+3} = 4^{k+1} \\ a_{3k+4} = 5^{k+1} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N}).$ Đặt $S_k = a_0 + a_1 + \dots + a_k \quad (k \in \mathbb{N}^*)$. Ta chứng minh

mọi số nguyên dương $n \leq S_k$ có thể viết thành tổng một số số hạng có chỉ số khác nhau của dãy (a_k) . Thật vậy,

- ① Với $k = 1$ thì $S_1 = 2$, suy ra $n = 1 = a_0$ hoặc $n = 2 = a_0 + a_1$.

② Với $k = 2$ thì $S_2 = 5$, suy ra $n = 1 = a_0, n = 2 = a_0 + a_1, n = 3 = a_2, n = 4 = a_3, n = 5 = a_4$.

Giả sử khẳng định đúng đến k , tức là mọi số nguyên dương $n \leq S_k$ có thể viết thành tổng một số số hạng có chỉ số khác nhau của dãy (a_k) (1).

Ta chứng minh khẳng định đúng đến $k + 1$, tức là cần chứng minh mọi số nguyên dương $n \leq S_{k+1}$ có thể viết thành tổng một số số hạng có chỉ số khác nhau của dãy (a_k) . Có hai khả năng xảy ra.

Khả năng 1. $n \leq S_k$ thì theo (1), ta có n có thể viết thành tổng một số số hạng có chỉ số khác nhau của dãy (a_k) .

Khả năng 2. $S_k < n \leq S_{k+1}$, xét $m = n - a_{k+1} \leq S_{k+1} - a_{k+1} = S_k$ hay m là số nguyên dương không vượt quá S_k nên theo (1), m có thể viết thành tổng một số số hạng có chỉ số khác nhau của dãy (a_k) . Suy ra $n = m + a_{k+1}$ cũng có thể viết thành tổng một số số hạng có chỉ số khác nhau của dãy (a_k) .

Theo nguyên lý quy nạp ta có khẳng định đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài 112. Có $n \geq 2$ đội bóng tham gia một giải đấu bóng đá. Giải đấu được tổ chức theo hình thức thi đấu vòng tròn: 2 đội bóng bất kì thi đấu với nhau đúng 1 trận. Cách tính điểm như sau: sau mỗi trận, đội thắng được 3 điểm, đội thua được 0 điểm, còn nếu hòa thì cả 2 đội được 1 điểm. Sau khi giải đấu kết thúc, người ta thấy rằng không có 2 đội nào có cùng số điểm. Hỏi khoảng cách tối thiểu đội đứng đầu và đội đứng cuối là bao nhiêu?

Lời giải.

Câu trả lời là 2 nếu $n = 2$; 3 nếu $n = 3$; và $n - 1$ nếu $n \geq 4$.

① Với $n = 2$ thì rõ ràng 2 đội không hòa nhau, và do đó khoảng cách điểm duy nhất là 2.

② Với $n = 3$ thì rõ ràng đội đứng đầu phải thắng ít nhất 1 trận. Nếu đội đứng đầu thắng 2 trận thì đội này có 6 điểm. Trong trường hợp này, hai đội còn lại có 0 điểm. Khoảng cách giữa các đội đứng đầu và đứng cuối trong trường hợp này là 6 điểm. Giả sử đội đứng đầu thắng 1 hòa 1. Nếu 2 đội còn lại hòa nhau thì rõ ràng tổng số điểm của các đội phải là 4, 2, 1; do đó khoảng cách giữa các đội đứng đầu và đứng cuối bằng là 3. Nếu 2 đội còn lại không hòa nhau, thì dễ thấy đội cuối bảng phải là đội thua cuộc. Trong trường hợp này, 2 đội đầu bảng hòa nhau và có cùng số điểm, mâu thuẫn. Vậy, với $n = 3$ thì khoảng cách tối thiểu giữa đội đứng đầu và đứng cuối là 3.

③ Với $n \geq 4$. Hiển nhiên rằng do n đội có số điểm đôi một khác nhau và là các số nguyên, khoảng cách giữa đội đứng đầu và đội đứng cuối $\geq n - 1$. Ta sẽ chỉ ra rằng nếu $n \geq 4$ thì đánh giá này hiển nhiên này là chặt. Cụ thể hơn, ta sẽ chứng minh bằng qui nạp khẳng định sau: với mọi $n \geq 4$, tồn tại một giải đấu với n đội sao cho sau khi giải đấu kết thúc, tổng số điểm của các đội lần lượt là $2n - 3, 2n - 4, \dots, n - 2$.

Ta lập luận bằng quy nạp. Với $n \geq 4$ ta dễ dàng xây dựng được một giải đấu với khoảng cách đội đầu và đội cuối là 3. Chẳng hạn với 4 đội A, B, C, D mà A thắng B , hòa với C, D ; B hòa với C và thua D ; C hòa với D thì tổng số điểm các đội tương ứng là 5, 4, 3, 2. Giả sử tồn tại một giải đấu với n đội với tổng số điểm lần lượt là $2n - 3, 2n - 4, n, \dots, n - 2$. Để xây dựng một giải đấu với $n + 1$ đội, ta bổ sung đội thứ $n + 1$ vào giải đấu đó. Ta để đội $n + 1$ thắng đội thứ 1 (đội có $2n - 3$ điểm), thua các đội thứ 2, 3; thắng đội thứ 4, thua đội thứ 5, 6, ... cho đến khi đội thứ $n + 1$ còn phải gặp 1, 2, 3 đội cuối cùng (tùy theo $n \equiv 1, 2$ hay $0 \pmod{3}$). Trong trường hợp thứ nhất ($n \equiv 1 \pmod{3}$), ta để đội thứ $n + 1$ hòa đội thứ n ; trong trường hợp số hai, ta để đội thứ $n + 1$ hòa đội thứ $n - 1$ và thua đội thứ n ; trong trường hợp thứ ba, ta để đội thứ $n + 1$ hòa với đội thứ $n - 2$, thua đội thứ $n - 1$ và thắng đội thứ n . Bằng các tính toán đơn giản, ta dễ dàng kiểm tra được rằng trong cả ba trường hợp ta thu được giải đấu với $n + 1$ đội phân bố các điểm là $2n - 1, 2n - 2, \dots, n - 1$. Bài toán được chứng minh. $\square$

Bài 113. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ với $A(0; 0)$, $B(m, 0)$, $C(m, n)$, $D(0, n)$ trong đó m, n là các số tự nhiên lẻ. Hỏi có thể phân chia hình chữ nhật $ABCD$ thành các tam giác không có điểm chung trong, sao cho thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- ① Mỗi tam giác có ít nhất một cạnh nằm trên các đường thẳng $x = i$ hoặc $y = j$ ($i, j \in \mathbb{N}$) (Gọi là cạnh đẹp) và đường cao của tam giác ứng với cạnh này có độ dài 1.
- ② Mỗi cạnh không đẹp là cạnh chung của đúng hai tam giác;
- ③ Có nhiều nhất một tam giác có hai cạnh đẹp?

Lời giải.

Ta sẽ chứng minh không thể thực hiện được phép phân chia theo yêu cầu đề bài bằng cách chứng minh: với mỗi phép phân chia thỏa mãn 1) và 2) thì luôn tồn tại hai tam giác mà mỗi tam giác có hai cạnh đẹp (*). Thật vậy. Xét tất cả các trung điểm của các cạnh không đẹp của tất cả các tam giác. Hai trung điểm được nối với nhau bằng một đoạn nếu chúng là hai trung điểm của hai cạnh không đẹp của cùng một tam giác. Xét đồ thị gồm các đỉnh là tất cả các trung điểm nói trên và các cạnh là các đoạn được nối nối trên. Vì mỗi cạnh không đẹp chỉ là cạnh chung của đúng 2 tam giác nên mỗi đỉnh của đồ thị chỉ có bậc là 0 hoặc 1 hoặc 2.

- ① Nếu có một đỉnh bậc 0 thì cạnh không đẹp nhận đỉnh này làm trung điểm sẽ là cạnh chung của hai tam giác mà mỗi tam giác đều có hai cạnh đẹp. (*) được chứng minh.
- ② Nếu có một đỉnh bậc 1 thì cạnh không đẹp nhận đỉnh này làm trung điểm sẽ là cạnh chung của một tam giác có 2 cạnh không đẹp và một tam giác có hai cạnh đẹp. Mặt khác tổng số bậc của các đỉnh luôn là số chẵn nên tồn tại một đỉnh nữa cũng có bậc 1. Và như vậy sẽ có một tam giác nữa có hai cạnh đẹp. (*) được chứng minh.
- ③ Nếu tất cả các đỉnh đều bậc 2: khi đó ta có thể chia đồ thị đang xét thành các vòng. Nhận thấy mỗi tam giác đều có cạnh đẹp và đường cao ứng với cạnh này có độ dài 1 nên đường trung bình của các tam giác luôn nằm trên các đường thẳng $x = i + \frac{1}{2}$ hoặc $y = j + \frac{1}{2}$ ($i, j \in \mathbb{N}$). Điều này có nghĩa các vòng nói trên chính là các chu trình gồm các đoạn thẳng song song với trục Ox hoặc Oy và nối tâm các hình vuông đơn vị chứa trong hình chữ nhật $ABCD$. Hiển nhiên tâm của một hình vuông đơn vị bất kì luôn thuộc vào một chu trình nào đó như thế.

Lại có, mỗi chu trình chỉ gồm các cạnh hoặc song song với Ox hoặc song song với Oy nên số tâm các hình vuông đơn vị trên chu trình đó luôn là số chẵn. Điều này mâu thuẫn với m, n là số lẻ. Vậy bài toán được chứng minh xong. $\square$

Bài 114. Tại một thị trấn có đúng 2017 người và mỗi người trong thị trấn đều sở hữu một cái mũ. Vào ngày đầu tiên của năm mới, tất cả mọi người trong thị trấn đều đem mũ của mình tặng cho một người nào đó trong thị trấn (không ai giữ lại mũ của mình). Chứng minh rằng có thể chọn ra một nhóm gồm 673 người trong thị trấn thỏa mãn nếu a, b là hai người tùy ý trong nhóm thì a không tặng mũ cho b và b cũng không tặng mũ cho a .

Lời giải.

- ☑ Gọi X là tập tất cả 2017 người trong thị trấn. Một tập con A của X được gọi là “tốt” nếu không có người nào trong A nhận mũ từ một người cũng trong A . Theo nguyên lý cực hạn, tồn tại một tập con S của X là tập “tốt” có số phần tử lớn nhất.
- ☑ Kí hiệu T là tập tất cả những người nhận mũ từ các phần tử thuộc S . Ta có $S \cap T = \emptyset$ và $|T| \leq |S|$.

- ☑ Đặt $U = X \setminus (S \cup T)$. Với $a \in U$ tùy ý, đặt $B = S \cup \{a\}$. Do tính lớn nhất của S nên B không là tập “tốt”, nghĩa là tồn tại một phần tử $x \in B$ gửi mũ cho một phần tử cũng thuộc B . Mà $x \notin S \Rightarrow x = a$ và a gửi mũ cho một phần tử thuộc S . Do $a \in U$ tùy ý nên mọi phần tử thuộc U đều gửi mũ cho một phần tử thuộc S . Như vậy U cũng là tập “tốt”, suy ra $|U| \leq |S|$, suy ra

$$|S| \geq 2017 - |S \cup T| = 2017 - |S| - |T| \geq 2017 - 2|S| \Rightarrow 3|S| \geq 2017 \Rightarrow |S| \geq 673$$

Bài toán được giải quyết. □

Bài 115 (Bulgarian Winter Math 2001). Ivan và Peter cùng tham gia trò chơi như sau. Lần lượt, mỗi người điền một chữ số 0 hoặc 1 lên một hàng theo thứ tự từ trái qua phải cho đến khi được 2001 chữ số thì dừng lại. Luật chơi là, số thu được viết trong hệ cơ số 2 không là tổng của hai số chính phương thì Peter thắng và ngược lại. Giả sử rằng, Peter là người bắt đầu trò chơi. Chứng minh rằng Peter luôn có chiến thuật để thắng Ivan.

Lời giải.

Nhận xét. Một số trong hệ cơ số 2 nếu biểu diễn được thành các nhóm mà mỗi nhóm gồm chẵn chữ số 1 liên tiếp và chẵn chữ số 0 liên tiếp thì số này không thể viết thành tổng của hai số chính phương. Giả sử nhận xét trên là đúng, ta xây dựng chiến thuật cho Peter như sau.

- ☑ Lần đầu tiên, Peter viết số 0.
- ☑ Các lần tiếp theo Ivan viết số nào thì Peter viết số đó.

Ngoại trừ một trường hợp đặc biệt, đó là các số từ vị trí 1 đến 1996 gồm toàn các chữ số 0 (khi đó còn 5 chữ số) và lượt viết của 5 chữ số cuối này là Peter (lượt 1997, 1999, 2001), còn Ivan (lượt 1998, 2000). Trong trường hợp này, chiến thuật Peter thay đổi như sau

- ☑ Lượt 1997, Peter viết số 1.
- ☑ Lượt 1998, nếu Ivan viết số 0 thì, lượt 1999 và lượt 2001, Peter đều viết số 1.
- ☑ Lượt 1998, nếu Ivan viết số 1 thì, lượt 1999, Peter viết số 1; lượt 2000 Ivan viết số nào thì lượt 2001 Peter viết lại số ở lượt 2000.

Như vậy số thu được sẽ nằm ở hai trường hợp

- ① Trường hợp thường, ta thấy số thu được là số thỏa mãn nhận xét nên hiển nhiên số thu được không thể viết thành tổng của hai số chính phương. Lưu ý rằng chữ số 0 đầu tiên của Peter không làm ảnh hưởng tới nhận xét vì nó không mang giá trị khi biểu diễn trong hệ cơ số 2.
- ② Trường hợp đặc biệt, kiểm tra trực tiếp, số thu được sẽ thuộc tập hợp $X = \{21; 23\} \cup \{24; 27\}$. Dễ thấy rằng, mỗi phần tử thuộc X không viết được thành tổng của hai số chính phương.

Như vậy, cả hai trường hợp đều suy ra Peter là người thắng cuộc. Vấn đề còn lại của bài toán là chứng minh nhận xét. Do số thu được có viết thành các nhóm chẵn chữ số 1 liên tiếp và chẵn chữ số 0 liên tiếp nên ta có thể viết số thu được thành tổng của các số dạng $1100\dots 00_2 = 3 \cdot 4^k$ (có $2k$ chữ số 0). Do đó, số thu được sẽ có dạng $T = (4n + 3) \cdot 4^m$. Bây giờ, việc còn lại là ta chứng minh $T = x^2 + y^2$ không có nghiệm nguyên. Phản chứng, phương trình $T = x^2 + y^2$ có nghiệm nguyên. Do $T = (4n + 3) \cdot 4^m$ nên T có ước nguyên tố $p \equiv 3 \pmod{4}$ với số mũ lẻ. Đến đây, dùng định lý *Fermat* nhỏ trong số học là suy ra điều vô lý. □

Bài 116. Cho một bảng vuông cỡ $2n \times 2n$ (với n là số nguyên dương). Ta gọi một *đường đi chéo* là một ô vuông hoặc một tập hợp các ô vuông phân biệt $C_1, C_2, \dots, C_k$ (với k là số nguyên dương) sao cho hai ô C_i, C_{i+1} có đúng một đỉnh chung ($i = 1; k - 1$). Hai đường đi chéo được

gọi là *rời nhau* nếu chúng không có ô vuông chung. Hỏi bảng vuông đã cho có thể phân hoạch thành ít nhất bao nhiêu đường đi chéo rời nhau?

Lời giải.

Gọi bảng ô vuông là $ABCD$. Tô màu đen trắng cho các ô vuông xen kẽ theo kiểu bàn cờ sao cho các ô ở góc A, C màu trắng và các ô ở góc B, D màu đen. Do mỗi đường đi chéo là một tập hợp các ô vuông cùng màu, nên ta chỉ cần tìm số đường đi chéo rời nhau ít nhất mà các tập ô vuông màu trắng có thể phân hoạch thành. Ta điền vào mỗi ô trắng số 1 hoặc số 0 như hình vẽ.

A	1		1	...		1		B
		0		...		0		1
	1		1	...		0		
	•	•	•		•	•	•	
	•	•	•		•	•	•	
	•	•	•		•	•	•	
		0		...	1		1	
	1		0	...		0		
D		1		...	1		1	C

Theo đó, màu sắc và số điền trên các ô đối xứng nhau qua đường chéo BD . Đồng thời trên mỗi phía của BD , mỗi cặp ô kề nhau thì được điền số khác nhau. Giả sử tập ô trắng được phân hoạch thành m đường đi chéo rời nhau. Khi một đường đi chéo có hai ô kề nhau cùng điền số 1 thì ta tách đường đi đó làm đôi tại vị trí điểm chung của hai ô đó. Ta tiếp tục làm như vậy khi còn có thể. Do trên bảng có đúng n cặp ô số 1 kề nhau cùng điền một số nên số lần tách nhiều nhất là n , vì vậy số đường đi chéo tạo thành nhiều nhất là $m + n$. Trên mỗi đường đi chéo bây giờ, hai ô kề nhau luôn có ít nhất một số 0, nên số ô điền 1 nhiều hơn số ô điền 0 nhiều nhất là một. Mặt khác dễ thấy tổng số ô điền 1 nhiều hơn tổng số ô điền 0 ở trên bảng là $2n$. Do đó số đường đi chéo lúc này ít nhất là $2n$. Vì vậy $m + n \geq 2n$, hay $m \geq n$. Kết hợp với tập các ô đen, ta có số đường đi chéo ít nhất là $2n$. Cuối cùng ta chỉ ra một cách phân hoạch thỏa mãn: Nối các ô đen của hai hàng đầu và nối các ô trắng của hai hàng đầu lại, khi đó hai hàng đầu phân hoạch thành hai đường đi chéo. Do đó ta có thể phân hoạch $2n$ hàng thành $2n$ đường đi chéo. $\square$

Bài 117. Trên bảng ô vuông 34×34 , có tất cả các ô vuông được điền dấu $+$. Mỗi lần thao tác, ta được chọn một dòng hoặc một cột tùy ý của bảng và đổi dấu tất cả các dấu trên đó, từ $+$ sang $-$ và từ $-$ sang $+$. Hỏi sau một số lần thao tác, có thể thu được số dấu $+$ là:

- ① 17
- ② 8 được hay không?

Lời giải.

Ta thấy rằng chỉ cần quan tâm đến những dòng/cột đã bị thay đổi số lẻ lần. Sau một số lần thao tác, ô dấu $+$ là ô bị tác động số chẵn lần, do đó bài toán trở thành đếm số ô bị tác động số chẵn lần. Gọi p là số dòng bị thay đổi số lẻ lần và q là số cột bị thay đổi số lẻ lần. Khi đó, sẽ có hai nhóm các ô bị tác động số chẵn lần là

- ☒ Các ô không thuộc về p dòng, q cột nêu trên, có $(34 - p)(34 - q)$ ô như thế.

☑ Các ô thuộc về một trong p dòng và một trong q cột nêu trên, có pq ô như thế.

Do đó, dễ dàng tính được sẽ có $(34 - q)(34 - q) + pq = 34^2 - 34(p + q) + 2pq$ dấu + còn lại.

a) Từ đó dễ thấy biểu thức $34^2 - 34(p + q) + 2pq$ luôn là số chẵn nên không thể nhận được đúng 17 dấu +.

b) Ta đưa về phương trình nghiệm nguyên không âm là

$$(34 - q)(34 - q) + pq = 8 \Leftrightarrow 34^2 - 34(p + q) + 2pq = 8 \\ \Leftrightarrow 17^2 - 17(p + q) + pq = 4 - 17^2 \Leftrightarrow (17 - p)(17 - q) = -15 \cdot 19.$$

Do 19 là số nguyên tố nên trong hai thừa số $17 - p, 17 - q$, phải có một thừa số chia hết cho 19. Chú ý rằng $p, q \in \{0, 1, 2, \dots, 34\}$ nên $|17 - p| \leq 17$ và $|17 - q| \leq 17$. Vì vậy không có số nào chia hết cho số 19. Suy không tồn tại p, q thỏa mãn đẳng thức ở trên, tức là không thể có 8 dấu +. □

Bài 118. trong một cuộc thi toán gồm có 2 phần thi (phần thi đầu và phần thi sau) và có tất cả 28 câu hỏi ở cả 2 phần thi. Mỗi người giải chính xác 7 câu hỏi. Mỗi cặp câu hỏi được giải chỉ bởi 2 người chơi.

- ① Tìm số người chơi trong cuộc thi.
- ② Chứng minh rằng tồn tại một người chơi không giải được câu nào hoặc ít nhất 4 câu hỏi ở phần thi đầu.

Lời giải.

- ① Giả sử có n người chơi $A_1, A_2, \dots, A_n$ và 28 bài tập $T_1, T_2, \dots, T_{28}$ trong đó $T_1, T_2, \dots, T_m$ là m bài trong phần thi thứ nhất. Ta gọi S là số bộ ba A_k, T_i, T_j nếu A_k giải được 2 bài T_i, T_j . Theo điều kiện đề bài thì ta có $|S| = n \binom{7}{2} = 2 \binom{28}{2}$. Suy ra $n = 36$. Vậy có tất cả 36 người chơi trong cuộc thi.
- ② Với mỗi T_i , giả sử có r người $A_1, A_2, \dots, A_r$ giải được bài T_i , thì mỗi $A_1, A_2, \dots, A_r$ phải giải được thêm 6 bài khác ngoài T_i nên sẽ có $6r$ bộ ba được tính trong S có chứa T_i . Mặt khác, với mỗi $T_j (j \neq i, 1 \leq j \leq 28)$, có chính xác 2 người giải được 2 bài T_i, T_j và 2 người này phải thuộc $A_1, A_2, \dots, A_r$. Có tất cả $2 \cdot 27 = 54$ bộ 3 chứa T_i trong S . Vậy $6r = 54$ hay $r = 9$. Điều này có nghĩa là mỗi bài tập được giải bởi 9 người. Giả sử điều cần chứng minh là sai, số bài tập được giải của mỗi người ở phần thi đầu là 1, 2 hoặc 3. Gọi x, y, z là số người giải được 1, 2, 3 bài theo thứ tự lần lượt. Ta có

$$x + y + z = 36. \quad (1)$$

Ta đi đếm số cặp (A_i, T_j) trong đó bài tập T_j ở phần thi đầu tiên được giải bởi A_i :

$$x + 2y + 3z = 9m. \quad (2)$$

(Do mỗi bài được giải bởi 9 người). Ta đi đếm số bộ ba A_k, T_i, T_j nếu A_k giải được 2 bài T_i, T_j ở phần thi đầu tiên

$$\binom{2}{2} \cdot y + \binom{3}{2} \cdot z = 2 \cdot \binom{m}{2}. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta thu được $x = m^2 - 19m + 108, y = -2m^2 + 29m - 108, z = m^2 - 10m + 36$.

Tuy nhiên, $y = -2m^2 + 29m - 108 = -2 \left(m - \frac{29}{4} \right)^2 - \frac{23}{8} < 0$, vô lý, do y là số nguyên không âm. Vậy điều ta giả sử là sai.

Ta có điều phải chứng minh. □

Bài 119.

- ① Có 4 cặp vợ chồng được xếp ngồi trên một ghế dài. Biết rằng mỗi người vợ chỉ ngồi cạnh chồng mình hoặc ngồi cạnh một người phụ nữ khác. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi thỏa mãn.
- ② Có n ($n \in \mathbb{N}^*, n \geq 4$) cặp vợ chồng tham dự buổi dạ tiệc. Biết rằng mỗi người đều có thể trò chuyện với tất cả những người khác, trừ vợ hoặc chồng mình. Các cuộc trò chuyện lập thành các nhóm người $C_1, C_2, \dots, C_k$ với tính chất sau: Không có một cặp vợ chồng nào ở trong cùng một nhóm và hai người bất kì không phải vợ chồng thì đều có đúng một nhóm để họ trò chuyện. Chứng minh rằng $k \geq 2n$.

Lời giải.

- ① Trước hết ta có $4!$ cách xếp chỗ cho 4 phụ nữ. Ta cố định một bộ 4 người này trong khi đếm.
 - ☑ Nếu giữa 2 nữ mà có nam thì phải có ít nhất 2 nam, cũng vậy nếu giữa hai nam mà có nữ thì phải có ít nhất 2 nữ.
 - ☑ Ta coi những người phụ nữ là các nhóm, thì ta có các cách biểu diễn nhóm như sau:
 $4 = 4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$.
 1. Nếu 4 nữ tạo thành nhóm $(1, 1, 1, 1)$: khi đó có ít nhất 1 nữ phải ngồi giữa 2 người đàn ông, không thỏa mãn.
 2. Nếu 4 nữ tạo thành nhóm $(2, 1, 1)$: khi đó ở giữa nhóm $(2, 1)$ phải có ít nhất 2 nam; ở giữa nhóm $(1, 1)$ phải có ít nhất 2 nam. Như thế chỉ có 1 cách xếp chỗ duy nhất thỏa mãn: GBBGGBBG.
 3. Nếu 4 nữ tạo thành nhóm $(2, 2)$, ta có các dạng sau:
 - GBBBBBGG: Có $2!$ cách.
 - BGBBBBGG hoặc GBBBBGGB: có $1 \cdot 2 = 2$ cách.
 - BBGGBBGG hoặc GGBBGGBB: có $1 \cdot 2 = 2$ cách.
 - BGBBGGBB: có 1 cách.
 Vậy trong trường hợp này có 7 cách.
 4. Nếu 4 nữ tạo thành nhóm $(3, 1)$ ta có các dạng sau:
 - GGGBBBBBG hoặc GBBBBGGG
 - BGGBBBBBG hoặc GBBBBGGGB
 - BBGGGBBG hoặc GBBGGGGB
 Tương tự, ta sẽ có $2(2! + 1 + 1) = 8$ cách.
 5. Nếu 4 nữ tạo thành nhóm (4) , ta có các dạng sau:
 - GGGBBBBB hoặc BBBBGGGG
 - BGGGBBBB hoặc BBBGGGGB
 - BBGGGGBB
 Tương tự, ta sẽ có $3! \cdot 2 + 2! \cdot 2 + 2! = 18$ cách.
 Vậy tổng số cách xếp chỗ thỏa mãn là $4!(1 + 7 + 8 + 18) = 816$ cách.
- ② Gọi g_i ($i = 1, 2, \dots, 2n$) là số nhóm mà người thứ i tham gia trò chuyện. Do người thứ i nói chuyện với ít nhất một cặp vợ chồng (A, B) và tồn tại hai nhóm khác nhau chứa A và chứa B nên ta có $g_i \geq 2, \forall i = 1, 2, \dots, 2n$.
 - ☑ **Trường hợp 1.** Tồn tại i sao cho $g_i = 2$. Giả sử $C_m \cap C_h = \{i\}$. Khi đó mỗi cặp vợ chồng không phải vợ chồng của i có một người tham gia vào nhóm C_m và người kia tham gia vào nhóm C_h . Khi đó mỗi người của nhóm $C_m \setminus \{i\}$ sẽ nói chuyện với người không

phải bạn đời của mình trong nhóm $C_h \setminus \{i\}$. Do các nhóm này phân biệt nên có tất cả $(n-1)(n-2)$ nhóm như vậy. Do đó, $k \geq (n-1)(n-2) + 2 \geq 2n$ với $n \geq 4$.

✓ **Trường hợp 2.** $g_i \geq 3$ với mọi $i = 1, 2, \dots, 2n$. Khi đó ta gán cho người thứ i biến số $x_i \in \mathbb{R}$. Xét hệ phương trình $2n$ ẩn: $\sum_{i \in C_t} x_i = 0$; $t = 1, 2, \dots, k$. Giả sử $k < 2n$. Khi đó hệ

trên có số phương trình ít hơn số ẩn nên tồn tại i sao cho x_i khác 0. Đặt $y_t = \sum_{i \in C_t} x_i$;

$M = \{(i, j) \text{ với } i, j \text{ là vợ chồng}\}$; $M^* = \{(i, j) \text{ với } i, j \text{ không là vợ chồng}\}$. Khi đó,

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^k y_t^2 &= \sum_{t=1}^k \left(\sum_{i \in C_t} x_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{2n} g_i x_i^2 + 2 \sum_{(i,j) \in M^*} x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^{2n} (g_i - 1) x_i^2 + \sum_{i=1}^{2n} x_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} x_i x_j - 2 \sum_{(i,j) \in M} x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^{2n} (g_i - 2) x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{2n} x_i \right)^2 + \sum_{(i,j) \in M} (x_i - x_j)^2. \end{aligned}$$

Vậy $\sum_{t=1}^k y_t^2 = 0 \Leftrightarrow x_i = 0; \forall i = 1, 2, \dots, 2n$. Hay

$$y_t = 0, \forall t = 1, 2, \dots, k \Leftrightarrow x_i = 0, \forall i = 1, 2, \dots, 2n.$$

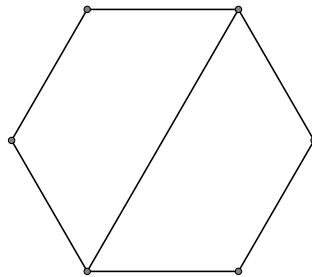
Vậy hệ có nghiệm $x_i = 0, \forall i = 1, 2, \dots, 2n$ (vô lý). Do đó $k \geq 2n$. □

Bài 120. Tại mỗi đỉnh của một hình lục giác đều cho trước, có một con bướm đậu. Vào cùng một thời điểm, tất cả 6 con bướm cùng bay lên khỏi các đỉnh của lục giác và lại vào cùng một thời điểm, cả 6 con bướm cùng đậu xuống các đỉnh của lục giác đó một cách tùy ý, sao cho tại mỗi đỉnh chỉ có một con bướm đậu (các con bướm không nhất thiết phải đậu xuống vị trí trước khi bay lên của mình). Chứng minh rằng tồn tại 3 con bướm mà trước khi bay lên, chúng đậu tại 3 đỉnh, gọi là A, B, C , còn sau khi đậu xuống, chúng đậu tại 3 đỉnh, gọi là A', B', C' , có tính chất: tam giác tạo bởi 3 đỉnh A', B', C' bằng tam giác tạo bởi 3 đỉnh A, B, C .

Lời giải.

Nhằm tránh dài dòng, trong phần trình bày dưới đây, khi nói “tam giác”, ta hiểu là “tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của lục giác đều đã cho”.

Cách 1. Ta gọi đường chéo nối hai đỉnh đối xứng nhau qua tâm của lục giác đều là *đường chéo chính* của lục giác đều đó (xem hình dưới đây). Như vậy, một lục giác đều sẽ có 3 đường chéo chính.



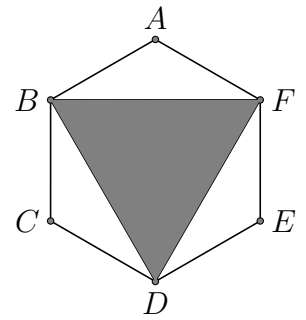
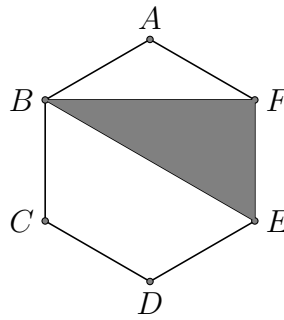
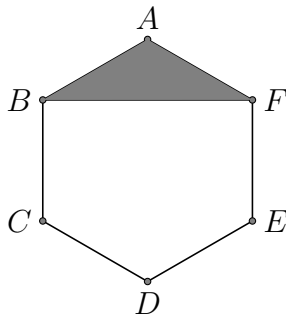
Dễ thấy, hai tam giác, mà mỗi tam giác có một cạnh là đường chéo chính của lục giác đều, là hai tam giác bằng nhau (*).

Xét 2 con bướm, gọi là X và Y , mà trước khi bay lên, chúng đậu ở hai đầu mút của một đường chéo chính. Xảy ra một trong hai trường hợp sau:

- ☑ **Trường hợp 1.** Sau khi đậu xuống, X và Y lại đậu ở hai đầu mút của một đường chéo chính. Khi đó, theo nhận xét (*), X, Y cùng với con bướm Z tùy ý khác sẽ là 3 con bướm thỏa mãn yêu cầu đề bài.
- ☑ **Trường hợp 2.** Sau khi đậu xuống, X và Y đậu ở hai đầu mút của hai đường chéo chính. Gọi Z là con bướm mà sau khi đậu xuống, nó và X đậu tại hai đầu mút của một đường chéo chính. Theo nhận xét (*), X, Y và Z là 3 con bướm thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài toán được chứng minh.

Cách 2. Ta phân chia các tam giác thành ba loại, như hình dưới đây (kể từ trái qua phải là loại 1, loại 2 và loại 3):



Dễ thấy, hai tam giác cùng loại bằng nhau và hai tam giác khác loại không bằng nhau. Vì thế, theo đề bài, ta phải chứng minh tồn tại 3 con bướm, mà trước khi bay lên và sau khi đậu xuống, chúng đậu tại các đỉnh của hai tam giác cùng loại.

Bằng cách đếm trực tiếp, ta thấy có 6 tam giác loại 1, 12 tam giác loại 2 và 2 tam giác loại 3. Như thế, số tam giác loại 2 lớn hơn tổng số tam giác thuộc hai loại còn lại ($12 > 6 + 2$). Suy ra, phải có 3 con bướm mà trước khi bay lên, chúng đậu tại 3 đỉnh của một tam giác loại 2 và sau khi đậu xuống, chúng cũng đậu tại 3 đỉnh của một tam giác loại này. Ta có điều phải chứng minh.

Bài toán được giải quyết. □

Bài 121. Tại một Hội khỏe Phù Đổng gồm có n vận động viên tham gia vào 12 môn thi đấu, mỗi môn thi đấu có 24 vận động viên. Biết rằng hai thành viên bất kì tham gia chung không quá một môn thi. Tìm giá trị nhỏ nhất của n .

Lời giải.

Nhận xét. Hai vận động viên bất kì tham gia chung không quá một môn thi đương đương với hai môn thi bất kì chung nhau không quá một vận động viên. Ta đưa về việc đếm bộ S có dạng (X, Y, Z) với hai môn X, Y có vận động viên Z tham gia chung.

☑ Đếm theo môn thi đấu, ta có $S \leq \binom{12}{2}$.

☑ Đếm theo vận động viên: ta gọi $x_1, x_2, \dots, x_n$ lần lượt là số môn mà vận động viên $1, 2, \dots, n$ tham gia. Bằng cách đếm số lượt tham gia ta có

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 288.$$

Điều này dẫn đến

$$S = \binom{x_1}{2} + \binom{x_2}{2} + \dots + \binom{x_n}{2} = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 288).$$

Qua hai cách đếm trên ta suy ra

$$\binom{12}{2} \geq S = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 288).$$

hay

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 420.$$

Áp dụng **bất đẳng thức Cauchy – Schwarz**, ta có

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{n} = \frac{288^2}{n}.$$

Suy ra

$$420 \geq \frac{288^2}{n} \text{ hay } n \geq 198.$$

Để ý rằng với $n \geq 198$ thì ước lượng được $\left\lfloor \frac{288}{n} \right\rfloor = 1$, khi đó ta dự đoán cực trị xảy ra khi các số x_i nhận giá trị là 1 hoặc 2. Do vậy, với mỗi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ta đánh giá

$$(x_i - 1)(x_i - 2) \geq 0 \Leftrightarrow x_i^2 \geq 3x_i - 2, \forall i = \overline{1, n}.$$

Đến đây, ta suy ra

$$\begin{aligned} 420 \geq x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 &\geq (3x_1 - 2) + (3x_2 - 2) + \dots + (3x_n - 2) \\ &= 3(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - 2n = 3 \cdot 288 - 2n. \end{aligned}$$

và thu được $n \geq 222$. Vì bất đẳng thức xảy ra khi có 156 số x_i bằng 1 và 66 số x_i bằng 2 nên giá trị nhỏ nhất cần tìm là 222.

Bài toán được giải quyết. □

Bài 122. Trong mặt phẳng cho tập hợp A gồm 2018^2 điểm phân biệt được đánh số từ 1 đến 2018^2 sao cho ba điểm bất kỳ nào đó trong chúng không thẳng hàng. Một tứ giác được gọi là "đẹp" nếu các đỉnh của nó thuộc A và được đánh số bằng 4 số thỏa mãn một trong hai điều kiện sau:

- ① Là các số tự nhiên cách nhau 2018 đơn vị, tức là 4 số lập thành cấp số cộng có công sai 2018.
- ② Là 4 số tự nhiên liên tiếp và nếu trong đó có chứa số chia hết cho 2018 thì số đó phải là số lớn nhất.

Nối tất cả các điểm thuộc tập hợp A lại với nhau sao cho điểm nào thuộc A cũng thuộc đúng một tứ giác. Tìm số lớn nhất tứ giác "đẹp" được tạo thành.

Lời giải.

Viết các số từ 1 đến 2018^2 vào bảng ô vuông 2018×2018 như sau:

1	2	3	...	2017	2018
2019	2020	2021	...	4035	4036
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	2018^2

Khi đó ta thấy bộ 4 số thỏa mãn là đỉnh của một tứ giác đẹp phải là bốn ô vuông liên tiếp trên một cột hoặc một hàng của bảng trên. Ta gọi bộ 4 số đó là một bộ "đẹp". Vậy để tìm số bộ "đẹp" thì ta lát bảng ô vuông 2018×2018 trên bởi bảng ô vuông con 1×4 (1 hàng, 4 cột) hoặc 4×1 (4 hàng, 1 cột), gọi chung là các quân domino, sao cho không có hai quân domino nào có ô vuông chung vì mỗi điểm thuộc tập A chỉ thuộc duy nhất một tứ giác nên mỗi số chỉ có thể thuộc đúng một bộ đẹp. Ta đếm số quân domino tối đa có thể dùng, hiển nhiên số quân domino tối đa sẽ không vượt quá $2018^2 : 4 = 1009^2$. Tô đen các ô thuộc hàng chẵn hoặc cột chẵn của bảng ô vuông trên và tô đỏ các ô còn lại, khi đó số các ô được tô đỏ là

$$\frac{2018}{2} \times \frac{2018}{2} = 1009^2$$

Để ý rằng mỗi một quân domino sẽ chứa đúng 0 hoặc 2 ô tô đỏ và số ô tô đỏ là lẻ nên ta không thể lát kín bảng ô vuông bằng các quân domino trên, tức là số quân domino tối đa không thể là 1009^2 . Ta chỉ ra một cách lát sử dụng $1009^2 - 1$ quân domino gồm hai bước như sau

- ☑ **Bước 1.** Lát hoàn toàn 2016 hàng đầu tiên của bảng chỉ với quân domino 4×1 , cứ 4 hàng liên tiếp thì ta lát bởi 2018 quân domino thì ta dùng $2018 \times (2016 : 4) = 1009 \times 1008$ quân domino.
- ☑ **Bước 2.** Lát hai hàng cuối của bảng chỉ với quân domino 1×4 , mỗi hàng lát liên tiếp bởi $\left\lceil \frac{2018}{4} \right\rceil = 504$ và trừ đi hai ô cuối hàng nên ta dùng tới $504 \times 2 = 1008$ quân domino.

Khi đó ta dùng $1008 \times 1009 + 1008 = 1008 \times 1010 = 1009^2 - 1$ quân domino.

Vậy số tứ giác "đẹp" lớn nhất được tạo thành là $1009^2 - 1$. □

Bài 123. Viết n là số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ trên bảng. Xét phép biến đổi như sau

Bước 1. Xếp thứ tự từ 1 đến n các số đang có trên bảng.

Bước 2. Cộng số thứ nhất với 1, số thứ 2 với 2, số thứ 3 với 3, $\dots$, số thứ n với n .

- ① Chứng minh rằng nếu có thể thực hiện hữu hạn các phép biến đổi trên để thu được các số bằng nhau trên bảng thì $2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ chia hết cho n .
- ② Chứng minh rằng nếu $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ chia hết cho n thì có thể thực hiện hữu hạn các phép biến đổi trên để thu được các số bằng nhau trên bảng.

Lời giải.

- ① **Nhận xét.** Sau mỗi lần thực hiện phép biến đổi, tổng các số có mặt trên bảng tăng lên

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Giả sử sau m lần thực hiện phép biến đổi, ta thu được các số bằng nhau là k . Khi đó tổng các số có trên bảng là $n \times k$. Nhưng tổng đó cũng bằng $a_1 + a_2 + \dots + a_n + m \frac{n(n+1)}{2}$ nên

$a_1 + a_2 + \dots + a_n + m \frac{n(n+1)}{2} = nk$. Suy ra $2(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = n[2k - (n+1)m]$ chia hết cho n

- ② Trên bảng đang có các số $a_1, a_2, \dots, a_n$ mà tổng của chúng chia hết cho n . Ta thực hiện các phép biến đổi theo nguyên tắc f sau: Gọi m và M là các số nhỏ nhất trên bảng (nếu có nhiều số bằng m hoặc M , ta có thể chọn 2 số đại diện).

Lần 1. Cộng số m thêm 2 và M thêm 1, các số còn lại cộng ngẫu nhiên theo nguyên tắc đã cho ở đề bài. Khi đó trên các có các số $m + 2$, $M + 1$ và các số $b_3, b_4, \dots, b_n$.

Lần 2. Cộng số $m + 2$ thêm n và số $M + 1$ thêm $n - 1$, các số b_i đã được cộng p_i trong lần 1 sẽ được cộng thêm $n + 1 - p_i$ trong lần 2.

Sau lần 2 như thế, ta thu được các số $m + n + 2$, $M + n$, các số còn lại chính là các số khác được cộng thêm $n + 1$. Giả sử các số thu được trên bảng là $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ và gọi m_1, M_1 là các số nhỏ nhất và lớn nhất trong bộ $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Khi đó

$$|M_1 - m_1| = |M + n - (m + n - 2)| = |M - m - 2|$$

Như vậy, sau mỗi biến đổi f , hiệu giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất giảm đi 2, nên sau hữu hạn lần tác động biến đổi f , ta được hiệu giữa hai số đó không vượt quá 1. Ngoài ra, tổng các số trên bảng vẫn chia hết cho n vì tăng lên $n(n + 1)$. Giả sử khi đó, số lớn nhất trên bảng là x và số nhỏ nhất là y với $|x - y| \leq 1$. Nếu $x \neq y$ thì $x = y + 1$. Khi đó có $r \geq 1$ số trên bảng bằng x và $n - r \geq 1$ số trên bảng bằng $x + 1$. Tổng các số trên bảng là

$$x \cdot r + (x + 1)(n - r) = -r + (x + 1)n$$

Nhưng tổng các số trên bảng chia hết cho n nên r chia hết cho n . Do $r \geq 1$ và $n - r \geq 1$ nên $q \leq r \leq n - 1$ nên ta có mâu thuẫn. Vậy $x = y$, ta có các số trên bảng bằng nhau.

Bài toán được giải quyết. □

Bài 124. Trong mặt phẳng, xét 7 điểm đôi một phân biệt. Người ta muốn vẽ các đường tròn đi qua đúng 4 trong 7 điểm này. Hỏi có thể vẽ được nhiều nhất bao nhiêu đường tròn?

Lời giải.

Kí hiệu 7 điểm đang xét là $A_i, i = \overline{1, 7}$. Giả sử vẽ được n đường tròn, $n \in \mathbb{N}^*$, thỏa mãn điều kiện đề bài. Với mỗi $i = \overline{1, 7}$, kí hiệu s_i là số đường tròn qua điểm A_i . Do mỗi đường tròn đi qua đúng 4 điểm nên

$$\sum_{i=1}^7 s_i = 4n$$

Với mỗi $i = \overline{1, 7}$, gọi m_i là số cặp đường tròn mà hai đường tròn trong mỗi cặp cùng đi qua điểm A_i .

Đặt $m = \sum_{i=1}^7 m_i$, ta có

$$m = \sum_{i=1}^7 \binom{s_i}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^7 s_i^2 - \sum_{i=1}^7 s_i \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^7 s_i^2 - 2n \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{(4n)^2}{7} - 2n = \frac{2n(4n - 7)}{7}. \quad (1)$$

Do $\sum_{i=1}^7 s_i^2 \geq \frac{1}{7} \cdot \left(\sum_{i=1}^7 s_i \right)^2$. Mặt khác, do 2 đường tròn tùy ý (trong n đường tròn vẽ được) cắt nhau ở tối đa 2 điểm trong số 7 điểm A_i nên

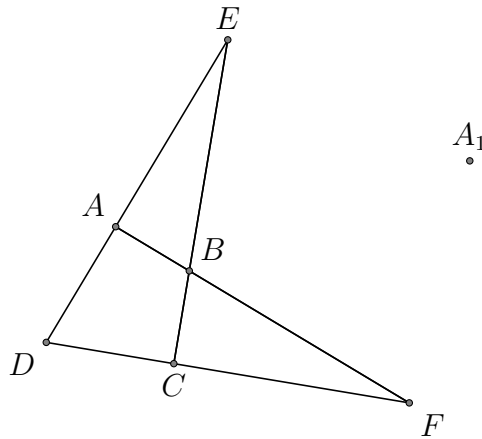
$$m \leq 2 \binom{n}{2} = n(n - 1). \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $\frac{2n(4n - 7)}{7} \leq n(n - 1)$. (3)

Ta có (3) $\Leftrightarrow n \leq 7$. Xét $n = 7$. Khi đó, ở tất cả các đánh giá nêu trên phải xảy ra dấu “=”. Vì thế, 7 đường tròn vẽ được phải thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

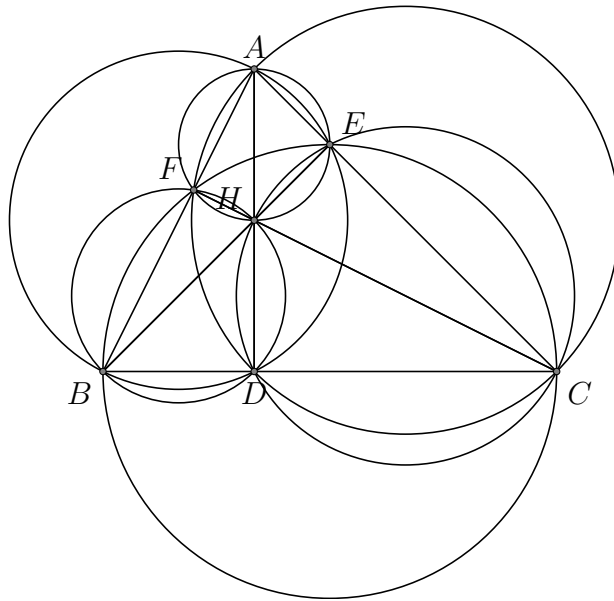
- ① Mỗi đường tròn đi qua đúng 4 điểm và qua mỗi điểm có đúng 4 đường tròn;
- ② Hai đường tròn tùy ý cắt nhau ở đúng 2 điểm trong 7 điểm đang xét.

Xét một điểm tùy ý trong 7 điểm, giả sử là A_1 . Vì 2/ nên phép nghịch đảo P tâm A_1 , tỉ số $k \neq 0$, sẽ biến 4 đường tròn đi qua A_1 thành 4 đường thẳng không đi qua A_1 và đôi một cắt nhau, tạo thành một tứ giác toàn phần như Hình 1 dưới đây. Vì mỗi đường tròn trong 3 đường tròn không đi qua A_1 , đều đi qua đúng 4 điểm trong số 6 điểm khác A_1 (theo 1) và đều cắt từng đường tròn trong 6 đường tròn còn lại tại 2 điểm trong 6 điểm đó (theo 2) nên phép nghịch đảo P biến 3 đường tròn không đi qua A_1 thành 3 đường tròn phân biệt, mỗi đường tròn đi qua đúng 4 điểm trong 6 điểm A, B, C, D, E, F ở hình trên. Tuy nhiên, dễ thấy, chỉ có thể có tối đa 2 đường tròn phân biệt, mỗi đường tròn đi qua 4 điểm trong 6 điểm vừa nêu. Mâu thuẫn nhận được chứng tỏ $n \neq 7$. Do đó, $n \leq 6$.



Hình 1

Xét 7 điểm gồm 3 đỉnh của tam giác nhọn ABC , trực tâm H của tam giác đó và 3 chân đường cao D, E, F hạ từ A, B, C xuống các cạnh BC, CA, AB (xem Hình 2 dưới đây).



Hình 2

Dễ thấy, 6 đường tròn $(AFHE)$, $(BFHD)$, $(CDHE)$, $(ABDE)$, $(BFEC)$ và $(AFDC)$ thỏa mãn các điều kiện của đề bài. Vậy, chỉ có thể vẽ được nhiều nhất 6 đường tròn thỏa mãn các yêu cầu của đề bài. $\square$

Bài 125. Cho các số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_{2018}$. Xét tập

$$S_{2018} = \{(-1)^{k_1} \sqrt{a_1} + (-1)^{k_2} \sqrt{a_2} + \dots + (-1)^{k_{2018}} \sqrt{a_{2018}}; k_i \in \mathbb{N}^* \forall i = \overline{1, \dots, 2018}\}.$$

Chứng minh rằng tích của tất cả các phần tử thuộc S_{2018} là một số chính phương.

Lời giải.

Với mỗi $n \in \{1, 2, 3, \dots, 2018\}$, ta kí hiệu

$$S_n = \{(-1)^{k_1} \sqrt{a_1} + (-1)^{k_2} \sqrt{a_2} + \dots + (-1)^{k_n} \sqrt{a_n}; k_i \in \mathbb{N}^*, \forall i = \overline{1, \dots, n}\}.$$

Nhận xét rằng

① S_n có 2^n phần tử là các số thực đối nhau.

② Với mỗi $e \in S_{n-1}$ thì $e \pm \sqrt{a_n} \in S_n$.

Đặt $A_n = \prod_{e \in S_n} e$ là tích của tất cả các phần tử thuộc S_n . Ta chứng minh A_n là số chính phương với mọi

$n \in \{1, 2, 3, \dots, 2018\}$, từ đó ta cũng có điều phải chứng minh. Xét đa thức $P_n(x) = \prod_{e \in S_n} (x + e)$

thì $A_n = P_n(0)$. Theo nhận xét trên ta có

$$P_n(x) = \prod_{e \in S_{n-1}} (x + e + \sqrt{a_n})(x + e - \sqrt{a_n}) = P_{n-1}(x + \sqrt{a_n})P_{n-1}(x - \sqrt{a_n})$$

$S_1 = \{-\sqrt{a_1}, \sqrt{a_1}\}$. Ta có $P_1(x) = (x - \sqrt{a_1})(x + \sqrt{a_1}) = x^2 - a_1 \in \mathbb{Z}[x]$.

$S_2 = \{-\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}, -\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}, \sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}, \sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}\}$. Ta có

$$\begin{aligned} P_2(x) &= (x + \sqrt{a_1} + \sqrt{a_2})(x + \sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})(x - \sqrt{a_1} + \sqrt{a_2})(x - \sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}) \\ &= x^4 - 2(a_1 + a_2)x^2 + (a_1 - a_2)^2 \in \mathbb{Z}[x]. \end{aligned}$$

Mà $P_2(x + \sqrt{a_3}) = A_2(x) + \sqrt{a_3} \cdot B_2(x)$;

$P_2(x - \sqrt{a_3}) = A_2(x) - \sqrt{a_3} \cdot B_2(x)$ với $A_2(x), B_2(x) \in \mathbb{Z}[x]$ do $P_2(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Từ đó ta được $P_3(x) = P_2(x + \sqrt{a_3})P_2(x - \sqrt{a_3}) = A_2^2(x) - a_3 \cdot B_2^2(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được $P_n(x) \in \mathbb{Z}[x] \forall n \in \{1, 2, 3, \dots, 2018\}$.

Lại có S_n chỉ chứa các số đối nhau, giả sử là $\pm e_1; \pm e_2; \dots; \pm e_{2^{n-1}}$.

$$P_n(x) = \prod_{e \in S_n} (x + e) = \prod_{i=1}^{2^{n-1}} (x + e_i)(x - e_i) = \prod_{i=1}^{2^{n-1}} (x^2 - e_i^2)$$

suy ra $P_n(x) = P_n(-x) \forall x$.

Do đó $P_n(x) = Q_n(x^2)$ với $Q_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Như vậy

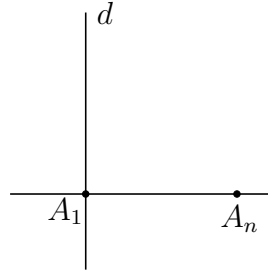
$$A_n = P_n(0) = P_{n-1}(-\sqrt{a_n})P_{n-1}(\sqrt{a_n}) = P_{n-1}^2(\sqrt{a_n}) = Q_{n-1}^2(a_n)$$

là số chính phương. □

Bài 126. Với mỗi tập A gồm n điểm phân biệt trong mặt phẳng ($n \geq 2$), kí hiệu $T(A)$ là tập hợp các vector có điểm đầu và điểm cuối đều thuộc A . Hãy xác định giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|T(A)|$. (Kí hiệu $|T(A)|$ là số phần tử của tập hợp $|T(A)|$)

Lời giải.

Số đoạn thẳng có hai đầu mút khác nhau thuộc A là $\frac{n(n-1)}{2}$ nên số vector khác vector $\vec{0}$ thuộc A không vượt quá $n(n-1)$, do đó kể cả vector $\vec{0}$ thì $|T(A)| \leq n^2 - n + 1$. Ta chứng minh tồn tại cấu hình sao cho $|T(A)| = n^2 - n + 1$. Xét n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ sao cho $A_1, A_2, \dots, A_n \in A$ và thỏa mãn điều kiện $A_1 A_j < A_j A_{j+1}$ với $j = 2, 3, \dots, n$. Khi đó dễ dàng chứng minh được $|T(A)| = n^2 - n + 1$. Xét tập A gồm n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$. Giả sử $A_1 A_n = \max_{1 \leq i < j \leq n} \{A_i A_j\}$ và gọi d là đường thẳng đi qua A_1 và vuông góc với $A_1 A_n$. Khi đó tất cả các điểm thuộc tập A đều thuộc nửa mặt phẳng chứa A_n có bờ là d và chỉ có A_1 thuộc d . Như vậy sẽ có $2(n-1)$ vector khác $\vec{0}$ và đôi một phân biệt là $\overrightarrow{A_1 A_2}, \dots, \overrightarrow{A_1 A_n}, \overrightarrow{A_2 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_n A_1}$. Do đó $|T(A)| \geq 2(n-1) + 1 = 2n - 1$. Ta chỉ cần chỉ ra một tập hợp mà $|T(A)| = 2n - 1$. Thật vậy, trên trục số đặt A_k vào điểm có tọa độ k thì với mọi $\overrightarrow{A_i A_j}$ đều tồn tại k sao cho $\overrightarrow{A_1 A_k} = \overrightarrow{A_i A_j}$ hoặc $\overrightarrow{A_k A_1} = \overrightarrow{A_i A_j}$, nên min $|T(A)| = 2n - 1$.
 Bài toán được giải quyết. □



Bài 127. Cho số nguyên dương $n \geq 2$. Xét tập hợp

$$\mathcal{A} = \{(a_1; a_2; \dots; a_n) | a_k \in \{0; 1\}, k = 1; 2; \dots; n\}.$$

Với mỗi phần tử $a = (a_1; a_2; \dots; a_n) \in \mathcal{A}$, a_k được gọi là chỉ số thứ k của a ($k = 1; 2; \dots; n$). Ký hiệu $\vec{0} = (0; 0; \dots; 0) \in \mathcal{A}$. Xét ánh xạ $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

- (i) $f(\vec{0}) = \vec{0}$;
- (ii) Mọi $a, b \in \mathcal{A}$ thỏa mãn a và b có đúng p chỉ số khác nhau, thì $f(a)$ và $f(b)$ cũng có đúng p chỉ số khác nhau.
- ① Với mỗi $i = 1; 2; \dots; n$, ký hiệu $e_i \in \mathcal{A}$ là phần tử có chỉ số thứ i bằng 1, các chỉ số còn lại bằng 0. Chứng minh rằng: $\{f(e_i) | i = 1; 2; \dots; n\} = \{e_i | i = 1; 2; \dots; n\}$.
- ② Phép cộng trong $\mathcal{A}$ được định nghĩa như sau: với

$$a = (a_1; a_2; \dots; a_n) \in \mathcal{A}, b = (b_1; b_2; \dots; b_n) \in \mathcal{A}$$

thì $c = a + b = (c_1; c_2; \dots; c_n) \in \mathcal{A}$ xác định bởi

$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{nếu } a_k = b_k \\ 1 & \text{nếu } a_k \neq b_k \end{cases} \quad (k = 1; 2; \dots; n).$$

Chứng minh rằng $\forall a, b, c \in \mathcal{A} : a + b + c = \vec{0}$ thì $f(a) + f(b) + f(c) = \vec{0}$.

Lời giải.

- ① Với mỗi $i = 1; 2; \dots; n$, xét e_i và $\vec{0}$ có đúng một chỉ số khác nhau, nên $f(e_i)$ và $f(\vec{0}) = \vec{0}$ cũng có đúng một chỉ số khác nhau, suy ra $f(e_i) = e_m$, với m nào đó, $m \in \{1; 2; \dots; n\}$. Mặt khác $\forall i \neq j, e_i$ và e_j có đúng hai chỉ số khác nhau, nên $f(e_i)$ và $f(e_j)$ cũng có đúng hai chỉ số khác nhau, suy ra $f(e_i) \neq f(e_j)$, do đó f là đơn ánh từ tập $\{e_i | i = 1; 2; \dots; n\}$ vào chính nó. Như vậy

$$\{f(e_i) | i = 1; 2; \dots; n\} = \{e_i | i = 1; 2; \dots; n\}.$$

- ② Xét $x = (x_1; x_2; \dots; x_n) \in \mathcal{A}$, đặt $f(x) = y = (y_1; y_2; \dots; y_n) \in \mathcal{A}$, nếu x có đúng p chỉ số bằng 1, thì $y = f(x)$ cũng có đúng p chỉ số bằng 1. Giả sử $f(e_i) = e_m$. Xét phần tử $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ và phần tử e_i , ta có hai trường hợp:

- ☑ Nếu $x_i = 1$, thì x và e_i khác nhau ở $p - 1$ chỉ số nên y và e_m cũng khác nhau ở $p - 1$ chỉ số. Mà y có p chỉ số bằng 1, nên $y_m = 1$.
- ☑ Nếu $x_i = 0$, tương tự, x và e_i khác nhau ở $p + 1$ chỉ số nên y và e_m cũng khác nhau ở $p + 1$ chỉ số, nên tương tự $y_m = 0$.

Cả hai trường hợp đều có $x_i = y_m$. Từ hai điều trên, ta suy ra: nếu $f(e_i) = e_m$, thì chỉ số thứ i của $x \in \mathcal{A}$ bằng chỉ số thứ m của $f(x)$, nên f hoán vị tập $\{e_i\}$ theo thứ tự nào, thì f hoán vị các chỉ số của x theo đúng thứ tự ấy, $\forall x \in \mathcal{A}$. Từ đó, với mọi a, b, c thỏa mãn đề bài, f hoán vị các chỉ số của a, b, c theo cùng một thứ tự, nên các chỉ số của $f(a) + f(b) + f(c)$ là hoán vị theo đúng thứ tự ấy của $a + b + c = \bar{0}$. Ta có điều phải chứng minh.

Bài toán được giải quyết. □

Bài 128. Cho $n = 2018 \cdot 2019$. Gọi A là tập hợp các bộ $(a_1; a_2; \dots; a_{n-1}; a_n)$ có tính thứ tự sao cho $a_i \in \{0; 1\}$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$ và $\sum_{i=1}^n a_i = 2018^2$. Có bao nhiêu bộ số như thế sao cho

$$\sum_{i=1}^k a_i \geq \frac{k}{2} \text{ và } \sum_{i=1}^k a_{n-k+1} \geq \frac{k}{2} \text{ với mọi } k = 1, 2, \dots, n?$$

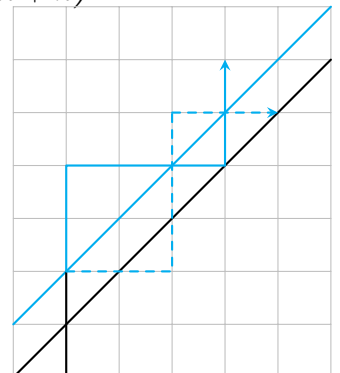
Lời giải.

Ta giải bài toán tổng quát khi thay 2018 bởi $m \in \mathbb{Z}^+$. Bài toán đã cho tương đương với bài toán sau. Trong hệ trục tọa độ Oxy , xét lưới điểm nguyên trong hình chữ nhật có đỉnh dưới bên trái là $O(0; 0)$ và đỉnh trên bên phải là $A(m^2; m)$. Đặt $B(m; m)$ và $C(m^2 - m; 0)$, hỏi có bao nhiêu đường đi từ $O \rightarrow A$ sao cho mỗi bước, ta đi sang phải hoặc lên trên 1 đơn vị, gọi là đường đi đơn, và không vượt lên trên OB cũng như không xuống dưới AC ?

Ở đây, các số 0; 1 tương ứng với các bước đi lên trên, các bước đi sang phải; còn điều kiện tổng k số đầu và tổng k số cuối không nhỏ hơn $\frac{k}{2}$ tương ứng với số lượng bước đi lên không vượt quá số lượng bước đi sang phải. Để thuận tiện, ta gọi đường đi cắt d nếu nó có các phần nằm về cả hai phía của d . Trước hết, ta sẽ chứng minh bổ đề sau

Bổ đề. Số đường đi đơn từ $O \rightarrow A(m; n)$, có cắt đường thẳng $y = x$ là $\binom{m+1}{m+n}$.

Thật vậy, Xét đường thẳng $(d) : y = x + 1$, rõ ràng các đường đi đơn cắt $y = x$ đều sẽ có điểm chung với đường (d) này. Tại các điểm chung đó, ta thực hiện đối xứng trục để được một đường đi mới xuất phát từ $O \rightarrow A'(n-1; m+1)$. **Trong hình bên, đường cũ là nét đứt, còn đường mới là nét liền.** Rõ ràng phép đối xứng trục trên là song ánh, biến các đường cần tìm (cắt $y = x$), thành các đường từ $O \rightarrow A'$; do đó, số lượng đường cần tìm là $\binom{m+n}{n-1}$.



đường thẳng này, ta đưa về đếm số đường đi đơn từ $O \rightarrow A''(m-2; m^2+2)$. Suy ra số đường đi trong trường hợp này là $\binom{m^2+m}{m-2}$. Vậy theo nguyên lý bù trừ, kết quả cần tìm sẽ là

$$\binom{m^2+m}{m} - 2\binom{m^2+m}{m-1} + \binom{m^2+m}{m-2}.$$

Thay $m = 2018$, ta có số lượng đường đi, cũng chính là số bộ thỏa mãn đề bài. $\square$

Nhận xét. Bài toán thoát nhìn có vẻ có thể xử lý được bằng truy hồi hoặc bù trừ trực tiếp, nhưng quả thật không dễ. Việc tiếp cận theo hướng dùng “lưới nguyên” đòi hỏi ít nhiều kinh nghiệm và các kỹ thuật liên quan, vì bài toán này sau khi mô hình hóa xong còn phait thêm bước “đối xứng hai lần” mới có thể giải quyết triệt để được. Đường đi trong bài toán còn gọi là đường đi Dyck hoặc Catalan, liên quan đến các bài toán nổi tiếng như: **bỏ phiếu bầu cho các ứng cử viên sao cho ứng viên này luôn thắng ứng viên kia tại mọi thời điểm, mua vé với tiền 1 đồng, 2 đồng sao cho không có ai cần phải chờ tiền thối lại,...**

Bài toán cũng có thể mô phỏng theo dãy các đường đi chéo, lên hoặc xuống 1 đơn vị, từ $(0;0)$ đến $(n^2+n; n^2-n)$ sao cho đường đi không xuống dưới trục hoành và cũng không vượt lên trên $y = n^2$. Thực ra nếu trình bày theo hướng này thì việc lấy đối xứng sáng sủa hơn.

Ứng với $n = 1, 2, 3, 4$ ta có các giá trị 0, 4, 100, 2755 là một dãy số không quen thuộc nên chúng tôi cũng không rút gọn đáp số trên. Dưới đây là một số kết quả tương tự về đường đi đơn trong đề bài

☑ Số đường đi đơn từ $(0;0) \rightarrow (m;n)$ mà không có điểm chung với $y = x$ là $\frac{m-n}{m+n} \binom{m+n}{m}$.

☑ Số đường đi đơn từ $(0;0) \rightarrow (m;n)$ mà không vượt qua $y = x$ là $\binom{m+n}{n} - \binom{m+n}{n-1}$.

☑ Số đường đi gồm n bước mà không vượt qua $y = x$ là $\sum_{i=n/2}^n \frac{n!(2i+1-n)}{(i+1)!(n-i)!} = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

☑ Số đường đi đơn từ $(0;0) \rightarrow (m;n)$ mà không có điểm chung với $y = x + t$ là

$$\binom{m+n}{n} - \binom{m+n}{m-t}$$

☑ (Việt Nam TST 2003) Tính số cặp đường đi đơn $(0;0) \rightarrow A(m;n)$ và $B(p;0) \rightarrow C(m;q)$ với $p < m; q < n$ sao cho chúng không có điểm chung.

Bài 129. Cho n số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$. Với mỗi $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, gọi a_i là số các chỉ số j sao cho $|x_i - x_j| \leq 1$ và b_i là số các chỉ số j sao cho $|x_i - x_j| \leq 2$ (các số i, j có thể bằng nhau).

a) Chứng minh rằng tồn tại i mà $b_i \leq 3a_i$.

b) Gọi A là số cặp (i, j) có thứ tự mà $|x_i - x_j| \leq 1$ và B là số cặp (i, j) có thứ tự mà $|x_i - x_j| \leq 2$ (các số i, j có thể bằng nhau). Chứng minh rằng $B \leq 3A$.

Lời giải.

a) Không mất tính tổng quát, giả sử các số đã cho được sắp xếp tăng dần.

Xét $k = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ và giả sử $a_i = k$, khi đó tồn tại k số trong dãy là

$$x_u \leq x_{u+1} \leq \dots \leq x_i \leq \dots \leq x_v \text{ với } |x_u - x_i|, |x_v - x_i| \leq 1.$$

Ngoài ra vì tính lớn nhất của k nên $|x_{u-1} - x_i| > 1$, $|x_{v+1} - x_i| > 1$. Trong $[x_u; x_v]$, có đúng k số j để $|x_j - x_i| \leq 1 < 2$. Còn trước x_u , xét hai số x_r, x_s trong đó sao cho $x_r \leq x_s$ và $|x_r - x_i| \leq 2$, $|x_s - x_i| \leq 2$ thì

$$|x_r - x_s| = x_s - x_r = (x_i - x_r) - (x_i - x_s) < 2 - 1 = 1$$

nên sẽ có không quá k số j để $|x_j - x_i| \leq 2$ vì nếu ngược lại, sẽ có nhiều hơn k số liên tiếp trong dãy cách nhau không quá 1 đơn vị, mâu thuẫn với tính lớn nhất của k . Tương tự với các số sau x_v , vì thế nên $b_i \leq 3k \Rightarrow b_i \leq 3a_i$.

- b) Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo n . Với $n = 1$, rõ ràng $A = B = 1$ nên khẳng định hiển nhiên đúng. Giả sử kết quả đúng với $n \geq 1$, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng với $n + 1$. Xét dãy số thực $T = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ bất kì và giả sử $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n+1}$, kí hiệu A_T, B_T là số cặp thứ tự các chỉ số (i, j) tương ứng với định nghĩa của đề bài. Giả sử $k \geq 1$ là số lượng lớn nhất các số của T được chứa trong một đoạn độ dài bằng 2 nào đó. Gọi x_i là số cuối cùng của dãy mà trong đoạn $[x_i - 1; x_i + 1]$ có chứa đúng k số (kể cả x_i). Gọi T' là dãy mới sau khi bỏ x_i đi. Khi đó, số lượng các số thuộc T' có trong $[x_i - 1; x_i + 1]$ là $k - 1$, ngoài ra x_i đã bị bỏ đi thuộc về đúng $2k - 1$ cặp của A_T (gồm $k - 1$ số $*$ thuộc đoạn trên tạo thành các cặp có dạng $(x_i, *)$, $(*, x_i)$ cùng với (x_i, x_i)). Do đó

$$A_T = A_{T'} + 2k - 1.$$

Ta viết $[x_i - 2; x_i + 2] = [x_i - 2; x_i - 1] \cup [x_i - 1; x_i + 1] \cup [x_i + 1; x_i + 2]$, trừ đoạn ở giữa thì hai đoạn đầu và cuối chứa tối đa k phần tử của T . Hơn nữa, do định nghĩa số x_i nên trong đoạn $[x_i + 1; x_i + 2]$ có tối đa $k - 1$ phần tử của T . Suy ra có tối đa $2(k - 1) + k = 3k - 2$ phần tử của T' (không tính x_i) thuộc $[x_i - 2; x_i + 2]$, suy ra

$$B_T \leq 2(3k - 2) + 1 + B_{T'} = 3(2k - 1) + B_{T'}.$$

Áp dụng giả thiết quy nạp, ta có $B_{T'} < 3A_{T'}$ nên từ các điều trên suy ra

$$B_T \leq 3(2k - 1) + B_{T'} < 3(2k - 1) + 3A_{T'} = 3(A_{T'} + 2k - 1) = 3A_T.$$

Theo nguyên lí quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Bài toán được giải quyết. □

Nhận xét. Ta thử xét một số ước lượng giữa A, B khi các số $x_1, x_2, \dots, x_n$ đặc biệt.

☑ Nếu n số bằng nhau thì $a_i = b_i = n$ nên $A = B$.

☑ Nếu n số chẵn liên tiếp thì $a_i = 1, \forall i = 1, 2, \dots, n$; còn $b_1 = b_n = 2, b_i = 3, \forall i = 2, \dots, n - 1$ nên $A = n$, còn $B = 3n - 2$ và rõ ràng $\frac{B}{A} = 3 - \frac{2}{n} \rightarrow 3$ chứng tỏ 3 là hằng số tốt nhất.

Bằng phương pháp tương tự trên, ta cũng có thể chứng minh được rằng với $0 < a < b$ thì đặt cặp số có thứ tự (i, j) thỏa mãn $|x_i - x_j| \leq a$ và cặp số có thứ tự (i, j) thỏa mãn $|x_i - x_j| \leq b$ lần lượt là A, B thì sẽ có $A < 2(k - 1)B$ với $k = \left\lceil \frac{b}{a} \right\rceil$.

Bài 130. Viết n là số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ trên bảng. Xét phép biến đổi như sau.

Bước 1. Xếp thứ tự từ 1 đến n các số đang có trên bảng.

Bước 2. Cộng số thứ nhất với 1, số thứ 2 với 2, số thứ 3 với 3, $\dots$, số thứ n với n .

- ① Chứng minh rằng nếu có thể thực hiện hữu hạn các phép biến đổi trên để thu được các số bằng nhau trên bảng thì $2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ chia hết cho n .
- ② Chứng minh rằng nếu $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ chia hết cho n thì có thể thực hiện hữu hạn các

phép biến đổi trên để thu được các số bằng nhau trên bảng.

Lời giải.

Nhận xét. Sau mỗi lần thực hiện phép biến đổi, tổng các số có mặt trên bảng tăng lên $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Giả sử sau m lần thực hiện phép biến đổi, ta thu được các số bằng nhau là k . Khi đó tổng các số có mặt trên bảng là $n \times k$. Nhưng tổng đó cũng bằng $a_1 + a_2 + \dots + a_n + m \frac{n(n+1)}{2}$ nên $a_1 + a_2 + \dots + a_n + m \frac{n(n+1)}{2} = nk$.

Suy ra $2(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = n[2k - (n+1)m]$ chia hết cho n . Trên bảng đang có các số $a_1, a_2, \dots, a_n$ mà tổng của chúng chia hết cho n . Ta thực hiện các phép biến đổi theo nguyên tắc f sau. Gọi m và M là các số nhỏ nhất trên bảng (nếu có nhiều số bằng m hoặc M , ta có thể chọn 2 số đại diện).

- ① **Lần 1.** Cộng số m thêm 2 và M thêm 1, các số còn lại cộng ngẫu nhiên theo nguyên tắc đã cho ở đề bài. Khi đó trên các có các số $m+2$, $M+1$ và các số $b_3, b_4, \dots, b_n$.
- ② **Lần 2.** Cộng số $m+2$ thêm n và số $M+1$ thêm $n-1$, các số b_i đã được cộng p_i trong lần 1 sẽ được cộng thêm $n+1-p_i$ trong lần 2.

Sau lần 2 như thế, ta thu được các số $m+n+2$, $M+n$, các số còn lại chính là các số khác được cộng thêm $n+1$. Giả sử các số thu được trên bảng là $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ và gọi m_1, M_1 là các số nhỏ nhất và lớn nhất trong bộ $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Khi đó $|M_1 - m_1| = |M+n - (m+n-2)| = |M - m - 2|$. Như vậy, sau mỗi biến đổi f , hiệu giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất giảm đi 2, nên sau hữu hạn lần tác động biến đổi f , ta được hiệu giữa hai số đó không vượt quá 1. Ngoài ra, tổng các số trên bảng vẫn chia hết cho n vì tăng lên $n(n+1)$. Giả sử khi đó, số lớn nhất trên bảng là x và số nhỏ nhất là y với $|x - y| \leq 1$. Nếu $x \neq y$ thì $x = y + 1$. Khi đó có $r \geq 1$ số trên bảng bằng x và $n - r \geq 1$ số trên bảng bằng y . Tổng các số trên bảng là $x \cdot r + (x+1)(n-r) = -r + (x+1)n$. Nhưng tổng các số trên bảng chia hết cho n nên r chia hết cho n . Do $r \geq 1$ và $n - r \geq 1$ nên $q \leq r \leq n - 1$ nên ta có mâu thuẫn. Vậy $x = y$, ta có các số trên bảng bằng nhau. Điều phải chứng minh. $\square$

Bài 131. Ghi lên bảng 2018 số nguyên dương đầu tiên: $1, 2, 3, \dots, 2018$. Thực hiện thuật toán sau: mỗi lần cho phép xóa đi hai số a, b mà không có số nào là bội của số kia và thay thế chúng bởi hai số là ước số chung lớn nhất và bội chung nhỏ nhất của a, b . Hỏi rằng ta có thể thực hiện thuật toán trên vô hạn lần không? Tại sao?

Lời giải.

Với hai số nguyên dương a, b bất kì ta có

☒ $ab = (a, b)[a, b]$.

☒ $a + b < (a, b) + [a, b]$.

Sau mỗi lần thực hiện thuật toán trên thì:

- ① Các số trên bảng luôn là số nguyên dương.
- ② Tổng tất cả các số trên bảng tăng thêm ít nhất 1 đơn vị.
- ③ Tích tất cả các số trên bảng không thay đổi và luôn bằng $2018!$. Do đó tổng các số trên bảng bị chặn trên: Thực vậy, nếu $a_1, \dots, a_{2018}$ là các số nguyên dương mà $a_1 \cdots a_{2018} = 2018!$ thì $1 \leq a_j \leq 2018!$. Do đó $a_1 + \dots + a_{2018} \leq 2018 \cdot 2018!$. Vậy tổng các số bị chặn. Thành thử chỉ sau một số hữu hạn bước ta không thể thực hiện được thuật toán trên được nữa.

Bài toán được giải quyết. $\square$

Bài 132. Trong kỳ thi chọn HSG lớp 12 môn toán năm học 2018-2019 có 20 học sinh tham gia. Một nhóm “tình bạn” là một nhóm gồm 3 học sinh đôi một quen biết nhau, một nhóm “xa lạ” là một nhóm gồm 3 học sinh đôi một không quen biết nhau. Gọi tổng số nhóm “tình bạn” và nhóm “xa lạ” trong kỳ thi này là n , tìm giá trị nhỏ nhất của n .

Lời giải.

Ta gọi chung một nhóm “tình bạn” hoặc một nhóm “xa lạ” là một nhóm “đặc biệt”. Số nhóm 3 người mà không phải nhóm “đặc biệt” là $\binom{20}{3} - n = 1140 - n$. Ta gọi T là số bộ $(A, \{B, C\})$ sao cho A quen cả B và C hoặc A không quen cả B và C .

Trường hợp 1. Với mỗi nhóm đặc biệt số bộ $(A, \{B, C\})$ là 3, vậy số bộ $(A, \{B, C\})$ như trên là $3n$.

Trường hợp 2. Với mỗi nhóm 3 người, mà không phải nhóm đặc biệt số bộ $(A, \{B, C\})$ như trên là 1, trường hợp số bộ $(A, \{B, C\})$ là $\binom{20}{3} - n = 1140 - n$.

Vậy $T = 1140 + 2n$. Với mỗi bạn học sinh A , giả sử bạn A quen với x học sinh và không quen với y học sinh. Ta có $x + y = 19$ và số bộ $(A, \{B, C\})$ ứng với học sinh A này là

$$\binom{x}{2} + \binom{y}{2} = \frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2} = \frac{x(x-1)}{2} + \frac{(19-x)(18-x)}{2} \geq 81.$$

Suy ra $T \geq 81 \cdot 20 = 1620$ hay $1140 + 2n \geq 1620$. Vậy $n \geq 240$.

Để chỉ ra dấu bằng, ta đánh số các bạn học sinh là $A_1, A_2, \dots, A_{20}$ và xây dựng một mô hình như sau: A_i và A_j quen nhau nếu i, j cùng tính chẵn lẻ. Và A_i không quen A_j nếu i, j khác chẵn lẻ. Khi đó số bộ $(A, \{B, C\})$ ứng với học sinh A sẽ là $\binom{10}{2} + \binom{9}{2} = 81$, tức dấu bằng đã xảy ra. $\square$

Bài 133. Trên mặt phẳng cho $2n^2 (n \geq 2)$ đường thẳng sao cho không có hai đường nào song song và không có ba đường nào đồng quy. Các đường thẳng này chia mặt phẳng ra thành các miền rời nhau. Trong các miền đó, gọi F là tập tất cả các miền đa giác có diện tích hữu hạn. Chứng minh rằng có thể tô n đường thẳng trong số $2n^2$ đường thẳng đã cho bằng màu xanh sao cho không có miền nào trong tập F có tất cả các cạnh màu xanh.

Lời giải.

Gọi L là tập các đường thẳng đã cho. Chọn một tập lớn nhất $B \subseteq L$ sao cho khi tô các đường trong B bằng màu xanh thì không có miền nào trong F có tất cả các cạnh màu xanh. Đặt $|B| = k$, ta sẽ chỉ ra $k \geq n$ là bài toán được giải quyết. Ta làm như sau. Tô các đường trong tập $L \setminus B$ bằng màu đỏ. Một điểm được gọi là màu xanh nếu nó là giao của hai đường thẳng màu xanh. Thế thì có $\binom{k}{2}$ điểm màu xanh. Ta xét một đường màu đỏ l bất kì. Bởi tính lớn nhất của B nên phải có ít nhất một miền $A \in F$ có duy nhất một cạnh màu đỏ và nằm trên l (vì nếu ngược lại miền nào cũng có hai cạnh đỏ và có một cạnh nằm trên l thì ta tô l màu xanh vẫn thỏa mãn, điều này vi phạm tính lớn nhất của B). Vì A có ít nhất ba cạnh, nên ít nhất hai cạnh nào đó màu xanh cắt nhau, nên A có ít nhất một đỉnh xanh, gọi đây là đỉnh xanh liên kết với đường đỏ l . Vì mỗi điểm xanh thuộc bốn miền (giao của hai đường xanh), nó sẽ liên kết với nhiều nhất 4 đường đỏ. Vì thế số đường thẳng đỏ nhiều nhất chỉ có thể là $4 \binom{k}{2}$. Mặt khác, số đường thẳng màu đỏ là $2n^2 - k$, vì thế ta được $2n^2 - k \leq 2k(k-1)$, suy ra

$$2n^2 \leq 2k^2 - k \leq 2k^2 \Rightarrow k \geq n$$

Bài toán được giải quyết. $\square$

Bài 134. Cho số nguyên dương $N \geq 2$. Điền vào các số $1, 2, 3, \dots, n^2$ vào tất cả các ô vuông của một bảng vuông kích thước $n \times n$, mỗi số một ô vuông. Chứng minh rằng tồn tại hai ô vuông kề nhau (có chung một cạnh) mà hiệu hai số trong đó không nhỏ hơn n .

Lời giải.

Gọi k là số nguyên nhỏ nhất sao cho tồn tại một hàng hoặc một cột chỉ chứa các số thuộc tập $\{1, 2, \dots, k\}$.

1	11	4	10
16	2	14	5
7	13	8	9
12	3	6	9

Chẳng hạn trong hình vẽ trên, nếu xét theo hàng thì phần tử lớn nhất mỗi hàng là 11, 16, 15, 12, số bé nhất trong đó là 11. Nếu xét theo cột, các số lớn nhất là 11, 16, 14, 15, số bé nhất trong đó là 11. So sánh hàng và cột đó, thấy hàng 1 là hàng chứa các số 1, 11, 4, 10 đều là các số thuộc tập $\{1, 2, \dots, k\}$. Giả sử số k thuộc hàng r và cột c , các ô còn lại của hàng r đều thuộc tập $\{1, 2, \dots, k\}$.

Nhận xét. Mỗi cột trừ cột c đều chứa ít nhất một số $\geq k + 1$ và không phải tất cả các ô cùng một cột đều $\geq k + 1$. Suy ra cột thứ i phải chứa một cặp (a_i, b_i) kề nhau mà $a_i \leq k - 1, b_i \geq k + 1$.

① Nếu tồn tại một ô của cột c chứa số $\geq k + 1$ thì cột c chứa cặp (a, b) kề nhau mà $a \leq k, b \geq k + 1$.

② Nếu một ô của cột c đều $\leq k$ thì c chứa cặp (a, b) kề nhau mà $a \leq k - 1, b = k$.

Như vậy, trong mọi trường hợp, tồn tại cặp (a, b) kề nhau trong cột thứ i mà

$$\max\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = A < B = \min\{b_1, b_2, \dots, b_n\}.$$

Nếu (1) xảy ra thì $A = k, B = k + 1$.

Nếu (2) xảy ra thì $A = k - 1, B = k$.

$$\text{Từ đó } \sum_{i=1}^n b_i \geq B + B + 1 + B + 2 + \dots + B + n + 1 = \left(B + \frac{n-1}{2}\right)n$$

$$\text{và } \sum_{i=1}^n a_i \leq A + A - 1 + A - 2 + \dots + A - n + 1 = \left(A - \frac{n-1}{2}\right)n.$$

$$\text{Suy ra } \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \geq n^2 \text{ nên tồn tại } j: b_j - a_j \geq n.$$

Điều phải chứng minh. □

Bài 135. Một điểm trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc Oxy được gọi là **điểm nguyên** nếu cả hoành độ và tung độ của điểm đó đều là các số nguyên. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , luôn tồn tại một đường tròn chứa đúng n điểm nguyên bên trong.

Lời giải.

Chọn điểm $C = \left(\frac{1}{3}; \sqrt{3}\right)$. Ta sẽ chứng minh không có hai điểm nguyên khác nhau có cùng khoảng cách đến C . Thật vậy, giả sử ngược lại có hai điểm nguyên (m, n) và (p, q) khác nhau và có cùng khoảng cách đến C . Khi đó, ta có $\left(m - \frac{1}{3}\right)^2 + (n - \sqrt{3})^2 = \left(p - \frac{1}{3}\right)^2 + (q - \sqrt{3})^2$, hay

$$m^2 + n^2 - p^2 - q^2 - \frac{2m}{3} + \frac{2p}{3} = 2\sqrt{3}(n - q). \quad (*)$$

Từ đó, do m, n, p, q là các số nguyên nên $2\sqrt{3}(n - q)$ là số hữu tỉ. Suy ra $n - q = 0$, hay $n = q$. Vì thế $m \neq p$, (do (m, n) và (p, q) là hai điểm khác nhau) và từ (*) ta được:

$$(m - p) \left(m + p - \frac{2}{3} \right) = 0.$$

Suy ra $m + p - \frac{2}{3} = 0$, là điều vô lí, vì $m, p \in \mathbb{Z}$. Điều vô lí này chứng tỏ giả sử ở trên là sai và ta có điều muốn chứng minh. Xét dãy các đường tròn tâm $C(C, R_i)$ với $i = 1, 2, 3, \dots$, với R_1 bằng khoảng cách từ C đến điểm nguyên gần nó nhất và

$$R_1 < R_2 < R_3 < \dots,$$

đồng thời mỗi đường tròn trong dãy đều đi qua các điểm nguyên. Theo phần chứng minh ở trên, mỗi đường tròn của dãy đều đi qua đúng một điểm nguyên. Vì thế, với mỗi số nguyên dương n , bên trong đường tròn tâm C , bán kính R với $R_n < R < R_{n+1}$, sẽ có đúng n điểm nguyên. Bài toán đã được chứng minh. $\square$

Bài 136.

- ① Có 50 cây giống được phân phối về cho các xã A, B, C, D . Hỏi có bao nhiêu cách phân phối biết rằng số cây giống của xã A phải chia hết cho 5; số cây giống của xã B ít hơn 10; số cây giống của xã C nhiều hơn 4 và số cây giống của xã D ít nhất là 15?
- ② Có một nền nhà hình vuông kích thước 8×8 được lát bởi 21 viên gạch kích thước 1×3 . Biết rằng các viên gạch đều nguyên vẹn (không bị cắt ra). Khi đó tồn tại 1 ô trống kích thước 1×1 . Hỏi ô trống đó có thể nằm ở những vị trí nào?

Lời giải.

$$\textcircled{1} \text{ Số cách chia cây cho xã A có hàm sinh là } 1 + x^5 + x^{10} + \dots = \frac{1}{1 - x^5}.$$

$$\text{Số cách chia cây cho xã B có hàm sinh là } 1 + x + x^2 + \dots + x^9 = \frac{1 - x^{10}}{1 - x}.$$

$$\text{Số cách chia cây cho xã C có hàm sinh là } x^5 + x^6 + \dots = \frac{x^5}{1 - x}.$$

$$\text{Số cách chia cây cho xã D có hàm sinh là } x^{15} + x^{16} + \dots = \frac{x^{15}}{1 - x}.$$

$$\text{Hàm sinh số cách chia cây là } f(x) = x^{20}(1 + x^5) \frac{1}{(1 - x)^3}.$$

$$\text{Số cách chia cây chính là hệ số của } x^{50} \text{ của khai triển } f(x) \text{ là } \binom{27}{25} + \binom{32}{30} = 847.$$

- ② Xét ϵ căn bậc 3 nguyên thủy của đơn vị $\epsilon \neq 1$. Khi đó, với mọi số nguyên dương k ta có $\epsilon^k + \epsilon^{k+1} + \epsilon^{k+2} = 0$. Coi nền nhà là 1 bảng ô vuông, với 1 cách lát gạch cho trước ta điền vào mỗi ô của bảng 1 số thỏa mãn: ô $(i; j)$ điền ϵ^{i+j} khi đó mỗi viên gạch sẽ chiếm 3 số có tổng bằng 0. Mà tổng các ô trên bảng là $S = 1$ nên ô còn lại phải là ô $(m; n)$ có tổng $m + n$ chia hết cho 3. Cũng xét cách lát trên ta điền vào mỗi ô của bảng 1 số thỏa mãn: ô $(i; j)$ điền ϵ^{i-j} khi đó mỗi viên gạch sẽ chiếm 3 số có tổng bằng 0. Mà tổng các ô trên bảng là $S = 1$ nên ô còn lại phải là ô $(m; n)$ có hiệu $m - n$ chia hết cho 3. Từ đó suy ra ô trống phải là 1 trong 4 ô $(3; 3), (3; 6), (6; 3), (6; 6)$. Chỉ ra cách lát cụ thể để ô trống là 1 trong 4 ô trên.

Bài toán được giải quyết. $\square$

Bài 137. Với $n \geq 2$, gọi $f(n)$ là số các hoán vị của tập $\{1; 2; 3; \dots; n\}$ mà không có số k nào đứng liền trước số $k+1$ với mọi $k \in \{1; 2; 3; \dots; n-1\}$. Chứng minh rằng

$$\textcircled{1} \quad f(n) = (n-1)f(n-1) + (n-2)f(n-2), \quad \forall n \geq 4.$$

$$\textcircled{2} \quad f(n) = \frac{1}{n} \left[\frac{(n+1)!}{e} + \frac{1}{2} \right], \quad \forall n \geq 2, \text{ trong đó } [x] \text{ là phần nguyên của } x \text{ và}$$

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

Lời giải.

$\textcircled{1}$ Xét một hoán vị bất kỳ của $\{1; 2; 3; \dots; n\}$ thỏa mãn đề bài, và

- (a) Nếu không tồn tại k để $k, n, k+1$ liên tiếp theo thứ tự đó thì có thể bỏ n đi để được một hoán vị của $\{1; 2; 3; \dots; n-1\}$ thỏa mãn.
 - (b) Nếu tồn tại k để $k, n, k+1$ liên tiếp theo thứ tự đó thì có thể bỏ cả n và $k+1$ đi, đồng thời giảm đi 1 ở tất cả các số từ $k+2$ đến $n-1$ ($k = n-2$ thì không cần làm bước này), khi đó sẽ được một hoán vị của $\{1; 2; 3; \dots; n-2\}$ thỏa mãn. Ngược lại
 - (c) Từ một hoán vị của $\{1; 2; 3; \dots; n-1\}$ thỏa mãn thì có thể tạo ra $n-1$ hoán vị của $\{1; 2; 3; \dots; n\}$ thỏa mãn bằng cách chèn n vào vị trí đầu tiên hoặc $n-2$ vị trí liền sau các số $1, 2, \dots, n-2$. Sẽ có tổng cộng $(n-1)f(n-1)$ hoán vị dạng này.
 - (d) Từ một hoán vị của $\{1; 2; 3; \dots; n-2\}$ thỏa mãn thì có thể tạo ra $n-2$ hoán vị của $\{1; 2; 3; \dots; n\}$ thỏa mãn bằng cách: với mỗi $k = \overline{1, n-2}$, tăng thêm 1 ở tất cả các số từ $k+1$ đến $n-2$ ($k = n-2$ thì không cần làm bước này), sau đó chèn $n, k+1$ vào vị trí liền sau k . Sẽ có tổng cộng $(n-2)f(n-2)$ hoán vị dạng này.
- Vậy $f(n) = (n-1)f(n-1) + (n-2)f(n-2) \quad \forall n \geq 4$.

$\textcircled{2}$ Ta có

$$\frac{(n+1)!}{e} = (n+1)! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = (n+1)! \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!} + (n+1)! \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Trong đó $(n+1)! \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!}$ là số nguyên, và

$$\left| (n+1)! \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \right| \leq (n+1)! \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^{k-n-1}} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2}.$$

Do đó

$$\left[\frac{(n+1)!}{e} + \frac{1}{2} \right] = (n+1)! \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Ta chứng minh khẳng định đề bài bằng quy nạp.

Rõ ràng kết quả đã đúng với 2, 3.

Nếu đã có $f(n-1), f(n-2)$, ta cần chứng minh

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k (n+1)!}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n!}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (n-1)!}{k!}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{(-1)^n(n+1)}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k(n+1)!}{k!} = (-1)^n + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{(-1)^k n!}{k!} + \frac{(-1)^k(n-1)!}{k!} \right] \\ &\Leftrightarrow (-1)^n + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k(n+1)!}{k!} = (-1)^n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k(n+1)(n-1)!}{k!} \text{ (đúng)}. \end{aligned}$$

Bài toán được giải quyết. □

Bài 138. Cô giáo có tất cả 2020 viên kẹo gồm 20 loại kẹo khác nhau, mỗi loại ít nhất có 2 viên kẹo. Cô chia hết kẹo cho các học sinh của mình, mỗi người một số viên kẹo và không có học sinh nào nhận được nhiều hơn một viên kẹo ở một loại kẹo. Cô yêu cầu hai học sinh khác nhau bất kì so sánh các viên kẹo mình nhận được và viết số loại kẹo mà cả hai cùng có lên bảng. Biết rằng mỗi cặp học sinh bất kì đều được lên bảng đúng một lần. Gọi tổng các số được viết lên bảng là M .

- ① Xác định giá trị nhỏ nhất của M .
- ② Với giả thiết tương tự nhưng thay 20 loại kẹo khác nhau bởi 19 loại kẹo khác nhau, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của M trong trường hợp tương ứng này.

Lời giải.

- ① Gọi $a_1, a_2, \dots, a_{20}$ là số viên kẹo của loại kẹo thứ $1, 2, \dots, 20$ với $a_i \geq 2$. Với loại kẹo thứ i ($1 \leq i \leq 20$), ta đếm số bộ (A, B) mà hai học sinh A, B đều có loại kẹo này. Số bộ cần đếm là $\binom{a_i}{2}$. Khi đó, theo giả thiết, tổng số bộ chính là M hay $M = \sum_{i=1}^{20} \binom{a_i}{2}$ trong đó $\sum_{i=1}^{20} a_i = 2020$.

Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schawarz* ta có

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=1}^{20} \frac{a_i(a_i - 1)}{2} = \sum_{i=1}^{20} \frac{a_i^2}{2} - \sum_{i=1}^{20} \frac{a_i}{2} \\ &\geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{20} a_i \right)^2}{2 \cdot 20} - \sum_{i=1}^{20} \frac{a_i}{2} = \frac{2020^2}{2 \cdot 20} - \frac{2020}{2} = 101000. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $a_i = 101, \forall i = 1, 2, \dots, 20$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 101000.

- ② Như lý luận ở câu a, ta có $M = \sum_{i=1}^{19} \frac{a_i(a_i - 1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{19} a_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{19} a_i$.

Nên biểu thức M đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $\sum_{i=1}^{19} a_i^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta sẽ chứng minh $\sum_{i=1}^{19} a_i^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $|a_i - a_j| \leq 1$ với mọi $1 \leq i, j \leq 19$. (1)

Thật vậy. Xét bộ 4 số a, b, c, d mà $a \geq b + 2; c = a - 1; d = b + 1$ thì ta có

$$cd = ab + a - b - 1 \geq ab \text{ và } (a + b)^2 = (c + d)^2 \text{ suy ra } a^2 + b^2 \geq c^2 + d^2.$$

Mở rộng tính chất này cho nhiều số ta suy ra (1) được chứng minh. Do đó M đạt giá trị nhỏ nhất khi có t số có giá trị là k và $19 - t$ số có giá trị là $k + 1$ với $0 \leq t \leq 19$ và giá trị nhỏ nhất là

$$M = \frac{1}{2} [tk^2 + (19 - t)(k + 1)^2 - 2020].$$

Ta có

$$tk + (19 - t)(k + 1) = 2020 \Leftrightarrow t = 19k - 2001$$

Do $0 \leq t \leq 19$ nên $\frac{2001}{19} \leq k \leq \frac{2020}{19}$. Từ đây ta có $k = 106$, $t = 13$. Thay vào ta được giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{1}{2} [13 \cdot 106^2 + 6 \cdot 107^2 - 2020] = 106371$.

Bài toán được giải quyết. □

Bài 139. Tại một hội nghị khoa học có 100 đại biểu tham dự. Người ta nhận thấy rằng không có 3 đại biểu nào đôi một quen nhau. Biết rằng tồn tại số nguyên dương n sao cho không có đại biểu nào quen quá n đại biểu khác và với mọi k , $1 \leq k \leq n$ có ít nhất một đại biểu quen đúng k đại biểu khác. Hãy tìm giá trị lớn nhất của n .

Lời giải.

Ta chứng minh $n_{\max} = 66$. Giả sử $n_{\max} > 66$.

Cách 1. Khi đó tồn tại đại biểu A_{100} quen 67 đại biểu $A_1, A_2, \dots, A_{67}$. Gọi X là tập hợp các đại biểu $A_{68}, A_{69}, \dots, A_{99}$ thì $|X| = 32$. Khi đó các đại biểu $A_1, A_2, \dots, A_{67}$ chỉ có thể quen A_{100} và các đại biểu thuộc X (vì các đại biểu A_i, A_j với $1 \leq i < j \leq 67$ không thể quen nhau). Suy ra họ quen không quá 33 đại biểu. Vì vậy những đại biểu quen 34, 35, $\dots$, 65, 66 đại biểu khác phải thuộc X . Điều này vô lý bởi $|X| = 32 < 66 - 34 + 1$.

Cách 2. Xét người A có 67 người quen. Xét người B có nhiều hơn hoặc bằng 34 người quen. Nếu A quen B . Khi đó trong 98 người còn lại có 66 người quen A và nhiều hơn hoặc bằng 33 người quen B . Do $66 + 33 = 99 > 98$ nên A, B phải có người quen chung, mâu thuẫn. Vậy A không quen B . Vì có ít nhất 33 người có số người quen tương ứng là 34, 35, $\dots$, 66 nên có ít nhất 33 người không quen A . Điều này mâu thuẫn vì A quen với 67 người. Vậy $n_{\max} \geq 66$. Ta xây dựng ví dụ thỏa mãn $n = 66$ như sau, A_1 quen với $B_1, B_2, \dots, B_{66}$, A_2 quen với $B_2, B_3, \dots, B_{66}, \dots$, A_{34} quen với B_{34}, B_{66} . Khi đó không có 3 người đôi một quen nhau và A_k quen với $67 - k$ người ($\forall k = 1, \dots, 34$) và B_k quen với k người ($\forall k = 1, \dots, 34$) và B_k quen 34 người với ($\forall k = 35, \dots, 66$). Rõ ràng trường hợp trên thỏa mãn các yêu cầu đề bài. □

Bài 140. Gọi S là tập hợp các bộ $(a_1, a_2, \dots, a_{164})$ là hoán vị của 164 số nguyên dương đầu tiên.

- ① Có bao nhiêu hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_{164})$ thuộc S sao cho với mọi $i \in \{1, 2, \dots, 164\}$ ta luôn có $a_i \neq i$ và $a_i \equiv i \pmod{41}$?
- ② Tồn tại hay không hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_{164})$ thuộc S sao cho với mọi $i \in \{1, 2, \dots, 164\}$ đều tồn tại các số nguyên $b_i \in \{0, 1, \dots, 40\}$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + \dots + a_i \equiv b_i^2 \pmod{41}$?

Lời giải.

- ① Chia các số từ 1, 2, $\dots$, 164 thành 41 nhóm theo số dư khi chia cho 41 thì rõ ràng mỗi nhóm có 4 số (4 số này ở các vị trí $a_i, a_{i+41}, a_{i+82}, a_{i+123}$ với $i = \overline{1, 41}$ của hoán vị). Các số trong mỗi bộ trên sẽ được hoán đổi vị trí cho nhau.

Ta thấy với một bộ (x_1, x_2, x_3, x_4) , ta có 9 cách hoán vị là

$$\begin{aligned} &(x_2, x_1, x_4, x_3), (x_2, x_3, x_4, x_1), (x_2, x_4, x_1, x_3), \\ &(x_3, x_1, x_4, x_2), (x_3, x_4, x_1, x_2), (x_3, x_4, x_2, x_1), \\ &(x_4, x_1, x_2, x_3), (x_4, x_3, x_2, x_1), (x_4, x_3, x_1, x_2). \end{aligned}$$

để cho không có phần tử nào nằm đúng vị trí ban đầu. Vì thế nên có tất cả 9^{41} hoán vị thỏa mãn đề bài.

- ② Ta sẽ chứng minh kết quả quen thuộc là “với p là số nguyên tố có dạng $3k+2$ thì $\{1^3, 2^3, \dots, p^3\}$ sẽ lập thành hệ thặng dư đầy đủ theo mod p ”. Thật vậy, giả sử trong bộ trên có hai số $i \neq j$ sao cho $i^3 \equiv j^3 \pmod{p}$ thì $i^{3k} \equiv j^{3k} \pmod{p}$. Theo định lý Fermat nhỏ thì

$$i^{3k+1} \equiv j^{3k+1} \pmod{p}$$

nên

$$i^{3k+1} \equiv j^{3k+1} = j \cdot j^{3k} \equiv j \cdot i^{3k} \pmod{p}$$

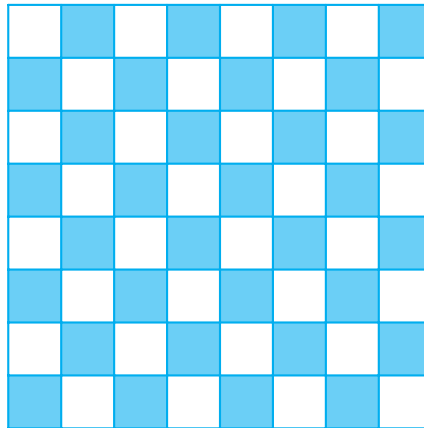
kéo theo $i^{3k}(i - j) \equiv 0 \pmod{p}$ hay $i \equiv j \pmod{p}$, vô lý vì $i, j \in \{1, 2, \dots, p\}$ và $i \neq j$. Ta sẽ xây dựng hoán vị thỏa mãn đề bài sao cho $a_i \equiv i^3 \pmod{41}$ với mọi $1 \leq i \leq 164$. Với 41 số đầu tiên, theo nhận xét thì các số $\{1^3, 2^3, \dots, 41^3\}$ có số dư đôi một khác nhau khi chia cho 41 nên ta sắp xếp chúng để số dư thay đổi từ $1 \rightarrow 41$. Các số $42 \rightarrow 82; 83 \rightarrow 123; 124 \rightarrow 164$ cũng được thực hiện hoán vị tương tự. Hoán vị này thỏa mãn vì

$$a_1 + a_2 + \dots + a_i \equiv 1^3 + 2^3 + \dots + i^3 = \left(\frac{i(i+1)}{2} \right)^2 \pmod{41}$$

Bài toán được giải quyết. □

Bài 141. Cho bảng ô vuông gồm m hàng và n cột. Tại ô góc trên bên trái của bảng người ta đặt một quân cờ. Hai người chơi luân phiên di chuyển quân cờ, mỗi lượt di chuyển chỉ di chuyển quân cờ sang phải một ô hoặc xuống dưới một ô. Người chơi nào đến lượt mình không di chuyển được quân cờ thì thua. Xác định điều kiện của m, n để người thực hiện lượt chơi đầu tiên luôn là người thắng.

Lời giải.



- ✓ Ta tô màu các ô của bảng ô vuông lần lượt bằng hai màu trắng và đen với ô trên cùng bên trái của bảng là màu trắng (tô đan xen như bàn cờ). Ta gọi người thứ nhất là người thực hiện di chuyển đầu tiên và người còn lại là người thứ hai.
- ✓ Gọi ô thuộc hàng p cột q là ô $(p; q)$. Khi đó:
 - Nếu m, n cùng tính chẵn lẻ thì ô $(1; 1)$ có cùng màu với ô $(m; n)$.
 - Nếu m, n khác tính chẵn lẻ thì ô $(1; 1)$ khác màu với ô $(m; n)$.
- ✓ Ta thấy mỗi lượt di chuyển (theo quy tắc di chuyển của bài toán) cả hai người chơi đều phải di chuyển cờ sang ô khác màu với ô cờ đang đứng. Vì quy luật di chuyển của bài toán là hoặc chỉ xuống 1 ô hoặc chỉ sang phải 1 ô nên

- Ở lượt di chuyển đầu tiên, người thứ nhất sẽ di chuyển cờ sang ô đen, người thứ hai sẽ di chuyển cờ sang ô trắng và đây là bất biến của bài toán.
- Cờ luôn được đưa về ô $(m; n)$ điều này có nghĩa người thắng phải là người trong lượt chơi của mình phải đặt cờ vào ô $(m; n)$ (và như vậy người còn lại không di chuyển cờ được).

Do đó để người thứ nhất luôn thắng thì ô $(m; n)$ phải trùng màu với ô mà người thứ nhất di chuyển lần đầu tiên (tức ô đen). Hay nói cách khác ô (m, n) phải khác màu với ô $(1; 1)$ thì người thứ nhất luôn thắng. Điều đó có nghĩa m, n phải khác tính chẵn lẻ. Ngược lại, nếu m, n có cùng tính chẵn lẻ. Theo lập luận trên người thứ hai luôn thắng (dù người thứ nhất có di chuyển như thế nào). Vậy m, n phải khác tính chẵn lẻ thì người thứ nhất luôn thắng.

Bài toán được giải quyết. □

Bài 142. Cho tập hợp $X = \{1; 2; 3; \dots; 2018\}$ gồm 2018 số nguyên dương đầu tiên. A là một tập con của tập X thỏa mãn: với $x, y, z \in A$; $x < y < z$ thì x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác. Hỏi tập hợp A có nhiều nhất bao nhiêu phần tử?

Lời giải.

Giả sử $A = \{a_1; a_2; \dots; a_k\}$ với $a_1 < a_2 < \dots < a_k$. Nếu $a_k < 2018$, đặt $t = 2018 - a_k$ và $b_i = a_i + t$ với $i = 1, 2, \dots, k$ và tập $\{b_1; b_2; \dots; b_k\}$ cũng thỏa mãn bài toán và $b_k = 2018$. Do đó ta có thể giả sử $a_k = 2018$. Ta có $a_1 + a_2 > a_k$ và $a_1 < a_2$ nên

$$2a_2 > a_k = 2018 \Rightarrow a_2 > 1009 \Rightarrow a_2 \geq 1010.$$

Từ đây ta có $A \setminus \{a_1\} \subset \{1010; 1011; \dots; 2018\}$, do đó

$$|a| - 1 \leq 2018 - 1010 + 1 = 1009 \Rightarrow |a| \leq 1010.$$

Xét tập hợp $A_0 = \{1009; 1010; \dots; 2018\}$, ta có $|a_0| = 1010$ và với $x, y, z \in A_0$ mà $x < y < z$ thì ta có

$$x + y \geq 1009 + 1010 = 2019 > 2018 \geq z,$$

hay x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác. Vậy $\max |a| = 1010$. □

Bài 143. Cho một số hữu hạn các thanh dọc có chiều dài 2017 được cố định trên một vài tấm kim loại. Trên mỗi thanh có một hạt mà nó trượt tự do trên thanh đó. Một vài cặp hạt được nối với nhau bằng dây đàn hồi. Ant (em) tự do di chuyển trên tất cả các dây. Còn Ant (anh) tự do di chuyển trên tất cả các dây mà độ chênh lệch chiều cao của các điểm cuối là ± 1 . Giả sử rằng xuất phát ở bất kì hạt nào, Ant (em) có thể đến bất kì hạt khác. Cấu hình của hạt mà khi mỗi hạt được đặt ở vị trí là số nguyên và độ cao hai điểm cuối của bất kì dây nào đều khác nhau, được gọi là cấu hình chấp nhận được. Biết rằng có ít nhất một cấu hình chấp nhận được của thiết bị này, chứng minh rằng tồn tại một cấu hình chấp nhận được mà Ant (anh) xuất phát ở bất kì hạt nào cũng có thể đến bất kì hạt khác.

Lời giải.

Ta hãy cải cách bài toán trong giới hạn về lý thuyết đồ thị. Cho G là một đường gấp khúc. Giả sử mỗi đỉnh của G được tô màu thích hợp trong số các màu $0, 1, \dots, 2017$: các điểm cuối của mỗi cạnh được tô màu khác nhau. Gọi $f(x)$ là một màu của đỉnh x . Chứng minh rằng có thể đổi màu các đỉnh của G thích hợp thành các màu $0, 1, \dots, 2017$ sao cho

Với bất kì hai đỉnh a và b có một đường nối $a = x_1, x_2, \dots, x_n = b$ thỏa mãn với mỗi $i = 1, \dots, n - 1$ ta có

$$|f(x_i) - f(x_{i+1})| = 1. \quad (*)$$

Xét bất kì màu thích hợp của G . Gọi G_1 là một nhánh cực đại của G thỏa mãn (*). Hãy chỉ ra cách đổi màu một số đỉnh mà ta có thể tăng số đỉnh của G_1 . Với bất kì đồ thị G' , tập các đỉnh của G' sẽ được kí hiệu là $V(G')$. Gọi

$$\min_{\substack{x \in V(G_1), \\ y \in V(G-G_1)}} (|f(x) - f(y)|) = |f(x_0) - f(y_0)|,$$

theo định nghĩa $|f(x_0) - f(y_0)| > 1$.

Giả sử $f(x_0) > f(y_0)$. Ta đổi màu vài đỉnh của $G - G_1$: các đỉnh màu $f(y_0)$ thành $f(x_0) - 1$ và các đỉnh màu $f(x_0) - 1$ thành $f(y_0)$. Khi đó, dễ thấy đường gấp khúc vẫn được tô màu một cách thích hợp. Thật vậy, trong $G - G_1$ ta chỉ hoán đổi qua lại các màu $f(x_0) - 1$ và $f(y_0)$. Chú ý rằng, vì $|f(x_0) - f(y_0)|$ là cực tiểu sau khi đổi màu nên điều kiện $f(x) \neq f(y)$, $\forall x \in G_1, y \in G - G_1$ vẫn xảy ra.

Trong trường hợp ngược lại $f(x_0) < f(y_0)$, ta cũng sẽ đổi màu các đỉnh của $G - G_1$: các đỉnh màu $f(y_0)$ thành $f(x_0) + 1$ và các đỉnh màu $f(x_0) + 1$ thành $f(y_0)$.

Như vậy, sau khi đổi màu thì tập $V(G_1)$ sẽ được thêm ít nhất một phần tử mới y_0 . Bằng cách tiếp tục quá trình này, cuối cùng ta sẽ nhận được màu mong muốn của toàn bộ G thỏa mãn (*). $\square$

Bài 144. Cho một tập gồm n đường thẳng trên mặt phẳng sao cho không có 2 đường thẳng trong số chúng song song, hoặc 3 đường thẳng nào trong số chúng đồng quy. Một điểm gọi là *giao điểm* nếu điểm này nằm trên hai trong số n đường thẳng trên.

- ① Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng trong số n đường thẳng trên sao cho mỗi nửa phẳng xác định bởi đường thẳng này chứa ít nhất $\left\lfloor \frac{(n-1)(n-2)}{10} \right\rfloor$ giao điểm.
- ② Tìm tất cả các giá trị của n để sao cho số giao điểm trên một trong hai nửa phẳng tạo bởi đường thẳng tìm được ở trên là gần với giá trị $\left\lfloor \frac{(n-1)(n-2)}{10} \right\rfloor$ nhất.

Lời giải.

Với mỗi đường thẳng trong n đường thẳng đã cho, thì số giao điểm nằm ngoài đường thẳng này là

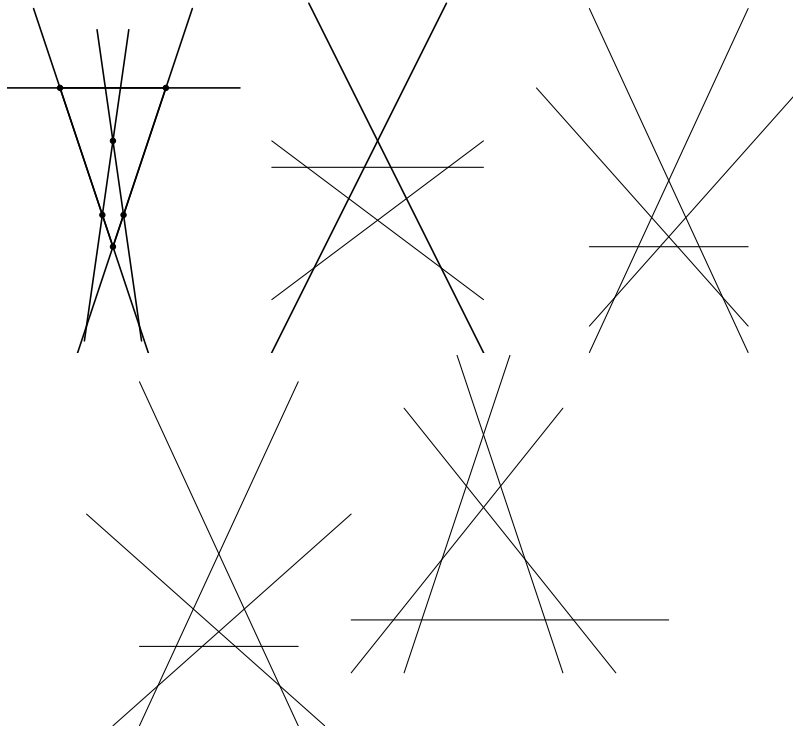
$$m = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Mỗi đường thẳng chia mặt phẳng thành 2 phần. Ta ký hiệu p là đường thẳng mà sự khác nhau giữa số giao điểm của 2 nửa mặt phẳng tạo bởi p là nhỏ nhất. Giả sử số giao điểm của một nửa phẳng tạo bởi p là k với $k \leq m = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Ta định nghĩa một bộ ba (d, A, B) là một bộ gồm đường thẳng d và hai giao điểm A, B sao cho A và B nằm về 2 phía của d .

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta thấy ngay với mỗi đường thẳng d thì số bộ ba (d, A, B) không vượt quá $k(m-k)$. Vậy tổng số bộ ba là N không vượt quá $nk(m-k)$.

Trong số các bộ ba, ta phân chia chúng làm 2 loại. Loại I là bộ ba (d, A, B) với A, B cùng nằm trên một đường thẳng. Loại II là các bộ ba còn lại. Giờ ta xét 2 trường hợp đặc biệt

- ☑ Bộ 4 đường thẳng tùy ý trong n đường thẳng trên, ta thấy mỗi bộ 4 đường thẳng cùng với các giao điểm chúng tạo ra thì tạo được 4 bộ ba loại I. Hơn nữa, mỗi bộ ba (d, A, B) tương ứng với đúng 1 bộ 4 đường thẳng. Do đó, số bộ ba thuộc loại I tạo bởi n đường thẳng là $4 \binom{n}{4}$.
- ☑ Bộ 5 đường thẳng tùy ý trong n đường thẳng trên, ta thấy mỗi bộ 5 đường thẳng cùng với các giao điểm chúng tạo ra thì tạo được ít nhất 5 bộ ba loại II. Minh họa cho các khả năng của trường hợp này trong hình 2.



Hình vẽ cho trường hợp 5 đường thẳng.

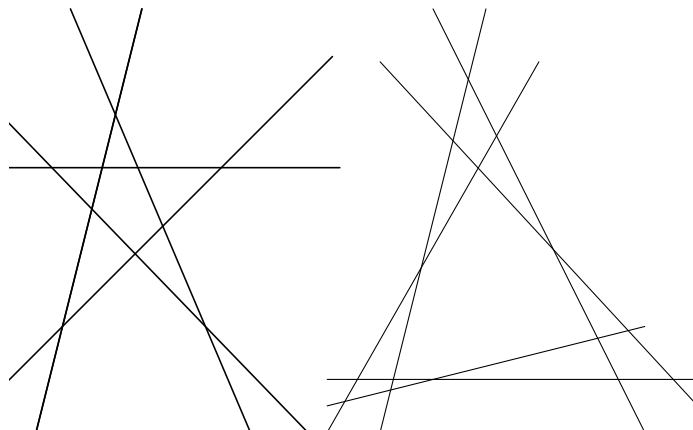
Do đó, ta có $N \geq 4 \binom{n}{4} + 5 \binom{n}{5} = n \binom{n}{4}$. Vậy $k(m-k) \geq \binom{n}{4} = \frac{m(m-1)}{6}$. Từ đây, ta suy ra

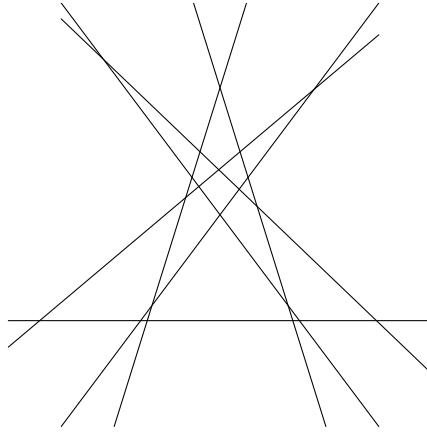
$$k \geq k_0 = \frac{1}{2} \left(m - \sqrt{\frac{m^2 + 2m}{3}} \right).$$

Dễ thấy $k_0 > \frac{m}{5}$ khi $n \geq 9$ và khi $n = 8$, ta có $k_0 > \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil = 4$. Vậy với $n \geq 8$ ta có

$$k > \left\lceil \frac{(n-1)(n-2)}{10} \right\rceil$$

Với $n \leq 7$, hiển nhiên ta có điều phải chứng minh khi $n \leq 4$ vì khi đó $\left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil = 0$. Với các trường hợp $k = 5, 6, 7$ ta có hình minh họa lần lượt như sau





Vậy trong mọi trường hợp ta đều có $k \geq \left\lceil \frac{(n-1)(n-2)}{10} \right\rceil$.

Ý (b) được suy ra ngay từ ý (a), ta có với $n = 5, 6, 7$ thì k bằng chính xác $\left\lceil \frac{(n-1)(n-2)}{10} \right\rceil$.

Chú ý. Ta để ý là vì mọi bộ 5 đường thẳng tạo ra nhiều nhất 7 bộ ba loại II.

Do đó, có thể chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng chia mặt phẳng thành 2 phần sao cho có một phần chứa ít hơn $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{15}}\right)m$ giao điểm. $\square$

Bài 145. Cho số nguyên dương k . Ban đầu, N ô vuông được đánh dấu trên một bảng ô vuông vô hạn. Ta gọi “hình chữ thập” của một ô A là tập hợp tất cả các ô nằm trên hàng hoặc cột chứa A . Tại mỗi bước, ta được phép đánh dấu ô A nếu hình chữ thập của A đã chứa ít nhất k ô được đánh dấu. Xác định giá trị nhỏ nhất của N để có thể đánh dấu mọi ô vuông trong bảng theo các bước trên.

Lời giải.

Ta sẽ chứng minh

$$N = \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil \cdot \left\lceil \frac{k+2}{2} \right\rceil = \begin{cases} m(m+1) & \text{nếu } k = 2m \\ m^2 & \text{nếu } k = 2m-1 \end{cases}.$$

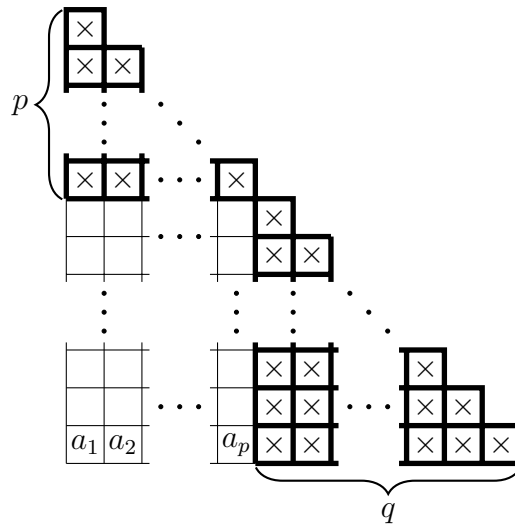
Kí hiệu $N(k)$ là giá trị cần tìm. Đặt $f(k) = \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil \cdot \left\lceil \frac{k+2}{2} \right\rceil$. Đầu tiên ta chứng minh

$$N(k) \geq N(k-1) + \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil \quad \text{khi } k \geq 2. \quad (*)$$

Sau khi đánh dấu $N(k)$ ô vuông, tồn tại ô vuông A sao cho trên cột hoặc hàng của A có ít nhất $\left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil$ ô vuông đã được đánh dấu, ta xóa cột hoặc hàng này, nhận được một mặt phẳng mới. Trên mặt phẳng mới, ta có thể đánh dấu mọi ô vuông nếu chữ thập tại ô vuông đó có ít nhất $k-1$ ô đã được đánh dấu. Do đó lúc đầu trên mặt phẳng mới có ít nhất $N(k-1)$ ô được đánh dấu, ta nhận được bất đẳng thức (*).

Vì $N(1) = 1$, nên từ (*) suy ra

$$N(k) \geq \underbrace{1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + \dots}_{k \text{ số hạng}} = f(k).$$



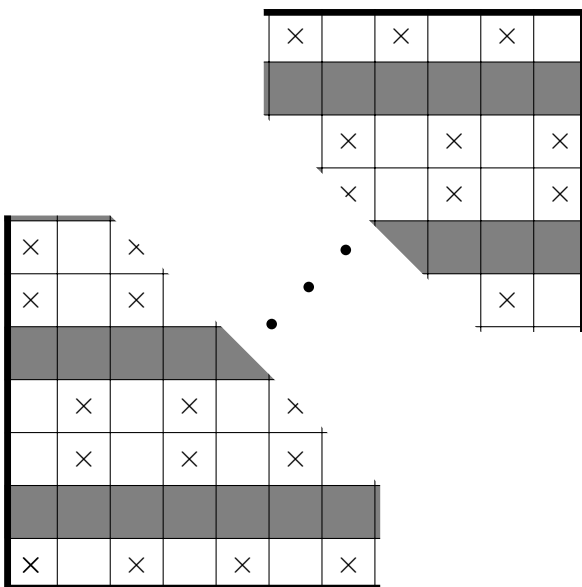
Ta cần chứng minh với $f(k)$ ô đã đánh dấu, ta có thể đánh dấu mọi ô khác trên mặt phẳng. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp. Xét hai "cầu thang" độ cao $p = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ và $q = \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil$, dễ thấy chỉ có $f(k)$ ô vuông trong đó. Khi $k = 1$, khẳng định là hiển nhiên. Giả sử mệnh đề đúng với $k - 1$, do $p + q = k$ nên ta có thể đánh dấu các ô $a_1, a_2, \dots, a_p$ và mọi ô khác cùng hàng với các ô này. Khi xóa tất cả các ô $a_1, a_2, \dots, a_p$ và mọi ô khác cùng hàng với các ô này giá trị của k giảm đi 1, sử dụng giả thiết quy nạp ta sẽ đánh dấu được tất cả các ô còn lại. $\square$

Bài 146. Trên bảng ô vuông $n \times n$, ta đánh dấu một số ô vuông sao cho ô dưới cùng bên trái L và ô trên cùng bên phải R không được đánh dấu, nhưng mọi đường đi của con mã từ L đến R đều chứa ít nhất một ô đã được đánh dấu. Hỏi với những số $n > 3$ nào thì có thể khẳng định rằng sẽ luôn có 3 ô vuông liên tiếp trên đường chéo chính mà ít nhất 2 trong số chúng đã được đánh dấu?

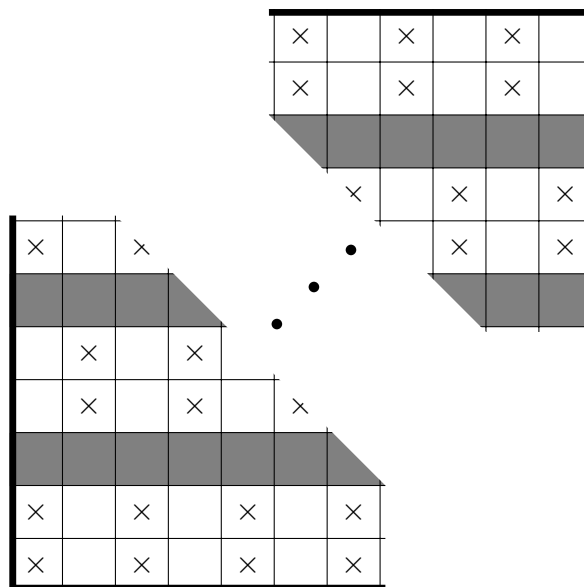
Lời giải.

Kết quả là $n = 3k + 1$, trong đó k là số nguyên dương.

Nếu $n = 3k$ hoặc $n = 3k + 2$, ta có thể đánh dấu các ô tương ứng như hình 18 hoặc hình 19, thế thì đường đi từ L có thể qua một trong số các ô mang dấu $\times$.

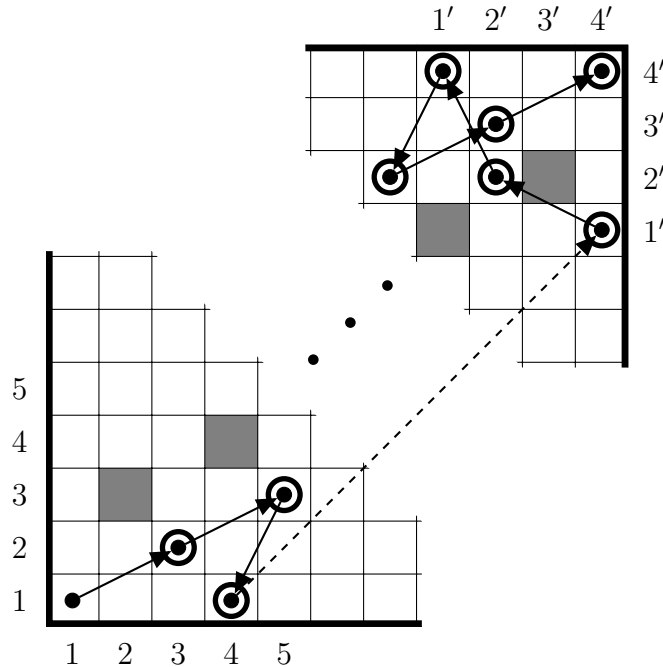


Hình 18.



Hình 19.

Nếu $n = 3k + 1$, theo giả thiết của k . Với các bước, như hình 20. Nếu một trong 2 ô $(4, 4)$ hoặc $(1', 1')$ không được đánh dấu, bài toán được giải quyết. Không mất tính tổng quát, $(3, 2)$ chưa được đánh dấu. Thế thì $(3', 2')$ được đánh dấu (nếu không bài toán được giải quyết), $(2', 3')$ không được đánh dấu và $(2, 3)$ được đánh dấu. Trong trường hợp này, ta có thể đánh dấu đường như trong hình 20.



Hình 20.

Bài toán được giải quyết. □

Bài 147. Giả sử n là số một số nguyên dương. Một ma trận cỡ $n \times n$ (một bảng hình chữ nhật của các số của n dòng và n cột) được gọi là bạch kim nếu thỏa mãn các điều kiện:

- (i) n^2 trong bảng là các số nguyên từ 1 đến n ;
- (ii) Mỗi dòng, mỗi cột và đường chéo chính (phải trên góc bên trái đến góc dưới bên phải) chứa các số nguyên từ 1 đến n đúng một lần.
- (iii) Tồn tại một tập hợp gồm n phần tử chứa các số nguyên từ 1 đến n sao cho không có hai phần tử nằm trên cùng một hàng hoặc cùng một cột hoặc nằm trên đường chéo chính của ma trận.

Tìm tất cả các giá trị của n sao cho ma trận $n \times n$ là bạch kim.

Lời giải.

Dễ thấy không có ma trận bạch kim với $n = 1$ và $n = 2$. Chúng ta sẽ chứng minh rằng tồn tại ma trận bạch kim với mọi $n \geq 3$.

Thật vậy, trước hết ta định nghĩa đường ngang như là một tập hợp gồm n phần tử của ma trận được lấy từ các dòng và các cột khác nhau và chứa các số nguyên từ 1 đến n .

Khi $n \geq 3$ và n là số lẻ, ta xây dựng ma trận bạch kim cỡ $n \times n$ theo cách:

Trước tiên, ta điền vào dòng thứ nhất của ma trận bởi các số $1, n, n - 1, \dots, 3, 2$ theo thứ tự từ trái qua phải.

Sau đó, với mỗi "đường chéo" (được xác định từ trên xuống dưới, từ trái qua phải và quay lại cột thứ 1 đến cột thứ n) bắt đầu từ phần tử trên dòng thứ 1 và tăng dần theo cấp số cộng với công sai

là 1 cho đến khi xuống hàng cuối cùng. Chú ý rằng các phần tử được viết dưới dạng $\text{mod } n$, nhưng trong trường hợp lớp thặng dư là 0 thì chúng ta viết là n .

Ví dụ với $n = 3$ ta có ma trận bạch kim sau đây:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & 3 & \\ & & 1 \\ 2 & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & 2 \\ 3 & & \\ & 1 & \end{pmatrix}$$

Từ cách xây dựng trên, chúng ta xác định được phần tử dòng i , cột j là $a_{ij} = 2i - j \pmod{n}$ ($1 \leq i, j \leq n$).

Cố định dòng thứ i , các phần tử tại các cột khác nhau j và j' là khác nhau.

Cố định cột thứ j , các phần tử tại các dòng khác nhau i và i' là khác nhau vì n là lẻ.

Đường chéo, bắt đầu từ phần tử dòng thứ nhất là 2, là một đường ngang. Hơn nữa, mỗi đường chéo là đường ngang. Vì thế, ma trận được xác định như trên là bạch kim.

Xét trường hợp $n \geq 8$ là chẵn, khi đó $n - 3 \geq 5$ là lẻ.

Xét ma trận bạch kim cỡ $(n - 3) \times (n - 3)$ được ký hiệu là C_{n-3} theo cách xác định như trên.

Ta bắt đầu xây dựng ma trận bạch kim cỡ $n \times n$ như sau:

$$\left(\begin{array}{c|c} C_{n-3} & \\ \hline & C_3 \end{array} \right), \quad \text{ở đó } C_3 = \begin{pmatrix} n-2 & n & n-1 \\ n & n-1 & n-2 \\ n-1 & n-2 & n \end{pmatrix}$$

Tiếp theo, ta cần xác định ma trận cỡ $3 \times (n - 3)$ và ma trận cỡ $(n - 3) \times 3$ kề với C_{n-3} .

Do $(n - 3) - 1 = n - 4 \geq 4$ các đường chéo của C_{n-3} khác với đường chéo chính, ta chọn 3 đường chéo khác nhau.

Ta đã chỉ ra mỗi đường chéo, ngoại trừ đường chéo chính của ma trận C_{n-3} là một đường ngang.

Chọn một đường ngang của C_{n-3} chiếu các phần tử của nó đến một dòng rỗng và một cột rỗng. Sau đó, thay thế tất cả các phần tử đã chọn của dòng ngang đó bởi $n - 2$.

Chúng ta tiếp tục như vậy với hai dòng ngang khác, rồi thay các phần tử của các dòng ngang đó lần lượt là $n - 1$ và n . Khi đó, ma trận tạo thành là một ma trận bạch kim.

Thật vậy, ta có $n - 4 \geq 4$ dòng ngang của ma trận bạch kim C_{n-3} . Do đó tồn tại ít nhất một dòng ngang chưa được sử dụng. Kết hợp dòng ngang đó với một dòng ngang của C_3 ta nhận được một dòng ngang của ma trận cỡ $n \times n$. Như vậy, ma trận được xác định như trên là bạch kim.

Ta có thể minh họa cách xây dựng ma trận bạch kim với $n = 8$. Ma trận cuối cùng là bạch kim với những phần tử trong ô vuông tạo thành một dòng ngang của ma trận.

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 5 & 4 & 3 & 2 & & & \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 & & & \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & & & \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 & & & \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 & & & \\ \hline & & & & & 6 & 8 & 7 \\ & & & & & 8 & 7 & 6 \\ & & & & & 7 & 6 & 8 \end{array} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \begin{array}{ccccc|ccc} 1 & \textcircled{6} & 4 & 3 & 2 & & & \\ 3 & 2 & \textcircled{6} & 5 & 4 & & & \\ 5 & 4 & 3 & \textcircled{6} & 1 & & & \\ 2 & 1 & 5 & 4 & \textcircled{6} & & & \\ \textcircled{6} & 3 & 2 & 1 & 5 & & & \\ \hline & & & & & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ & & & & & 6 & 8 & 7 \\ & & & & & 8 & 7 & 6 \\ & & & & & 7 & 6 & 8 \end{array} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 6 & \textcircled{7} & 3 & 2 & & & \\ 3 & 2 & 6 & \textcircled{7} & 4 & & & \\ 5 & 4 & 3 & 6 & \textcircled{7} & & & \\ \textcircled{7} & 1 & 5 & 4 & 6 & & & \\ 6 & \textcircled{7} & 2 & 1 & 5 & & & \\ \hline & & & & & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ & & & & & 6 & 8 & 7 \\ & & & & & 8 & 7 & 6 \\ & & & & & 7 & 6 & 8 \end{array} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 6 & 7 & \textcircled{8} & \boxed{2} & & & \\ \boxed{3} & 2 & 6 & 7 & \textcircled{8} & & & \\ \textcircled{8} & \boxed{4} & 3 & 6 & 7 & & & \\ 7 & \textcircled{8} & \boxed{5} & 4 & 6 & & & \\ 6 & 7 & \textcircled{8} & \boxed{1} & 5 & & & \\ \hline & & & & & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ & & & & & 6 & \boxed{8} & 7 \\ & & & & & 8 & 7 & \boxed{6} \\ & & & & & \boxed{7} & 6 & 8 \end{array} \end{pmatrix}$$

Cuối cùng ta xét các ma trận sau

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 6 & 3 & 5 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Suy ra ma trận bạch kim với $n = 4$ và $n = 6$. □

Bài 148. Trong một câu lạc bộ nọ, có một số cặp thành viên là bạn bè. Giả sử $k \geq 3$, ta nói rằng một câu lạc bộ là k -tốt nếu mỗi nhóm k thành viên có thể ngồi xung quanh một cái bàn tròn sao cho hai người ngồi kề nhau là bạn bè. Chứng minh rằng nếu một câu lạc bộ là 6-tốt thì nó là 7-tốt.

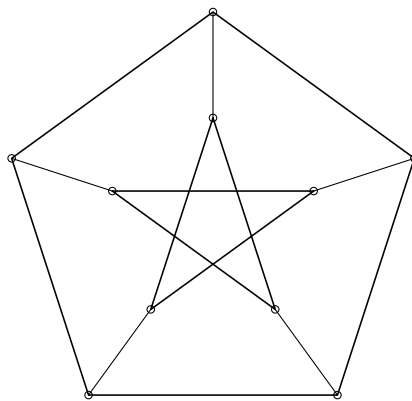
Lời giải.

Xét một câu lạc bộ 6-tốt và kí hiệu $A, \dots, G$ là 7 thành viên của nó. Để thỏa mãn yêu cầu ta cần chỉ ra rằng $A, \dots, G$ có thể ngồi xung quanh một cái bàn. Chỉ xét tình bạn trong số $A, \dots, G$.

Đầu tiên, ta thấy rằng mỗi thành viên có ít nhất 3 người bạn. Không mất tính tổng quát, xét thành viên G , từ giả thiết, $B, \dots, F$ có thể ngồi thỏa mãn yêu cầu. Do đó, G có ít nhất hai người bạn. Không mất tính tổng quát, F là một trong những người bạn của G . Từ giả thiết, $A, \dots, E, G$ (bỏ qua F) có thể ngồi xung quanh bàn tròn theo yêu cầu, vì thế G có ít nhất hai người bạn ngoài F trong tổng số ít nhất ba người bạn.

Từ đó mỗi thành viên có ít nhất 3 người bạn, ở đây tồn tại một thành viên có ít nhất 4 người bạn (nói cách khác số cặp bạn bạn thân bằng $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 3$, mà điều này rõ ràng là không thể). Không mất tính tổng quát, giả sử G có ít nhất 4 người bạn.

Từ giả thiết, $A, \dots, F$ có thể ngồi thỏa mãn yêu cầu. Trong số chỗ ngồi như vậy, một vài cặp bạn bè của hai trong số bốn người bạn của G ngồi cạnh nhau và chúng ta có thể để G ngồi giữa họ. Chú ý. Mệnh đề " Nếu một câu lạc bộ k -tốt khi nó là $(k+1)$ -tốt đúng khi $k \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 16\}$. Các phản ví dụ trên là đồ thị *hypo-Hamilton*. Với $k = 9$, một ví dụ như vậy là đồ thị *Petersen* (hình 1).



Hình 1

Bài 149. Có 300 người chơi tại một cuộc thi. Trong đó, 2 người chơi bất kỳ hoặc quen biết nhau hoặc không quen biết nhau; và trong 3 người bất kỳ thì có ít nhất 2 người không quen nhau. Xác định giá trị lớn nhất có thể của n mà thỏa mãn các điều kiện:

- ☑ Mỗi người chơi quen biết với tối đa n người chơi khác.

- ✓ Với mọi số nguyên dương m thỏa mãn $1 \leq m \leq n$, tồn tại ít nhất 1 người chơi quen biết với đúng m người chơi khác.

Lời giải.

Trước hết, ta chứng minh $n \leq 200$. Giả sử $n > 200$ thỏa mãn các điều kiện đề bài. Khi đó có người chơi X quen biết với 201 người chơi khác. Gọi S là tập hợp gồm 201 người chơi này. Luôn tồn tại 1 người biết đúng $1, 2, \dots, 200$ người chơi khác.

Ta nói người chơi có *bậc* m nếu người đó biết đúng m người chơi khác.

Ta có X quen biết với tất cả người chơi trong tập S . Mà trong 3 người bất kì, luôn tồn tại ít nhất 2 người không quen biết nhau nên 2 người chơi bất kỳ trong tập S đều không biết nhau. Do đó mỗi phần tử của S có bậc tối đa là $300 - 201 = 99$.

Người chơi X nhận 1 bậc. Những người chơi thuộc tập S nhận tối đa 99 bậc phân biệt (từ bậc 1 đến bậc 99). Do có 98 người khác X , không thuộc tập S nên 98 người này nhận tối đa 98 bậc phân biệt. Suy ra có tối đa $1 + 99 + 98 = 198 < 201$ bậc phân biệt. Do đó không thể có những người chơi biết đúng $1, 2, \dots, 201$ người chơi khác. Suy ra $n \leq 200$.

Bây giờ ta chứng minh $n = 200$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Kí hiệu 100 người chơi là $A_1, A_2, \dots, A_{100}$ và gọi họ là A -người chơi. Kí hiệu 200 người còn lại là $B_1, B_2, \dots, B_{200}$ và gọi họ là B -người chơi. Xét A -người chơi và B -người chơi thỏa mãn:

- ✓ Với mỗi $i \in \{1, 2, \dots, 100\}$, A_i quen biết B_j với mọi $j \geq i$. (1)

- ✓ 2 người chơi bất kỳ trong A -người chơi không quen nhau, 2 người chơi bất kỳ trong B -người chơi không quen nhau. (2)

Khi đó:

- ✓ Từ (2) ta có: Trong ba người chơi bất kỳ, có ít nhất 2 người không quen nhau. Mỗi người chơi quen biết tối đa 200 người chơi khác.

- ✓ Từ (1) ta có: Với mỗi $i \in \{1, 2, \dots, 100\}$, A_i quen biết đúng $201 - i$ người chơi khác là $B_i, B_{i+1}, \dots, B_{200}$. Do đó có những người chơi biết đúng $200, 199, \dots, 101$ người chơi khác.

Với mỗi $j \in \{1, 2, \dots, 100\}$, B_j quen biết đúng j người chơi khác là $A_1, \dots, A_{j-1}, A_j$. Do đó có những người chơi biết đúng $1, 2, \dots, 100$ người chơi khác.

Vậy $n = 200$ là giá trị lớn nhất thỏa mãn đề bài. □

Bài 150. Hai người chơi thay phiên viết mỗi lần một chữ số, từ trái sang phải. Một người được coi là thua nếu sau lượt của người đó, có một dãy các chữ số $a_1, a_2, \dots, a_n$ sao cho tồn tại một số nguyên k để $\overline{a_k a_{k+1} \dots a_n}$ là bội của 11. Hỏi người nào có thể thắng và cách chơi của anh ấy như thế nào?

Lời giải.

Ta sẽ chứng minh người chơi thứ hai có thể thắng bất kể người chơi thứ nhất viết như thế nào. Tất nhiên rằng không ai trong hai người chơi sẽ viết số 0 vào bất kì lượt nào.

Chú ý rằng $10^r \equiv (-1)^r \pmod{11}$, do đó

$$\overline{a_k a_{k+1} \dots a_n} \equiv a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \dots + (-1)^{k-1} a_k \pmod{11}$$

Gọi N_k là phần dư khi chia $\overline{a_k a_{k+1} \dots a_n}$ cho 11, với $k = 1, \dots, n$. Ta có sau n lượt, các số $N_1, \dots, N_n$ là các số phân biệt, và trong lượt tiếp theo ta có các số

$$a_{n+1} - N_1, \dots, a_{n+1} - N_n, a_{n+1} \pmod{11}$$

là những số phân biệt kể từ $a_{n+1} \neq 0$. Theo quy nạp, ta kết luận rằng sau mỗi lượt của trò chơi (với $n \leq 10$), các số $N_1, \dots, N_n$ là phân biệt. Bởi vì cách thức mà $N_1, \dots, N_n$ biến đổi mỗi lượt, ta

kết luận được có $n + 1$ chữ số, nếu người chơi viết chúng sẽ dẫn anh ấy đến việc thua cuộc. Giả sử trò chơi kết thúc sau 9 lượt chơi. Người chơi thứ hai thua cuộc nếu và chỉ nếu sau 9 lượt, bộ số $\{N_1, N_2, \dots, N_9\}$ là $\{1, 2, \dots, 9\}$. Người chơi thứ hai thắng nếu và chỉ nếu 10 là một trong các số $N_1, N_2, \dots, N_9$. Nếu sau 8 lượt chơi, $\{N_1, \dots, N_8\}$ thiếu hai số không liên tiếp nằm giữa 1 và 10, khi đó bất kể người chơi đầu tiên chọn trong lượt thứ 9, một trong các số $N_1, \dots, N_9$ phải là 10. Thật vậy, nếu người chơi thứ nhất chọn X , khi đó tồn tại k thỏa $N_k = X + 1$ (trong lượt thứ 9). Do đó, sau lượt thứ 9 ta có

$$N_k \equiv X - (X - 1) \equiv -1 \equiv 10 \pmod{11}.$$

Ta kết luận được người chơi thứ hai chắc chắn rằng sau 8 lượt chơi, giữa các số $N_1, \dots, N_8$ không có hai số liên tiếp. Và người chơi thứ hai có thể đảm bảo trò chơi kéo dài ít nhất 7 lượt chơi để

$$N_1, \dots, N_7 = 1, 2, \dots, 10 \setminus \{X, Y, Z\}.$$

Nếu giữa các số X, Y, Z không có hai số liên tiếp, thì người chơi thứ hai có thể chọn bất kì trong chúng.

Nếu $Y = X + 1$, thì người chơi thứ hai có thể viết một trong các số X hoặc $X + 1$.

Vì vậy, sau lượt thứ 8, có hai số liên tiếp còn thiếu từ $N_1, \dots, N_8$. Thật vậy, nếu $Z = X - 1$, người chơi thứ hai viết X , và nếu $Z \neq X - 1$, người chơi thứ hai viết $X + 1$. $\square$

Bài 151. Xét một n -giác đều cùng với tâm của nó. Hai người chơi trò chơi như sau: họ lần lượt chọn một đỉnh của đa giác rồi nối với một trong hai đỉnh kề hoặc nối với tâm của hình đa giác đó bởi một đoạn thẳng. Người thắng cuộc là người chơi mà sau lượt chơi của anh ta thì ở bất kỳ đỉnh nào của đa giác đều có thể di chuyển đến mọi đỉnh còn lại bằng các đoạn thẳng đã nối ở trên. Với mỗi $n \geq 3$, hãy xác định xem ai là người có chiến lược thắng cuộc.

Lời giải.

Đáp án: Với n lẻ thì người thứ nhất đi trước thắng, với n chẵn thì người thứ hai thắng.

✓ Với n chẵn, người thứ nhất đi trước

- Trường hợp 1: Người thứ nhất nối đỉnh với tâm. Người thứ hai nối tâm với đỉnh khác. Như vậy, sau khi người thứ hai thực hiện luôn có số lẻ đỉnh được kết nối. Do đó, người thứ nhất không thể nối hai điểm cuối cùng. Khi đó, người thứ hai chiến thắng.
- Trường hợp 2: Người thứ nhất nối hai đỉnh. Người thứ hai nối một đoạn thẳng đối xứng với đoạn thẳng người thứ nhất vẽ qua tâm. Sau mỗi bước như vậy có số điểm được nối lại là số lẻ. Người thứ hai tiếp tục thực hiện các bước như thế đến khi người thứ nhất không thể di chuyển được nữa. Giả sử có một lúc nào đó người thứ nhất có thể chiến thắng nếu người thứ hai đi trước. Gọi x là đoạn cuối cùng được nối bởi người thứ nhất ở bước thứ x và x^* là đoạn đối xứng với nó, z là đoạn mà người thứ nhất chiến thắng nếu người thứ hai vẽ x^* . Chú ý là nếu x là đoạn đi qua tâm, khi đó tương tự trường hợp 1. Xét những điểm còn lại trước khi thực hiện bước x . Đoạn x nối 2 điểm khác nhau A và B , đoạn x^* nối hai điểm đối xứng tương ứng khác là A^* và B^* . Xét O là tâm đường tròn. Giả sử O là một trong hai điểm A hoặc B , và nó cũng là A^* . Điều này có nghĩa là $A = A^*$ là đối xứng tâm và chứa tâm của đường tròn. Bởi vậy, sau khi thực hiện bước x^* số điểm là lẻ giống như bước x . Do đó, bước z có thể không chiến thắng. Giả sử O không thuộc A và B . Khi đó có ít nhất một điểm C , trong đó có tâm đường tròn. Để thực hiện bước z chiến thắng, phải nối C với một điểm đã có từ bước x và x^* . Sau khi thực hiện các bước x và x^* , các điểm nối lại không bao gồm tâm, $B = A^*$, $A = B^*$ và bước x^* không làm giảm số điểm. Vậy người thứ hai có thể chiến thắng bằng việc thực hiện bước z bao gồm x^* .

✓ Với n lẻ, ta chứng minh rằng người thứ nhất có thể chiến thắng nếu nối các đỉnh tùy ý với tâm đường tròn ở bước đầu tiên. Với $n = 3$ điều này hiển nhiên. Giả sử, với n từ 3 đến $2k - 1$ thì

điều trên đúng. Xét $n = 2k + 1$, đánh số các đỉnh của đa giác theo chiều kim đồng hồ: $A_0, A_1, \dots, A_{2k+1}$. Người thứ nhất nối A_0 với tâm O của đường tròn ở bước đầu tiên của mình. Xét người thứ hai đi đầu tiên:

- Nối 2 đỉnh khác A_0 . Giả sử rằng người thứ hai nối A_{i-1} với A_i khi $2 \leq i \leq k + 1$. Người thứ nhất nối A_i với A_{i+1} , khi đó trò chơi trở thành trường hợp $n = 2k - 1$. Nghĩa là, các đỉnh A_{i-1}, A_i, A_{i+1} , trong đó có một đỉnh được nối từ A_{i-2} qua A_{i-1} , từ A_{i+2} qua A_{i+1} , từ tâm qua A_i , ngoài ra có hai đường phụ nối từ tâm của đường tròn không đóng bất cứ vai trò nào. Người thứ nhất sẽ tạo ra hai đường đó nếu người thứ hai cũng làm vậy.
- Nối A_0 với đỉnh liền kề. Giả sử rằng người thứ hai nối A_1 với A_0 . Người thứ nhất nối A_0 với A_{2n+1} , trò chơi trở về trường hợp $n = 2k - 1$. Nghĩa là, các đỉnh A_{2k+1}, A_0, A_1 có một đỉnh (nối từ O ở bước thứ nhất của người thứ nhất) tương tự trường hợp trên.
- Nối O với đỉnh liền kề của A_0 . Giả sử người thứ hai nối A_1 với O . Người thứ nhất nối A_{2k+1} với O , trò chơi trở về trường hợp $n = 2k - 1$. Nghĩa là, các đỉnh A_{2k+1}, A_0, A_1 , một trong các đỉnh đó tương tự trường hợp trước. Điều khác biệt duy nhất ở đây bao gồm hai điểm phụ nối tới O , điểm A_1 và A_{2k+1} có hai đường phụ nối tới A_0 .
- Nối O với các đỉnh không liền kề với A_0 . Không mất tính tổng quát, giả sử người thứ hai nối A_{2i} với O . Người thứ nhất nối A_i với O , sau đó trò chơi trở về trường hợp $n = 2k - 2i + 1$. Nghĩa là, xét các đỉnh ở giữa A_0 và A_2 , có một đỉnh nối với O ở lần di chuyển đầu tiên của người chơi đầu tiên. Nếu người chơi thứ hai vẽ một đoạn thẳng nằm trong một trong các miền sau OA_0A_i và OA_iA_{2i} , người chơi thứ nhất sẽ vẽ một đoạn thẳng đối xứng với OA_i . Có một số chặn bước phụ không đóng bất cứ vai trò gì, do đó trò chơi giảm tính chính xác với số lượng ít hơn.

Trong mỗi trường hợp, trò chơi được giảm xuống tương đương với số ít và số lẻ đỉnh. Vậy người thứ nhất có chiến lược chiến thắng với mọi số lẻ $n \geq 3$. $\square$

Bài 152. Một đa giác ô li A được vẽ trên mặt phẳng lưới ô li. Ta gọi một ô (đơn vị) là điểm trong A nếu 8 ô liền kề với nó cũng thuộc A , những ô còn lại của A mà không phải là điểm trong của A được gọi là điểm biên của A . Biết rằng tập tất cả các điểm biên của A thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau

- ① mỗi điểm biên có đúng hai cạnh kề với hai điểm biên khác;
- ② tập tất cả các điểm biên có thể phân chia thành các hình thang cân có diện tích bằng 2 với các đỉnh nằm ở nút của lưới (và góc ở đáy của hình thang cân bằng 45°).

Chứng minh rằng diện tích của đa thức ô li A là đồng dư 1 với modulo 4.

Lời giải.

Rõ ràng tập các điểm biên của đa thức A có thể được chia thành các hình thang, do đó ta có thể đi từ một điểm bất kỳ đến các điểm khác thông qua các cạnh của các hình thang. Ta gọi một đa thức thỏa mãn điều kiện này là *đa thức tốt*. Ta sẽ đi chứng minh bằng quy nạp bài toán “nếu diện tích của một đa thức tốt là S thỏa mãn $S \leq 4k + 1$ (với $k \geq 2$) thì $S \equiv 1 \pmod{4}$ ”.

- ✓ Với $k = 2$: dễ thấy rằng đa thức ô li A có ít nhất 4 hình thang, và nếu có đúng 4 hình thang thì đa thức ô li A là một hình vuông 3×3 . Nếu có ít nhất 5 hình thang thì diện tích $S \geq 2 \cdot 5 > 2 \cdot 4 + 1$.
- ✓ Ta giả sử bài toán đúng với $k = n - 1 \geq 2$. Ta phải chứng minh bài toán đúng với $k = n$, tức là mọi đa thức tốt có diện tích $S \in [4(n - 1) + 2, 4n + 1]$. Xét một cạnh AB của một đa thức tốt mà hai cạnh kề của nó đều vuông góc với AB , cạnh AB thỏa mãn điều này luôn tồn tại (giả sử là cạnh dưới cùng của đa thức).

- Giả sử $AB = 3$ và đa thức ô li A không phải là hình vuông 3×3 .

Khi đó hai hình thang cân được sắp xếp lại một cách duy nhất và có thể tạo ra được hình chữ nhật 3×4 từ đa thức ô li và ta nhận được một đa thức tốt. Rõ ràng với một nhất cắt, phần dư trong phép chia của S cho 4 sẽ không đổi.

- Giả sử đa thức tốt không có cạnh bằng 3 (nếu đa thức tốt có cạnh bằng 3 thì các cạnh của nó sẽ vuông góc với nhau), khi đó mỗi cạnh bên sẽ có ít nhất hai hình thang cân (nói cách khác cạnh của hình thang là 3).

Giả sử $AB = \ell$. Nếu hình chữ nhật $CABD$ (như hình vẽ bên) có kích cỡ $\ell \times 4$ không có điểm biên chấp nhận được, khi đó ta có các điểm chung với đa thức đường $CABD$. Khi cắt bỏ đa thức này ta sẽ nhận được đa thức tốt bằng cách di chuyển các hình thang cân tới cạnh AB bởi 4 ô (giống như trường hợp $AB = 3$).

Giả sử hình chữ nhật $CABD$ chứa các điểm biên khác. Tô màu các điểm của mặt phẳng bằng hai màu khác nhau (như hình vẽ bên). Khi đó các điểm biên có dạng 1 sẽ được tô màu 1 và các ô có dạng 2 sẽ có màu 2 (vì từ mỗi ô của dạng 1 ta luôn xác định được ô thuộc dạng 2).

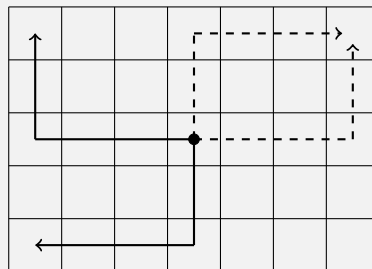
Xét tất cả các điểm trong hình chữ nhật $CABD$ và chọn một điểm bên dưới không có điểm chung với đa thức đường. Khi đó một vài điểm kề nhau bên trái hoặc bên phải sẽ là điểm biên vì ngược lại đường biên sẽ không phân chia thành các hình thang được (nếu điểm này được tô màu thì nó sẽ là một phần của hình thang theo chiều ngang, ngược lại điểm này sẽ không nằm thấp hơn và nếu không hình thang chứa điểm này có thể không có chiều dọc với lý do tương tự).

Có ít nhất một trong hai điểm biên kề nhau bị phân chia bởi đường chéo của hình thang. Không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng điểm đó có dạng 1 (được đánh dấu bằng gạch chéo trên hình vẽ). Khi đó, điểm đó có màu 1 và được xác định bởi hai điểm nằm bên trên có màu 2 kề với AB , nói cách khác nó không thể xác định bên trong $CABD$ vì mọi điểm trong $CABD$ đều có màu 1. Rõ ràng khi đó điểm này nằm bên trong hình thang, được xác định bên phải của nó.

Bây giờ ta sẽ tạo các nhất cắt (như hình vẽ), bởi vậy sẽ cắt đa thức ra làm 2

Bài toán được giải quyết. □

Bài 153. Giả sử có một bàn cờ vua với số lượng ô vuông con đủ lớn, một quân mã dịch chuyển trên bàn cờ theo quy tắc: ở mỗi nước đi, nó dịch chuyển qua p ô liên tiếp theo hàng ngang rồi qua tiếp q ô liên tiếp theo hàng dọc; hoặc là dịch chuyển qua q ô liên tiếp theo hàng dọc rồi qua p ô liên tiếp theo hàng ngang. Biết rằng sau đúng n nước đi thì quân mã quay về ô vuông ban đầu, chứng minh rằng n là số chẵn. Hình vẽ dưới đây mô tả một số cách đi cho trường hợp $p = 3, q = 2$:



Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ để tâm của mỗi ô vuông con là điểm $(x; y)$ với $x, y \in \mathbb{Z}$ và ban đầu quân mã đứng tại điểm $(0; 0)$. Ta kí hiệu $d = (p, q)$. Vì $1 = \left(\frac{p}{d}, \frac{q}{d}\right)$ nên có ít nhất một trong hai số $\frac{p}{d}, \frac{q}{d}$ là số

lẻ. Bây giờ ta đi xây dựng một hàm f xác định trên tập điểm nguyên gắn với mỗi nước đi của quân mã cho ta sự biến động giá trị của f là một số lẻ để suy luận được số nước đi là số chẵn.

☑ Nếu $\frac{p}{d}, \frac{q}{d}$ là các số lẻ thì ta đặt $f(x, y) = \frac{x}{d}$. Rõ ràng ở một nước đi, khi quân mã di chuyển từ ô (x, y) sang ô (x', y') thì hàm f thay đổi một lượng là $f(x', y') - f(x, y) = \frac{x' - x}{d}$, đây là một số lẻ vì nó chỉ nhận giá trị là một trong bốn số $\pm \frac{p}{d}, \pm \frac{q}{d}$.

☑ Nếu trong hai số $\frac{p}{d}, \frac{q}{d}$ có một số lẻ và một số chẵn thì ta đặt $f(x, y) = \frac{x + y}{d}$. Ở một nước đi, khi quân mã di chuyển từ ô (x, y) sang ô (x', y') thì hàm f thay đổi một lượng là

$$f(x', y') - f(x, y) = \frac{x' + y' - x - y}{d}$$

Do $x' = x \pm p$ và $y' = y \pm q$ nên giá trị của hiệu trên chỉ có thể là một trong các số $\pm \frac{p + q}{d}, \pm \frac{p - q}{d}$, suy ra $f(x', y') - f(x, y)$ là số lẻ.

Trở lại bài toán. Ban đầu quân mã ở ô $(0; 0)$, sau nước đi thứ nhất nó đến ô $(x_1; y_1)$, sau nước đi thứ hai nó đến ô $(x_2; y_2), \dots$ sau nước đi thứ n nó đến ô $(x_n; y_n) \equiv (0; 0)$, thế thì tổng các độ thay đổi của hàm f là

$$0 = f(0; 0) - f(x_n; y_n) = (f(0; 0) - f(x_1; y_1)) + (f(x_1; y_1) - f(x_2; y_2)) + \dots + (f(x_{n-1}; y_{n-1}) - f(x_n; y_n))$$

Như vậy số 0 được phân tích thành tổng của n số lẻ, do đó có n là số chẵn. □

Bài 154. Trong dịp hè 2018, Viện nghiên cứu cao cấp về Toán (VIASM) đã tổ chức 6 bài giảng dành cho sinh viên. Biết rằng mỗi bài giảng có đúng 100 sinh viên tham dự nhưng không có hai sinh viên nào mà hợp lại tham dự đủ cả 6 bài giảng. Hỏi có ít nhất bao nhiêu sinh viên đã tham dự các bài giảng ở VIASM trong mùa hè 2018.

Lời giải.

Ta thấy không thể có một sinh viên tham dự 5 bài giảng, vì nếu ngược lại, ta chỉ cần lấy 1 sinh viên tham dự bài giảng số 6 là được 2 sinh viên mà hợp lại dự đủ cả 6 bài giảng. Nếu có 1 sinh viên tham dự 4 bài giảng, giả sử là 1, 2, 3, 4 thì sẽ không có sinh viên nào tham dự cả hai bài giảng 5, 6. Suy ra 100 sinh viên tham gia bài giảng 5 và 100 sinh viên tham dự bài giảng 6 là khác nhau. Như vậy trong trường hợp này ta có ít nhất là 201 sinh viên. Nếu mỗi sinh viên tham dự không quá 3 bài giảng thì do tổng số lượt tham dự là 600 nên số sinh viên tham dự không nhỏ hơn $600 : 3 = 200$. Ta chỉ ra trường hợp có đúng 200 sinh viên tham dự các bài giảng thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta chia 200 sinh viên thành 4 nhóm, mỗi nhóm 50 sinh viên, và các nhóm tham dự các bài giảng theo bảng sau

	I	II	III	IV
1	×	×		
2	×		×	
3	×			×
4		×	×	
5		×		×
6			×	×

Ta thấy hai sinh viên bất kỳ hợp lại chỉ tham dự tối đa 5 bài giảng (nếu khác nhóm thì là đúng 5, nếu cùng nhóm thì là 3). Vậy có ít nhất 200 sinh viên đã tham dự các bài giảng tại VIASM. □

Bài 155. Bạn Thanh viết lên bảng các số $1, 2, 3, \dots, 2019$. Mỗi một bước Thanh xóa hai số a và b bất kỳ trên bảng và viết thêm số $\frac{ab}{a+b+1}$. Chứng minh rằng dù xóa như thế nào thì sau khi thực hiện 2018 bước trên bảng luôn còn lại số $\frac{1}{2019}$.

Lời giải.

Với mỗi tập $T = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ các số viết trên bảng thì đặt

$$A(T) = \left(\frac{1}{a_1} + 1\right) \left(\frac{1}{a_2} + 1\right) \cdots \left(\frac{1}{a_n} + 1\right) \Rightarrow A(\{1; 2; \dots; 2019\}) = 2020.$$

Ta thấy: $\left(\frac{1}{a} + 1\right) \left(\frac{1}{b} + 1\right) = \frac{(a+1)(b+1)}{ab} = \frac{1}{\left(\frac{ab}{a+b+1}\right)} + 1.$

Suy ra nếu xóa hai số a và b và thay bởi $\frac{ab}{a+b+1}$, tập T biến thành tập T' thì $A(T) = A(T')$.

Sau khi thực hiện 2018 bước ta chỉ còn lại một số trên bảng ta gọi số thực đó là x , ta có

$$A(\{x\}) = \frac{1}{x} + 1 = 2020 \Rightarrow x = \frac{1}{2019}.$$

Vậy trên bảng luôn còn lại số $\frac{1}{2019}$. □

Bài 156. Cho n nguyên dương, gọi S là tập gồm $2^n + 1$ phần tử, X là tập tất cả các tập con của S , $Y = \{0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1\}$. Xét ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ thỏa mãn: Với mọi $x, y, z \in S$, trong 3 số $f(\{x, y\}), f(\{y, z\}), f(\{z, x\})$, có một số bằng tổng hai số còn lại. Chứng minh rằng tồn tại $a, b, c \in S$ sao cho $f(\{a, b\}) = f(\{b, c\}) = f(\{c, a\}) = 0$.

Lời giải.

Với $n = 1$, S có 3 phần tử $S = \{a, b, c\}$ và $Y = \{0\}$ nên đương nhiên

$$f(\{a, b\}) = f(\{b, c\}) = f(\{c, a\}) = 0.$$

Với $n = 2$, $S = \{a, b, c, d, e\}$ và $Y = \{0, 1\}$, tập X có 10 phần tử, cố định $a \in S$, quy ước $f(\{a, a\}) = 0$, xét 2 tập $U = \{x \in S, f(\{x, a\}) = 0\}$; $V = \{y \in S, f(\{y, a\}) = 1\}$. Khi đó tồn tại ít nhất 1 trong 2 tập U hoặc V , có số phần tử lớn hơn hoặc bằng 3.

☑ Nếu tập đó là U thì tồn tại 3 phần tử a, x, y thuộc U , rõ ràng

$$f(\{x, a\}) = f(\{y, a\}) = f(\{x, y\}) = 0.$$

☑ Nếu tập đó là V thì tồn tại $x, y, z \in V$, khi đó

$$f(\{x, y\}) = f(\{y, z\}) = f(\{z, x\}) = 0.$$

Với $n = 3$, ta có S gồm 9 phần tử, $Y = \{0, 1, 2, 3\}$. Cố định $a \in S$. Chia tập S thành 2 tập $U = \{x \in S, f(\{x, a\}) \text{ chẵn}\}$ và $V = \{y \in S, f(\{y, a\}) \text{ lẻ}\}$. Khi đó tồn tại một tập có 5 phần tử.

☑ Nếu tập đó là U thì U đóng vai trò như S trong trường hợp trên, $f(\{x, y\})$ chẵn nếu $x, y \in U$, bài toán được giải quyết với $Y' = \{0, 2\}$ đóng vai trò của Y .

☑ Nếu tập đó là V thì đóng vai trò như S trong trường hợp trên, $f(\{x, y\})$ chẵn nếu $x, y \in U$, bài toán được giải quyết với $Y' = \{0, 2\}$ đóng vai trò của Y .

Từ các trường hợp trên, ta có các ý tưởng quy nạp sau. Giả sử bài toán đúng cho trường hợp $n = k$, xét tập S gồm 2^{k+1} phần tử, cố định $a \in S$. Chia S thành 2 tập $U = \{x \in S, f(\{x, a\}) \text{ chẵn}\}$ và $V = \{y \in S, f(\{y, a\}) \text{ lẻ}\}$. Khi đó tồn tại một tập có $\left\lfloor \frac{2^{k+1} + 1}{2} \right\rfloor = 2^k + 1$ phần tử, giả sử đó là U . Khi đó với mọi $x, y \in U$ thì $f(\{x, y\})$ chẵn vì $f(\{x, y\}) + f(\{x, a\}) + f(\{y, a\})$ chẵn và $f(\{x, a\}) + f(\{y, a\})$ chẵn, từ đó $f(\{x, y\}) \in \{0, 2, \dots, 2^k - 2\}$. Xét $g(\{x, y\}) = \frac{1}{2}f(\{x, y\})$, ta chuyển bài toán về trường hợp trước. Từ đó có điều phải chứng minh. $\square$

Bài 157 (IMO Shortlisted 1987, problem 18). Với mọi số nguyên $r \geq 1$, gọi $h(r)$ là số nguyên nhỏ nhất thỏa mãn $h(r) \geq 1$ và mọi phân hoạch của tập $\{1, 2, \dots, h(r)\}$ thành r lớp, đều tồn tại số nguyên $a \geq 0$ và các số nguyên $x, y : 1 \leq x \leq y$ sao cho $a + x, a + y, a + x + y$ thuộc cùng một lớp. Chứng minh $h(r) = 2r$.

Lời giải.

Xét trường hợp đặc biệt nhất, khi $h(r) = 2r$, phân tập $\{1, 2, \dots, 2r\}$ thành r lớp, mỗi lớp có 2 phần tử thì làm sao có chuyện $a + x, a + y, a + x + y$ (3 phần tử) cùng thuộc 1 lớp được. Phải chăng đề sai? Không! Vấn đề là x và y có thể bằng nhau, khi đó $a + x, a + y, a + x + y$ chỉ nhận 2 giá trị nên không có gì vô lý. Tuy nhiên, điều hay là câu hỏi đó lại là cơ sở giúp ta giải quyết bài toán nhờ phát hiện bản chất của nó. Trước hết, ta chứng minh khi $h(r) = 2r$ thì mọi phân hoạch tập $\{1, 2, \dots, 2r\}$ thành r lớp đều có một lớp chứa các số $a + x, a + y, a + x + y$ nào đó. Thật vậy, xét $r + 1$ số $r, r + 1, r + 2, \dots, 2r$. Vì có r lớp nên tồn tại ít nhất một lớp chứa 2 phần tử. Giả sử $r + i, r + j$ thuộc cùng một lớp với $i < j$. Khi đó, chọn $x = y = j - i, a = r + 2i - j$ thì $a + x = r + i, a + y = r + i, a + x + y = r + j$ thuộc cùng một lớp. Rõ ràng $1 \leq x \leq y$ và $a \geq 0$. Vậy $h(r) = 2r$ thỏa mãn. Nếu $h(r) < 2r$ thì xét tập $\{1, 2, \dots, 2r - t\}$. Phân hoạch tập này thành r tập

$$\{1, r + 1\}; \{2, r + 2\}; \dots; \{r - t, 2r - t\}; \{r - t + 1\}; \{r - t + 2\}, \dots, \{r\}$$

Khi đó, giả sử $a + x, a + y, a + x + y$ thuộc cùng một tập. Do $a + x, a + y, a + x + y$ không cùng bằng nhau nên chúng phải thuộc một trong $r - t$ tập đầu tiên. Như vậy $x = y$ và $a + x, a + 2x$ thuộc cùng một tập, giả sử $a + x = k, a + 2x = r + k$ ($k \leq r - t$) thì $a = r, a = k - r < 0$. Mâu thuẫn. Vậy $h(r) \geq 2r$ nên min $h(r) = 2r$. $\square$

Nhận xét. Điểm mấu chốt của bài toán nảy sinh từ việc: khi $a = y, a + x, a + x + y = a + 2x$ thuộc cùng một lớp. Mà $a + x < a + 2x < 2a + 2x$ nên có những cách phân hoạch như trong lời giải trên.

Bài 158. Cho các số nguyên dương $n_1, n_2, \dots, n_6$ và $n(f) = n_1 n_{f(1)} + n_2 n_{f(2)} + \dots + n_6 n_{f(6)}$, trong đó f là hoán vị của $\{1, 2, \dots, 6\}$. Đặt $\Omega = \{n(f) : f \text{ là hoán của } \{1, 2, \dots, 6\}\}$. Tìm giá trị lớn nhất số phần tử của Ω .

Lời giải.

Bổ đề. Nếu $2^{x_1} + 2^{x_2} + \dots + 2^{x_n} = 2^{y_1} + 2^{y_2} + \dots + 2^{y_n}$ với $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số nguyên dương phân biệt và $y_1, y_2, \dots, y_n$ là các số nguyên dương phân biệt thì $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$.

(Một số nguyên dương có biểu diễn duy nhất trong hệ cơ số 2)

Ta xét $n_i = 2^{2^i}$. Khi đó

$$\begin{aligned} n(f) = n(g) &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^6 n_i n_{f(i)} = \sum_{i=1}^6 n_i n_{g(i)} \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^6 2^{2^i + 2^{f(i)}} = \sum_{i=1}^6 2^{2^i + 2^{g(i)}} \\ &\Leftrightarrow \{2^i + 2^{f(i)}, i = 1, 2, \dots, 6\} = \{2^i + 2^{g(i)}, i = 1, 2, \dots, 6\} \end{aligned}$$

Khi đó $2^i + 2^{f(i)} = 2^i + 2^{g(i)}$ với i nào đó trong $\{1, 2, \dots, 6\}$. Tức là $\{1, f(1)\} = \{i, g(i)\}$. Có 2 trường hợp

i) $g(i) = 1, f(1) = i$ suy ra $f(1) = g^{-1}(1)$.

ii) $g(i) = f(1), i = 1$ suy ra $f(1) = g(1)$.

Vậy $\{f(1), f^{-1}(1)\} = \{g(1), g^{-1}(1)\}$. Tương tự $\{f(i), f^{-1}(i)\} = \{g(i), g^{-1}(i)\}$ với $i = 1, 2, \dots, 6$. Bây giờ, xét 1 hoán vị f bất kỳ, ta sẽ xem xét số các hoán vị g sao cho $n(f) = n(g)$, từ đó đếm số giá trị mà $n(f)$ có thể nhận được.

Ví dụ. $f = (3, 4, 1, 6, 5, 2)$ thì $f(1) = 3, f(3) = 1$ nên nếu $n(f) = n(g)$ thì $g(1) \in \{f(1), f^{-1}(1)\} = \{3\}$ nên $g(1) = 3$, tương tự $g^{-1}(1) = 3$ nên $g(3) = 1, g(5) = 5$.

Còn lại $g^{-1}(2), g(2) \in \{f(2) = 4, f^{-1}(2) = 6\}$, tức là $g(2) \neq 2$ và $g^{-1}(2) \neq 2$, nên

$$\{g(2), g(4), g(6)\} = \{2, 4, 6\}$$

Từ đó $g(2) = 4, g(4) = 2, g(6) = 6$ hoặc $g(2) = 4, g(6) = 2, g(4) = 6$ hoặc $g(2) = 6, g(4) = 2, g(6) = 4$ hoặc $g(2) = 6, g(6) = 2, g(4) = 4$. Nhưng nếu $g(6) = 6$ thì $f(6) = 6$ (mâu thuẫn) hoặc $g(4) = 4$ thì $f(4) = 4$ (mâu thuẫn). Vậy $g(2) = 4, g(4) = 6, g(6) = 4$ (g trùng f) hoặc $g(2) = 6, g(6) = 4, g(4) = 2$. Như vậy, có thêm một hoán vị g mà $n(g) = n(f)$ nên 2 hoán vị này, kể cả f chỉ cho một giá trị $n(f)$.

Ta sẽ tổng quát hóa bài toán từ ví dụ trên. Ta gọi C là một vòng xích của f có độ dài k nếu tồn tại $a \in \{1, 2, \dots, 6\}$ sao cho

$$C = \{f(a), f_2(a), f_3(a), \dots, f_k(a) = a\}$$

và $f_i(a) \neq f_j(a), \forall i \neq j, 1 \leq i, j \leq k$. Khi đó, một hoán vị f bất kỳ luôn phân tích được thành các vòng xích. Khi f có các vòng xích độ dài $x_1, x_2, \dots, x_m$, ta nói f là hoán vị loại $x_1 + x_2 + \dots + x_m$. Chẳng hạn, $f = (3, 4, 1, 6, 5, 2)$ thì f có các vòng xích là $\{f(1) = 3, f(3) = f_2(1) = 1\}$ có độ dài 2 và

$$\{f(2) = 4, f_2(2) = f(4) = 6, f_3(2) = f(6) = 2\}$$

có độ dài 3, $\{f(5) = 5\}$ có độ dài 1. Khi đó, ta viết $f = (2, 4, 6)(1, 3)(5)$, rõ ràng cách viết này hoàn toàn xác định hoán vị f như trên. Ví dụ $f = (3, 4, 1, 6, 5, 2)$ là hoán vị loại $3 + 2 + 1$. Bằng cách tưởng minh như trong ví dụ về hoán vị loại $3 + 2 + 1$ ở trên với các loại hoán vị khác, ta có kết quả được thể hiện trên bảng sau. (chú ý rằng 1 hoán vị của tập $\{1, 2, \dots, 6\}$ chỉ có thể thuộc một trong các loại sau: $3 + 1 + 1 + 1; 3 + 2 + 1, 3 + 3; 4 + 1 + 1; 4 + 2; 5 + 1; 6$ các hoán vị không có vòng xích nào có độ dài lớn hơn 2)

Loại hoán vị	Số hoán vị f	Số lần lặp giá trị $n(f)$	Số giá trị $n(f)$
$3 + 1 + 1 + 1$	$\binom{6}{3}.2! = 40$	2	20
$3 + 2 + 1$	$\binom{6}{3}.2!. \binom{3}{2} = 120$	2	60
$3 + 3$	$\binom{6}{3}.2! = 40$	4	10
$4 + 1 + 1$	$\binom{6}{4}.3! = 90$	2	45
$4 + 2$	$\binom{6}{4}.3! = 90$	2	45
$5 + 1$	$\binom{6}{5}.4! = 144$	2	72
6	$5! = 120$	2	60
Còn lại	76	76	76

Vậy nhiều nhất có 388 giá trị có thể có của tập Ω khi $n = 2^{2^i}$. Còn lại là chỉ ra khi $n = 2^{2^i}$ thì số lần lặp là ít nhất. Điều này dễ dàng vì với các giá trị n_i khác, ngoài việc lặp như trên, còn có thêm khả năng bị lặp do các yếu tố khác nữa. Vậy $\max |\Omega| = 388$. $\square$

Bài 159. Với n là số nguyên dương tùy ý, $n > 3$, xét $k = \left\lceil \frac{1}{6}n(n+1) \right\rceil$ và tập X_n gồm $\frac{n(n+1)}{2}$ phần tử, trong đó k phần tử màu đỏ, k phần tử màu xanh, còn lại màu trắng. Chứng minh rằng có thể chia tập X_n thành n tập con rời nhau $A_1, A_2, \dots, A_n$ sao cho với số m tùy ý, $1 \leq m \leq n$ thì tập A_m chứa đúng m phần tử và các phần tử đó cùng màu.

Lời giải.

Kiểm tra với $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ ta có bảng sau

n	$\frac{n(n+1)}{2}$	k	Các phần tử màu xanh	Các phần tử màu đỏ	Các phần tử màu trắng	Phân bố màu (X-Đ-T)
4	10	3	$ A_1 = 1, A_2 = 2$	$ A_3 = 3$	$ A_4 = 4$	3 - 3 - 4
5	15	5	$ A_1 = 1, A_4 = 4$	$ A_2 = 2, A_3 = 3$	$ A_5 = 5$	5 - 5 - 5
6	21	7	$ A_1 = 1, A_6 = 6$	$ A_3 = 3, A_4 = 4$	$ A_2 = 2, A_5 = 5$	7 - 7 - 7
7	28	9	$ A_4 = 4, A_5 = 5$	$ A_3 = 3, A_6 = 6$	$ A_1 = 1, A_2 = 2$ $ A_7 = 7$	9 - 9 - 10
8	36	12	$ A_5 = 5, A_7 = 7$	$ A_4 = 4, A_8 = 8$	$ A_1 = 1, A_2 = 2$ $ A_3 = 3, A_6 = 6$	12 - 12 - 12
9	45	15	$ A_6 = 6, A_9 = 9$	$ A_7 = 7, A_8 = 8$	$ A_1 = 1, A_2 = 2$ $ A_3 = 3, A_4 = 4$ $ A_5 = 5$	15 - 15 - 15
10	55	18	$ A_1 = 1, A_2 = 2$ $ A_5 = 5, A_{10} = 10$	$ A_3 = 3, A_6 = 6$ $ A_9 = 9$	$ A_4 = 4, A_7 = 7$ $ A_8 = 8$	18 - 18 - 19
11	66	22	$ A_1 = 1, A_4 = 4$ $ A_6 = 6, A_{11} = 11$	$ A_2 = 2, A_3 = 3$ $ A_7 = 7, A_{10} = 10$	$ A_5 = 5, A_8 = 8$ $ A_9 = 9$	22 - 22 - 22

Để giải bài toán trong trường hợp tổng quát ta cần chỉ ra một cách chia tổng quát hoặc quy được trường hợp n lớn về các trường hợp n nhỏ hơn. Qua việc nghiên cứu các trường hợp nhỏ lẻ, thấy khá khó có thể tìm được quy luật tổng quát cho việc phân chia. Bởi vậy, ta thử tìm cách đưa các trường hợp sau về những trường hợp trước đó. Các trường hợp $n = 5, 6, 7, 8, 9$ cũng gần như rất khó được đưa về trường hợp trước. Nhưng với $n = 10$ ta có thể đưa về $n = 4$, vì số lượng chênh mỗi màu là như nhau, từ $3 - 3 - 4$ lên $18 - 18 - 19$, tức là chênh đều lên 15 và ta cần có 3 phần, mỗi phần 15 phần tử cùng màu, được chia thành các tập có nhiều hơn hoặc bằng 5 phần tử. ($3 - 3 - 4$ lên $9 - 9 - 10$ chênh mỗi tập lên 6 phần tử, nhưng mỗi tập đều nhiều hơn 5 phần tử thì không thể làm vậy). Vậy nguyên nhân có thể đưa được từ trường hợp $n = 10$ về trường hợp $n = 4$ là vì: Mỗi tập chênh 15 phần tử, mỗi tập mới có số phần tử $5 \leq x \leq 10$ nên có thể chia $15 = 5 + 10 = 6 + 9 = 7 + 8$. Trường hợp $n = 5$ ($5 - 5 - 5$) sang trường hợp ($22 - 22 - 22$) chênh lên 17 phần tử mỗi tập, số phần tử mỗi tập thuộc $\{6; 7; 8; 9; 10; 11\}$ mà $17 = 6 + 11 = 7 + 10 = 8 + 9$. Từ đây, ta có lời giải tổng quát bằng quy nạp với việc xây dựng cách chia tập X_n dựa vào cách chia tập X_{n-6} như sau: Xét tập X_n gồm $\frac{n(n+1)}{2}$ phần tử. Ta xét tập X_{n-6} gồm $\frac{(n-6)(n-5)}{2}$ phần tử gồm

$$k_1 = \left\lceil \frac{1}{6}(n-6)(n-5) \right\rceil$$

phần tử màu xanh, k_1 phần tử màu đỏ và còn lại là màu trắng. Theo giả thiết quy nạp, tập X_{n-6} luôn có thể chia thành $n-6$ tập rời nhau $A_1, A_2, \dots, A_{n-6}$ thỏa mãn bài toán. Ta có

$$k - k_1 = \left\lceil \frac{n(n+1)}{6} \right\rceil - \left\lceil \frac{(n-6)(n-5)}{6} \right\rceil$$

Mặt khác $[a] - [b] > a - 1 - [b] \geq a - 1 - b$ và $[a] - [b] \leq a - [b] < a - (b - 1) = a - b + 1$. Nếu $a - b$ là số nguyên thì $[a] - [b] = a - b$. Mà

$$\frac{n(n+1)}{6} - \frac{(n-6)(n-5)}{6} = 2n - 5$$

là số nguyên nên $k - k_1 = 2n - 5$. Vậy số phần tử màu xanh (đỏ) ngoài X_{n-6} đều bằng $2n - 5$. Có $|X_n| - |X_{n-6}| = 6n - 15$ nên số phần tử màu trắng ngoài X_{n-6} là $6n - 15 - 2(2n - 5) = 2n - 5$. Khi đó ta xây dựng các tập $A_{n-5}, A_{n-4}, A_{n-3}, A_{n-2}, A_{n-1}, A_n$ như sau

- ☑ Tập A_{n-5}, A_n chứa toàn phần tử màu xanh.
- ☑ Tập A_{n-4}, A_n chứa toàn phần tử màu đỏ.
- ☑ Tập A_{n-2}, A_{n-3} chứa toàn phần tử màu trắng.

Bài toán được giải quyết. □

Bài 160 (IMO Shortlisted 2012). Cho $n \geq 1$ là số nguyên, tìm số lớn nhất các tập con rời nhau có hai phần tử của tập $\{1; 2; 3; \dots; n\}$ sao cho

- i) Tổng các phần tử của một tập không vượt quá n .
- ii) Tổng các phần tử của các tập khác nhau là số nguyên dương khác nhau.

Lời giải.

Giả sử k là số lớn nhất các tập rời nhau thỏa mãn đề bài. Ví dụ

- ① Với $n = 3$, có một tập con duy nhất có 2 phần tử mà tổng các phần tử không quá 3 là tập $\{1; 2\}$ nên $k = 1$ với tập $\{1; 2\}$.
- ② Với $n = 4$, có hai tập $\{1; 2\}, \{1; 3\}$ thỏa mãn tổng các phần tử không quá 4 nhưng hai tập này không rời nhau nên $k = 1$ với tập $\{1; 2\}$.
- ③ Với $n = 5$, có các tập $\{1; 2\}, \{1; 3\}, \{1; 4\}, \{2; 3\}$ thỏa mãn nhưng 3 tập đầu có chung phần tử nên chỉ chọn được 1 tập, do đó $k \leq 2$. Nhưng với $k = 2$ chỉ có thể chọn được 2 tập $\{2; 3\}, \{1; 4\}$ mà hai tập này có tổng bằng nhau nên cuối cùng $k = 1$, với tập $\{1; 2\}$
- ④ Với $n = 6$, trong các tập $\{1; 2\}, \{1; 3\}, \{1; 4\}, \{1; 5\}$ chọn được 1 tập; và trong các tập $\{2; 3\}, \{2; 4\}$ chọn được 1 trong 2 tập này. Nên $k = 2$ với các tập $\{2; 4\}, \{1; 3\}$ hoặc $\{2; 3\}, \{1; 4\}$ nhưng chỉ cặp $\{2; 4\}, \{1; 3\}$ cho tổng khác nhau. Vậy $k = 2$ với các tập $\{2; 4\}, \{1; 3\}$.
- ⑤ Với $n = 7$, trong các tập $\{1; 2\}, \{1; 3\}, \{1; 4\}, \{1; 5\}, \{1; 6\}$ chọn được 1 tập. Trong các tập $\{2; 3\}, \{2; 4\}, \{2; 5\}$ chọn được 1 tập. Với 2 tập được chọn này cùng với tập $\{3; 4\}$ nên $k \leq 3$, với các tập $\{3; 4\}, \{2; 5\}, \{1; 6\}$. Tuy nhiên chỉ chọn được 2 trong 3 tập này do yêu cầu tổng các phần tử khác nhau nên $k \leq 2$. Với $k = 2$ có thể chọn 2 tập $\{2; 4\}, \{1; 3\}$. Vậy $k = 2$ chọn 2 tập $\{2; 4\}, \{1; 3\}$.
- ⑥ Với $n = 7$, trong các tập $\{1; 2\}, \{1; 3\}, \{1; 4\}, \{1; 5\}, \{1; 6\}, \{1; 7\}$ chọn được 1 tập. Trong các tập $\{2; 3\}, \{2; 4\}, \{2; 5\}, \{2; 6\}$ chọn được 1 tập. Trong các tập $\{3; 4\}, \{3; 5\}$ chọn được 1 tập. Vậy với $k = 3$ với các tập $\{3; 4\}, \{2; 6\}, \{1; 2\}$ chẳng hạn.

Tiếp tục như vậy ta có bảng sau

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
k	0	0	1	1	1	2	2	3	3	3	4	4	5	5	5	6	6	7	7	7

Theo bảng có thể dự đoán quy luật lặp lại theo chu kỳ 5 và với $n = 5m + 1, n = 5m + 2$ cho đáp số $k = 2m$. Với $n = 5m + 3, n = 5m + 4, n = 5m + 5$ cho đáp số $k = 2m + 1$. Từ đó ta sẽ nghĩ cách tổng quát để phân hoạch tập $\{1; 2; 3; \dots; n\}$ thành các tập có 2 phần tử thỏa mãn đề bài trong từng trường hợp và chỉ ra với số k lớn hơn các số đã định thì không thể phân chia được. Ngoài ra, với hai trường hợp $n = 5m + 1$ và $n = 5m + 2$ có thể chọn chung các tập. Vậy chủ yếu làm việc với hai trường hợp $n = 5m + 1$ và $n = 5m + 3$. Ta có lời giải sau.

Với $n = 5m + 1$ và $n = 5m + 2$ ta có thể chọn $2m$ tập gồm

☑ $\{1; 4m\}, \{3; 4m - 1\}, \{5; 4m - 2\}, \dots, \{2m + 1; 3m\}$ có m tập.

☑ $\{2; 2m\}$ có 1 tập.

☑ $\{4; 3m - 1\}, \{6; 3m - 3\}, \{8; 3m - 5\}, \dots, \{2m - 2; 2m + 2\}$ có $(m - 1)$ tập.

Ngoài ra nếu $k \geq 2m + 1$ thì tổng S của k cặp đó thỏa mãn:

$$S \geq (1 + 2) + (3 + 4) + \dots + (4m + 1 + 4m + 2) = (2m + 1)(4m + 3)$$

và

$$S \leq (5m + 2 + 5m + 1) + \dots + (3m + 3 + 3m + 2) = (2m + 1)(4m + 2)$$

Điều này dẫn đến mâu thuẫn.

Với $n = 5m + 3, n = 5m + 4$ và $n = 5m + 5$ ta có thể chọn $2m + 1$ tập gồm

☑ $\{1; 4m + 2\}, \{3; 4m + 3\}, \dots, \{2m + 1; 3m + 2\}$ có $m + 1$ tập.

☑ $\{2; 3m + 1\}, \{4; 3m\}, \dots, \{2m; 2m + 2\}$ có m tập.

Ngoài ra nếu $k \geq 2m + 2$ thì tổng S của k cặp đó thỏa mãn:

$$S \geq (1 + 2) + (3 + 4) + \dots + (4m + 3 + 4m + 4) = (2m + 2)(4m + 5)$$

và

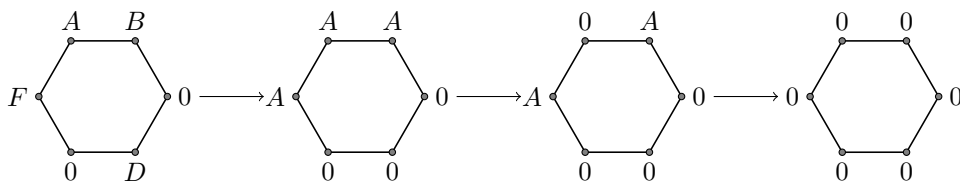
$$S \leq (5m + 5 + 5m + 4) + \dots + (3m + 5 + 3m + 4) = (2m + 2)(4m + 4)$$

Điều này dẫn đến mâu thuẫn. Vậy đáp số cuối cùng là $\left\lfloor \frac{2m - 1}{5} \right\rfloor$. □

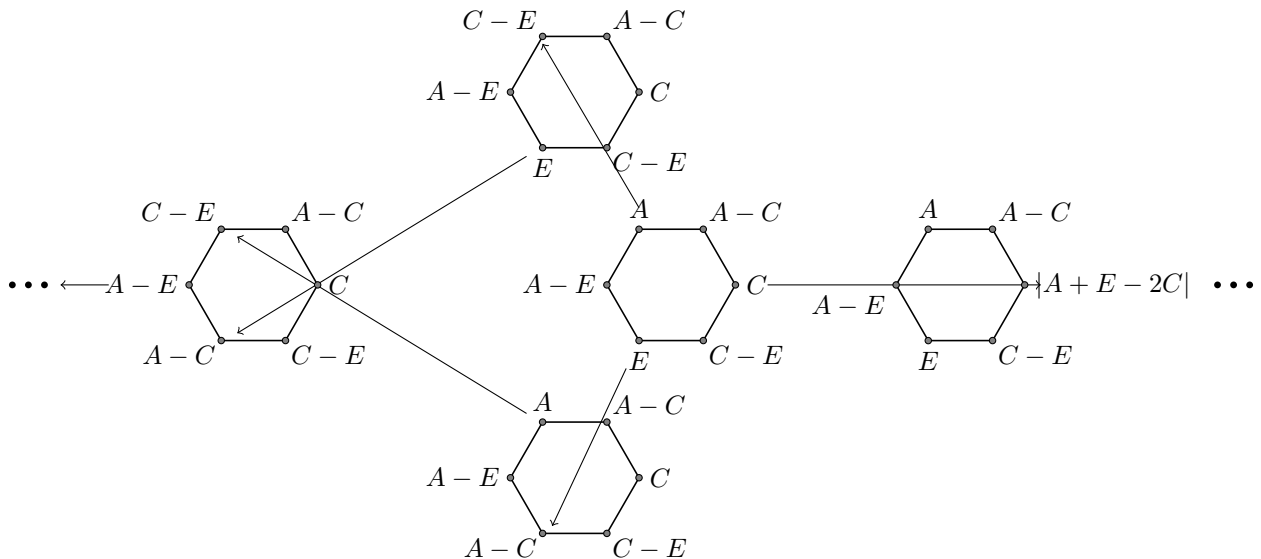
Bài 161. Tại các đỉnh của một lục giác đều viết 6 số nguyên không âm có tổng bằng 2013. Một người thực hiện thay đổi như sau: Chọn 1 đỉnh, thay số ở đỉnh đó bởi giá trị tuyệt đối của hiệu 2 số viết ở 2 đỉnh kề với đỉnh được chọn. Chứng minh rằng, có thể thực hiện như vậy một số lần sao cho các số thu được ở 6 đỉnh đều bằng 0.

Lời giải.

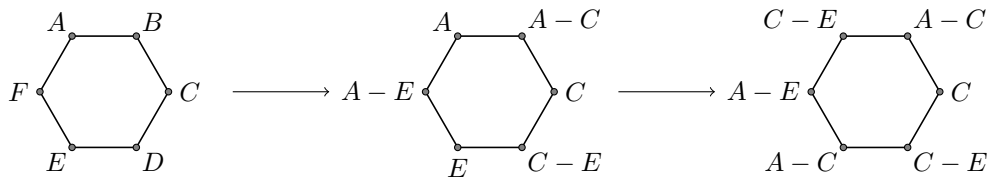
Dương nhiên muốn giảm các số về 0 thì tổng các số phải giảm dần. Xét vài trường hợp cụ thể. Dễ nhất là trường hợp có 3 số tại 3 đỉnh xen kẽ bằng 0, còn lại có tổng bằng 2013. Khi đó chỉ cần tác động 3 lần thao tác đã cho tại 3 đỉnh khác 0, ta thu được trạng thái 0. Nếu có 2 trong 3 số tại các đỉnh xen kẽ bằng 0, ta cũng dễ dàng thu được đáp số, cụ thể



Ngoài ra, các số tại các đỉnh chỉ phụ thuộc vào các số tại 3 đỉnh chỉ sau 1 phép biến đổi, nên ta sẽ chỉ xem xét chủ yếu sự biến đổi dựa trên 3 số tại 3 đỉnh, chẳng hạn theo dõi sự biến đổi khi $A \geq C \geq E$ như sau

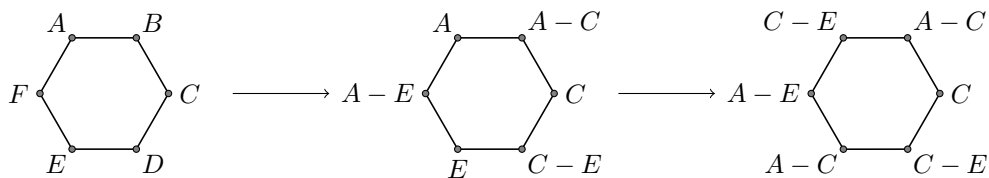


Ta thấy có phép biến đổi



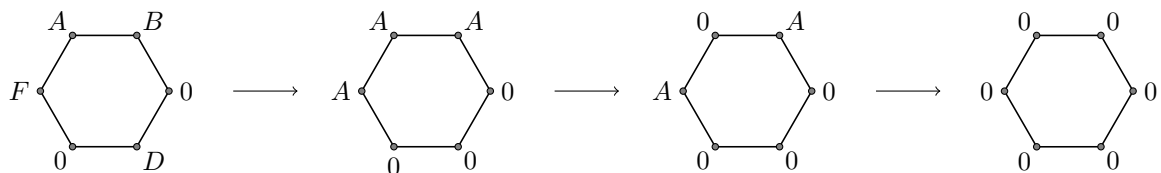
làm giảm tính lẻ của tổng $A + C + E$ nếu không có số nào bằng 0, là một phép biến đổi đáng lưu ý. Từ đây đặt ra câu hỏi: Khi có 1 số bằng 0 thì có đưa về trường hợp 2 số bằng 0 được 0, không có số nào bằng 0 thì thế nào? Trả lời các câu hỏi đó và xem xét biến đổi cụ thể trên, ta có lời giải sau. Trước hết, tồn tại 3 đỉnh xen kẽ sao cho tổng là số lẻ (bài toán chỉ sử dụng tính lẻ của số 2013 nên có thể tổng quát 2013 thành số n lẻ bất kỳ), giả sử 3 đỉnh đó là A, C, E (được điền các số A, C, E luôn)

$+ A \geq C \geq E > 0$. Xét biến đổi sau

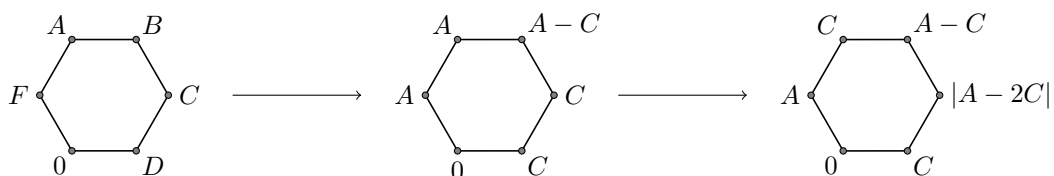


Ta thấy phép biến đổi này làm giảm tổng $A + C + E$ thành $(C - E) + C + (A - C) = A + C - E$ và vẫn giữ nguyên tính lẻ của tổng nếu E khác 0, vậy nếu áp dụng liên tiếp thao tác này, sẽ đi đến trạng thái mà 1 trong 3 số A, C, E bằng 0 hoặc 2 trong 3 số bằng 0

$+ \text{Nếu có 2 trong 3 số } A, C, E \text{ bằng 0. Giả sử } A > C = E = 0$, xét phép biến đổi



Ta thu được trạng thái toàn số 0 $+ A \geq C > E = 0$, thì do A lẻ nên $A > C$, xét phép biến đổi



Ta thấy phép biến đổi này làm giảm thực sự tổng $A + C + 0$ thành $C + |A - 2C| < A + C$ (do $C > 0$ và $C < A$), trong khi vẫn giữ cho tổng lẻ, tức là nếu tiếp tục áp dụng biến đổi này, ta sẽ đến được trạng thái mà có 2 số bằng 0, lúc đó áp dụng phép biến đổi cho trường hợp trên, ta thu được kết quả. Vậy ta có điều phải chứng minh. $\square$

Tài liệu tham khảo

- [1] Tuyển tập các chuyên đề Tổ hợp - Diễn đàn MathScope, link <https://drive.google.com/file/d/1MIcep1aiAUCun4NfRsYWYTPsu5iu85pp/view?usp=sharing>
- [2] Tạp chí Pi, tạp chí Toán học tuổi trẻ.
- [3] Hội thảo các chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi.
- [4] Các chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi của nhóm toán và L^AT_EX.
- [5] Combinatorics - A Problem-Based Approach, Springer.

Bên cạnh đó xin gửi lời cảm ơn tới thầy Huỳnh Kim Linh đã hỗ trợ tạo nên sản phẩm này. Ngoài ra có một số bài toán và tài liệu chúng tôi tham khảo và sưu tầm trên Internet nhưng không xác minh được rõ tác giả của chúng, do vậy sẽ không trích dẫn ở đây. Mong tác giả của những bài toán và tài liệu này hết sức thông cảm.