MẪN NGỌC QUANG
ĐỖ XUÂN SỸ - PHẠM MINH TUẤN

CHINH PHỤC
ĐIỂM 8, 9, 10
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM GIẢI TÍCH

- Tài liệu ôn thi THPT Quốc gia
- Tài liệu tham khảo dành cho giáo viên

NHÀ XUẤT BẢN DÂN TRÍ

LỜI NÓI ĐẦU

Các bạn thân mến, hình thức thi trắc nghiệm đòi hỏi chúng ta phải học rộng, phải bao quát hết kiến thức và cần có một tốc độ thật nhanh để giải quyết các bài toán.

Cuốn sách **"Chinh phục điểm 8, 9, 10 bài tập trắc nghiệm Giải tích"** ra đời nhằm mục đích giúp các em làm quen và luyện tập thật nhiều các dạng toán nâng cao hay gặp trong đề thi , đặc biệt là các câu hỏi **vận dụng cao.**

Các bài tập được đưa ra trong cuốn sách này được phân chia theo chuyên đề rõ ràng. Có hướng dẫn lý thuyết, có bài tập mẫu và có rất nhiều các bài tập để các bạn thực hành.

Để cải thiện nhanh tốc độ thì các bạn cần phải làm gì? Trước tiên là phải hiểu rõ bản chất, thuộc các dạng toán. Để từ đó hình thành được lối tư duy và kỹ thuật xử lý tình huống nhanh. Cuốn **"Chinh phục điểm 8, 9, 10 bài tập trắc nghiệm Giải tích"** là cơ hội tốt để các bạn rèn luyện những bài toán khó và nâng cao ở phân khúc điểm 8-9-10. Kho bài tập tự luyện phong phú được sưu tập từ: Các đề thi đại học các năm trước, từ các đề thi thử năm trước và một số bài được chọn lọc từ kho bài trên các diễn đàn internet và của một số thầy cô giáo khác. Trên cơ sở các bài toán tự luận đó, tác giả đã tạo ra những câu hỏi trắc nghiệm phù hợp với đề thi năm 2018.

Không có gì cải thiện tốc độc giải toán nhanh hiệu quả bằng việc các em tự mình giải thật nhiều các bài toán tương tự, đó là kinh nghiệm để học và làm bài trắc nghiệm.

Vậy còn chần chừ gì nữa, nào chúng ta hãy cùng nhau LUYỆN TỐC ĐỘ để có kết quả cao nhất trong kỳ thi sắp tới!

Mặc dù đã cố gắng hết sức cũng khó có thể tránh được sai sót trong quá trình biên soạn. Rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến từ phía độc giả để lần tái bản sau được hoàn thiện hơn.

Chúng tôi trân trọng cảm ơn!

Tác giả

Phần 1:

HÀM SỐ NÂNG CAO

CÔNG THỨC GIẢI NHANH HÀM TRÙNG PHƯƠNG

$$y = ax^4 + bx^2 + c$$

Dữ kiện	Công thức thỏa $ab < 0$
1) $B, C \in Ox$	$b^2 - 4ac = 0$
2) $BC = m_0$	$am_0^2 + 2b = 0$
3) $AB = AC = n_0$	$16a^2n_0^2 - b^4 + 8ab = 0$
4) $BC = kAB = kAC$	$b^3.k^2 - 8a.k^2 - 4 = 0$
5) ABOC nội tiếp	$c.\left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}\right) = 0$
6) ABOC là hình thoi	$b^2 - 2ac = 0$
7) Tam giác ABC vuông cân tại A	$8a + b^3 = 0$
8) Tam giác ABC đều	$24a + b^3 = 0$
9) Tam giác ABC có góc $\widehat{BAC} = \alpha$	$8a + b^3.\tan^2\frac{\alpha}{2} = 0$
10) Tam giác ABC có 3 góc nhọn	$8ab + b^3 > 0$
11) Tam giác ABC có diện tích S_0	$32a^3.S_0^2 + b^5 = 0$
12) Tam giác ABC có trọng tâm O	$b^2 - 6ac = 0$
13) Tam giác ABC có trực tâm O	$b^3 + 8a - 4ac = 0$
14) Tam giác ABC có O là tâm đường tròn nội tiếp	$b^3 - 8a - 4abc = 0$
15) Tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp	$b^3 - 8a - 8abc = 0$
16) Tam giác ABC có điểm cực trị cách đều trục hoành	$b^2 - 8ac = 0$

Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục hoành tại 4 điểm lập thành một cấp số cộng:

$$\begin{cases} ac > 0 \\ ab < 0 \\ b^2 = \dfrac{100}{9}ac \end{cases}$$

CÔNG THỨC GIẢI NHANH KHOẢNG CÁCH 2 ĐIỂM GIAO CỦA HÀM BẬC NHẤT VỚI ĐƯỜNG THẲNG

Giao điểm của đường thẳng $y = Kx + f(m)$ với đường thẳng $y = \dfrac{Ax+B}{A'x+B'}$ ở đây cho trước.

Phương trình hoành độ giao điểm biến đổi thành: $ax^2 + bx + c = 0$

A, B là 2 giao điểm. $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + K^2(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{K^2+1}.\sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2}$

$x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}, x_1.x_2 = \dfrac{c}{a}$

$\Rightarrow AB = \sqrt{K^2+1}.\sqrt{\dfrac{b^2}{a^2} - \dfrac{4c}{a}} = \sqrt{\dfrac{(K^2+1)}{a^2}}\sqrt{b^2-4ac}$

VD1: Đường cong $y = \dfrac{2x-1}{x-2}$ và $y = x+m$ cắt nhau tại 2 điểm AB có độ dài $AB = 4\sqrt{2}$

Giải:

$\rightarrow 2x - 1 = x^2 + mx - 2x - 2m$

$\Rightarrow x^2 + (m-4)x + 1 - 2m = 0, \Delta = (m-4)^2 - 4(1-2m) = m^2 + 12$

$k = 1, a = 1, b = m - 4, c = (1 - 2m)$

$\Rightarrow AB = \sqrt{2}.\sqrt{(m-4)^2 - 4(1-2m)} = \sqrt{2}.\sqrt{m^2+12} = 4\sqrt{2} \Rightarrow m^2 + 12 = 16 \Rightarrow m = \pm 2$

Vì delta luôn dương nên 2 giá trị m thỏa mãn.

VD2: $y = \dfrac{x+1}{2x-1}, y = 2m - x$ cắt nhau tại 2 điểm AB có độ dài $AB = \sqrt{2}$

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm:

$\rightarrow \dfrac{x+1}{2x-1} = 2m - x \rightarrow x + 1 = 4mx - 2x^2 - 2m + x \Rightarrow 2x^2 - 4mx + 2m + 1 = 0$

$a = 2, b = -4m, c = 2m + 1, \text{K} = -1$

$\Delta = 16m^2 - 16m - 8 > 0$

$\Rightarrow AB = \dfrac{\sqrt{K^2+1}}{\sqrt{a^2}}\sqrt{b^2-4ac} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}\sqrt{16m^2 - 8(2m+1)} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow 16m^2 - 16m - 8 = 4 \Rightarrow 16m^2 - 16m - 12 = 0 \Rightarrow 4m^2 - 4m - 3 = 0 \Rightarrow m = -\dfrac{1}{2}, m = \dfrac{3}{2}$

Kiểm tra lại điều kiện của delta xem sao.

ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA 2 ĐIỂM CỰC TRỊ CỦA HÀM BẬC 3

Đường thẳngđi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có dạng $y = y - \frac{y''}{18a}.y'$

CHỨNG MINH CÁC CÔNG THỨC CỦA HÀM TRÙNG PHƯƠNG

Bài toán 1: Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ (với $a \neq 0$) có: $y' = 4ax^3 + 2bx$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x\left(2ax^2 + b\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = \frac{-b}{2a} \end{array}\right.$$

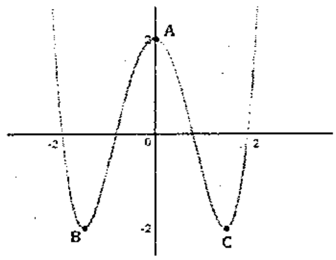
Để hàm số có 3 điểm cực trị thì ta cần có điều kiện: $\frac{-b}{2a} > 0$ tức là a, b trái dấu. Khi đó ta có: $x = \pm\sqrt{\frac{-b}{2a}}$

Khi đó 3 điểm cực trị thường được kí hiệu là:

$$A(0;c);\ B\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}};c - \frac{b^2}{4a}\right);\ C\left(-\sqrt{\frac{-b}{2a}};c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

Tức là tam giác ABC nếu có sẽ luôn luôn cân tại A.

Đồ thị:



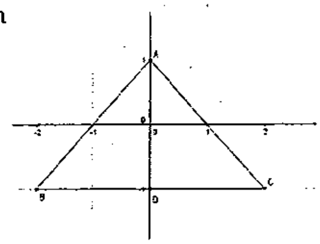
Vì tính đối xứng của các điểm cực trị nên có rất nhiều bài toán tìm tham số m liên quan đến 3 điểm này:

Bài toán 2: Tìm m để 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

<u>Chứng minh:</u> 3 điểm cực trị tạo thành tam giác vuông cân

$$\Leftrightarrow DC = DA \Leftrightarrow \sqrt{\frac{-b}{2a}} = c - \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

(Đúng với cả 2 trường hợp $c - \frac{b^2}{4a} > 0$ và $c - \frac{b^2}{4a} < 0$)



$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{-b}{2a}} = \frac{b^2}{4a} \Leftrightarrow 8a + b^3 = 0$$

❒ Bài tập áp dụng:

Câu 1: Tìm m để hàm số $y = x^4 + (m+2017)x^2 + 5$ có 3 cực trị tạo thành tam giác vuông cân.

Giải:

Ở đây ta có: $a = 1, b = m + 2017$. Từ $8a + b^3 = 0 \Rightarrow b^3 = -8 \Rightarrow m = -2019$

Bài toán 3: Tìm m để 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác đều.

Công thức: $24a + b^3 = 0$

Chứng minh: ABC là tam giác đều $DC = DA \Leftrightarrow \sqrt{\frac{-b}{2a}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.\left[c - \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)\right]$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{-b}{2a}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{b^2}{4a} \Leftrightarrow \frac{b^3}{24a} = -1 \Leftrightarrow b^3 + 24a = 0$

❒ Bài tập áp dụng:

Câu 2: Tìm m để hàm số $y = \frac{9}{8}x^4 + 3(m-2017)x^2 + 12$ có 3 cực trị tạo thành tam giác đều.

Giải:

Với $a = \frac{9}{8}, b = 3(m-2017)$. Từ $24a + b^3 = 0 \Rightarrow b^3 = -27 \Rightarrow m = 2016$

Câu 3: Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^4 + (2m+4)x^2 - 11$ có 3 cực trị tạo thành tam giác đều.

Giải:

Với $a = \frac{1}{3},\ b = 2m + 4$. Từ $24a + b^3 = 0 \Rightarrow (2m+4)^3 = -8 \Rightarrow m = -3$

Bài toán 4: Tìm m để 3 điểm cực trị tạo thành một góc xác định.

Công thức: $8a + b^3.\tan^2\frac{\alpha}{2} = 0$

Chứng minh: $\widehat{BAC} = \alpha$ khi và chỉ khi

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{DC}{DA} \Leftrightarrow \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{\frac{-b}{2a}}}{c - \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{-b}{2a}} = \frac{b^2}{4a}\tan\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow 8a + b^3.\tan^2\frac{\alpha}{2} = 0$$

❒ Bài tập áp dụng:

Câu 4: Tìm m để hàm số $y = 3x^4 + (m-7)x^2 + 3$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có một góc 120^0.

Giải:

Với $a = 3, b = m - 7$. Từ $8a + b^3.\tan^2 60° = 0 \Rightarrow 8.3 + 3(m-7)^3 = 0 \Leftrightarrow m = 5$

Câu 5: Tìm m để hàm số $y = mx^4 + mx^2 + 3$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có một góc 60^0.

Giải:

Với $a = m,\ b = m$. Từ $8a + b^3.\tan^2 30° = 0 \Rightarrow 8m + \frac{1}{3}m^3 = 0 \Leftrightarrow m = 0$

Điều kiện để có 3 điểm cực trị là : $a.b<0$, nên loại $m=0$

Bài toán 5: Tìm m để đồ thị có 3 cực trị tạo thành tam giác có diện tích là S_0.

Công thức: $32a^3(S_0)^2+b^5=0$

Chứng minh: 3 cực trị tạo thành tam giác có diện tích là S_0 khi và chỉ khi:

$$\frac{1}{2}.DA.2DC=S_0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-b}{2a}}.2\frac{b^2}{4a}=S_0 \Leftrightarrow (S_0)^2=\frac{-b^5}{32a^3} \Leftrightarrow 32a^3(S_0)^2+b^5=0$$

❑ Bài tập áp dụng:

Câu 6: Tìm m để hàm số $y=mx^4+2x^2+m-21$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng 1.

Giải:

Với $a=m, b=2$. Từ $32a^3(S_0)^2+b^5=0 \Rightarrow 32m^3+2^5=0 \Rightarrow m=-1$

Bài toán 6: Tìm m để 3 cực trị tạo thành tam giác có diện tích lớn nhất.

Công thức: $S_0=\sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}$

Chứng minh: $32a^3(S_0)^2+b^5=0 \Rightarrow S_0=\sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}$

❑ Bài tập áp dụng:

Câu 7: Tìm m để hàm số $y=x^4-2(1-m^2)x^2+m+1$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có diện tích lớn nhất.

Giải:

Với $a=1, b=-2(1-m^2)$. Từ $S_0=\sqrt{(1-m^2)^5}\le 1 \Rightarrow m=0$

Câu 8: Tìm m để hàm số $y=3x^4-2(16-m^4)x^2+m^2+2$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có diện tích lớn nhất.

Giải:

Với $a=3,\ b=-2(16-m^4)$. Từ $S_O=\sqrt{\frac{(16-m^4)^5}{3^3}}\le\sqrt{\frac{(16)^5}{3^3}} \Leftrightarrow m=0$

Từ đó tìm được $m=0$

Bài toán 7: Tìm m để 3 cực trị tạo thành tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp cho trước.

Công thức: $r_{\Delta ABC}=r_o=\dfrac{b^2}{4|a|\left(1+\sqrt{1-\frac{b^3}{8a}}\right)}$

Chứng minh: Ta có: $r_{\Delta ABC} = pr_o \Rightarrow r_o = \dfrac{\sqrt{-\dfrac{b^5}{32a^3}}}{\sqrt{\dfrac{-b}{2a}}+\sqrt{\left(\dfrac{-b}{2a}\right)^2+\left(\dfrac{-b}{4a}\right)^2}} = \dfrac{b^2}{4|a|\left(1+\sqrt{1-\dfrac{b^3}{8a}}\right)}$

❑ Bài tập áp dụng:

Câu 9: Tìm m để hàm số $y = x^4 - mx^2 + \dfrac{3}{2}$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1.

Giải:

Với $a = 1$, $b = -m$. Từ $r_o = \dfrac{m^2}{4\left(1+\sqrt{1-\dfrac{m^3}{8}}\right)} = 1 \Rightarrow m = 2$

Bài toán 8: B, C là 2 điểm cực trị có tung độ bằng nhau. A là điểm cực trị khác tung độ: $y = ax^4 + bx^2 + c$

$BC = m_0$

$am_0^2 + 2b = 0$

Suy ra $A(0;c), B\left(\sqrt{\dfrac{-b}{2a}}, y_B\right), C\left(-\sqrt{\dfrac{-b}{2a}}, y_B\right) \Rightarrow BC^2 = -\dfrac{2b}{a} = m_o{}^2 \Leftrightarrow am_o{}^2 + 2b = 0.$

❑ Bài tập áp dụng:

Câu 10: Giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 3m - 2$ có ba cực trị $A \in Oy, B, C$ sao cho $BC = \sqrt{5}$ là:

A. $m = \dfrac{5}{4}$ **B.** $m = 1$ **C.** $m = 2$ **D.** $m = \dfrac{1}{4}$

Giải:

Với $a = 1, b = -2m$. Từ $am_o{}^2 + 2b = 0 \Rightarrow 5 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{5}{4}$. **Chọn A.**

Câu 11: Giá trị của m để đồ thị hàm số $y = m^2x^4 - mx^2 + 1 - m$ có ba cực trị $A \in Oy, B, C$ sao cho $BC = \sqrt{2}$ là:

A. $m = 1$ **B.** $m = 0$ **C.** $m = -1$ **D.** $m = -2$

Giải:

Với $a = m^2, b = -m$. Từ $am_0^2 + 2b = 0 \Rightarrow m = 1$ vì $m \neq 0$. **Chọn A.**

Bài toán 9: B, C là 2 điểm cực trị có tung độ bằng nhau. A là điểm cực trị khác tung độ: $y = ax^4 + bx^2 + c$

$AB = AC = n_0; 16a^2n_0^2 - b^4 + 8b = 0$

Suy ra:

$$A(0;c), B\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}, y_B\right), C\left(-\sqrt{\frac{-b}{2a}}, y_B\right) \Rightarrow AB^2 = -\frac{b}{2a} + \left(a.\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a}\right)^2 = \frac{-b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2} = n_o^{\ 2}$$

$\Rightarrow 16a^2n_o^{\ 2} - b^4 + 8b = 0.$

□ Bài tập áp dụng:

Câu 12: Giá trị của $m > 0$ để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 3m - 2$ có ba cực trị $A \in Oy, B, C$ sao cho $AB = AC = 3\sqrt{2}$ là:

A. $m = \frac{5}{4}$ B. $m = 1$ C. $m = 2$ D. $m = \frac{1}{4}$

Giải:

Với $a = 1, b = -2m$. Từ $16a^2n_o^{\ 2} - b^4 + 8b = 0 \Rightarrow m = 2$, do $m > 0$. **Chọn C.**

Câu 13: Giá trị của $m \in \mathbb{Z}$ để đồ thị hàm số $y = m^2x^4 - mx^2 + 1 - m$ cóba cực trị $A \in Oy, B, C$ sao cho $AC = AB = 2$ là:

A. $m = 1$ B. $m = 0$ C. $m = -1$ D. Không có $m$thỏa mãn.

Giải:

Với $a = m^2, b = -m$. Từ $16a^2n_o^{\ 2} - b^4 + 8b = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \sqrt[3]{\frac{8}{15}} \end{array}\right.$.

Thử lại không có m thỏa mãn.Chọn D.

Bài toán 10: **B, C là 2 điểm cực trị có tung độ bằng nhau. A là điểm cực trị khác tung độ:**

$$y = ax^4 + bx^2 + c$$

$B, C \in Ox; b^2 - 4ac = 0$

$$A(0;c), B\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}, y_B\right), C\left(-\sqrt{\frac{-b}{2a}}, y_B\right) \Rightarrow y_B = 0 \Leftrightarrow -\frac{b^2}{4a} + c = 0 \Leftrightarrow b^2 - 4ac = 0$$

□ Bài tập áp dụng:

Câu 14: Giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 3m - 2$ có ba cực trị $A \in Oy$ $B, C \in Ox$ là:

A. $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 2 \end{array}\right.$ B. $m = 1$ C. $m = 2$ D. $m = \frac{1}{4}$

Giải:

Với $a = 1, b = -2m, c = 3m - 2$. Từ $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 4m^2 - 12m + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 2 \end{array}\right.$.Chọn A.

Câu 15: Giá trị của m để đồ thị hàm số $y=m^2x^4-mx^2+1$ có ba cực trị $A\in Oy, B,C\in Ox$ là:

A. $m=1$ **B.** $m=0$ **C.** $m=-1$ **D.** Không có m thỏa mãn

Giải:

Với $a=m^2, b=-m, c=1$. Từ $b^2-4ac=0 \Rightarrow m^2-4m^2=0 \Leftrightarrow m=0$.

Không có m thỏa mãn. **Chọn D.**

Bài toán 11: **B, C là 2 điểm cực trị có tung độ bằng nhau. A là điểm cực trị khác tung độ:**

$$y=ax^4+bx^2+c$$

Tam giác có trọng tâm O; $b^2-6ac=0$

$$A(0;c), B\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}, y_B\right), C\left(-\sqrt{\frac{-b}{2a}}, y_B\right) \Rightarrow c+2y_B=0 \Leftrightarrow c-\frac{b^2}{2a}+2c=0 \Leftrightarrow b^2-6ac=0.$$

❐ **Bài tập áp dụng:**

Câu 16: Giá trị của m để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+3m-2$ có ba cực trị tạo thành tam giác nhận O là trọng tâm là:

A. $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2 \end{array}\right.$ **B.** $m=\frac{9\pm\sqrt{33}}{4}$ **C.** $m=2$ **D.** $m=\pm\frac{1}{4}$

Giải:

Với $a=1, b=-2m, c=3m-2$. Từ $b^2-6ac=0 \Rightarrow 4m^2-6(3m-2)=0 \Leftrightarrow m=\frac{9\pm\sqrt{33}}{4}$

Chọn B.

Câu 17: Giá trị của m để đồ thị hàm số $y=m^2x^4-mx^2+1$ có ba cực trị tạo thành tam giác nhận O là trọng tâm là:

A. $m=1$ **B.** $m=\pm 1$ **C.** $m=\varnothing$ **D.** $m=\pm\sqrt{5}$

Giải:

Với $a=m^2, b=-m, c=1$. Từ $b^2-6ac=0 \Rightarrow m=0$. **Chọn C.**

Vì $m=0$ không thỏa mãn để có 3 cực trị.

Bài toán 12: **B, C là 2 điểm cực trị có tung độ bằng nhau. A là điểm cực trị khác tung độ:**

$$y=ax^4+bx^2+c$$

Tam giác có trực tâm $O; b^3+8a-4ac=0$

$$A(0;c), B\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}, y_B\right), C\left(-\sqrt{\frac{-b}{2a}}, y_B\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CO}=-\frac{b}{2a}+\left(-\frac{b^2}{4a}\right)\left(-\frac{b^2}{4a}+c\right)=0$$

$\Leftrightarrow b^3+8a-4ac=0.$

Câu 18: Giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 2$ có ba cực trị tạo thành tam giác nhận O là trực tâm là:

A. $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2 \end{array}\right.$ B. $m = \dfrac{9 \pm \sqrt{33}}{4}$ C. $m = \sqrt[3]{2}$ D. $m = \pm\dfrac{1}{4}$

Giải:

Với $a = 1, b = -2m, c = -2$. Từ $b^3 + 8a - 4ac = 0 \Rightarrow -8m^3 + 8 + 4.2 = 0 \Leftrightarrow m = \sqrt[3]{2}.$

Chọn C.

Câu 19: Giá trị của m để đồ thị hàm số $y = m^2x^4 - mx^2 + 1$ có ba cực trị tạo thành tam giác nhận O là trực tâm là:

A. $m = 1$ B. $m = \pm 1$ C. $m = 4$ D. $m = \pm\sqrt{5}$

Giải:

Với $a = m^2, b = -m, c = 1$. Từ $b^3 + 8a - 4ac = 0 \Rightarrow -m^3 + 8m^2 - 4m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 4.$

Do $m \neq 0$. **Chọn C.**

<u>Bài toán 13:</u> Khoảng cách từ một điểm đến hai đường tiệm cận.

<u>Chứng minh:</u> Cho đồ thị hàm số $(C): \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Điểm M thuộc (C)

Đồ thị hàm số (C) có đường tiệm cận đứng $x = \dfrac{-d}{c}$ và tiệm cận ngang

$y = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{a}{c}; M \in (C) \Rightarrow M\left(x_0; \dfrac{ax_0+b}{cx_0+d}\right)$

Khoảng cách từ M đến đường tiệm cận ngang: $d_1 = \left|x_0 + \dfrac{d}{c}\right|$

Khoảng cách từ M đến đường tiệm cận đứng: $d_2 = \left|y_0 - \dfrac{a}{c}\right| = \left|\dfrac{ax_0+b}{cx_0+d} - \dfrac{a}{c}\right|$

Suy ra khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận:

$$d = d_1 + d_2 = \left|x_0 + \frac{d}{c}\right| + \left|\frac{ax+b}{cx+d} - \frac{a}{c}\right| = \left|\frac{cx_0+d}{c}\right| + \left|\frac{acx_0 + bc - acx_0 - ad}{c(cx+d)}\right| = \left|\frac{cx_0+d}{c}\right| + \left|\frac{bc-ad}{c(cx+d)}\right|$$

Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy*: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ với $a, b \geq 0$ ta có:

$$d \geq 2\sqrt{\left|\frac{cx_0+d}{c}\right|\left|\frac{bc-ad}{c(cx+d)}\right|} = 2\sqrt{\left|\frac{bc-ad}{c^2}\right|}$$

Dấu = xảy ra khi $\left|\frac{cx_0+d}{c}\right| = \left|\frac{bc-ad}{c(cx+d)}\right| \Leftrightarrow (cx_0+d)^2 = |bc-ad|$ đến đây thì tùy bài chọn cách xử lí cho phù hợp.

Vậy khoảng cách nhỏ nhất từ một điểm M bất kỳ thuộc (C) đến hai đường tiệm cận là:

$$\boxed{d_{Min} = 2\sqrt{\left|\frac{bc-ad}{c^2}\right|}}$$

☐ Bài tập áp dụng:

Câu 20: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2x+1}(C)$. Tổng khoảng cách từ điểm M trên (C) đến hai tiệm cận của (C) bằng d. Tìm giá trị nhỏ nhất của chỉnh kiểu chữ.

A. 2 **B.** $\sqrt{2}$ **C.** 1 **D.** $2\sqrt{3}$

Giải:

$d_{Min} = 2\sqrt{\left|\frac{bc-ad}{c^2}\right|} = 2\sqrt{\left|\frac{2-1}{4}\right|} = 1$. Chọn C.

Câu 21: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2x+1}(C)$. Tìm điểm M trên (C) sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận của (C) nhỏ nhất.

A. $\left[\begin{array}{l} M(-1;0) \\ M(0;1) \end{array}\right.$ **B.** $M(-1;0)$ **C.** $\left[\begin{array}{l} M\left(1;\frac{2}{3}\right) \\ M(0;1) \end{array}\right.$ **D.** $M\left(1;\frac{2}{3}\right)$

Giải:

$d_{Min} = 2\sqrt{\left|\frac{bc-ad}{c^2}\right|} = 2\sqrt{\left|\frac{2-1}{4}\right|} = 1$

Khi $\left|\frac{cx_0+d}{c}\right| = \left|\frac{bc-ad}{c(cx+d)}\right| \Rightarrow \left|\frac{2x_0+1}{2}\right| = \left|\frac{2-1}{2(2x_0+1)}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \end{array}\right.$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} M(-1;0) \\ M(0;1) \end{array}\right.$. **Chọn A.**

MẸO CASIO

Dạng 1: Viết phương trình tiếp tuyến, giải nhanh.

Câu 1: $(C): y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại $x=1$.

A. $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}$ B. $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}$ C. $y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{1}{3}$ D. $y=\dfrac{1}{3}x-2$

Giải:

Ta nhập: VINACAL 570ES PLUS II

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2X-1}{X+1}\right)\Big|_{x=1}$ Math

0.75

Chọn A vì chỉ có A có hệ số góc $\dfrac{3}{4}$.

Để kiểm tra xem đề sai không ta nhập hàm số: $(C): y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ rồi bấm CALC với x = 1 được $y=\dfrac{1}{2}$, ta sẽ dùng công thức: $y=\dfrac{3}{4}(x-1)+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}$ đúng.

Bài toán này đề cho hở, nếu cho một đường thẳng khác cũng có hệ số góc k = ¾ thì ta phải làm nhiều việc hơn.

Câu 2: $y=x^4-2x^2$, viết phương trình tiếp tuyến tại $x=-2$.

A. $-12x+2$ B. $12x+2$ C. $-24x-40$ D. $-24x+4$

Giải:

Ta nhập: VINACAL 570ES PLUS II

$\dfrac{d}{dx}(X^4-2X^2)\Big|_{x=-2}$ Math

-24

Chọn C, D vì chỉ có C, D mới có hệ số góc là -24.

Để kiểm tra xem đường thẳng nào mới là tiếp tuyến ta sẽ sử dụng chức năng Table (khi tiếp xúc thì phương trình có nghiệm kép, ta kiểm tra nghiệm kép để phát hiện tiếp tuyến).

Bấm Mode 7, nhập hàm: $x^4-2x^2+24x+40$

Star: -2,1, end -1,9, step 0,01, quan sát bảng ta có:

Quan sát chúng ta thấy dấu của hàm số nhập không đổi, từ âm đến 0 (tại x = -2) rồi lại âm. Chứng tỏ rằng tại x = -2 thì có nghiệm kép.

Math

	X	F(X)
5	-2.02	8.8e-03
6	-2	0
7	-1.98	8.7e-03

-1.98

Chọn đáp số đúng là C. Nếu băn khoăn các bạn thử đáp án D. Sẽ không có hiện tượng vậy.

Dạng 2: Phương trình đường thẳng qua 2 điểm cực trị.

Câu 3: Cho: $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$. Tìm phương trình đường thẳng qua 2 cực trị:

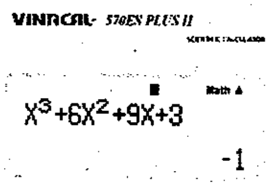
$y' = 3x^2 + 12x + 9 \to x = -1, x = -3$

$x^3 + 6x^2 + 9x + 3 = \left(9x^2 + 12x + 9\right).g\left(x\right) + ax + b$

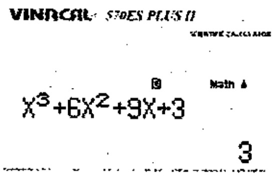
Giải:

Vì tại x = -1, x = -3 thì $y' = 0$ nên $\left(9x^2 + 12x + 9\right).g\left(x\right) = 0$

Nhập $x^3 + 6x^2 + 9x + 3$



Bấm CALC: $x = -1 \to y = -1 \Rightarrow -a + b = -1$



Bấm CALC: $x = -3 \to y = 3 \to -3a + b = 3$

Giải hệ $\begin{cases} -a + b = -1 \\ -3a + b = 3 \end{cases} \to \begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \end{cases}$

Vậy phương trình đường thẳng qua 2 cực trị là: $y = -2x - 3$

Câu 4: Tìm m để các hàm số: $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ có đường thẳng đi qua hai điểm cực trị song song với đường thẳng y = -4x + 1.

A. $m = \{-1; -5\}$ **B.** $m = \{1; 5\}$ **C.** $m = \{1; -5\}$ **D.** $m = \{-1; 5\}$

Giải:

Chọn B.

Giải ngược lên, chọn đáp án rồi thử lên trên.

$y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1 \Rightarrow y'(x) = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2)$

+) m = 1, $y = 2x^3 - 6x - 1 \Rightarrow y'(x) = 6x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$y = 2x^3 - 6x - 1 = (6x^2 - 6)g(x) + a.x + b$

Nhập $2x^3 - 6x - 1$ bấm CALC x = 1 ra y = -5 ⇒ -5 = a + b

bấm CALC x = -1 ra y = 3 ⇒ 3 = -a + b

Tìm được a = -4, b= -1.

Lúc này phương trình đường đi qua 2 điểm cực trị là: y = 4x – 1.

Vậy m = 1 thỏa mãn, loại A, D.

+) Làm tương tự: m = 5 ta có: $y'(x) = 6x^2 + 24x + 18 = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = -3$

$y = 2x^3 + 12x^2 + 18x - 1 = (6x^2 + 24)x + 18)g(x) + a.x + b$

Nhập $2x^3+12x^2+18x-1$ bấm CALC x = -1 ra y = -9 ⇒ -9 = -a + b

bấm CALC x = -3 ra y = -1 ⇒ -1 = -3a + b

Tìm được a = -4, b= -13

Lúc này phương trình đường đi qua 2 điểm cực trị là: y = -4x – 13.

Vậy m = 5 thỏa mãn, loại C.

Dạng 3: Tìm khoảng đơn điệu hàm số.

Câu 5: $y=x^3-3x-1$ nghịch biến trên:

A. $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$ **B.** $(1;+\infty)$ **C.** $(-1;1)$ **D.** $(0;1)$

Giải:

Nhập $\frac{d}{dx}\left(x^3-3x-1\right)\Big|_{x=x}$ **Bấm CALC:** $x=2$ thấy dương → loại A, B.

Bấm CALC: $x=-\frac{1}{2}$ thấy >0 ⇒ **Chọn C.**

Câu 6: Hàm số $y=\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}$ đồng biến trong khoảng nào:

A. $(-4;4)$ **B.** $(-1;1)$ **C.** $[-1;1]$ **D.** $(0;1)$

Giải:

Nhập $\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}\right)\Big|_{x=x}$ **Bấm CALC:** $x=-3,9$ thấy dương

CALC: $x=3,9$ và **CALC:** $x=0$: thấy dương

⇒**Chọn A** đúng nhất.

Câu 7: $y=\frac{x^3}{\sqrt{x^2-6}}$. Hàm số đồng biến trong khoảng nào. Chọn đáp án đúng nhất:

A. $(-\infty;1)$ **B.** $(0;3)$ **C.** $(-3;+\infty)$ **D.** $(-\infty;-3)$ và $(3;+\infty)$

Giải:

Nhập $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{\sqrt{x^2-6}}\right)\Big|_{x=x}$

Ta xét ý D trước: Bấm CALC: $x=3,1$ thấy >0; CALC: $x=-2,9$ thấy >0

⇒Khả năng cao là D. Loại A, B, C vì không chứa tập xác định.

Dạng 5: Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu tại x bằng giá trị cho trước.

Câu 8: Tìm m để hàm số có cực tiểu tại $x=2$, $y=x^3-3mx^2+\left(m^2-1\right)x+2$, m là tham số.

A. $m=-2$ **B.** $m=-1$ **C.** $m=1$ **D.** $m=2$

Cách khác nhanh hơn:

Hoặc chúng ta nhập luôn hàm 2 biến như sau: $\frac{d}{dx}\left(x^2-3y.x^2+\left(y^2-1\right)x+2\right)\Big|_{x=x}$

Bấm CALC: $x=2, y=-2 \rightarrow$ Kết quả $36 \neq 0$;

CALC: $y=2; y=-1 \rightarrow$ Kết quả $24 \neq 0$, loại.

CALC: $x=2, y=1 \rightarrow$ Kết quả = 0; xét tiếp CALC: $x=1, y=2 \rightarrow$ Kết quả -12, loại.

Vậy Chọn C.

Câu 9: Tìm m để $y=-x^3+(m+3)x^2-\left(m^2+2m\right)x-2$ đạt cực đại tại $x=2$

A. $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-2 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=3 \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-3 \end{array}\right.$

Giải:

Nhập $\frac{d}{dx}\left(-x^3+(y+3)x^2-\left(y^2+2y\right)x-2\right)\Big|_{x=x}$

Nhập CALC: $x=2; y=0$ thấy bằng 0.

$\Rightarrow$ Tất cả đúng (Cái này không cần thử vì ý nào cũng có)

CALC: $x=2; y=-2$ ra -8 (loại); CALC: $x=2; y=3$ ra -3 (loại)

CALC: $x=2; y=2$ ra 0 (xem xét); CALC: $x=2; y=-3$ ra -15 (loại)

Vậy không cần thử nữa $\Rightarrow$**Chọn C.**

Dạng 6: Tìm giá trị lớn nhất; nhỏ nhất của hàm số dựa vào Casio.

Câu 10. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số sau: $y=2x^3+3x^2-12x+1$ trên [−1; 5] là:

A. $\max\limits_{[-1;5]} y=266.$ **B.** $\min\limits_{[-1;5]} y=-6.$ **C.** $\max\limits_{[-1;5]} y=166.$ **D.** $\min\limits_{[-1;5]} y=6.$

Giải:

Giải bằng Casio như sau:

Dùng chức năng Table hoặc chức năng CALC để tìm.

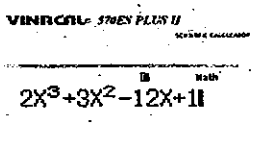
➤ **Dùng CALC**

Bước 1: Tính đạo hàm tìm nghiệm, so sánh nghiệm với 2 giá trị biên xem nó có thuộc khoảng yêu cầu không.

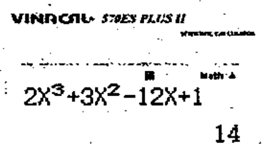
Bước 2: Nhập hàm số đã cho, bấm CALC với các giá trị biên và giá trị làm cho $y'=0$ (nếu giá trị này thuộc khoảng yêu cầu), sau đó so sánh các giá trị tính được. Nếu giá trị cao nhất ta cho max, giá trị thấp nhất ta cho min.

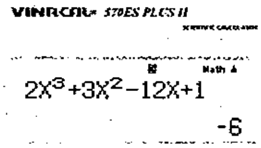
$y=2x^3+3x^2-12x+1 \Rightarrow y'=6x^2+6x-12=0 \Rightarrow x=1, x=-2$

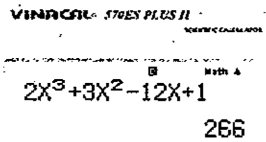
Nhận thấy cả 1 nằm trong đoạn yêu cầu, x = -2 không nằm trên đoạn yêu cầu ta sẽ làm như sau:



Sau đó bấm CALC với các giá trị x = 1, x = -1, x = 5 ta quan sát.







CALC X = -1 CALC X = 1 CALC X = 5

Vậy GTLN là 266, GTNN là –6.

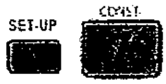
Câu 11: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số: $y = \dfrac{3x-1}{x-3}$ trên [0; 2] là:

A. $\max\limits_{[0;2]} y = \dfrac{2}{3}$. B. $\max\limits_{[0;2]} y = -\dfrac{1}{3}$. C. $\min\limits_{[0;2]} y = -5$. D. $\min\limits_{[0;2]} y = -3$.

Giải:

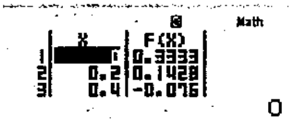
Sử dụng Casio để biết rằng hàm số luôn giảm.

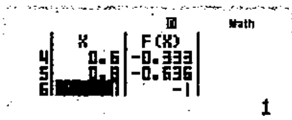
Dùng chức năng Table để tìm max và min.

Ta bấm Mode 7 

Nhập hàm F(x) = $\dfrac{3x-1}{x-3}$

Sau đó ta cho start 0, end 2, step 0,2. Quan sát thao tác như sau:





Quan sát bảng ta thấy rằng hàm số luôn giảm giá trị, và cao nhất là 1/3, thấp nhất là -5.

Vậy GTLN là 1/3, GTNN là -5.

BÀI TOÁNĐƠN ĐIỆU CÓ THAM SỐ M

Với những bài toán có tham số m, các em cần phải có kỹ thuật giải bất phương trình, xét dấu của tam thức bậc 2. Sau đây là một số công thức cần thiết để giúp các em học chương này:

** Nhắc lại: Cho* $f(x) = ax^2 + bx + c\,(a \neq 0)$

$f(x) \geq 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases};$ $\quad f(x) \leq 0, \forall x \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

Các công thức dưới đây dành cho bài toán tìm m để hàm số đơn điệu trên một khoảng nào đó bất kỳ:

➢ *Phương trình* $f(x)=ax^2+bx+c=0$ *có 2 nghiệm* $x_1<\alpha<x_2$ *khi* $a.f(\alpha)<0$

➢ *Phương trình* $f(x)=ax^2+bx+c=0$ *có 2 nghiệm* $x_1<\alpha<\beta<x_2$ *khi* $\begin{cases} a.f(\alpha)<0 \\ a.f(\beta)<0 \end{cases}$

➢ *Phương trình* $f(x)=ax^2+bx+c=0$ *có 2 nghiệm* $x_1<x_2<\alpha$ *khi* $\begin{cases} a.f(\alpha)>0 \\ \Delta>0 \\ \dfrac{S}{2}<\alpha \end{cases}$

➢ *Phương trình* $f(x)=ax^2+bx+c=0$ *có 2 nghiệm* $\alpha<x_1<x_2$ *khi* $\begin{cases} a.f(\alpha)>0 \\ \Delta>0 \\ \dfrac{S}{2}>\alpha \end{cases}$

➢ *Phương trình* $f(x)=ax^2+bx+c=0$ *có 2 nghiệm* $\alpha<x_1<x_2<\beta$ *khi* $\begin{cases} a.f(\alpha)>0 \\ \Delta>0 \\ \dfrac{S}{2}>\alpha \\ \dfrac{S}{2}<\beta \end{cases}$

❑ **Bài tập áp dụng:**

Bài 22. Giá trị nào của m thì hàm số $y=\dfrac{x+m}{x-2}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định là:

A. $m<-2$ **B.** $m\le -2$ **C.** $m>-2$ **D.** $m\ge -2$

Bài 23. Xác định m để hàm số sau đồng biến trong khoảng $(0;+\infty)$: $y=\dfrac{x+m}{\sqrt{x^2+1}}$

A. $m<-1$ **B.** $m\le 0$ **C.** $m>0$ **D.** $m\ge -1$

Bài 24. Tìm m để hàm số $y=x^3-3mx^2+(m+2)x-m$ luôn đồng biến trên tập xác định:

A. $-1\le m\le 1$ **B.** $\dfrac{-2}{3}\le m\le 1$ **C.** $\dfrac{-2}{3}\le m\le 2$ **D.** $-1\le m\le 2$

Bài 25. Tìm m để hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{mx^2}{2}-2x+1$ luôn đồng biến trên TXĐ là:

A. Không tồn tại giá trị của m cần tìm. **B.** $-1\le m\le 2$

C. $-2\le m\le 1$ **D.** $0\le m\le 1$

Bài 26. Tìm m để hàm số $y=\dfrac{x+m}{x-m}$ luôn đồng biến trên từng khoảng xác định là:

A. $m<1$ **B.** $m\ge 0$ **C.** $m<0$ **D.** $m\ge 1$

Bài 27. Tìm m để hàm số: $y=\dfrac{mx+4}{x+m}$ luôn đồng biến trên từng khoảng xác định là:

A. $|m|>2$ **B.** $|m|\le 1$ **C.** $|m|\le 2$ **D.** $|m|>1$

Bài 28. Tìm m đểhàm số: $y=\dfrac{x^3}{3}+(m+1)x^2-(m+1)x+1$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ là:

A. $m\ge 2$ **B.** $m\ge -1$ **C.** $m\ge -2$ **D.** $m\ge -3$

Bài 29. Tìm m để hàm số: $y=x^3-3(2m+1)x^2+(12m+5)x+2$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là:

A. $m\le\dfrac{5}{12}$. **B.** $m>\dfrac{5}{12}$. **C.** $m\le\dfrac{3}{12}$. **D.** $m>\dfrac{3}{12}$.

Bài 30. Tìm m để hàm số: $y=\dfrac{mx+4}{x+m}$ $(m\ne\pm 2)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ là:

A. $m>2$ **B.** $m\ge 2$ **C.** $m\le 2$ **D.** Không có m thỏa mãn

Bài 31. Tìm m để hàm số: $y=\dfrac{x+m}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$ là:

A. $m\le -2$ **B.** $m\le -3$ **C.** $m\le -1$ **D.** $m\le -4$

Bài 32. Tìm m để hàm số: $y=f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+(m-1)x^2+(m+3)x-10$ đây đồng biến trên $(0;3)$ là:

A. $m\ge\dfrac{12}{7}$ **B.** $m<\dfrac{12}{7}$ **C.** $m\in R$ **D.** $m>\dfrac{17}{2}$

Bài 33. Hàm số: $y=x^3-3x^2+mx+1$ luôn đồng biến trên R khi:

A. $m>3$ **B.** $m<3$ **C.** $m\le 3$ **D.** $m\ge 3$

Bài 34. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y=x+m(\sin x+\cos x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

A. $m\in\left(-\infty;\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$ **B.** $\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\le m\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

C. $-3<m<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **D.** $m\in\left(-\infty;\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right]\cup\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$

Bài 35. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=(m^2-1)x^4-2mx^2$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. $m\le -1$ **B.** $m=-1$ hoặc $m>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

C. $m\le -1$ hoặc $m\ge\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $m\le -1$ hoặc $m>1$.

Câu 36. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=\dfrac{3^{-x}-3}{3^{-x}-m}$ nghịch biến trên $(-1;1)$

A. $m<\dfrac{1}{3}$ **B.** $\dfrac{1}{3}<m<3$ **C.** $m\le\dfrac{1}{3}$ **D.** $m\ge 3$

Bài 37. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$:

A. $m<1$ **B.** $m\le 1$ **C.** $m<2$ **D.** $m>1$

Bài 38. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\sqrt{x^2+4mx+4m^2+3}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$

A. $m\le -1$ **B.** $m>-1$ **C.** $m\le 2$ **D.** $m>2$

Bài 39. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số: $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x+3$ nghịch biến trên khoảng có độ dài lớn hơn 3

A. $m<0$ hoặc $m>6$ **B.** $m>6$ **C.** $m<0$ **D.** $m=9$

Bài 40. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-(m-1)x^2-(m-3)x+2017m$ đồng biến trên các khoảng $(-3;-1)$ và $(0;3)$ là đoạn $T=[a;b]$. Tính a^2+b^2.

A. $a^2+b^2=10.$ **B.** $a^2+b^2=13.$ **C.** $a^2+b^2=8.$ **D.** $a^2+b^2=5.$

Bài 41. Hàm số $y=\dfrac{x^2-4x}{x+m}$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ thì giá trị của m là:

A. $m\in\left(-\dfrac{1}{2};2\right]\setminus\{1\}$ **B.** $m\in(-1;2]\setminus\{1\}$ **C.** $m\in\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$ **D.** $m\in\left(-1;\dfrac{1}{2}\right]$

Bài 42. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=mx+(m+1)\sqrt{x-2}+1$ nghịch biến trên $D=[2;+\infty)$.

A. $m\ge 0$ **B.** $m\le -1$ **C.** $m<-1$ **D.** $-2\le m\le 1$

Bài 43. Tìm tập các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\ln(3x-1)-\dfrac{m}{x}+2$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$

A. $\left[-\dfrac{7}{3};+\infty\right)$ **B.** $\left[-\dfrac{1}{3};+\infty\right)$ **C.** $\left[-\dfrac{4}{3};+\infty\right)$ **D.** $\left[\dfrac{2}{9};+\infty\right)$

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 22. Chọn C.

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- Đạo hàm: $y' = \dfrac{-2-m}{(x-2)^2}$
- Yêu cầu bài toán ta có $-2-m<0 \Leftrightarrow m>-2$

Bài 23. Chọn B.

- TXĐ: D = $\mathbb{R}$.

$$y = \frac{x+m}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow y' = \frac{\sqrt{x^2+1} - \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}(x+m)}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2} = \frac{1-mx}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$$

- Hàm số đồng biến trong $(0; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0$ mọi $x \in (0; +\infty)$.

  $\Leftrightarrow -mx + 1 \geq 0$ mọi $x \in (0; +\infty)$. (1)

  ◆$m = 0$ (1) đúng

  ◆$m> 0$: $-mx + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1/m$. Vậy (1) không thỏa mãn.

  ◆$m< 0$: $-mx + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1/m$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow 1/m \leq 0$ ≤t/m.

  Giá trị cần tìm là: $m \leq 0$.

Bài 24. Chọn B.

- TXĐ: D = $\mathbb{R}$.
- Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx + m + 2$
- Để hàm số đã cho luôn đồng biến trên TXĐ thì:

$$y' \geq 0, x \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} 3>0 \\ \Delta'_{y'} = 9m^2 - 3m - 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-2}{3} \leq m \leq 1.$$

Bài 25. Chọn A.

- TXĐ: D = $\mathbb{R}$.
- Ta có: $y' = x^2 - mx - 2$
- Để hàm số đã cho luôn đồng biến trên TXĐ thì:

$$y' \geq 0, x \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} 1>0 \\ \Delta_{y'} = m^2 + 8 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Không tồn tại giá trị của m cần tìm.}$$

Bài 26. Chọn C.

- TXĐ: D = $\mathbb{R} \setminus \{m\}$.
- Ta có: $y' = \dfrac{-2m}{(x-m)^2}$

- Để hàm số đã cho luôn đồng biến trên từng khoảng xác định thì:

$$y'>0, x\in\mathbb{R}\Rightarrow\frac{-2m}{(x-m)^2}>0\Leftrightarrow m<0.$$

Bài 27. Chọn A.

- TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.
- Ta có: $y'=\dfrac{m^2-4}{(x+m)^2}$
- Để hàm số đã cho luôn đồng biến trên từng khoảng xác định thì:

$$y'>0, x\in\mathbb{R}\Rightarrow\frac{m^2-4}{(x+m)^2}>0\Leftrightarrow|m|>2.$$

Bài 28. Chọn C.

- TXĐ: $D=\mathbb{R}$.
- Ta có: $y'=x^2+2(m+1)x-(m+1)$
- Để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì:

$$y'\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)\Rightarrow x^2+2(m+1)x-(m+1)\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)$$

$$\Rightarrow m\ge\frac{-x^2-2x+1}{2x-1},\forall x\in(1;+\infty)\ (*)$$

- Xét hàm số $f(x)=\dfrac{-x^2-2x+1}{2x-1}$, trên $[1;+\infty)$, ta có: $f'(x)=\dfrac{2x(1-x)}{(2x-1)^2}\le 0, x\in[1;+\infty)$.
- Vậy hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $[1;+\infty)$. Do đó: $\max\limits_{[1;+\infty)}f(x)=f(1)=-2$.
- Từ (*) ta suy ra: $m\ge\max\limits_{[1;+\infty)}f(x)\Leftrightarrow m\ge -2$.

Bài 29. Chọn A.

- TXĐ: $D=\mathbb{R}$.
- Ta có: $y'=3x^2-6(2m+1)x+12m+5$
- Để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ thì:

$$y'\ge 0,\forall x\in(2;+\infty)\Rightarrow 3x^2-6(2m+1)x+12m+5\ge 0,\forall x\in(2;+\infty)$$

$$\Rightarrow m\le\frac{3x^2-6x+5}{12(x-1)},\forall x\in(2;+\infty)\qquad(*)$$

- Xét hàm số: $f(x)=\dfrac{3x^2-6x+5}{12(x-1)}$, trên $[2;+\infty)$, ta có: $f'(x)=\dfrac{3x(x-2)+5}{12(x-1)^2}>0,\ x\in[2;+\infty)$.

- Vậy hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[2;+\infty)$. Do đó: $\min\limits_{[2;+\infty)} f(x) = f(2) = \frac{5}{12}$.

- Từ (*) ta suy ra: $m \le \min\limits_{[2;+\infty)} f(x) \Leftrightarrow m \le \frac{5}{12}$.

Bài 30. Chọn A.

- TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

- Ta có: $y' = \frac{m^2-4}{(x+m)^2}$

- Để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng (1; +∞), thì:

$$\begin{cases} y' > 0 \\ -m \notin (1;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4>0 \\ -m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right. \\ m \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2.$$

Bài 31. Chọn C.

- TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

- Ta có: $y' = \frac{-2m}{(x-m)^2}$

- Để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng (–1; +∞), thì: $\begin{cases} y' > 0 \\ m \notin (-1;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m>0 \\ m \le -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \le -1.$

Bài 32. ChọnA.

$y' = -x^2 + 2(m-1)x + m + 3$

Nhắc lại xét dấu của tam thức bậc 2 ta có : $f(x) = ax^2 + bx + c$

Nếu $a > 0$ thì $f(x)$ dương khi $x_1 \le x \le x_2$. Ở đây ta muốn khoảng (0;3) thuộc tập nghiệm ta phải có $x_1 \le 0 \le 3 \le x_2$.

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}.f(0) \le 0 \\ -\frac{1}{3}.f(3) \le 0 \end{cases} \Rightarrow y'(0) \ge 0 \text{ và } y'(3) \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m+3 \ge 0 \\ -9+6m-6+m+3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge -3 \\ m \ge \frac{12}{7} \end{cases}$$

➢ **Cách khác.**

Ta có $y' = -x^2 + 2(m-1) + m + 3$ để hàm số đồng biến trên $(0;3)$ thì $y' \ge 0, \forall x \in (0;3)$

$\Leftrightarrow -x^2 + 2(m-1)x + m + 3 \ge 0, \forall x \in (0;3) \Leftrightarrow m \ge \frac{x^2+2x-3}{2x+1} = f(x), \forall x \in (0;3)$ (*)

Để (*) đúng thì $m \ge \max f(x)$ với $x \in (0;3)$

Xét hàm số $y = f(x) = \frac{x^2+2x-3}{2x+1}$ ta có $y' = \frac{2(x^2+x+4)}{(2x+1)^2} > 0$

Ta có $f(0)=-3; f(3)=\dfrac{12}{7}$ nên $\max f(x)=\dfrac{12}{7} \Rightarrow m \geq \dfrac{12}{7}$. **Chọn A**

Bài 33. Chọn D.

* Nhắc lại: Cho $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$

$f(x)\geq 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}; f(x)\leq 0, \forall x \begin{cases} a<0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

- TXĐ: $D=R$
- Đạo hàm: $y'=3x^2-6x+m$
- Hàm số y luôn đồng biến trên R $\Leftrightarrow y'\geq 0, \forall x\in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta'=9-3m\leq 0 \Leftrightarrow m\geq 3$

Bài 34. Chọn B.

- Ta có: $y=x+\sqrt{2}m\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$
- $y'=1+\sqrt{2}m\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$
- $\forall x\in \mathbb{R}: -1\leq \cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leq 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m\geq 0 \\ 1-\sqrt{2}m\leq y'\leq 1+\sqrt{2}m \end{cases} \\ \begin{cases} m<0 \\ 1-\sqrt{2}m\geq y'\geq 1+\sqrt{2}m \end{cases} \end{array}\right.$
- Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\geq 0$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ và chỉ bằng 0 tại

một số đếm được điểm trên $\mathbb{R}$. Tức là: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} m\geq 0 \\ 1-\sqrt{2}m\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m<0 \\ 1+\sqrt{2}m\geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\leq m\leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Bài 35. Chọn C.

- Ta có $y'=4\left(m^2-1\right)x^3-4mx$
- Với $m=-1 \Rightarrow y'=4x>0 \Leftrightarrow x>0$ nên hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$.
- Với $m=1 \Rightarrow y'=-4x>0 \Leftrightarrow x<0$ nên hàm số không đồng biến trên $(1;+\infty)$.
- Với $m\neq 1$ để hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ thì $\left[\left(m^2-1\right)x^2-m\right]x\geq 0, \forall x\in(1;+\infty)$
- Hay $\left(m^2-1\right)x^2\geq m \forall x\in(1;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-1>0 \\ m^2-1\geq m \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\geq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ m<-1 \end{array}\right.$
- Kết hợp ta có $\left[\begin{array}{l} m\geq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ m\leq -1 \end{array}\right.$

Bài 36. Chọn D.

Đặt $t=3^{-x}$ do $x\in(-1;1)\Rightarrow t\in\left(\frac{1}{3};3\right)$ khi đó $y=\frac{t-3}{t-m}$ ta có $y'=\frac{3-m}{(t-m)^2}$

Để hàm số nghịch biến thì $\begin{cases}3-m<0\\ m\notin\left(\frac{1}{3};3\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m>3\\ \left[\begin{array}{l}m\le\frac{1}{3}\\ m\ge 3\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow m\ge 3$. Chọn D.

Bài 37. Chọn B.

- TXĐ: $D=\mathbb{R}$
- Ta có: $y'=6x^2-6(2m+1)x+6m(m+1)$

+ **TH1:** Hàm số luôn đồng biên trên $\mathbb{R}\Rightarrow y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\Delta\le 0\Leftrightarrow(2m+1)^2-4m(m+1)\le 0\Leftrightarrow 1\le 0$ (loại).

+ **TH2:** Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1<x_2\le 2$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ x_1+x_2-4<0\\ x_1x_2-2(x_1+x_2)+4\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\in\mathbb{R}\\ m<\frac{3}{2}\\ m\in(-\infty;1]\cup[2;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-\infty;1]$$

Bài 38. Chọn A.

- Hàm số xác định $\Leftrightarrow 4m^2-(4m^2+3)\le 0\Leftrightarrow -3\le 0$ (Luôn đúng)
- Ta có $f'(x)=\frac{x+2m}{\sqrt{x^2+4mx+4m^2+3}}$
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$, khi đó $\begin{cases}y'\le 0\\ x\in(-\infty;2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x+2m}{\sqrt{x^2+4mx+4m^2+3}}\le 0\\ x\in(-\infty;2)\end{cases}$
- Suy ra $\begin{cases}x+2m\le 0\\ x\in(-\infty;2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le-\frac{x}{2}\\ x\in(-\infty;2)\end{cases}\Rightarrow m\le -1$

Bài 39. Chọn A.

- **Phương pháp**: Dùng bảng biến thiên (BBT) để xét sự đồng biến và nghịch biến của hàm số trên các khoảng
- **Cách giải:**

$y'=6x^2+6(m-1)x+6(m-2)x$

$\Delta'=9(m-1)^2-36(m-2)=9m^2-54m+81\ge 0$

Dấu bằng xảy ra khi $m=3$

Gọi x_1,x_2 là 2 nghiệm của phương trình $y'=0\ (x_1<x_2)$

Theo định líViet: $\begin{cases}x_1+x_2=1-m\\ x_1.x_2=m-2\end{cases}$

Ta có BBT.

t	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y		↗		↘		↗	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1,x_2)\Rightarrow$ pt $y'=0$ phải có 2 nghiệm phân biệt $\Rightarrow m\neq 3$

Gọi độ dài khoảng nghịch biến của hàm số là D

$D=|x_1-x_2|\Leftrightarrow (x_1-x_2)^2=(1-m)^2-4(m-2)=m^2-6m+9$

$D>3\Leftrightarrow D^2>9\Leftrightarrow m^2-6m+9>9\Leftrightarrow m^2-6m>0\Leftrightarrow m<0$ hoặc $m>6$ (thỏa mãn)

Bài 40. Chọn D.

- Ta có $y'=x^2-2(m-1)x-(m-3)$.
- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-3;-1)$ và $(0;3)$ thì $y'\geq 0$ với mọi $x\in(-3;-1)$ và $x\in(0;3)$. Hay $x^2-2(m-1)x-(m-3)\geq 0\Leftrightarrow x^2+2x+3\geq m(2x+1)\Leftrightarrow \dfrac{x^2+2x+3}{2x+1}\geq m$ với $x\in(0;3)$ và $\dfrac{x^2+2x+3}{2x+1}\leq m$ với $x\in(-3;-1)$.

Xét $f'(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{2x+1}=\dfrac{2(x-1)(x+2)}{(2x+1)^2}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right.$. Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ thì hàm số đồng biến trên khoảng (0;3) thì $m\leq 2$, hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;-1)$ thì $m\geq -1\Rightarrow a^2+b^2=5$.

Bài 41. Chọn D.

- $y=\dfrac{x^2-4x}{x+m}$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$ và $y'=\dfrac{x^2+2mx-4m}{(x+m)^2}$
- Để hàm số trên đồng biến trên $[1;+\infty)$ thì $\begin{cases}-m<1\\x^2+2mx-4m\geq 0,\forall x\in[1;+\infty)\end{cases}$

$2m(x-2)\geq -x^2,\forall x\in[1;+\infty)$ (1)

+ Xét $x=2$ luôn thỏa bất phương trình đã cho; sai.

+ Xét $x\neq 2$, khi đó $(1)\Leftrightarrow \begin{cases}2m\leq \dfrac{-x^2}{x-2},x\in[1;2)\\2m\geq \dfrac{-x^2}{x-2},x\in(2;+\infty)\end{cases}$

- Xét hàm số $f(x)=\dfrac{-x^2}{x-2}$ trên $[1;+\infty)\setminus\{2\}$ có $f'(x)=\dfrac{-x^2+4x}{(x-2)^2}$.

- Lập bảng biến thiên và dựa theo yêu cầu bài toán thì $\begin{cases} m>-1 \\ 2m\le 1 \\ 2m\ge -8 \end{cases} \Leftrightarrow -1<m\le\dfrac{1}{2}$

Bài 42. Chọn B.

- Nếu $m\ge 0$ thì ta có $y(2)<y(3)$ do $2m+1<3m+1+(m+1)$, trái với yêu cầu nghịch biến. Vậy loại các phương án A và D.
- Xét $m=-1$, ta có $y=-x+1$ nghịch biến trên $[2;+\infty)$ nên $m=-1$ thỏa yêu cầu, chọn B.

Bài 43. ChọnC.

$$y'=\frac{3}{3x-1}+\frac{m}{x^2}=\frac{3x^2+m(3x-1)}{x^2(3x-1)}$$

ycbt $\Leftrightarrow y'\ge 0;\ \forall x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)\Leftrightarrow m\ge\dfrac{3x^2}{1-3x};\forall x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)\Rightarrow m\ge \max\limits_{\left(\frac{1}{2};+\infty\right)}\left\{\dfrac{3x^2}{1-3x}\right\}$ (1)

- Xét hàm số $f(x)=\dfrac{3x^2}{1-3x}$ trên $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$, có $f'(x)=\dfrac{3x(3x-2)}{(3x-1)^2}=0\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}$

- Tính các giá trị $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{2};\ f\left(\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{4}{3};\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ suy ra $\max\limits_{\left(\frac{1}{2};+\infty\right)}f(x)=-\dfrac{4}{3}$ (2)

- Từ (1), (2) suy ra $m\ge-\dfrac{4}{3}\Rightarrow m\in\left[-\dfrac{4}{3};+\infty\right)$ là giá trị cần tìm.

CỰC TRỊ

Dạng toán này các em nhớ đến 2 quy tắc:

+ *Quy tắc 1: Dùng bảng biến thiên, nếu y' qua x_0 đổi dấu thì tại đó hàm số có cực trị.*

+ *Quy tắc 2: Dùng tính chất đạo hàm lần 2: $y''(x_0)<0$ thì hàm số đạt cực đại tại $x=x_0$ và $y''(x_0)>0$ thì hàmsố đạt cực tiểu tại $x=x_0$.*

☐ **<u>Bài tập áp dụng:</u>**

Bài 44: Tìm m để $y=x^3-3mx^2+4m^3$ có các điểm cực đại, cực tiểu ở về một phía đối với đường thẳng (d): $3x-2y+8=0$ là:

A. $m\in\left(\dfrac{4}{3};1\right)\setminus\{0\}$. B. $m\in\left(\dfrac{-4}{3};1\right)\setminus\{0\}$. C. $m\in\left(\dfrac{-4}{3};2\right)\setminus\{0\}$. D. $m\in\left(\dfrac{-2}{3};2\right)\setminus\{0\}$.

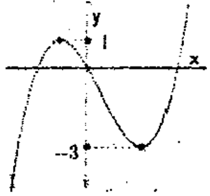
Bài 45: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-4x^2+(1-m^2)x+1$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía khác nhau đối với trục tung.

A. $-\frac{1}{3}<m<\frac{1}{3}$ B. $\left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-1 \end{array}\right.$ C. $-1<m<1$ D. $-1\le m\le 1$

Bài 46: Cho hàm số $y=|x|^3-mx+5$, m là tham số. Hỏi hàm số đã cho có thể có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị.

A. 3 B. 1 C. 2 D. 4

Bài 47: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=|f(x)+m|$ có ba điểm cực trị là:



A. $m\le -1$ hoặc $m\ge 3$

B. $m\le -3$ hoặc $m\ge 1$

C. $m=-1$ hoặc $m=3$

D. $1\le m\le 3$

Bài 48: Cho hàm số $y=x^3+3(x+m)(mx-1)+m^3+2$ thì $y_{CD}^3+y_{CT}^3$ bằng?

A. $20\sqrt{5}$ B. 64 C. 50 D. $30\sqrt{2}$

Bài 49: Cho số hàm số $y=x^3-3mx^2+3mx+m; m\in\mathbb{R}$. Tìm giá trị m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị và hai điểm đó cách đều đường thẳng $x=2$

A. $m=1$ B. $m=2$ C. $m\in\varnothing$ D. $m=0$

Bài 50: Cho (C_m) là đồ thị của hàm số $y=x^3+3mx+1$ với $m\in(-\infty;0)$ là tham số thực. Gọi d là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C_m). Tìm số các giá trị của m để đường thẳng d cắt đường tròn tâm I(-1;0), bán kính R = 3 tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất.

A. $-\frac{1}{2}$. B. 2. C. 3. D. 0.

Bài 51: Biết rằng đồ thị hàm số $y=(3a^2-1)x^3-(b^3+1)x^2+3c^2x+4d$ có hai điểm cực trị là $(1;-7),(2;-8)$. Hãy xác định tổng $M=a^2+b^2+c^2+d^2$

A. 18 B. 15 C. -18 D. 8

Bài 52: Cho hàm số $y=x^3-3x^2$ (C). Tìm m để đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị (C) tạo với đường thẳng $\Delta: x+my+3=0$ một góc α biết $\cos\alpha=\frac{4}{5}$.

A. $m=2\vee m=-\frac{2}{11}$ B. $m=-2\vee m=-\frac{2}{11}$ C. $m=2\vee m=\frac{2}{11}$ D. $m=-2\vee m=\frac{2}{11}$

Bài 53: Cho hàm số $y=-x^3+3mx+1$ (1). Tìm m để đồ thị của hàm số (1) có 2 điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O (với O là gốc tọa độ).

A. $m=\frac{1}{3}$ B. $m=-\frac{1}{3}$ C. $m=-\frac{1}{2}$ D. $m=\frac{1}{2}$

Bài 54: Cho hàm số $y=x^3-3x+2$. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị (C). Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho tam giác MAB cân tại M. (Biết m có tọa độ nguyên)

A. $M(0;2)$ **B.** $M(0;-2)$ **C.** $M(0;1)$ **D.** $M(0;-1)$

Bài 55: Cho hàm số $y=x^3-3x^2-mx+2$ có đồ thị (C_m). Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số (C_m) có hai điểm cực trị và đường thẳng đi qua hai điểm cực trị đó tạo với hai trục toạ độ một tam giác cân.

A. $m=\frac{3}{2}$ B. $m=-\frac{5}{2}$ C. $m=-\frac{3}{2}$ D. $m=\frac{5}{2}$

Câu 56: Tìm giá trị tham số $m\in\mathbb{R}$ thì đồ thị của hàm số $y=-x^4+4mx^2-4m$ có 3 cực trị là 3 đỉnh của 1 tam giác nhận điểm $H\left(0;\frac{31}{4}\right)$ làm trực tâm.

A. $m=1$ **B.** $m=2$ **C.** $m=3$ **D.** $m=4$

Bài 57: Cho hàm số $y=\frac{1}{4}x^4-(m+1)x^2+2m+1$ (C_m), với m là tham số thực.

Cho $I\left(0;-\frac{5}{2}\right)$. Tìm m để (C_m) có điểm cựa đại là A, hai điểm cực tiểu là B và C sao cho tứ giác ABIC là hình thoi.

A. $m=-\frac{1}{2}$ **B.** $m=1$ **C.** $m=\frac{1}{2}$ **D.** $m=-1$

Bài 58: Cho hàm số y = x^3-3mx^2+2 (1), với m là tham số thực. Tìm $m\in\mathbb{R}$ để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị và đường thẳng đi qua hai điểm cực trị tạo với trục Ox một góc φ mà $\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

A. $m=\pm4$ **B.** $m=\pm3$ **C.** $m=\pm2$ **D.** $m=\pm1$

Bài 59: Cho hàm số $y=\frac{x^2+mx}{1-x}$. Giá trị m để khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số trên bằng 10 là:

A. $m=1$ **B.** $m=2$ **C.** $m=3$ **D.** $m=4$

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 44: Chọn B.

- TXĐ: $\mathbb{R}$.
- Ta có: $y'=3x^2-6mx \Leftrightarrow y'=3x(x-2m) \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=2m\end{array}\right.$, để hàm số có cực đại, cực tiểu

$\Rightarrow 2m\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 0$.

- Gọi $A(0;4m^3)$ và $B(2m;0)$; đặt $f(x;y)=3x-2y+8 \Rightarrow$ Để hàm số đã cho có các điểm cực đại, cực tiểu ở về một phía đối với đường thẳng (d): $3x-2y+8=0$ thì:

$f\left(0;4m^3\right).f\left(2m;0\right)>0\Leftrightarrow\left(-8m^3+8\right)\left(6m+8\right)>0\Leftrightarrow\left(1-m^3\right)\left(3m+4\right)>0\Leftrightarrow\frac{-4}{3}<m<1.$

Kết luận: $m\in\left(\frac{-4}{3};1\right)\backslash\{0\}.$

Bài 45: Chọn B.

- Ta có: $y'=3x^2-8x+\left(1-m^2\right)$
- Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía khác nhau đối với trục tung

$\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac<0\Leftrightarrow 3\left(1-m^2\right)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>1\\m<-1\end{array}\right.$

Bài 46: Chọn B.

- Ta có: $y'=\begin{cases}3x^2-m \text{ nếu } x>0\\-3x^2-m \text{ nếu } x<0\end{cases}$
- Với $m=0$ thì y' đổi dấu đúng một lần qua điểm $x=0$, nên hàm số có 1 cực trị.

+ Nếu $m>0$ thì y' đổi dấu đúng một lần qua điểm $x=\sqrt{\frac{m}{3}}$, nên hàm số có 1 cực trị.

+ Nếu $m<0$ thì y' đổi dấu đúng một lần qua điểm $x=-\sqrt{\frac{-m}{3}}$, nên hàm số có 1 cực trị.

Tóm lại hàm số có đúng một cực trị với mọi giá trị của m.

Bài 47: Chọn A.

- Đồ thị hàm số $y=f(x)+m$ là đồ thị hàm số $y=f(x)$ tịnh tiến trên trục Oy m đơn vị.
- Để đồ thị hàm số $y=\left|f(x)+m\right|$ có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y=f(x)+m$ xảy ra hai trường hợp sau:

- Nằm phía trên trục hoành hoặc điểm cực tiểu thuộc trục Ox và cực đại dương.
- Nằm phía dưới trục hoành hoặc điểm cực tiểu thuộc trục Ox và cực tiểu dương.

- Khi đó $m\geq 3$ hoặc $m\leq -1$ là giá trị cần tìm.

Bài 48: Chọn B.

- Phương pháp: Bài toán đúng với các giá trị m thì cũng đúng với các giá trị đặc biệt. Cần tìm m sao cho có CĐ và CT thử vào là ra đáp án.
- Lời giải: $y=x^3+3mx^2-3\left(m^2-1\right)x+m^3-3m+2\Rightarrow y'=3x^2+6mx+3\left(m^2-1\right)$
- Cho $m=1$ thì sẽ có ngay 2 nghiệm nên: $m=1$ thì: $y'=3x^2+6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$
- Khi đó $y=0; y=4\Rightarrow y_{CD}^3+y_{CT}^3=64$

Bài 49: Chọn B.

- Ta có: $y'=3x^2-6mx+3m=0\Leftrightarrow x^2-2mx+m=0$
- Điều kiện để hàm số có 2 điểm cực trị là: $\Delta'=m^2-m>0$
- Khi đó gọi $A\left(x_1;y_1\right);B\left(x_2;y_2\right)$ là 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số.

- Theo định lí Viet, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1.x_2 = m \end{cases}$. Mặt khác, $d(A; x=2) = d(B;(x=2))$

$$\Leftrightarrow |x_1 - 2| = |x_2 - 2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ x_1 + x_2 = 4 \Rightarrow 2m = 4 \Leftrightarrow m = 2(t/m) \end{array}\right.$$

Bài 50: Chọn A.

- Ta có $y' = (x^3 + 3mx + 1)' = 3x^2 + 3m \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 3m = 0$. Suy ra với $m < 0$ thì đồ thị hàm số có hai điểm cực trị. Và đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $(d): 2mx - y + 1 = 0$.
- Đường thẳng d luôn đi qua điểm M(0;1). Ta có: $IM = \sqrt{2} < R$ nên M nằm trong đường tròn.
- Lại có $S_{IAB} = \frac{1}{2} d(I; AB).AB = d.IA(d = d(I; AB)) = d.\sqrt{R^2 - d^2} = d.\sqrt{9 - d^2} \left(0 \le d \le IM = \sqrt{2}\right)$
- Xét $f(d) = d\sqrt{9 - d^2}$ với $d \in \left[0; \sqrt{2}\right]$ ta được $\underset{[0;\sqrt{2}]}{\mathrm{Max}} f(d) = f\left(\sqrt{2}\right)$
- Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow IM = \sqrt{2} \Rightarrow d(I; d) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|-2m+1|}{\sqrt{4m^2+1}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow (2m-1)^2 = 2(4m^2+1)$

$$\Leftrightarrow 4m^2 + 4m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

Bài 51: Chọn A.

- Phương pháp:
+ Thiết lập hệ phương trình tìm các giá trị a, b, c, d
+ Điểm $A(x_0, y_0)$ là cực trị $\Leftrightarrow f'(x_0) = 0; f(x_0 = y_0)$
- Cách giải: Có $(1;-7), (2;8)$ thuộc đồ thị hàm số nên $\begin{cases} (3a^2-1) - (b^3+1) + 3c^2 + 4d = -7 \\ 8(3a^2-1) - 4(b^3+1) + 6c^2 + 4d = -7 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 - b^3 + 3c^2 + 4d = -5 (*) \\ 24a^2 - 4b^3 + 6c^2 + 4d = 4 \end{cases} \Rightarrow 21a^2 - 3b^3 + 3c^2 = 9 \ (1)$$

$y' = (9a^2 - 3)x^2 - (2b^3 + 2)x + 3c^2$

Các điểm $(1;-7), (2;-8)$ là cực trị của đồ thị hàm số nên $y'(1) = y'(2) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9a^2 - 2b^3 + 3c^2 = 5 & (2) \\ 36a^2 - 4b^3 + 3c^2 = 16 & (3) \end{cases}$$

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ phương trình $\begin{cases} 21a^2 - 3b^3 + 3c^2 = 9 \\ 9a^2 - 2b^3 + 3c^2 = 5 \\ 36a^2 - 4b^3 + 3c^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^3 = 8 \\ c^2 = 4 \end{cases}$

Thế vào (*) ta được $d = -3 \Rightarrow M = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 + 2^2 + 4 + (-3)^2 = 18$

Bài 52: Chọn A.

- Đường thẳng đi qua CĐ, CT là $\Delta_1: 2x + y = 0 \Rightarrow VTPT\ \vec{n_1}(2;1)$
- Đường thẳng đã cho $\Delta: x + my + 3 = 0$ có $VTPT\ \vec{n_2}(1;m)$
- Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \cos(\Delta;\Delta_1) = \left|\cos(\vec{n_1};\vec{n_2})\right| = \dfrac{|m+2|}{\sqrt{5}.\sqrt{m^2+1}} = \dfrac{4}{5}$

$$\Leftrightarrow 25(m^2 + 4m + 4) = 5.16.(m^2+1) \Leftrightarrow 11m^2 - 20m - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -\dfrac{2}{11} \end{array}\right.$$

Bài 53: Chọn D.

$y' = -3x^2 + 3m = -3(x^2 - m); y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - m = 0 (*)$

Đồ thị hàm số (1) có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ PT (*) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0 (**)$

Khi đó 2 điểm cực trị $A(-\sqrt{m}; 1 - 2m\sqrt{m}),\ B(\sqrt{m}; 1 + 2m\sqrt{m})$

ΔOAB vuông tại O $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow 4m^3 + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$ (TM (**))

Vậy $m = \dfrac{1}{2}$.

Bài 54: Chọn A.

- Ta có phương trình đường trung trực của AB là d: $x - 2y + 4 = 0$
- Hoành độ giao điểm của d và (C): $2x^3 - 7x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{7}{2}} \end{array}\right. \Rightarrow M_1(0;2) \text{ (loại)};\ M_2\left(-\sqrt{\dfrac{7}{2}}; -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{7}{2}} + 2\right); M_3\left(\sqrt{\dfrac{7}{2}}; \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{7}{2}} + 2\right)$$

Bài 55: Chọn C.

$y' = 3x^2 - 6x - m$. Hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = 9 + 3m > 0 \Leftrightarrow m > -3$

Ta có: $y = \dfrac{1}{3}(x-1).y' - 2\left(\dfrac{m}{3} + 2\right)x + 2 - \dfrac{m}{3} \Rightarrow$ Đường thẳng (Δ) đi qua hai điểm cực trị

của đồ thị có phương trình $(\Delta): y = -2\left(\dfrac{m}{3} + 1\right)x + 2 - \dfrac{m}{3}$

$$(\Delta) \cap Ox = \left\{A\left(\dfrac{m-6}{2(m+3)}; 0\right)\right\}, (\Delta) \cap Oy = \left\{B\left(0; \dfrac{6-m}{3}\right)\right\}$$

Tam giác OAB cân $\Leftrightarrow OA = OB \Leftrightarrow \left|\dfrac{m-6}{2(m+3)}\right| = \left|\dfrac{6-m}{2}\right| \Leftrightarrow m = 6; m = -\dfrac{9}{2}; m = -\dfrac{3}{2}$

Đối chiếu với điều kiện và tồn tại tam giác $OAB \Rightarrow m = -\frac{3}{2}$

Bài 56. Chọn B.

- Nếu $m \le 0 \Rightarrow y' = 0$ có 1 nghiệm, nên hàm số có 1 cực.
- Nếu $m > 0 \Rightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt và đổi dấu qua mỗi nghiệm đó, nên hàm số có 3 cực trị. Giả sử: $A(0;-4m), B\left(-\sqrt{2m};4m^2-4m\right), C\left(\sqrt{2m};4m^2-4m\right)$.
- Vì tam giác ABC cân tại A, B và C đối xứng nhau qua Oy.
- H là trực tâm tâm giác ABC khi $\begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0$ (*)
- Ta có: $\overrightarrow{BH} = \left(\sqrt{2m};-4m^2+4m+\frac{31}{4}\right), \overrightarrow{AC} = \left(\sqrt{2m};4m^2\right)$
- Khi đó (*) $\Leftrightarrow 2m + 4m^2\left(-4m^2+4m+\frac{31}{4}\right) = 0$ *hay* $8m^3 - 8m^2 - \frac{31}{2}m - 1 = 0$, phương trình có nghiệm m = 2 thoả mãn m > 0.

Bài 57. Chọn C.

- Ta có: $y' = x^3 - 2(m+1)x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- (C_m) có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu

  $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2(m+1) > 0 \Leftrightarrow m > -1$ (1)
- Khi đó 3 nghiệm phân biệt của y′ = 0 là x = 0, $x = -\sqrt{2(m+1)}$ và $x = \sqrt{2(m+1)}$. Điểm cực đại của (C_m) là A (0; 2m + 1), hai điểm cực tiểu là $B\left(-\sqrt{2(m+1)};-m^2\right)$ và $C\left(\sqrt{2(m+1)};-m^2\right)$.
- Nhận thấy rằng AI vuông góc với BC tại $H(0;-m^2)$ và H là trung điểm của BC. Do đó tứ giác ABIC là hình thoi khi và chỉ khi H là trung điểm của AI. Hay là:

$$\begin{cases} 2x_H = x_A + x_I \\ 2y_H = y_A + y_I \end{cases} \Leftrightarrow -2m^2 = 2m + 1 - \frac{5}{2} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \text{ hoặc } m = -\frac{3}{2}.$$

- Đối chiếu với điều kiện (1) ta được giá trị của m là $m = \frac{1}{2}$.

Bài 58. Chọn D.

- Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx, y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right.$
- Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \ne 0$.
- Gọi A (0; 2), $B(2m;-4m^3+2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số (1). Khi đó đường thẳng qua hai điểm cực trị có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (2m;-4m^3)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2m^2;1)$.
- Trục Ox có vectơ pháp tuyến là $\vec{j} = (0;1)$.

- Đường thẳng qua hai điểm cực trị với trục Ox góc φ. Ta có:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left|\cos(\vec{n},\vec{j})\right| = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{\left|\vec{n}.\vec{j}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{j}\right|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{4m^4+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\Leftrightarrow 4m^4+1=5 \Leftrightarrow m=\pm 1$ (thỏa mãn điều kiện $m \neq 0$)

Vậy m = 1 hoặc m = –1.

Bài 59: Chọn D.

- Gọi $A(x_1;-2x_1-m), B(x_2;-2x_2-m)$ là điểm cực đại và cực tiểu.

$$AB^2 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 = 5(x_2-x_1)^2 = 5\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right] = 5(4+4m)$$

(với $x_1+x_2=2,\ x_1x_2=-m$)

$AB=10 \Leftrightarrow AB^2=100 \Leftrightarrow m=4\ (m>-1)$

TIỆM CẬN HÀM SỐ

Tìm tiệm cận đứng ta tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to a} y = \infty$ thì $x=a$ là tiệm cận đứng

Tìm tiệm cận ngang ta làm tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty} y = b$ khi đó $y=b$ là tiệm cận ngang.

Tìm tiệm cận xiên ta làm tìm làm như sau:

- ***Nếu là hàm phân thức bậc tử cao hơn bậc mẫu:***

  $y=\frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y=ax+b+\frac{h(x)}{g(x)}$ *Chia biểu thức tử cho mẫu số, nếu $h(x)$ là hằng số hoặc $h(x)$ có bậc $<g(x)$ thì $y=ax+b$ là một tiệm cận xiên.*

- ***Nếu là hàm dạng vô tỉ:***

  Ta có: $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{f(x)}}{x}$ $\qquad b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{f(x)}-a.x\right)$

Khi đưa x vào trong căn chẵn ta phải chú ý đến giá trị x, dương hay âm để tránh sai lầm.

❑ Bài tập áp dụng

Bài 1: Tập hợp các giá trị của m để đồ thị của hàm số $y=\frac{2x-1}{\left(mx^2-2x+1\right)\left(4x^2+4m+1\right)}$ có đúng một đường tiệm cận là

A. $(-\infty;-1)\cup\{0\}\cup(1;+\infty)$ **B.** $\{0\}$

C. $\varnothing$ **D.** $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

Bài 2: Tìm tất cả các giá trị của m sao cho đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{mx^2+3mx+1}}{x+2}$ có ba tiệm cận.

A. $0<m<\frac{1}{2}$ B. $0<m\le\frac{1}{2}$ C. $m>0$ D. $m\ge\frac{1}{2}$

Bài 3: Cho hàm số $y=\frac{x+2}{x+1}(C)$. Gọi d là khoảng cách từ giao điểm hai tiệm cận của đồ thị (C) đến một tiếp tuyến của (C). Giá trị lớn nhất d có thể đạt được là:

A. $3\sqrt{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

Bài 4: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=\frac{x+m}{\sqrt{mx^2+1}}$ có đúng hai đường tiệm cận ngang?

A. $m<0$ B. $m\in(-\infty;+\infty)$ C. $m>0$ D. $m<0$

Bài 5: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y=\frac{x^2+x-2}{x^2-2x+m}$ có hai tiệm cận đứng.

A. $m\ne1$ và $m\ne-8$ B. $m>-1$ và $m\ne8$ C. $m=1$ và $m=-8$ D. $m<1$ và $m\ne-8$.

Bài 6: Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x-2}(C)$. Gọi d là khoảng cách từ giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị (C) đến một tiếp tuyến của (C). Giá trị lớn nhất mà d có thể đạt được là

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{6}$

Bài 7: Đồ thị hàm số $f(x)=\frac{3x^2-1-\sqrt{x^4+x+2}}{x^2-3x+2}$ có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là

A. Tiệm cận đứng $x=2$, $x=1$; tiệm cận ngang $y=2$.

B. Tiệm cận đứng $x=2$; tiệm cận ngang $y=2$.

C. Tiệm cận đứng $x=2$, $x=1$; tiệm cận ngang $y=2$, $y=3$.

D. Tiệm cận đứng $x=2$; tiệm cận ngang $y=2$, $y=3$.

Bài 8: Cho hàm số $y=\frac{x^2+x-2}{x-2}$, điểm trên đồ thị cách đều hai đường tiệm cận có hoành độ bằng?

A. $2\pm\sqrt[4]{7}$ B. $2\pm\sqrt[4]{6}$ C. $2\pm\sqrt[4]{5}$ D. $2\pm\sqrt[4]{8}$

Bài 9: Cho hàm số $y=\sqrt{mx^2+2x}-x$. Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang.

A. $m=1$. B. $m\in\{2;-2\}$. C. $m\in\{-1;1\}$. D. $m>0$.

Bài 10: Biết đồ thị $y=\dfrac{(a-2b)x^2+bx+1}{x^2+x-b}$ có đường tiệm cận đứng là $x=1$ và đường tiệm cận ngang là $y=0$. Tính $a+2b$

A. 6 **B.** 7 **C.** 8 **D.** 10

Bài 11: Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị $y=\dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x}$ là:

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 1

Bài 12: Cho hàm số $y=\dfrac{a}{x}(a\neq 0)$ có đồ thị (H). Gọi *d* là khoảng cách từ giao điểm hai tiệm cận của đồ thị *(H)* đến một tiếp tuyến của *(H)*. Giá trị lớn nhất của d là:

A. $a\sqrt{2}$ **B.** $|a|\sqrt{2}$ **C.** $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ **D.** $\dfrac{|a|}{\sqrt{2}}$

Bài 13: Giả sử đường thẳng $d: x=a, a>0$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại một điểm duy nhất, biết khoảng cách từ điểm đó đến tiệm cận đứng của đồ thị hàm số bằng 1; kí hiệu $(x_0;y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0.

A. $y_0=-1$ **B.** $y_0=5$ **C.** $y_0=1$ **D.** $y_0=2$

Bài 14. Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{mx^2+x+1}}{x-2}$. Xét các phát biểu:

(1) Nếu $m\neq 0$ thì đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận là tiệm cận ngang.

(2) Nếu $m=0$ thì đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

(3) Với mọi giá trị của m thì đồ thị hàm số có ít nhất một đường tiệm cận.

(4) Nếu $m=0$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận nào.

Số phát biểu đúng là:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Bài 15. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2mx+1}}$. Xét các phát biểu sau:

(1) Với $m=1$ thì đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

(2) Với $m\neq 1$ thì đồ thị hàm số luôn có hai tiệm cận là tiệm cận ngang.

(3) Với $m=1$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận.

(4) Với $-1<m<1$ thì đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

Số phát biểu đúng là:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 1: Chọn B.

Ta có:

- Với $m=0$ thì hàm số đã cho có dạng $y=\dfrac{2x-1}{(-2x+1)(4x^2+1)}=\dfrac{-1}{4x^2+1}$. Vậy đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $y=0$ (thỏa mãn).Loại được C và D.
- Với $m\neq 0$ thì xét phương trình

$$\left(mx^2-2x+1\right)\left(4x^2+4mx1\right)=0(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}mx^2-2x+1=0\\4x^2+4mx+1=0\end{array}\right.$$

- Để đồ thị hàm số đã cho có duy nhất một tiệm cận thì phương trình (*) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1-m<0\\(2m)^2-4<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>1\\-1<m<1\end{cases}\Rightarrow m\in\varnothing$$

- Kết luận: Chỉ có $m=0$ thỏa mãn.

Bài 2: Chọn B.

Điều kiện cần: Nếu đồ thị hàm số có 3 tiệm cận thì hàm số phải xác định trên một khoảng vô hạn chứa -2

* TH1: $m=0$,loại do đồ thị hàm số này chỉ có 2 tiệm cận gồm: $x=-2$ và $y=0$

* TH2: Đồ thị hàm số có 3 tiệm cận. Nếu: $mx^2+3mx+1=0$ vô nghiệm, hoặc có hai nghiệm $x_1;x_2$ $(x_1+2)(x_2+2)\geq 0$. Tức là:

$$\begin{cases}m>0\\\left[\begin{array}{l}\Delta<0\\\begin{cases}\Delta\geq 0\\(x_1+2)(x_2+2)\geq 0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\\left[\begin{array}{l}9m^2-4m<0\\\begin{cases}9m^2-4m\geq 0\\x_1x_2+2(x_1+x_2)+4\geq 0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow 0<m\leq\frac{1}{2}$$

Bài 3: Chọn C.

- Giao của hai đường tiệm cận là $I(-1;1)$
- Giả sử $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm, phương trình tiếp tuyến tại M là:

$$y=\frac{-1}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\frac{x_0+2}{x_0+1}\ (\Delta)$$

- Khoảng cách từ I đến Δ là $d=2\left|\dfrac{(x_0+1)}{\sqrt{(x_0+1)^4+1}}\right|\leq 2\left|\dfrac{(x_0+1)}{\sqrt{2(x_0+1)^2}}\right|=\sqrt{2}$
- Dấu bằng xảy ra khi $x_0=0$ hoặc $x_0=-2$
- Vậy giá trị lớn nhất của d là $\sqrt{2}$.

Bài 4:Chọn C.

* Với $m<0$ thì $D=\left(-\frac{1}{\sqrt{-m}};\frac{1}{\sqrt{-m}}\right)$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang. (loại)

* Với $m=0$ thì $y=x$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang.

* Với $m>0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+m}{\sqrt{mx^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{m}{x}}{\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{m}}$

và $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+m}{\sqrt{mx^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1-\frac{m}{x}}{\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}}=-\frac{1}{\sqrt{m}}$

Suy ra đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang.Vậy $m>0$.

Bài 5: Chọn D.

Hàm số đã cho $y=\frac{(x-1)(x+2)}{x^2-2x+m}$

Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng khi và chỉ khi $x^2-2x+m=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1 và -2

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=1-m>0\\1-2+m\neq0\\4+4+m\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<1\\m\neq1\\m\neq-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<1\\m\neq-8\end{cases}$$

Bài 6: ChọnD.

Giao của hai đường tiệm cận là $I(2;1)$.

Giả sử $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm, phương trình tiếp tuyến tại M là:

$$y=\frac{-3}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+\frac{x_0+1}{x_0-2}\ (\Delta)$$

Khoảng cách từ I đến Δ là $d=6\left|\frac{(x_0-2)}{\sqrt{(x_0-2)^4+9}}\right|\le6\left|\frac{(x_0-2)}{\sqrt{6(x_0-2)^2}}\right|=\sqrt{6}$

Dấu bằng xảy ra khi $x_0=2\pm\sqrt{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của d là $\sqrt{6}$.

Câu 7: ChọnB

Ta có $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-1-\sqrt{x^4+x+2}}{x^2-3x+2}=2\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=2$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-1-\sqrt{x^4+x+2}}{x^2-3x+2} = \frac{\left(8x^3+8x^2+8x+1\right)}{(x-2)\left(3x^2-1-\sqrt{x^4+x+2}\right)}$$

Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 2$.

Bài 8: Chọn D.

- **Phương pháp:** Ta có đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu: $\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} y = \left(f(x)-ax-b\right)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} y = \left(f(x)-ax-b\right)=0\end{array}\right.$

- **Lời giải:** Ta có TCĐ của hàm đã cho là $x = 2$ và $\frac{x^2+x-2}{x-2} = x+3+\frac{4}{x-2}$ nên sẽ có TCX là $y = x+3$

- Gọi điểm đó là M thì ta có:

$$d(M, y=x+3) = d(M, x=2) \to \frac{\left|x_0-\frac{x_0^2+x_0-2}{x_0-2}+3\right|}{\sqrt{2}} = \frac{|x_0-2|}{1}$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{-3x_0+2+3x_0-6}{x_0-2}\right| = \sqrt{2}|x_0-2| \Leftrightarrow (x_0-2)^2 = 2\sqrt{2} \to x_0 = \pm\sqrt[4]{8}+2$$

Bài 9: Chọn A.

- Ta có: $y = \frac{mx^2-x^2+2x}{\sqrt{mx^2+2x}+x} = \frac{(m-1)x^2+2x}{\sqrt{mx^2+2x}+x}$

- Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi và chỉ khi bậc của tử bé hơn hoặc bằng bậc của mẫu và tồn tại $\lim\limits_{x\to\infty} y$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>0\\ m-1=0\end{cases} \Leftrightarrow m=1.$$

Bài 10: Chọn C.

- Ta thấy:
- Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng:
- $x=1 \Rightarrow$ pt: $x^2+x-b=0$ có nghiệm $x=1$ và $(a-2b)x^2+bx+1=0$ không có nghiệm $x=1 \Rightarrow \begin{cases}1+1-b=0\\ a-2b+b+1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=2\\ a\neq 1\end{cases}$. Hàm số có dạng $y=\frac{(a-4)x^2+2x+1}{x^2+x-2}$.
- Hàm số có tiệm cận ngang $y=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} y = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{(a-4)x^2+2x+1}{x^2+x-2}=0$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{(a-4)+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = 0 \Leftrightarrow a-4=0 \Rightarrow a+2b=8$$

Bài 11: Chọn A

- Tập xác định của hàm số là $D=\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\backslash\{1\}$. Khi đó

- $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x}=3\\ \lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x}=3\end{cases}\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=3$

- Số tiệm cận đứng là số nghiệm PT $x^2-x=0\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\backslash\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow x=1\Rightarrow$ Đồ thị hàm

số có tiệm cận đứng $x=1$.

Bài 12: Chọn B.

- Đồ thị $(H): y=\frac{9}{x},(a\neq 0)$ có 2 tiệm cận $x=0$ và $y=0$
- Giao điểm 2 tiệm cận là $O(0;0)$
- Gọi (Δ) là tiếp tuyến của (H) tại $M\left(x_M;\frac{a}{x_M}\right)\in H$
- Ta có: $f'(x)=\frac{-a}{x^2}$

+ $(\Delta): y=\frac{-a}{x_M^2}(x-x_M)+\frac{a}{x_M}$

+ $(\Delta): ax-x_M^2y-2ax_M=0$

Suy ra: $d\left[M;(\Delta)\right]=\dfrac{|2ax_M|}{\sqrt{a^2+x_M^2}}$

Ta có: $\sqrt{a^2+x_M^4}\geq\sqrt{2|a|}.|x_M|$

Do đó: $d\left[M;(\Delta)\right]\leq|a|\sqrt{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $a^2=x_M^4\Leftrightarrow x_M=\sqrt{a}$ hoặc $x_M=-\sqrt{a}$.

Bài 13: Chọn B.

Khoảng cách từ điểm đó đến tiệm cận đứng của đồ thị hàm số bằng $|a-1|=1$; $|a-1|=1$

$\Rightarrow a=2\vee a=0$ (loại) nên $y_0=5$

Bài 14: Chọn B.

- Ta có: $\lim\limits_{x\to 2^+} y=+\infty\Rightarrow x=2$ là TCĐ của đồ thị hàm số với $\forall m\in\mathbb{R}$. Vậy **(3)** đúng, **(4)** sai.

- Với $m \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{mx^2+x+1}}{x-2} = -\sqrt{m} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{mx^2+x+1}}{x-2} = \sqrt{m} \end{cases}$, suy ra $y = \pm\sqrt{m}$ là TCN nên (1) sai.

- Với $m = 0 \Rightarrow y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$ là TCN nên (2) đúng.

Bài 15: Chọn C.

- Với $m = 1 \Rightarrow y = \dfrac{x-1}{|x-1|} \Rightarrow$ Đồ thị hàm số không có tiệm cận, vậy (1) sai, (3) đúng.

- Với $m \neq 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} y = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -1$ nên (2) đúng.

- Với $-1 < m < 1$ thì $x^2 - 2mx + 1 = 0$ vô nghiệm, vậy (4) đúng.

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT

Khi giải một bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một hàm số các em cần tiến hành các bước sau:

1. *Tìm điều kiện của hàm số (nếu bài toán cho căn thức, phân số).*
2. *Tính đạo hàm, tìm nghiệm của y' = 0.*
3. *Vẽ bảng biến thiên, nhớ gạch bỏ những phần không nằm trong vùng bài toán yêu cầu.*
4. *So sánh các giá trị của điểm cực trị với các giá trị biên của hàm số rồi kết luận.*

❑ Bài tập áp dụng

Bài 1: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn: $x^2\left(2y + 2y\sqrt{4y^2+1}\right) = x + \sqrt{x^2+1}$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T = x^3 - 16x^2y + 4$

A. $\dfrac{36-32\sqrt{6}}{9}$ B. $\dfrac{12-2\sqrt{2}}{3}$ C. $\dfrac{30-\sqrt{2}}{3}$ D. $\dfrac{3-6\sqrt{3}}{7}$

Bài 2: Cho các số thực x, y thỏa mãn $32x^5 - 5\sqrt{y-2} = y(y-4)\sqrt{y-2} - 2x$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 4x^2 + \dfrac{2}{\sqrt{y-2}}$

A. 4 B. 3 C. 1 D. 10

Bài 3: Cho x, y là các số thực thỏa mãn: $x^2 + \dfrac{x}{x+1} = (y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = y - \dfrac{1}{2}x$

A. $\frac{2\sqrt{2}-5}{2}$ B. $\frac{2\sqrt{2}+5}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}-5}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}+5}{2}$

Bài 4: Cho $x,y\in[1;2]$ thỏa mãn: $2x^3-4x^2+3x-1=2x^3(2-y)\sqrt{3-2y}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x+y$

A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{5}{2}$

Bài 5: Cho $x>0,y<0$ thỏa mãn: $9\sqrt{1+x}+xy\sqrt{9+y^2}=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=-x^2y^2-3y$

A. 4 B. 1 C. 12 D. 5

Bài 6: Cho x, y là các số thực thỏa mãn: $8\sqrt{2x-1}(2x-\sqrt{2x-1})=y(y^2-2y+4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x^2y-y+1$

A. $\frac{97+26\sqrt{13}}{9}$ B. $\frac{-97-26\sqrt{13}}{9}$ C. $\frac{97+26\sqrt{13}}{27}$ D. $\frac{97-26\sqrt{13}}{27}$

Bài 7: Giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y=\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{64-x}$ là:

A. $\sqrt[6]{3}+\sqrt[6]{61}$ B. $1+\sqrt[6]{65}$ C. 2 D. $2\sqrt[6]{32}$

Bài 8: Với $ab>0$ thỏa mãn $ab+a+b=1$ thì giá trị nhỏ nhất của $P=a^4+b^4$ bằng?

A. $\left(\sqrt{2}+1\right)^4$ B. $2\left(\sqrt{2}-1\right)^4$ C. $\left(\sqrt{2}-1\right)^4$ D. $2\left(\sqrt{2}+1\right)^4$

Bài 9: Cho các số thực $a,b,c\in\left[\frac{1}{2};1\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}$$

A. $\text{MaxP}=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$ B. $\text{MaxP}=2$ C. $\text{MaxP}=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$ D. $\text{MaxP}=0$

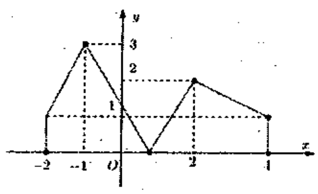
Bài 10: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)=x^3-3x^2-3x+4$. Gọi m là số nghiệm thực của phương trình $\sqrt{f\left(f(x-2)-2\right)}=3-f(x)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. m = 7 B. m = 4 C. m = 6 D. m =9

Bài 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-2;4]$ như hình vẽ bên. Tính $\max\limits_{[-1;4]}|f(x)|$.

A. 2. B. $|f(0)|$.

C. 3. D. 1.



Hình a

Bài 12: Cho hàm số $f(x)=\frac{x+m}{\sqrt{x^2+1}}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x=1$.

A. $m=2$ B. $m=1$ C. Không có giá trị m D. $m=-3$

Bài 13: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\ln x+\ln y\geq \ln\left(x^2+y\right)$. Tính giá trị nhỏ nhất của $P=x+y$

A. $P=6$ B. $P=3+2\sqrt{2}$ C. $P=2+3\sqrt{2}$ D. $P=\sqrt{17}+\sqrt{3}$

Bài 14: Cho các số thực x, y thỏa mãn $x+y=2\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}\right)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(x^2+y^2\right)+15xy$ là:

A. $\text{MinP}=-83$ B. $\text{MinP}=-63$ C. $\text{MinP}=-80$ D. $\text{MinP}=-91$

Bài 15: Cho hàm số f(x) xác định trên đoạn $[-1;2]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $f^2(x).f'(x)=1+2x+3x^2$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số f(x) trên đoạn $[-1;2]$ là:

A. $\underset{x\in[-1;2]}{\text{Min}}f(x)=\sqrt[3]{2},\ \underset{x\in[-1;2]}{\max}f(x)=\sqrt[3]{40}$ B. $\underset{x\in[-1;2]}{\text{Min}}f(x)=\sqrt[3]{-2},\ \underset{x\in[-1;2]}{\max}f(x)=\sqrt[3]{40}$

C. $\underset{x\in[-1;2]}{\text{Min}}f(x)=\sqrt[3]{-2},\ \underset{x\in[-1;2]}{\max}f(x)=\sqrt[3]{43}$ D. $\underset{x\in[-1;2]}{\text{Min}}f(x)=\sqrt[3]{2},\ \underset{x\in[-1;2]}{\max}f(x)=\sqrt[3]{43}$

Bài 16: Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2+2xy+3y^2=4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=(x-y)^2$ là:

A. $\text{Max P}=8$ B. $\text{Max P}=12$ C. $\text{Max P}=16$ D. $\text{Max P}=4$

Bài 17: Cho hai số thực dương x, y thay đổi thỏa mãn hệ thức $3+\ln\dfrac{x+y+1}{3xy}=9xy-3x-3y$.

Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $P=xy$.

A. $m=\dfrac{1}{3}$ B. $m=1$ C. $m=\dfrac{1}{2}$ D. $m=0$

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 1: Chọn A.

- Từ phương trình ta có $2y+2y\sqrt{4y^2+1}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}$ (1).Xét hàm số $f(t)=t+t\sqrt{t^2+1}$

có $f'(t)=1+\sqrt{t^2+1}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}>0$ nên hàm số đồng biến.

Vậy $(1)\Leftrightarrow f(2y)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)\Leftrightarrow 2y=\dfrac{1}{x}$.

- Xét hàm số $f(t)=t+t\sqrt{t^2+1}$ có $f'(t)=1+\sqrt{t^2+1}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}>0$ nên hàm số đồng biến.

Vậy $(1)\Leftrightarrow f(2y)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)\Leftrightarrow 2y=\dfrac{1}{x}$.

$$T = x^3 - 8x + 4 = f(x) \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \min f(x) = \frac{36 - 32\sqrt{6}}{9}$$

Bài 2: Chọn B.

- Đặt điều kiện $y \geq 2$

+ $(1) \Leftrightarrow (2x)^5 + 2x = (y^2 - 4y)\sqrt{y-2} + 5\sqrt{y-2} \Leftrightarrow (2x)^5 + 2x = \left(\sqrt{y-2}\right)^5 + \sqrt{y-2}$ (3)

Xét hàm số $f(t) = t^5 + t, f'(t) = 5t^4 + 1 > 0, \forall x \in R$, suy ra hàm số f(t) liên tục trên R.

Từ (3) ta có: $f(2x) = f\left(\sqrt{y-2}\right) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{y-2}$. Thay $2x = \sqrt{y-2}\,(x > 0)$ vào được:

$$T = 4x^2 + \frac{2}{2x} = 4x^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x} \geq 3\sqrt[3]{4x^2.\frac{1}{2x}.\frac{1}{2x}} = 3$$

Bài 3: Chọn A.

- Điều kiện: $\begin{cases} x > -1 \\ y \geq -1 \end{cases}$

$$f(t) = t^3 + t \; (1) \Leftrightarrow \frac{x^3 + x^2 + x}{x+1} = (y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)} \Leftrightarrow \frac{x^3 + x(x+1)}{(x+1)\sqrt{x+1}} = (y+2)\sqrt{y+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)^3 + \frac{x}{\sqrt{x+1}} = \left(\sqrt{y+1}\right)^3 + \sqrt{y+1}$$

- Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ trên R có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra f(t) đồng biến trên R.

Nên $f\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right) = f\left(\sqrt{y+1}\right) \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{y+1} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^2 - x - 1}{x+1} \\ x \geq 0 \end{cases}$. Thay vào (2) ta được:

$$T = \frac{x^2 - x - 1}{x+1} - \frac{1}{2}x = f(x) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \min f(x) = \frac{2\sqrt{2} - 5}{2}$$

Bài 4: Chọn D.

Phương trình: $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 2x^3(2-y)\sqrt{3-2y}$ (1)

- Điều kiện: $\begin{cases} 0 < y \leq \dfrac{3}{2} \\ x > 0 \end{cases}$

- Ta thấy x = 0 không phải là nghiệm của PT, chia cả hai vế của (1) cho x^3 ta được

$$(1) \Leftrightarrow 2 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} = 2(2-y)\sqrt{3-2y}$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 + \left(1 - \frac{1}{x}\right) = (3-2y)\sqrt{3-2y} + \sqrt{3-2y} \; (*)$$

- Xét hàm $f(t) = t^3 + t$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$(*)\Leftrightarrow 1-\frac{1}{x}=\sqrt{3-2y}\Rightarrow\begin{cases}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2=3-2y\\ 1-\frac{1}{x}\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\dfrac{3-\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{2}\\ x\in[1;2]\end{cases}$$

$$\Rightarrow T=x+\frac{3-\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{2},x\in[1;2]\Rightarrow \min f(x)=f(1)=\frac{5}{2}$$

Bài 5: Chọn B.

$$9\sqrt{1+x}+xy\sqrt{9+y^2}=0\Leftrightarrow\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)\sqrt{9+\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^2}=(-y)\sqrt{9+(-y)^2}\quad(3)$$

Xét hàm số $f(t)=t\sqrt{9+t^2};f'(t)=\dfrac{9+2t^2}{\sqrt{9+t^2}}>0$

$$(3)\Leftrightarrow f\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)=f(-y)\Leftrightarrow\frac{3}{\sqrt{x}}=-y\Leftrightarrow x=\frac{9}{y^2}$$

$$\Rightarrow T=-\frac{81}{y^3}-3y\Rightarrow \min f(y)=f(-3)=12$$

Bài 6: Chọn D.

- Điều kiện: $\begin{cases}x\ge\frac{1}{2}\\(y+2)(y+2x)\ge 0\end{cases}$
- Từ pt$\Rightarrow$ Để phương trình có nghiệm thì $y\ge 0$
- Pt (1)$\Leftrightarrow\left(2\sqrt{2x-1}\right)^3-2\left(2\sqrt{2x-1}\right)^2+4\left(2\sqrt{2x-1}\right)=y^3-2y^2+4y$ (*)
- Xét hàm số $f(t)=t^3-2t^2+4t$ $(t\ge 0)$ có $f'(t)=3t^2-4t+4=2t^2+(t-2)^2>0\ \forall t\ge 0$ nên f(t) luôn đồng biến
- Từ pt (*)$\Rightarrow f\left(2\sqrt{2x-1}\right)=f(y)\Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1}=y\Rightarrow x=\dfrac{y+4}{8}$

$$\Rightarrow T=\left(\frac{y+4}{8}\right)^2.y-y+1\Rightarrow \min f(y)=f\left(\frac{4\sqrt{13}-8}{3}\right)=\frac{97-26\sqrt{13}}{27}$$

Bài 7: Chọn C.

- Ta sẽ sử dụng bất đẳng thức phụ sau: $(a+b)^6\le\dfrac{a^6+b^6}{?}$, để tìm? ta thay $a=b=-1$ thì $?=2^6=64$. (Mở rộng với tìm GTLN) còn $\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}\ge\sqrt[6]{a+b}$ (dễ CM)
- Ta có $\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{64-x}\ge\sqrt[6]{x+64-x}=2$

Bài 8: Chọn C.

- Ta có $1=ab+a+b\le\frac{1}{4}(a+b)^2+(a+b)\Leftrightarrow(a+b)^2+4(a+b)-4\ge0\to a+b\ge2\sqrt{2}-2$

$\Rightarrow16(a^4+b^4)\ge(a+b)^4\to a^4+b^4\ge\frac{1}{16}2^4(\sqrt{2}-1)^4=(\sqrt{2}-1)^4$

Bài 9: Chọn C.

- Xét $A=\frac{|(a-b)(b-c)(c-a)|}{abc}$. Giả sử $a\ge b\ge c$ suy ra:

$A=\left|\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(1-\frac{c}{b}\right)\left(1-\frac{a}{c}\right)\right|\le\left|(1-b)\left(1-\frac{1}{2b}\right)1\right|$ (vì $0\le\left|1-\frac{a}{c}\right|\le1\quad 1\le\frac{a}{c}\le2$)

- Khi đó $A\le\left|\left(\frac{3}{2}-b-\frac{1}{2b}\right)\right|\le\left|\frac{3}{2}-2\sqrt{\frac{1}{2}}\right|=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$

Bài 10: Chọn C.

- Đặt $t=f(x)-2$ suy ra $f(t)=t^3-3t^2-3t+4$ và phương trình $\sqrt{f(f(x)-2)-2}=3-f(x)$

$\Leftrightarrow\sqrt{f(t)-2}=1-t\Leftrightarrow\begin{cases}1-t\ge0\\f(t)-2=(1-t)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\ge t\\f(t)=t^2-2t+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\le1\\t^3-4t^2-t+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=t_1\\t=t_2\end{array}\right.$

- Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2-3x+4$ với $x\in\mathbb{R}$, ta có:

$f'(x)=3x^2-6x-3; f'(x)=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2}$

- Tính các giá trị:

$f(1+\sqrt{2}), f(1-\sqrt{2}), \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

- Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy rằng:
- Đường thẳng $y=t_1+2$ cắt đồ thị $y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt

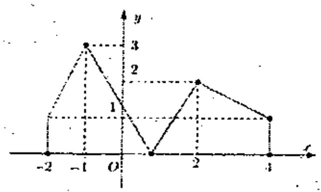
$\Rightarrow$ phương trình $f(x)=t_1+2$ có ba nghiệm phân biệt.

- Đường thẳng $y=t_2+2$ cắt đồ thị $y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt

$\Rightarrow$ phương trình $f(x)=t_2+2$ có ba nghiệm phân biệt.

Bài 11: Chọn C.

- Ta thấy đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ như hình a.
- Khi đó: $\max\limits_{[-1;4]}|f(x)|=f(-1)=3$.



Hình a

Bài 12: ChọnB.

- Tập xác định $D=\mathbb{R}, y'=\frac{1-mx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$. Vì hàm số liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ nên để hàm số đạt GTLN tại $x=1$, điều kiện cần là $y'(1)=0\Leftrightarrow1-m=0\Leftrightarrow m=1$. Khi đó ta lập bảng biến thiên và hàm số đạt GTLN tại $x=1$.

Bài 13: Chọn B.

- Trường hợp $0 < x \le 1$ ta có $\ln x \le 0$ do đó suy ra $\ln y \ge \ln\left(x^2 + y\right)$ (vô lí)
- Xét $x > 1$, từ giả thiết ta có $\ln xy \ge \ln\left(x^2 + y\right)$ hay tương đương

$$xy \ge x^2 + y \Leftrightarrow y \ge \frac{x^2}{x-1}$$

Vậy thì $x + y \ge \frac{x^2}{x-1}$. Xét hàm số $f(x) = x + \frac{x^2}{x-1}$ trên $(1;+\infty)$ ta có:

$$f'(x) = 1 + \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vì $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ nên

$$\min f(x) = f\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3 + 2\sqrt{2}$$

Bài 14: Chọn A.

- Ta có:

$$x + y = 2\left(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3}\right) \Leftrightarrow (x+y)^2 = 4(x+y) + 8\sqrt{x-3}.\sqrt{y+3} \ge 4(x+y) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y \ge 4 \\ x+y \le 0 \end{array}\right.$$

- Mặt khác, $x + y = 2\left(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3}\right) \le 2\sqrt{2(x+y)} \Leftrightarrow x + y \le 8 \Rightarrow x + y \in [4;8]$
- Xét biểu thức $P = 4\left(x^2 + y^2\right) + 15xy = 4(x+y)^2 + 7xy$ và đặt $t = x + y \in [4;8]$

  $\Rightarrow P = 4t^2 + 7xy$
- Lại có $(x+3)(y+3) \ge 0 \Leftrightarrow xy \ge -3(x+y) - 9 \Rightarrow P \ge 4(x+y)^2 - 21(x+y) - 63 = 4t^2 - 21t - 63$
- Xét hàm số $f(t) = 4t^2 - 21t - 63$ trên đoạn $[4;8]$ suy ra $P_{\min} = f(7) = -83$.

Bài 15: Chọn C.

- Từ $\mathrm{f}^2(\mathrm{x}).\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = 1 + 2\mathrm{x} + 3\mathrm{x}^2$ ta có $\frac{[\mathrm{f}(\mathrm{x})]^3}{3} = \mathrm{x} + \mathrm{x}^2 + \mathrm{x}^3 + \mathrm{c}$ (Với c là hằng số)
- Do $\mathrm{f}(0) = 1$ nên $\mathrm{c} = \frac{1}{3}$. Vậy $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \sqrt[3]{3\mathrm{x}^3 + 3\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x} + 1}$ với $\mathrm{x} \in [-1;2]$
- Ta có: $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \frac{9\mathrm{x}^2 + 6\mathrm{x} + 3}{3\sqrt[3]{\left(3\mathrm{x}^3 + 3\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x} + 1\right)^2}} > 0, \forall \mathrm{x} \in (-1;2)$ nên $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ đồng biến trên đoạn

  $[-1;2]$
- Vậy $\min\limits_{\mathrm{x}\in[-1;2]} \mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(-1) = \sqrt[3]{-2}, \max\limits_{\mathrm{x}\in[-1;2]} \mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(2) = \sqrt[3]{43}$

Bài 16: Chọn C.

- Ta có $\frac{P}{4}=\frac{(x-y)^2}{x^2+2xy+3y^2}=\frac{(t-1)^2}{(t+1)^2+2}=y\Leftrightarrow t^2(y-1)+2t(y+1)+3y-1=0$

- Để phương trình có nghiệm thì $\Delta'\geq 0\Leftrightarrow -2y^2+6y\geq 0\Leftrightarrow 0\leq y\leq 3\Rightarrow P\leq 12$

Bài 17: Chọn B.

- Từ giả thiết, ta có $3+\ln\frac{x+y+1}{3xy}=9xy-3x-3y\Leftrightarrow 3+\ln(x+y+1)-\ln xy=9xy-3x-3y$

$\Leftrightarrow \ln(x+y+1)+3(x+y+1)=\ln(3xy)+3(3xy)\Leftrightarrow f(x+y+1)=f(3xy)$ (*)

- Xét hàm số $f(t)=\ln t+3t$ với $t>0$, ta có $f'(t)=3+\frac{1}{t}>0;\forall t>0\Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến. Khi đó $(*)\Leftrightarrow x+y+1=3xy\Leftrightarrow 3xy-1=x+y\underset{AM-GM}{\geq}2\sqrt{xy}\Leftrightarrow 3xy-2\sqrt{xy}-1\geq 0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{xy}-1\right)\left(3\sqrt{xy}+1\right)\geq 0\Leftrightarrow\sqrt{xy}\geq 1\Leftrightarrow xy\geq 1\Rightarrow P_{min}=1\Rightarrow m=1$

BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH CÓ THAM SỐ. DỰA VÀO GTLN - NT (GIÁ TRỊ LỚN NHẤT NHỎ NHẤT)

❐ BÀI TẬP LUYỆN

Bài 1: Tìm tất cả các giá trị thực của m để bất phương trình $3\sqrt{4-3x^2}-2\sqrt{x^3+4x^2+4}\geq m$ có nghiệm thực thuộc đoạn $[-1;1]$.

A. $-3\leq m\leq 2$ B. $m\leq 2$ C. $m\leq 3-2\sqrt{7}$ D. $m\leq -3$

Bài 2: Tập tất cả các giá trị của m để phương trình $\sqrt[4]{x^2+1}-\sqrt{x}=m$ có nghiệm là:

A. $(0;1)$ B. $(-\infty;0]$ C. $(1;+\infty)$ D. $(0;1]$

Bài 3: Tìm m để phương trình: $3\sqrt{21-4x-x^2}=m-4x+2$ có nghiệm.

A. $-35<m\leq 15$ B. $-40<m\leq 15$ C. $-30\leq m\leq 15$ D. $-20\leq m\leq 15$

Bài 4: Tìm m để bất phương trình $4^x-m.2^{x+1}+1-2m\geq 0$ luôn nghiệm đúng với mọi x thuộc nửa khoảng $[0;+\infty)$

A. $m\geq 1$ B. $m\leq 1$ C. $m\leq\frac{1}{2}$ D. $m<\frac{1}{2}$

Bài 5: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình $m\sqrt{2+\tan^2 x}=m+\tan x$ có ít nhất một nghiệm thực.

A. $-1<m<1$ B. $-\sqrt{2}\leq m\leq\sqrt{2}$ C. $-1\leq m\leq 1$ D. $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$

Bài 6: Cho phương trình $4^{-|x-m|}\log_{\sqrt{2}}(x^2-2x+3)+2^{-x^2+2x}\log_{\frac{1}{2}}(2|x-m|+2)=0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình trên có đúng hai nghiệm thực phân biệt

A. $m<\frac{3}{2}$ B. $m>-\frac{1}{2}$ C. $\left[\begin{array}{l} m<-\frac{3}{2} \\ m>-\frac{1}{2} \end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l} m<\frac{1}{2} \\ m>\frac{3}{2} \end{array}\right.$

Bài 7: Tất cả các giá trị thực của m để bất phương trình $x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}\le m.\log_{5-\sqrt{4-x}}3$ có nghiệm là:

A. $m>2\sqrt{3}$ B. $m\ge 2\sqrt{3}$ C. $m>12\log_3 5$ D. $2<m<12\log_2 5$

Bài 8: Tất cả các giá trị của m để phương trình $e^x=m(x+1)$ có nghiệm duy nhất là:

A. $m>1$ B. $m<0, m\ge 1$ C. $m<0, m=1$ D. $m<1$

Bài 9: Tập tất cả các giá trị của m để phương trình

$2^{(x-1)^2}.\log_2(x^2-2x+3)=4^{|x-m|}\log_2(2|x-m|+2)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là:

A. $\left\{\frac{1}{2};-1;\frac{3}{2}\right\}$. B. $\left\{-\frac{1}{2};1;\frac{3}{2}\right\}$. C. $\left\{\frac{1}{2};1;-\frac{3}{2}\right\}$. D. $\left\{\frac{1}{2};1;\frac{3}{2}\right\}$.

Bài 10: Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sqrt{2-x}+\sqrt{1-x}=\sqrt{m+x-x^2}$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $m\in\left[5;\frac{23}{4}\right]$. B. $m\in[5;6]$. C. $m\in\left(5;\frac{23}{4}\right)\cup\{6\}$. D. $m\in\left[5;\frac{23}{4}\right)\cup\{6\}$.

Bài 11: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình $m\sqrt{2+\tan^2 x}=m+\tan x$ có ít nhất một nghiệm thực.

A. $-1<m<1$ B. $-\sqrt{2}\le m\le\sqrt{2}$ C. $-1\le m\le 1$ D. $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$

Bài 12: Cho các hàm số $y=f(x), y=g(x)$ và $y=\frac{f(x)+3}{g(x)+3}$. Hệ số góc các tiếp tuyến của đồ thị các hàm số đã cho tại điểm có hoành độ $x=1$ là bằng nhau và khác 0.Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $f(1)\le-\frac{11}{4}$ B. $f(x)<-\frac{11}{4}$ C. $f(1)>-\frac{11}{4}$ D. $f(1)\ge-\frac{11}{4}$

Bài 13: Cho các hàm số $y=f(x), y=g(x), y=\frac{f(x)}{g(x)}$. Nếu các hệ số góc của các tiếp tuyến của các đồ thị các hàm số đã cho tại điểm có hoành độ $x=0$ bằng nhau và khác 0 thì

A. $f(0)<\frac{1}{4}$ B. $f(0)\le\frac{1}{4}$ C. $f(0)>\frac{1}{4}$ D. $f(0)\ge\frac{1}{4}$

Bài 14: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+x+\frac{3}{2}$. Phương trình $\frac{f(f(x))}{2f(x)-1}=1$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 9 nghiệm. B. 4 nghiệm. C. 6 nghiệm. D. 5 nghiệm.

GIẢI CHI TIẾT

Bài 1: Chọn C.

- Xét hàm số $f(x)=3\sqrt{4-3x^2}-2\sqrt{x^3+4x^2+4}, x\in[-1;1]$

$$f'(x)=3.\frac{-6x}{2\sqrt{4-3x^2}}-2.\frac{3x^2+8x}{2\sqrt{x^3+4x^2+4}}=-\frac{9x}{\sqrt{4-3x^2}}-\frac{3x^2+8x}{\sqrt{x^3+4x^2+4}}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow -\frac{9x}{\sqrt{4-3x^2}}-\frac{3x^2+8x}{\sqrt{x^3+4x^2+4}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\-9\sqrt{x^3+4x^2+4}-(3x+8)\sqrt{4-3x^2}=0\ (*)\end{array}\right.$$

- Do $x\in[-1;1]$ nên $3x+8>0$ nên vế trái của (*) âm nên phương trình (*) vô nghiệm.
- Bảng biến thiên

x	-1		0		1
y'		$+$	0	$-$	
y	$3-2\sqrt{7}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3

Dựa vào bảng biến thiên ta có $m\le 2$.

Bài 2: Chọn D.

- Điều kiện: $x\ge 0$
- Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \frac{1}{\left(\sqrt[4]{x^2+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=m$
- Xét hàm số $f(x)=\sqrt[4]{x^2+1}+\sqrt{x}$ trên $[0;+\infty)$.

$f(x)>0, \forall x\ge 0$ và $f'(x)=\frac{x}{2\sqrt[4]{(x^2+1)^3}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}<0, \forall x>0$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$

- Tương tự hàm số $g(x)=\sqrt{x^2+1}+x$ đồng biến trên $[0;+\infty)$ và $g(x)>0,\forall x>0$

$\Rightarrow f(x).g(x)$ là hàm số đồng biến trên $[0;+\infty)$

$\Rightarrow$ Hàm số $h(x)=\dfrac{1}{f(x).g(x)}$ nghịch biến trên $[0;+\infty)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$

$\Rightarrow$ Phương trình $h(x)=m$ có nghiệm khi $0<m\le h(0)=1 \Rightarrow m\in(0;1]$.

Bài 3: Chọn C.

- Ta có tập xác định $D=[-7;3] \Rightarrow x+7\ge 0 \wedge 3-x\ge 0$
- Khi đó $3\sqrt{21-4x-x^2}=m-4x+2 \Leftrightarrow \left(3\sqrt{x+7}+\sqrt{3-x}\right)^2=2m+70$
- Đặt $f(x)=3\sqrt{x+7}+\sqrt{3-x}, x\in[-7;3]$
- Ta được $\min\limits_{x\in[-7;3]} f(x)=f(-7)=\sqrt{10}$ và $\max\limits_{x\in[-7;3]} f(x)=f(2)=\sqrt{10}$
- Do vậy, ycbt $\Leftrightarrow 10\le 2m+70\le 100 \Leftrightarrow -30\le m\le 15$.

Bài 4: ChọnC.

- Đặt $t=2^x$, với $x\ge 0$ thì $t\ge 1$. Khi đó bất phương trình đã cho trở thành:

  $t^2+1\ge 2m(t+1) \Leftrightarrow 2m\le \dfrac{t^2+1}{t+1}$
- Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+1}{t+1}, t\ge 1$. Khi đó: $f'(t)=\dfrac{2t(t+1)-t^2-1}{(t+1)^2}=\dfrac{t^2+2t-1}{(t+1)^2}>0, \forall t\ge 1$
- Ta có bảng biến thiên như sau:

t	1 $\qquad$ $+\infty$
$f'(t)$	$+$
$f(t)$	$1 \nearrow +\infty$

- Yêu cầu bài toán là $\Leftrightarrow 2m\le f(1)=1 \Leftrightarrow m\le \dfrac{1}{2}$.

Bài 5: ChọnB.

- Điều kiện $x\ne \dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$
- Ta có: $m\sqrt{2+\tan^2 x}=m+\tan x \Leftrightarrow m\left(\sqrt{2+\tan^2 x}-1\right)=\tan x \Leftrightarrow m=\dfrac{\tan x}{\sqrt{2+\tan^2 x}-1}$
- Đặt $t=\tan x, t\in\mathbb{R}$. Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+2}-1}, t\in\mathbb{R}$
- Ta có: $f'(t)=\dfrac{2-\sqrt{2+t^2}}{\sqrt{2+t^2}\left(\sqrt{2+t^2}-1\right)^2}$ và $f'(t)=0 \Leftrightarrow 2=\sqrt{2+t^2} \Leftrightarrow t=\pm\sqrt{2}$
- Ta có: $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t}{\sqrt{t^2+2}-1}=1$ và $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t)=-1$

- Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	-1 $\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình đã cho có nghiệm thực khi $-\sqrt{2} \le m \le \sqrt{2}$.

Bài 6: Chọn D.

$$4^{-|x-m|}\log_{\sqrt{2}}\left(x^2-2x+3\right)+2^{-x^2+2x}\log_{\frac{1}{2}}\left(2|x-m|+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2^{1-2|x-m|}\log_2\left(x^2-2x+3\right)=2^{-x^2+2x}\log_2\left(2|x-m|+2\right)$$

$\Leftrightarrow \dfrac{\log_2\left(x^2-2x+3\right)}{2^{3-\left(x^2-2x+3\right)}}=\dfrac{\log_2\left(2|x-m|+2\right)}{2^{3-\left(2+2|x-m|\right)}}$. Xét hàm số $f(u)=\dfrac{\log_2 u}{2^{3-u}}$ với $u\ge 2$.

Hàm số $f(u)$ đồng biến trên $[2;+\infty)$ nên

$$f\left(x^2-2x+3\right)=f\left(2|x-m|+2\right)\Leftrightarrow (x-1)^2=2|x-m|\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2-4x+1+2m=0 & (1)\\ x^2+1-2m=0 & (2)\end{array}\right.$$

Phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt.

+ **TH1:** Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, phương trình (2) vô nghiệm, suy ra $\Rightarrow m<\dfrac{1}{2}$.

+ **TH2:** Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt, phương trình (1) vô nghiệm, suy ra $\Rightarrow m>\dfrac{3}{2}$.

+ **TH3:** Phương trình (1) có nghiệm kép suy ra $m=\dfrac{3}{2}$, phương trình (2) $x=\pm\sqrt{2}$. (Loại)

+ **TH4:** Phương trình (2) có hai nghiệm kép suy ra $m=\dfrac{1}{2}$, phương trình (1) : $x=2\pm\sqrt{2}$. (Loại)

+ **TH5:** Phương trình (1) và (2) có 2 nghiệm giống nhau: cho vế trái 2 phương trình bằng nhau => $x = m$, thế ngược lại $m = 1$ vào ta 3 nghiệm (loại)

Suy ra $m<\dfrac{1}{2}$ hoặc $m>\dfrac{3}{2}$ thỏa mãn.

Bài 7: Chọn B.

- Điều kiện: $x\in[0;4]$. Ta thấy $4-x\le 4\Rightarrow 5-\sqrt{4-x}\ge 3\Rightarrow \log_{5-\sqrt{4-x}}3>0$
- Khi đó bất phương trình đã cho trở thành $m>f(x)=\left(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}\right).\log_3\left(5-\sqrt{4-x}\right)(*)$

- Với $u = x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} \Rightarrow u' = \dfrac{3\sqrt{x}}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x+12}}$ $v = \log_3\left(5 - \sqrt{4-x}\right)$

$\Rightarrow v' = \dfrac{1}{2\sqrt{4-x}\left(5-\sqrt{4-x}\right).\ln 3}$

- Suy ra $f'(x) > 0; \forall x \in (0;4) \Rightarrow f(x)$ là hàm số đồng biến trên đoạn $[0;4]$
- Để bất phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow m \ge \min\limits_{[0;4]} f(x) = f(0) = 2\sqrt{3}$

Bài 8: Chọn C.

- Ta có: $m = \dfrac{e^x}{x+1} = f(x)$.
- Xét hàm số $f(x)$ ta có: $f'(x) = \dfrac{xe^x}{(x+1)^2} \to f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 1$
- Đồng thời: $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty \Rightarrow$ tiệm cận đứng: $x = -1$
- Lại có: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ tiệm cận ngang $y = 0$
- Số nghiệm của phương trình $e^x = m(x+1)$ là số điểm chung giữa đường thẳng $y = m$ và đồ thị hàm số $y = f(x)$. Dựa vào bảng biến thiên hàm số $y = f(x), m < 0$ và $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Bài 9: Chọn D.

- Ta có: $2^{(x-1)^2}.log_2\left(x^2 - 2x + 3\right) = 4^{|x-m|}.log_2\left(2|x-m|+2\right)$ (1)

$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2}.log_2\left[(x-1)^2 + 2\right] = 2^{2|x-m|}.log_2\left(2|x-m|+2\right)$ (2)

- Xét hàm số $f(t) = 2^t.log_2(t+2), t \ge 0$.

Vì $f'(t) > 0, \forall t \ge 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$

Khi đó $(2) \Leftrightarrow f\left[(x-1)^2\right] = f\left(2|x-m|\right) \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2|x-m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 - 4x + 1 + 2m = 0 & (3) \\ x^2 - 2m + 1 = 0 & (4) \end{array}\right.$

Phương trình (1) có đúng ba nghiệm phân biệt nếu xảy ra các trường hợp sau:

+ PT (3) có nghiệm kép khác hai nghiệm phân biệt của PT(4) $\Rightarrow m = \dfrac{3}{2}$, thay vào PT (4) thỏa mãn.

+ PT (4) có nghiệm kép khác hai nghiệm phân biệt của PT(3) $\Rightarrow m = \dfrac{1}{2}$, thay vào PT (3) thỏa mãn

+ PT (4) có hai nghiệm phân biệt và PT (3) có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm của hai PT trùng nhau, cho VT của 2 phương trình bằng nhau tìm được $m=1$. Thử lại ta thấy đúng.

Bài 10: Chọn B.

- $\sqrt{2-x}+\sqrt{1-x}=\sqrt{m+x-x^2}$ (1)

  Điều kiện: $-1\le x\le 2$

- $(1)\Leftrightarrow 3+2\sqrt{-x^2+x+2}=-x^2+x+m$

+ Đặt: $-x^2+x=t; \Rightarrow t\in\left[-2;\frac{1}{4}\right]$

  $(1)\Leftrightarrow m=2\sqrt{t+2}+3-t$

+ Đặt $f(t)=2\sqrt{t+2}+3-t$

  $f'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t+2}}-1=\dfrac{1-\sqrt{t-2}}{\sqrt{t-2}}$.

- Bảng biến thiên

t	$-\infty$	-2	-1	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
f'(t)					
f(t)		23/4 ↗		↘	

- $-x^2+x=t\Leftrightarrow -x^2+x-t=0$

+ Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta=1-4t>0\Leftrightarrow t\le\frac{1}{4}$

+ Do đó để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì phương trình $(*)$ có nghiệm $t\in\left[-2;\frac{1}{4}\right]$

  Từ bảng biến thiên $\Rightarrow m\in[5;6]$.

Bài 11: Chọn B.

- Ta có: $m\sqrt{2+\tan^2 x}=m+\tan x\Leftrightarrow m=\dfrac{\tan x}{\sqrt{2+\tan^2 x-1}}$

- Đặt $t=\tan x, t\in\mathbb{R}$. Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+2-1}}, t\in\mathbb{R}$

- Ta có: $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\pm\sqrt{2}$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-1\ \sqrt{2}$ $-\sqrt{2}$	↘		↗	1	↘	

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình đã cho có nghiệm thực khi $-\sqrt{2} \le m \le \sqrt{2}$.

Bài 12: Chọn A.

- Đặt $h(x) = \dfrac{f(x)+3}{g(x)+3}$. Khi đó: $h'(1) = \dfrac{f'(1)(g(1)+3) - g'(1)[f(1)+3]}{[g(1)+3]^2}$
- Theo giả thiết thì $f'(1) = g'(1) = h'(1)$, nên từ phương trình trên ta có:

  $f(1) = -\left[(g(1))^2 + 5(g(1)) + 9\right] \le -\dfrac{11}{4}$

Bài 13: Chọn B.

- Ta có: $f'(0) = g'(0) = \dfrac{f'(0).g(0) - f(0).g'(0)}{(g(0))^2} \Rightarrow \dfrac{g(0) - f(0)}{(g(0))^2} = 1$
- Suy ra phương trình $t^2 - t + f(0) = 0$ có nghiệm $t = g(0)$.

  Hay $\Delta = 1 - 4f(0) \ge 0 \Rightarrow f(0) < \dfrac{1}{4}$

Bài 14: Chọn D.

- Do $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + \dfrac{3}{2}$ nên phương trình $\dfrac{f(f(x))}{2f(x)-1} = 1$ tương đương

$$f(f(x)) = 2f(x) - 1 \Leftrightarrow [f(x)]^3 - 3[f(x)]^2 + f(x) + \frac{3}{2} = 2f(x) - 1$$

$$\Leftrightarrow [f(x)]^3 - 3[f(x)]^2 - f(x) + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x) \approx 3,0598 & (1) \\ f(x) \approx 0,8745 & (2) \\ f(x) \approx -0,9343 & (3) \end{array}\right.$$

- Khảo sát hàm số liên tục f ta được bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		$-\dfrac{\sqrt{6}}{3}+1$		$\dfrac{\sqrt{6}}{3}+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$1,59$	↘	$-0,59$	↗	$+\infty$

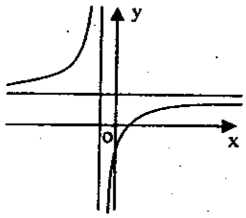
BÀI TOÁN SUY LUẬN TỪ ĐỒ THỊ

□ BÀI TẬP LUYỆN

Bài 1: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\begin{cases} ab<0 \\ bc<0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} ad<0 \\ bc>0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} ad>0 \\ bc<0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} ad>0 \\ bc>0 \end{cases}$

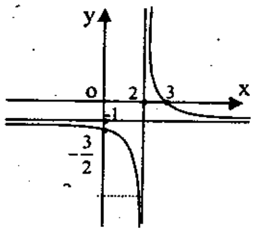


Bài 2: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình vẽ dưới.

Tính giá trị của $a+2b+c$.

A. 1 B. 2

C. 0 D. 3



Bài 3: Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ.

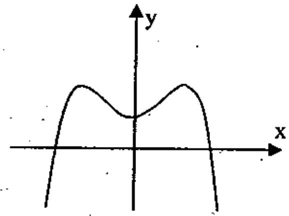
Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a>0,b>0,c>0$

B. $a<0,b>0,c<0$

C. $a<0,b>0,c>0$

D. $a<0,b<0,c>0$



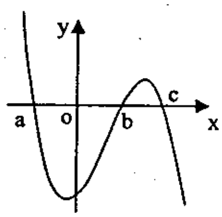
Bài 4: Cho hình chóp $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng:

A. $f(c)>f(a)>f(b)$

B. $f(c)>f(b)>f(a)$

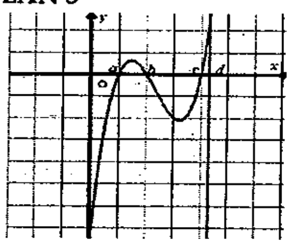
C. $f(a)>f(b)>f(c)$

D. $f(b)>f(a)>f(c)$



TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN – LẦN 5

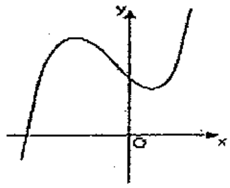
Bài 5: Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $0<a<b<c<d$ và hàm số $y=f(x)$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[0;d]$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



A. $M+m=f(0)+f(c)$ B. $M+m=f(d)+f(c)$

C. $M+m=f(b)+f(a)$ D. $M+m=f(0)+f(a)$

Bài 6: Cho biết hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Có đồ thị như hình vẽ bên.Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?



A. $\begin{cases} a<0 \\ b^2-3ac>0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} a>0 \\ b^2-3ac>0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a>0 \\ b^2-3ac<0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} a<0 \\ b^2-3ac<0 \end{cases}$

Bài 7: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (1).

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ 0	$\nearrow$	4	$\searrow$	

Tính tổng $a + b + c + d$.

A. 3 B. 2 C. –2 D. 1

Bài 8: Cho hàm số $y=\dfrac{x+a}{bx+c}$ (1). Hàm số đi qua điểm (2;0).

Có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	1

Cho các phát biểu:

(1) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng y = 1. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng x = 1.

(2) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

(3) Hàm số không có cực trị.

(4) Tổng a + b + c = 0.

Hỏi có bao nhiêu phát biểu đúng.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Bài 9: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	2	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	2

Cho các mệnh đề:

(1) Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty;-1);(-1;+\infty)$.

(2) Hàm số không có cực trị.

(3) $a=2;c=1$.

(4) Nếu $y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$ thì $b=-1$.

Có bao nhiêu mệnh đề **sai**:

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 1: Chọn C.

- Nhìn vào đồ thị ta thấy tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}>0$. Suy ra *a,c*cùng dấu (1).

  Tiệm cận đứng $x=\dfrac{-d}{c}<0$ nên nên *d, c* cùng dấu. (2)

+ Đồ thị cắt trục hoành tại điểm có hoành độ dương nên $\dfrac{-b}{a}>0$ suy ra *a, b* trái dấu. (3)

+ Đồ thị cắt trục *Oy* tại điểm có tung độ âm nên $\dfrac{b}{d}<0$ hay *b, d* trái dấu. (4).

  Từ (1) và 3 ta có *b, c* trái dấu.

  Từ (2) và (1) ta suy ra *a, d* cùng dấu.

Bài 2: Chọn D.

- Hàm số có tiệm cận đứng $x=2$ suy ra $c=-2$
- Hàm số có tiệm cận ngang $y=-1$ suy ra $c=-1$

  Do đó hàm số có dạng $y=\dfrac{-x+b}{x-2}$

  Do đồ thị của hàm số qua $(3;0)$ nên suy ra $b=3$.

  Vậy $y=\dfrac{-x+3}{x-2}$ suy ra $a=-1;b=3;c=-2$ hay $a+2b+c=-1+6-2=3$.

Bài 3: Chọn C.

Ta có, đồ thị 2 điểm cực đại, 1 điểm cực tiểu nên: $a<0,b>0$. Mà đồ thị cắt *Oy* phía trên Oxnên $c>0$. Vậy $a<0,b>0,c>0$.

Bài 4: Chọn A.

Ta thấy $f'(x)$ có ba nghiệm a, b, c nên ta chọn:

$$a=-\frac{2}{3},b=\frac{1}{2},c=\frac{5}{2}\Rightarrow(3x+2)(2x-1)(2x-5)=0$$

Giả sử hàm số $f'(x)-(3x+2)(2x-1)(2x-5)=-12x^3+28x^2+9x-10$ (vì dựa vào đồ thị thấy rằng $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty; \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$ thì hệ số nhỏ hơn 0).

Nếu hàm số *f(x)* dạng

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-12x^3+28x^2+9x-10)dx=-3x^4+\frac{28}{3}x^3+\frac{9}{2}x^2-10x+C$$

Tính giá trị $f\left(-\frac{2}{3}\right);f\left(\frac{1}{2}\right);f\left(\frac{5}{2}\right)$, ta được $f\left(\frac{5}{2}\right)>f\left(-\frac{2}{3}\right)>f\left(\frac{1}{2}\right)\Rightarrow f(a)>f(b)$

➤ **Cách khác.**

Gọi S_1,S_2 lần lượt là diện tích giới hạn bởi hàm số $y=f'(x)$ với trục hoành

Ta có $S_1=-\int\limits_a^b f'(x)dx=-f(x)\Big|_a^b=-f(b)+f(a)>0\Rightarrow f(a)>f(b)$

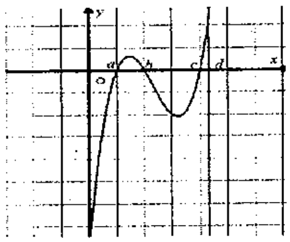
$S_2=\int\limits_b^c f'(x)dx=f(x)\Big|_b^c=f(c)-f(b)>0\Rightarrow f(c)>f(b)$

Nhìn vào đồ thị ta thấy $S_1>S_2\Rightarrow -f(b)+f(a)>f(c)-f(b)\Leftrightarrow f(a)>f(c)$

Do đó ta suy ra $f(a)>f(c)>f(b)$

TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN – LẦN 5

Bài 5: Chọn A.



- Dựa vào đồ thị hàm số $\Rightarrow$ bảng biến thiên

$$\Rightarrow\begin{cases}M=\{f(0),f(b),f(d)\}\\ m=\{f(a),f(c)\}\end{cases}$$

- Mặt khác, dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy rằng

- $\int\limits_a^b f'(x)dx<\int\limits_b^c[-f'(x)]dx\Rightarrow f(x)\Big|_a^b<-f(x)\Big|_b^c\Leftrightarrow f(a)>f(c)$
- $\int\limits_0^a[-f'(x)]dx>\int\limits_a^b f'(x)dx\Leftrightarrow f(0)-f(a)>f(b)-f(a)\Leftrightarrow f(0)>f(b)$
- $\int\limits_b^c[-f'(x)]dx>\int\limits_c^d f'(x)dx\Leftrightarrow f(b)-f(c)>f(d)-f(c)\Leftrightarrow f(b)>f(d)$

Vậy $\begin{cases}f(a)>f(c)\Rightarrow m=f(c)\\ f(0)>f(b)>f(a)\Rightarrow M=f(0)\end{cases}\Rightarrow M+m=f(0)+f(c)$

Bài 6: Chọn B.

Phương pháp: Để đồ thị hàm số bậc 3 có hai cực trị thì $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt.

- **Cách giải:** Từ đồ thị ta thấy hàm số có $a>0$ và có 2 cực trị suy ra $y'=3ax^2+2bx+c=0$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta=4b^2-12ac>0\Leftrightarrow b^2-3ac>0$

Bài 7: Chọn B.

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Vì hàm số có cực trị tại $x = 0$ nên $c = 0$

Hàm số có cực trị tại $x = 2$ nên $12a + 4b = 0$

Thay tọa độ điểm (0; 0) vào, ta có: $d = 0$

Thay tọa độ điểm (2; 4) vào, ta có: $8a + 4b = 4$

Từ đó ta tìm được $a = -1, b = 3 \Rightarrow a + b + c + d = -2$

$y = -x^3 + 3x^2$ (1)

Bài 8: Chọn C.

- Từ bảng biến thiên ta tìm được tiệm cận đứng $x = 1 \Rightarrow b = -c$
- Tiệm cận ngang $y = 1 \Rightarrow b = 1$, do đó $c = -1$
- Tìm a: $y = \frac{x+a}{bx+c}$ (1). Hàm số đi qua điểm (2; 0) nên $a = -2$. $y = \frac{x-2}{x-1}$ (1)
- Vậy tổng $a + b + c = -2$ **(D sai)**

Bài 9: Chọn D.

(1) Đúng: Từ bảng biến thiên suy ra.

(2) Đúng: Hàm số không đổi dấu qua bất kỳ điểm nào.

(3) Sai: Tập xác định của hàm số $D = R\setminus\{-1\} \Rightarrow c = -1$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2 \Rightarrow \frac{a}{c} = 2 \Rightarrow a = 2$.

(4) Đúng: $y' = \frac{-a-b}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2} \Rightarrow b = -1$.

KHOẢNG CÁCH

Trong bài toán liên quan đến khoảng cách, độ dài ta thường sử dụng định lý Viet làm công cụ, phải nói rằng đây là một công cụ cực mạnh để giải quyết các bài toán hàm số.

Nội dung định lý Viet ta không còn xa lạ gì, nếu x_1, x_2 là nghiệm của phương trình bậc 2 sau:

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \text{ khi đó ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{B}{A} \\ x_1x_2 = \frac{C}{A} \end{cases}$$

***Định lí Viet** được dùng khi bài toán có liên quan đến cực trị của hàm bậc 3, bậc 4, hoặc bài toán tương giao của đường thẳng và phân thức, hàm bậc 3.*

Ngoài ra chúng ta cũng có lúc gặp công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng trong giải tích Oxy lớp 10 như sau:

$Ax+B.y+C=0(\Delta)$ *điểm* $M(x_o;y_o)$ *cách đường thẳng* (Δ) có công thức:

$$d_{M/(\Delta)}=\frac{|A.x_o+B.y_o+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

□ Bài tập áp dụng

Bài 1. Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C).Tìm tham số m để đường thẳng $(d_m): y=2x+m$ cắt đồ thị hàm số (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách AB nhỏ nhất.

A. $m=\pm1$ **B.** $m=1$ **C.** $m=-1$ **D.** $m=\pm2$

Bài 2. Cho hàm số $y=-x^3+6x^2-9x+1$. Tìm m để đường thẳng $\Delta: y=(m^2-9)x+1$ cắt (C) tại ba điểm A, B, C sao cho $x_A<x_B<x_C$ và $AC=3AB$

A. $m=\pm3\sqrt{3}$ **B.** $m=\pm2\sqrt{3}$ **C.** $m=\pm\sqrt{3}$ **D.** $m=\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Bài 3. Cho hàm số $y=2x^3-3(m+2)x^2+12mx+8\ (C)$. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số (C) có cực đại, cực tiểu và khoảng cách giữa chúng bằng $\sqrt{2}$.

A. $m=-3, m=1$ **B.** $m=3, m=-1$ **C.** $m=3, m=1$ **D.** $m=-3, m=-1$

Bài 4. Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$. Tìm điểm M trên (C) để khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng của đồ thị (C) bằng khoảng cách từ M đến trục Ox.

A. $M(0;1), M(-4;-3)$ **B.** $M(0;-1), M(4;3)$

C. $M(0;-1), M(-4;-3)$ **D.** $M(0;1), M(-4;3)$

Bài 5. Cho đồ thị (C) và đường thẳng d. Điểm M trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến d là nhỏ nhất với $(C): y=2x^4-3x^2+1$, $d: y=-1$. Tung độ của M là:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $-\frac{1}{8}$ **C.** $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{1}{8}$

Bài 6. Cho đồ thị (C) và đường thẳng d. Điểm M trên (C) sao cho khoảng cáchtừ M đến d là nhỏ nhất với $(C): y=\frac{x^2+4x+5}{x+2}$; $d: y=-3x-6$. Giá trị khoảng cách nhỏ nhất là:

A. $\frac{2}{\sqrt{10}}$ **B.** 2 **C.** $\frac{4}{\sqrt{5}}$ **D.** 4

Bài 7. Cho đồ thị (C) và đường thẳng d. Điểm M trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến d là nhỏ nhất với $(C): y=\frac{x+1}{x-1}$; $d: 2x+y-3=0$. Giá trị khoảng cách bé nhất đó là:

A. $\frac{4}{\sqrt{10}}$ **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$ **C.** $\frac{4}{\sqrt{5}}$ **D.** $\frac{2}{\sqrt{10}}$

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 1. Chọn C.

- Phương trình hoành độ giao điểm giữa (C) và (d_m): $\frac{x+1}{x-1}=2x+m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ g(x)=2x^2+(m-3)x-m-1=0\ (*) \end{cases}$

- Phương trình (*) có $\begin{cases} \Delta=m^2+2m+17>0\ \forall m \\ g(1)=-2\neq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (C)\cap(d_m)=\{A\neq B\}\ \forall m.$ Gọi $A(x_1;2x_2+m)$ theo định lí Viet ta có:

$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{3-m}{2} \\ x_1x_2=-\frac{1+m}{2} \end{cases} \Rightarrow AB^2=(x_1-x_2)^2+(2x_1-2x_2)^2=5\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]$

$AB^2=5\left[\left(\frac{3-m}{2}\right)^2+4\left(\frac{1+m}{2}\right)\right]=5\left[\frac{m^2+2m+17}{4}\right]=5\left[\frac{(m+1)^2+16}{4}\right]\geq 20$

$\Rightarrow AB\geq 2\sqrt{5}$ dấu bằng xảy ra khi m = –1

Vậy khoảng cách AB ngắn nhất bằng $2\sqrt{5}\Leftrightarrow m=-1$

Bài 2. Chọn D.

- Phương trình hoành độ giao điểm:

$-x^3+6x^2-9x+1=(m^2-9)x+1\Leftrightarrow x\left[x^2-6x+m^2\right]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-6x+m^2=0;(1) \end{array}\right.$

- Δ cắt (C) tại 3 điểm phân biệt thì (1) phải có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$\Rightarrow 9-m^2>0\Rightarrow -3<m<3, m\neq 0$

- Khi đó (1) có hai nghiệm phân biệt dương nên $x_A=0$, x_B và x_C là hai nghiệm của (1)
- Để $AC=3AB$ thì $x_C=3x_B$
- Theo định lí Viet, ta có: $\begin{cases} x_B+x_C=6 \\ x_Bx_C=m^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_B=6 \\ 3x_B^2=m^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B=\frac{3}{2} \\ \frac{27}{4}=m^2 \end{cases} \Rightarrow m=\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$
- Thử lại $m=\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$ thỏa mãn.

Bài 3. Chọn C.

- Ta có: $y'=6x^2-6(m+2)x+12m=6\left[x^2-(m+2)x+2m\right]$
- Hàm số có cực đại, cực tiểu khi phương trình $y'=0$ đổi dấu qua các nghiệm

$\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta>0\Leftrightarrow (m+2)^2-4.2m>0\Leftrightarrow (m-2)^2>0\Leftrightarrow m\neq 2$

- Ta có: $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \Rightarrow y=-m^3+6m^2+8 \\ x=2 \Rightarrow y=12m \end{array}\right.$
- Giả sử $A\left(m;-m^3+6m^2+8\right), B\left(2;12m\right)$ là các điểm cực trị của hàm số.
- Ta có: $AB=\sqrt{2} \Leftrightarrow AB^2=2 \Leftrightarrow (m-2)^2+\left(-m^3+6m^2-12m+8\right)^2=2$

  $\Leftrightarrow (m-2)^2+(m-2)^6=2$
- Đặt $t=(m-2)^2 \Rightarrow t+t^3=2 \Leftrightarrow t^3+t-2=0 \Leftrightarrow (t-1)\left(t^2+t+2\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t-1=0 \Leftrightarrow t=1 \\ t^2+t+2=0 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right.$

  $\Rightarrow (m-2)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-2=1 \\ m-2=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=1 \end{array}\right.$
- Vậy $m=3, m=1$ là giá trị cần tìm.

Bài 4.Chọn B.

- Gọi $\mathrm{M}\left(x_0;y_0\right)$, $\left(x_0 \neq 1\right)$, $y_0=\dfrac{2x_0+1}{x_0-1}$
- Ta có: $d\left(M,\Delta_1\right)=d\left(M,Ox\right) \Leftrightarrow \left|x_0-1\right|=\left|y_0\right| \Leftrightarrow \left|x_0-1\right|=\left|\dfrac{2x_0+1}{x_0-1}\right| \Leftrightarrow \left(x_0-1\right)^2=\left|2x_0+1\right|$
- Với $x_0 \geq \dfrac{-1}{2}$, ta có: $x_0^2-2x_0+1=2x_0+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=4 \end{array}\right. \Rightarrow M(0;-1), M(4;3)$
- Với $x_0<\dfrac{-1}{2}$, ta có phương trình: $x_0^2-2x_0+1=-2x_0-1 \Leftrightarrow x_0^2+2=0$ (vô nghiệm).
- Vậy $M(0;-1), M(4;3)$.

Bài 5. Chọn B.

- Gọi $M\left(m;2m^4-3m^2+1\right) \in (C)$. Ta có $d{:}+y+1=0$ nên:

$$d(M;d)=\frac{\left|2m^4-3m^2+2\right|}{\sqrt{5}}=\frac{\left|2\left(m^2-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}\right|}{\sqrt{5}} \geqslant \frac{\left|\dfrac{7}{8}\right|}{\sqrt{5}}=\frac{7}{8\sqrt{5}}.$$

- Dấu đẳng thức xảy ra khi $m^2=\dfrac{3}{4} \Rightarrow y_M=-\dfrac{1}{8}$.

Bài6.Chọn C.

- Gọi $M\left(m;\dfrac{m^2+4m+5}{m+2}\right), m \neq -2$. Đường thẳng d: $3x+y+6=0$. Ta có:

$$d(M;d)=\frac{\left|\dfrac{m^2+4x+5}{m+2}+3m+6\right|}{\sqrt{10}.}=\frac{\left|4(m+2)+\dfrac{1}{m+2}\right|}{\sqrt{10}} \geqslant \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{10}}=\frac{4}{\sqrt{5}}.$$

- Do ta áp dụng phương trình $k=4(m-1)+\frac{2}{m-1}(*)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}k\ge 4\sqrt{2}\\ k\le -4\sqrt{2}\end{array}\right.$

  $\Rightarrow |k|\ge 4\sqrt{2}$ có nghiệm

  Chi tiết: Đặt $t=m-1\Rightarrow k=4t+\frac{2}{t}\Leftrightarrow 4t^2-kt+2=0\Rightarrow \Delta=k^2-32\ge\Rightarrow -4\sqrt{2}\le k\le 4\sqrt{2}$

- Vậy $d_{\min}=\frac{4}{\sqrt{5}}$.

Bài 7. Chọn C.

- Gọi $M\left(m;\frac{m+1}{m-1}\right), m\ne 1$. Áp dụng điều kiện phương trình:

$$d(M;d)=\frac{\left|2m+\frac{m+1}{m-1}-3\right|}{\sqrt{5}}=\frac{\left|2(m-1)+\frac{2}{m-1}\right|}{\sqrt{5}}\geqslant\frac{4}{\sqrt{5}}.$$

$$k=2(m-1)+\frac{2}{m-1}(*)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}k\ge 4\\ k\le -4\end{array}\right.\Rightarrow |k|\ge 4$$

- Dùng kiến thức xét dấu tam thức bậc 2: đặt t = m – 1 , tìm điều kiện của k để phương trình: $2t^2-k.t+2=0$ có nghiệm $\Rightarrow k^2\ge 16$.
- Vậy giá trị cần tìm là $\frac{4}{\sqrt{5}}$.

DIỆN TÍCH – TÍNH CHẤT TAM GIÁC

Cũng giống như bài toán khoảng cách, bài toán trong tam giác ta cũng sử dụng định lý Viet làm công cụ giải toán.

Trong bài toán tam giác ta gặp 2 mô hình:

1. Bài toán liên quan đến diện tích tam giác.

2. Bài toán liên quan đến tính chất tam giác: Vuông, cân, đều.

Diện tích tam giác ta sử dụng $S=\frac{1}{2}.h.a$

Tam giác vuông ta sử dụng tích vô hướng bằng 0: $AB\perp AC\Leftrightarrow \overline{AB}.\overline{AC}=0$

Tam giác cân tại A ta sử dụng AB = AC hoặc sử dụng tích vô hướng:

$AI\perp BC\Leftrightarrow \overline{AI}.\overline{BC}=0$ *với I là trung điểm của BC.*

Tam giác đều thì giả thiết cho sẽ ít hơn, ta sử dụng ta sử dụng $AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ *và tích vô hướng:*

$AI\perp BC\Leftrightarrow \overline{AI}.\overline{BC}=0$ *với I là trung điểm của BC (ở đây a là độ dài của cạnh bên)*

□Bài tập áp dụng

Bài 1. Cho hàm số $y=\frac{x+2}{2x+1}$ có đồ thị là (C)

Gọi M là một điểm thuộc đồ thị và H, K tương ứng là hình chiếu của M trên trục Ox và Oy.Tìm tọa độ điểm M sao cho tứ giác $MHOK$ có diện tích bằng 1. Hỏi có mấy điểm m thỏa mãn:

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Bài 2. Cho hàm số $y=\frac{mx+2}{x-m}$ có đồ thị là (C_m). Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận của (C_m). Tìm m để đường thẳng $d: y=-x+2$ cắt (C_m) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB đều.

A. $m=2$ B. $m=-2$ C. $m=3$ D. $m=-3$

Bài 3. Cho hàm số: $y=x^3+3x^2+1$ có đồ thị là (C).Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $A(1;5)$. Gọi B là giao điểm của tiếp tuyến với đồ thị (C)$(B\neq A)$.Tính diện tích tam giác OAB, với O là gốc tọa độ.

A. 13 B. 8 C. 12 D. 16

Bài 4. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-x^2$ (1). Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân.

A. $\left[\begin{array}{l} M(1\pm\sqrt{2};\frac{2}{3}\mp\frac{\sqrt{2}}{3}) \\ M(1;-\frac{2}{3}) \end{array}\right.$

B. $\left[\begin{array}{l} M(1\pm\sqrt{2};-\frac{2}{3}\mp\frac{\sqrt{2}}{3}) \\ M(1;-\frac{2}{3}) \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} M(1\pm\sqrt{2};-\frac{2}{3}\mp\frac{\sqrt{2}}{3}) \\ M(1;\frac{2}{3}) \end{array}\right.$

D. $\left[\begin{array}{l} M(-1\pm\sqrt{2};-\frac{2}{3}\mp\frac{\sqrt{2}}{3}) \\ M(1;-\frac{2}{3}) \end{array}\right.$

Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân.

(Tiếp tuyến của (C) tại M tạo với các trục tọa độ một tam giác cân $\Rightarrow$ tiếp tuyến có hệ số góc $k=\pm1$).

Bài 5. Cho hàm số $y=\frac{x-2}{x-1}$ (1). Tìm m để đường thẳng $d: y=-x+m$ cắt đồ thị hàm số (1) tại 2 điểm A, B tạo thành tam giác OAB thỏa mãn $\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}=1$ với O là gốc tọa độ.

A. $m=-2$ B. $m=1$ C. $m=-1$ D. $m=2$

Bài 6. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+(m+1)x+1$ (C_m), (m là tham số thực). Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số (C_m) cắt đường thẳng $(d): y=x+1$ tại ba điểm phân biệt

$A(0;1)$, B, C sao cho bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC bằng $\sqrt{\frac{41}{2}}$, với O là gốc tọa độ.

A. $m=-1$ hoặc $m=-4$ **B.** $m=1$ hoặc $m=4$

C. $m=-1$ hoặc $m=4$ **D.** $m=1$ hoặc $m=-4$

Bài 7. Cho hàm số $y=\frac{2x}{x-1}$ (C). Tìm m để đường thẳng $(d): y=mx-m+2$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 4.

A. $m=2\pm4\sqrt{2}$ **B.** $m=3\pm4\sqrt{2}$ **C.** $m=6\pm2\sqrt{2}$ **D.** $m=6\pm4\sqrt{2}$

Bài 8. Cho hàm số $y=x^3-(m-1)x^2-3x+m+1$ (C_m)

Tìm tất cả các giá trị của m để tiếp tuyến của đồ thị (C_m) tại điểm có hoành độ bằng 1 tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 2.

A. m = 1 và m = 3 **B.** m = −1 và m = −3 **C.** m = −1 và m = 3 **D.** m = 1 và m = −3

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 1. Chọn D.

- Gọi $M\left(a;\frac{a+2}{2a+1}\right)$ là một điểm bất kì thuộc đồ thị
- Ta có: $S_{MHOK}=MH.MK=1$
- Mà $MH=|y_M|=\left|\frac{a+2}{2a+1}\right|$, $MK=|x_M|=|a|$

$$\Rightarrow |a|.\left|\frac{a+2}{2a+1}\right|=1\Leftrightarrow\left|\frac{a^2+2a}{2a+1}\right|=1\Leftrightarrow|a^2+2a|=|2a+1|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a^2+2a=2a+1\\a^2+2a=-2a-1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a^2=1\\a^2+4a+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\Rightarrow M(1;1)\\a=-1\Rightarrow M(-1;-1)\\a=-2+\sqrt{3}\Rightarrow M\left(-2+\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)\\a=-2-\sqrt{3}\Rightarrow M\left(-2-\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)\end{array}\right.$$

Vậy có 4 điểm M thỏa mãn.

Bài 2. Chọn B.

- Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{mx+2}{x-m}=-x+2\Leftrightarrow g(x)=x^2-2x+2m+2=0$ (1) với $x\neq m$
- $y=-x+2$ cắt (C_m) tại hai điểm phân biệt khi

$g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow m<-\dfrac{1}{2}$

- Gọi $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của (1), ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1.x_2=2m+2 \end{cases}$

- Các giao điểm là $A(x_1;-x_1+2); B(x_2;-x_2+2) \Rightarrow AB^2=-8(2m+1)$

- Tam giác IAB đều khi $\begin{cases} IA=IB \\ d(I;d)=\dfrac{AB\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ với $I(m;m)$

- Ta có: $d(I;d)=\dfrac{|2m-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}|m-1|; d(I;d)=\dfrac{AB\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow m=-2$ thỏa mãn điều kiện $m<-\dfrac{1}{2}$

Bài 3. Chọn C.

- Ta có: $y'(1)=9 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $A(1;5)$ là:

$y=9(x-1)+5 \Leftrightarrow y=9x-4$ (d)

- Tọa độ điểm B là giao của d và (C) có hoành độ là nghiệm phương trình:

$x^3+3x^2+1=9x-4 \Leftrightarrow x^3+3x^2-9x+5=0$

$(x-1)^2(x+5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-5 \end{array}\right.$

$B(-5;-49)$.

$\overline{AB}=(-6;-54) \Rightarrow AB=6\sqrt{82}$; $d(O,d)=\dfrac{4}{\sqrt{82}}$.

$S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}d(O,d).AB=\dfrac{1}{2}.\dfrac{4}{\sqrt{82}}.6\sqrt{82}=12$

Bài 4. Chọn B.

- Gọi x_0 là hoành độ điểm M. Yêu cầu bài toán (YCBT) $\Leftrightarrow y'(x_0)=\pm 1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0^2-2x_0-1=0 \\ x_0^2-2x_0+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1\pm\sqrt{2} \\ x_0=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M(1\pm\sqrt{2};-\frac{2}{3}\mp\frac{\sqrt{2}}{3}) \\ M(1;-\frac{2}{3}) \end{array}\right.$

Bài 5. Chọn D.

- Xét phương trình hoành độ: $\dfrac{x-2}{x-1}=-x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x^2-mx+m-2=0 \quad (*) \end{cases}$

+ Phương trình (*) có $\Delta=m^2-4m+8>0\ \forall m$ suy ra (*)có hai nghiệm phân biệt khác 1 với mọi m. Vậy d cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi m.

Gọi $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ với $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của (*): $y_1=-x_1+m; y_2=-x_2+m$

Ta có: $OA=\sqrt{2x_1^2-2mx_1+m^2}=\sqrt{2x_1^2-2mx_1+2m-4+m^2-2m+4}=\sqrt{m^2-2m+4}$

Tương tự $OB=\sqrt{m^2-2m+4}$

Từ $\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}=1$, ta có: $\frac{2}{\sqrt{m^2-2m+4}}=1\Leftrightarrow\sqrt{m^2-2m+4}=2\Leftrightarrow m=0\vee m=2$

Vì O, A, B tạo thành tam giác nên giá trị thoả mãn là m = 2.

Bài 6. Chọn D.

- Phương trình cho hoành độ giao điểm của (C_m) và (d).

$$x^3-3x^2+(m+1)x+1=x+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-3x+m=0\quad(1)\end{array}\right.$$

- Để (C_m) cắt (d) tại ba điểm phân biệt ⇔ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow\begin{cases}m<\frac{9}{4}\\m\neq 0\end{cases}$ (*)

- Giả sử $B(x_1;x_1+1),C(x_2;x_2+1)$. Khi đó $x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình (1)

- Ta có: $OB.OC=\sqrt{(2x_1^2+2x_1+1)(2x_2^2+2x_2+1)}$

- Vì $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình (1) nên: $\begin{cases}x_1^2=3x_1-m\\x_2^2=3x_2-m\end{cases}$

$$\Rightarrow OB.OC=\sqrt{(8x_1+1-2m)(8x_2+1-2m)}=\sqrt{4m^2+12m+25}$$

- Vì $S_{OBC}=\frac{1}{2}d(O,(d)).BC=\frac{OB.OC.BC}{4R}$ nên $OB.OC=2R.d(O,(d))$ (2)

$d(O,(d))=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (3)

- Từ (2) và (3) ta có: $4m^2+12m+25=41\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-4\end{array}\right.$

- Từ (*) và (**) với $m=1$ hoặc $m=-4$ thì YCBT được thỏa mãn.

Bài 7. Chọn D.

- Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là:

$$\frac{2x}{x-1}=mx-m+2\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\g(x)=mx^2-2mx+m-2=0(*)\end{cases}$$

- (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt ⇔ $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\\Delta=m^2-m^2+2m>0\\g(1)=m-2m+m-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m>0$$

- Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (*).
- Khi đó $A(x_1;mx_1-m+2), B(x_2;mx_2-m+2)$
- Theo định lí Viet, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1x_2=\dfrac{m-2}{m} \end{cases} \Rightarrow AB^2=(x_2-x_1)^2(1+m^2)=\dfrac{8}{m}(1+m^2)$
- Ta có: $d(O,AB)=\dfrac{|m-2|}{\sqrt{1+m^2}}$
- Do đó: $S_{OAB}=4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{8}{m}(1+m^2)}.\dfrac{|m-2|}{\sqrt{1+m^2}}=4 \Leftrightarrow |m-2|=2\sqrt{2}m \Leftrightarrow m=6\pm4\sqrt{2}$

  (thỏa mãn điều kiện)
- Vậy $m=6\pm4\sqrt{2}$.

Bài 8. Chọn C.

- Với $x=1 \Rightarrow y=0 \Rightarrow A(1;0)$. Ta có: $y'=3x^2-2(m-1)x-3$
- Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C_m) tại A là $y=-2(m-1)(x-1)(\Delta)$
- (Δ) cắt Ox tại A (1; 0) và cắt Oy tại $B(0;2m-2)(m\neq1)$
- Diện tích tam giác OAB là: $S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}OA.OB=\dfrac{1}{2}|x_A|.|y_B|=|m-1|$
- Theo giả thiết: $S_{\Delta OAB}=2 \Leftrightarrow |m-1|=2 \Leftrightarrow m=3$ hoặc $m=-1$ (thỏa mãn)
- Vậy giá trị m thỏa mãn đề bài là: m = –1 và m = 3

BÀI TOÁN TỔNG HỢP

CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM LẦN 1

Bài 1. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị $(C): y=x^3+3mx^2-m^3$ cắt đường thẳng $d: y=m^3x+2m^3$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3 thỏa mãn $x_1^4+x_2^4+x_3^4=83$.

A. $m=-1$ **B.** $m=2$ **C.** $m=1$ **D.** $m=-1;m=1$

Bài 2. Tìm giá trị của m để hàm số $F(x)=m^2x^3+(3m+2)x^2-4x+3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+10x-4$.

A. $m=-1$ **B.** $m=\pm1$ **C.** $m=1$ **D.** $m=2$

Bài 3. Các giá trị của tham số a để bất phương trình $2^{\sin^2x}+3^{\cos^2x}\geq a.3^{\sin^2x}$ có nghiệm thực là:

A. $a\in(-2;+\infty)$ **B.** $a\in(-\infty;3]$ **C.** $a\in[4;+\infty)$ **D.** $a\in(-\infty;-4)$

Bài 4. Số nghiệm của phương trình $e^{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\tan x$ trên đoạn $[0;2\pi]$ là:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Bài 5. Phương trình $2017^{\sin x}=\sin x+\sqrt{2-\cos^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm thực trong $[-5\pi;2017\pi]$?

A. vô nghiệm B. 2017 C. 2022 D. 2023

Bài 6. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+3mx+m-1$. Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và trục Ox có diện tích phần nằm phía trên trục Ox và phần nằm dưới trục Ox bằng nhau. Giá trị của m là:

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{3}{5}$

Bài 7. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2mx+m-2}{x+1}$ cắt đường thẳng $d: y=x+3$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB có diện tích bằng 3, với $I(-1;1)$. Tính tổng tất cả các phần tử của S

A. $\frac{7}{2}$ B. -10 C. 3 D. 5

Bài 8. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Nếu phương trình $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt thì phương trình $2f(x).f''(x)=[f'(x)]^2$ có bao nhiêu nghiệm.

A. 3 B. 1 C. 2 D. 4

Bài 9. Cho hàm số $f(x)=x^3+x^2-2x+3$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $y=f(x-2017)$ không có cực trị.

B. Hai phương trình $f(x)=m$ và $f(x-1)=m+1$ có cùng số nghiệm với mọi m.

C. Hai phương trình $f(x)=2017$ và $f(x-1)=2017$ có cùng số nghiệm.

D. Hai phương trình $f(x)=m$ và $f(x-1)=m-1$ có cùng số nghiệm với mọi m.

Bài 10. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Tìm các điểm M trên đồ thị (C) sao cho khoảng cách từ hai điểm $A(2;4)$ và $B(-4;-2)$ đến tiếp tuyến của (C) tại M là bằng nhau

A. $M(0;1)$ B. $\left[\begin{array}{l} M\left(1;\frac{3}{2}\right) \\ M\left(2;\frac{5}{3}\right)\end{array}\right.$ C. $M\left(1;\frac{3}{2}\right)$ D. $\left[\begin{array}{l} M(0;1) \\ M(-2;3) \\ M\left(1;\frac{3}{2}\right)\end{array}\right.$

(Giải phương trình trên ta có $x_0=0, x_0=-2,\ x_0=1$. Từ đó ta chọn được kết quả của bài toán)

Bài 11. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(x).f'(x)=3x^5+6x^2$. Biết $f(0)=2$. Tính $f^2(2)$

A. $f^2(2)=144$ B. $f^2(2)=100$ C. $f^2(2)=64$ D. $f^2(2)=81$

Bài 12. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}(C)$. Tìm giá trị m để đường thẳng $d: y=x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt sao cho tam giác OAB vuông tại A hoặc B.

A. $m=1\pm\sqrt{5}$. B. $m=1\pm\sqrt{3}$. C. $m=1\pm\sqrt{2}$. D. $m=1\pm\sqrt{6}$.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM LẦN 1

Bài 1. Chọn C.

Xét phương trình $x^3+3mx^2-m^2x-3m^3=0$, ta có theo định lí Viet $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-3m \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-m^2 \\ x_1x_2x_3=3m^3 \end{cases}$

Ta có: $x_1^4+x_2^4+x_3^4=\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^2-2\left(x_1^2x_2^2+\left(x_2^2x_3^2+x_3^2x_1^2\right)\right)$

$=\left[\left(x_1+x_2+x_3\right)^2-2\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)\right]^2-2\left[\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)^2-2x_1x_2x_3\left(x_1+x_2+x_3\right)\right]=83m^4$

Vậy từ $x_1^4+x_2^4+x_3^4=83$ suy ra $m=\pm1$. Kiểm tra yêu cầu về số nghiệm thấy chỉ có $m=1$ thỏa.

Bài 2. ChọnC.

Từ giả thiết, ta có:

$F'(x)=f(x)\Leftrightarrow 3m^2x^2+2(3m+2)x-4=3x^2+10x-4\Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2=3 \\ 3m+2=5 \end{cases}\Leftrightarrow m=1$

Bài 3. ChọnB.

Đặt $t=\sin^2 x, 0\le t\le 1$

Khi đó, BPT $\Leftrightarrow a\le \dfrac{2^t+3^{t-1}}{3^t}\Leftrightarrow a\le \dfrac{6^t+3}{9^t}$

Xét hàm số $y=f(t)=\dfrac{6^t+3}{9^t}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^t+3.\left(\dfrac{1}{9}\right)^t, 0\le t\le 1$

Ta có: $f'(t)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^t.\ln\dfrac{2}{3}+3.\left(\dfrac{1}{9}\right)^t\ln\dfrac{1}{9}<0$. Suy ra hàm số nghịch biến trên $[0;1]$

t	0		1
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	4	$\searrow$	1

Suy ra $a\le 4$ thì BPT có nghiệm.

Bài 4. ChọnB.

- Điều kiện của pt: $\tan x > 0 \Rightarrow x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$
- Lấy logarit tự nhiên 2 vế của pt ta có: $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \ln(\tan x) = 0$
- Xét hàm số $f(x) = \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \ln(\tan x)$

$\Rightarrow f'(x) = \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sin x\cos x} = \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{2}{\sin 2x}$

Do $-1 \le \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \le 1$ và $\frac{-2}{\sin 2x} \le -2$ nên: $f'(x) < 0, x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$

$f(0,5).f(1) < 0 \Rightarrow \exists x_1 \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

$f(3.5).f(4) < 0 \Rightarrow \exists x_2 \in \left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm trên $[0;2\pi]$.

Bài 5. ChọnD.

- Ta viết lại phương trình $2017^{\sin x} = \sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}$
- Đặt $t = \sin x, t \in [-1;1]$ ta được phương trình $2017^t = t + \sqrt{1+t^2}$ (*)
- Lấy logarit cơ số e hai vế của phương trình (*) ta được

  $t\ln 2017 = \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right) \Leftrightarrow t\ln 2017 - \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right) = 0$ (2)
- Xét hàm số $f(t) = t\ln 2017 - \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)$ với $t \in [-1;1]$
- Có $f'(t) = \ln 2017 - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} > 0$, suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến mà $f(0) = 0$ nên

phương trình (2) có nghiệm duy nhất $t = 0$ hay $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$.

Yêu cầu bài toán, ta có: $-5 \le k \le 2017$.

Bài 6. ChọnC.

- Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 3m$ và $y'' = 6x - 6$.
- Để diện tích phía trên bằng diện tích ở dưới trục hoành trước hết đồ thị hàm số phải có cực trị hay $m < 1$
- Giả sử đồ thị hàm số cắt Ox tại ba điểm $x_1 < x_2 < x_3$. Do hàm bậc ba đối xứng nhau qua điểm uốn nên yêu cầu bài toán tương đương với $x_2 = 1$ (là hoành độ điểm uốn).
- Thay $x = 1$ vào phương trình $x^3 - 3x^2 + 3mx + m - 1 = 0$ ta được $m = \frac{3}{4}$.

Bài 7. ChọnA.

Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{2mx+m-2}{x+1}=x+3 \Leftrightarrow f(x)=x^2+(4-2m)x+5-m=0$ $(x \neq -1)$. Đồ thị (C) của hàm số $y=\frac{2mx+m-2}{x+1}$ cắt đường thẳng $(d): y=x+3$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases}\Delta'_f > 0\\ f(-1)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3m-1>0\\ m\neq -2\end{cases}$ (*). (C) cắt d tại A,B suy ra x_A, x_B là nghiệm của phương trình $f(x)=0$, theo định lí Viét ta có $\begin{cases}x_A+x_B=2m-4\\ x_Ax_B=5-m\end{cases}$.

$A(x_A;x_A+3), B(x_B;x_B+3)$

$AB=\sqrt{2(x_A-x_B)^2}=\sqrt{2(x_A+x_B)^2-4x_Ax_B}=\sqrt{8m^2-28m+12}$.

Ta có: $s_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}d_{(I,d)}.AB=3$

$\Leftrightarrow AB^2=72 \Leftrightarrow 8m^2-28m-60=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-\frac{3}{2}\\ m=5\end{array}\right.$, kết hợp với (*) suy ra $\left[\begin{array}{l} m=-\frac{3}{2}\\ m=5\end{array}\right.$

thỏamãn yêu cầu bài toán. Suy ra tổng các phần tử của Slà $\frac{7}{2}$.

Bài 8. ChọnC.

Sử dụng phương pháp chuẩn hóa, ta chọn $a=0, b=-3, c=0 \Rightarrow y=x^3-3x$ thỏa $y=0$ có 3 nghiệm phân biệt. Khi đó $y'=3x^2-3, y''=6x$.

Do đó $2f(x).f''(x)=[f'(x)]^2 \Leftrightarrow 2(x^3-3x).(6x)=(3x^2-3)^2$

$\Leftrightarrow 12x^4-36x^2=9x^4-18x^2+9 \Leftrightarrow 3x^4-18x^2-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=3+2\sqrt{3}>0\\ x^2=3-2\sqrt{3}<0\end{array}\right. \Rightarrow x=\pm\sqrt{3+2\sqrt{3}}$

Bài 9. ChọnC.

- Ta có $f(x)=x^3+x^2-2x+3$ suy ra $f'(x)=3x^2+2x-2=0$ có hai nghiệm phân biệt $f(x-2017)$ có 2 điểm cực trị.
- Đặt $u=x-1$ ta có : $f(x-1)=f(u)$
- Số nghiệm của phương trình $f(x)=m$ và $f(u)=m+1$ chưa thể khẳng định của cùng số nghiệm nên sai, tương tự D sai.
- Dễ thấy số nghiệm của phương trình $f(x)=2017$ và $f(u)=2017$ là giống nhau nên C đúng.

Bài 10. ChọnD.

✓ **Phân tích:**

Bài toán này khá nặng về tính toán, và các bạn cần phải nắm rõ cách viết phương trình tiếp tuyến tại một điểm.

Giả sử $M\left(x_0;f\left(x_0\right)\right)$. Thuộc đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) tại điểm $M\left(x_0;f\left(x_0\right)\right)$ là $y=y'(x_0)(x-x_0)+f\left(x_0\right)$ hay $y=\dfrac{1}{\left(x_0+1\right)^2}\left(x-x_0\right)+\dfrac{2x_0+1}{x_0+1}$

$$\Rightarrow d:\frac{x}{\left(x_0+1\right)^2}+\frac{2x_0+2x_0+1}{\left(x_0+1\right)^2}-y=0$$

Theo bài ra ta có khoảng cách từ điểm $A(2;4)$ và $B(-4;-2)$ đến đường thẳng d là bằng nhau nên ta có:

$$\frac{\left|\dfrac{2x_0^2+2x_0+3}{\left(x_0+1\right)^2}-4\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{\left(x_0+1\right)^4}+1}}=\frac{\left|\dfrac{2x_0^2+2x_0+3}{\left(x_0+1\right)^2}+2\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{\left(x_0+1\right)^4}+1}}\Rightarrow\left|\frac{2x_0^2+2x_0+3}{\left(x_0+1\right)^2}-4\right|=\left|\frac{2x_0^2+2x_0+3}{\left(x_0+1\right)^2}+2\right|$$

Giải phương trình trên ta có $x_0=0, x_0=-2,\ x_0=1$. Từ đó ta chọn được kết quả của bài toán.

Bài 11. ChọnB.

Ta có $f\left(x\right).f'\left(x\right)=3x^5+6x^2\Leftrightarrow\int f\left(x\right).f'\left(x\right)dx=\int\left(3x^5+6x^2\right)dx$

$$\Leftrightarrow\int f\left(x\right)d\left(f\left(x\right)\right)=\frac{x^6}{2}+2x^3+C\Leftrightarrow\frac{f^2\left(x\right)}{2}=\frac{x^6}{2}+2x^3+C\Leftrightarrow f^2\left(x\right)=x^6+4x^3+2C$$

Mà $f\left(0\right)=2\Rightarrow f^2\left(0\right)=4\Rightarrow 2C=4\Rightarrow f^2\left(x\right)=x^6+4x^3+4$

Vậy $f^2\left(2\right)=\left(x^6+4x^3+4\right)\Big|_{x=2}=2^6+4.2^3+4=100$.

Bài 12. ChọnA.

Phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{2x-1}{x-1}=x+m\Leftrightarrow x^2+\left(m-3\right)x+1-m=0\ \left(*\right)$.

Ta có d cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases}\Delta=m^2-2m+5>0\\ \left(1\right)^2+\left(m-3\right).1+1-m\neq 0\end{cases}$ (luôn đúng với mọi m).

Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm phương trình $\left(*\right)$, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=3-m\\ x_1x_2=1-m\end{cases}$ và $\left(C\right)$ cắt d tại $A\left(x_1;x_1+m\right)$, $B\left(x_2;x_2+m\right)$.

Vectơ $\overrightarrow{AB}=\left(x_2-x_1;x_2-x_1\right)$ cùng phương với vectơ $\vec{u}=\left(1;1\right)$.

Tam giác OAB vuông tại A khi và chỉ khi $\overrightarrow{OA}.\vec{u}=0\Leftrightarrow 2x_1+m=0$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}x_1+x_2=3-m\\ x_1x_2=1-m\\ 2x_1=-m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x_1=-m\\ 2x_2=6-m\\ -m\left(6-m\right)=4-4m\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=1+\sqrt{5}\\ m=1-\sqrt{5}\end{array}\right.$.

Phần 2:

BÀI TOÁN THỰC TẾ

BÀI TOÁN TỐI ƯU KINH DOANH

Câu 1: Trong trận đá bóng Việt Nam gặp Thái Lan tại SVĐ Quốc gia Mỹ Đình, đơn vị Thai Ticket phân phối hơn hơn 1000 vé cho cổ động viên xứ Chùa Vàng. Nếu giá bán là 100.000 **đơn vị tiền tệ/vé** thì tất cả số vé đều được bán hết và giá vé nếu cứ tăng thêm 2.000 **đơn vị tiền tệ** thì sẽ có 10 vé không được mua nữa. Hỏi đơn vị Thai Ticket muốn có lợi nhuận cao nhất thì phải bán vé với giá bao nhiêu?

Giải:

Gọi giá vé để đơn vị Thai Ticket muốn có lợi nhuận cao nhất là 100.000 + x (đơn vị tiền tệ).

Suy ra số vé không bán được là: $\frac{10x}{2.000}$ (vé), ở đây x/200 là số nguyên.

Suy ra lợi nhuận của đơn vị Thai Ticket là:

$$(100.000+x)\left(1.000-\frac{x}{200}\right)=\frac{1}{200}(100.000+x)(200.000-x)$$

Áp dụng BĐT $ab\le\frac{(a+b)^2}{4}$ ta có: $(100.000+x)(200.000-x)\le\frac{300.000^2}{4}$

Dấu bằng có khi và chỉ khi $100.000+x=200.000-x\Leftrightarrow x=50.000$

Vậy đơn vị Thai Ticket nên bán vé với giá 150.000 đơn vị tiền tệ /vé.

✓ <u>**Bình luận:**</u>

Câu hỏi đặt ra là:

- **Nếu giá bán là 100.000 vnđ thì tất cả số vé đều được bán hết thì ta được điều gì?**

+ Thử nhẩm tính: Nếu giá là100.000 vnđ, nếu bán hết mang lại doanh thu 100triệu vnđ. Đây không phải là doanh thu cao nhất.

+ Trong thực tế thì việc bán vé cũng như các mặt hàng khác, chúng ta đều muốn tìm lợi nhuận cao nhất, nhưng ở mỗi thời điểm mỗi khác nhau thì giá cả đưa ra phải hợp lý, khi người ta thấy cần giá cao hơn họ cũng mua, tuy nhiên sẽ có sự giảm sút về số lượng sản phẩm bán ra. Giảm cũng được nếu doanh thu là cao nhất.

- **Tăng thêm 2.000 vnđ thì sẽ có 10 vé không được mua nữa? Cho ta được điều gì.**

Ta sẽ biết được số vé không bán được là $\frac{10.500}{2.000}=250$

Doanh thu bán vé trong trường hợp này là: (1.000 –250).150.000= 112,5 triệu.

Trong bài toán trên ta thấy, mặc dù bán được có 750 vé thôi, nhưng với giá bán 150.000/vé nên doanh thu là: 112,5 triệu.

Câu 2: Vào 19h00 ngày 8/11/2016 đã diễn ra trận bóng đá giữa Việt Nam và Indonesia trên sân vận động Quốc gia Mỹ Đình với sức chứa 50.000 khán giả. Với giá vé 200.000 đồng, trung bình bán được cho khán giả là 25.000 vé.Khi giá vé giảm xuống còn 195.000 đồng, số khán giả mua tăng lên 35.000 vé. Hỏi ban tổ chức sân nên bán giá vé vào sân vận động Quốc gia Mỹ Đình là bao nhiêu để đạt được doanh thu tối đa. Biết hàm biểu diễn mối quan hệ giữa giá vé vàsố vé bán được có dạng là một đường thẳng.

A. 187.500 đồng **B.**95.800 đồng **C.** 135.650 đồng **D.** 106.250 đồng

Giải:

- Vì hàm là một đường thẳng, nên gọi hàm số có dạng: $y = ax + b$ (*)

  Với x: giá vé; y: số vé bán được (cũng chính là số khán giả tham gia)

➢ Theo giả thiết: Với giá vé 200.000 đồng, bán được 25.000 vé, thay vào (*), ta có:

$$200000a + b = 25000 \quad (1)$$

➢ Theo giả thiết: Với giá vé 195 000 đồng, bán được 35000 vé, thay vào (*), ta có:

$$195000a + b = 35000 \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta giải được: $a = -2$; $b = 425000$

Vậy hàm số có dạng: $y = -2x + 425000$

- Vì sân vận động chỉ chứa tối đa 50.000 khán giả, có nghĩa là không được bán quá 50.000 vé. Cho nên điều kiện của y là: $0 \le y \le 50000$

  $0 \le -2x + 425000 \le 50000 \Leftrightarrow 187500 \le x \le 212500$

  Vậy hàm số cầu có dạng: $y = -2x + 425000$ **với** $187500 \le x \le 212500$

  Như ta biết hàm $y = -2x + 425000$

  Giá vé là x, thì hàm biểu diễn doanh thu là:

  $y = f(x) = -2x^2 + 425000x$ với $187500 \le x \le 212500$

  $y' = -4x + 425000$

  Cho $y' = 0$ có $-4x + 425000 = 0 \Leftrightarrow x = 106\,250$ (Loại)

  Vậy $\max y = f(187500) = 9$ tỉ 375 triệu đồng đạt được khi $x = 187.500$

Câu 3: Một trận bóng đá ông A định mua sau đó bán lại 20 vé xem. Nếu giá bán là 30.000VNĐ/vé thì tất cả số vé đều được bán hết.Nếu giá vé nếu cứ tăng thêm 2.000VNĐ/vé thì sẽ có 1 vé không được bán được nữa. Hỏi phải bán vé với giá là bao nhiêu để ông A thu được lợi nhuận là cao nhất?

Giải:

- Gọi giá vé để có lợi nhuận cao nhất là $30000 + x$ (VNĐ)
- Suy ra số vé không bán được là $\dfrac{x}{2000}$ (vé), x/2000 là số nguyên.

- Suy ra lợi nhuận thu được là: $\left(30000+x\right)\left(20-\dfrac{x}{2000}\right)=\dfrac{1}{2000}\left(30000+x\right)\left(40000-x\right)$
- Áp dụng BĐT $ab\le\dfrac{\left(a+b\right)^2}{4}$ ta có: $\left(30000+x\right)\left(40000-x\right)\le\dfrac{70000^2}{4}$
- Dấu bằng có khi và chỉ khi $30000+x=40000-x\Leftrightarrow x=5000$

Theo bất đẳng thức phụ thì số vé bán ra tăng với giá ban đầu là 5.000 đồng, tuy nhiên khi tính ra vé thì là một số lẻ: 2,5 vé, vậy ta lập bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	4000		5000		6000	$+\infty$
$f'(x)$		-	-	0	+	+	
$f(x)$		$f(4000)$		$f(5000)$		$f(6000)$	

Vậy ông A nên bán vé với giá 40000 VNĐ/vé hoặc 60000 VNĐ/vé.

Khi đó lợi nhuận cao nhất là 612000 đồng.

➢ **Cách khác.**

Gọi giá vé để có lợi nhuận cao nhất là $30000+x$ (VNĐ)

Suy ra số vé không bán được là $\dfrac{x}{2000}$ (vé), x/2000 là số nguyên.

Suy ra lợi nhuận thu được là: $\left(30000+x\right)\left(20-\dfrac{x}{2000}\right)=\dfrac{1}{2000}\left(30000+x\right)\left(40000-x\right)$

Áp dụng BĐT $ab\le\dfrac{\left(a+b\right)^2}{4}$ ta có: $\left(30000+x\right)\left(40000-x\right)\le\dfrac{70000^2}{4}$

Dấu bằng có khi và chỉ khi $30000+x=40000-x\Leftrightarrow x=5000$

Theo bất đẳng thức phụ thì số vé bán ra tăng với giá ban đầu là 5.000 đồng, tuy nhiên khi tính ra vé thì là một số lẻ: 2,5 vé. Do đó để thu được lợi nhuận cao nhất thì số vé không bán được nữa là 2 hoặc 3.

Nếu số vé không bán được là 2 thì $\dfrac{x}{2000}=2\Leftrightarrow x=4000$ nên giá vé là 34000 khi đó số lợi nhuận thu được là $\left(30000+x\right)\left(20-\dfrac{x}{2000}\right)=612000$

Nếu số vé không bán được là 3 thì $\dfrac{x}{2000}=3\Leftrightarrow x=6000$ nên giá vé là 36000 khi đó số lợi nhuận thu được là $\left(30000+x\right)\left(20-\dfrac{x}{2000}\right)=612000$

Câu 4: Tuyến xe buýt nhỏ Thạch Thành khi vừa khai trương tại tỉnh Nghệ An dự định: Nếu quãng đường đi dưới 20km thì giá vé là 10.000đ gọi đó là giá vé loại I. Nếu quãng đường đi trên 20km thì giá vé là 20.000đ gọi là giá vé loại II.Sau một thời gian ngắn hoạt động công ty nhận thấy: Với giá vé như vậy trung bình hàng tháng có khoảng 2.700 người mua giá vé loại I và 600 người mua giá vé loại II. Nếu giá vé loại I cứ tăng thêm 2.000đ thì có khoảng 6 người thôi không đi xe buýt mỗi ngày. Nếu giá vé loại II tăng thêm 5000đ thì có 2 người thôi không đi xe buýt 1 ngày. Hỏi nếu có thể điều chỉnh giá vé thì công ty có thể đạt được lợi nhuận cao nhất là bao nhiêu 1 tháng?Biết 1 tháng có 30 ngày.

Giải:

- Gọi giá vé loại I mới là $(10000+x)$ đ; giá vé loại II mới là $(20000+y)$ đ
- Suy ra số người không đi xe buýt nữa mỗi ngày là $\dfrac{6x}{2000};\dfrac{2y}{5000}$

Chú ý ở đây 6x/2000 và 2y/5000 là một số nguyên.

- Số tiền công ty thu được 1 tháng là:

$$S=(10000+x)\left(2700-\frac{6.30.x}{2000}\right)+(20000+y)\left(600-\frac{2.30.y}{5000}\right)$$

Áp dụng BĐT $ab\le\dfrac{(a+b)^2}{4}$ ta có:

$$S=\frac{180}{2000}(10000+x)(30000-x)+\frac{60}{5000}(20000+y)(50000-y)\le$$

$$\le\frac{180}{2000}.\frac{40000^2}{4}+\frac{60}{5000}.\frac{70000^2}{4}=50.700.000\text{ (đồng)}$$

- Dấu "="xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}10000+x=30000-x\\20000+y=50000-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=10000\\y=15000\end{cases}$

Vậy tổng lợi nhuận lớn nhất có thể của công ty là 50.700.000 (đồng).

Câu 5: Ông Minh thả cá trên cái ao diện tích $50m^2$ để nuôi cá điêu hồng. Vụ vừa qua ông nuôi với mật độ 28 con/m^2 và thu được 1,4 tấn cá thành phẩm. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình,ông thấy cứ thả giảm đi 8 con/m^2 thì mỗi con cá thành phẩm thu được tăng thêm 0,5 kg.Vậy vụ tới ông phải mua bao nhiêu cá giống để đạt được tổng năng suất cao nhất? Và năng suất đó là bao nhiêu? (Giả sử không có hao hụt trong quá trình nuôi).

Giải:

- Số cá ông thả trong vụ vừa qua là: 50.28 = 1400 (con)
- Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phẩm vụ vừa qua là: 1400/1400 = 1,0 (kg/con)
- Giả sử để đạt năng suất cao nhất ông nên giảm $8x$ con trên 1 m^2,khi đó số lượng cá còn lại là: (1400 – 400x) (chú ý 400x là một số nguyên) từ đó tính được khối lượng cá thu là: $(1400-400x)(1+0,5x)=200(3,5-x)(2+x)\le200\dfrac{\left[(3,5-x)+(2+x)\right]^2}{4}=1512,5$

(Áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số dương)

- Dấu "="xảy ra khi và chỉ khi $(3,5-x)=(2+x) \Leftrightarrow x=0,75$

Vậy vụ tới ông phải mua $1000-400.0,75=700$ (con) và tổng năng suất là: $16384(kg)$

Câu 6: Trên một chiếc xe kháchtuyến đường cố định 1 ngày có khoảng 100 khách lên xe với giá vé là 70.000đ/vé.Chủ xe nhận thấy rằng cứ tăng giá vé thêm 5.000đ thì số hành khách lại giảm 6 người/ngày.Hỏi chủ xe nên tăng giá vé thêm bao nhiêu để có được lợi nhuận là cao nhất?

Giải:

- Gọi giá vé để chủ xe có lợi nhuận cao nhấtlà $(70000+x)$ đ.
- Suy ra số người không đi xe buýt nữa mỗi ngày là $\dfrac{6x}{5000}$

Chú ý: 6x/5000 nguyên.

- Số tiền chủ xe thu được 1 ngày là: $S=(70000+x)\left(100-\dfrac{6x}{5000}\right)$
- Áp dụng BĐT $ab \le \dfrac{(a+b)^2}{4}$ ta có:

$$S=(70000+x)\left(100-\frac{6x}{5000}\right)=\frac{6}{5000}(70000+x)\left(\frac{250000}{3}-x\right)\le$$

$$\le \frac{6}{5000}.\frac{\left(70000+\dfrac{250000}{3}\right)^2}{4}=7.053.333 \text{ (đồng)}$$

- Dấu bằng có khi và chỉ khi $70000+x=\dfrac{250000}{3}-x \Leftrightarrow x=6.667$ (đồng)

Vậy tổng lợi nhuận lớn nhất có thể của công ty là 7.053.333 (đồng)

Và giá vé mới là: 70.000 + x = 70.000 + 6.667 = 76.667 (đồng/vé)

Câu 7: Một cửa hàng bánh sinh nhật vừa khai trương định bán bánh với giá 100.000đ/cái thì sẽ bán được 50 cái/ngày. Theo thống kê chủ quán phải trả 1 triệu rưỡi tiền nguyên liệu và 1 triệu tiền nhân công mỗi ngày. Qua khảo sát chủ quán thấy rằng cứ tăng thêm 10.000đ thì lại mất 4 vị khách mỗi ngày. Hỏi chủ quán nên bán bánh với giá bao nhiêu để thu nhập là cao nhất? Khi đó ông lời được bao nhiêu tiền mỗi ngày?

Giải:

- Gọi giá bánh để chủ quán có được thu nhập cao nhất $(100.000+x)$ đ.
- Số tiền chủ quán thu về từ việc bán bánh 1 ngày là:

$$S=(100.000+x)\left(50-\frac{4x}{10.000}\right)=\frac{1}{2500}(100.000+x)(125.000-x)$$

- Áp dụng BĐT $ab \le \frac{(a+b)^2}{4}$ ta có: $S \le \frac{1}{2500}.\frac{225.000^2}{4} = 5.062.500$ (đồng)
- Dấu bằng có khi và chỉ khi $100.000 + x = 125.000 - x \Leftrightarrow x = 12.500$ (đồng)

  Vậy tổng lợi nhuận chủ quán có thể thu được là:

  $5.062.500 - 1.500.000 - 1.000.000 = 2.562.500$ (đồng)

  Và giá bánh mới là: $100.000 + x = 100.000 + 12.500 = 112.500$ đồng/cái.

Câu 8: Vụ vừa qua ông Lâm Minh Hải thả nuôi 50 con cá trắm đen trong 1 cái ao rộng $120m^2$ và bán ra khi cá được 3 – 4kg với giá 240.000đ/con? Nếu số cá thả nuôi ban đầu cứ tăng thêm con thì giá trị cá giảm 4.000 đ/con. Hỏi phải thả cá với mật độ là bao nhiêu để ông Hải có được lợi nhuận là cao nhất?

Giải:

Ở bài toán này chúng ta phải cẩn thận khi có 3 số liệu biến đổi: Mật độ – Giá cá giảm – Số cá. Nhưng bài toán dễ dàng nhận thấy mối liên hệ: số cá tăng thì giá cá giảm.

- Gọi số cá thả nuôi để có lợi nhuận cao nhất là $50 + x$ (con)

Thì tổng thu nhập của ông Hải là: $S = (50+x)(240.000 - 4000x) = 4000(50+x)(60-x)$

Áp dụng BĐT $ab \le \frac{(a+b)^2}{4}$ ta có: $S = 4000(50+x)(60-x) \le 1000.\frac{110^2}{4}$ (đồng)

Dấu bằng có khi và chỉ khi $50 + x = 60 - x \Leftrightarrow x = 5$ (con)

Mật độ lúc này là: $\frac{55}{120} = 0,4583$ (con/m^2)

☐ Bài tập áp dụng

Bài 1: Trong mùa cao điểm du lịch, một tổ hợp nhà nghỉ ở Đà Nẵng gồm 100 phòng đồng giá luôn luôn kín phòng khi giá thuê 320 nghìn đồng/phòng. Qua khảo sát các năm trước bộ phận kinh doanh của nhà nghỉ thấy rằng: cứ tăng giá phòng lên $x\% (x \ge 0)$ so với lúc kín phòng (giá thuê 320 nghìn đồng/phòng) thì số phòng cho thuê giảm đi $\frac{4x}{5}\%$. Hỏi nhà nghỉ phải niêm yết giá phòng là bao nhiêu để đạt doanh thu cao nhất?

A.360 nghìn đồng. **B.**440 nghìn đồng **C.**320 nghìn đồng. **D.**400 nghìn đồng.

Bài 2: Chi phí cho xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in...) được cho bởi $C(x) = 0,0001x^2 - 0,2x + 10000$, $C(x)$ được tính theo đơn vị là vạn đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng.Tỉ số $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ với $T(x)$ là tổng chi phí (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí, được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn.Khi chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí *M(x)* thấp nhất, tính chi phí cho mỗi cuốn tạp chí đó.

A.15. 000 đồng. **B.**20.000 đồng. **C.**10.000 đồng. **D.**22.000 đồng.

Bài 3: Một người nông dân muốn bán 30 tấnlúa. Nếumỗi tấn bán với giá 4.000.000 đồng thì khách hàng mua hết, nếu cứ tăng lên 300.000 đồng mỗi tấn thì có hai tấn không bán được. Vậy cần bán một tấn lúa với giá bao nhiêu để người nông dân thu được số tiền lớn nhất?

A. 4.000.000 đồng B. 4.100.000 đồng C. 4.250.000 đồng D.4.500.000 đồng

Bài 4: Anh Phong có một cái ao với diện tích $50m^2$ để nuôi cá diêu hồng. Vụ vừa qua, anh nuôi với mật độ 20con/m^2 và thu được 1,5 tấn cá thành phẩm. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình anh thấy cứ thả giảm đi 8 con/m^2 thì mỗi con cá thành phầm thu được tăng thêm 0,5kg. Để tổng năng suất cao nhất thì vụ tới anh nên mua bao nhiêu cá giống để thả? (Giả sử không có hao hụt trong quá trình nuôi)

A. 488 con B. 658 con C. 342 con D. 512 con

Bài 5: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ tăng thêm giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng một tháng thì sẽ có 2 căn hộ bị bỏ trống. Hỏi muốn có thu nhập cao nhất thì công ty đó phải cho thuê mỗi căn hộ với giá bao nhiêu một tháng?

A. 2.225.000. B. 2.100.000 C. 2.200.000 D.2.250.000

Bài 6: Một công ty vận tải thu vé 50000 đồng mỗi khách hàng 1 tháng. Hiện mỗi tháng công ty có 10000 khách hàng. Họ dự định tăng giá vé nhưng nếu giá vé tăng 10000 đồng thì số khách hàng sẽ giảm 500 người. Hỏi công ty nên tăng giá vé là bao nhiêu để doanh thu hàng tháng là lớn nhất?

A. 80000 đồng B. 75000 đồng C. 100000 đồng D. 90000 đồng

Bài 7: Một chủ hộ kinh doanh có 32 phòng trọ cho thuê. Biết giá cho thuê mỗi tháng là 2.000.000đ/1 phòng trọ, thì không có phòng trống. Nếu cứ tăng giá mỗi phòng trọ lên 200.000đ/1 tháng, thì sẽ có 2 phòng bị bỏ trống. Hỏi chủ hộ kinh doanh phải cho thuê với giá là bao nhiêu để có thu nhập mỗi tháng cao nhất?

A. 2.600.000 đ. B. 2.400.000 đ. C. 2.000.000 đ. D. 2.200.000 đ.

Bài 8: Một công ty vận tải có 78 chiếc máy xúc. Biết giá cho thuê mỗi tháng là 4.000.000đ/ 1 máy, thì tất cả 78 máy đều được cho thuê hết.Nếu cứ tăng giá mỗi máy thêm 200.000đ thì sẽ có 3 máy không được thuê. Để có thu nhập mỗi tháng là cao nhất thì công ty đó sẽ cho thuê 1 máy mỗi tháng số tiềnlà:

A.4.600.000đ B.4.300.000đ C.4.400.000đ D.4.200.000đ

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 1: Chọn A.

- Số tiền thuê mỗi phòng sẽ bằng $320\left(1+\frac{x}{100}\right)$ nghìn đồng
- Số phòng được thuê sẽ bằng $100\left(1-\frac{4x}{500}\right)$ phòng

- Khi đó số tiền thu được sẽ bằng $S=100\left(1-\frac{4x}{500}\right).320\left(1+\frac{x}{100}\right)=\frac{64}{25}(125-x)(100+x)$ nghìn đồng.
- Ta có $S=\frac{64}{25}(125-x)(100+x)=32400-\frac{64}{25}\left(x-\frac{25}{2}\right)^2\le 32400$

Vậy $\max S=32400\Leftrightarrow x=\frac{25}{2}\Rightarrow$ Tiền thuê 1 phòng bằng $320\left(1+\frac{25}{200}\right)=360$ nghìn đồng.

Bài 2: Chọn D.

- Ta có chi phí phát hành cho x cuốn sách là $0,4x$ (vạn đồng).
- Khi đó $T(x)=0,4x+0,0001x^2-0,2x+10000=0,0001x^2+0,2x+10000$

Và $M(x)=0,0001x+\frac{10000}{x}+0,2\ge 2,2$ (vạn đồng) = 22.000 đồng.

Bài 3: Chọn C.

Gọi x là giá của một tấn lúa cần bán (x≥ 4000.000)

y là số tấn lúa không bán được

Số tấn lúa bán được là 30-y

Ta có tăng 300.000 có 2 tấn không bán được.

x–4.000.000 có y tấn không bán được

Vậy $y=\frac{x-4.000.000}{150.000}$

Số tiền thu được: P = x(30-y)=$\frac{x(8.500.000-x)}{150.000}$

Áp dụng bất đẳng thức hoặc dùng hàm số ta được giá trị lớn nhất khi x = 4.250.000

Bài 4: Chọn A.

- Số cá anh Phong thả trong vụ vừa qua là $50.20=1000$ (con)
- Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phần là $\frac{1500}{1000}=1,5\text{kg/con}$
- Gọi $x>0$ là số cá anh cần thả ít đi cho vụ tới nên sẽ tăng $0,0625x$ kg/con
- Ta có phương trình tổng khối lượng cá thu được $T=f(x)=(1000-x)(1,5+0,0625x)$

$$\Rightarrow\begin{cases} f'(x)=-0,125x+61=0\Rightarrow x=488\\ f''(x)=-0,125\end{cases}\Rightarrow \max f(x)=16384\Leftrightarrow x=488$$

Vậy ở vụ sau anh chỉ cần thả $1000-488=512$ con cá giống.

Bài 5: Chọn D.

- Giả sử giá tiền cho thuê là $2000000+x$ đồng một tháng thì thu nhập cao nhất

$\Rightarrow$ Số căn hộ bỏ trống là $\frac{2x}{100000}$

Tổng số tiền thu được là: $T=\left(50-\dfrac{2x}{100000}\right)(2000000+x)=\dfrac{(2500000-x)(2000000+x)}{50000}$.

$$T\le\dfrac{\dfrac{\left[(2500000-x)(2000000+x)\right]^2}{4}}{50000}=101250000$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2500000-x=2000000+x\Leftrightarrow x=250000$.

Như vậy, muốn có thu nhập cao nhất thì công ty đó phải cho thuê mỗi căn hộ với giá 2000000+250000 = 2250000 VNĐ một tháng.

Bài 6: Chọn B.

- **Phương pháp**: Gọi số tiền giá vé tăng lên là x (đồng)

  Thiết lập biểu thức tính doanh thu hàng tháng theo x

  Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức đó

- **Cách giải:**

  Nếu giá vé tăng lên thành x đồng thì số khách hàng giảm đi là:

  $$\frac{x-50000}{10000}.500=\frac{x-50000}{20}$$

  Khi đó số khách hàng mỗi tháng là: $10000-\dfrac{x-50000}{20}=\dfrac{250000-x}{20}$

  Doanh thu hàng tháng là:

  $$x.\frac{250000-x}{200}=\frac{1}{200}x(250000-x)\le\frac{1}{200}.\frac{(x+250000-x)^2}{4}=78125000$$

  Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 250000-x=x\Leftrightarrow x=125000$

  Vậy giá vé cần tăng lên là 75000 đồng.

Bài 7: Chọn A.

- Gọi $n,\ (n\in\mathbb{N})$ là số lần tăng giá.
- Hàm thu nhập của tháng: $f(n)=(2000000+n.200000)(32-n.2)$

  $=-400000n^2+2400000n+64000000$ là hàm bậc 2 theo n, có hệ số $a<0$

- Vậy $f(n)$ đạt giá trị lớn nhất khi $n=\dfrac{-2400000}{2.(-400000)}=3$.

  $$\left.\begin{aligned}&*f(3)=67.600.000\\&*f(0)=64.000.000\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(3)>f(0)$$

  Vậy chủ hộ sẽ cho thuê với giá $2.000.000+3x200.000=2.600.000\,đ$

➢ **Cách khác.**

Gọi $n,\ (n\in\mathbb{N})$ là số lần tăng giá.

Hàm thu nhập của tháng: $f(n)=(2000000+n.200000)(32-n.2)=400000(10+n)(16-n)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có: $f(n)\le100000(10+n+16-n)^2=67600000$

Xảy ra khi $10+n=16-n \Leftrightarrow n=3$

Do đó chủ hộ sẽ cho thuê với giá $2.000.000+3x200.000=2.600.000$ đ

Bài 8: Chọn A.

- Nếu mỗi máy thuê ở giá 4.200.000 đồng thì tổng số tiền thu được là: 4.200.000x75=315.000.000(đồng)
- Nếu mỗi máy thuê ở giá 4.400.000 đồng thì tổng số tiền thu được là: 4.400.000x72=316.800.000 (đồng)
- Nếu mỗi máy thuê ở giá 4.600.000 đồng thì tổng số tiền thu được là: 4.600.000x69=317.000.000 (đồng)$\Rightarrow$max

Nếu mỗi máy thuê ở giá 4.300.000 đồng $\Rightarrow$loại luôn vì lẻ.

BÀI TOÁN CHO TRƯỚC HÀM SỐ

Bài 1: Một công ty khai thác thủy lợi cho biết đã kết thúc đợt xả nước đẩy mặn xuống sông Hương. Giúp người dân Huế đảm bảo nước sinh hoạt, phục vụ nông nghiệp. Đợt xả nước có công suất $\sqrt{800-x^2}$ (m^3/s).Sau đợt xả đó trữ lượng nước còn lại khoảng 500 triệu m^3.Giả sử việc xả nước chống mặn diễn ra liên tục x(ngày). Nếu tiếp tục xả 20% lượng nước còn lại với khả năng xả lớn nhất (ứng với x tương ứng) đó thì công việc này sẽ mất bao nhiêu thời gian (ngày). Chọn đáp án gần đúng nhất.

A.35 ngày B. 43ngày C. 58ngày D. 67ngày

Bài 2: Một người nông dân nuôi cá trê trong một cái hồ cho rằng: Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có x con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụcân nặng được tính theo công thức: $P(x)=7500-75x$ (gam)

Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

A. 30 con cá B. 50 con cá C. 40 con cá D. 60 con cá

Bài 3: Một bác sĩ ở bệnh viện đa khoa đã tính độ giảm huyết áp của bệnh nhân A theo công thức: $F(x)=0,02x^2(30-x)$ trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân A để huyết áp giảm nhiều nhất.

A. 20mg B.60mg C. 80mg D..40mg

Bài 4: Một vị khách du lịch chèo thuyền ngược dòng sông Amazon để thăm quan phong cảnh thiên nhiên ở đây, đoạn đường mà vị khách đó đi được là 400km. Vận tốc dòng nước là 6km/h. Nếu vận tốc của thuyền khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của du khách khi chèo thuyền trong t giờ được tính bởi công thức:

$$E(v)=cv^3t$$

Trong đó c là một hằng số, E có đơn vị là jun. Tìm vận tốc của thuyền khi nước đứng yên để năng lương tiêu hao của du khách khi chèo thuyền là ít nhất.

A. 7km/h B. 5km/h C. 6km/h D. 9km/h

Bài 5: Hằng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy chiều. Độ sâu h (*m*) của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (*h*) trong một ngày cho bởi công thức $h = 2\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 10$. Mực nước của kênh cao nhất vào lúc mấy giờ tối?

A. 10h B. 9h C. 8h D. 7h

Bài 6: Số sản phẩm của một hãng đầu DVD sắp sản xuất được trong 1 ngày là giá trị của hàm số: $f(m,n) = m^{\frac{2}{3}}.n^{\frac{1}{3}}$, trong đó *m* là số lượng nhân viên và *n* là số lượng lao động chính. Mỗi ngày hãng phải sản xuất được ít nhất 40 sản phẩm để đáp ứng nhu cầu khách hàng. Biết rằng mỗi ngày hãng đó phải trả lương cho một nhân viên là 6 USD và cho một lao động chính là 24 USD. Tìm giá trị nhỏ nhất chi phí trong 1 ngày của hãng sản xuất này.

A.720 USD B.600 USD C.500 USD D.1720 USD

Bài 7: Một công ty kinh doanh nghiên cứu thị trường trước khi tung ra sản phẩm và nhận thấy để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm loại *A* và *B* thì mất lần lượt là 2 000 USD và 4 000 USD. Nếu sản xuất được x sản phẩm loại *A* và y sản phẩm loại *B* thì lợi nhuận mà công ty thu được là $L(x,y) = 8000.x^{\frac{1}{3}}.y^{\frac{1}{2}}$ USD. Giả sử chi phí để sản xuất hai loại sản phẩm *A, B* là 40000 USD, gọi x_0, y_0 lần lượt là số sản phẩm loại *A, B* để lợi nhuận lớn nhất. Tính $x_0^3 + y_0^5$

A.17319 B.8288 C.8119 D.3637

Bài 8: Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được xác định bởi công thức $G(x) = 0{,}024x^2(30-x)$, trong đó *x* là liều lượng thuốc tiêm cho bệnh nhân cao huyết áp (*x* được tính bằng mg). Tìm lượng thuốc để tiêm cho bệnh nhân cao huyết áp để huyết áp giảm nhiều nhất.

A.20mg B.0,5mg C.2,8mg D.15mg

Bài 9: Một xe buýt của hãng xe A có sức chứa tối đa là 50 hành khách. Nếu một chuyến xe buýt chở x hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách là: $20\left(3 - \frac{x}{40}\right)^2$ (nghìn đồng).

Khẳng định đúng là:

A. Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất bằng 3.200.000 đồng.

B. Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất khi có 45 hành khách.

C. Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất bằng 2.700.000 đồng.

D. Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất khi có 50 hành khách.

Bài 10: Số sản phẩm của một hãng đầu DVD sản xuất được trong 1 ngày là giá trị của hàm số: $f(m,n) = m^{\frac{2}{3}}.n^{\frac{1}{3}}$, trong đó m là số lượng nhân viên và n là số lượng lao động chính. Mỗi ngày hãng phải sản xuất được ít nhất 40 sản phẩm để đáp ứng nhu cầu khách hàng. Biết rằng mỗi ngày hãng đó phải trả lương cho một nhân viên là 6 USD và cho một lao động chính là 24 USD.Tìm giá trị nhỏ nhất chi phí trong 1 ngày của hãng sản xuất này.

A.1720 USD B.720 USD C.560 USD D.600 USD

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 1: Chọn C.

- Lượng nước xả ra trong một ngày là: $86400\sqrt{800-x^2}$ (m³)
- Lượng nước xả ra trong x ngày là: $86400x\sqrt{800-x^2}$ (m³)
- Xét hàm $f(x)=86400x\sqrt{800-x^2}$, $x\in\left(0;20\sqrt{2}\right]$

Ta có: $86400x\sqrt{800-x^2}\le 86400.\dfrac{x^2+800-x^2}{2}=34\,560\,000$ m³

Vậy max $f(x)=34\,560\,000$ m³ đạt được khi $x=\sqrt{80-x^2}\Leftrightarrow x=20$

Điều này có nghĩa là khi x = 20 ngày thì lưu lượng nước được xả ra là lớn nhất20% lượng nước hiện có là: 500000000.20% = 100 000 000 (m³)

Lượng nước xả ra trong một ngày ứng với điều kiện x để xả nước lớn nhất là:

$$86400\sqrt{800-20^2}=1\,728\,000 \text{ (m}^3\text{)}$$

Thời gian hoàn thành công việc là: $t=\dfrac{100\,000\,000}{1728000}\approx 58$ ngày

Bài 2: Chọn B.

- Cân nặng của một con cá trê là: $P(x)=7500-75x$
- Cân nặng của x con cá trê là: $x.P(x)=7500x-75x^2$, $x\in(0;100)$
- Xét hàm số $F(x)=7500x-75x^2$, $x\in(0;100)$. Để thu hoạch được nhiều cá nhất thì cân nặng của x con cá trê phải lớn nhất hay F(x) đạt giá trị lớn nhất.

$F'(x)=7500-150x=0\Leftrightarrow x=50$

- Bảng biến thiên:

x	0		50		100
F'(x)		+	0	−	
F(x)		↗	187500	↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy F(x) đạt giá trị lớn nhấtkhi $x=50$ con cá.

Vậy phải thả 50 con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sạu một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất.

Bài 3: Chọn A.

Thực chất đây là bài toán tìm cực trị của hàm $F(x)$ mà cụ thể là giá trị lớn nhất của $F(x)$ với điều kiện $x \geq 0$.

Xét hàm $F(x) = 0{,}02x^2(30 - x)$, $x \in [0; +\infty)$

$$F'(x) = 0{,}04.30x - 0{,}06.x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 20 \end{array}\right.$$

x	0		20		$+\infty$
$F'(x)$		$+$		$-$	
$F(x)$		$\nearrow$	80	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $F(x) \leq 80$ do đó $\max F(x) = 80$ khi $x = 20$

Vậy liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân A để huyết áp giảm nhiều nhất là 20mg.

Bài 4: Chọn D.

- Vận tốc của thuyền còn lại là: $v - 6$
- Thời gian thuyền đi được 400km là: $t = \dfrac{400}{v-6}$ do đó: $E(v) = \dfrac{400cv^3}{v-6}$
- Do $c > 0$ nên để năng lượng tiêu hao của du khách khi chèo thuyền là ít nhất thì $E(v)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi hàm số $E_1(v) = \dfrac{400v^3}{v-6}$, $v \in (6; +\infty)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$$E_1'(v) = \frac{800v^3 - 7200v^2}{(v-6)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = 0 \\ v = 9 \end{array}\right.$$

- Bảng biến thiên:

v	0		9		$+\infty$
$E_1'(v)$		$-$	0	$+$	
$E_1(v)$		$\searrow$	97200	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $E(v)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi v = 9km/h.

Vậy vận tốc của thuyền khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao của du khách khi chèo thuyền là ít nhất là 9km/h.

Bài 5: Chọn A.

- Để mực nước cao nhất thì $f(t) = \cos\left(\dfrac{\pi t}{6} + \dfrac{\pi}{3}\right)\max = 1\,(t > 0)$
- Dấu bằng có khi và chỉ khi $\dfrac{\pi t}{6} + \dfrac{\pi}{3} = 2k\pi \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 10(h) \\ t = 22(h) \end{array}\right.$

Vậy mực nước cao nhất vào lúc 10h tối.

Bài 6: Chọn A.

- Theo giả thiết ta có $m^{\frac{2}{3}}.n^{\frac{1}{3}} \ge 40$, bài toán yêu cầu tìm giá trị nhỏ nhất của $P = 6m + 24n$.
- Ta có $P = 3m + 3m + 24n \ge 3\sqrt[3]{3m.3m.24n} = 18.m^{\frac{2}{3}}.n^{\frac{1}{3}} \ge 720$.

  Dấu "=" xảy ra khi $m = 80, n = 10$.

  Vậy giá trị nhỏ nhất chi phí trong một ngày của hãng sản xuất là 720 USD.

  Ta cần tìm GTLN của $x(t)$ với $t \in [0;6]$. Ta có: $x'(t) = v(t) = 0$ khi $t = 2$ hoặc $t = 5$,

  $x(0) = C, x(2) = \frac{26}{3} + C, x(5) = \frac{25}{6} + C, x(6) = 6 + C$.

  Vậy GTLN của $x(t)$ (với $t \in [0;6]$) đạt được khi $t = 2$

Bài 7: Chọn B.

Cần tìm $x > 0; y > 0$ để $L(x,y) = 8000.x^{\frac{1}{3}}.y^{\frac{1}{2}}$ lớn nhất biết rằng $40.000 = 2000x + 4000y$

$\Leftrightarrow 20 = x + 2y$

Ta có: $\left(x^{\frac{1}{3}}.y^{\frac{1}{2}}\right)^6 = x^2y^3$

$$20 = x + 2y = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{2y}{3} + \frac{2y}{3} + \frac{2y}{3} \ge 5\sqrt[5]{\frac{x^2y^3.2^3}{2^2 3^3}}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{2y}{3} \\ 20 = x + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 6 \end{cases}$

Do đó $L(x,y) = 8000.x^{\frac{1}{3}}.y^{\frac{1}{2}}$ lớn nhất khi và chỉ khi $x = 8, y = 6$.

Như vậy $x_0^3 + y_0^5 = 8^3 + 6^5 = 8288$.

Bài 8: Chọn A.

Bài toán đi tìm $x \in [0;30]$ để $G(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

$$G(x) = 0,024x^2(30 - x) = -\frac{3}{125}x^3 + \frac{18}{25}x^2 \Rightarrow G'(x) = -\frac{9}{125}x^2 + \frac{36}{25}x$$

$$G'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 20 \in (0;30) \end{array}\right.$$

Ta có $G(20) = 96; G(30) = 0; G(0) = 0$

Vậy $G(x)$ đạt giá trị lớn nhất là 96 khi $x = 20$

Bài 9: Chọn A.

- Số tiền của chuyến xe buýt chở x hành khách là:

$$f(x) = 20x.\left(3 - \frac{x}{40}\right)^2 = 20\left(9x - \frac{3x^2}{20} + \frac{x^3}{1600}\right)(0 < x \le 50)$$

$$f'(x)=20\left(9-\frac{3x}{10}+\frac{3x^2}{1600}\right)\Leftrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=40\\x=120\end{array}\right.\Rightarrow\max_{[0;50]}f(x)=f(40)=3200000$$

x	0		40		50
y'		+	0	-	
y		↗	3200000	↘	

Vậy: một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất bằng 3.200.000(đồng).

Bài 10: Chọn B.

- Ta có giả thiết: $m^{\frac{2}{3}}.n^{\frac{1}{3}}\geq 40\Leftrightarrow m^2n\geq 64000$ với $m,n\in\mathbb{N}$
- Tổng số tiền phải chi trong một ngày là: $6m+24n=3m+3m+24n\geq 3\sqrt[3]{216m^2n}\geq 720$

  Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $3m=24n\Leftrightarrow m=8n$

  Do đó, $m^2n\geq 64000\Leftrightarrow 64n^3\geq 64000\Leftrightarrow n\geq 10$

  Ta chọn $n=10\Rightarrow m=80$

  Vậy chi phí thấp nhất để trả cho 80 nhân viên và 10 lao động chính để sản xuất đạt yêu cầu là 720 USD.

KHOẢNG CÁCH – PITAGO
TỐI ƯU CHUYỂN ĐỘNG

Bài 1: Trong bài thực hành của môn huấn luyện quân sự có tình huống chiến sĩ chạy một đoạn đường rồi phải bơi qua một con sông để tấn công một mục tiêu ở phía bờ bên kia sông. Biết rằng lòng sông rộng 144(m), vận tốc bơi của chiến sĩ bằng nửa vận tốc chạy trên bộ. Bạn hãy cho biết chiến sĩ phải bơi bao nhiêu mét để đến được mục tiêu nhanh nhất, nếu như dòng sông là thẳng, mục tiêu ở cách chiến sĩ m (km)theo đường chim bay.

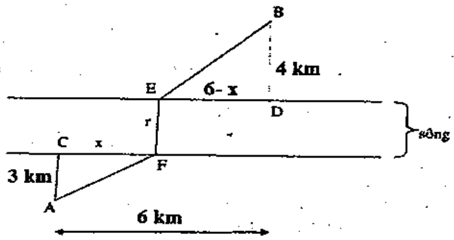
A. $96\sqrt{3}\,(m)$ B. $133,33\,(m)$ C. $143,23\,(m)$ D. $\frac{200}{\sqrt{3}}\,(m)$

Bài 2: Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo tại C. Khoảng cách ngắn nhất từ C đến B là 1 km. Khoảng cách từ B đến A là 4 km. Mỗi km dây điện đặt dưới nước mất 5000 USD, còn đặt dưới đất mất 3000 USD. Hỏi điểm S trên bờ cách B bao nhiêu để khi mắc dây điện từ A qua S rồi đến C là ít tốn kém nhất.

A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. 3

Bài 3: Một con đường được xây dựng giữa hai thành phố A và B. Hai thành phố này bị ngăn cách một con sông có chiều rộng r. Người ta cần xây 1 cây cầu bắt qua sông biết rằng A cách con sông một khoảng 3 km. B cách con sông một khoảng 4 km (hình vẽ).

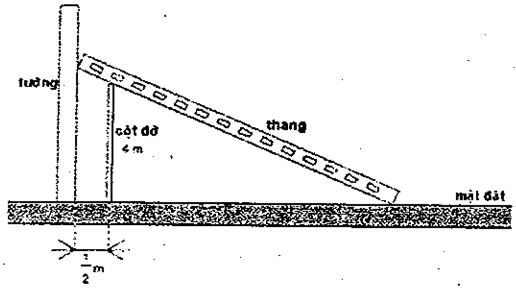
Hãy các định vị trí xây cầu (khoảng cách CF) để tổng khoảng cách giữa các thành phố là nhỏ nhất.



A. $\frac{18}{5}$ km B. 4 km

C. 3 km D. $\frac{18}{7}$ km

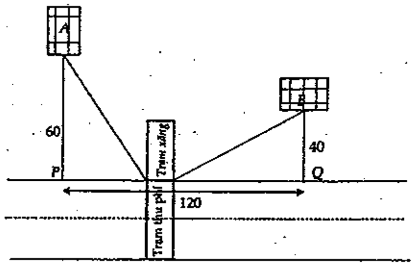
Bài 4: Tính chiều dài bé nhất của cái thang để nó có thể tựa nào tường và mặt đất, ngang qua cột đỡ cao 4m, song song và cách tường 0,5m kể từ tâm của cột đỡ (hình vẽ).



A. 4,3576 m B. 3,7521 m

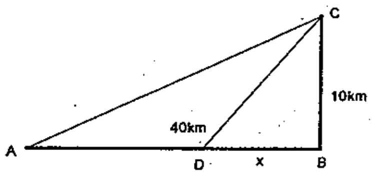
C. 6,8976 m D. 5,5902 m

Bài 5: Đường cao tốc mới xây nối hai thành phố A và B, hai thành phố này muốn xây một trạm thu phí và trạm xăng ở trên đường cao tốc như hình vẽ. Để tiết kiệm chi phí đi lại, hai thành phố này quyết định tính toán xem xây trạm thu phí ở vị trí nào để tổng khoảng cách từ hai trung tâm thành phố đến trạm là ngắn nhất, biết khoảng cách từ trung tâm thành phố A, B đến đường cao tốc lần lượt là 60km và 40km và khoảng cách giữa hai trung tâm thành phố là 120km (được tính theo khoảng cách của hình chiếu vuông góc của hai trung tâm thành phố lên đường cao tốc, tức là PQ kí hiệu như hình vẽ). Tìm vị trí của trạm thu phí và trạm xăng? (Giả sử chiều rộng của trạm thu phí không đáng kể).



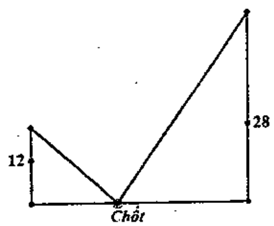
A. 72km kể từ P B. 42km kể từ Q C. 48km kể từ P D. Tại P

Bài 6: Một người cần đi từ khách sạn A bên bờ biển đến hòn đảo C. Biết rằng khoảng cách từ đảo C đến bờ biển là $10km$, khoảng cách từ khách sạn A đến điểm ngắn nhất tính từ đảo C vào bờ là $40km$. Người đó có thể đi đường thủy hoặc đi đường bộ rồi đi đường thủy (như hình vẽ dưới đây). Biết kinh phí đi đường thủy là $5\,USD/km$, đườngbộ là $3\,USD/km$. Hỏi người đó phải đi đường bộ một khoảng bao nhiêu để kinh phí nhỏ nhất? ($AB = 40km$, $BC = 10km$)



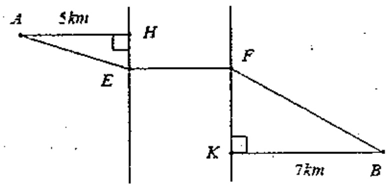
A. $\frac{15}{2}km$. B. $\frac{65}{2}km$. C. $10km$. D. $40km$.

Bài 7: Có hai chiếc cọc cao *12m* và *28m*, đặt cách nhau *30m* (xem hình minh họa dưới đây). Chúng được buộc bởi hai sợi dây từ một cái chốt trên mặt đất nằm giữa hai chân cột tới đỉnh của mỗi cột. Gọi *x (m)* là khoảng cách từ chốt đến chân cọc ngắn. Tìm *x* để tổng độ dài hai dây ngắn nhất.



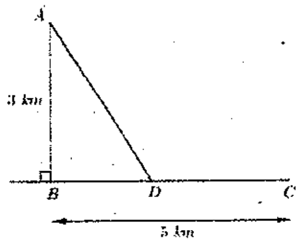
A. $x=9$. B. $x=10$. C. $x=11$. D. $x=12$.

Bài 8: Hai thành phố A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu EF bắc qua sông biết rằng thành phố A cách con sông một khoảng là $5\,km$ và thành phố B cách con sông một khoảng là $7\,km$ (hình vẽ), biết tổng độ dài $HE+HF=24(km)$. Hỏi cây cầu cách thành phố A một khoảng là bao nhiêu để đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất (đi theo đường $AEFB$)



A. $5\sqrt{3}km$. B. $10\sqrt{2}km$. C. $5\sqrt{5}km$. D. $7,5km$.

Bài 9: Bạn Hoa đi từ nhà ở vị trí A đến trường học tại vị trí C phải đi qua cầu từ A đến B rồi từ B tới trường. Trận lũ lụt vừa qua cây cầu bị ngập nước, do đó bạn Hoa phải đi bằng thuyền từ nhà đến một vị trí D nào đó ở trên đoạn BC với vận tốc $4km/h$ sau đó đi bộ với vận tốc $5km/h$ đến C. Biết độ dài $AB=3km, BC=5km$. Hỏi muộn nhất mấy giờ bạn Hoa phải xuất phát từ nhà để có mặt ở trường lúc 7h30 phút sáng kịp vào học?



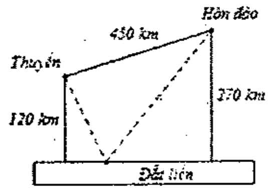
A. 6h03 phút B. 6h16 phút

C. 5h30 phút D. 5h34 phút

Bài 10: S(x) là diện tích 1 mặt cắtA đến một hòn đảo ở C như hình vẽ. Khoảng cách từ C đến B là 1km. Bờ biển chạy thẳng từ A đến B với khoảng cách là 4km. Tổng chi phí lắp đặt cho 1km dây điện trên biển là 40 triệu đồng, còn trên đất liền là 20 triệu đồng. Tính tổng chi phí nhỏ nhất để hoàn thành công việc trên (làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy)

A. 106,25 triệu đồng B. 120 triệu đồng C. 164,92 triệu đồng D. 114,64 triệu đồng

Bài 11: Một con thuyền đang ở ngoài khơi cách đất liền 120 km và cách hòn đảo 450 km. Hòn đảo cách đất liền 270 km. Con thuyền cần cập bến để tiếp nhiên liệu rồi mang quà Tết ra đảo. Quãng đường ngắn nhất mà con thuyền đó đi là (làm tròn đến hàng đơn vị)



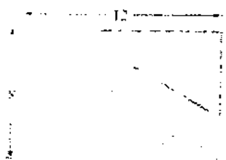
A. 711 km B. 584 km

C. 623 km D. 576 km

Bài 12: Kì thi THPT Quốc gia năm 2016 vừa kết thúc, Nam đỗ vào trường đại học Bách Khoa Hà Nội.Kì I của năm nhất gần qua, kì II sắp đến.Hoàn cảnh không được tốt nên gia đình rất lo lắng về việc đóng học phí cho Nam, kì I đã khó khăn, kì II càng khó khăn hơn. Gia đình đã quyết định bán một phần mảnh đất hình chữ nhật có chu vi $50\,m$, lấy tiền lo cho việc học của Nam cũng như tương lai của em. Mảnh đất còn lại sau khi bán là một hình vuông cạnh bằng chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật ban đầu.Tìm số tiền lớn nhất mà gia đình Nam nhận được khi bán đất, biết giá tiền 1 m^2 đất khi bán là 1500000 đồng.

A.112687500 đồng. **B.**114187500 đồng. **C.**115687500 đồng. **D.**117187500 đồng.

Bài 13: Cho một tờ giấy hình chữ nhật với chiều dài 12 *cm* và chiều rộng 8 *cm*. Gấp góc bên phải của tờ giấy sao cho góc ở đỉnh của nó chạm với đáy hình vẽ. Khi độ dài nếp gấp là nhỏ nhất thì giá trị nhỏ nhất bằng



A. $6\sqrt{3}$ **B.** $6\sqrt{15}+6\sqrt{3}$

C. $6\sqrt{15}-6\sqrt{3}$ **D.** $8\sqrt{2}$

Bài 14: Một miếng bìa hình tam giác đều ABC, cạnh bằng 16. Học sinh Trang cắt một hình chữ nhật $MNPQ$ từ miếng bìa trên để làm biển trông xe cho lớp trong buổi ngoại khóa (với M, N thuộc cạnh BC; P, Q lần lượt thuộc cạnh AC và AB). Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $16\sqrt{3}$. **B.** $8\sqrt{3}$. **C.** $32\sqrt{3}$. **D.** $34\sqrt{3}$.

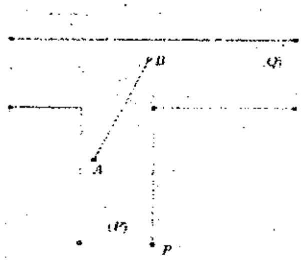
KÌ THI THPT QUỐC GIA LẦN I TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU

Bài 15: Cho hình thang cân có độ dài đáy nhỏ và hai cạnh bên đều bằng 1 mét. Khi đó hình thang đã cho có diện tích lớn nhất bằng?

A. $3\sqrt{3}m^2$ **B.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}m^2$ **C.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}m^2$ **D.** $1m^2$

ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA MÔN TOÁN SỞ GD&DT BẮC GIANG – LẦN 1

Bài 16: Mương nước (P) thông với mương nước (Q), bờ của mương nước (P) vuông góc với bờ của mương nước (Q). Chiều rộng của hai mương nước bằng nhau và bằng 8m. Một thanh gỗ AB, thiết diện nhỏ không đáng kể trôi từ mương (P) sang mương (Q). Độ dài lớn nhất của thanh AB (lấy gần đúng đến chữ số phần trăm) sao cho AB khi trôi không bị vướng là:



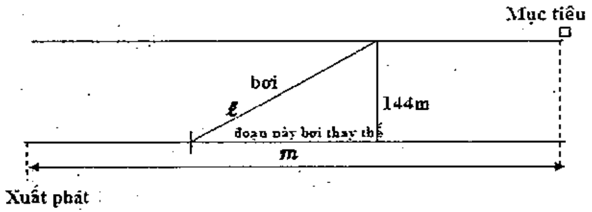
A. 23,26m **B.** 22,61m **C.** 22,63m **D.** 23,62m

Bài 17: Một trang chữ của một quyển sách tham khảo Văn học cần diện tích. Biết rằng trang giấy được căn lề trái là 2cm, lề phải là 2cm, lề trên 3cm và lề dưới là 3cm. Trang sách đạt diện tích nhỏ nhất thì có chiều dài và chiều rộng là:

A. 24cm và 16cm B. 32cm và 12cm C. 40cm và 20cm D. 30cm và 20cm

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 1: Chọn A.



Vấn đề là chọn thời gian bơi và thời gian đi bộ sao cho tối ưu. Giả sử độ dài đoạn bơi là ℓ (là ẩn số), và tốc độ bơi của chiến sĩ là υ(hằng số). Kí hiệu m (hằng số) là độ dài đoạn sông kể từ lúc người chiến sĩ xuất phát đến đồn địch, khi ấy tổng thời gian bơi và chạy bộ của người chiến sĩ là: $\tau = \frac{\ell}{\upsilon} + \frac{m-\sqrt{\ell^2-144^2}}{2\upsilon}$

$$\tau = \frac{\ell}{v} + \frac{m-\sqrt{\ell^2-144^2}}{2v} = \frac{1}{2v}\left(2\ell - \sqrt{\ell^2-144^2}\right) + \frac{m}{2v}$$

Do m, v cố định nên thời gian đạt cực tiểu khi hàm số $f(\ell) = 2\ell - \sqrt{\ell^2-144^2}$ đạt cực tiểu

Tức là $g(\ell) = 2\ell - \sqrt{\ell^2-144^2}, \ell \in [144;+\infty)$ đạt cực tiểu

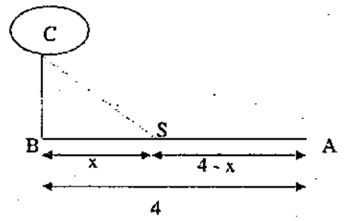
Xét $g'(\ell) = 2 - \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2-144^2}} = 0 \Leftrightarrow \ell = 96\sqrt{3}$

Từ bảng biến thiên ta thấy $g(\ell) \geq g\left(96\sqrt{3}\right) \Rightarrow g(\ell)_{\min} = g\left(96\sqrt{3}\right)$

Đạt được khi $\ell = 96\sqrt{3}$

Lúc này thời gian toàn bộ buổi chạy là: $\tau = \frac{249,15}{2\upsilon} + \frac{m}{2\upsilon} = \frac{124}{\upsilon} + \frac{m}{2\upsilon}$

Bài 2: Chọn C.



Gọi x là khoảng cách từ S tới B. Khi đó khoảng cách từ S tới A là $4 - x\ (0 < x < 4)$

Chi phí mắc dây điện từ A qua S rồi đến C là: $f(x) = 5000\sqrt{1 + x^2} + 3000(4 - x)$

$$f'(x) = \frac{5000x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 3000 = 1000\left(\frac{5x - 3\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

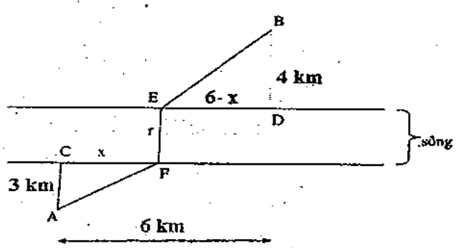
Bảng biến thiên $\Rightarrow \min f(x) = f\left(\frac{3}{4}\right) = 16000$ khi $x = \frac{3}{4}$

Vậy để chi phí ít tốn kém nhất thì điểm S phải cách B là $\frac{3}{4}$.

Bài 3: Chọn D.

Gọi $CF = x$. Khi đó $ED = p - x$

Khoảng cách giữa các thành phố là



$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3^2} + r + \sqrt{4^2 + (6 - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3^2}} + \frac{x - 6}{\sqrt{4^2 + (6 - x)^2}},$$

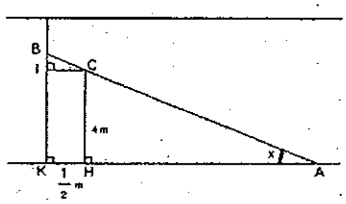
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3^2}} + \frac{x - 6}{\sqrt{4^2 + (6 - x)^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{18}{7}$$

Bảng biến thiên suy ra $\min f(x) = f\left(\frac{18}{7}\right)$

Vậy để khoảng cách giữa hai thành phố nhỏ nhất thì $x = \frac{18}{7}$.

Bài 4: Chọn D.

Đặt $AB = \ell$ là chiều dài của cái thang, $HC = 4m$ là cột đỡ, C là giao điểm của cột đỡ và thang, x là góc hợp bởi mặt đất và thang (hình vẽ). Ta có:



$$AB = AC + BC = \frac{CH}{sinx} + \frac{CI}{cosx} = \frac{4}{sinx} + \frac{1}{2cosx}$$

Xét hàm $f(x) = \frac{4}{sinx} + \frac{1}{2cosx}$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$$f'(x) = -\frac{4cosx}{sin^2x} + \frac{sinx}{2cos^2x} = \frac{sinx^3 - 8cos^3x}{2sin^2xcos^2x} = 0 \Leftrightarrow tanx = 2 \Leftrightarrow x = arctan2$$

Ta có: $f(x) \geq f(arctan2) \Rightarrow minf(x) = f(arctan2) \approx 5,5902$

Vậy chiều dài bé nhất của cái thang là $5,5902m$.

➢ **Cách khác.**

Gán hệ trục tọa độ Oxy với K là gốc tọa độ O, AK trùng với Ox, BK trùng với Oy

Giả sử $A(a;0), B(0;b) \Rightarrow AB: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. Suy ra $AB=\sqrt{a^2+b^2}$

Ta có $C\left(\frac{1}{2};4\right)$ mà $C\in AB \Rightarrow \frac{1}{2a}+\frac{4}{b}=1 \Rightarrow b=\frac{8a}{2a-1}$

Ta có $AB=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{8a}{2a-1}\right)^2}$

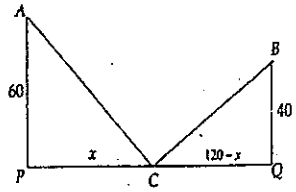
Xét hàm số $y=f(a)=a^2+\left(\frac{8a}{2a-1}\right)^2$ ta có $f'(a)=\frac{2a(2a-5)(4a^2+13)}{(2a-1)^3}$

Ta có $f'(a)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0(l) \\ a=\frac{5}{2}\end{array}\right.$. Do đó $\min f(a)=f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5\sqrt{5}}{2}=5,5902$

Bài 5: Chọn A.

__Phân tích:__ Vẽ lại hình vẽ thì ta có hình vẽ đơn giản hóa như sau:

Thực chất bài toàn trở thành tìm x để AC+BC nhỏ nhất.



Theo định lý Pytago ta có $AC=\sqrt{60^2+x^2}$;

$BC=\sqrt{(120-x)^2+40^2}=\sqrt{x^2-240x+16000}$

Khi đó

$f(x)=AC+BC=\sqrt{x^2+3600}+\sqrt{x^2-240x+16000}$. Ta cần tìm $\underset{(0;12)}{\text{Min}}\, f(x)$.

Ta có $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3600}}+\frac{x-120}{\sqrt{x^2-240x+16000}}$; khi bấm máy tính nhẩm bằng cách nhậpvào màn hình biểu thức f'(x) và ấn $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{SLOVE}}$ và chọn một số nằm trong khoảng (0;120) để dò nghiệm, như tôi nhập 2 máy nhanh chóng hiện nghiệm là 72.

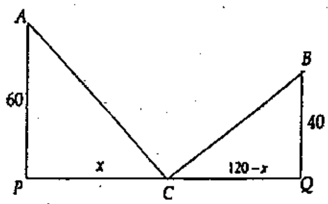
Bấm máy tính sử dụng nút TABLE ta nhận thấy phương trình có duy nhất một nghiệm này do f'(x) chỉ đổi dấu qua 72. Khi đó ta có BBT sau:

x	0	72	120
f'(x)	0 +		
f(x)	↘	Min	↗

Vậy từ đó ta có thể kết luận CP=72.

➢ **Cách khác.**

Phân tích: Vẽ lại hình vẽ thì ta có hình vẽ đơn giản hóa như sau:



Thực chất bài toàn trở thành tìm x để AC+BC nhỏ nhất.

Theo định lý Pitago ta có $AC = \sqrt{60^2 + x^2}$;

$BC = \sqrt{(120 - x)^2 + 40^2}$

Khi đó $f(x) = AC + BC = \sqrt{x^2 + 60^2} + \sqrt{(120 - x)^2 + 40^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Mincopxky ta có $f(x) \geq \sqrt{(x + 12 - x)^2 + (60 + 40)^2} = \sqrt{12^2 + 100^2}$

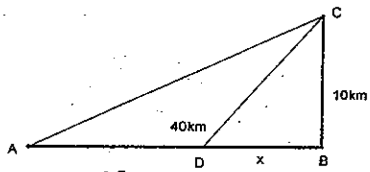
Xảy ra khi $\frac{x}{60} = \frac{120 - x}{40} \Leftrightarrow x = 72$. Nên cách P $72km$

Bài 6: Chọn B.

Giả sử người đó đi bộ từ A đến D, rồi đi đường thủy từ D đến C.

Đặt $x = BD \Rightarrow AD = 40 - x$, $DB = \sqrt{x^2 + 10^2} = \sqrt{x^2 + 100}$ với $0 \leq x \leq 40$

Khi đó kinh phí phải trả là:



$f(x) = 3(40 - x) + 5\sqrt{x^2 + 100}$ với $0 \leq x \leq 40$.

Ta có: $f'(x) = -3 + \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 100}}$.

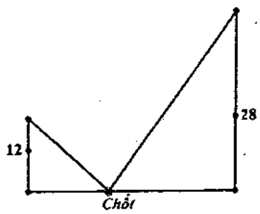
Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 + 100} = 5x \Leftrightarrow 9x^2 + 900 = 25x^2 \Leftrightarrow x = \frac{15}{2}$.

Mà $f(0) = 1700$, $f(40) = 50\sqrt{17}$, $f\left(\frac{15}{2}\right) = 160$ nên $\min\limits_{0 \leq x \leq 40} f(x) = 160$ khi $x = \frac{15}{2}$.

Khi đó $AD = \frac{65}{2}$ hay người đó phải đi bộ $\frac{65}{2}km$ để kinh phí ít nhất.

Bài 7: Chọn A.

Kí hiệu x là khoảng cách từ chân cột thấp tới chốt buộc; y, z là độ dài hai sợi dây như hình vẽ.



Khi đó khoảng cách từ chốt buộc tới chân cột thứ hai là $30 - x$.

Điều kiện $0 < x < 30; y, z > 0$. Gọi d là tổng độ dài hai sợi dây. Khi đó $d = y + z$

Theo Pitago, ta có $x^2 + 12^2 = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{x^2 + 144}$; $(30 - x)^2 + 28^2 = z^2$

$\Rightarrow y = \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1684} \quad (0 < x < 30)$

Ta có $d' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{x - 30}{\sqrt{x^2 - 30x + 1684}}$

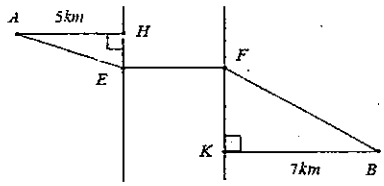
$d'=0 \Leftrightarrow x\sqrt{x^2-60x+1684}=(30-x)\sqrt{x^2+144}$

$\Leftrightarrow x^2\left(x^2-60x+1684\right)=(30-x)^2\left(x^2+144\right)$

$\Leftrightarrow 640x^2-8640x-129600=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=9 \\ x=-22,5 \notin (0;30) \end{array}\right.$

Lập BBT ta có $\min\limits_{(0;30)} d=d(9)=50$

Bài 8: Chọn C.



Đặt $HE=x$ và $KF=y$, theo giả thiết ta có:

$HE+KF=x+y=24$

Xét các tam giác vuông AHE và BKF, ta được:

$\begin{cases} AE=\sqrt{AH^2+HE^2}=\sqrt{x^2+25} \\ BF=\sqrt{BK^2+KF^2}=\sqrt{y^2+49} \end{cases}$

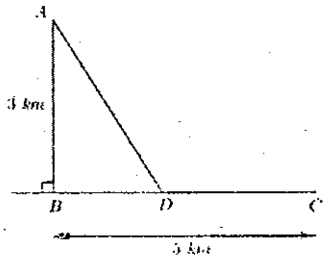
Vì độ dài cầu EF là không đổi nên để đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất theo con đường AEFB thì $AE+EF+FB$ ngắn nhất. Hay $AE+BF$ ngắn nhất.

Ta có $P=AE+BF=\sqrt{x^2+25}+\sqrt{y^2+49}$ với $x+y=24, x>0, y>0$

$P=\sqrt{x^2+5^2}+\sqrt{y^2+7^2} \ge \sqrt{(x+y)^2+(5+7)^2}=12\sqrt{5}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{5}=\frac{y}{7}$ suy ra $x=10, y=14$ nên $AE=5\sqrt{5}$km.

Bài 9: Chọn A.



Gọi $BD=x\ km$; $DC=y\ km$.

Khi đó $BC=BD+DC=x+y=5$

Xét tam giác ABD vuông tại B có:

$AD=\sqrt{AB^2+BD^2}=\sqrt{x^2+9}$

Thời gian bạn Hoa đi từ $A \to D$ là $t_{A\to D}=\frac{\sqrt{x^2+9}}{4}h$.

Thời gian bạn Hoa đi từ $D \to C$ là $t_{D\to C}=\frac{y}{5}h$

Khi đó tổng thời gian bạn Hoa đi từ nhà đến trường là:

$T=\frac{\sqrt{x^2+9}}{4}+\frac{y}{5}=f(x)=\frac{\sqrt{x^2+9}}{4}+\frac{5-x}{5}$

Xét hàm số $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+9}}{4}+\frac{5-x}{5}$, có $f'(x)=\frac{x}{4\sqrt{x^2+9}}-\frac{1}{5}; f'(x)=0 \Leftrightarrow 5x=4\sqrt{x^2+9}$

$\Leftrightarrow x=4$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta được $\min f(x)=f(4)=\frac{29}{20}=87$ phút.

Do đó bạn Hoa phải xuất phát muộn nhất từ nhà lúc 6h03 phút để có mặt ở trường lúc 7h30 phút.

Bài 10: Chọn D.

Đặt $MB = x$ khi đó $AM = 4 - x$ và $MC = \sqrt{MB^2 + CB^2} = \sqrt{x^2+1}$

Khi đó chi phí nối điện từ A đến C là $f(x) = 20(4-x) + 40\sqrt{x^2+1}$

Ta có: $f'(x) = -20 + \dfrac{40x}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(km)$

GTNN của f(x) đạt được khi $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = 114,64$ (triệu đồng).

Bài 11:Chọn D.

- Thuyền ở vị trí A sẽ đi đến E (đất liền) và đi ra đảo C. Bài toán yêu cầu cần tìm GTNN của quãng đường $AE + EC$.
- Chuẩn hóa $120:450:270 = 12:45:27 \Rightarrow AB = 12, AC = 45, CD = 27.$

Đặt $BE = x, x > 0$. Ta có $BD = \sqrt{AC^2 - (CD - AB)^2} = 30\sqrt{2}.$

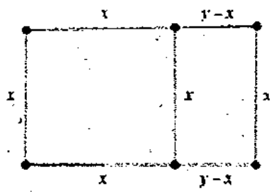
$\rightarrow ED = 30\sqrt{2} - x \Rightarrow AE + EC = \sqrt{x^2 + 12^2} + \sqrt{(30\sqrt{2} - x)^2 + 27^2}.$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + 12^2} + \sqrt{(30\sqrt{2} - x)^2 + 27^2}$ với $x > 0$

Ta có $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+144}} + \dfrac{x - 30\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 - 60\sqrt{2}x + 2529}}$. Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{120\sqrt{2}}{13}$

Do đó $\min f(x) = f\left(\dfrac{120\sqrt{2}}{13}\right) = 9\sqrt{41} \approx 57,6.$

Bài 12: Chọn D.



Diện tích đất bán ra càng lớn thì số tiền bán được càng cao

Gọi chiều rộng và chiều dài của mảnh đất hình chữ nhật ban đầu lần lượt là: $x, y(m), (x, y > 0)$

Chu vi mảnh đất hình chữ nhật ban đầu bằng $50m \Rightarrow 2(x+y) = 50 \Leftrightarrow y = 25 - x$

Bài ra, ta có ngay mảnh đất được bán là một hình chữ nhật có diện tích là:

$$S = x(y-x) = x(25 - x - x) = 25x - 2x^2 = -\left(x\sqrt{2} - \frac{25}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{625}{8} \le \frac{625}{8} = 78,125$$

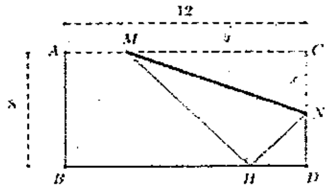
Dấu "=" xảy ra khi $x\sqrt{2} - \dfrac{25}{2\sqrt{2}} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{25}{4} \Rightarrow y = \dfrac{75}{4}$

Như vậy, diện tích đất được bán ra lớn nhất 78,125 m².

Khi đó số tiền lớn nhất mà gia đình Nam nhận được khi bán đất là:

$78,125.1500000 = 117187500$

Bài 13: Chọn A.



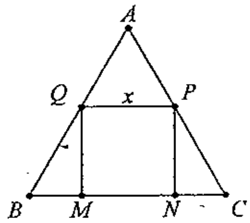
- Kí hiệu các cạnh, các đỉnh như hình vẽ bên. Đặt $CN=x(cm)$ và $MC=y(cm)$. Độ dài đường gấp khúc cần tìm chính là độ dài đoạn thẳng MN và bằng $MN=\sqrt{x^2+y^2}\ (cm)$.
- Dễ thấy $\Delta MCN=\Delta MHN$ nên $MC=MH=y$, $NC=NH=x$.

Gọi K là hình chiếu của M trên $BD \Rightarrow MK=8 \Rightarrow HK=\sqrt{y^2-64}$.

Mà $HD=\sqrt{HN^2-ND^2}=\sqrt{x^2-(8-x)^2}=\sqrt{16x-64}=4\sqrt{x-4}$.

$\Rightarrow KD=y=HK+HD=\sqrt{y^2-64}+4\sqrt{x-4} \Leftrightarrow y-\sqrt{y^2-64}=4\sqrt{x-4}$ (1).

$\Leftrightarrow \dfrac{64}{y+\sqrt{y^2-64}}=4\sqrt{x-4} \Leftrightarrow y+\sqrt{y^2-64}=\dfrac{16}{\sqrt{x-4}}$ (2).



Lấy (1) + (2) $\Rightarrow y=\dfrac{2x}{\sqrt{x-4}}$. Do đó $MN^2=x^2+y^2=x^2+\dfrac{4x^2}{x-4}$.

Đặt $f(x)=x^2+\dfrac{4x^2}{x-4}$ với $8>x>4$.

Có $f'(x)=2x+4-\dfrac{64}{(x-4)^2}$; $f'(x)=(x+2)(x-4)^2=32 \Leftrightarrow x=6$

Suy ra $\min\limits_{(4;8)} f(x)=f(6)=108 \Rightarrow MN_{\min}^2=108 \Rightarrow MN_{\min}=6\sqrt{3}$.

Bài 14: Chọn C.

Đặt $MN=x,(0<x<16) \Rightarrow BM=\dfrac{16-x}{2} \Rightarrow \tan 60^\circ=\dfrac{QM}{BM} \Rightarrow QM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(16-x)$

Xét hàm số $S(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x(16-x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(-x^2+16x\right) \Rightarrow \max S=32\sqrt{3}$ khi $x=8$.

KÌ THI THPT QUỐC GIA LẦN I TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU

Bài 15: Chọn C.

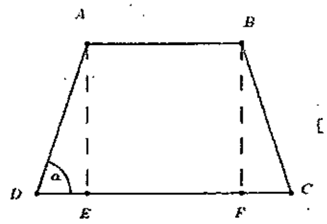
Gọi các điểm như hình vẽ, $\widehat{ADC}=\alpha, \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ và $DA=AB=BC=EF=1$

Ta có chiều cao hình thang là $h=AE=AD.\sin\alpha=\sin\alpha$

Đáy lớn $DC=1+2DE=1+2\cos\alpha$.

Diện tích hình thang là:

$S=\dfrac{1}{2}\left(AB+CD\right)h=\left(1+\cos\alpha\right)\sin\alpha=\sin\alpha+\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha$



Ta có: $S'=\cos\alpha+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1=0$

$\Leftrightarrow \cos\alpha\in\left\{-1;\frac{1}{2}\right\}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{3}$ (do $a\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$)

Lại có $S(0)=0;S\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4};S\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. Suy ra giá trị lớn nhất của $S=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA MÔN TOÁN SỞ GD&ĐT BẮC GIANG – LẦN 1

Bài 16: Chọn C.

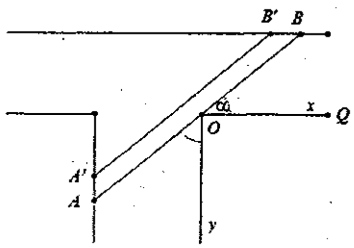
Để thanh AB có độ dài lớn nhất thì AB đi qua O.

Đặt $\widehat{BOx}=\alpha$ suy ra $\widehat{AOy}=90°-\alpha$.

Khi đó $OA\sin(90°-\alpha)=8$ và $OB\sin\alpha=8$

Để thanh AB đi qua được khúc sông thì

Suy ra $AB\le AB_{min}=\left(\frac{8}{\cos\alpha}+\frac{8}{\sin\alpha}\right)_{min}$



Xét $A=\frac{8}{\cos\alpha}+\frac{8}{\sin\alpha}\ge\frac{32}{\sin\alpha+\cos\alpha}$

Lại có $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}$

Nên $A_{min}=16\sqrt{2}$. Vậy $AB\le16\sqrt{2}=22,627$.

Bài 17: Chọn D.

Gọi chiều dài và chiều rộng của trang sách lần lượt là $x(cm)$ và $y(cm)$, trong đó: $x>6, y>4$

Chiều dài của trang chữ là: $x-3-3=x-6(cm)$

Chiều rộng của trang chữ là: $y-2-2=y-4(cm)$

Khi đó ta có: $(x-6)(y-4)=384\Rightarrow y=\frac{384}{x-6}+4$

Diện tích trang sách là: $S=xy=x\left(\frac{384}{x-6}+4\right)=\frac{384.(x-6)}{x-6}+\frac{384.6}{x-6}+4(x-6)+24$

$=408+\frac{2304}{x-6}+4(x-6)\ge408+2\sqrt{\frac{2304}{x-6}+4(x-6)}=408+2.96=600$ **(BĐT Cô-Si)**

$S_{min}=600\Leftrightarrow\frac{2304}{x-6}=4(x-6)\Leftrightarrow(x-6)^2=576\Leftrightarrow x=30\Rightarrow y=\frac{600}{30}=20$

Phần 3:

MŨ VÀ LOGARIT NÂNG CAO

CASIO ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN LOGARIT

Tìm TXĐ của hàm số

Câu 1: Tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{2x-1}+\ln\left(1-x^2\right)$ là:

A. $D=[-1;1]$ **B.** $D=[1;+\infty)$ **C.** $D=\left[-1;\frac{1}{2}\right]$ **D.** $D=\left[\frac{1}{2};1\right)$

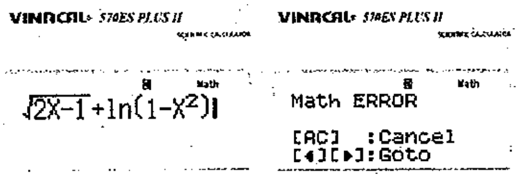
Giải:

Chọn D.

- ĐKXĐ: $\begin{cases}2x-1\geqslant 0\\1-x^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant\frac{1}{2}\\-1<x<1\end{cases}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\leqslant x<1\Rightarrow D=\left[\frac{1}{2};1\right)$.

➢ **Cách 2:** Dùng casio như sau: dựa vào nguyên tắc, x thuộc tập xác định thì bấm CALC ra giá trị cụ thể, còn nếu không thuộc thì sẽ ra error.

❖ **Nhập biểu thức như sau:**



Do 1 ở đây đều có ở các đáp án A, B, C nên muốn thử xem nó có thuộc không ta bấm CALC với 1. Nhận được kết quả Error, loại A, B, C.

Câu 2: Tập xác định D của hàm số $y=\ln(1-\cos x)$ là:

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi\}, k\in\mathbb{Z}$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{k2\pi\}, k\in\mathbb{Z}$.

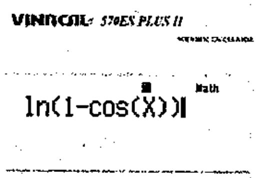
C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2}\right\}, k\in\mathbb{Z}$. **D.** $D=\{k2\pi\}, k\in\mathbb{Z}$.

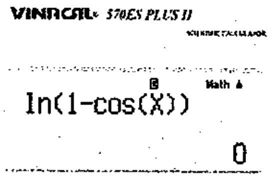
Giải:

Chọn B.

- ĐKXĐ: $1-\cos x>0\Leftrightarrow\cos x<1\Leftrightarrow x\neq k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

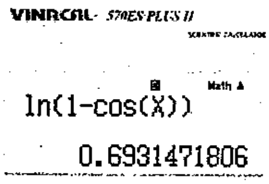
➢ **Cách 2:** Nhập bằng máy tính hàm số như sau:



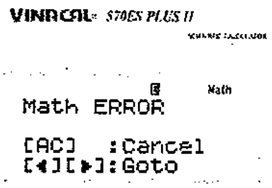


Bấm CALC, chọn x = 90° cho kết quả như hình, nên loại đáp án C.

Bấm CALC, chọn x = 180° cho kết quả như hình, tức là x = π thỏa mãn, nên loại đáp án A.



Đương nhiên loại được D ngay, vì với x = 0 thì cho kết quả như sau:



Đạo hàm của hàm số Mũ & Logarit

Câu 3: Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{2x-1}+\ln\left(1-x^2\right)$

A. $y'=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}+\dfrac{2x}{1-x^2}$ **B.** $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{2x-1}}+\dfrac{2x}{1-x^2}$

C. $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{2x-1}}-\dfrac{2x}{1-x^2}$ **D.** $y'=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}-\dfrac{2x}{1-x^2}$

Giải:

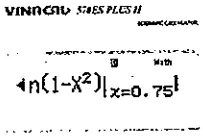
Chọn D.

Ta có: $y'=\dfrac{2}{\sqrt{2x-1}}+\dfrac{-2x}{1-x^2}=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}-\dfrac{2x}{1-x^2}$.

➢ **Cách 2: Dùng casio:**

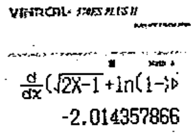
Nhập hàm số: bấm SHIFT $\sqrt{2x-1}+\ln\left(1-x^2\right)$

Nhớ cho x = 0,75 như sau:

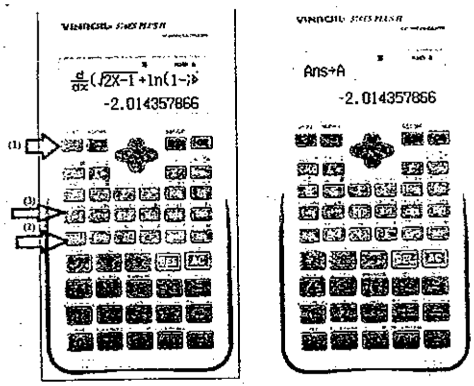


Vì sao ta lấy 0,75: vì giá trị này trong TXĐ.

Ta sẽ được kết quả:



Bấm lưu kết quả này thành biến A như sau:



- Tiến hành thử đáp án D, ta sẽ lấy: $A-\dfrac{1}{2\sqrt{2x-1}}-\dfrac{2x}{1-x^2}$ (Nhớ là cho X = 2)

  Trường hợp này cho kết quả bằng 0.Chọn D.

Câu 4: Đạo hàm của hàm số $y=\ln(1-\cos x)$ là:

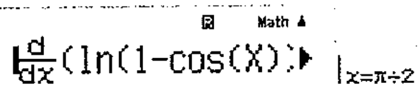
A. $y'=\dfrac{-\sin x}{1-\cos x}$ B. $y'=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ C. $y'=\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$ D. $y'=\dfrac{-\sin x}{1+\cos x}$

Giải:

Chọn C.

- **Cách 1:** Ta có: $y'=\dfrac{(1-\cos x)'}{1-\cos x}=\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$.
- **Cách 2:** Nhập biểu thức vào Casio, trước tiên ta phải bấm chế độ máy tính sang radian bằng cách: shift mode 4

Tiến hành tiếp là nhập hàm số:



VINACAL 570ES PLUS II

$\frac{d}{dx}(\ln(1-\cos(X))$

1

Lưu kết quả vào A như sau: bấm ship, sto, A.

VINACAL 570ES PLUS II

Ans→A

1

Thử đáp án A (loại)	**Thử đáp án B**	**Thử đáp án C**	**Thử đáp án D (loại)**
$A+\frac{\sin(\pi\div2)}{1-\cos(\pi\div2)}$	$A-\frac{\sin(\pi\div2)}{1+\cos(\pi\div2)}$	$A-\frac{\sin(\pi\div2)}{1-\cos(\pi\div2)}$	$A+\frac{\sin(\pi\div2)}{1+\cos(\pi\div2)}$
2	3×10^{-15}	3×10^{-15}	2

Quan sát ta thấy rằng có B, C có kết quả giống nhau và sát số 0 nhất, vậy ta cần thử lại lần nữa, lần này do ta không tinh tế để chọn giá trị CALC X, nếu ta chọn x = π/2 thì mẫu số hầu như giống nhau, chọn x = π/4 thì sẽ có kết quả khác.

Làm lại với x = π/4 rồi lưu vào A.

$\frac{d}{dx}(\ln(1-\cos(X))$ 2.414213562 Ans→A 2.414213562

Thử đáp án B. $A-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}$ 2 **Thử đáp án C.** $A-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}$ 3.149509×10^{-13}

Đáp án đúng là C.

Bài toán yêu cầu vận dụng công thức nhưng có thể giải nhanh bằng Casio

Câu 5: Biến đổi biểu thức dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ $\sqrt[4]{x^2\sqrt[3]{x}},(x\geq0)$.

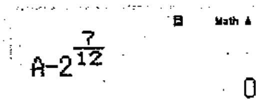
A. $x^{\frac{7}{12}}$ **B.** $x^{\frac{8}{12}}$ **C.** $x^{\frac{7}{2}}$ **D.** x^4

Giải:

Nhập	Bấm CALC X = 2	Lưu sang biến A
$\sqrt[4]{X^2\sqrt[3]{X}}$	$\sqrt[4]{X^2\sqrt[3]{X}}$ 1.498307077	Ans→A 1.498307077

Thử các đáp án.

Đáp án A:



Thấy đúng luôn kết quả bằng 0 (khi gán x = 2).

❒ Bài toán 2 biến:

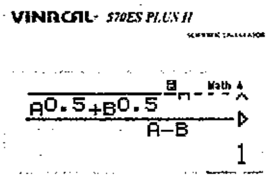
Câu 6: Đơn giản biểu thức $\dfrac{\dfrac{a^{1,5}+b^{1,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}-a^{0,5}b^{0,5}}{a-b}+\dfrac{2b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}$ $(a,b\ge 0;\ a\ne b)$

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

Giải:

Bài này ta nhập hàm số với biến là X, Y. Hoặc A, B.

$$\frac{\dfrac{A^{1,5}+B^{1,5}}{A^{0,5}+B^{0,5}}-A^{0,5}B^{0,5}}{A-B}+\frac{2B^{0,5}}{A^{0,5}+B^{0,5}}$$



CALC A = 2, B = 3. Cho giá trị là 1.

Tiếp tục CALC A = 2, B = 5, vẫn cho giá trị 1.

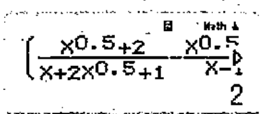
Vậy ta chọn D.

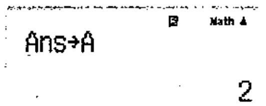
Câu 7: Đơn giản biểu thức $\left(\dfrac{a^{0,5}+2}{a+2a^{0,5}+1}-\dfrac{a^{0,5}-2}{a-1}\right).\dfrac{a^{0,5}+1}{a^{0,5}}$ $(a>0;a\ne 1)$

A. $\dfrac{2}{a-1}$ B. $\dfrac{1}{a-1}$ C. $\dfrac{2}{1-a}$ D. $\dfrac{1}{1-a}$

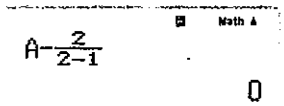
Giải:

- *Bước 1:* Nhập biểu thức: $\left(\dfrac{X^{0,5}+2}{X+2X^{0,5}+1}-\dfrac{X^{0,5}-2}{X-1}\right).\dfrac{X^{0,5}+1}{X^{0,5}}$
- *Bước 2:* Bấm CALC cho x = 2, rồi lưu kết quả (shift, sto, A)





- *Bước 3:* Thử các hiệu: $A-\dfrac{2}{2-1};A-\dfrac{1}{2-1};A-\dfrac{2}{1-2};A-\dfrac{1}{1-2}$



Ta được kết quả $A-\dfrac{1}{2-1}=0$. Chọn A.

CÔNG THỨC LOGARIT

Câu 8: Cho $\log_2 14 = a$, tính $\log_{49} 32$ theo a

A. $\dfrac{1}{a-1}$ B. $\dfrac{1}{2(a-1)}$ C. $\dfrac{3}{2(a-1)}$ D. $\dfrac{5}{2(a-1)}$

Giải:

- *Bước 1:* Nhập biểu thức: $\log_2 14 = a$,

Sau đó ta lưu sang A.

```
log2(14)
            3.807354922
```

```
Ans→A
            3.807354922
```

Tiếp tục nhập biểu thức $\log_{49} 32$

Sau đó lưu sang B.

```
log49(32)
            0.8905179678
```

```
Ans→B
            0.8905179678
```

Tiến hành thử như sau:

A. $\dfrac{1}{a-1}$ $B-\dfrac{1}{(A-1)}$ = 0.5343107807 (loại.)

B. $\dfrac{1}{2(a-1)}$ $B-\dfrac{1}{2(A-1)}$ (loại.) = 0.7124143742 (loại.)

C. $\dfrac{3}{2(a-1)}$ $B-\dfrac{3}{2(A-1)}$ = 0.3562071871 (loại.)

D. $\dfrac{5}{2(a-1)}$ $B-\dfrac{5}{2(A-1)}$ = 0 (thỏa mãn.)

Chọn D.

Câu 9: Cho $\log_{25} 7 = a; \log_2 5 = b$. Tính $\log_{\sqrt[3]{5}} \dfrac{49}{8}$ theo *a, b:*

A. $\dfrac{12ab-9}{b}$ B. $12a-9b$ C. $9a-12b$ D. $12ab-9a$

Giải:

- *Bước 1:* Nhập $\log_{25} 7$ rồi lưu vào A.

```
log25(7)
            0.6045309776
```

```
Ans→A
            0.6045309776
```

- *Bước 2:* Nhập $\log_2 5 = b$ rồi lưu vào B.

$\log_2(5)$ — 2.321928095   Ans→B — 2.321928095

- *Bước 3:* Nhập $\log_{\sqrt[3]{5}} \dfrac{49}{8}$ rồi lưu vào C.

$\log_{\sqrt[3]{5}}\left(\frac{49}{8}\right)$ — 3.378282708   Ans→C — 3.378282708

Tiến hành thử các đáp án.

A. $\dfrac{12ab-9}{b}$ $C-\frac{12AB-9}{B}$ — 0   **Chọn A.**

B. $12a-9b$ C−12A+9B — 17.02126383   (loại.)

C. $9a-12b$ C−(9A−12B) — 25.80064105   (loại.)

D. $12ab-9a$ C−(12AB−9B) — 7.43150603   (loại.)

Thường thì ta thử đến đáp án nào đúng thì ta dừng lại tại đó. Bài toán này rất may mắn ta thấy luôn đáp án A ở ngay lần thử đầu tiên.

Câu 10: Cho $a = \log_2 20$. Tính $\log_{20} 5$ theo a:

A. $\log_{20} 5 = \dfrac{a-2}{a}$ **B.** $\log_{20} 5 = \dfrac{2a-2}{a}$ **C.** $\log_{20} 5 = \dfrac{a+1}{a}$ **D.** $\log_{20} 5 = \dfrac{a+2}{2a}$

Giải:

Lưu $\log_2 20$ vào A bằng cách SHIFT STO A. Nhập vào máy tính:

- Đáp án A: $\log_{20} 5 - \dfrac{A-2}{A} = 0 \Rightarrow$ **Chọn A.**

Câu 11: Cho $\alpha = \log_a x$ với α, x, y > 0, $a \neq 1$ và m, n $\in \mathbb{R}$ sao cho $y = a^m.x^n$. Tính $\log_a y$ theo α:

A. $\log_a y = m - 2n\alpha$ **B.** $\log_a y = 2m + 3n\alpha$

C. $\log_a y = m + n\alpha$ **D.** $\log_a y = m - n\alpha$

Giải:

Ta chọn: $\begin{cases} x=20 \\ a=10 \\ m=1 \\ n=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=200 \\ \alpha=\log 20 \end{cases}$. Nhập vào máy tính:

- Đáp án A: $\log 200-1-2.1.\log 20 \neq 0 \Rightarrow$ Loại A.
- Đáp án B: $\log 200-1-1.\log 20=0 \Rightarrow$ **Chọn B.**

Câu 12: Cho $a=\log 392$, $b=\log 112$. Giả sử $\log 7=\dfrac{ma-3b}{n}$ với m, n là các số nguyên khác 0. Tính m + n =?

A. 4 **B.** 5 **C.** 9 **D.** 7

Giải:

Lưu a vào A, lưu b vào B, lưu $\log 7$ vào C.

Ta có hệ sau: $\begin{cases} C=\dfrac{mA-3B}{n} \\ m+n=D \Leftrightarrow n=D-m \end{cases} \Leftrightarrow C-\dfrac{mA-3B}{D-m}=0$ với D là 1 trong 4 đáp án.

- Thử với D = 4. Nhập vào máy tính $C-\dfrac{XA-3B}{4-X}$ rồi SHIFT SOLVE $\Rightarrow$ nghiệm xấu $\Rightarrow$ Loại A.
- Thử với D = 9, SHIFT SOLVE thì ta được X = 4 $\Rightarrow$ **Chọn B.**

Câu 13: Cho $a=\log_7 12$, $b=\log_{12} 24$. Giả sử $\log_{54} 168=\dfrac{ab+k}{ma+nab}$ với m, n, k là các số nguyên khác 0.Tính m + n + k =?

A. 3 **B.** 5 **C.** 4 **D.** 7

Giải:

Lưu a vào A, lưu b vào B, lưu $\log_{54} 168$ vào C.

Ta có hệ sau: $\begin{cases} C=\dfrac{AB+k}{mA+nAB} \\ m+n+k=D \Leftrightarrow k=D-m-n \end{cases} \Rightarrow m=\dfrac{AB-n-CnAB+D}{CA+1}$ với D là 1 trong 4 đáp án. Với n = X, m = F(x):

- Thử với D = 3. Ấn mode 7 nhập hàm $F(x)=\dfrac{AB-X-X.ABC+3}{CA+1}$ Start -9 = End? 9 = Step? 1= ta được bảng nhưng không có giá trị đẹp $\Rightarrow$ Loại A.
- Thử với D = 4 thì ta thấy x = -5; f(x) = 8 $\Rightarrow$ **Chọn B.**

Dạng 2: Chọn đẳng thức luôn đúng với biểu thức cho trước

Câu 14: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $a^2+b^2=7ab$. Hãy tìm đẳng thức luôn đúng?

A. $\log\left(\frac{a+b}{3}\right)=\frac{\log a+\log b}{2}$

B. $\log(a+b)=\log a+\log b$

C. $\log\left(\frac{a+b}{9}\right)=\frac{\log a+\log b}{4}$

D. $\log(a+b)=\frac{\log a+\log b+1}{2}$

Giải:

Từ biểu thức $a^2+b^2=7ab$ ta cho $b=1\Rightarrow a=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ rồi lưu a vào A bằng cách SHIFT STO A. Nhập vào máy tính (chọn số b dương bất kì sao cho phương trình bậc 2 ẩn a có nghiệm dương):

- Đáp án A: $\log\left(\frac{A+1}{3}\right)-\frac{\log A+\log 1}{2}=0\Rightarrow$ **Chọn A.**

Câu 15: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $a^2+9b^2=10ab$. Hãy tìm đẳng thức luôn đúng?

A. $\log(a+b)+\log a+\log b=1$

B. $\log\left(\frac{a+3b}{2}\right)=\log a+\log b$

C. $2\log(a+3b)=\log a+\log b$

D. $\log\left(\frac{a+3b}{4}\right)=\frac{\log a+\log b}{2}$

Giải:

Từ biểu thức $a^2+9b^2=10ab$ ta cho $b=1\Rightarrow a=9$. Nhập vào máy tính:

- Đáp án A: $\log(9+1)+\log 9+\log 1-1\approx 0,95\Rightarrow$ Loại A.
- Đáp án B: $\log(9+3.1)-\log 9-\log 1\approx 0,12\Rightarrow$ Loại B.
- Đáp án C: $2\log(9+3.1)-\log 9-\log 1\approx 1,2\Rightarrow$ Loại C.
- Đáp án D: $\log\left(\frac{9+3.1}{4}\right)-\frac{\log 9+\log 1}{2}=0\Rightarrow$ **Chọn D.**

Câu 16: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $xy=\sqrt{\frac{x^5+y^5}{x+y}}$. Hãy tìm đẳng thức luôn đúng?

A. $\log\left(\frac{x^2+y^2}{2x^2y^2}\right)-2\log\left(\frac{x^3+y^3}{x+y}\right)=\log(x^3+y^3)+\log(x^2+y^2)$

B. $2l\text{og}\left(\dfrac{x^2+y^2}{x+y}\right)-\log\left(\dfrac{x^3+y^3}{2x^2y^2}\right)=2$

C. $l\text{og}\left(\dfrac{x^2+y^2}{2x^2y^2}\right)+4\log\left(\dfrac{x^3+y^3}{x+y}\right)=1+\log(xy)$

D. $l\text{og}\left(\dfrac{x^2+y^2}{x+y}\right)+\log\left(\dfrac{x^3+y^3}{2x^2y^2}\right)=0$

Giải:

Từ biểu thức $xy=\sqrt{\dfrac{x^5+y^5}{x+y}}$ ta cho y = 1 rồi SHIFT SOLVE tìm nghiệm $\Rightarrow x=1$

Nhập vào máy tính:

- Đáp án A: $l\text{og}\left(\dfrac{1^2+1^2}{2.1^2.1^2}\right)-2\log\left(\dfrac{1^3+1^3}{1+1}\right)-\log\left(1^3+1^3\right)-\log\left(1^2+1^2\right)\neq 0$

  $\Rightarrow$ Loại A.
- Đáp án B: $2l\text{og}\left(\dfrac{1^2+1^2}{1+1}\right)-\log\left(\dfrac{1^3+1^3}{2.1^2.1^2}\right)-2\neq 0\Rightarrow$ Loại B.
- Đáp án C: $l\text{og}\left(\dfrac{1^2+1^2}{2.1^2.1^2}\right)+4\log\left(\dfrac{1^3+1^3}{1+1}\right)-1-\log(1.1)\neq 0\Rightarrow$ Loại C.
- Đáp án D: $l\text{og}\left(\dfrac{1^2+1^2}{1+1}\right)+\log\left(\dfrac{1^3+1^3}{2.1^2.1^2}\right)=0\Rightarrow$ **Chọn D.**

Câu 17: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^3+y^3+z^3=24(x+y)(y+z)(z+x)$.

Hãy tìm đẳng thức luôn đúng?

A. $\log\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)=l\text{og}(x+y)+\log(y+z)+\log(z+x)$

B. $\log\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)=\dfrac{l\text{og}(x+y)+\log(y+z)+\log(z+x)}{3}$

C. $3\log\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)=\dfrac{l\text{og}(x+y)+\log(y+z)+\log(z+x)}{3}$

D. $3\log(x+y+z)=l\text{og}(x+y)+\log(y+z)+\log(z+x)$

Giải:

Từ biểu thức $x^3+y^3+z^3=24(x+y)(y+z)(z+x)$ ta cho x = 1,y = 1 rồi SHIFT SOLVE tìm nghiệm $\Rightarrow z=49,94\ldots$ (ta chỉ lấy nghiệm dương) rồi lưu z vào A bằng cách SHIFT STO A. Nhập vào máy tính:

- Đáp án A: $-\log\left(\dfrac{1+1+A}{3}\right)+\log(1+1)+\log(1+A)+\log(A+1)\neq 0$

  $\Rightarrow$ Loại A.

- Đáp án B: $\log\left(\dfrac{1+1+A}{3}\right)-\dfrac{\log(1+1)+\log(1+A)+\log(A+1)}{3}=0\Rightarrow$ Chọn B.

❖ *Các công thức logarit quan trọng*

1. $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$
2. $\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$
3. $\log_a b^\alpha=\alpha\log_a b$ *(chú ý đến α chẵn,khi đó* $\log_a b^\alpha=\alpha\log_a|b|$ *vấn đề này nhạy cảm, các em rất hay nhầm lẫn)*
4. $\log_b c=\dfrac{\log_a c}{\log_a b}\Rightarrow\log_a b.\log_b c=\log_a c$
5. $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$
6. $\log_{a^\alpha} c=\dfrac{1}{\alpha}\log_a c$

CÁC BÀI TOÁN NÂNG CAO

Bài 1: Với *x, y, z* là các số nguyên dương thỏa mãn $x\log_{2016}2+y\log_{2016}3+z\log_{2016}7=1$.

Tính giá trị của biểu thức $Q=x+y+z$.

A.10 B.2017 C.8 D.2016

Bài 2 (Sở GD-ĐT Hà Nội): Cho hàm số $f(x)=e^{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}}$.

Biết rằng $f(1).f(2)...f(2017)=e^{\frac{m}{n}}$ với *m, n* là các số tự nhiên và $\dfrac{m}{n}$ tối giản.Tính $m-n^2$.

A. $m-n^2=2018$ B. $m-n^2=1$ C. $m-n^2=-1$ D. $m-n^2=-2018$

Bài 3: Cho $x>0, x\neq 1$ thỏa mãn biểu thức $\dfrac{1}{\log_2 x}+\dfrac{1}{\log_3 x}+...+\dfrac{1}{\log_{2017} x}=M$.

Khẳng địnhnào sau là đúng?

A. $x=\sqrt{\dfrac{2017}{M}}$ B. $x=2017^M$ C. $x=\dfrac{2017}{M}$ D. $x^M=2017!$

Bài 4: Cho hàm số $f(x)=\frac{9^x}{9^x+3}, x\in\mathbb{R}$ và hai số a, b thỏa mãn $a+b=1$. Tính $f(a)+f(b)$

A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. -1 D. 2

Bài 5: Cho hàm số $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$. Tính giá trị biểu thức $A=f\left(\frac{1}{100}\right)+f\left(\frac{2}{100}\right)+...+f\left(\frac{100}{100}\right)$

A.50 B. 49 C. $\frac{149}{3r}$ D. $\frac{301}{6}$

Bài 6: Xét hai số thực *a,b* thỏa mãn $1>a\ge b>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất T_{min} của biểu thức sau: $T=\log_a^2 b+\log_{a.b} a^{36}$.

A. $T_{min}=16$ B. T_{min} không tồn tại C. $T_{min}=19$ D. $T_{min}=13$

Bài 7: Cho hàm số $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$.

Tính tổng: $S=f\left(\frac{1}{2015}\right)+f\left(\frac{2}{2015}\right)+...+f\left(\frac{2014}{2015}\right)$

A.2014 B.2015 C.1008 D.1007

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 1: Chọn C.

Ta có: $x\log_{2016}2+y\log_{2016}3+z\log_{2016}7=1\Leftrightarrow\log_{2016}2^x3^y7^z=1\Leftrightarrow 2^x3^y7^z=2016$

Bài toán trở thành: Cho $x,y,z>0$ với $2^x.3^y.7^z=2016=2^5.3^2.7$

Suy ra: $Q=x+y+z=5+2+1=8$

Bài 2 (Sở GD-ĐT Hà Nội): Chọn C.

Ta có: $1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}=\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)^2\Rightarrow f(x)=e^{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)}$

$f(1).f(2)...f(2017)=e^{\left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+1+\frac{1}{2016}-\frac{1}{2017}+1+\frac{1}{2017}-\frac{1}{2018}\right)}=e^{2018-\frac{1}{2018}}$

Vậy $m-n^2=(2018^2-1)-2018^2=-1$

Bài 3: Chọn D.

Ta có $M=\log_x 2+...+\log_x 2017=\log_x 2017!$

Vậy $x^M=2017!$.

Bài 4: Chọn B.

- Phương pháp: Chú ý công thức $a^m.a^n = a^{m+n}$

Cách giải: $f(a)+f(b)=\dfrac{9^a}{9^a+3}+\dfrac{9^b}{9^b+3}=\dfrac{9^a(9^b+3)+9^b(9^a+3)}{(9^b+3)(9^a+3)}=\dfrac{9+3.9^a+9+3.9^b}{9+3.9^a+9+3.9^b}=1$

Bài 5: Chọn D.

Ta có: $f(x)+f(1-x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}+\dfrac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=1$

Do đó $A=f\left(\dfrac{1}{100}\right)+f\left(\dfrac{2}{100}\right)+...+f\left(\dfrac{100}{100}\right)=f\left(\dfrac{1}{100}\right)+f\left(\dfrac{99}{100}\right)+f\left(\dfrac{2}{100}\right)+f\left(\dfrac{98}{100}\right)+...$

$+f\left(\dfrac{49}{100}\right)+f\left(\dfrac{51}{100}\right)+f\left(\dfrac{50}{100}\right)+f\left(\dfrac{100}{100}\right)=49+f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f(1)=\dfrac{301}{6}$

Bài 6: Chọn A.

Ta có: $T=\log_a^2 b+\log_{a.b} a^{36}=\log_a^2 b+36\log_{a.b} a=\log_a^2 b+\dfrac{36}{\log_a(ab)}$

$=\log_a^2 b+\dfrac{36}{1+\log_a b}=t^2+\dfrac{36}{1+t}$ (với $t=\log_a b$).

Do $1>a\ge b>0$ nên $t=\log_a b\ge\log_a a=1$. Xét hàm số $f(t)=t^2+\dfrac{36}{1+t}$ liên tục trên $[1;+\infty)$. Ta có: $f'(t)=2t-\dfrac{36}{(t+1)^2}=\dfrac{2t^3+4t^2+2t-36}{(t+1)^2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=2$

t	1		2		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	19	$\searrow$	16	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên thấy rằng $T_{\min}=16$.

Bài 7: Chọn D.

Ta có $f(1-x)=\dfrac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\dfrac{4}{4+2.4^x}=\dfrac{2}{2+4^x}\Rightarrow f(x)+f(1-x)=1$

Do đó $f\left(\dfrac{1}{2015}\right)+f\left(\dfrac{2014}{2015}\right)=1, f\left(\dfrac{2}{2015}\right)+f\left(\dfrac{2013}{2015}\right)=1,..., f\left(\dfrac{1007}{2015}\right)+f\left(\dfrac{1008}{2015}\right)=1$

Suy ra $S=1007$

PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

PHƯƠNG TRÌNH MŨ

DẠNG 1: ĐẶT ẨN PHỤ

Ta thường tách biến để đặt ẩn phụ (việc tách có thể thực hiện bằng các công thức hay dùng).

$a^{m+n} = a^m.a^n$ $\qquad$ $a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n}$ $\qquad$ $a^{m.n} = \left(a^m\right)^n = \left(a^n\right)^m$

Thường trên mũ sẽ có ẩn x và số tự nhiên, ta sẽ tìm cách tách số tự nhiên đó ra. Ví dụ dưới đây giúp các em hiểu vấn đề rõ hơn.

Đôi khi, chúng ta tách bằng cách chia cả 2 vế cho một biểu thức mũ. (Bài 3)

+ *Với* $a > 0$, $a \neq 1$: $a^x = b \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ x = \log_a b \end{cases}$

+ *Với* $a > 0$, $a \neq 1$: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

✓ Dạng 1: $F(a^{f(x)}) = 0$. *Ta đặt* $t = a^{f(x)}, t > 0$ *rồi giải phương trình theo t.*

✓ Dạng 2: $A.a^{2f(x)} + B.(a.b)^{f(x)} + C.b^{2f(x)} = 0$ *ta tiến hành chia rồi đưa bài toán về dạng 1.*

Câu 1: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $2^{2x^2+1} - 9.2^{x^2+x} + 2^{2x+2} = 0$ bằng:

A. 4 $\qquad$ **B.** 2 $\qquad$ **C.** 1 $\qquad$ **D.** 3

Câu 2: Phương trình $2^{3x} - 6.2^x - \dfrac{1}{2^{3(x-1)}} + \dfrac{12}{2^x} = 1$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 2 $\qquad$ **B.** 3 $\qquad$ **C.** 4 $\qquad$ **D.** 1

DẠNG 2: CHIA RỒI ĐẶT ẨN PHỤ

Ở đây phương trình xuất hiện 3 cơ số: A^2; $A.B$; B^2 ***chúng ta nghĩ đến việc dùng phép chia cho*** B^2 ***để tìm ẩn phụ t = A/B phù hợp.***

Câu 3: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x + \left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x = 14$ bằng:

A. 2 $\qquad$ **B.** 3 $\qquad$ **C.** -4 $\qquad$ **D.** 1

Câu 4: Phương trình $\left(5-\sqrt{21}\right)^x + 7\left(5+\sqrt{21}\right)^x = 2^{x+3}$ có một nghiệm dạng $\log_{\frac{a-\sqrt{21}}{2}}(b)$. Giá trị của b bằng:

A. 2 $\qquad$ **B.** 7 $\qquad$ **C.** 4 $\qquad$ **D.** 5

DẠNG 3: ĐẶT ẨN PHỤ KHÔNG HOÀN TOÀN

Một số bài toán sau khi đặt ẩn phụ ta thấy vẫn còn x. Khi đó ta sẽ tính đelta được dạng bình phương.(vì còn x nên ta gọi là đặt ẩn phụ không hoàn toàn).

$A.t^2 + B.f(x).t + C.g(x) = 0$ *(ở đây* $t = a^{f(x)}, t > 0$ *). Khi đó, ta tính* $\Delta = (mx+n)^2$ *biểu diễn* $t = a^{f(x)}$ *ta sẽ tìm được phương trình dạng* $a^{f(x)} = mx + n$ *(*).*

Vận dụng hàm đơn điệu để giải phương trình (*).

Câu 5: Nghiệm của phương trình $25^x - 2(3-x)5^x + 2x - 7 = 0$:

A. $x = 2$ B. $x = 3$ C. $x = 4$ D. $x = 1$

Câu 6: Phương trình $3.25^{x-2} + (3x-10)5^{x-2} + 3 - x = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 2 B. 1 C. 3 D. 4

DẠNG 4: HÀM SỐ

Bài toán sử dụng tính đơn điệu của hàm số: *f(x) = g(x) (1)*

- ✓ *<u>Trường hợp 1:</u> Nếu f(x) = a đồng biến hoặc nghịch biến, a là một hàm hằng số thì phương trình cũng có nghiệm duy nhất.*
- ✓ *<u>Trường hợp 2:</u> Nếu hàm f(x) đồng biến, g(x) nghịch biến và x = a là nghiệm thì phương trình sẽ có nghiệm duy nhất x = a.*
- ✓ *<u>Trường hợp 3:</u> Nếu hàm f(x) nghịch biến, g(x) đồng biến và x = a là nghiệm thì phương trình sẽ có nghiệm duy nhất x = a.*

Kỹ thuật giải bài toán dạng này: *Khi đưa về dạng f(x) = a, đôi khi ta phải chia biểu thức chứa mũ* $a^{f(x)}$*, và thường chia cho biểu thức có cơ số a lớn nhất.*

Câu 7: Phương trình $2^{x-1} - 2^{x^2-x} = (x-1)^2$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 2 B. 3 C. 4 D. 1

Câu 8: Có bao nhiêu kết luận đúng?

(1) Phương trình $(2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = 4^x$ có một nghiệm.

(2) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^x + (\sqrt{3}+\sqrt{2})^x = (\sqrt{5})^x$ có nghiệm dương.

(3) Phương trình $(3+2\sqrt{2})^x + (3-2\sqrt{2})^x = 6^x$ có hai nghiệm.

A. 2 B. 3 C. 4 D. 1

DẠNG 5: BIẾN ĐỔI THÀNH TÍCH

Trong các bài toán phương trình mũ, có các biểu thức giống nhau, chúng ta sẽ tìm cách nhóm chúng lại để được phương trình tích: f(x).g(x) = 0

Câu 9: Phương trình $4x^2+x.3^{\sqrt{x}}+3^{1+\sqrt{x}}=2.3^{\sqrt{x}}.x^2+2x+6$ có tất cả bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 1

Câu 10: Phương trình $\left(2+\sqrt{2}\right)^{\log_2 x}+x\left(2-\sqrt{2}\right)^{\log_2 x}=1+x^2$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1 **B.**2 **C.** 0 **D.** 3

Câu 11: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $x^2.3^{x-1}+x(3^x-2^x)=2(2^x-3^{x-1})$

A. -2 **B.**-3 **C.** -4 **D.** -1

Câu 12: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $2^{2(x^2+x)}+2^{1-x^2}-2^{2(x^2+x)}.2^{1-x^2}-1=0$ bằng:

A. 2 **B.**3 **C.** 6 **D.** 0

Câu 13: Phương trình $12.3^x+3.15^x-5^{x+1}=20$ có nghiệm dạng $a+\log_b c$. Tính $a+b+c$ (biết c - b = 2)

A. 7 **B.**8 **C.** 9 **D.** 10

Câu 14: Tổng hợp tất cả các nghiệm thực của phương trình

$\left(4^x-8\right)^3+\left(2^x-64\right)^3=\left(4^x+2^x-72\right)^3$ bằng

A. 4 **B.** $\frac{9}{2}$ **C.** $\frac{21}{2}$ **D.** 3

LỜI GIẢI CHI TIẾT

DẠNG 1: ĐẶT ẨN PHỤ

Câu 1: Đáp án C.

Ta có: $2^{2x^2+1}-9.2^{x^2+x}+2^{2x+2}=0\Leftrightarrow 2.2^{2x^2}-9.2^{x^2+x}+4.2^{2x}=0$

Chia hai vế cho $2^{2x}>0$. Ta có: $(c)\Leftrightarrow 2.2^{2(x^2-x)}-9.2^{x^2-x}+4=0$. Đặt $t=2^{x^2-x}>0$

$$(c)\Leftrightarrow 2t^2-9t+4=0\Leftrightarrow t_1=4,\quad t_2=\frac{1}{2}$$

- $t=2^{x^2-x}=4=2^2\Leftrightarrow x^2-x=2\Leftrightarrow x^2-x-2=0$
  $x=-1,\quad x=2$
- $t=2^{x^2-x}=\frac{1}{2}=2^{-1}\Leftrightarrow x^2-x+1=0$ (vô nghiệm)

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x=-1,\ x=2$

Câu 2: Đáp án D.

$Pt \Leftrightarrow 2^{3x}-6.2^{x}-\frac{1}{2^{3x-3}}+\frac{12}{2^{x}}=1 \Leftrightarrow 2^{3x}-6.2^{x}-\frac{2^{3}}{2^{3x}}+\frac{12}{2^{x}}=1 \Leftrightarrow \left(2^{3x}-\frac{2^{3}}{2^{3x}}\right)-6\left(2^{x}-\frac{2}{2^{x}}\right)-1=0$

Đặt ẩn phụ $t=2^{x}-\frac{2}{2^{x}} \Rightarrow t^{3}=\left(2^{x}-\frac{2}{2^{x}}\right)^{3} \Rightarrow 2^{3}-\frac{2^{3}}{2^{3x}}=t^{3}+6t$

$(a) \Leftrightarrow t^{3}+6t-6t=1 \Leftrightarrow t^{3}=1 \Leftrightarrow t=1$. Vậy $2^{x}-\frac{2}{2^{x}}=1 \Leftrightarrow 2^{2x}-2^{x}-2=0 \Leftrightarrow u^{2}-u-2=0$

(Với $u=2^{x}>0$) $\left[\begin{array}{l} u=-1 \text{ (Loại)} \\ u=2 \text{ (thỏa mãn)} \end{array}\right.$. Vậy $2^{x}=2 \Leftrightarrow x=1$

DẠNG 2: CHIA RỒI ĐẶT ẨN PHỤ

Câu 3: Đáp án C.

Đặt $t=\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^{x}>0 \Rightarrow \left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^{x}=\frac{1}{t}$

Vậy $(a) \Leftrightarrow t+\frac{1}{t}=14 \Leftrightarrow t^{2}-14t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_{1}=7-4\sqrt{3} \\ t_{2}=7+4\sqrt{3} \end{array}\right.$.

- $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^{x}=7-4\sqrt{3} \Leftrightarrow x=\log_{\sqrt{7+\sqrt{48}}}\left(7-4\sqrt{3}\right)=-2$
- $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^{x}=7+4\sqrt{3}=7+\sqrt{48} \Leftrightarrow x=2$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x=-2$ và $x=2$

Câu 4: Đáp án B.

$Pt \Leftrightarrow \left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^{x}+7\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^{x}=2^{3}=8$

Đặt $t=\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^{x}>0$. Khi đó $(b) \Leftrightarrow t+\frac{7}{t}=8 \Leftrightarrow t^{2}-8t+7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_{1}=1 \\ t_{2}=7 \end{array}\right.$

- $t=\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^{x}=1 \Leftrightarrow x=0$
- $t=\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^{x}=7 \Leftrightarrow x=\log_{\frac{5-\sqrt{21}}{2}}(7)$

DẠNG 3: ĐẶT ẨN PHỤ KHÔNG HOÀN TOÀN

Câu 5: Đáp án D.

$25^{x}-2(3-x)5^{x}+2x-7=0 \Leftrightarrow \left(5^{x}\right)^{2}-2(3-x)5^{x}+2x-7=0 \Leftrightarrow t^{2}-2(3-x)t+2x-7=0$

(với $t=5^x>0$) có $\Delta'=(3-x)^2-2x+7=(x-4)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=7-2x \\ t=-1(\text{Loại}) \end{array}\right.$

Vậy ta có $5^x=7-2x$, dễ thấy phương trình có 1 nghiệm $x=1$

Vế trái: 5^x là hàm tăng, vế phải $=-2x+7$ là hàm giảm.

Vậy $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Câu 6: Đáp án A.

$3.25^{x-2}+(3x-10)5^{x-2}+3-x=0 \quad (b)$

Đặt $t=5^{x-2}>0$

$(b) \Leftrightarrow 3t^2+(3x-10)t+3-x=0$ có $\Delta=(3x-10)^2-4.3(3-x) \Leftrightarrow \Delta=(3x-8)^2$.

Vậy (b) có 2 nghiệm $\left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{3} \\ t=3-x \end{array}\right.$

- $t=5^{x-2}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x-2=\log_5\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x=2+\log_5\left(\frac{1}{3}\right)$
- $t=5^{x-2}=3-x$, dễ thấy $x=2$ là 1 nghiệm.

Vế trái: 5^{x-2} là hàm tăng, vế phải: -x + 3 là hàm giảm. Do đó $x=2$ là nghiệm duy nhất.

Kết hợp ta được 2 nghiệm.

DẠNG 4: HÀM SỐ

Câu 7: Đáp án D.

$2^{x-1}-2^{x^2-x}=(x-1)^2 \Leftrightarrow 2^{x-1}+(x-1)=2^{x^2-x}+(x^2-x) \quad (*)$.

Xét hàm số $f(t)=2^t+t$ trên $\mathbb{R}$, ta có: $f'(t)=2^t\ln 2+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $(*) \Leftrightarrow f(x-1)=f(x^2-x) \Leftrightarrow x-1=x^2-x \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$.

Câu 8: Đáp án D.

(1) $(2-\sqrt{3})^x+(2+\sqrt{3})^x=4^x \Leftrightarrow \left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)^x+\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^x=1 \quad (*)$

Xét hàm số $f(t)=\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)^t+\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^t$ trên $\mathbb{R}$, ta có:

$f'(t)=\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)^t\ln\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)+\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^t\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)<0, \forall t\in\mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Lại có: $f(1)=1 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow x=1$.

(2) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^x=\left(\sqrt{5}\right)^x$ (**)

Ta có: $(**)\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^x=1$ (2).

Đặt $a=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}};b=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\Rightarrow\begin{cases}0<a<1\\ b>1\end{cases}$.

Nếu $x\geq 0$, thì: $\begin{cases}a^x>0\\ b^x>1\end{cases}\Rightarrow VT>1=VP$.

Nếu $x<0$, thì: $\begin{cases}a^x>1\\ b^x>0\end{cases}\Rightarrow VT>1=VP$.

Từ đây suy ra, phương trình (2) vô nghiệm.

(3) $\left(3+2\sqrt{2}\right)^x+\left(3-2\sqrt{2}\right)^x=6^x\Leftrightarrow\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{6}\right)^x+\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{6}\right)^x=1$ (***)

Xét hàm số $f(t)=\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{6}\right)^t+\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{6}\right)^t$ trên $\mathbb{R}$, ta có:

$$f'(t)=\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{6}\right)^t\ln\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{6}\right)+\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{6}\right)^t\ln\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{6}\right)<0,\forall t\in\mathbb{R}.$$

Vậy hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Lại có: $f(1)=1\Rightarrow(***)\Leftrightarrow x=1$.

DẠNG 5: BIẾN ĐỔI THÀNH TÍCH

Câu 9: Đáp án D.

$4x^2+x.3^{\sqrt{x}}+3^{1+\sqrt{x}}=2.3^{\sqrt{x}}.x^2+2x+6$ (1)

Điều kiện: $x\geq 0$.

Ta có: $(1)\Leftrightarrow 4x^2+x.3^{\sqrt{x}}+3.3^{\sqrt{x}}=2.3^{\sqrt{x}}.x^2+2x+6\Leftrightarrow 4x^2-2.3^{\sqrt{x}}.x^2-2x+x.3^{\sqrt{x}}-6+3.3^{\sqrt{x}}=0$

$\Leftrightarrow 2x^2\left(2-3^{\sqrt{x}}\right)-x\left(2-3^{\sqrt{x}}\right)-3\left(2-3^{\sqrt{x}}\right)=0\Leftrightarrow\left(2-3^{\sqrt{x}}\right)\left(2x^2-x-3\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-3^{\sqrt{x}}=0\\ 2x^2-x-3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\log_3^2 2\\ x=\frac{3}{2}\\ x=-1\text{ (loại)}\end{array}\right.\Rightarrow x=\left\{\frac{3}{2};\log_3^2 2\right\}.$$

Câu 10: Đáp án A.

Phương trình: $\left(2+\sqrt{2}\right)^{\log_2 x}+x\left(2-\sqrt{2}\right)^{\log_2 x}=1+x^2$ (d)

Đặt $t=\log_2 x\Leftrightarrow x=2^t,x>0$

$(d)\Leftrightarrow\left(2+\sqrt{2}\right)^t+2^t\left(2-\sqrt{2}\right)^t=1+\left(2^t\right)^2$

Nhân 2 vế cho $\left(2+\sqrt{2}\right)^t$ ta có: $(d)\Leftrightarrow\left(2+\sqrt{2}\right)^{2t}+2^t\left(2-\sqrt{2}\right)^t\left(2+\sqrt{2}\right)^t=\left(2+\sqrt{2}\right)^t+4^t\left(2+\sqrt{2}\right)^t$

$\Leftrightarrow\left(2+\sqrt{2}\right)^{2t}+2^t.2^t=\left(2+\sqrt{2}\right)^t+4^t\left(2+\sqrt{2}\right)^t\Leftrightarrow\left(2+\sqrt{2}\right)^t\left[\left(2+\sqrt{2}\right)^t-4^t\right]-\left[\left(2+\sqrt{2}\right)^t-4\right]=0$

$\Leftrightarrow\left[\left(2+\sqrt{2}\right)^t-4^t\right]\left[\left(2+\sqrt{2}\right)^t-1\right]=0\Leftrightarrow\left[\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^t-1\right]\left[\left(2+\sqrt{2}\right)^t-1\right]=0$

$\left[\begin{array}{l}\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^t=1=\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^0\\ \left(2+\sqrt{2}\right)^t=1=\left(2+\sqrt{2}\right)^0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=0\end{array}\right.$. Vậy $\log_2 x=0\Leftrightarrow x=2^0=1$

Câu 11: Đáp án A.

$x^2.3^{x-1}+x(3^x-2^x)=2(2^x-3^{x-1})\Leftrightarrow x^2 3^{x-1}+3x.3^{x-1}+2.3^{x-1}-x.2^x-2.2^x=0$

$\Leftrightarrow 3^{x-1}\left(x^2+3x+2\right)-2^x(x+2)=0\Leftrightarrow 3^{x-1}(x+2)(x+1)-2^x(x+2)=0$

$\Leftrightarrow(x+2)\left[3^{x-1}(x+1)-2^x\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\ 3^{x-1}(x+1)=2^x\quad(2)\end{array}\right.$

Ta có: $(2)\Leftrightarrow\frac{3^x}{3}(x+1)=2^x\Leftrightarrow 3\left(\frac{2}{3}\right)^x-x-1=0\ \ (3)$

Xét hàm số $f(t)=3\left(\frac{2}{3}\right)^t-t-1$ trên $\mathbb{R}$, ta có: $f'(t)=3\left(\frac{2}{3}\right)^t\ln\frac{2}{3}-1<0,\forall t\in\mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Lại có: $f(1)=0\Rightarrow(3)\Leftrightarrow x=1$.

Vậy $x=\{-2;1\}$.

Câu 12: Đáp án D.

$2^{2(x^2+x)}+2^{1-x^2}-2^{2(x^2+x)}.2^{1-x^2}-1=0\Leftrightarrow 2^{1-x^2}-1-2^{2(x^2+x)}\left(2^{1-x^2}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(2^{1-x^2}-1\right)\left(1-2^{2x^2+2x}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^{1-x^2}=1\\ 2^{2x^2+2x}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-x^2=0\\ 2x^2+2x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\ x=0\end{array}\right.$.

Câu 13: Đáp án A.

$12.3^x+3.15^x-5^{x+1}=20\Leftrightarrow 4.3^{x+1}+3^{x+1}.5^x-5.5^x-4.5=0$

$\Leftrightarrow 3^{x+1}\left(4+5^x\right)-5\left(5^x+4\right)=0\Leftrightarrow\left(5^x+4\right)\left(3^{x+1}-5\right)=0\Leftrightarrow 3^{x+1}=5\Leftrightarrow x=\log_3 5-1$.

Câu 14: Đáp án C.

Đặt $\begin{cases}u=4^x-8\\ v=2^x-64\end{cases}\Rightarrow pt\Leftrightarrow u^3+v^3=(u+v)^3\Leftrightarrow u^3+v^3=u^3+v^3+3uv(u+v)\Leftrightarrow uv(u+v)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=0\\ v=0\\ u+v=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4^x-8=0\\ 2^x-64=0\\ 4^x+2^x-72\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4^x=8\\ 2^x=64\\ 2^x=8\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{3}{2}\\ x=6\\ x=3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\frac{3}{2}\\ x_2=6,x_3=3\end{array}\right.\Rightarrow x_1+x_2+x_3=\frac{21}{2}$

BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

DẠNG 1: ĐẶT ẨN PHỤ, BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

Các em nhớ đến bất phương trình cơ bản sau $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$

+ Nếu $a > 1$ *thì* $a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$

+ Nếu $0 < a < 1$ *thì* $a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$

Trường hợp a = 1 thì với mọi x sao cho f(x) và g(x) xác định.

Câu 1: Tập giá trị của m thỏa mãn bất phương trình $\frac{2.9^x - 3.6^x}{6^x - 4^x} \leq 2$ $(x \in \mathbb{R})$ là $(-\infty; a) \cup (b; c)$.

Khi đó $a + b + c$ bằng:

A. 0 B.1 C. 2 D. 3

Câu 2: Nghiệm của bất phương trình $4x^2 + x.2^{x^2+1} + 3.2^{x^2} < x^2.2^{x^2} + 8x + 12$:

A. $\left[\begin{array}{l} -1 < x < \sqrt{2} \\ x < -\sqrt{2} \vee x > 3 \end{array}\right.$ B. $x \in (-1; \sqrt{2})$ C. $x \in (\sqrt{2}; +\infty)$ D. $(-\infty; 3)$

DẠNG 2: HÀM SỐ

Câu 3: Nghiệm của bất phương trình $2^x < 3^{\frac{x}{2}} + 1$ là:

A. $x < 1$ B. $x > 2$ C. $x > 1$ D. $x < 2$

Câu 4: Nghiệm của bất phương trình $1 + 2^{x+1} + 3^{x+1} < 6^x$:

A. $x > 1$ B. $1 < x < 2$ C. $x > 2$ D. $x < 1$.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Đáp án A.

Ta có: $\frac{2.9^x - 3.6^x}{6^x - 4^x} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{2.9^x - 5.6^x + 2.4^x}{6^x - 4^x} \leq 0$

Chia cả tử và mẫu của vế trái cho $4^x > 0$, bất phương trình tương đương với

$\frac{2.\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 5\left(\frac{3}{2}\right)^x + 2}{\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1} \leq 0$. Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x, t > 0$ bất phương trình trở thành $\frac{2t^2 - 5t + 2}{t - 1} \leq 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leq \frac{1}{2} \\ 1 < t \leq 2 \end{array}\right.$$

+ Với $t \le \frac{1}{2}$ ta có $\left(\frac{3}{2}\right)^x \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \le \log_{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \le -\log_{\frac{3}{2}} 2$

+ Với $1 < t \le 2$ ta có $1 < \left(\frac{3}{2}\right)^x \le 2 \Leftrightarrow 0 < x \le \log_{\frac{3}{2}} 2$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left(-\infty; -\log_{\frac{3}{2}} 2\right] \cup \left(0; \log_{\frac{3}{2}} 2\right]$.

Câu 2: Đáp án A.

$4x^2 + x.2^{x^2+1} + 3.2^{x^2} < x^2.2^{x^2} + 8x + 12 \quad (*)$

$(*) \Leftrightarrow 4\left(x^2 - 2x - 3\right) - 2^{x^2}\left(x^2 - 2x - 3\right) < 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 2x - 3\right)\left(4 - 2^{x^2}\right) < 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0 \\ 4 - 2^{x^2} > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ 4 - 2^{x^2} < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1 < x < 3 \\ x^2 < 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -1 \vee x > 3 \\ x^2 > 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1 < x < 3 \\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x < -1 \vee x > 3 \\ x > \sqrt{2} \vee x < -\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x < \sqrt{2} \\ x < -\sqrt{2} \vee x > 3 \end{array}\right.$$

DẠNG 2: HÀM SỐ

Câu 3: Đáp án D.

$2^x < 3^{\frac{x}{2}} + 1 \Leftrightarrow 1 < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Đặt $f(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$ là hàm số giảm và $f(2) = 1$. Vậy $(c) \Leftrightarrow f(2) < f(x) \Leftrightarrow x < 2$.

Câu 4: Đáp án C.

$1 + 2^{x+1} + 3^{x+1} < 6^x \quad (*)$

$(*) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{6}\right)^x + 2\left(\frac{1}{3}\right)^x + 3\left(\frac{1}{2}\right)^x < 1 \quad (**)$

Thấy $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x + 2\left(\frac{1}{3}\right)^x + 3\left(\frac{1}{2}\right)^x$ là hàm giảm trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 1$. Do đó $(**) \Leftrightarrow x > 2$.

PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

Khi ta có: + $\log_a x = \alpha \Leftrightarrow x = a^\alpha$ + $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \text{ hoặc } f(x) > 0 \end{cases}$

Khi giải phương trình các em nhớ đặt điều kiện để hàm số trong biểu thức logarit: $f(x) > 0$

Xét bất phương trình logarit sau đây: $\log_a f(x) \geq \log_a g(x)$

+ *Nếu $a > 1$ thì: bất phương trình* $\Leftrightarrow f(x) \geq g(x) > 0$
+ *Nếu $0 < a < 1$ thì: bất phương trình* $\Leftrightarrow 0 < f(x) \leq g(x)$

DẠNG 1: SỬ DỤNG THUẦN THỤC CÔNG THỨC

Câu 1: Phương trình $\frac{1}{2}\lg\left(x^2-4x-1\right) = \lg 8x - \lg 4x$ có tất cả bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

Câu 2: Phương trình $\ln(x-1)\ln x = \ln x$ có một nghiệm dạng $a+b.(e)$. Khi đó $a.b$ bằng:

A. 1 B. e C. e^2 D. 2

Câu 3: Phương trình $\log_2(3x+1)\log_3 x = 2\log_2(3x+1)$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3.

Câu 4: Phương trình $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$ có một nghiệm dạng $\frac{a}{\sqrt[3]{c}}$. Khi đó $a+c+3$ bằng? (a,c tối giản)

A. 8 B. 9 C. 11 D. 13

Câu 5: Phương trình $\lg^4(x-1)^2 + \lg^2(x-1)^3 = 25$ có tất cả bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 0 B. 1. C. 2 D. 3

DẠNG 2: DÙNG HÀM SỐ

Khi bài toán có 2 biểu thức logarit với 2 cơ số khác nhau, thông thường chúng ta sẽ đặt mộtbiểu thức loga theo ẩn t, rồi rút x theo t, thế vào biểu thức logarit mới.

Sau một loạt biến đổi thì phương trình thu được sẽ có dạng như sau:

$$a^{f(t)} + b^{g(t)} = A$$

Trong bài toán thu được trên, a và b có thể đồng thời lớn hơn 1, (khi đó vế trái đồng biến), hoặc a và b đồng thời nhỏ hơn 1 (khi đó vế trái nghịch biến)

Khi đó phương trình có nghiệm duy nhất $t = t_0$. Nghiệm này sẽ được nhẩm dễ dàng.

Câu 6: Phương trình $\log_3(x-3) = \log_4\left(x^2-6x+8\right)$ có nghiệm dạng $a+\sqrt{b}$. Khi đó $a+b$ bằng:

A. 6 B. 4 C. 8 D. 10

Câu 7: Phương trình $\log_7 x = \log_3(\sqrt{x}+2)$ có tất cả bao nhiêu nghiệm nguyên?

A.1 B.2 C. 3 D.4

Câu 8: Phương trình $\log_2(x-3)+\log_3(x-2)=2$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 2 B. 3 C. 4 D. 1

Câu 9: Phương trình $4(x-2)\left[\log_2(x-3)+\log_3(x-2)\right]=15(x+1)$ có tất cả bao nhiêu nghiệm vô tỷ?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

DẠNG 3: ĐẶT ẨN PHỤ KHÔNG HOÀN TOÀN

Tương tự như đặt ẩn phụ không hoàn toàn trong phương trình mũ, ta sẽ đặt $t=\log_a f(x)$ phương trình sẽ được đưa về phương trình bậc 2 ẩn t, khi đó x vẫn còn trong phương trình ẩn t, tuy nhiên điều đặc biệt ta sẽ thấy được là $\Delta=(ax+b)^2$ khi đó bài toán dễ giải hơn nhiều.

Câu 10: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x+(x-1)\log_2 x=6-2x$ bằng:

A. 2^{-1} B. 2 C. -1 D. 1

Câu 11: Phương trình $(x+2)\log^2{}_3(x+1)+4(x+1)\log_3(x+1)-16=0$ có một nghiệm dạng $\frac{a}{b}$.

Khi đó $a+b$ bằng:

A.1 B.2 C.0 D.3

Câu 12: Phương trình $\log_3^2(x+1)+(x-5)\log_3(x+1)-2x+6=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

DẠNG 5: THAM SỐ

Khi giải bài toán dạng này, chúng ta sẽ làm theo 2 bước:

*+ **Bước 1:** Cô lập 2 vế f(x) = f(m), vế phải là hằng số.*

*+ **Bước 2:** Tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của f(x) trên khoảng yêu cầu của bài toán (thường yêu cầu phương trình có nghiệm trong khoảng hoặc đoạn nào đó). Từ đó ta vẽ bảng biến thiên và tìm được điều kiện của f(m).*

Câu 13: Tìm m để các phương trình sau có nghiệm $9^x+3^x+m=0$:

A. $m<0$ **B.** $m>0$ **C.** $m>1$ **D.** $0<m<1$

Câu 14: Tìm m để các phương trình sau có nghiệm $9^x+m.3^x-1=0$:

A. $m<0$ **B.** $m>0$ **C.** $m\in R$ **D.** $0<m<1$

Câu 15: Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình $\log_2^2 x + m.\log_2 x - m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi giá trị của $x \in (0;+\infty)$.

A.6 B.7 C.5 D.4

Câu 16: Phương trình $\log_2 x + \log_4 x + \log_6 x + \log_8 x = \log_3 x + \log_5 x + \log_7 x + \log_9 x$ có bao nhiêu nghiệm?

A.2 B.4 C.3 D.1

Câu 17: Cho phương trình $\log_2\left(x^2 + mx\right) = \log_2(x-5), m \in \mathbb{R}$. Tìm giá trị lớn nhất của m đểphương trình có nghiệm thực trên nửa khoảng $[6;+\infty)$.

A. $m = -\frac{47}{7}$ B. $m = -\frac{35}{6}$ C. $m = -\frac{119}{22}$ D. $m = -\frac{61}{8}$

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x - \frac{2}{\log_3(x+1)} = m$ có hai nghiệmphân biệt.

A. $-1 < m \neq 0$ B. $m > -1$ C.Không tồn tại m D. $-1 < m < 0$

Câu 19: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{m\log_3^2 x - 4\log_3 x + m + 3}$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$ là:

A. $m \in (-4;1)$ B. $m \in [1;+\infty)$

C. $m \in (-\infty;-4) \cup (1;+\infty)$ D. $m \in (1;+\infty)$

Câu 20: Tìm tập hợp X gồm tất cả các giá trị của tham số thực m để bất phương trình $1 + \log_5\left(x^2+1\right) \geq \log_5\left(mx^2 + 4x + m\right)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. $X = [2;3]$ B. $X = [3;5]$ C. $X = (2;3]$ D. $X = (3;5]$

Câu 21: Cho phương trình $4\log_9^2 x + m\log_{\frac{1}{3}} x + \frac{1}{6}\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x - m - \frac{2}{9} = 0$ (m là tham số). Tìm m đểphương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1.x_2 = 3$.Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $1 < m < 2$ B. $3 < m < 4$ C. $0 < m < \frac{3}{2}$ D. $2 < m < 3$

Câu 22: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - m2^x + 2m - 5 = 0$ có hainghiệm trái dấu.

A. $\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$ B. $(0;+\infty)$ C. $\left(0;\frac{5}{2}\right)$ D. $\left(\frac{5}{2};4\right)$

Câu 23: Phương trình $m.9^{x^2-2x} - (2m+1).6^{x^2-2x} + m.4^{x^2-2x} = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;2)$ với giá trị của tham số m thuộc:

A. $(-\infty;0]$ B. $(-\infty;6]$ C. $[6;+\infty)$ D. $[0;+\infty)$

Câu 24: Gọi $x_1, x_2\ (x_1 < x_2)$ là hai nghiệm của phương trình

$8^{x+1} + 8.(0,5)^{3x} + 3.2^{x+3} = 125 - 24.(0,5)^x$. Tính giá trị $P = 3x_1 + 4x_2$.

A. 1 **B.** -2 **C.** 0 **D.** 2

Câu 25: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4\left(\log_2 \sqrt{x}\right)^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$

A. $m \ge \frac{1}{4}$ **B.** $m \ge 0$ **C.** $0 < m < \frac{1}{4}$ **D.** $m \le \frac{1}{4}$

Câu 26: Bất phương trình $\log 5 + \log\left(x^2+1\right) \ge \log\left(mx^2 + 4x + m\right)$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$ với bao nhiêu giá trị nguyên của m?

A. Vô số **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

Câu 27: Tìm giá trị thực của m để phương trình $2^{3-x^2}.5^{2x+m} = 2$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn $|x_1 - x_2| = 2\sqrt{2}$

A. $m = 2$ **B.** $m = \sqrt{2}$ **C.** $m = -\log_2 5$ **D.** $m = \log_5 2$

Câu 28: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình sau có nghiệm thực trong đoạn $\left[\frac{5}{4};4\right]$. $(m-1)\log^2_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-2} + 4m - 4 = 0$

A. $m > \frac{7}{3}$ **B.** $-3 < m < \frac{7}{3}$ **C.** $-3 \le m \le \frac{7}{3}$ **D.** $m < -3$

Câu 29: Số nghiệm nguyên không âm của bất phương trình $\sqrt{15.2^{x+1}+1} \ge \left|2^x - 1\right| + 2^{x+1}$ bằng bao nhiêu?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 30: Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\left(7-3\sqrt{5}\right)^{x^2} + m\left(7+3\sqrt{5}\right)^{x^2} = 2^{x^2-1}$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

A. $m < \frac{1}{16}$ **B.** $0 \le m < \frac{1}{16}$ **C.** $-\frac{1}{2} < m \le \frac{1}{16}$ **D.** $\left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} < m \le 0 \\ m = \frac{1}{16} \end{array}\right.$

Câu 31: Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\log_5\left(25^x - \log_5 m\right) = x$ có nghiệm duy nhất.

A. $m = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$. **B.** $m = 1$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m \ge 1 \\ m = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} \end{array}\right.$ **D.** $m \ge 1$.

Câu 32: Tìm m để bất phương trình: $m.9^x-(2m+1).6^x+m.4^x\le 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in(0;1)$.

A. $0\le m\le 6$ B. $m\le 6$ C. $m\ge 6$ D. $m\le 0$

ĐỀ SỞ GD& ĐT HÀ TĨNH

Câu 33: Biết tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(\sqrt{x^2-x+4}+1\right)+2\log_5\left(x^2-x+5\right)<3$ là $(a;b)$. Khi đó tổng $a+2b$.

A.3 B.4 C.2 D.1

SỞ GD & ĐT NINH BÌNH

Câu 34: Cho m và n là các số nguyên dương khác 1. Gọi P là tích các nghiệm của phương trình $8(\log_m x)(\log_n x)-7\log_m x-6\log_n x-2017=0$. Khi P là một số nguyên, tìm tổng $m+n$ để P nhận giá trị nhỏ nhất?

A. $m+n=20$ B. $m+n=48$ C. $m+n=12$ D. $m+n=24$

Câu 35: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $4^x+(2-m)2^x+5-m=0$ có nghiệm thực thuộc $(-1;1)$.

A. $m\in\left[4;\frac{13}{3}\right)$ B. $m\in[4;+\infty)$

C. $m\in\left(\frac{25}{6};\frac{13}{3}\right)$ D. $m\in(-\infty;-4)\cup[4;+\infty)$

Câu 36: Tập hợp các giá trị của m để phương trình $3^x+3=m.\sqrt{9^x+1}$ có đúng 1 nghiệm:

A. $[1;3)$ B. $\left(3;\sqrt{10}\right)$ C. $\left\{\sqrt{10}\right\}$ D. $(1;3)\cup\left\{\sqrt{10}\right\}$

LỜI GIẢI CHI TIẾT

DẠNG 1: SỬ DỤNG THUẦN THỤC CÔNG THỨC

Câu 1: Đáp án A.

$$\frac{1}{2}\lg\left(x^2-4x-1\right)=\lg 8x-\lg 4x$$

Điều kiện: $\begin{cases}x^2-4x-1>0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<2-\sqrt{5}\vee 2+\sqrt{5}<x\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow x>2+\sqrt{5}$

Phương trình: $\frac{1}{2}\lg\left(x^2-4x-1\right)=\lg 8x-\lg 4x=\lg 2$

$\Leftrightarrow \lg\sqrt{x^2-4x-1}=\lg 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4x-1}=2$

$\Leftrightarrow x^2-4x-1=4 \Leftrightarrow x^2-4x-5=0 \Leftrightarrow x=-1(L), x=5$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm: $x=5$

Câu 2: Đáp án A.

$\ln(x-1)\ln x=\ln x$

Điều kiện: $x>1$

Phương trình: $\ln(x-1)\ln x=\ln x \Leftrightarrow \ln x\left[\ln(x-1)-1\right]=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\ln x=0\\ \ln(x-1)=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x-1=e\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1(L)\\ x=1+e\end{array}\right.$$

Câu 3: Đáp án B.

$\log_2(3x+1)\log_3 x=2\log_2(3x+1)$

Điều kiện: $x>0$

Phương trình: $\log_2(3x+1)\log_3 x=2\log_2(3x+1)$

$$\Leftrightarrow \log_2(3x+1)\left[\log_3 x-2\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\log_2(3x+1)=0 & (*)\\ \log_3 x-2=0 & (**)\end{array}\right.$$

Phương trình $(*) \Leftrightarrow \log_2(3x+1)=\log_2 1 \Leftrightarrow 3x+1=1 \Leftrightarrow x=0(\text{loại})$

Phương trình $(**) \Leftrightarrow \log_3 x=2 \Leftrightarrow x=9$

Câu 4: Đáp án A.

$\log_x 2-\log_4 x+\frac{7}{6}=0 \quad (b)$

Phương trình: $\log_x 2-\log_4 x+\frac{7}{6}=0$. Điều kiện: $0<x\neq 1$. Đặt $t=\log_2 x$

$$(b) \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x}-\frac{1}{2}\log_2 x+\frac{7}{6}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{t}-\frac{t}{2}+\frac{7}{6}=0 \Leftrightarrow 3t^2-7t-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=3\\ t=-\frac{2}{3}\end{array}\right.$$

- $t=\log_2 x=3 \Leftrightarrow x=2^3=8$
- $t=\log_2 x=-\frac{2}{3} \Leftrightarrow x=2^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

Câu 5: Đáp án B.

$\lg^4(x-1)^2+\lg^2(x-1)^3=25 \quad (d)$

Phương trình: $\lg^4(x-1)^2+\lg^2(x-1)^3=25$. Điều kiện: $x>1$

$(d) \Leftrightarrow \left[2\lg(x-1)\right]^4+\left[3\lg(x-1)\right]^2-25=0$. Đặt $t=\lg^2(x-1)\geq 0$

$(d) \Leftrightarrow 16t^2 + 9t - 25 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\dfrac{50}{32} \text{ (loại)} \\ t = 1 \end{array}\right.$

Với $t = \lg^2(x-1) = 1 \Leftrightarrow \lg(x-1) = \pm 1 \Leftrightarrow x = 11, x = \dfrac{11}{10}$ *(nhận)*

DẠNG 2: DÙNG HÀM SỐ

Câu 6: Đáp án A.

Giải phương trình: $\log_3(x-3) = \log_4(x^2 - 6x + 8)$

Đặt $t - \log_3(x-3) \Leftrightarrow x - 3 = 3^t$, phương trình đã cho trở thành:

$t = \log_4\left[3^{2t} - 1\right] \Leftrightarrow 4^t = 3^{2t} - 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{4}{9}\right)^t + \left(\dfrac{1}{9}\right)^t - 1 = 0$ (1)

Xét hàm số $f(t) = \left(\dfrac{4}{9}\right)^t + \left(\dfrac{1}{9}\right)^t - 1$

TXĐ:$\mathbb{R}$, $f'(t) = \left(\dfrac{4}{9}\right)^t \ln\dfrac{4}{9} + \left(\dfrac{1}{9}\right)^t \ln\dfrac{1}{9} < 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Chứng tỏ f(t) là nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Mà $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow t = \dfrac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình (1) trên $\mathbb{R}$.

Suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x = 3 + \sqrt{3}$

➢ **Cách khác.**

Điều kiện: $\begin{cases} x - 3 > 0 \\ x^2 - 6x + 8 > 0 \end{cases}$

Giả sử $\log_3(x-3) = \log_4(x^2 - 6x + 8) = t \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 3^t \\ x^2 - 6x + 8 = 4^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3^t + 3 \\ x^2 - 6x + 8 = 4^t \end{cases}$

$\Rightarrow (3^t + 3)^2 - 6(3^t + 3) + 8 = 4^t \Leftrightarrow 9^t - 1 = 4^t \Leftrightarrow 4^t + 1 = 9^t \Leftrightarrow \left(\dfrac{4}{9}\right)^t + \left(\dfrac{1}{9}\right)^t = 1$

Xét hàm số $f(t) = \left(\dfrac{4}{9}\right)^t + \left(\dfrac{1}{9}\right)^t$ ta có $f'(t) = \left(\dfrac{4}{9}\right)^t \ln\dfrac{4}{9} + \left(\dfrac{1}{9}\right)^t \ln\dfrac{1}{9} < 0$

Do đó hàm số $f(t)$ nghịch biến nên có nghiệm duy nhất. Mà $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow t = \dfrac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(t) = 1 \Rightarrow x = 3^t + 3 = 3 + \sqrt{3}$.

$\Rightarrow a = 3; b = 3 \Rightarrow a + b = 6$. **Chọn A.**

Câu 7: Đáp án A.

$\log_7 x = \log_3(\sqrt{x}+2)$ (1)

Điều kiện: $x>0$.

Đặt $t=\log_3\left(\sqrt{x}+2\right)>\log_3 2 \Rightarrow \sqrt{x}+2=3^t \Leftrightarrow \sqrt{x}=3^t-2 \Leftrightarrow x=\left(3^t-2\right)^2$.

Khi đó (1) trở thành:

$$\log_7\left(3^t-2\right)^2=t \Leftrightarrow 3^t-2=\left(\sqrt{7}\right)^t \Leftrightarrow \left(\sqrt{7}\right)^t+2-3^t=0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^t+2\left(\frac{1}{3}\right)^t-1=0\ (*).$$

Xét hàm số $f(m)=\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^m+2\left(\frac{1}{3}\right)^m-1$ trên $(\log_3 2;+\infty)$, ta có:

$$f'(m)=\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^m\ln\frac{\sqrt{7}}{3}+2\left(\frac{1}{3}\right)^m\ln\frac{1}{3}<0, \forall m\in(\log_3 2;+\infty).$$

Vậy hàm số $f(m)$ nghịch biến trên $(\log_3 2;+\infty)$.

Lại có: $f(2)=0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow t=2 \Rightarrow \log_3\left(\sqrt{x}+2\right)=2 \Leftrightarrow x=49$.

➢ Cách khác.

Điều kiện: $x>0$.

Giả sử $\log_7 x=\log_3\left(\sqrt{x}+2\right)=t \Rightarrow \begin{cases} x=7^t \\ \sqrt{x}+2=3^t \end{cases} \Rightarrow \sqrt{7^t}+2=3^t \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^t+2.\left(\frac{1}{3}\right)^t=1$

Xét hàm số $f(t)=\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^t+2.\left(\frac{1}{3}\right)^t$ ta có $f'(t)=\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^t\ln\frac{\sqrt{7}}{3}+2\left(\frac{1}{3}\right)^t\ln\frac{1}{3}<0$

Do đó hàm số $f(t)$ nghịch biến nên có nghiệm duy nhất. Mà $f(2)=1 \Rightarrow t=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(t)=1 \Rightarrow x=7^t=49$. **Chọn A.**

Câu 8: Đáp án D.

$\log_2(x-3)+\log_3(x-2)=2$ (1)

Điều kiện: $x>3$.

Đặt $t=\log_3(x-2) \Rightarrow x-2=3^t \Leftrightarrow x=3^t+2$. Khi đó (1) trở thành:

$\log_2\left(3^t-1\right)+t=2 \Leftrightarrow \log_2\left(3^t-1\right)=2-t \Leftrightarrow 3^t-1=2^{2-t}$

$\Leftrightarrow 3^t-1=\frac{4}{2^t} \Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{6}\right)^t+\left(\frac{1}{3}\right)^t-1=0$ (*)

Xét hàm số $f(m)=4\left(\frac{1}{6}\right)^m+\left(\frac{1}{3}\right)^m-1$ trên $\mathbb{R}$, ta có: $f'(m)=4\left(\frac{1}{6}\right)^m\ln\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{3}\right)^m\ln\frac{1}{3}<0, \forall m\in\mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(m)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lại có: $f(1)=0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow \log_3(x-2)=1 \Leftrightarrow x=5$.

➢ **Cách khác.**

Điều kiện: $x > 3$. Xét hàm số $f(x) = \log_2(x-3) + \log_3(x-2)$ với $x > 3$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{(x-3)\ln 2} + \dfrac{1}{(x-2)\ln 3} > 0 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến nên có nghiệm duy nhất

Mà $f(5) = 2$ nên $x = 5$ là nghiệm của phương trình. Chọn D.

Câu 9: Đáp án D.

$4(x-2)[\log_2(x-3) + \log_3(x-2)] = 15(x+1) \quad (1)$

Điều kiện: $x > 3$.

Khi đó: $(1) \Leftrightarrow \log_2(x-3) + \log_3(x-2) - \dfrac{15}{4}.\dfrac{x+1}{x-2} = 0 \quad (*)$

Đặt $f(t) = \log_2(t-3) + \log_3(t-2) - \dfrac{15}{4}.\dfrac{t+1}{t-2}$ với $t \in (3;+\infty)$.

Ta có: $f'(t) = \dfrac{1}{(t-3)\ln 2} + \dfrac{1}{(t-2)\ln 3} + \dfrac{15}{4}.\dfrac{3}{(t-2)^2} > 0, \forall t \in (3;+\infty)$

Vậy hàm $f(t)$ đồng biến trên $(3;+\infty)$. Lại có: $f(11) = 0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow x = 11$.

DẠNG 3: ĐẶT ẨN PHỤ KHÔNG HOÀN TOÀN

Câu 10: Đáp án A.

$\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x = 6 - 2x \quad (1)$

Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $t = \log_2 x$, khi đó (1) trở thành: $t^2 + (x-1)t + 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 + (x-3)t + 2t + 2x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow t(t+x-3) + 2(t+x-3) = 0 \Leftrightarrow (t+2)(t+x-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t + x - 3 = 0 \end{array}\right.$.

Với $t = -2 \Rightarrow \log_2 x = -2 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$.

Với $t + x - 3 = 0 \Rightarrow \log_2 x + x - 3 = 0 \quad (*)$.

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t - 3$ trên $(0;+\infty)$, ta có: $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0;+\infty)$.

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Lại có: $f(2) = 0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy $x = \left\{\dfrac{1}{4}; 2\right\}$.

✓ ***<u>Bình luận:</u>*** Sở dĩ phân tích được thành nhân tử là do ta thấy

$$\Delta = (x-5)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{1-x+x-5}{2} = -2 \\ t_2 = \dfrac{1-x-x+5}{2} = 3 - x \end{array}\right.$$

<u>Nên phương trình được phân tích về dạng:</u> (t+2)(t+x-3) = 0

Câu 11: Đáp án A.

$(x+2)\log^2_3(x+1)+4(x+1)\log_3(x+1)-16=0 \quad (1)$

Điều kiện: $x>-1$.

Đặt $t=\log_3(x+1)$, khi đó (1) trở thành: $(x+2)t^2+4(x+1)t-16=0$

$\Leftrightarrow (x+2)t^2+4(x+2)t-4t-16=0 \Leftrightarrow (x+2)t(t+4)-4(t+4)=0$

$\Leftrightarrow (t+4)\left[(x+2)t-4\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-4 \\ (x+2)t-4=0 \end{array}\right.$

+ Với $t=-4 \Rightarrow \log_3(x+1)=-4 \Leftrightarrow x=\dfrac{-80}{81}$.

+ Với $(x+2)t-4=0 \Rightarrow (x+2)\log_2 x-4=0 \Leftrightarrow \log_2 x-\dfrac{4}{x+2}=0 \qquad (*)$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t-\dfrac{4}{t+2}$ trên $(0;+\infty)$, ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+\dfrac{4}{(t+2)^2}>0, \forall t\in(0;+\infty)$.

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Lại có: $f(2)=0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow x=2$. Vậy $x=\left\{\dfrac{-80}{81};2\right\}$.

✓ ***Bình luận:*** Sở dĩ phân tích được thành nhân tử là do ta thấy

$$\Delta=(2x+6)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=\dfrac{-2(x+1)+2x+6}{(x+2)}=\dfrac{4}{x+2} \\ t_2=\dfrac{-2(x+1)-2x-6}{x+2}=4 \end{array}\right.$$

Nên phương trình được phân tích về dạng: (t-4)[(x+2)t- 4] = 0

Câu 12: Đáp án B.

$\log^2_3(x+1)+(x-5)\log_3(x+1)-2x+6=0 \qquad (1)$

Điều kiện: $x>-1$.

Đặt $t=\log_3(x+1)$, khi đó(1) trở thành: $t^2+(x-5)t-2x+6=0$

$\Leftrightarrow t^2+(x-3)t-2t-2x+6=0 \Leftrightarrow t(t+x-3)-2(t+x-3)=0$

$\Leftrightarrow (t+x-3)(t-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t+x-3=0 \end{array}\right.$

+ Với $t=2 \Rightarrow \log_3(x+1)=2 \Leftrightarrow x=8$.

+ Với $t+x-3=0 \Rightarrow \log_3(x+1)+x-3=0 \quad (*)$

Xét hàm số $f(t)=\log_3(t+1)+t-3$ trên $(-1;+\infty)$, ta có:

$f'(t)=\dfrac{1}{(t+1)\ln 3}+1>0, \forall t\in(-1;+\infty)$.

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(-1;+\infty)$. Lại có $f(2)=0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow x=2$. Vậy $x=\{2;8\}$.

✓ <u>*Bình luận*</u>: Sở dĩ phân tích được thành nhân tử là do ta thấy

$$\Delta=(x-1)^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t_1=\dfrac{5-x+x-1}{2}=\dfrac{4}{2}=2\\ t_2=\dfrac{5-x-x+1}{2}=3-x\end{array}\right.$$

<u>*Nên phương trình được phân tích về dạng*</u>: (t-2)[t+x-3] = 0

DẠNG 5: THAM SỐ

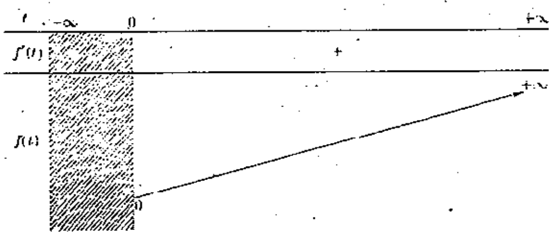
Câu 13: Đáp án A.

$9^x+3^x+m=0$ (1)

Đặt $t=3^x>0$, khi đó (1) trở thành: $t^2+t+m=0\Leftrightarrow -m=t^2+t$ (*)

Để (1) có nghiệm thì (*) phải có nghiệm ít nhất một nghiệm t dương.

Xét hàm số $f(t)=t^2+t$ với $t>0$, ta có bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta suy ra:

Để phương trình (*) có ít nhất một nghiệm t dương thì: $-m>0\Leftrightarrow m<0\Rightarrow m\in(-\infty;0)$.

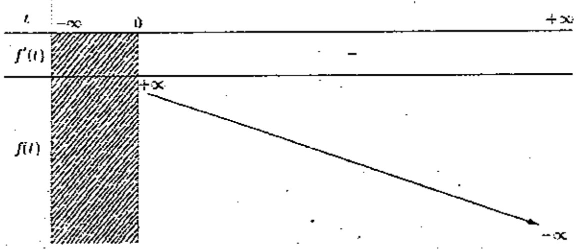
Câu 14: Đáp án C.

$9^x+m.3^x-1=0$ (1)

Đặt $t=3^x>0$, khi đó (1) trở thành: $t^2+mt-1=0\Leftrightarrow m=\dfrac{1-t^2}{t}$ (*).

Để (1) có nghiệm thì (*) phải có ít nhất một nghiệm t dương.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{1-t^2}{t}$ với $t>0$, ta có bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta suy ra:

Để (*) có ít nhất một nghiệm t dương thì $m\in\mathbb{R}$.

Câu 15: Đáp án C.

Điều kiện: $x > 0$, đặt $t = \log_2 x$ thay vào bất phương trình ta được $t^2 + mt - m \geq 0$ $(*)$.

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để $(*)$ nghiệm đúng với mọi $t \in \mathbb{R}$. Hay $\Delta = m^2 + 4m \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 0$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 16: Đáp án D.

Xét $f(x) = \log_2 x + \log_4 x + \log_6 x + \log_8 x - \log_3 x - \log_5 x - \log_7 x - \log_9 x, x > 0$

Có $f'(x) = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\ln 2} + \dfrac{1}{\ln 4} + \dfrac{1}{\ln 6} + \dfrac{1}{\ln 8} - \dfrac{1}{\ln 3} - \dfrac{1}{\ln 5} - \dfrac{1}{\ln 7} - \dfrac{1}{\ln 9}\right) > 0, \forall x > 0$

Do đó $f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên phương trình $f(x) = 0$ có không quá một nghiệm.

Nhận thấy $x = 1$ là nghiệm, nên phương trình có 1 nghiệm.

➢ **Cách khác.**

Điều kiện: $x > 0$. Ta có $\log_2 x + \log_4 x + \log_6 x + \log_8 x = \log_3 x + \log_5 x + \log_7 x + \log_9 x$

$\Leftrightarrow \log_2 x + \log_2 x \log_4 2 + \log_2 x \log_6 2 + \log_2 x \log_8 2$

$= \log_2 x \log_3 2 + \log_2 x \log_5 2 + \log_2 x \log_7 2 + \log_2 x \log_9 2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ 1 + \log_4 2 + \log_6 2 + \log_8 2 = \log_3 2 + \log_7 2 + \log_9 2 \, (\text{Loại}) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$. **Chọn D.**

Câu 17: Đáp án B.

Với $x \in [6;+\infty)$, ta có sự tương đương:

$$\log_2(x^2 + mx) = \log_2(x-5) \Leftrightarrow x^2 + mx = x - 5 \Leftrightarrow m = \frac{-x^2 + x - 5}{x}$$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{-x^2 + x - 5}{x}, x \geq 6$. Khi đó:

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + x - (-x^2 + x - 5)}{x^2} = \frac{-x^2 + 5}{x^2} < 0, \forall x \geq 6$$

Ta suy ra $m \leq f(6) = -\dfrac{35}{6}$.

Câu 18: Đáp án B.

Điều kiện $\begin{cases} x > -1 \\ \log_3(x+1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$

Xét hàm số $y = x - \dfrac{2}{\log_3(x+1)}$. Khi đó ta có:

x	-1		0		$+\infty$
y'	||	$+$	||	$+$	
y	|| -1	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$+\infty$

$$y' = 1 + \frac{2\left[\log_3(x+1)\right]'}{\log_3^2(x+1)} = 1 + \frac{2}{(\ln 3)(x+1)\log_3^2(x+1)} > 0 \; (\forall x > -1)$$

Do đó hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng $(-1;0)$ và $(0;+\infty)$. Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có 2 nghiệm khi $m > -1$.

Câu 19: Đáp án C.

Hàm số đã cho xác định trên khoảng

$(0;+\infty) \Leftrightarrow g(x) = m\log_3^2 x - 4\log_3 x + m + 3 \neq 0\ (\forall x > 0)$

Đặt $t = \log_3 x\,(t \in \mathbb{R})$ khi đó $\Leftrightarrow g(t) = mt^2 - 4t + m + 3 \neq 0\ (\forall t \in \mathbb{R})$

+ Với $m = 0 \Rightarrow g(t) = -4t^2 + 3$ (không thỏa mãn)

+ Với $m \neq 0$ suy ra $g(t) = mt^2 - 4t + m + 3 \neq 0\ (\forall t) \Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -4 \end{array}\right.$

Câu 20: Đáp án C.

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 + 1 > 0 \\ mx^2 + 4x + m > 0 \end{cases}$

Bất phương trình trở thành: $\log_5(mx^2 + 4x + m) - \log_5(x^2 + 1) \leq 1$

$\dfrac{mx^2 + 4x + m}{x^2 + 1} \leq 5 \Leftrightarrow (m-5)x^2 + 4x + m - 5 \leq 5$

Bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 + 4x + m > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ (m-5)x^2 + 4x + m - 5 \leq 5, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} (I)$

- Với $m = 0$ không thỏa mãn.
- Với $m = 5$ không thỏa mãn.
- Với $m \neq 0; m \neq 5$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m - 5 < 0 \\ 4 - m^2 < 0 \\ 4 - (m-5)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 5 \\ m < -2 \vee m > 2 \Leftrightarrow 2 < m \leq 3 \\ m \leq 3 \vee m \geq 7 \end{cases}$$

Vậy $m \in (2;3]$

Câu 21: Đáp ánC.

Phương trình đã cho viết lại như sau: $9\log_3^2 x - 3(3m+1)\log_3 x - 9m - 2 = 0$ (1)

Đặt $t = \log_3 x$ khi đó phương trình (1) trở thành: $9t^2 - 3(3m+1)t - 9m - 2 = 0$ (2)

Yêu cầu bài toán tương đương với tìm m để phương trình (2) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 + t_2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9(3m+1)^2 + 36(9m+2) \geq 0 \\ \dfrac{3m+1}{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \dfrac{2}{3}$

Câu 22: Đáp ánD.

Đặt $t=2^x$, ta có $t^2-mt+2m-5=0$. Cần tìm m sao cho phương trình này có hai nghiệm phân biệt dương t_1,t_2 thỏa mãn $(t_1-1)(t_2-1)<0 \Leftrightarrow x_1x_2-(x_1+x_2)+1<0$. Vậy ta có:

$$\begin{cases} m^2-4(2m-5)>0 \\ m>0 \\ 2m-5>0 \\ (2m-5)-m+1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{2}<m<4$$

Câu 23: Đáp án C.

$$\text{PT} \Leftrightarrow \text{m}-(2\text{m}+1).\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-2x}+\text{m}.\left(\frac{4}{9}\right)^{x^2-2x}=0$$

Đặt $t=\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-2x}, x\in(0;2) \Rightarrow t\in\left(1;\frac{3}{2}\right] \Rightarrow \text{PT} \Leftrightarrow \text{m}-(2\text{m}+1).t+\text{m}.t^2=0 \Leftrightarrow \text{m}=\frac{t}{t^2-2t+1}(*)$

Xét hàm số $f(t)=\frac{t}{t^2-2t+1} \Rightarrow f'(t)=\frac{t+1}{(1-t)^3}>0\left(\forall t\in\left(1;\frac{3}{2}\right]\right) \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;\frac{3}{2}\right]$. Mặt khác $\lim\limits_{t\to1^+}=+\infty; f\left(\frac{3}{2}\right)=6 \Rightarrow f(t)\ge f\left(\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow f(t)\ge 6$.

Suy ra $\text{m}\ge 6 \Leftrightarrow \text{m}\in[6;+\infty)$.

Câu 24: Đáp án A.

$$8^{x+1}+8.(0,5)^{3x}+3.2^{x+3}=125-24.(0,5)^x \Leftrightarrow 8\left(8^x+\frac{1}{8^x}\right)+24\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right)-125=0$$

$$\Leftrightarrow 8\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right)^3=125 \Leftrightarrow 2^x+\frac{1}{2^x}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow \left(2^x-\frac{1}{2}\right).(2^x-2)=0 \Leftrightarrow x=\pm1$$

Câu 25: Đáp án D.

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ (\log_2 x)^2+\log_2 x+\text{m}=0 \xrightarrow{t=\log_2 x} t^2+t+\text{m} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{m}=-t^2-t=f(x) \\ t\in(-\infty;0) \end{cases} \end{cases}$$

Ta có $f'(t)=-2t-1 \Rightarrow f'(t)=0 \Leftrightarrow -2t-1=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{2}$

Xét bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ với $x\in(-\infty;0)$, ta thấy để PT ban đầu có nghiệm thuộc đoạn $(0;1)$ thì phương trình $f(t)=\text{m}$ có ít nhất 1 nghiệm, khi đó $\text{m}\le\frac{1}{4}$.

Câu 26: Đáp án D.

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{m}x^2+4x+\text{m}>0 \\ 5(x^2+1)\ge \text{m}x^2+4x+\text{m} \end{cases}(\forall x\in\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{m}x^2+4x+\text{m}>0 \\ (\text{m}-5)x^2+4x+\text{m}-5\le0 \end{cases}(\forall x\in\mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m>0 \\ 4-m^2<0 \end{cases} \\ \begin{cases} m-5<0 \\ 4-(m-5)^2 \le 0 \end{cases} \end{cases} (\forall x\in\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m>0 \\ \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} m<5 \\ \left[\begin{array}{l} m\le 3 \\ m\ge 7 \end{array}\right. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>2 \\ m\le 3 \end{cases}, m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m=3$$

Câu 27: Đáp án C.

PT $\Leftrightarrow \log_2\left(2^{3-x^2}.5^{2x+m}\right)=\log_2 2 \Leftrightarrow \left(3-x^2\right)+\log_2 5^{2x+m}=1$

$\Leftrightarrow x^2-2-(2x+m)\log_2 5=0 \Leftrightarrow x^2-2x.\log_2 5-2-m\log_2 5=0$

PT đã cho có 2 nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2 \Leftrightarrow \Delta'=4\log_2{}^2 5+2+m\log_2 5>0$

Khi đó theođịnh lí Viet, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2\log_2 5 \\ x_1x_2=-2-m\log_2 5 \end{cases}$

Ta có: $\left|x_1-x_2\right|^2=\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2=4\log_2{}^2 5+4\left(2+m\log_2 5\right)=8 \Leftrightarrow m=-\log_2 5$

Câu 28: Đáp án C.

- Phương pháp: Biến đổi phương trình, cô lập m, đưa về xét tương giao của hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=m$ trên đoạn $[a;b]$

+ Cách giải: $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}^2(x-2)^2+4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x-2}+4m-4=0$

$\Leftrightarrow 4(m-1)\log_2^2(x-2)+4(m-5)\log_2(x-2)+4m-4=0$

Đặt $t=\log_2(x-2); x\in\left[\dfrac{5}{4};4\right]\Rightarrow t\in[-2;1]$. Khi đó yêu cầu bài toán trở thành tìm m để phương trình $4(m-1)t^2+4(m-5)t+4m-4=0$ có nghiệm trong đoạn $[-2;1]$

Có $4(m-1)t^2+4(m-5)t+4m-4=0$

$\Leftrightarrow m\left(4t^2+4t+4\right)=4t^2+20t+4 \Leftrightarrow m=1+\dfrac{4t}{t^2+t+1}=f(t)$.

Xét $f(t)=1+\dfrac{4t}{t^2+t+1}; f'(t)=\dfrac{-4t^2+4}{(th2)+t+1}^2=0 \Leftrightarrow t=\pm 1\in[-2;1]$

$f(-2)=-\dfrac{5}{3}; f(-1)=-3; f(1)=\dfrac{7}{3} \Rightarrow \max\limits_{[-2;1]} f(t)=\dfrac{7}{3}, \min\limits_{[-2;1]} f(t)=-3$

Để phương trình $m=f(t)$ có nghiệm trong đoạn $[-2;1]$ thì:

$\max\limits_{[-2;1]} f(t)\le m\le \min\limits_{[-2;1]} f(t) \Leftrightarrow -3\le m\le \dfrac{7}{3}$

Câu 29: Đáp án D.

Đặt $t=2^x\ge 1$ (do $x\ge 0$) bất phương trình trở thành: $\sqrt{30t+1}\ge |t-1|+2t$.

$\Leftrightarrow \sqrt{30t+1} \geq 3t-1 \Leftrightarrow 30t+1 \geq 9t^2-6t+1 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 4$

$\Rightarrow 0 \leq x \leq 2$. Suy ra có 3 nghiệm nguyên không âm của BPT.

Câu 30: Đáp án D.

$$\text{PT} \Leftrightarrow \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2} + m\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Đặt $t = \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2} \in (0;1]$. Khi đó PT $\Rightarrow 2t^2 - t + 2m = 0 \Leftrightarrow 2m = t - 2t^2 = g(t)$ (1).

Ta có $g'(t) = 1 - 4t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$.

Suy ra bảng biến thiên:

t	0		$\frac{1}{4}$		1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{8}$	$\searrow$	-1

PT đã cho có đúng 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có đúng 1 nghiệm $t \in (0;1)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m = \frac{1}{8} \\ -1 < 2m \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \frac{1}{16} \\ -\frac{1}{2} < m \leq 0 \end{array}\right..$$

Câu 31: Đáp án C.

$\text{PT} \Leftrightarrow 25^x - \log_5 m = 5^x \xrightarrow{t=5^x>0} t^2 - t = \log_5 m$

Xét $g(t) = t^2 - t$ trên $(0;+\infty)$ ta có bảng biến thiên:

t	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

PT đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 m = -\frac{1}{4} \\ \log_5 m \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} \\ m \geq 1 \end{array}\right..$

Câu 32: Đáp án B.

$$m.9^x-(2m+1).6^x+m.4^x\le 0\Leftrightarrow m.\frac{9^x}{4^x}-(2m+1).\frac{6^x}{4^x}+m\le 0\left(4^x>0,\forall x\in\mathbb{R}\right)$$

$$\Leftrightarrow m.\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-(2m+1).\left(\frac{3}{2}\right)^x+m\le 0\ (1)$$

Đặt $t=\left(\frac{3}{2}\right)^x$. Vì $0<x<1\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^0<\left(\frac{3}{2}\right)^x<\left(\frac{3}{2}\right)^1\Leftrightarrow 1<t<\frac{3}{2}$

Bất phương trình đã cho tương đương: $mt^2-(2m+1)t+m\le 0$

$$\Leftrightarrow m\left(t^2-2t+1\right)-t\le 0\Leftrightarrow m(t-1)^2-t\le 0\Leftrightarrow m\le\frac{1}{(t-1)^2}.$$

Giả sử $f(t)=\frac{t}{(t-1)^2}$ với $1<t<\frac{3}{2}$.

$$f'(t)=\frac{-t^2+1}{(t-1)^4}=\frac{-t-1}{(t-1)^3}<0,\forall t\in\left(1;\frac{3}{2}\right)$$

Bảng biến thiên của hàm $f(t)$; $\lim\limits_{x\to 1^+}f(t)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^-}f(t)=6$

t	$-\infty$	1		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(t)$			$-$		
$f(t)$		$+\infty$	$\searrow$	6	

Theo bảng biến thiên (1) có nghiệm đúng với $x\in(0;1)\Leftrightarrow m\le 6$.

ĐỀ SỞ GD & ĐT HÀ TĨNH

➢ **Cách khác.**

Đặt $t=\sqrt{x^2-x+4}\,(t>0)$ bất phương trình trở thành $\log_3(t+1)+2\log_5\left(t^2+1\right)<3$

Xét hàm số $f(t)=\log_3(t+1)+2\log_5\left(t^2+1\right)=3$ với $t>0$

Ta có $f'(t)=\frac{1}{(t+1)\ln 3}+\frac{4t}{\left(t^2+1\right)\ln 5}>0\Rightarrow f(t)$ đồng biến

Mà $f(2)=3\Rightarrow f(t)<f(2)\Rightarrow t<2\Rightarrow\sqrt{x^2-x+4}<2\Leftrightarrow x^2-x<0\Leftrightarrow 0<x<1$.

Do đó suy ra $a=0;b=1\Rightarrow a+2b=2$. Chọn C.

SỞ GD & ĐT NINH BÌNH

Câu 34: Đáp án C.

Ta có $PT\Leftrightarrow 8\log_m n\left(\log_n x\right)^2-\left(7\log_m n+6\right)\log_n x-2017=0$

Đặt $t=\log_n x \Rightarrow (8\log_m n)t^2-(7\log_m n+6)t-2017=0\left(m,n\in\mathbb{N}^*\right)$

Do phương trình trên có $ac=-2017.(8\log_m n)<0$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Khi đó theođịnh lí Viet $t_1+t_2=\dfrac{7\log_m n+6}{8\log_m n}=\dfrac{7}{8}+\dfrac{6}{8}\log_n m$

Do đó $\log_n x_1+\log_n x_2=\dfrac{7}{8}+\dfrac{3}{4}\log_n m \Rightarrow P=x_1x_2=n^{\frac{7}{8}+\frac{3}{4}\log_n m}=n^{\frac{7}{8}}m^{\frac{6}{8}}=\dfrac{mn}{\sqrt[8]{m^2n}}$

Do $m;n\neq 1$ và $m,n\in\mathbb{N}^*$. Lại có $P=x_1x_2$ nguyên và nhỏ nhất nên m,n nhỏ nhất

Do đó $m^2n=2^8=256 \Rightarrow \begin{cases}P=\dfrac{mn}{2}=\dfrac{128}{m}\\ m^2n=256\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m=8\\ n=4\end{cases} \Rightarrow P_{\min}=12$

Câu 35: Đáp án A.

Đặt $t=2^x$. Khi đó $-1<x<1 \Leftrightarrow 2^{-1}<2^x<2^1$ hay $\dfrac{1}{2}<t<2$. Phương trình đã cho trở thành

$t^2+(2-m)t+5-m=0 \Leftrightarrow t^2+2t+5=m(t+1)$

$\Leftrightarrow m=\dfrac{t^2+2t+5}{t+1} \Leftrightarrow m=t+1+\dfrac{4}{t+1} \qquad (*)$

Xét hàm số $f(t)=t+1+\dfrac{4}{t+1}$ trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{t^2+2t-3}{(t+1)^2}$

$f(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-3\,(\text{Loại})\end{array}\right.$

t	$\frac{1}{2}$		1		2
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$	$\frac{25}{6}$	↘	4	↗	$\frac{13}{3}$

Yêu cầu bài toán là (*) có nghiệm trong khoảng $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$ hay $4\le m<\dfrac{13}{3}$.

Câu 36: Đáp án D.

Đặt $3^x=t, t>0$. Phương trình trở thành $m=\dfrac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}, t>0$

$\Rightarrow f'(t)=\dfrac{1-3t}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}$

Từ BBT của hàm số ta thấy pt $f(t)=m$ có đúng 1 nghiệm nếu $\left[\begin{array}{l}m=\sqrt{10}\\ 1<m<3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

t	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	3	$\nearrow$	$\sqrt{10}$	$\searrow$	1

MIN VÀ MAX

Câu 1: Cho ba số thực $a,b,c\in\left(\frac{1}{4};1\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức:

$$P=\log_a\left(b-\frac{1}{4}\right)+\log_b\left(c-\frac{1}{4}\right)+\log_c\left(a-\frac{1}{4}\right).$$

A. $P_{\min}=3$ B. $P_{\min}=6$ C. $P_{\min}=3\sqrt{3}$ D. $P_{\min}=1$

Câu 2: Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\log_4(x+y)+\log_4(x-y)\ge 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=2x-y$.

A. $P_{\min}=4$ B. $P_{\min}=2\sqrt{3}$ C. $P_{\min}=-4$ D. $P_{\min}=\frac{10\sqrt{3}}{3}$

Câu 3: Cho hai số thực a, b thỏa mãn các điều kiện $a^2+b^2>1$ và $\log_{a^2+b^2}(a+b)\ge 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2a+4b-3$ là:

A. $\sqrt{10}$ B. $\frac{1}{\sqrt{10}}$ C. $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ D. $2\sqrt{10}$

LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

Câu 1: Đáp án B.

Nhận xét: Điểm rơi $a=b=c=\frac{1}{2}$. Tính nhanh $P_{\min}=6$

Dễ dàng ta có: $a^2\ge a-\frac{1}{4};b^2\ge b-\frac{1}{4};c^2\ge c-\frac{1}{4}$

Do đó $\frac{1}{4}<a,b,c<1$ nên $\log_a\left(b-\frac{1}{4}\right)\ge\log_a b^2;\log_b\left(c-\frac{1}{4}\right)\ge\log_b c^2;\log_c\left(a-\frac{1}{4}\right)\ge\log_c a^2$

Suy ra $P\ge 3\sqrt[3]{\log_a b^2\log_b c^2\log_c a^2}\Leftrightarrow P\ge 3.2\sqrt[3]{\log_a b\log_b c\log_c a}\Leftrightarrow P\ge 6$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{2}$. Vậy $P_{\min}=6$.

Câu 2: Đáp án B.

Điều kiện: $x>\pm y$. Do đó, $x>0$. Từ BĐT ở đề bài, ta thu được $x^2-y^2\ge 4$, suy ra $x\ge\sqrt{y^2+4}$ (do $x>0$). Dẫn đến $P\ge 2\sqrt{y^2+4}-y$. Đặt $f(y)=2\sqrt{y^2+4}-y$, ta dễ dàng tìm được $\min f(y)=f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=2\sqrt{3}$. Từ đó, thu được $P_{\min}=2\sqrt{3}$ khi $x=\frac{4}{\sqrt{3}};y=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 3: Đáp ánA.

Do $a^2+b^2>1$ và $\log_{a^2+b^2}(a+b)\ge 1$ nên $a+b\ge a^2+b^2 \Leftrightarrow \left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{2}(1)$

Ta có: $a+2b=\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)+2\left(b-\frac{1}{2}\right)\right]+\frac{3}{2}(2)$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski cho hai dãy số $a-\frac{1}{2},b-\frac{1}{2}$ và 1, 2 ta có:

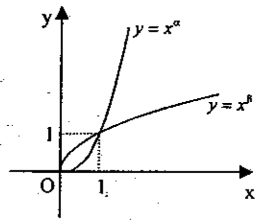
$$\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2\right](1^2+2^2)\ge\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)+2\left(b-\frac{1}{2}\right)\right]^2 \Leftrightarrow 5\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2\right]\ge\left(a+2b-\frac{3}{2}\right)^2 (3)$$

Từ (1) và (3), ta có: $5.\frac{1}{2}\ge\left(a+2b-\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow a+2b-\frac{3}{2}\le\frac{\sqrt{10}}{2}\Leftrightarrow 2a+4b-3\le\sqrt{10}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\dfrac{a-\frac{1}{2}}{1}=\dfrac{b-\frac{1}{2}}{2}\\ \left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{5+\sqrt{10}}{10}\\ b=\dfrac{5+2\sqrt{10}}{10}\end{cases}$.

HÀM SỐ - ĐỒ THỊ

Câu 1: Cho α, β là các số thực. Đồ thị các hàm số $y=x^\alpha$, $y=x^\beta$ trên khoảng $(0;+\infty)$ được cho trong hình vẽ bên. Khẳng định nào đây là đúng?



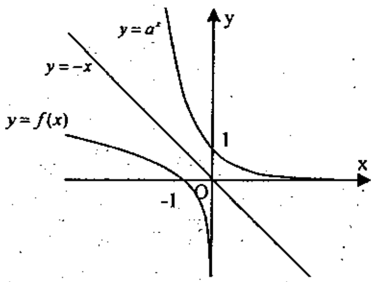
A. $0<\beta<1<\alpha$ **B.** $\beta<0<1<\alpha$

C. $0<\alpha<1<\beta$ **D.** $\alpha<0<1<\beta$

Câu 2: Biết hai hàm số $y=a^x$, $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ đồng thời đồ thị của hai hàm số này đối xứng nhau qua đường thẳng $y=-x$. Tính $f(-a^3)$

A. $f(-a^3)=-a^{-3a}$ **B.** $f(-a^3)=-\frac{1}{3}$

C. $f(-a^3)=-3$ **D.** $f(-a^3)=-a^{3a}$



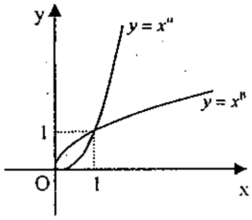
LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Đáp ánA.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy

- Đồ thị hai hàm số là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên $y\,y'=0;\forall(0;+\infty)$. Ta thấy rằng:

$$\begin{cases} y=x^{\alpha}\Rightarrow y'=\alpha.x^{\alpha-1} \\ y=x^{\beta}\Rightarrow y'=\beta.x^{\beta-1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha.x^{\alpha-1}>0 \\ \beta.x^{\beta-1}\end{cases}\Rightarrow\alpha,\beta>0$$

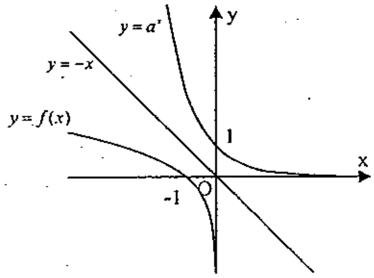


- Dễ thấy tại x=2 thì $2^{\alpha}>2^{\beta}\Rightarrow\alpha>\beta$ suy ra $0<\beta<1<\alpha$

Câu 2: Đáp án C.

Dựa vào đồ thị hàm số, vì $y=f(x)$ đối xứng với $y=a^x$ qua đường thẳng $y=-x$ nên đồ thị hàm số $y=f(x)$ có phương trình là $y=f(x)=\log_{\frac{1}{a}}(-x)$.

Do đó $f(-a^3)=-\log_a a^3=-3$



BÀI TOÁN NGÂN HÀNG
BÀI TOÁN LÃI SUẤT

CÁC CÔNG THỨC CẦN NHỚ

<u>**Công thức 1: (Dành cho gửi tiền một lần)**</u> *Gửi vào ngân hàng số tiền là a đồng, với lãi suất hàng tháng là r% trong n tháng. Tính cả vốn lẫn lãi T sau n tháng?*

Giải:

- Gọi A là tiền vốn lẫn lại sau n tháng ta có:

  Tháng 1 $(n=1): T_1=a+ar=a(1+r)$

  Tháng 2 $(n=2): T_2=a(1+r)+a(1+r)r=a(1+r)^2$

  ....

  Tháng $(n=n): T_n=a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^{n-1}.r=a(1+r)^n$

- Vậy $T_n=a(1+r)^n$ (*)
- Trong đó: a *tiền vốn ban đầu,* r *lãi suất (%) hàng tháng,* n *số tháng,* A*tiền vốn lẫn lãi sau n tháng.*
- Từ công thức (*) $T_n=a(1+r)^n$ ta tính được các đại lượng khác như sau:

1) $n=\dfrac{\ln\frac{T_n}{a}}{\ln(1+r)}$; 2) $r=\sqrt[n]{\dfrac{T_n}{a}}-1; a=\dfrac{T_n}{(1+r)^n}$

Ví dụ 1a: Bác Dân có 200.000.000đ, nhưng bác chỉ gửi vào ngân hàng 100.000.000đ tiết kiệm theo lãi suất 0,7% tháng. Tính cả vốn lẫn lãi sau 10 tháng bác Nam có bao nhiêu tiền?

Giải:

- Số tiền gửi ngân hàng sau 10 tháng là:

$$T = 100000000(1 + 0,7\%)^{10} + 100000000 = 207224666,8 \text{ triệu}$$

Ví dụ 1b: Bác Mai gửi vào ngân hàng 200.000.000đ hỏi để được 250000000đ. Thì bác phải gửi tiết kiệm bao lâu với lãi suất là 0,6% tháng?

Giải:

- Từ công thức (*) $T_n=a(1+r)^n$ ta tính được các đại lượng khác như sau:

1) $n=\dfrac{\ln\frac{T_n}{a}}{\ln(1+r)}$

- Số tháng tối thiểu phải gửi là: $n=\dfrac{\ln\dfrac{250000000}{200000000}}{\ln(1+0,6\%)}=37,3$ tháng

- Vậy tối thiểu phải gửi là 37,3 tháng.

Ví dụ 1c: Số tiền 100.000.000đ gửi tiền ngân hàng Agribank Hà Nội, người đó muốn trong 8 tháng thì lãnh về được 105.000.000đ.
Tìm lãi suất hàng tháng?

Giải:

- Từ công thức (*) $T_n=a(1+r)^n$ ta tính được các đại lượng khác như sau: $r=\sqrt[n]{\dfrac{T_n}{a}}-1$

- Lãi suất hàng tháng: $r=\sqrt[8]{\dfrac{105000000}{100000000}}-1=0,61\%$

Ví dụ 1d: Một người gửi 10 triệu đồng vào ngân hàng trong thời gian 10 năm với lãi suất 5% một năm. Hỏi rằng người đó nhận được số tiền nhiều hơn hay ít hơn bao nhiêu nếu ngân hàng trả lãi suất $\dfrac{5}{12}$% một tháng.

(Đề thi HSG giải toán trên máy tính casio - Năm 2004-2005, Hải Dương)

Giải:

- Từ công thức (*) $T_n=a(1+r)^n$ ta tính được các đại lượng khác như sau:

1) $n=\dfrac{\ln\frac{T_n}{a}}{\ln(1+r)}$; 2) $r=\sqrt[n]{\dfrac{T_n}{a}}-1; a=\dfrac{T_n}{(1+r)^n}$

- Gọi a là số tiền gửi tiết kiệm ban đầu, r là lãi suất, sau 1 tháng sẽ là:

- Sau n tháng số tiền cả gốc lãi $T = a(1 + r)^n$

  ⇒ Số tiền sau 10 năm: $10000000(1+ 0,05)^{10} = 16288946,27$ đồng

- Số tiền nhận sau 10 năm (120 tháng) với lãi suất 5/12% một tháng:

$$10000000(1 + \frac{0,05}{12})^{120} = 16470094,98 \text{ đồng}$$

  ⇒ Số tiền gửi theo lãi suất 5/12% một tháng nhiều hơn: 1811486,1 đồng.

__Công thức 2: (Dành cho gửi tiền hàng tháng)__ Một người, hàng tháng gửi vào ngân hàng số tiền là a (đồng). Biết lãi suất hàng tháng là r%. Hỏi sau n tháng, người ấy có bao nhiêu tiền?

Giải:

- Cuối tháng I, người đó có số tiền là: $T_1 = a + a.r = a(1+r)$
- Đầu tháng thứ II, người đó có số tiền là:

$$a(1+r)+a = a\left[(1+r)+1\right] = \frac{a}{\left[(1+r)-1\right]}\left[(1+r)^2-1\right] = \frac{a}{r}\left[(1+r)^2-1\right]$$

- Cuối tháng thứ II, người đó có số tiền là:

$$T_2 = \frac{a}{r}\left[(1+r)^2-1\right] + \frac{a}{r}\left[(1+r)^2-1\right].r = \frac{a}{r}\left[(1+r)^2-1\right](1+r)$$

- Dùng công thức quy nạp toán học ta có:

  . Cuối tháng thứ n, người đó có số tiền cả gốc lẫn lãi là T_n:

$$T_n = \frac{a}{r}\left[(1+r)^n-1\right](1+r) \Rightarrow a = \frac{T_n.r}{(1+r)\left[(1+r)^n-1\right]} \Rightarrow n = \frac{Ln\left(\frac{T_n.r}{a}+1+r\right)}{Ln(1+r)} - 1$$

Ví dụ 2: Thầy Mẫn Ngọc Quang muốn sau 10 năm có 3.000.000.000 (3 tỉ đồng) để mua một ngôi nhà ở HÀ NỘI. Hỏi rằng thầy Quang phải gửi ngân hàng mỗi tháng (số tiền như nhau) là bao nhiêu? Biết lãi suất mỗi tháng là 0.7%.

Giải:

- Coi rằng thầy Quang gửi tiền vào thời điểm cuối tháng, áp dụng công thức lãi kép, gửi hàng tháng: $T_n = \frac{M}{r}\left[(1+r)^n-1\right](1+r)$
- Thế số $T_{120} = 3000000000, r = 0,5\%$

$$M = \frac{3000000000 \times 0,7\%}{(1+0,7\%)\left[(1+0,7\%)^{120}-1\right]} \approx 16 \text{ (triệu)}$$

- Vậy mỗi tháng thầy Quang phải gửi tiết kiệm khoảng 16 triệu vào ngân hàng và liên tục trong 10 năm.

__Công thức 3: (Dành cho bài toán trả góp)__ Gọi số tiền vay là N, lãi suất là x, n là số tháng phải trả, A là số tiền phải trả vào hàng tháng để sau n tháng là hết nợ:

Giải:

- Số tiền gốc cuối tháng 1: $N+Nr-A=N(r+1)-A$

  Cuối tháng 2: $\left[N(r+1)-A\right]+\left[N(r+1)-A\right]r-A=N(r+1)^2-A\left[(r+1)+1\right]$

  Cuối tháng 3: $\left[N(r+1)^2-A\left[(r+1)+1\right]\right](1+r)-A=N(x+1)^3-A\left[(x+1)^2+(x+1)+1\right]$

  ....

  Cuối tháng n: $N(x+1)^n-A\left[(x+1)^{n-1}+(x+1)^{n-2}+...+(x+1)+1\right]$

- Trả hết nợ thì sau n tháng, số tiền sẽ bằng 0

  $\Leftrightarrow N(r+1)^n-A\left[(r+1)^{n-1}+(r+1)^{n-2}+...+(r+1)+1\right]=0$

  $\Leftrightarrow N(r+1)^n=A\left[(r+1)^{n-1}+(r+1)^{n-2}+...+(r+1)+1\right]$

- Đặt $y=r+1$

- Ta có: $N.y^n=A\left(y^{n-1}+y^{n-2}+...+y+1\right)$

  $$\Leftrightarrow A=\frac{N.y^n}{\left(y^{n-1}+y^{n-2}+...+y+1\right)}=\frac{Ny^n(y-1)}{y^n-1}=\frac{N(1+r)^n.r}{(1+r)^n-1}\Rightarrow A=\frac{N(1+r)^n.r}{(1+r)^n-1}$$

Ví dụ 3: Một chiếc điện thoại Iphone 7 giá 17.000.000 đồng được bán trả góp 20 lần. Mỗi lần trả góp với số tiền là 1.000.000 đồng (lần đầu trả sau khi lấy điện thoại được 1 tháng).Tính lãi suất tiền hàng tháng?

Giải:

- Áp dụng công thức lãi kép, gửi hàng tháng: $T_n=\frac{M}{r}\left[(1+r)^n-1\right]$

- Tiền giá điện thoại ban đầu, sau 20 tháng tăng lên thành $T_{20}=17000000(1+r)^{20}$

- Tương ứng với phương trình sau: $17000000(1+r)^{20}=1000000.\frac{\left[(1+r)^{20}-1\right]}{r}$

- Nhập trực tiếp phương trình vào máy và giải bằng *SHIFT* CALC(*SOLVE*)

  $17000000(1+X)^{20}=1000000.\frac{\left[(1+X)^{20}-1\right]}{X}$. Ta được: $r\approx 1,6\%$

- **Công thức tổng quát, áp dụng luôn không cần chứng minh**

  $A=\frac{N.r.(1+r)^{20}}{\left[(1+r)^{20}-1\right]}\Rightarrow A.\left[(1+r)^{20}-1\right]=N.r.(1+r)^{20}$

  $\Rightarrow 17000000\left[(1+r)^{20}-1\right]=1000000.r.(1+r)^{20}$

- Bấm Shift Calc rồi đợi ra kết quả A là số tiền phải trả góp hàng tháng, r là lãi suất theo tháng, N là số tiền ban đầu nợ.

Công thức 4: (Rút sổ tiết kiệm theo định kì) Thực ra bài toán này giống bài 3, nhưng ta lại hiểu là ngân hàng nợ tiền của người cho vay. Trái lại so với vay trả góp.

Ví dụ 4: Một anh sinh viên được gia đình gửi vào sổ tiết kiệm ngân hàng số tiền là 8.000.000 đồng lãi suất 0,9% tháng.

a) Hỏi sau đúng 5năm số tiền trong sổ sẽ là bao nhiêu?Biết rằng trong suốt thời gian đó anh sinh viên không rút một đồng nào cả gốc lẫn lãi (làm tròn đến đồng).

b) Nếu mỗi tháng anh sinh viên đó rút ra một số tiền như nhau vào ngày ngân hàng trả lãi thì hàng tháng anh ta rút ra bao nhiêu tiền (làm tròn đến 1.000 đồng) để sau đúng 5 năm sẽ vừa hết số tiền cả vốn lẫn lãi? Lãi suất 0,9%/tháng.

(Đề thi HSG khu vực -2013)

Giải:

a) Áp dụng công thức 1:

5 năm = 60 tháng. Số tiền trong sổ là: $8\,000\,000.(1+\ 0{,}9\%)^{60} =\ 136\ 949\ 346$ (đồng)

b) Nếu gọi: N là số tiền gốc gửi vào sổ tiết kiệm

A là số tiền hằng tháng mà anh ta rút ra

r(tính %) lãi suất thì:

- Sau tháng thứ nhất số tiền trong sổ còn lại là $N(1+r)-A$
- Sau tháng thứ hai số tiền trong sổ còn lại là

$$\left(N(1+r)-A\right)(1+r)-A = N(1+r)^2-A\left((1+r)+1\right)$$

- Sau tháng thứ ba số tiền trong sổ còn lại là

$$\left(N(1+r)^2-A\left((1+r)+1\right)\right)(1+r)-A = N(1+r)^3-A\left((1+r)^2+1+r+1\right)$$

- Sau tháng thứ tư số tiền trong sổ còn lại là

$$\left(N(1+r)^3-A\left((1+r)^2+1+r+1\right)\right)(1+r)-A = N(1+r)^4-A\left((1+r)^3+(1+r)^2+(1+r)+1\right)$$

- Sau tháng thứ n số tiền trong sổ còn lại là

$$N(1+r)^n-A\left((1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}+\dots\dots\dots+(1+r)+1\right)=N(1+r)^n-A\left(\frac{(1+r)^n-1}{r}\right)$$

- Nếu sau tháng thứ n số tiền trong sổ anh ta vừa hết thì

$$A(1+r)^n-A\left(\frac{(1+r)^n-1}{r}\right)=0 \Rightarrow N(1+r)^n=A\left(\frac{(1+r)^n-1}{r}\right) \Rightarrow A=\frac{N(1+r)^n r}{(1+r)^n-1}$$

$$A = \frac{8000000\left(1+0,9\%\right)^{60} 0,9\%}{\left(1+\ 0,9\%\right)^{n}-1} = 173142\,(\text{đồng})$$

Nhận xét: Thực chất thì bài toán trên giống bài toán 3, vay trả góp, trong toán vay trả góp thì người vay nợ ngân hàng, còn trong bài toán rút tiền này thì ngân hàng nợ người vay. Nên bản chất cũng không có gì khác.

Công thức 5: Gửi tiền theo kì hạn 3 tháng, 6 tháng, 1 năm,...

Ví dụ 5a: Một người gửi tiết kiệm 200.000.000 đồng (tiền Việt Nam) vào một ngân hàng theomức kì hạn 6 tháng với lãi suất $0,7\%$ một tháng.

a) Hỏi sau 15 năm, người đó nhận được bao nhiêu tiền cả vốn lẫn lãi ngân hàng. Biết rằng người đó không rút lãi ở tất cả các định kì trước đó.

b) Nếu so với số tiền trên, người đó gửi tiết kiệm theo mức kì hạn 3 tháng với lãi suất $0,65\%$ một tháng thì sau 15 năm sẽ nhận được bao nhiêu tiền cả vốn lẫn lãi ở ngân hàng? Biết rằng người đó không rút lãi ở tất cả các định kì trước đó.

Giải:

Ta quy 10 năm ra các kì hạn tương ứng với hai phần a) và b)

a) 15 năm là $\frac{15\times 12}{6} = 30$ kì hạn

Lãi suất theo định kì 6 tháng là: $6\times 0.7\% = 4.2\%$

b) 15 năm là $\frac{15\times 12}{3} = 60$ kì hạn

Lãi suất theo định kì 3 tháng là: $3\times 0.65\% = 1.95\%$

Công thức tính lãi suất kép: $T_n = A\left(1+r\right)^n$

Với: + T_n là tiền vốn lẫn lãi sau n tháng (kì hạn);

+ A là tiền vốn ban đầu;

+ n là số kì hạn trong các lần tính.

Kì hạn 6 tháng: $T_n = A\left(1+r\right)^n \Rightarrow T_{30} = 200000000(1+0,042)^{30} \approx 687165844$ (triệu)

Kì hạn 3 tháng: $T_n = A\left(1+r\right)^n \Rightarrow T_{60} = 200000000(1+0,0195)^{60} \approx 637182446$ (triệu)

Nhận xét, ngân hàng bao giờ cũng ưu tiên lãi suất cho kì hạn dài ngày hơn, ví dụ nhưtrong bài toán trên, lãi suất của hình thức gửi kì hạn 3 tháng thấp hơn kì hạn 6 tháng.

Ví dụ 5b: Bạn thùy Dương gửi tiết kiệm 100.000.000 đồng (tiền Việt Nam) vào một ngân hàng theomức kì hạn 6 tháng với lãi suất $0,55\%$ một tháng.

a) Hỏi sau 10 năm, bạn Thùy Dương nhận được bao nhiêu tiền cả vốn lẫn lãi ngân hàng. Biết rằng bạn đó không rút lãi ở tất cả các định kì trước đó.

b) Nếu so với số tiền trên, Thùy Dương gửi tiết kiệm theo mức kì hạn 3 tháng với lãi suất 0.53% một tháng thì sau 10 năm sẽ nhận được bao nhiêu tiền cả vốn lẫn lãi ở ngân hàng. Biết rằng bạn đó không rút lãi ở tất cả các định kì trước đó.

Giải:

Ta quy 10 năm ra các kì hạn tương ứng với hai phần a) và b)

a) 10 năm là $\frac{10\times12}{6}=20$ kì hạn

Lãi suất theo định kì 6 tháng là: $6\times0.55\%=3.3\%$

b) 10 năm là $\frac{10\times12}{3}=40$ kì hạn

Lãi suất theo định kì 3 tháng là: $3\times0.53\%=1.59\%$

- Công thức tính lãi suất kép: $T_n=A(1+r)^n$
- Kì hạn 6 tháng: $T_n=A(1+r)^n \Rightarrow T_{20}=100000000(1+0,033)^{20}=191\,428\,427$ (đồng)
- Kì hạn 3 tháng: $T_n=A(1+r)^n \Rightarrow T_{40}=100000000(1+0,0159)^{40}=187\,948\,304$ (đồng)

Ví dụ 5c: Bác Tuấn gửi tiết kiệm 50.000.000 đồng (tiền Việt Nam) vào một ngân hàng theomức kì hạn 6 tháng với lãi suất 0.72% một tháng.

a) Hỏi sau 10 năm, bác Tuấn nhận được bao nhiêu tiền cả vốn lẫn lãi ngân hàng. Biết rằng người đó không rút lãi ở tất cả các định kì trước đó.

b) Nếu so với số tiền trên, bác Tuấn gửi tiết kiệm theo mức kì hạn 3 tháng với lãi suất 0.66% một tháng thì sau 10 năm sẽ nhận được bao nhiêu tiền cả vốn lẫn lãi ở ngân hàng. Biết rằng người đó không rút lãi ở tất cả các định kì trước đó.

Giải:

Ta quy 10 năm ra các kì hạn tương ứng với hai phần a) và b)

a) 10 năm là $\frac{10\times12}{6}=20$ kì hạn

Lãi suất theo định kì 6 tháng là: $6\times0.72\%=4.32\%$

b) 10 năm là $\frac{10\times12}{3}=40$ kì hạn

Lãi suất theo định kì 3 tháng là: $3\times0.66\%=1.98\%$

- Công thức tính lãi suất kép: $T_n=A(1+r)^n$
- Kì hạn 6 tháng: $T_n=A(1+r)^n \Rightarrow T_{20}=50000000(1+0,0432)^{20}=116\,498\,832$ (đồng)
- Kì hạn 3 tháng: $T_n=A(1+r)^n \Rightarrow T_{40}=50000000(1+0,0198)^{40}=109\,539\,388$ (đồng)

Ví dụ 5d: Thầy Mẫn Ngọc Quang gửi 200 triệu đồng theo kì hạn 3 tháng, lãi suất là 0,8% tháng. Sau 2 năm thầy lấy cả vốn lẫn lãi gửi tiếp ngân hàng với kì hạn 6 tháng lãi suất là 0,82%/tháng được số lần kì hạn là (a: kì hạn). Sau đó thầy phải rút tiền ra để mua máy sản xuất kinh doanh, lúc rút ra thì được là 307.582.955 đồng. Biết rằng gửi tiền có kì hạn là tính lãi suất vào cuối kì hạn để tính vào kì hạn sau, còn rút trước kì hạn (rút trước ngày cuối của kì hạn) thì lãi suất được tính theo lãi suất không kì hạn 2%/năm. Tính số kì hạn (a) và số ngày gửi không kì hạn (b). Biết rằng hình thức không kì hạn không được tính theo công thức lãi kép.

Giải:

1) Số tiền nhận được cả vốn lẫn lãi sau 8 kì hạn 3 tháng và sau **1 kì hạn 6 tháng** là:

$20000000(1+3.0,8\%)^8.(1+6.0,82\%)^1 = 253.680.994$ (đồng)

2) Số tiền nhận được cả vốn lẫn lãi sau 4 kì hạn 3 tháng và sau **2 kì hạn 6 tháng** là:

$20000000(1+3.0,8\%)^8.(1+6.0,82\%)^2 = 266.162.989$ (đồng)

3) Số tiền nhận được cả vốn lẫn lãi sau 8 kì hạn 3 tháng và sau **3 kì hạn 6 tháng** là:

$20000000(1+3.0,8\%)^8.(1+6.0,82\%)^3 = 279.257.274$ (đồng)

4) Số tiền nhận được cả vốn lẫn lãi sau 8 kì hạn 3 tháng và sau **4 kì hạn 6 tháng** là:

$20000000(1+3.0,8\%)^8.(1+6.0, 82\%)^4 = 292.996.732$ (đồng)

5) Số tiền nhận được cả vốn lẫn lãi sau 8 kì hạn 3 tháng và sau **5 kì hạn 6 tháng** là:

$20000000(1+3.0,8\%)^8.(1+6.0,82\%)^5 = 307.412.171$ (đồng)

6) Số tiền nhận được cả vốn lẫn lãi sau 8 kì hạn 3 tháng và sau **6 kì hạn 6 tháng** là:

$20000000(1+3.0,8\%)^8.(1+6.0,82\%)^6 = 322.536.850$(đồng)

- Từ bảng tính ta nhận thấy rằng nếu ngoài 8 kì hạn 4 tháng, thì thêm 5 kì hạn 6 tháng sẽ có số tiền thu được nhiều hơn giả thiết 307.582.955 đồng, vậy chúng ta có thể kết luận rằng thầy đã gửi 8 kì hạn 3 tháng và 5 kì hạn 6 tháng. Tuy nhiên chúng ta chưa biết rằng có bao nhiêu ngày gửi không kì hạn, ta có phương trình sau:

$$307582955 - 20000000(1+3.0,008)^8.(1+6.0,0082)^5.\left(1+\frac{0,02.b}{365}\right) = 0$$

- **Bấm shift + Solve ta được b = 10 ngày.**

❑ Bài toán nâng cao

Bài toán ngân hàng khi có lãi suất thay đổi

Câu 1: Ngân hàng A vừa qua đã thay đổi liên tục lãi suất tiền gửi tiết kiệm. Bác Khải gửi số tiền tiết kiệm ban đầu là 30 triệu đồng với lãi suất $0,8\%$/ tháng. Chưa đầy một năm, thì lãi suất tăng lên $1,2\%$/ tháng, trong nửa năm tiếp theo và bác Khải đã tiếp tục gửi; sau nửa năm đó lãi suất giảm xuống còn $0,9\%$/ tháng, bác Khải tiếp tục gửi thêm một số tháng tròn nữa, khi rút tiền bác Khải được cả vốn lẫn lãi là 35.956.304,69 đồng (chưa làm tròn). Hỏi bác Khải đã gửi tiết kiệm trong bao nhiêu tháng?

A.13 tháng B.15 tháng C. 17 tháng D. 19 tháng

Câu 2: Một số ngân hàng lớn trên cả nước vừa qua đã thay đổi liên tục lãi suất tiền gửi tiết kiệm. Bác Yến gửi số tiền tiết kiệm ban đầu là 100 triệu đồng với lãi suất $1,3\%$/ tháng. Chưa đầy một năm, thì lãi suất giảm xuống $1,2\%$/ tháng, trong nửa năm tiếp theo và bác Yến đã tiếp tục gửi; sau nửa năm đó lãi suất giảm xuống còn $0,9\%$/ tháng, bác Yến tiếp tục gửi thêm một số tháng tròn nữa, khi rút tiền bác Yến được cả vốn lẫn lãi là 120.436.748 đồng (chưa làm tròn). Hỏi bác Yến đã gửi tiết kiệm trong bao nhiêu tháng?

A.13 tháng B.15 tháng C. 17 tháng D. 19 tháng

Câu 3: Ngân hàng Techcombank vừa qua đã thay đổi liên tục lãi suất tiền gửi tiết kiệm. Bác Phong gửi số tiền tiết kiệm ban đầu là 500 triệu đồng với lãi suất $0,7\%$ / tháng. Chưa đầy một năm, thì lãi suất tăng lên $1,1\%$ / tháng, trong nửa năm tiếp theo và bác Phong đã tiếp tục gửi; sau nửa năm đó lãi suất giảm xuống còn $0,6\%$ / tháng, bác Phong tiếp tục gửi thêm một số tháng tròn nữa, khi rút tiền bác Phong được cả vốn lẫn lãi là 561217349,7 đồng (chưa làm tròn). Hỏi bác Phong đã gửi tiết kiệm trong bao nhiêu tháng.

A.13 tháng B.15 tháng C. 17 tháng D. 19 tháng

BÀI TOÁN SO SÁNH THU NHẬP KHI LÀM VIỆC Ở HAI CÔNG TY KHÁC NHAU

Câu 4: Do tốt nghiệp thủ khoa khóa BK60 khoa CNTT – ĐHBK Hà Nội nên Tâm được hai công ty trong nước mời về làm việc với chế độ trả lương theo các phương án sau:

- Công ty M: Mức lương làm việc tháng đầu tiên cho công ty là 25.000.000 đồng/ tháng. Kể từ tháng thứ hai mức lương sẽ tăng thêm 200.000 mỗi tháng.
- Công ty G: Mức lương làm việc tháng đầu tiên cho công ty là 15.000.000 đồng/ tháng, mức lương sẽ được tăng thêm 2,33% mỗi tháng so với mức lương tháng trước đó.

Để có tiền mua một căn chung cư cao cấp tại thủ đô Hà Nội Tâm cần một khoản tiền lớn sau 5 năm làm việc. Hỏi Tâm nên chọn công ty nào trong hai công ty trên?Và số tiền nhận được từ công ty bạn ấy chọn là bao nhiêu (làm tròn đến hàng đơn vị)? Biết rằng bạn ấy làm việc chăm chỉ và luôn được tăng lương đều đặn.

A. Chọn công ty M và nhận được 1.854.000.000 đồng.

B.Chọn công ty G và nhận được 1.920.198.172 đồng.

C.Chọn công ty M và nhận được 1.954.000.000 đồng.

D.Chọn công ty G và nhận được 1.710.773.091 đồng.

Câu 5: Sau khi đi du học Havart Mỹ về, bạn Tuyên rất thông thạo tiếng anh, khi nộp đơn xin việc thì được hai công ty trong nước mời về làm việc ngay với chế độ trả lương theo các phương án sau:

- Công ty M: Mức lương làm việc tháng đầu tiên cho công ty là 50.000.000 đồng/ tháng. Kể từ tháng thứ hai mức lương sẽ tăng thêm 200.000 mỗi tháng.
- Công ty G: Mức lương làm việc tháng đầu tiên cho công ty là 20.000.000 đồng/ tháng, mức lương sẽ được tăng thêm 2,5% mỗi tháng so với mức lương tháng trước đó.

Đểmua nhà Tuyên cần một khoảng tiền lớn sau 5 năm làm việc.Hỏi Tuyên nên chọn công ty nào trong hai công ty trên?Và số tiền nhận được từ công ty bạn ấy chọn là bao nhiêu (làm tròn đến hàng đơn vị)?Biết rằng bạn ấy làm việc chăm chỉ và luôn được tăng lương đều đặn.

A.Chọn công ty M và nhận được 1.711.000.000 đồng.

B.Chọn công ty M và nhận được 3.354.000.000 đồng.

C. Chọn công ty G và nhận được 2.719.831.799 đồng.

D.Chọn công ty G và nhận được 1.710.773.091 đồng.

Câu 6: Bạn Ngọc Anh sau khi tốt nghiệp Đại học Ngoại Thương thì được hai công ty trong nước mời về làm việc với chế độ trả lương theo các phương án sau:

- Công ty M: Mức lương làm việc tháng đầu tiên cho công ty là 20.000.000 đồng/ tháng. Kể từ tháng thứ hai mức lương sẽ tăng thêm 200.000 mỗi tháng.
- Công ty G: Mức lương làm việc tháng đầu tiên cho công ty là 15.000.000 đồng/ tháng, mức lương sẽ được tăng thêm 2% mỗi tháng số với mức lương tháng trước đó.

Để có tiền giúp bố mẹ xây lại ngôi nhà khang trang thì bạn Ngọc Anh cần một khoản tiền lớn sau 5 năm làm việc. Hỏi Ngọc Anh nên chọn công ty nào trong hai công ty trên? Và số tiền nhận được từ công ty bạn ấy chọn là bao nhiêu (làm tròn đến hàng đơn vị)? Biết rằng bạn ấy làm việc chăm chỉ và luôn được tăng lương đều đặn.

A. Chọn công ty M và nhận được 1.711.000.000 đồng.

B. Chọn công ty G và nhận được 2.023.453.511 đồng.

C. Chọn công ty M và nhận được 1.954.000.000 đồng.

D. Chọn công ty G và nhận được 1.710.773.091 đồng.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài toán ngân hàng khi có lãi suất thay đổi

Câu 1: Đáp án D.

- Gọi x là số tháng gửi với lãi suất $r_1 = 0,8\%/$ tháng, y là số tháng gửi với lãi suất $r_3 = 0,9\%/$ tháng thì số tháng bác Khải đã gửi tiết kiệm là: $x+6+y$, $\left(x, y \in \mathbb{N}^*\right)$.

  Khi đó số tiền gửi cả vốn lẫn lãi là: $\left(r_2 = 1,2\%\right)$

  $$T = 30000000\left(1+r_1\right)^x.\left(1+r_2\right)^6.\left(1+r_3\right)^y = 35956304,69$$

  $$\Leftrightarrow 30000000\left(1+0,8\%\right)^x.\left(1+1,2\%\right)^6.\left(1+0,9\%\right)^y = 35956304,69$$

  $$\Leftrightarrow x = \log_{1,008}\frac{35956304,69}{30000000.1,012^6.1,009^y}$$

- Dùng chức năng TABLE của Casio để giải bài toán này:

✓ Bấm MODE 7 nhập hàm $f(x) = \log_{1,008}\dfrac{35956304,69}{30000000.1,012^6.1,009^X}$

✓ Máy hỏi Start? ta ấn 1=.

✓ Máy hỏi End? ta ấn12=

✓ Máy hỏi Step? ta ấn1=

- Ta thấy với x=6 thì $F(x) \approx 7$. Do đó ta có: $\begin{cases} x = 7 \\ y = 6 \end{cases}$
- Vậy bác Khải đã gửi tiết kiệm trong <u>19 tháng.</u>

<u>***Bình luận:***</u> *Khi có nhiều lãi suất, chúng ta chú ý đến công thức* $T_n = a(1+r)^n$ (*)

- Vì thế ta có công thức tính tổng quát số tiền thu được cả gốc và lãi sau một loạt các mức lãi suất khác nhau và số kì hạn gửi khác nhau.

$$T = A(1+r_1)^x.(1+r_2)^z.(1+r_3)^y \ldots$$

ở đây, r_1 ứng với lãi suất đợt gửi x kì

r_2 ứng với lãi suất đợt gửi zkì

r_3 ứng với lãi suất đợt gửi ykì

- Vì số tháng gửi là tròn nên chúng ta sẽ sử dụng chức năng Table để dò giá trị nguyên của 2 biến. Trong bài toán ta có giá trị của z = 6 rồi, ta tìm bộ số nguyên x và y hiệu quả bằng Casio như trên bài làm.

Câu 2: Đáp án C.

$$T = 100000000(1+r_1)^x.(1+r_2)^6.(1+r_3)^y = 120436748$$

$$\Leftrightarrow 100000000(1+1,3\%)^x.(1+1,2\%)^6.(1+0,9\%)^y = 120436748$$

$$\Leftrightarrow x = \log_{1,013}\frac{120436748}{100000000.1,012^6.1,009^y}$$

- Dùng chức năng TABLE của Casio để giải bài toán này:

✓ Bấm MODE 7 nhập hàm $f(x) = \log_{1,013}\frac{120436748}{100000000.1,012^6.1,009^X}$

✓ Máy hỏi Start? ta ấn 1 =

✓ Máy hỏi End? ta ấn12=

✓ Máy hỏi Step? ta ấn1 =

- Ta thấy với x= 7 thì $F(x) \approx 4$. Do đó ta có: $\begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$
- Vậy bác Yến đã gửi tiết kiệm trong <u>17 tháng.</u>

Câu 3: Đáp án B.

$$T = 500000000(1+r_1)^x.(1+r_2)^6.(1+r_3)^y = 561217349,7$$

$$\Leftrightarrow 500000000(1+0,6\%)^x.(1+1,1\%)^6.(1+0,5\%)^y = 561217349,7$$

$$\Leftrightarrow x = \log_{1,006}\frac{561217349,7}{500000000.1,011^6.1,005^y}$$

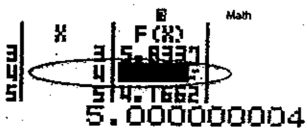
- Dùng chức năng TABLE của Casio để giải bài toán này:

✓ Bấm MODE 7 nhập hàm $f(x)=\log_{1,006}\dfrac{561217349,7}{500000000.1,011^6.1,005^x}$

✓ Máy hỏi Start? ta ấn 1 =

✓ Máy hỏi End? ta ấn12=

✓ Máy hỏi Step? ta ấn1 =



- Ta thấy với x = 4 thì $F(x)\approx 5$. Do đó ta có: $\begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$
- Vậy bác Phong đã gửi tiết kiệm trong <u>15 tháng.</u>

BÀI TOÁN SO SÁNH THU NHẬP KHI LÀM VIỆC Ở HAI CÔNG TY KHÁC NHAU

Câu 4: Đáp án B.

✓ Gọi U_n là mức lương của Tâm ở tháng làm việc thứ n cho công ty M.

- Theo giảthiết, ta có $U_1=25000000$, $U_n=U_{n-1}+200000$. Đây là CSC với công said = 200000. Mỗi năm có 12 tháng do đó 5 năm có 60 tháng hay n = 60
- Nên tổng số tiền Tâm nhận được sau 5 năm:

$$S_{20}=\frac{n\left[2U_1+(n-1)d\right]}{2}=\frac{60\left[2.25000000+(60-1).200000\right]}{2}=1\,854\,000\,000 \text{ đồng}$$

✓ Gọi U_n là mức lương của Tâm ở tháng làm việc thứ n cho công ty G.

- Theo giảthiết, ta có $V_1=15000000$, $V_n=V_{n-1}+2,33\%V_{n-1}$. Đây là CSN với công bộiq = 0,0233. Mỗi năm có 12 tháng do đó 5 năm có 60 tháng hay n = 60
- Nên tổng số tiền Tâm nhận được sau 5 năm:

$$S_{20}=\frac{V_1\left[(1+q)^n-1\right]}{q}=\frac{15000000\left[(1+0,0233)^{60}-1\right]}{0,023}=1\,920\,198\,172 \text{ đồng}$$

- Vậy Tâm nên chọn công ty G và nhận được 1 920 198 172 đồng

<u>Bình luận</u>: *2 bài toán này không phải là gửi ngân hàng nhưng cũng liên quan đến tăng lãi suất, công ty M khởi điểm lương cao hơn nhưng tăng mỗi tháng một số tiền cố định, cấp số cộng có công sai: d.*

Bài toán này ta cần nhớ đến tổng của dãy số thuộc cấp số cộng: $S_n=\dfrac{n\left[2U_1+(n-1)d\right]}{2}$

- Công ty G thì khởi điểm lương thấp hơn, nhưng mức lương tăng theo cấp số nhân (1+r), với r là phần trăm tăng sau mỗi kì.

- Ta cần nhớ tổng của dãy số của cấp số nhân: $S_n=\dfrac{V_1\left[p^n-1\right]}{p-1}$

- Trong bài toán này ta áp dụng với $p = q + 1 \Rightarrow S_n = \dfrac{V_1\left[(p+1)^n - 1\right]}{(p+1)-1} = \dfrac{V_1\left[p^n - 1\right]}{p}$

Câu 5: Đáp án B.

✓ Công ty M: $S_{20} = \dfrac{n\left[2U_1 + (n-1)d\right]}{2} = \dfrac{60\left[2.50000000 + (60-1).200000\right]}{2} = 3\,354\,000\,000$ đồng

✓ Công ty G: $S_{20} = \dfrac{V_1\left[(1+q)^n - 1\right]}{q} = 2\,719\,831\,799$ đồng

- Vậy Tuyên nên chọn công ty M và nhận được 3 354 000 000 đồng

Câu 6: Đáp án D.

✓ Công ty M:

- Tổng số tiền Ngọc Anh nhận được sau 5 năm:

$$S_{20} = \frac{n\left[2U_1 + (n-1)d\right]}{2} = \frac{60\left[2.20000000 + (60-1).200000\right]}{2} = 1\,554\,000\,000 \text{ đồng}$$

✓ Gọi U_n là mức lương của Ngọc Anh ở tháng làm việc thứ n cho công ty G.

$$S_{20} = \frac{V_1\left[(1+q)^n - 1\right]}{q} = 1\,710\,773\,091 \text{ đồng}$$

- Vậy Ngọc Anh nên chọn công ty G và nhận được 1 710 773 091 đồng.

BÀI TOÁN VỀ CÔNG THỨC LOGARIT: ĐỘNG ĐẤT, TĂNG TRƯỞNG DÂN SỐ...

DÂN SỐ:

- Chúng ta cũng có công thức tăng trưởng dân số theo: $P_n = P(1+x)^n$

- P là dân số ban đầu, r là mức tăng trưởng trong 1 kì.

- Đôi khi ta cũng có công thức: $S = A.e^{Nr}$ (Trong đó A: là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm).

Câu 1: Tỉ lệ tăng dân số hàng năm ở Việt Nam được duy trì ở mức 1,06%. Theo số liệu của Tổng Cục Thống Kê, dân số của Việt Nam năm 2016 là 94.444.200 người. Với tốc độ tăng dân số như thế thì vào năm 2025 thì dân số của Việt Nam là:

A.103.845.800 người B.107.232.574 người

C.108.049.810 người D.106.118.331 người

Câu 2: Tỉ lệ tăng dân số hàng năm ở Việt Nam được duy trì ở mức 1,05%. Theo số liệu của Tổng Cục Thống Kê, dân số của Việt Nam năm 2016 là 94.444.200 người. Với tốc độ tăng dân số như thế thì vào năm 2030 thì dân số của Việt Nam là:

A. 109.316.003 người **B.** 107.232.574 người

C. 198.049.810 người **D.** 106.118.331 người

Câu 3: Tỉ lệ tăng dân số hàng năm ở Việt Nam được duy trì ở mức 1,05%. Theo số liệu của Tổng Cục Thống Kê, dân số của Việt Nam năm 2014 là 90.728.900 người. Với tốc độ tăng dân số như thế thì vào năm 2030 thì dân số của Việt Nam là bao nhiêu?

A. 107.232.573 người **B.** 107.232.574 người

C. 105.030.042 người **D.** 106.118.331 người

Câu 4: Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là 78.685.800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7%. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A.e^{Nr}$ (Trong đó A: là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm) cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 120 triệu người.

A. 2026 **B.** 2022 **C.** 2020 **D.** 2025

Câu 5: Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là 78.685.800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,667%. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A.e^{Nr}$ (Trong đó A: là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm) cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 120 triệu người.

A. 2026 **B.** 2022 **C.** 2020 **D.** 2027

Câu 6: Biết rằng ngày 1 tháng 1 năm 2001, dân số Việt Nam là 78.685.800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7%. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A.e^{Nr}$ (trong đó A: là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm). Cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 120 triệu người. (Kết quả có thể tính ở mức xấp xỉ)

A. 2026 **B.** 2022 **C.** 2020 **D.** 2025

Câu 7: Biết rằng ngày 1 tháng 1 năm 2001, dân số Việt Nam là 78.685.800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 2,0%. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A.e^{Nr}$ (trong đó A: là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm). Cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 130 triệu người. (Kết quả có thể tính ở mức xấp xỉ)

A. 2026 **B.** 2022 **C.** 2020 **D.** 2025

Câu 8: Dân số thành phố A là 200.000 người, tăng trưởng 3% năm, và của thành phố B là 300.000 người tăng trưởng 1% năm. Sau bao nhiêu năm thì dân số hai thành phố bằng nhau, đáp án gần nhất với số năm thực tế nhất là?

A. 20 **B.** 21 **C.** 22 **D.** 23

Câu 9: Tỉ lệ tăng dân số hàng năm của Việt Nam là 1%. Năm 2010, dân số nước ta là 88360000 người. Sau khoảng bao nhiêu năm thì dân số nước ta sẽ là 128965000 người? Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm là không thay đổi.

A. 36 **B.** 37 **C.** 38 **D.** 39

Câu 10: Giả sử vào cuối năm thì một đơn vị tiền tệ mất 10% giá trị so với đầu năm. Tìm số nguyên dương nhỏ nhất sao cho sau n năm, đơn vị tiền tệ sẽ mất đi ít nhất 90% giá trị của nó?

A. 16 **B.** 18. **C.** 20. **D.** 22.

Câu 11: Kết quả thống kê cho biết ở thời điểm 2013 dân số Việt Nam là 90 triệu người, tốc độ tăng dân số là 1,1%/năm. Nếu mức tăng dân số ổn định ở mức như vậy thì dân số Việt Nam sẽ gấp đôi (đạt ngưỡng 180 triệu) vào năm nào?

A. Năm 2050 **B.** Năm 2077 **C.** Năm 2093 **D.** Năm 2070

Câu 12: Để đảm bảo điều kiện sinh sống của người dân tại thành phố X, một nhóm các nhà khoa học cho biết với các điều kiện y tế, giáo dục, cơ sở hạ tầng,... của thành phố thì chỉ nên có tối đa 60.000 người dân sinh sống. Các nhà khoa học cũng chỉ ra rằng dân số được ước tính theo công thức $S = A.e^{ni}$, trong đó A là dân số của năm được lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm và i là tỉ lệ tăng dân số hằng năm. Biết rằng vào đầu năm 2015, thành phố X có 50.000 người dân và tỉ lệ tăng dân số là 1,3%. Hỏi trong năm nào thì dân số thành phố bắt đầu vượt ngưỡng cho phép, biết rằng số liệu chỉ được lấy vào đầu mỗi năm và giả thiết tỉ lệ tăng dân số không thay đổi?

A. 2028 **B.** 2029 **C.** 2030 **D.** 2031

Câu 13: Ngày 1/7/2016, dân số Việt Nam khoảng 91,7 triệu người. Nếu tỉ lệ tăng dân số Việt Nam hàng năm là 1,2% và tỉ lệ ổn định 10 năm liên tiếp thì ngày 1/7/2026 dân số Việt Nam khoảng bao nhiêu triệu người?

A. 104,3 triệu người **B.** 103,3 triệu người

C. 105,3 triệu người **D.** 106,3 triệu người

Câu 14: Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S = A.e^{r.N}$ trong đó: A là dân số của năm lấy mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỷ lệ tăng dân số hằng năm. Cho biết năm 2001, dân số Việt Nam có khoảng 78.685.000 người và tỷ lệ tăng dân số hằng năm là 1,7% một năm. Như vậy, nếu tỉ lệ tăng dân số hằng năm không đổi thì đến năm nào dân số nước ta ở mức khoảng 120 triệu người?

A. 2020. **B.** 2026. **C.** 2022. **D.** 2024.

Câu 15: Năm 2000 xã A có 10.000 người. Với mức tăng dân số bình quân 2% hằng năm thì vào năm nào dân số của xã sẽ vượt 15.000 người?

A. Năm 2022 **B.** Năm 2020 **C.** Năm 2019 **D.** Năm 2021

Câu 16: Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A.e^{N.r}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Đầu năm 2010 dân số tỉnh Bắc Ninh là 1.038.229 người, tính đến đầu năm 2015 dân số của tỉnh là 1.153.600 người. Hỏi nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm giữ nguyên thì đầu năm 2025 dân số của tỉnh nằm trong khoảng nào?

A. $(1.424.300;1.424.400)$ **B.** $(1.424.000;1.424.100)$

C. $(1.424.200;1.424.300)$ **D.** $(1.424.100;1.424.200)$

Câu 17: Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S = A.e^{ni}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, i là tỉ lệ tăng dân số hằng năm. Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là 78685800 người và tỉ lệ tăng dân số là 1,7%. Hỏi cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 111 triệu người?

A. 2020 **B.** 2021 **C.** 2019 **D.** 2018

TĂNG TRƯỞNG

Câu 18: Trong nông nghiệp, bèo hoa dâu được dùng làm phân bón, nó rất tốt cho cây trồng. Mới đây một nhóm các nhà khoa học Việt Nam đã phát hiện ra bèo hoa dâu có thể được dùng để chiết xuất ra chất có tác dụng kích thích hệ miễn dịch và hỗ trợ điều trị bệnh ung thư. Bèo hoa dâu được thả nuôi trên mặt nước. Một người đã thả một lượng bèo hoa dâu chiếm 4% diện tích mặt hồ. Biết rằng cứ sau đúng một tuần bèo phát triển thành 3 lần lượng đã có và tốc độ phát triển của bèo ở mọi thời điểm như nhau. Sau bao nhiêu ngày bèo sẽ vừa phủ kín mặt hồ?

A. $7x\log_3 25$ **B.** $3^{\frac{5}{7}}$ **C.** $7x\dfrac{24}{3}$ **D.** $7x\log_3 24$

Câu 19: Người ta thả một cây bèo vào một hồ nước.Giả sử sau 9 giờ, bèo sẽ sinh sôi kín cả mặt hồ. Biết rằng sau mỗi giờ, lượng bèo tăng gấp 10 lần lượng bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi. Hỏi sau mấy giờ thì bèo phủ kín $\dfrac{1}{3}$ cái hồ?

A. 3. **B.** $\dfrac{10^9}{3}$. **C.** $9-\log 3$. **D.** $\dfrac{9}{\log 3}$

Câu 20: Người ta thả một ít lá bèo vào hồ nước. Biết rằng sau 1 ngày, bèo sẽ sinh sôi kín cả mặt hồ và sau mỗi giờ, lượng lá bèo tăng gấp đôi so với trước đó và tốc độ tăng không đổi. Hỏi sau mấy giờ thì lá bèo phủ kín $\dfrac{1}{3}$ hồ?

A. $\log_2(2^{24}-3)$ **B.** $24-\log_2 3$ **C.** $\dfrac{2^{24}}{3}$ **D.** $\dfrac{24}{\log_2 3}$

Câu 21: Một khu rừng có trữ lượng gỗ 4.10^5 mét khối. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây ở khu rừng đó là 4% mỗi năm. Số mét khối gỗ của khu rừng đó sau 5 năm là:

A. $4.10^5.(1+0,04)^{15}$ B. $4.10^5.(1+0,4)^5$

C. $4.10^5.(1-0,04)^5$ D. $4.10^5.(1+0,04)^5$

Câu 22: Một khu rừng ban đầu có trữ lượng gỗ là 4.10^5 mét khối gỗ. Gọi tốc độ sinh trưởng mỗi năm của khu rừng đó là $a\%$. Biết sau năm năm thì sản lượng gỗ là xấp xỉ $4,8666.10^5$ mét khối. Giá trị của a xấp xỉ:

A. 3,5% B. 4% C. 4,5% D. 5%

Câu 23: Một khu rừng có trữ lượng gỗ 4.10^5 mét khối. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây trong khu rừng đó là 4% mỗi năm.Sau 5 năm khu rừng đó sẽ có bao nhiêu mét khối gỗ?

A. $4.10^5.1,14^5\left(m^3\right)$ B. $4.10^5\left(1+0,04^5\right)\left(m^3\right)$

C. $4.10^5+0,04^5\left(m^3\right)$ D. $4.10^5.1,04^5\left(m^3\right)$

Câu 24: Một bể nước có dung tích 2m³. Người ta mở vòi cho nước chảy vào bể (ban đầu bể cạn).Trong giờ đầu, vận tốc nước chảy vào bể là 1 lít/phút. Trong các giờ tiếp theo, vận tốc nước chảy giờ sau gấp đôi giờ trước. Hỏi sau khoảng thời gian bao lâu thì bể đầy nước?

A. 14915 giây B. 3,14 giờ C. 350 phút D. 5,14 phút

Câu 25: Trong nông nghiệp bèo hoa dâu được dùng làm phân bón, nó rất tốt cho cây trồng. Mới đây một nhóm các nhà khoa học Việt Nam đã phát hiện ra bèo hoa dâu có thể được dùng để chiết xuất ra chất có tác dụng kích thích hệ miễn dịch và hỗ trợ điều trị bệnh ung thư. Bèo hoa dâu được thả nuôi trên mặt nước. Một người đã thả một lượng bèo hoa dâu chiếm 4% diện tích mặt hồ. Biết rằng cứ sau đúng một tuần bèo phát triển thành 5 lần lượng đã có và tốc độ phát triển của bèo ở mọi thời điểm như nhau. Sau bao nhiêu ngày bèo sẽ vừa phủ kín mặt hồ?

A. 14 B. $3^{\frac{5}{7}}$ C. $7\text{x}\dfrac{24}{3}$ D. $7\text{x}\log_3 24$

Câu 26: Một bể nước có dung tích 1000 lít.Người ta mở vòi cho nước chảy vào bể, ban đầu bể cạn nước. Trong giờ đầu vận tốc nước chảy vào bể là 1 lít/1phút. Trong các giờ tiếp theo vận tốc nước chảy giờ sau gấp đôi giờ liền trước. Hỏi sau khoảng thời gian bao lâu thì bể đầy nước (kết quả gần đúng nhất).

A. 3,14 giờ. B. 4,64 giờ. C. 4,14 giờ. D. 3,64 giờ.

Câu 27: Một người thả 1 lá bèo vào một cái ao, sau 12 giờ thì bèo sinh sôi phủ kín mặt ao. Hỏi sau mấy giờ thì bèo phủ kín $\dfrac{1}{5}$ mặt ao, biết rằng sau mỗi giờ thì lượng bèo tăng gấp 10 lần lượng bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi.

A. $12-\log 5$ (giờ). B. $\dfrac{12}{5}$ (giờ). C. $12-\log 2$ (giờ). D. $12+\ln 5$ (giờ).

Câu 28: Một khu rừng có trữ lượng gỗ 7.10^5 mét khối. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây ở khu rừng đó là 5% mỗi năm. Sau 5 năm, khu rừng đó sẽ có số mét khối gỗ là:

A. $7.10^5(1+0,05)^5$. **B.** $7.10^5.0,05^5$. **C.** $7.10^5(1-0,05)^5$. **D.** $7.10^5(2+0,05)^5$.

ĐỘNG ĐẤT

Cường độ một trận động đất được tính bởi công thức $M=\log A-\log A_o$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_o là biên độ chuẩn (hằng số).

Áp dụng công thức: $\log A_1-\log A_o=\log\dfrac{A_1}{A_o}$

Câu 29: Cường độ một trận động đất được tính bởi công thức $M=\log A-\log A_o$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_o là biên độ chuẩn (hằng số). Vào năm 2011, một trận động đất ở Nhật Bản có cường độ đo được là 9 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở Tứ Xuyên-Trung Quốc có cường độ đo được là 7 độ Richter. Hỏi trận động đất ở Nhật Bản có biên độ gấp bao nhiêu lần trận động đất ở Tứ Xuyên-Trung Quốc?

A. 10 lần B.100 lần C.1.000 lần D.10.000 lần

Câu 30: Cường độ một trận động đất *M (richter)* được cho bởi công thức $M=\log A-\log A_o$, với A là biên độ rung chấn tối đa và$A_o$là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ XXI, một trận động đất ởKumamoto có cường độ 8,5 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác Nam Mỹ có biên độ mạnh hơn gấp 3 lần. Cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ là:

A.8,9 **B.**33,2 **C.**2,075 **D.**9

Câu 31: Cường độ một trận động đất *M (richter)* được cho bởi công thức $M=\log A-\log A_o$, với A là biên độ rung chấn tối đa và$A_o$là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ XX, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8,1độ Richter.Trong cùng năm đó, trận động đất khác Nam Mỹ có biên độ mạnh hơn gấp 4 lần. Cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ là:

A.8,7 **B.**33,2 **C.**2,075 **D.**11

Câu 32: Cường độ một trận động đất *M (richter)*được cho bởi công thức $M=\log A-\log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ XX, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8,3 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở Nam Mỹ có biên độ mạnh hơn gấp 4 lần. Cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ là:

A. 33.2 **B.** 11 **C.** 8.9 **D.** 2.075

Câu 33: Cường độ một trận động đất M được cho bởi công thức: $M = \log A - \log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ XX, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở gần đó đo được 6 độ Richter. Trận động đất ở San Francisco có biên độ gấp bao nhiêu lần biên độ trận động đất này?

A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. 20 D. 100

Câu 34: Cường độ của một trận động đất được đo bằng độ Richter. Độ Richter được tính bằng công thức $M = \log A - \log A_0$, trong đó A là biên độ rung tối đa đo được bằng địa chấn kế và A_0 là biên độ chuẩn (hằng số). Vào ngày $3-12-2016$, một trận động đất cường độ $2,4$ độ Richter xảy ra ở khu vực huyện Bắc Trà My, tỉnh Quảng Nam; còn ngày $16-10-2016$ xảy ra một trận động đất cường độ $3,1$ độ Richter ở khu vực huyện Phước Sơn, tỉnh Quảng Nam. Biết rằng biên độ chuẩn được dùng chung cho cả tỉnh Quảng Nam, hỏi biên độ tối đa của trận động đất Phước Sơn ngày $16-10$ gấp khoảng mấy lần biên độ tối đa của trận động đất Bắc Trà My ngày $3-12$?

A. 7 lần. B. 5 lần. C. 4 lần. D. 3 lần.

Câu 35: Giả sử cứ sau một năm diện tích rừng của nước ta giảm x phần trăm diện tích hiện có. Hỏi sau 6 năm diệm tích rừng của nước ta sẽ là bao nhiêu phần diện tích hiện nay?

A. $1-\left(\frac{x}{100}\right)^6$ B. 100% C. $1-\frac{6x}{100}$ D. $\left(1-\frac{x}{100}\right)^6$.

Câu 36: Cường độ của một trận động đất được đo bằng độ Richter được tính bởi công thức $M = \log A - \log A_o$, trong đó A là biên độ trung tối đa đo được bằng địa chấn kế và A_o là biên độ chuẩn (hằng số).

Vào sáng ngày 03/12/2016, một trận động đất cường độ 3,5 độ Richter xảy ra ở khu vực huyện Bắc Trà My, tỉnh Quảng Nam; còn vào ngày 16/10/2016 xảy ra một trận động đất cường độ 4,1 độ Richter ở khu vực huyện Phước Sơn, tỉnh Quảng Nam. Biết rằng biên độ chuẩn A_o được sử dụng chung cho cả tỉnh Quảng Nam, hỏi biên độ tối đa của trận động đất của Phước Sơn ngày 16/10/2016 gấp mấy lần biên độ tối đa của trận động đất ở Bắc Trà My ngày 03/12/2016.

A. 5 B. 4 C. 0,7 D. 7

TĂNG TRƯỞNG VI KHUẨN

Câu 37: Sự tăng trưởng của loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = Ae^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng $(r > 0)$, t là thời gian tăng trưởng. Biết số vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Thời gian để vi khuẩn tăng gấp đôi số ban đầu gần đúng nhất với kết quả nào trong các kết quả sau:

A. 3 giờ 9 phút. B. 4giờ 10 phút. C. 3 giờ 40 phút. D. 2 giờ 5 phút.

Câu 38: Sự tăng trưởng của một loài vi khuẩn tuân theo công thức $S = Ae^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng (r>0), t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ tăng lên 300 con. Hỏi sau 10 giờ thì có bao nhiêu con vi khuẩn?

A. 600 B. 700 C. 800 D. 900

Câu 39: Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = A.e^{rt}$, trong đó A là số vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng, t là thời gian và S là số vi khuẩn sau thời gian t. Số vi khuẩn ban đầu là 100 con thì sau 6 giờ có 300 con và sau 5 giờ số vi khuẩn là?

A. 600 B. 700 C. 800 D. 250

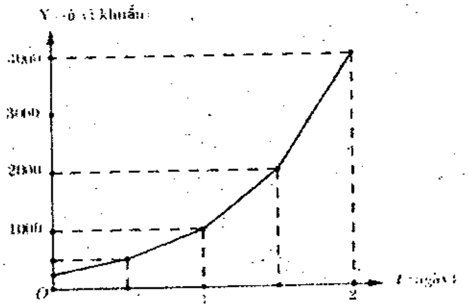
Câu 40: Sự tăng trưởng của một loài vi khuẩn tuân theo công thức $S = A.e^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng, t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Hỏi số con vi khuẩn sau 10 giờ?

A. 1000 B. 850 C. 800 D. 900

Câu 41: Sự tăng trưởng của một loài vi khuẩn được tính theo công thức $S = A.e^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng $(r < 0)$, t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 150 con và sau 5 giờ có 450 con, tìm số lượng vi khuẩn sau 10 giờ tăng trưởng.

A. 900 B. 1350 C. 1050 D. 1200

Câu 42: Biểu đồ bên cho thấy kết quả thống kê sự tăng trưởng về số lượng của một đàn vi khuẩn; cứ sau 12 tiếng thì số lượng của một đàn vi khuẩn tăng lên gấp 2 lần. Số lượng vi khuẩn ban đầu của đàn là 250 con. Công thức nào dưới đây thể hiện sự tăng trưởng về số lượng của đàn vi khuẩn N tại thời điểm t?



Biểu đồ về sự tăng trưởng của đàn vi khuẩn theo thời gian t

A. $N = 500.t^{12}$ B. $N = 250.2^{\frac{t}{2}}$

C. $N = 250.2^{t}$ D. $N = 250.2^{2t}$

Câu 43: E.Coli là vi khuẩn đường ruột gây tiêu chảy, đau bụng dữ dội. Cứ sau 20 phút thì số lượng vi khuẩn E.Coli tăng gấp đôi. Ban đầu, chỉ có 40 vi khuẩn E.Coli trong đường ruột. Hỏi sau bao lâu, số lượng vi khuẩn E.Coli là 671088640 con?

A. 48 giờ. B. 24 giờ. C. 12 giờ. D. 8 giờ.

Câu 44: Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t)=s(0).2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t (phút). Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc bắt đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con?

A. 48 phút. **B.** 19 phút. **C.** 7 phút. **D.** 12 phút.

Câu 45: Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $f(x)=A.e^{rx}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng $(r>0)$, x (tính theo giờ) là thời gian tăng trưởng. Biết số lượng vi khuẩn ban đầu có 1000 con và sau 10 giờ là 5000 con. Hỏi sau bao lâu thì số lượng vi khuẩn tăng gấp 25 lần?

A.50 giờ B.25 giờ C.15 giờ D.20 giờ

BÀI TOÁN HẠT NHÂN NGUYÊN TỬ

Câu 46: Cho biết chu kì bán rã của chất phóng xạ radi ^{226}Ra là 1602 năm (tức là một lượng ^{226}Ra sau 1602 năm phân hủy thì chỉ còn lại một nửa). Sự phân hủy được tính theo công thức $S=A.e^{rt}$ trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hàng năm$(r<0)$, t là thời gian phân hủy,Slà lượng còn lại sau thời gian phân hủy. Hỏi 5 gam ^{226}Ra sau 4000 năm phân hủy sẽ còn lại bao nhiêugam (làm tròn đến 3 chữ số thập phân)?

A. 0,886 gam. **B.** 1,023 gam. **C.** 0,795 gam. **D.** 0,923 gam.

Câu 47: Một loài cây trong quá trình quang hợp sẽ nhận một lượng Cacbon 14 (một đồng vị của Cacbon). Khi cây đó chết đi thì hiện tượng quang hợp cũng sẽ ngưng và nó sẽ không nhận Cacbon 14 nữa.Lượng Carbon 14 của nó sẽ phân hủy chậm chạp và chuyển hóa thành Nito 14. Gọi $P(t)$ là số phần trăm Cacbon 14 còn lại trong một bộ phận của cây sinh trưởng t năm trước đây thì $P(t)$được cho bởi công thức sau $P(t)=100.(0,5)^{\frac{t}{5750}}\%$. Phân tích một mẫu gỗ từ công trình kiến trúc gỗ, người ta thấy lượng Cacbon 14 còn lại trong gỗ là 65,21%. Hãy xác định số tuổi của công trình kiến trúc đó.

A. 3574 năm **B.** 3754 năm **C.** 3475 năm **D.** 3547 năm

Câu 48: Các loài cây xanh trong quá trình quang hợp sẽ nhận được một lượng nhỏ cacbon 14 (một đồng vị của Cacbon). Khi một bộ phận của một cái cây nào đó bị chết thì hiện tượng quang hợp cũng ngưng và nó không nhận thêm Cacbon 14 nữa. Lượng Cacbon 14 của bộ phận đó sẽ phân hủy một cách chậm chạp, chuyển hóa thành Nitơ 14. Biết rằng nếu gọi $P(t)$ là số phần trăm Cacbon 14 còn lại trong một bộ phận của một cái cây sinh trưởng từ t năm trước đây thì $P(t)$ được tính theo công thức $P(t) = 100.(0.5)^{\frac{t}{5750}}(\%)$.

Phân tích một mẫu gỗ từ công trình kiến trúc cổ, người ta thấy lượng Cacbon 14 còn lại trong mẫu gỗ đó là 65%. Hãy tính niên đại của công trình kiến trúc đó.

A. 3570năm **B.** 3574 năm **C.** 3578 năm **D.**3580 năm

Câu 49: Chu kì bán rã của Plutoni Pu^{239} là 24360 năm. Sự phân hủy được tính theo công thức $S = Ae^{rt}$. Trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hàng năm (r < 0), t là thời gian phân hủy, S là lượng còn lại sau thời gian phân hủy t. Hỏi 10 gam Pu^{239} sau bao nhiêu năm còn lại 1 gam?

A. $t \approx 82235$ năm B. $t \approx 62235$ năm C. $t \approx 10235$ năm D. $t \approx 92235$ năm

Câu 50: Một chất phóng xạ có chu kì bán rã là $T = 24$ giờ (tức là cứ sau 24 giờ thì khối lượng chất giảm đi một nửa). Ban đầu có 250 gam chất đó, hỏi sau 3,5 ngày thì chất đó có bao nhiêu gam (làm tròn đến hàng phần nghìn)?

A. 71,429 gam B. 22,097 gam C. 31,25 gam D. 15,625 gam

Câu 51: Trong vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bởi công thức: $m(t) = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, trong đó m_0 là khối lượng ban đầu của chất phóng xạ (tại thời điểm t = 0); T là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa khối lượng chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Chu kì bán rã của Cacbon ^{14}C là khoảng 5730 năm. Cho trước mẫu Cacbon có khối lượng 200g. Hỏi sau khoảng thời gian t thì khối lượng còn bao nhiêu?

A. $m(t) = 200.e^{-\frac{t\ln 2}{5730}}$ **B.** $m(t) = 200.\left(\frac{1}{2}\right)^{5730}$ **C.** $m(t) = 200\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{100t}{5730}}$ **D.** $m(t) = 200.e^{-\frac{100t}{5730}}$

Câu 52: Trong vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bởi công thức: $m(t) = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, trong đó m_0 là khối lượng ban đầu của chất phóng xạ (tại thời điểm t = 0); T là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa khối lượng chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Chu kì bán rã của Cacbon ^{14}C là khoảng 5.730 năm. Người ta tìm được trong một mẫu đồ cổ một lượng Cacbon và xác định được nó đã mất khoảng 75% lượng Cacbon ban đầu của nó. Hỏi mẫu đồ cổ đó có tuổi là bao nhiêu?

A. 11.460 năm **B.** 5.730 năm **C.** 2.378 năm **D.** 2.448 năm

CƯỜNG ĐỘ SÁNG

Sự thay đổi độ sáng bóng đèn được biểu diễn theo công thức: $M = (1 + r\%)^{12}.100\%$

r% là phần trăm tăng của nhiệt độ dây tóc.

Độ sáng bóng đèn tăng lên là: M – 100.

Câu 53: Nếu tăng 2% nhiệt độ tuyệt đối dây tóc, độ sáng bóng đèn tăng lên bao nhiêu?

A.13% B.27% C.112% D.127%

Câu 54: Nếu tăng 1% nhiệt độ tuyệt đối dây tóc, độ sáng bóng đèn tăng lên bao nhiêu?

A.13% B.1,12% C.112% D.3,3%

Câu 55: Một bóng đèn có hơi có nhiệt độ dây tóc là 2500^0K sáng hơn bóng đèn chân không có nhiệt độ dây tóc là 2000^0K bao nhiêu lần?

A.14,6 lần B.11,1 lần C.15 lần D.12 lần

Câu 56: Một bóng đèn có hơi có nhiệt độ dây tóc là 2600^0K sáng hơn bóng đèn chân không có nhiệt độ dây tóc là 2400^0K bao nhiêu lần?

A.4,6 lần B.1,1 lần C.5 lần D.2,6 lần

Câu 57: Để tăng độ sáng một bóng đèn lên gấp đôi cần tăng nhiệt độ tuyệt đối của dây tóc lên bao nhiêu (tính theo phần trăm)?

A.3% B.6% C.9% D.10%

Câu 58: Để tăng độ sáng một bóng đèn lên gấp ba cần tăng nhiệt độ tuyệt đối của dây tóc lên bao nhiêu (tính theo phần trăm)?

A.3% B.6% C.9,6% D.10%

Câu 59: Để giảm độ sáng một bóng đèn xuống gấp đôi cần giảm nhiệt độ tuyệt đối của dây tóc xuống bao nhiêu (tính theo phần trăm)?

A.3% B.5,6% C.9% D.10%

Câu 60: Một lon nước C_2 80^0F được đưa vào một máy làm lạnh chứa đá tại 32^0F. Nhiệt độ của C_2 ở phút thứ *t* được tính theo định luật Newton bởi công thức $T(t) = 32 + 48.(0.9)^T$. Phải làm mát C_2 trong bao lâu để nhiệt độ là 40^0F. Chọn đáp án gần nhất với kết quả?

A.1,56 B.9,3 C.15 D.17

Câu 61: Một lon nước Sting 80^0F được đưa vào một máy làm lạnh chứa đá tại 32^0F. Nhiệt độ của Sting ở phút thứ *t* được tính theo định luật Newton bởi công thức $T(t) = 32 + 48.(0.9)^T$. Phải làm mát Sting trong bao lâu để nhiệt độ là 37^0F. Chọn đáp án gần nhất với kết quả?

A.15,6 B.9,3 C. 21,5 D.17

TỔNG HỢP

Câu 62: Các khí thải gây hiệu ứng nhà kính là nguyên nhân chủ yếu làm Trái đất nóng lên.Theo OECD (Tổ chức Hợp tác và Phát triển kinh tế thế giới), khi nhiệt độ Trái đất tăng lên thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm.Người ta ước tính rằng, khi nhiệt độ Trái đất tăng thêm 2^0C thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 3%; còn khi nhiệt độ Trái đất tăng thêm 5^0C thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 10%. Biết rằng, nếu nhiệt độ Trái đất tăng thêm t^0, tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm $f(t)$ % thì $f(t) = k.a^t$, trong đó k, a là các hằng số dương. Khi nhiệt độ Trái đất tăng thêm bao nhiêu ^0C thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm đến 20%?

A.$8,4^0C$ B.$9,3^0C$ C.$7,6^0C$ D.$6,7^0C$

ĐỀ THI THỬ CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA

Câu 63: Khi quan sát quá trình sao chép tế bào trong phòng thí nghiệm sinh học, nhà sinh vật học nhận thấy các tế bào tăng gấp đôi mỗi phút. Biết sau một thời gian t giờ thì có 100 000 tế bào và ban đầu có 1 tế bào duy nhất. Tìm t.

A. $t \approx 16,61$ phút **B.** $t \approx 16,5$ phút **C.** $t \approx 15$ phút **D.** $t \approx 15,5$ phút

Câu 64: Theo số liệu từ Facebook, số lượng các tài khoản hoạt động tăng một cách đáng kể tính từ thời điểm tháng 2 năm 2004. U(x) là số tài khoản hoạt động, trong đó x là số tháng kể từ sau tháng 2 năm 2004. Biết số lượt tài khoản hoạt động tăng theo hàm số mũ xấp xỉ như sau: $U(x) = A.(1+0,04)^x$ với A là số tài khoản hoạt động đầu tháng 2 năm 2004. Hỏi đến sau bao lâu thì số tài khoản hoạt động xấp xỉ là 194 790 người, biết sau hai tháng thì số tài khoản hoạt động là 108 160 người.

A. 1 năm 5 tháng **B.** 1 năm 2 tháng **C.** 1 năm **D.** 11 tháng

Câu 65 (Hoang mạc Sahara): Theo kết quả của một trung tâm nghiên cứu về mức độ sa mạc hóa của hoang mạc Sahara cho biết mức độ sa mạc hóa của hoang mạc là một hàm phụ thuộc theo nhiệt độ môi trường: $\Delta S = (t^2 - 2t - 1).e^{-2t+3}$.Giả sử nhiệt độ môi trường dao động từ 0^0C đến 50^0C. Hỏi nhiệt độ nào khiến mức độ sa mạc hóa lớn nhất?

A. 3^0 **B.** 1^0 **C.** 2^0 **D.** 0^0

Câu 66: Năm 1982 người ta đã biết số $p = 2^{756839} - 1$ là số nguyên tố (số nguyên tố lớn nhất biết được vào thời điểm đó). Khi viết số đó trong hệ thập phân thì số nguyên tố đó có số chữ số là:

A. 227834. **B.** 227843 **C.** 227824 **D.** 227842

Câu 67: Theo số liệu từ Facebook, số lượng các tài khoản hoạt động tăng một cách đáng kể tính từ thời điểm tháng 2 năm 2004. Bảng dưới đây mô tả số lượng U(x) là số tài khoản hoạt động, trong đó x là số tháng kể từ sau tháng 2 năm 2004. Biết số lượt tài khoản hoạt động tăng theo hàm số mũ xấp xỉ như sau: $U(x) = A.(1+0,04)^x$ với A là số tài khoản hoạt động đầu tháng 2 năm 2004. Hỏi đến sau bao lâu thì số tài khoản hoạt động xấp xỉ là 250 000 người, biết sau hai tháng thì số tài khoản hoạt động là 108 160 người.

A. 1 năm 11 tháng B. 1 năm 2 tháng C. 1 năm D. 11 tháng

Câu 68: Biết thể tích khí CO_2 năm 1998 là $V(m^3)$. 10 năm tiếp theo, thể tích CO_2 tăng $m\%$, 10 năm tiếp theo nữa, thể tích CO_2 tăng $n\%$. Tính thể tích CO_2 năm 2016?

A. $V_{2016} = V\dfrac{((100+m)(100+n))^{10}}{10^{20}}(m^3)$ B. $V_{2016} = V.\dfrac{(100+m)^{10}.(100+n)^8}{10^{36}}(m^3)$

C. $V_{2016} = V + V.(1+m+n)^{18}(m^3)$ D. $V_{2016} = V.(1+m+n)^{18}(m^3)$

Câu 69: Vào đầu năm 2016 nhóm nghiên cứu thuộc Đại Học Central Missouri – Mỹ đã công bố số nguyên tố lớn nhất từ trước tới nay. Cụ thể số này là kết quả của phép tính $2^{74207281}-1$. Hỏi rằng, nếu viết trong hệ thập phân (hệ gồm mười chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) thì số nguyên tố đó có bao nhiêu chữ số (làm tròn triệu)?

A.20triệu. B.21triệu. C.22triệu. D. 23triệu.

Câu 70: Gọi m là số chữ số cần dùng khi viết số 2^{30} trong hệ thập phân và n là số chữ số cần dùng khi viết số 30^2 trong hệ nhị phân. Ta có tổng m + n bằng

A. 18 B. 20 C. 19 D. 21

Câu 71: Năm 1994, tỉ lệ khí CO_2 trong không khí là $\dfrac{358}{10^6}$. Biết rằng tỉ lệ thể tích khí CO_2 trong không khí tăng 0,4% hàng năm. Hỏi năm 2016, tỉ lệ thể tích khí CO_2 trong không khí là bao nhiêu? Giả sử tỉ lệ tăng hàng năm không đổi. Kết quả thu được gần với số nào sau đây nhất?

A. $\dfrac{391}{10^6}$ B. $\dfrac{390}{10^6}$ C. $\dfrac{3907}{10^6}$ D. $\dfrac{7908}{10^6}$

Câu 72: Trong tin học, độ hiệu quả của một thuật toán tỷ lệ với tốc độ thực thi chương trình và được tính bởi $F(n)=\dfrac{n}{P(n)}$ với n là số lượng dữ liệu đưa vào, $P(n)$ là độ phức tạp của thuật toán. Biết rằng một thuật toán có $P(n)=\log_2 n$ và khi $n=300$ thì để chạy nó, máy tính mất 0,02 giây. Hỏi khi $n=90000$ thì phải mất bao nhiêu giây để chạy chương trình tương ứng?

A. 3 B. 6 C. 0,004 D. 600

Câu 73: Một điện thoại đang nạp pin, dung lượng nạp được tính theo công thức $Q(t)=Q_0\left(1-e^{\frac{-3t}{2}}\right)$ với t là khoảng thời gian tính bằng giờ và Q_0 là dung lượng nạp tối đa (pin đầy). Nếu điện thoại nạp pin từ lúc cạn pin (tức là dung lượng pin lúc bắt đầu nạp là 0%) thì sau bao lâu sẽ nạp được 90% (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. $t \approx 1,54h$ **B.** $t \approx 1,2h$ **C.** $t \approx 1h$ **D.** $t \approx 1,34h$

Câu 74: Chuyện kể rằng: Ngày xưa, có ông vua hứa sẽ thưởng cho một vị quan món quà mà vị quan được chọn. Vị quan tâu: "Hạ thần chỉ xin Bệ hạ thưởng cho một hạt thóc thôi ạ! Cụ thể như sau: Bàn cờ vua có 64 ô thì với ô thứ nhất thần xin thêm 1 hạt, ô thứ 2 thì gấp đôi ô đầu, ô thứ 3 lại gấp đôi ô thứ 2,... ô sau nhận số hạt thóc gấp đôi phần thưởng dành cho ô liền trước". Giá trị nhỏ nhất của n để tổng số hạt thóc mà vị quan xin từ n ô đầu tiên (từ ô thứ 1 đến ô thứ n) lớn hơn 1 triệu là:

A. 21 **B.** 19 **C.** 18 **D.** 20

CHUYÊN BIÊN HÒA – HÀ NAM – LẦN 1

Câu 75: Một công ty điện lực bán điện sinh hoạt cho dân theo hình thức lũy tiến (bậc thang) như sau: Mỗi bậc gồm 10 số, bậc 1 từ số thứ 1 đến số thứ 10, bậc 2 từ số thứ 11 đến số thứ 20... Bậc 1 có giá từ 500 đồng/1 số, giá của mỗi bậc số ở bậc thứ $n+1$ tăng so với giá của mỗi số ở bậc thứ n là 2, 5%. Gia đình ông A sử dụng hết 847 số trong tháng 1, hỏi tháng 1 ông A phải đóng bao nhiêu tiền điện? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

A. $x \approx 1431392,85$ **B.** $x \approx 1419455,83$ **C.** $x \approx 1914455,82$ **D.** $x \approx 1542672,87$

LỜI GIẢI CHI TIẾT

DÂN SỐ

Câu 1: Đáp án A.

- Áp dụng công thức $P_n = P(1+x)^n$
- Trong đó: + n là số năm
  + x là tỉ lệ gia tăng dân số

Theo bài ra ta có: $94444200.(1+1,06\%)^9 = 103845800$ người

Câu 2: Đáp án A.

- Áp dụng công thức $P_n = P(1+x)^n$
- Trong đó: + n là số năm
  + x là tỉ lệ gia tăng dân số

Theo bài ra, ta có: $94444200.(1+1,05\%)^{14} = 109316003$ người

Câu 3: Đáp án B.

Dân số Việt Nam vào 2030 là: $90728900.1,0105^{30-14} = 107232574$ người

Câu 4: Đáp án A.

- Ta có: $120 = 78,6858.e^{n.0,017} \Rightarrow n = \dfrac{\log_e 1,53}{0,017}$ gần bằng 24,8. Vậy là sau 25 năm.

Câu 5: Đáp án D.

- Ta có: $120 = 78,6858.e^{n.0,01667} \Rightarrow n = \dfrac{\log_e 1,53}{0,01667}$ gần bằng 25,5. Vậy là sau 26 năm.

Câu 6: Đáp án D.

✓ <u>Phân tích:</u> Ta nhận thấy đây là bài toán dựa trên ứng dụng giải phương trình mũ như sau:

Lần lượt thay các số liệu vào ta được phương trình: $78685800.e^{N.0,017} = 120000000$

$\Leftrightarrow e^{N.0,017} = \dfrac{120000000}{78685800} \Leftrightarrow N.0,017 = \ln\dfrac{120000000}{78685800} \Leftrightarrow N \approx 24,825$, tức là xấp xỉ 25 năm.

Do đề bài tính từ tháng 1 năm 2001 do đó ta tính cả năm 2001 vào đó nữa, tức là kết quả của chúng ta sẽ là $2001 - 1 + 25 = 1025$

Nhiều bạn quên không tính năm 2001 vào do đó sẽ chọn luôn A là sai.

Câu 7: Đáp án D.

✓ <u>Phân tích:</u> Ta nhận thấy đây là bài toán dựa trên ứng dụng giải phương trình mũ như sau:

Lần lượt thay các số liệu vào ta được phương trình: $78685800.e^{N.0,02} = 130000000$

$\Leftrightarrow e^{N.0,02} = \dfrac{130000000}{78685800} \Leftrightarrow N.0,02 = \ln\dfrac{130000000}{78685800} \Leftrightarrow N \approx 25,1$ tức xấp xỉ 25 năm.

Do đề bài tính từ tháng 1 năm 2001 do đó ta tính cả năm 2001 vào đó nữa, tức là kết quả của chúng ta sẽ là $2001 - 1 + 25 = 1025$

Nhiều bạn quên không tính năm 2001 vào do đó sẽ chọn luôn A là sai.

Câu 8: Đáp án B.

Gọi V_A, V_B lần lượt là dân số các thành phố A, B sau n năm.

Theo đề ta có

$$V_A = V_B \Leftrightarrow 200.000 * 1.03^n = 300.000 * 1.01^n \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \left(\frac{1.01}{1.03}\right)^n \Leftrightarrow n = \log_{\frac{1.01}{1.03}} \approx 20.68$$

Câu 9: Đáp án C.

Gọi n là số năm dân số nước ta tăng từ $88360000 \to 128965000$

Sau n năm dân số nước Việt Nam là: $88360000(1,01)^n$. Theo đề:

$$88360000(1,01)^n = 128965000 \Leftrightarrow n = \log_{1,01}\left(\frac{128965000}{88360000}\right) \approx 38 \text{ (năm)}.$$

Câu 10: Đáp án D.

Gọi $x\left(x>0\right)$ là giá trị tiền tệ lúc ban đầu. Theo đề bài thì sau 1 năm, giá trị tiền tệ sẽ còn $0,9x$.

Cuối năm 1 còn $0,9x$

Cuối năm 2 còn $0,9.0,9x=0,9^2x$

...

Cuối năm n còn $0,9^n x$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 0,9^n x=0,1x \Rightarrow n\approx 21,58$. Vì n nguyên dương nên $n=22$.

Câu 11: Đáp án B.

- Phương pháp: Dân số một quốc gia ban đầu là N_0, tốc độ tăng dân số là r%/năm thì sau n năm, dân số của quốc gia đó được tính theo công thức $N_n=N_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$
- Cách giải: Gọi n là số năm kể từ năm 2013 để dân số Việt Nam tăng gấp đôi, có phương trình: $180=90\left(1+\frac{1,1}{100}\right)^n \Leftrightarrow 1,011^n=2 \Leftrightarrow n=\log_{1,011}2\approx 63,4$. Ta chọn n = 64 (số nguyên nhỏ nhất lớn hơn 63,4)

Vậy đến năm 2013 + 64 = 2077 thì dân số Việt Nam sẽ tăng gấp đôi.

Câu 12: Đáp án C.

Theo công thức, ta dễ thấy số dân qua mỗi năm tăng. Gọi n_1, n_0 là số năm từ năm bắt đầu vượt ngưỡng cho phép với năm mốc và năm 2015 với năm mốc.

Khi đó $\begin{cases}50000=A.e^{n_0\times 1,3\%}\\ 60000=A.e^{n_1\times 1,3\%}\end{cases} \Rightarrow \frac{60000}{50000}=\frac{A.e^{n_1\times 1,3\%}}{A.e^{n_0\times 1,3\%}} \Leftrightarrow \frac{6}{5}=e^{(n_1-n_0)\times 1,3\%} \Rightarrow n_1-n_0=\frac{\ln\frac{6}{5}}{1,3\%}\approx 14,02$

Vậy phải năm 2015 ít nhất 15 thì số dân mới vượt ngưỡng cho phép.

Câu 13: Đáp án B.

Từ ngày 1/7/2016 đến ngày 1/7/2026 thì được 10 năm, khi đó số dân của Việt Nam là:

$N=91,7.\left(1+1,2\%\right)^{10}=103,317$

Câu 14: Đáp án B.

Sau N năm số dân là 120 triệu người nên ta có:

$S=A.e^{r.N} \Leftrightarrow 120.10^6=\left(78.685.000\right).e^{1,7\%N} \Rightarrow N=25.$

Do đó đến năm 2026 dân số nước ta ở mức khoảng 120 triệu người.

Câu 15: Đáp án D.

✓ **Phương pháp:** Gọi số dân của xã đó là N thì mức tăng bình quân 2% của xã đó tương đương với $\frac{2N}{100}$ người.

✓ **Cách giải:** Số dân của xá đó sau 1 năm là: $N+\frac{2N}{100}=\frac{102N}{100}$

Sau 2 năm là: $\frac{102N}{100}+\frac{2}{100}\frac{102N}{100}=\left(\frac{102}{100}\right)^2N$

Như vậy sau n năm số dân là: $\left(\frac{102}{100}\right)^nN=\left(\frac{102}{100}\right)^n.1000$

Áp dụng công thức $\Rightarrow$ để số dân bắt đầu >125000 thì $n>20.48$ năm $\Rightarrow n=21$ năm

Câu 16: Đáp án C.

Gọi S_1 là dân số năm 2015, ta có $S_1=1.153.600, N=5, A=1.038.229$

Ta có: $S_1=A.e^{N.r}\Rightarrow e^{N.r}=\frac{S_1}{A}\Rightarrow r=\frac{\ln\frac{S_1}{A}}{5}$

Gọi S_2 là dân số đầu năm 2025, ta có $S_2=A.e^{15.r}=1.038.229.e^{15.\frac{\ln\frac{S}{A}}{5}}\approx 1.424.227,71$

Câu 17: Đáp án B.

Theo đề bài: $111=78,6858.e^{0.017n}\Leftrightarrow \ln 110=\ln\left(78,6858.e^{0.017n}\right)$

$\Leftrightarrow n=\frac{\ln 111-\ln 78,6858}{0.017}\approx 20$

Vậy đến năm 2021 dân số nước ta ở mức 111 triệu người.

TĂNG TRƯỞNG

Câu 18: Đáp ánA.

Gọi A là lượng bèo bạn đầu, để phủ kín mặt hồ thì lượng bèo là $\frac{100}{4}A$

Sau 1 tuần số lượng bèo là 3A suy ra sau n tuần thì lượng bèo là: $3^n.A$

Để lượng bèo phủ kín mặt hồ thì $3^n.A=\frac{100}{4}A\Rightarrow x=\log_3\frac{100}{4}=\log_3 25\Rightarrow$ Thời gian để bèo phủ kín mặt hồ là $t=7\log_3 25$

Câu 19: Đáp án C.

Theo giả thiết sau n giờ ta có số bèo là 10^n cây.

Sau 9 giờ, bèo sẽ sinh sôi kín cả mặt hồ và số cây bèo sau 9 giờ là 10^9 cây.

Sau n giờ, bèo phủ kín $\frac{1}{3}$ cái hồ khi $10^n = \frac{1}{3}10^9 \Leftrightarrow n = 9 - \log 3$.

Câu 20: Đáp án A.

Gọi t là thời gian các lá bèo phủ kín $\frac{1}{3}$ cái hồ. Vì tốc độ tăng không đổi, 1 giờ tăng gấp 10 lần nên ta có $10^t = \frac{1}{3}10^9 \Leftrightarrow t = 9 - \log 3$.

Câu 21: Đáp án D.

Hướng dẫn: Gọi trữ lượng gỗ ban đầu là V_0, tốc độ sinh trưởng hàng năm của rừng là i phần trăm. Ta có:

- Sau 1 năm, trữ lượng gỗ là: $V_1 = V_0 + iV_0 = (1+i)V_0$
- Sau 2 năm, trữ lượng gỗ là: $V_2 = V_1 + iV_1 = (1+i)V_1 = (1+i)^2V_0$

....

- Sau 5 năm, trữ lượng gỗ là: $V_5 = (1+i)^5V_0$
- Thay $V_0 = 4.10^5(m^3), i = 4\% = 0,04 \Rightarrow V_5 = 4.10^5(1+0,04)^5$.

Câu 22: Đáp án B.

✓ **Phân tích:** Trữ lượng gỗ sau một năm của khu rừng là:

$N = 4.10^5 + 4.10^5.a\% = 4.10^5(1+a\%)$

Trữ lượng gỗ sau năm thứ hai của khu rừng là:

$N = 4.10^5(1+a\%)^2$

...

Trữ lượng gỗ sau năm năm của khu rừng là: $N = 4.10^5(1+a\%)^5 = 4,8666.10^5 \Rightarrow a \approx 4\%$

Câu 23: Đáp án D.

Đây là một dạng bài toán lãi kép được tác giả dấu dưới sự phát triển của một loài cây. Dạng bài này đã quen thuộc rồi đúng không các bạn? Tôi sẽ đưa luôn công thức tính lãi kép cho các bạn nhé: $A = a(1+r)^n$ trong đó A là số tiền nhận được sau n tháng, a là số tiền gửi ban đầu, r là lãi xuất hàng tháng. Áp dụng công thức trên ta thấy sau 5 năm thì khu rừng sẽ có $4.10^5.1,04^5$ mét khối gỗ.

Câu 24: Đáp án A.

Vận tốc nước chảy giờ đầu là 1 lít/phút bằng 60 lít/giờ. Gọi t(h) là thời gian nước chảy đầy bể. Khi đó ta có:

$1000 = 60.2^0 + 60.2^1 + 60.2^2 + ... + 60.2^{t-1} \Leftrightarrow 60.\frac{1-2^t}{1-2} = 1000 \Rightarrow t \approx 4,14h \approx 14915s.$

Câu 25: Đápán A.

Gọi A là lượng bèo ban đầu, để phủ kín mặt hồ thì lượng bèo là: $\frac{100}{4}A$

Sau 1 tuần số lượng bèo là 5A, suy ra sau n tuần thì lượng bèo là: $5^n.A$

Để lượng bèo phủ kín mặt hồ thì $5^n.A = \frac{100}{4}A \Rightarrow x = \log_5 \frac{100}{4} = \log_5 25 = 2.$

$\Rightarrow$ thời gian để bèo phủ kín mặt hồ là $t = 7.2 = 14$.

Câu 26: Đáp án C.

Gọi $x+1$ là khoảng thời gian cần để nước chảy đầy bể, ta có

$60.2^0 + 60.2^1 + 60.2^2 + ... + 60.2^x = 1000 \Leftrightarrow 60.\frac{1-2^{x+1}}{1-2} = 1000 \Leftrightarrow 2^{x+1} = \frac{53}{3} \Leftrightarrow x+1 \approx 4{,}14$giờ.

Câu 27: Đáp án A.

Gọi t là thời gian bèo phủ kín $\frac{1}{5}$ mặt ao, khi đó $10^t = \frac{10^{12}}{5} \Leftrightarrow t = \log\frac{10^{12}}{5} = 12 - \log 5$

Câu 28: Đáp án A.

Gọi a_n là số gỗ (mét khối) có được sau n năm. Ta có:

$a_0 = 7.10^5$,

$a_{n+1} = a_n + 0{,}05.a_n = 1{,}05.a_n$

$\Rightarrow a_5 = a_0(1{,}05)^5 = 7.10^5.(1{,}05)^5$.

ĐỘNG ĐẤT

Câu 29: Đáp án B.

- Cường độ trận động đất ở Nhật Bản: $9 = \log A_1 - \log A_o \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_o} = 10^9$
- Cường độ trận động đất ở Tứ Xuyên: $7 = \log A_2 - \log A_o \Leftrightarrow \frac{A_2}{A_o} = 10^7$
- Lập tỉ lệ: $\frac{\frac{A_1}{A_o}}{\frac{A_2}{A_o}} = \frac{10^9}{10^7} \Leftrightarrow A_1 = 100A_2$
- Vậy trận động đất ở Nhật Bản có biên độ gấp 100 lần trận động đất ở Tứ Xuyên-Trung Quốc.

Câu 30: Đáp án D.

$$M = \log A - \log A_0 = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

- Ở Kumamoto: $8,5 = \log\left(\frac{A}{A_0}\right) \Rightarrow \frac{A}{A_0} = 10^{8,5}$

- Ở Nam Mỹ: $= \log 3.10^{8,5} = 9,0$

Câu 31: Đáp án A.

$$M = \log A - \log A_0 = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

- Ở San Francisco: $8,1 = \log\left(\frac{A}{A_0}\right) \Rightarrow \frac{A}{A_0} = 10^{8,1}$

- Ở Nam Mỹ: $= \log 4.10^{8,1} = 8,7$

Câu 32: Đáp án C.

Ta có $M' = \log 4A - \log A_0 = \log 4 + \log A - \log A_0 = \log 4 + 8,3 \approx 8,9.$

Câu 33: Đáp án D.

Hướng dẫn:Gọi cường độ và biên độ trận động đất ở San Francisco là M và A, trận động đất còn lại là M_1 và A_1 ta có:

$$2 = 8 - 6 = M - M_1 = \lg A - \lg A_0 - (\lg A_1 - \lg A_0) = \lg\frac{A}{A_1} \Rightarrow \frac{A}{A_1} = 10^2 = 100.$$

Câu 34: Đáp án B.

Gọi A_1 là biên độ rung tối đa ở Phước Sơn.

Gọi A_2 là biên độ rung tối đa ở Trà My.

$M_1 = \log A_1 - \log A_0 = 3,1 \quad (1).$

$M_2 = \log A_2 - \log A_0 = 2,4 \quad (2).$

Lấy $(1)-(2)$: $\log A_1 - \log A_2 = 0,7 \Leftrightarrow \log\frac{A_2}{A_1} = 0,7 \Leftrightarrow \frac{A_2}{A_1} = 10^{0,7}$

Câu 35: Đáp án D.

Gọi S là diện tích rừng nước ta hiện nay.

Sau năm thứ nhất, diện tích rừng còn lại là $S - S.x\% = S\left(1 - \frac{x}{100}\right)$

Sau năm thứ hai, diện tích rừng còn lại là $S\left(1-\frac{x}{100}\right) - S\left(1-\frac{x}{100}\right).\frac{x}{100} = S\left(1-\frac{x}{100}\right)^2$

Sau năm thứ n, diện tích rừng còn lại là $S\left(1-\frac{x}{100}\right)^n$ nên sau 4 năm diện tích rừng sẽ là $\left(1-\frac{x}{100}\right)^6$ phần diện tích nước ta hiện nay.

Câu 36: Đáp án B.

Gọi A_1, A_2 lần lượt là biên độ tối đa của trận động đất của Phước Sơn ngày 16/10 và biên độ tối đa của trận đất ở Bắc Trà My ngày 03/12.

$$M = \log A - \log A_0 = \log\frac{A}{A_0} \Rightarrow A = 10^M A_0 \Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = 10^{4,1-3,5} \approx 4.$$

TĂNG TRƯỞNG VI KHUẨN

Câu 37: Đáp án A.

Biết $A=100, S=300, t=5$

Từ công thức $S = Ae^{rt} \Rightarrow e^{rt} = \frac{S}{A} \Rightarrow r.t = \ln\left(\frac{S}{A}\right) \Rightarrow r = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{S}{A}\right) = \frac{\ln 3}{5}$

Vậy để $A = 100, S = 200 \Rightarrow t = \frac{1}{r}\ln\left(\frac{S}{A}\right) = \frac{5}{\ln 3}.\ln 2 \approx 3{,}156(h) \approx 3h\ 9$ phút

Câu 38: Đáp án D.

Theo đề ta có: $100.e^{5r} = 300 \Rightarrow \ln(100.e^{5r}) = \ln 300$

$$\Rightarrow 5r = \ln\frac{300}{100} \Rightarrow r = \frac{1}{5}\ln 3$$

Sau 10 giờ từ 100 con vi khuẩn sẽ có: $s = 100.e^{\left(\frac{1}{5}\ln 3\right)10} = 100.e^{\ln 9} = 900$ con.

Câu 39: Đáp án D.

+ Hướng giải: Trước tiên tìm tỉ lệ tăng trưởng sau mỗi giờ.

Từ giả thiết suy ra $300 = 100e^{6r} \Rightarrow r = \frac{\ln 3}{6}$.

Sau 5 giờ, từ 100 con vi khuẩn ban đầu sẽ có $S = 100e^{5.\frac{\ln 3}{6}} \approx 250$ con.

Câu 40: Đáp án D.

Ta có $300 = 100.e^{5r} \Rightarrow r = \frac{\ln 3}{5}$

Khi đó số vi khuẩn sau 10 giờ bằng $S = 100.e^{10\frac{\ln 3}{5}} = 900$.

Câu 41: Đáp án B.

Ta có $450 = 150.e^{5r} \Leftrightarrow e^{5r} = 3 \Leftrightarrow 5r = \ln 3 \Leftrightarrow r = \dfrac{\ln 3}{5}$

Số lượng vi khuẩn sau 10 giờ tăng trưởng là: $S = 150.e^{10\frac{\ln 3}{5}} = 150.\left(e^{\ln 3}\right)^2 = 150.3^2 = 1350$ (con)

Lưu ý ta có công thức tính toán với bài toán: "Hàng tháng gửi vào ngân hàng a đồng, lãi suất r%, tính số tiền thu được sau n tháng là $A = \dfrac{a}{r}(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]$" (lời giải trên áp dụng công thức này)

Câu 42: Đáp án D.

Gọi số vi khuẩn ban đầu tổng quát là N_0

Sau 12 tiếng = 0,5 ngày = 1T thì số vi khuẩn là $N_{1T} = 2N_0$

Sau 24 tiếng = 1 ngày = 2T thì số vi khuẩn là $N_{2T} = 4N_0 = 2^2 N_0$

Sau 36 tiếng = 1,5 ngày = 3T thì số vi khuẩn là $N_{3T} = 8N_0 = 2^3 N_0$

Từ đó ta dễ thấy công thức tổng quát, tại thời điểm $t = kT$ số vi khuẩn là

$N_{kT} = N_0.2^k = N_0.2^{\frac{t}{T}} = N_0.2^{2t} = 250.2^{2t}$; (T=0,5 ngày).

Câu 43: Đáp án D.

Sau 20 phút số lượng vi khuẩn tăng lên 2 lần

Do đó sau 20.n phút số lượng vi khuẩn tăng lên 2^n lần

$40.2^n = 671088640 \Rightarrow n = \log_2 \dfrac{671088640}{40} = 24 \Rightarrow t = 24.20 = 480$ (phút)

Do vậy thời gian là 8h.

Câu 44: Đáp án C.

Theo giả thiết $\Rightarrow 62500 = s(0).2^3 \rightarrow s(0) = \dfrac{625000}{8}$

Khi số vi khuẩn là 10 triệu con thì $10^7 = s(0).2^t \Rightarrow 2^t = 128 \Rightarrow t = 7$ (phút)

Câu 45: Đáp án D.

- Ta có: $1000.e^{10r} = 5000 \Rightarrow r = \dfrac{\ln 5}{10}$
- Suy ra để đạt 25000 con cần x(h) thì: $1000.e^{\frac{\ln 5}{10}.x} = 25000 \Rightarrow x = 20$

BÀI TOÁN HẠT NHÂN NGUYÊN TỬ

Câu 46: Đáp án A.

Ta có: $\frac{A}{2} = A.e^{1602r} \Leftrightarrow r = -\frac{\ln 2}{1602}$. Thay $A = 5, t = 4000, r = -\frac{\ln 2}{1602} \Rightarrow S = A.e^{rt} \approx 0,886$ g.

Câu 47: Đáp án D.

Ta có $100.(0,5)^{\frac{t}{5750}} = 65,21 \Leftrightarrow (0,5)^{\frac{t}{5750}} = 0,6521 \Leftrightarrow t = 5750.\log_{0.5} 6521 \approx 3547$

Câu 48: Đáp án B.

Ta có: $P(t) = 65$.

Nên ta có phương trình: $100.(0.5)^{\frac{t}{5750}} = 65 \Leftrightarrow t = 5750.\frac{\ln 0.65}{\ln 0.5} \approx 3574$

Câu 49: Đáp án A.

Thế các dữ kiện vào công thức ta sẽ tính được đáp ánA.

Câu 50: Đáp án B.

Ta có $m = m_0.2^{\frac{t}{T}} = 250.2^{\frac{3,5.24}{24}} = 22,097(g)$

Câu 51: Đáp án A.

- Theo công thức $m(t) = m_0 e^{-kt}$ ta có:

$m(5730) = 200.e^{-k.5730} \Leftrightarrow \frac{200}{2} = 200.e^{-k.5730} \Leftrightarrow k = \frac{\ln 2}{5730}$ suy ra $m(t) = 200e^{-\frac{\ln 2}{5730}t}$

Câu 52: Đáp án A.

- Giả sử khối lượng ban đầu của mẫu đồ cổ chứa Cacbon là m_0, tại thời điểm t tính từ thời điểm ban đầu ta có:

$m(t) = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{5730}t} \Leftrightarrow \frac{m_0}{4} = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{5730}t} \Leftrightarrow t = \frac{5730.2\ln 2}{\ln 2} = 11460$ (năm)

CƯỜNG ĐỘ SÁNG

Câu 53: Đáp án B.

- Độ sáng bóng đèn tăng lên là: $(1+2\%)^{12}.100\% \approx 127\%$
- Suy ra, độ sáng bóng đèn tăng lên 27%.

Câu 54: Đáp án A.

- Độ sáng bóng đèn tăng lên là: $(1+1\%)^{12}.100\% \approx 113\%$
- Suy ra, độ sáng bóng đèn tăng lên 13%.

Câu 55: Đáp án A.

Theo bài ra ta có: $\left(\frac{2500}{2000}\right)^{12} = 14,6$ lần

Câu 56: Đáp án D.

Theo bài ra ta có: $\left(\frac{2600}{2400}\right)^{12} = 2,6$ lần

Câu 57: Đáp án B.

- Để tăng độ sáng một bóng đèn lên gấp đôi cần tăng nhiệt độ tuyệt đối của dây tóc, ta có: $2 = 1.x^{12} \Rightarrow x = \sqrt[12]{2} \approx 1,06$
- Suy ra, cần tăng nhiệt độ tuyệt đối của dây tóc lên 6%.

Câu 58: Đáp án C.

- Để tăng độ sáng một bóng đèn lên gấp đôi cần tăng nhiệt độ tuyệt đối của dây tóc, ta có: $3 = 1.x^{12} \Rightarrow x = \sqrt[12]{3} \approx 1,096$
- Suy ra, cần tăng nhiệt độ tuyệt đối của dây tóc lên 9,6%.

Câu 59: Đáp án B.

- Để tăng độ sáng một bóng đèn lên gấp đôi cần tăng nhiệt độ tuyệt đối của dây tóc, ta có: $\frac{1}{2} = 1.x^{12} \Rightarrow x = \sqrt[12]{\frac{1}{2}} \approx 0,944$
- Suy ra, cần giảm nhiệt độ tuyệt đối của dây tóc xuống5,6%.

Câu 60: Đáp án D.

- Thay vào công thức ta được: $40 = 32 + 48.(0,9)^t \Rightarrow t \approx 17$

Câu 61: Đáp án D.

Thay vào công thức ta được: $37 = 32 + 48.(0,9)^t \Rightarrow t \approx 21,5$

TỔNG HỢP

Câu 62: Đáp án D.

Ta có: $\begin{cases} k.a^2 = 3\% \\ k.a^5 = 10\% \end{cases}$

Ta cần tìm t sao cho $k.a^t = 20\%$

Từ (1) $(1) \Rightarrow k = \frac{3\%}{a^2}$ và $a^3 = \frac{10}{3} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{10}{3}}$

$\Rightarrow \frac{3\%}{a^2}.a^t = 20\% \Rightarrow a^{t-2} = \frac{20}{3} \Rightarrow t - 2 = \log_a \frac{20}{3} \Rightarrow t = 2 + \log_{\sqrt[3]{\frac{10}{3}}} \frac{20}{3} \approx 6,7$

ĐỀ THI THỬ CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA

Câu 63: Đáp án A.

✓ **Phân tích:** Đây là bài toán đơn giản sử dụng ứng dụng của số mũ.

Do bạn đầu có một tế bào duy nhất nên:

Sau phút sao chép thứ nhất số tế bào là: $N_1 = 2$

Sau phút sao chép thứ hai số tế bào là: $N_2 = 2^2$

....

Sau phút sao chép thứ t số tế bào là: $N_t = 2^t = 100000$

$\Rightarrow t = \log_2 100000 \approx 16,61$ phút

Câu 64: Đáp án A.

✓ ***Phân tích:*** Do đề đã cho công thức tổng quát và có dữ kiện là sau hai tháng số tài khoản hoạt động là 108 160 người. Do đó thay vào công thức tổng quát ta sẽ tìm được A. Khi đó: $A(1+0.04)^2 = 108160 \Leftrightarrow A = 100000$.

Khi đó công việc của ta chỉ là tìm x sao cho $100000(1+0.04)^2 = 194790$

$\Leftrightarrow x = \log_{(1+0.04)} \dfrac{194790}{100000} \approx 17$ hay 1 năm 5 tháng.

Câu 65 (Hoang mạc Sahara): Đáp án A.

Giả sử $f(t) = \Delta S = (t^2 - 2t - 1).e^{-2t+3}$

$$f'(t) = (2t-2).e^{-2t+3} - 2(t^2-2t-1).e^{-2t+3}$$

$$f'(t) = (-2t^2+6t).e^{-2t+3}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow -2t^2+6t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=3 \end{array}\right.$$

Ta thấy max f(t) = f(3) = 0,10

Câu 66: Đáp án C.

Ta có: $p+1 = 2^{756839} \Rightarrow \log(p+1) = 756839.\log 2 \approx 227823,68$

$\Rightarrow p+1 \approx 10^{227823,68} \Rightarrow 10^{227823} < p+1 < 10^{227824}$

Vậy viết p trong hệ thập phân có 227824 số.

Câu 67: Đáp án A.

✓ ***Phân tích:*** Do đề đã cho công thức tổng quát và có dữ kiện là sau hai tháng số tài khoản hoạt động là 108 160 người. Do đó thay vào công thức tổng quát ta sẽ tìm được A. Khi đó: $A(1+0.04)^2 = 108160 \Leftrightarrow A = 100000$.

Khi đó công việc của ta chỉ là tìm x sao cho $100000(1+0.04)^x = 250000$

$\Leftrightarrow x = \log_{1+0,04} \dfrac{250000}{100000} \approx 23$ tháng hay 1 năm 11 tháng.

Câu 68: Đáp án B.

✓ <u>**Phân tích:**</u> Đây là một bài toán ứng dụng số mũ khá đơn giản. Tuy nhiên vì có các biến m,n nện quý độc giả dễ bị bối rối khi thực hiện bài toán. Ta có như sau: Năm 1999 thể tích khí CO_2 là:

$$V_1 = V + V.\frac{m}{100} = V\left(1+\frac{m}{100}\right) = V.\frac{m+100}{100}$$

Năm 2000, thể tích khí CO_2 là: $V_2 = V\left(1+\dfrac{m}{100}\right)^2 = V\left(\dfrac{1+100}{100}\right)^2 \ldots$

Vậy ta có quy luật nên sẽ nhẩm nhanh như sau: từ năm 1998 đến 2016 là 18 năm, trong đó 10 năm đầu chỉ số tăng là $m\%$, 8 năm sau chỉ số tăng là $n\%$. Vậy thể tích sẽ là:

$$V_{2016} = V\left(\frac{m+100}{100}\right)^{10}.\left(\frac{n+100}{100}\right)^{8} = V.\frac{(m+100)^{10}(n+100)^{8}}{10^{36}}$$. Đáp án B.

Câu 69: Đáp án C.

✓ **Phân tích:** Nhìn qua bài toán nhiều bạn sẽ thấy khó, không có phương hướng

Tuy nhiên nếu phân tích kỹ cùng với kiến thức liên quan đến số mũ ta hoàn toàn có thể tìm ra lời giải.

Nguyên tắc để tìm xem số này có bao nhiêu chữ số ta cần đưa về dạng = 10^x (có x chữ số)

Tuy nhiên ở đây là 2^x

Vì vậy buộc ta phải kẹp giữa các số mũ của 10.

✓ **Lời giải:** ta có như sau:

$10^{22300000} < (10^3)^{7420728} < 1024^{7420728} = (2^{10})^{7420728} < 2^{74207280} < 2^{74207281} - 1 < 2^{74207281} <$

$(2^9.2^4)^{5708254} \le (5^4.2^4)^{5708254} < 10^{22900000}$

Vậy có 22 triệu số.

Câu 70: Đáp án B.

- Phương pháp: Số chữ số cần dùng khi viết số A trong hệ thập phân là $[\log A]+1$ với $[x]$ là số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng x.

  Tổng quát: Số chữ số cần dùng khi viết số A trong hệ nhị phân là $[\log_n A]+1$.

- Cách giải: Dựa vào 2 kết quả trên ta có:

  $m = \left[\log 2^{30}\right]+1 = [30\log 2]+1 = 10$

  $n = \left[\log_2 30^2\right]+1 = [2\log_2 30]+1 = 10$

  $\Rightarrow m+n = 20$

Câu 71: Đáp án A.

Tỉ lệ khí CO_2 trong không khí năm 2016 là: $\dfrac{358}{10^6}\times(1+0,4\%)^{22} \approx 3,91\times10^{-4}$

Câu 72: Đáp án A.

Độ hiệu quả của thuật toán là $E(n)=\frac{n}{P(n)}=\frac{n}{\log_2 n}$ tỉ lệ với tốc độ thực thi chương trình

Gọi t là thời gian để chạy chương trình và k là hằng số tỉ lệ. Khi đó $\frac{n}{\log_2 n}=k.t$

- Với $n=300\Rightarrow\frac{300}{\log_2 300}=k.t_t\Leftrightarrow k=\frac{300}{0,02.\log_2 300}$

Với $n=90000\Rightarrow\frac{90000}{\log_2 90000}=k.t_s\Rightarrow t_s=\frac{90000}{k.\log_2 90000}=3s$

Câu 73: Đáp án A.

- **Phương pháp:** $e^x=a\Rightarrow x=\ln a$
- **Cách giải:**

+ Pin nạp được 90% tức là $Q(t)=Q_0.0,9$

$\rightarrow Q(t)=Q_0.0,9=Q_0\left(1-e^{\frac{-3t}{2}}\right)\Rightarrow e^{\frac{-3t}{2}}=0,1\Rightarrow\frac{-3t}{2}=\ln 0,1$

$\Rightarrow t\approx 1,54h$

Câu 74: Đáp án D.

Từ dữ kiện đề bài suy ra số thóc ở ô thứ n sẽ là 2^{n-1} hạt. Vậy tổng số thóc từ ô 1 đến ô thứ n là $1+2+2^2+2^3+...+2^{n-1}=\frac{2^n-1}{2-1}=2^n-1$ với $1\le n\le 64, n\in\mathbb{R}$

Để số hạt thóc lớn hơn 1 triệu thì $2^n-1>1000000\Leftrightarrow 2^n>1000001$

$n>\log_2 1000001\approx 19,93157$. Vậy $n=20$

✓ **Nhớ:** Công thức sử dụng bên cạnh là công thức tính tổng cấp số nhân.

CHUYÊN BIÊN HÒA – HÀ NAM – LẦN 1

Câu 75: Đáp án B.

Theo đề bài, mức sử dụng của nhà ông A đang ở bậc thứ $\left[\frac{847}{10}\right]=84$. Xét cấp số nhân $u_n, n\in\mathbb{N}^*, n\le 84$ được xác định bởi: $\begin{cases}u_1=500\\ q=1+0.025=1.025\end{cases}$. Khi đó, số tiền ông A phải trả khiông sử dụng hết 847 K.W điện là 10 lần tổng tất cả các số hạng của cấp số nhân trên và số tiền 7K.W đang ở bậc thứ 84, tức là:

$$10S_{84}=5000.\frac{(1.025)^8 5-1}{1.025-1}+7.500.(1.025)^8=1419455,83$$

Phần 4:

TÍCH PHÂN ỨNG DỤNG

ỨNG DỤNG CASIO TRONG TÍNH TÍCH PHÂN

Ví dụ 1: Cho tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4 x dx=a\pi+b$. Tính $A=16a+2b$

A. 1 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 7

Giải:

✓ Nhập tích phân vào máy tính rồi tính lưu kết quả vào A bằng cách **SHIFT STO A**.

✓ Ấn **MODE 5 1** (giải hệ 2 ẩn) rồi nhập: $\begin{cases} a\pi+b=A \\ 16a+2b=k \end{cases}$ với k là một trong 4 đáp án. Nếu giải hệ ra kết quả a, b là số đẹp thì đó chính là đáp án của đề. Ta thấy với $k=1$ thì $a=\frac{3}{32},\ b=-\frac{1}{4}$ còn lại $k=3,\ k=4,\ k=7$ thì ra số xấu.

✓ Vậy đáp án là A.

Ví dụ 2: Cho tích phân: $\int_0^{\pi} x(x+\sin x)dx=a\pi^3+b\pi$. Tính $S=a^2+b^2$

A. $\frac{10}{7}$ **B.** $\frac{10}{9}$ **C.** $\frac{10}{3}$ **D.** $\frac{10}{11}$

Giải:

✓ Nhập tích phân vào máy tính rồi tính lưu kết quả vào A bằng cách **SHIFT STO A.**

✓ Ta có hệ: $\begin{cases} a\pi^3+b\pi=A \\ a^2+b^2=k \end{cases}$ với k là một trong 4 đáp án. Nếu ra kết quả a, b là số đẹp thì đó chính là đáp án của đề.

✓ Hệ tương đương $\begin{cases} a=\dfrac{A-b\pi}{\pi^3} \\ \left(\dfrac{A-b\pi}{\pi^3}\right)^2+b^2=k \end{cases}$.

✓ Thử ta thấy với $k=\frac{10}{9}$ ta nhập $\left(\frac{A-X\pi}{\pi^3}\right)^2+X^2=\frac{10}{9}$ vào máy tính rồi ấn **SHIFT SOLVE** tìm nghiệm ta được $X=1$ là số đẹp còn lại đáp án A, C, D cho ra X số xấu.

✓ Vậy đáp án là B.

Ví dụ 3: Cho $\int \frac{x+2}{x(x-2)(x+5)}dx = \int\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{x+5}\right)dx$. Tính $S = a+2b+3c$

A. $\frac{81}{25}$ B. $\frac{10}{67}$ C. $\frac{4}{37}$ D. $\frac{4}{35}$

Giải:

- Ta có: $\begin{cases} a = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x+2)}{x(x-2)(x+5)} = -\frac{1}{5} \\ b = \lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)(x+5)} = \frac{2}{7} \\ c = \lim\limits_{x\to -5}\frac{(x+2)(x+2)}{x(x-2)(x+5)} = -\frac{3}{35} \end{cases} \Rightarrow a+2b+3c = \frac{4}{35}$. Chọn D.

SỬ DỤNG CASIO ĐỂ TÍNH TÍCH PHÂN CÓ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Câu 1: Tính $I = \int\limits_0^2 |x^2-4x+3|dx$

A. 2 B. 4 C. 7 D. 5

Giải:

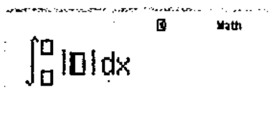
Chọn A.

Sử dụng Casio như sau:

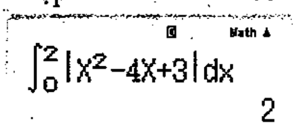
Bấm 

Sau đó bấm Shift Hyp  

Ta được màn hình như sau:



Nhập biểu thức hàm số vào ta được:



Vậy giá trị của tích phân trên là 2.

BÀI TOÁN ĐỔI BIẾN

Câu 1: Biết $\int_0^1 f(x)dx=2$ và $f(x)$ là hàm số lẻ. Khi đó $I=\int_{-1}^0 f(x)dx$ có giá trị bằng:

A. $I=1$ **B.** $I=0$ **C.** $I=-2$ **D.** $I=2$

Câu 2: Cho $\int_{-2}^2 f(x)dx=1, \int_{-2}^4 f(x)dx=-4$. Tính $I=\int_2^4 f(y)dy$.

A. $I=-5$ **B.** $I=-3$ **C.** $I=3$ **D.** $I=5$

Câu 3: Cho $\int_{-1}^5 f(x)dx=5, \int_4^5 f(t)dt=-2$ và $\int_{-1}^4 g(u)du=\frac{1}{3}$. Tính $\int_{-1}^4 (f(x)+g(x))dx$ bằng:

A. $\frac{8}{3}$ **B.** $\frac{10}{3}$ **C.** $\frac{22}{3}$ **D.** $\frac{-20}{3}$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;2]$, thỏa mãn $f(1)=0; f(2)=2, \int_1^2 f(x)dx=1$.

Khi đó $\int_1^2 x.f'(x)dx$ bằng:

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 8

Câu 5: Cho f là hàm số liên tục trên $[a;b]$ thỏa $\int_a^b f(x)dx=7$. Tính $I=\int_a^b f(a+b-x)dx$.

A. $I=7$ **B.** $I=a+b-7$ **C.** $I=7-a-b$ **D.** $I=a+b+7$

Câu 6: Cho $f(x)$ là hàm số chẵn và $\int_{-2}^0 f(x)dx=a$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int_0^2 f(x)dx=-a$ **B.** $\int_{-2}^2 f(x)dx=0$ **C.** $\int_{-2}^2 f(x)dx=2a$ **D.** $\int_0^{-2} f(x)dx=a$

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ thỏa mãn $\int_1^2 f'(x).dx=10$ và

$\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln 2$. Biết rằng $f(x)>0 \ \forall x\in[1;2]$. Tính $f(2)$.

A. $f(2)=10$ **B.** $f(2)=-20$ **C.** $f(2)=-10$ **D.** $f(2)=20$

Câu 8: Cho $y=f(x)$ là hàm số chẵn, có đạo hàm trên đoạn $(-6;6)$, biết rằng $\int_{-1}^2 f(x)dx=8$

và $\int_1^3 f(-2x)dx=3$. Tính $I=\int_{-1}^6 f(x)dx$.

A. $I=2$ **B.** $I=5$ **C.** $I=11$ **D.** $I=14$

Câu 9: Cho $\int_1^4 f(x)dx = 9$. Giá trị của tích phân $I = \int_0^1 f(3x+1)dx$ là:

A. $I = 9$ **B.** $I = 3$ **C.** $I = 1$ **D.** $I = 27$

Câu 10: Giả sử hàm số f có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = 6$, $\int_0^1 xf'(x)dx = 5$. Khi đó $\int_0^1 f(x)dx$ bằng:

A. 1 **B.** -1 **C.** 11 **D.** 3

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ thỏa mãn $\int_1^2 f'(x)dx = 15$ và $\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln 2$. Biết rằng $f(x) > 0$, $\forall x \in [1;2]$. Tính $f(2)$.

A. $f(2) = 10$ **B.** $f(2) = -20$ **C.** $f(2) = -10$ **D.** $f(2) = 30$

Câu 12: Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn, có đạo hàm trên đoạn $(-6;6)$, biết rằng $\int_{-1}^2 f(x)dx = 10$ và $\int_1^3 f(-2x)dx = 5$. Tính $I = \int_{-1}^6 f(x)dx$.

A. $I = 2$ **B.** $I = 5$ **C.** $I = 11$ **D.** $I = 20$

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và các tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)dx = 4$ và $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}dx = 2$.

Tính tích phân $\int_0^1 f(x)dx$.

A. 6 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1

Câu 14: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên R và $\int_0^2 f(x)dx = -2$, $\int_1^3 (2x)dx = 10$. Tính giá trị của $I = \int_0^2 f(3x)dx$.

A. I=8 **B.** I=4 **C.** I=3 **D.** I=6

Câu 15: Cho $\int_{-1}^1 f(x)dx = 9$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(\cos 3x).\sin 3x dx$.

A. $I = -3$ **B.** $I = 27$ **C.** $I = 3$ **D.** $I = 9$

CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ - LẦN 2

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^2 f(x)dx = 3$. Tính $\int_{-1}^{1} f(|2x|)dx$.

A. 3. B. 6. C. $\frac{3}{2}$. D. 0.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Đáp án C.

Đặt $t=-x$ ta có $dt=-dx$ và $f(t)=-f(x)$ do $f(x)$ là hàm số lẻ. Khi đó

$$I=\int_{-1}^{0}\left[-f(t)\right].(-dt)=-\int_0^1 f(t)dt=-\int_0^1 f(x)dx=-2$$

Câu 2: Đáp án A.

$$\int_{-2}^{4} f(x)dx=\int_{-2}^{2} f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx \Leftrightarrow \int_2^4 f(x)dx=-4-1=-5 \Rightarrow \int_2^4 f(y)dy-5$$

Câu 3: Đáp án C.

$$\int_{-1}^{4} f(x)dx=\int_{-1}^{5} f(x)dx-\int_4^5 f(x)dx=7 \text{. Ta có: } \int_{-1}^{4}\left(f(x)+g(x)\right)dx=\frac{22}{3}$$

Câu 4: Đáp án C.

Ta có $\int_1^2 xf'(x)dx=\int_1^2 xd\left(f(x)\right)=xf(x)\Big|_1^2-\int_1^2 f(x)dx=2f(2)-f(1)-\int_1^2 f(x)dx=3.$

Câu 5: Đáp án A.

Giả sử $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

Ta có $\int_a^b f(x)dx=7 \Leftrightarrow F(x)\Big|_a^b=7 \Leftrightarrow F(b)-F(a)=7$

$$\int_a^b f(a+b-x)dx=-F(a+b-x)\Big|_a^b=-F(a)+F(b)=7.$$

Câu 6: Đáp án C.

Do $f(x)$ là hàm chẵn nên $\int_2^0 f(x)dx=-a \Rightarrow \int_{-2}^{2} f(x)dx=\int_{-2}^{0} f(x)dx-\int_2^0 f(x)dx=2a.$

Câu 7: Đáp án D.

Ta có: $\int_1^2 f'(x)dx=10=f(2)-f(1)=10 \quad (1)$

Mặt khác: $\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln 2 \Rightarrow \ln\left|f(x)\right|\Big|_1^2=\ln 2$

$$\ln\left|\frac{f(2)}{f(1)}\right| = \ln 2 \Rightarrow \left|\frac{f(2)}{f(1)}\right| = 2 \Rightarrow \frac{f(2)}{f(1)} = 2 \quad (2)\left(do\ f(x) > 0; \forall x \in [1;2]\right)$$

Từ (1) và (2), ta tính được: $f(2) = 20$

Câu 8: Đáp án D.

Đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx$ và $x = 1 \to t = 2; x = 3 \to t = 6$. Ta có:

$$3 = \int_1^3 f(-2x)dx = \frac{1}{2}\int_2^6 f(t)dt \Rightarrow \int_2^6 f(x)dx = 6$$

Vậy $I = \int_{-1}^6 f(x)dx = \int_{-1}^2 f(x)dx + \int_2^6 f(x)dx = 8 + 6 = 14$

➢ **Cách khác.**

Giả sử $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

Ta có $\int_{-1}^2 f(x)dx = 8 \Leftrightarrow F(x)\Big|_{-1}^2 = 8 \Leftrightarrow F(2) - F(-1) = 8$

Do $f(x)$ là hàm số chẵn nên $f(-2x) = f(2x)$ nên ta có $\int_1^3 f(-2x)dx = \int_1^3 f(2x)dx = 3$

Ta có $\int_1^3 f(2x)dx = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}F(2x)\Big|_1^3 = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[F(6) - F(2)\right] = 3 \Leftrightarrow F(6) - F(2) = 6$

Ta có $\int_{-1}^6 f(x)dx = F(x)\Big|_{-1}^6 = F(6) - F(-1) = \left[F(6) - F(2)\right] + \left[F(2) - F(-1)\right] = 8 + 6 = 14$

Câu 9: Đáp án B.

Đặt $t = 3x + 1 \Rightarrow dt = 3dx$. Đổi cận: $x = 0 \to t = 1; x = 1 \to t = 4$

Ta có: $I = \int_1^4 f(t)\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int_1^4 f(t)dt = \frac{1}{3}\int_1^4 f(x)dx = 3$

➢ **Cách khác.**

Giả sử $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

Ta có $\int_1^4 f(x) = 9 \Leftrightarrow F(x)\Big|_1^4 = 9 \Leftrightarrow F(4) - F(1) = 9$

Ta có $\int_0^1 f(3x+1)dx = \frac{1}{3}F(3x+1)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left[F(4) - F(1)\right] = \frac{1}{3}.9 = 3$

Câu 10: Đáp án A.

Ta có $\int_0^1 xf'(x)dx = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = 1$

Câu 11: Đáp án D.

Ta có: $\int_1^2 f'(x)dx = f(2)-f(1)=15(1)$

Mặt khác $\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln 2 \Rightarrow \ln|f(x)|\Big|_1^2 = \ln 2$

$\ln\left|\frac{f(2)}{f(1)}\right| = \ln 2 \Rightarrow \left|\frac{f(2)}{f(1)}\right| = 2 \Rightarrow \frac{f(2)}{f(1)} = 2$ (2) (do $f(x)>0; \forall x \in [1;2]$)

Từ (1) và (2), ta tính được $f(2)=30$.

Câu 12: Đáp án D.

Giả sử $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

Ta có $\int_{-1}^2 f(x)dx = 10 \Leftrightarrow F(x)\Big|_{-1}^2 = 10 \Leftrightarrow F(2)-F(-1)=10$

Do $f(x)$ là hàm số chẵn nên $f(-2x)=f(2x)$ nên ta có $\int_1^3 f(-2x)dx = \int_1^3 f(2x)dx = 5$

Ta có $\int_1^3 f(2x)dx = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{2}F(2x)\Big|_1^3 = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[F(6)-F(2)\right] = 5 \Leftrightarrow F(6)-F(2)=10$

Ta có $\int_{-1}^6 f(x)dx = F(x)\Big|_{-1}^6 = F(6)-F(-1) = \left[F(6)-F(2)\right]+\left[F(2)-F(-1)\right] = 10+10=20$

Câu 13: Đáp án A.

* Đặt $t=\tan x \Rightarrow dt = \left(1+\tan^2 x\right)dx = \frac{dt}{1+t^2} = dx$

* $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)dx = 4 \Rightarrow \int_0^1 \frac{f(t)dt}{1+t^2} = 4$

* $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2}dx + \int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{1+x^2}dx = 4+2=6$

Câu 14: Đáp án D.

Hướng dẫn: Đặt $t=2x \Rightarrow dt = 2dx$

$\Rightarrow \begin{cases} x=1, t=2 \\ x=3, t=6 \end{cases} \Rightarrow \int_1^3 f(2x)dx = \frac{1}{2}\int_2^6 f(t)dt = 10 \Rightarrow \int_2^6 f(x)dx = 20.$

Đặt $t=3x \Rightarrow dt=3dx \Rightarrow \begin{cases} x=0, t=0 \\ x=2, t=6 \end{cases} \Rightarrow I=\frac{1}{3}\int_0^6 f(t)dt=\frac{1}{3}\left[\int_0^2 f(t)dt+\int_2^6 f(t)dt\right]$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\left[\int_0^2 f(x)dx+\int_2^6 f(x)dx\right]=\frac{1}{3}(-2+20)=6$

➤ **Cách khác.**

Giả sử $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

Ta có $\int_0^2 f(x)dx=-2 \Leftrightarrow F(x)\Big|_0^2=-2 \Leftrightarrow F(2)-F(0)=-2$

$\int_1^3 f(2x)dx=10 \Leftrightarrow \frac{1}{2}F(2x)\Big|_1^3=10 \Leftrightarrow F(6)-F(2)=20 \Rightarrow F(6)-F(0)=-2+20=18$

Ta có $\int_0^2 f(3x)dx=\frac{1}{3}F(3x)\Big|_0^2=\frac{1}{3}\left[F(6)-F(0)\right]=\frac{1}{3}.18=6$

Câu 15: Đáp án C.

Đặt $u=\cos 3x \Rightarrow du=-2\sin 3xdx$. Với $x=0 \Rightarrow u=1; x=\frac{\pi}{3} \Rightarrow u=-1$

$I=-\frac{1}{3}\int_1^{-1} f(x)dx=\frac{1}{3}\int_{-1}^1 f(x)dx=\frac{1}{3}.9=3$

➤ **Cách khác.**

Giả sử $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

Ta có $\int_{-1}^1 f(x)dx=9 \Leftrightarrow F(x)\Big|_{-1}^1=9 \Leftrightarrow F(1)-F(-1)=9$

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(\cos 3x)\sin 3xdx=-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(\cos 3x)d(\cos 3x)=-\frac{1}{3}F(\cos 3x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$

$=-\frac{1}{3}\left[F(-1)-F(1)\right]=\frac{1}{3}\left[F(1)-F(-1)\right]=\frac{1}{3}.9=3.$

CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ - LẦN 2

Câu 16: Đáp án A.

Ta có: $\int_{-1}^1 \mathrm{f}|2\mathrm{x}|\mathrm{dx}=\int_{-1}^0 \mathrm{f}|2\mathrm{x}|\mathrm{dx}+\int_0^1 \mathrm{f}|2\mathrm{x}|\mathrm{dx}=\int_{-1}^0 \mathrm{f}(-2\mathrm{x})\mathrm{dx}+\int_0^1 \mathrm{f}(2\mathrm{x})\mathrm{dx}.$

$\mathrm{t}=-2\mathrm{x} \Rightarrow \mathrm{dt}=-2\mathrm{dx} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x}=-1, \mathrm{t}=2 \\ \mathrm{x}=0, \mathrm{t}=0 \end{cases} \Rightarrow \int_{-1}^0 \mathrm{f}(-2\mathrm{x})\mathrm{dx}=-\frac{1}{2}\int_2^0 \mathrm{f}(\mathrm{t})\mathrm{dt}=\frac{1}{2}\int_0^2 \mathrm{f}(\mathrm{t})\mathrm{dt}=\frac{1}{2}\int_0^2 \mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx}$

$\mathrm{t}=2\mathrm{x} \Rightarrow \mathrm{dt}=2\mathrm{dx} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x}=1, \mathrm{t}=2 \\ \mathrm{x}=0, \mathrm{t}=0 \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 \mathrm{f}(2\mathrm{x})\mathrm{dx}=\frac{1}{2}\int_0^2 \mathrm{f}(\mathrm{t})\mathrm{dt}=\frac{1}{2}\int_0^2 \mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx}$

$$\int_{-1}^{1} f|2x|dx = \int_{-1}^{0} f|2x|dx + \int_{0}^{1} f|2x|dx = \int_{-1}^{0} f(-2x)dx + \int_{0}^{1} f(2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{2} f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} f(x)dx = \int_{0}^{2} f(x)dx = 3.$$

CÁC KỸ THUẬT TÍNH TÍCH PHÂN

Phương pháp hệ số bất định: Khi mẫu có thể phân tích thành nhân tử.

Câu 1: Cho $\dfrac{1}{(x+2)(x-5)(x+4)} = \dfrac{A}{(x+2)} + \dfrac{B}{(x-5)} + \dfrac{C}{(x+4)}$

Khi đó tổng $S = A + B + C$ bằng:

A. $-\dfrac{1}{18}$ **B.** 0 **C.** $\dfrac{1}{14}$ **D.** $-\dfrac{1}{63}$

Câu 2: Cho $\dfrac{1}{x(x-3)(x+3)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-3} + \dfrac{C}{x+3}$. Khi đó $S = 2A + B - C$ bằng:

A. $-\dfrac{1}{18}$ **B.** 0 **C.** $\dfrac{1}{18}$ **D.** $-\dfrac{2}{9}$

Câu 3: Cho các hằng số $A, B, C \in R$ thỏa mãn: $\dfrac{2}{x^3+3x^2+2x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{x+2}$.

Khi đó $P = A.B.C$ bằng:

A. 2 **B.** $\dfrac{1}{2}$ **C.** 1 **D.** -2

KỸ THUẬT ĐỔI BIẾN

Kinh nghiệm khi giải các bài *toán tích phân có căn ta thường đổi biến t bằng căn đó, rồi sau đó biểu diễn các biểu thức của x theo t, đồng thời đổi dx theo dt nữa,* bài *toán trở về một bài toán mới của biến t.*

Câu 4: Cho $I = \int x\sqrt{x^2+3}dx = \dfrac{\sqrt{(x^2+3)^b}}{a} + C$. Tính $S = \log_b^2 a + \log_a b + 2016$?

A. 2018 **B.** 2020 **C.** 2025 **D.** 2030

Câu 5: Cho $I = \int \dfrac{dx}{\sqrt{2x-1}+4} = \sqrt{2x-1} - \ln\left(\sqrt{2x-1}+4\right)^n + C$. Tính $S = Sin(\dfrac{n.\pi}{8})$

A. $\dfrac{1}{2}$ **B.** 0 **C.** 1 **D.** -1

Câu 6: Cho $A=\int x^5\sqrt{1+x^2}dx=at^7+bt^5+ct^3+C$, với $t=\sqrt{1+x^2}$. Tính $A=a-b-c$:

A. $\frac{12}{79}$ B. $\frac{95}{103}$ C. $\frac{22}{105}$ D. $\frac{48}{109}$

Câu 7: Cho $I=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx=a+\ln b-\ln\sqrt{3}$. Tính $\frac{11}{2}(a+b-3)$:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 8: Cho $I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}=2\ln\left(\frac{2+\sqrt{a}}{1+\sqrt{b}}\right)$. Tính $A=a+b$:

A. 3 **B.** 2 **C.** 5 **D.** 7

HÀM LN

Với hàm ln ta sẽ sử dụng phép tính đạo hàm $\ln x'=\frac{1}{x}$

Khi đó việc áp dụng vào bài toán sẽ dễ dàng hơn.

Các ví dụ minh họa

Câu 9: $\int_1^e\frac{1+\ln^4 x}{x}dx$

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{7}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{6}{5}$

Câu 10 (B – 2010): $I_1=\int_1^e\frac{\ln x}{x(2+\ln x)^2}dx$

A. $-\frac{1}{3}+\ln\frac{3}{2}$ B. $\frac{1}{3}+\ln\frac{3}{2}$ C. $\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{2}$ D. $-\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{2}$

Câu 11: $I=\int_1^e\frac{\sqrt{1+3\ln x}\ln x}{x}dx=\frac{a}{b}$ (B – 2004) biết a, b tối giản. Chọn nhận định đúng?

A. a + b = 240 **B.** a > b C. 2b – a = 154 **D.** b = 134

Câu 12: $I=\int_e^{e^3}\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx=4-2\sqrt{2}+2\ln\frac{(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{b}}$. Hỏi nhận định đúng?

A. a + b = 4 B. a.b = 6 C. a – b = 1 D. 2a – b = 3

Câu 13: $I=\int_1^{\sqrt{e}}\frac{3-2\ln x}{x\sqrt{1+2\ln x}}dx=\frac{10\sqrt{a}-b}{3}$. Chọn nhận định đúng?

A. a + b = 9 B. a.b = 20 C. a – b = -9 D. b = 11

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Đáp án B.

$$\frac{1}{(x+2)(x-5)(x+4)}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x-5)}+\frac{C}{(x+4)}$$

$$\Rightarrow A(x-5)(x+4)+B(x+2)(x+4)+C(x+2)(x-5)=1$$

$$+)\, x=-2\Rightarrow -14A=1\Rightarrow A=-\frac{1}{14}$$

$$+)\, x=5\Rightarrow 63B=1\Rightarrow B=\frac{1}{63}$$

$$+)\, x=-4\Rightarrow 18C=1\Rightarrow C=\frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow A+B+C=0$$

✓ **Bình luận:** Bài *toán này chúng ta sẽ tách phân số ở mẫu số có tích thành các phân số đơn giản hơn. Để làm được điều này ta dùng phương pháp đông nhất hệ số.*

➢ **Cách khác.**

Ta có $\frac{1}{(x+2)(x-5)(x+4)}=\frac{1}{2}.\frac{(x+4)-(x+2)}{(x+2)(x-5)(x+4)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x+2)(x-5)}-\frac{1}{(x+4)(x-5)}\right]$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{7}.\frac{(x+2)-(x-5)}{(x+2)(x-5)}-\frac{1}{9}.\frac{(x+4)-(x-5)}{(x+4)(x-5)}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{7}\left(\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x+2}\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x+4}\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{14}.\frac{1}{x+2}+\frac{1}{63}.\frac{1}{x-5}+\frac{1}{18}.\frac{1}{x+4}$$

Câu 2: Đáp án D.

$$\frac{1}{x(x-3)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+3}\Rightarrow 1=A(x-3)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-3)$$

$$+)\, x=0\Rightarrow -9A=1\Rightarrow A=-\frac{1}{9}$$

$$+)\, x=3\Rightarrow 18B=1\Rightarrow B=\frac{1}{18}$$

$$+)\, x=-3\Rightarrow 18C=1\Rightarrow C=\frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow 2A+B-C=\frac{-2}{9}$$

Câu 3: Đáp án D.

$$A(x+1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x+1)=2$$

$$+)\ x=0\Rightarrow A=1$$

$$+)\ x=-1\Rightarrow B=-2$$

$$+)\ x=-2\Rightarrow C=1$$

$$\Rightarrow ABC=-2$$

KỸ THUẬT ĐỔI BIẾN

Câu 4: Đáp án A.

Đặt $t=\sqrt{x^2+3} \Rightarrow t^2=x^2+3 \Rightarrow 2tdt=2xdx \Rightarrow xdx=tdt$.

Suy ra $I=\int t.tdt=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+C=\frac{(\sqrt{x^2+3})^3}{3}+C$

Vậy $S=\log_3^2 3+\log_3 3+2016=2018$

✓ **Bình luận:** Khi có căn $\sqrt{x^2+3}$ ta sẽ tìm cách đặt $t=\sqrt{x^2+3}$. Tiếp đó ta biến đổi các phần còn lại theo t, kể cả dx cũng biểu diễn theo dt. $xdx=tdt$

Câu 5: Đáp án C.

Đặt $t=\sqrt{2x-1} \Rightarrow t^2=2x-1 \Rightarrow tdt=dx$

$$\Rightarrow I=\int\frac{tdt}{t+4}=\int\left(1-\frac{4}{t+4}\right)dt=t-4\ln|t+4|+C=\sqrt{2x-1}-\ln\left(\sqrt{2x-1}+4\right)^4+C$$

Vậy n = 4 vậy $S=Sin(\frac{n.\pi}{8})=1$

✓ **Bình luận:** Việc xuất hiện $\sqrt{2x-1}$ ta đặt $t=\sqrt{2x-1}$, sau đó vẫn như thói quen, ta biểu diễn dx theo dt: $tdt=dx$

Câu 6: Đáp án C.

Đặt $t=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow x^2=t^2-1 \Rightarrow xdx=tdt$

$$A=\int\left(t^2-1\right)^2t^2dt=\int\left(t^6-2t^4+t^2\right)dt=\frac{t^7}{7}-\frac{2}{5}t^5+\frac{t^3}{3}\Bigg|+C \Rightarrow a=\frac{1}{7};b=-\frac{2}{5};c=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow a-b-c=\frac{22}{105}$$

Câu 7: Đáp án A.

Đặt $t=\sqrt{1+x^2} \Rightarrow t^2=1+x^2 \Rightarrow tdt=xdx$ và $x:1\to\sqrt{3}$ thì $t:\sqrt{2}\to 2$

Khi đó $I=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}xdx=\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{t}{t^2-1}.tdt=\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=\int_{\sqrt{2}}^{2}\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt$

$$=\int_{\sqrt{2}}^{2}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\right]dt=\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2}=2-\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)-\frac{1}{2}\ln 3$$

$$\Rightarrow a=2-\sqrt{2};b=\sqrt{2}+1 \Rightarrow \frac{11}{2}(a+b-3)=0$$

✓ **Bình luận:** Việc xuất hiện $\sqrt{1+x^2}$ ta đặt $t=\sqrt{1+x^2}$, ta tiếp tục công việc biểu diễn $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}x$ và dồn về ẩn t, có xdx = tdt. Kinh nghiệm cho thấy khi có căn bậc 2 ta cứ đặt căn đó bằng một biến t rồi kiên trì biến đổi là giải được bài toán.

Câu 8: Đáp án C.

Đặt $t=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}$

$$\Rightarrow dt=\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{x+3}}\right)dx=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}}{2\sqrt{(x+1)(x+3)}}dx=t.\frac{dx}{2\sqrt{(x+1)(x+3)}}\Leftrightarrow\frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}=\frac{2dt}{t}$$

Và đổi cận $x:0\to 1$ thì $t:1+\sqrt{3}\to 2+\sqrt{2}$.

Khi đó: $I_4=2\int\limits_{1+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{2}}\frac{dt}{t}=2\ln|t|\Big|_{1+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{2}}=2\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\right)\Rightarrow a=2;b=3$

HÀM LN

Câu 9: Đáp án D.

Đặt $u=\ln x\Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$

Đổi cận

x	1	e
u	0	1

Ta có: $\int\limits_1^e\frac{1+\ln^4 x}{x}dx=\int\limits_0^1(1+u^4)du=\left(u+\frac{u^5}{5}\right)\Big|_0^1=1+\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$

Câu 10: Đáp án A.

Đặt $t=2+\ln x\Rightarrow\begin{cases}dt=\dfrac{dx}{x}\\ \ln x=t-2\end{cases}$

Và $x:1\to e$ thì $t:2\to 3$

$$\Rightarrow I_1=\int\limits_2^3\frac{t-2}{t^2}dt=\int\limits_2^3\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}\right)dt=\left(\ln t+\frac{2}{t}\right)\Big|_2^3=-\frac{1}{3}+\ln\frac{3}{2}$$

✓ **Kinh nghiệm**: Khi có biểu thức $2+\ln x$ ta sẽ đặt $t=2+\ln x$, rồi biến đổi các biểu thức còn lại theo biến t. Biểu diễn dx theo dt cụ thể như trên: $\frac{dx}{x}=dt$

Câu 11: Đáp án C.

Đặt $t=\sqrt{1+3\ln x}\Rightarrow t^2=1+3\ln x\Rightarrow\begin{cases}2tdt=\dfrac{3dx}{x}\\ \ln x=\dfrac{t^2-1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dx}{x}=\dfrac{3}{2}dt\\ \ln x=\dfrac{t^2-1}{3}\end{cases}$ và $x:1\to e$ thì $t:1\to 2$

$$\Rightarrow I_2 = \int_1^2 t.\frac{t^2-1}{3}.\frac{2}{3}tdt = \frac{2}{9}\int_1^2 \left(t^4 - t^2\right)dt = \frac{2}{9}\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{116}{135}$$

✓ **Kinh nghiệm:** Đặt cả biểu thức $\sqrt{1+3\ln x}$ rồi sau đó biến đổi phần còn lại theo t, cả dx theo dt.

Câu 12: Đáp án B.

Đặt $t = \sqrt{1+\ln x} \Rightarrow t^2 = 1+\ln x \Rightarrow \begin{cases} 2tdt = \dfrac{dx}{x} \\ \ln x = t^2 - 1 \end{cases}$ và cận $t: \sqrt{2} \to 2$

$$\Rightarrow I = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{t}{t^2-1}.2t.dt = 2\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{t^2}{t^2-1}dt = 2\int_{\sqrt{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right)dt = 2\left(t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^2 = 4 - 2\sqrt{2} + 2\ln\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{3}}$$

Tìm được a = 2, b = 3 nên B đúng.

Câu 13: Đáp án D.

Đặt $t = \sqrt{1+2\ln x} \Rightarrow t^2 = 1 + 2\ln x \Rightarrow \begin{cases} tdt = \dfrac{dx}{x} \\ 2\ln x = t^2 - 1 \end{cases}$

Và cận $t: 1 \to \sqrt{2}$

$$\Rightarrow I = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{3 - \left(t^2-1\right)}{t}.tdt = \int_1^{\sqrt{2}} \left(4 - t^2\right)dt = \left(4t - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2} - 11}{3}$$

CÁC BÀI TOÁN ĐƯỢC TRÍCH RA TỪ ĐỀ THI THỬ 2018

Câu 1: Tính tích phân $I = \int_1^5 \frac{dx}{x.\sqrt{3x+1}}$ được kết quả $I = a\ln 3 + b\ln 5$. Giá trị $a^2 + ab + 3b^2$ là:

A. 4 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 5

Câu 2: Cho biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx = a\pi + b\ln 2$ với a và b là các số hữu tỉ. Khi đó $\frac{a}{b}$ bằng:

A. $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{3}{8}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{3}{4}$

Câu 3: Biết $\int_1^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}dx = \frac{2}{3}\left(a - \sqrt{b}\right)$, với a, b là các số nguyên dương. Mệnh đề nào sau đây đúng.

A. $a = 2b$ **B.** $a < b$ **C.** $a = b$ **D.** $a = 3b$

Câu 4: Tính tích phân $\int_1^4 \frac{1}{2x+1}dx = \frac{1}{m}\ln a$ (trong đó m, a là những số nguyên). Khi đó tích $a.m$ bằng:

A. 0 **B.** -1 **C.** 3 **D.** 6

Câu 5: Tính $I = \int_0^2 \min\left\{1; x^2\right\} dx$.

A. $I = 2$ **B.** $I = \frac{8}{3}$ **C.** $I = 0$ **D.** $I = \frac{4}{3}$

Câu 6: Biết $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = a\ln 2 + b\ln 3$, với a,b là các số nguyên. Tính $S = a + b$.

A. $S = -3$ **B.** $S = -2$ **C.** $S = 1$ **D.** $S = 0$

Câu 7: Biết $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)(2x+1)} = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = 1$ **B.** $S = 0$ **C.** $S = 2$ **D.** $S = -3$

Câu 8: Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn, có đạo hàm trên đoạn $(-6;6)$, biết rằng $\int_{-1}^2 f(x)dx = 8$ và $\int_1^3 f(-2x)dx = 3$. Tính $I = \int_{-1}^6 f(x)dx$.

A. $I = 2$ **B.** $I = 5$ **C.** $I = 11$ **D.** $I = 14$

Câu 9: Biết rằng $\int_0^1 3e^{\sqrt{1+3x}}dx = \frac{a}{5}e^2 + \frac{b}{3}e + c$ $(a,b,c \in \mathbb{R})$. Tính $T = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}$

A. $T = 9$ **B.** $T = 10$ **C.** $T = 5$ **D.** $T = 6$

Câu 10: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \sqrt{1+\ln^2 x}.\frac{\ln x}{x}$ và $F(1) = \frac{1}{3}$.

Tính $\left[3F(e)\right]^2$

A. 24 **B.** 8 **C.** 3 **D.** 1

Câu 11: Cho tích phân $\int_0^1 \frac{x^2 + e^x + x^2e^x}{1+e^x}dx = \ln(1 + a.e) + \ln b + c$ với $a,b,c \in \mathbb{Q}$. Khi đó giá trị của $a + 2b + 3c$ là:

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 6

Câu 12: Cho biết $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx = a\pi + b\ln 2$ với a và b là các số hữu tỉ. Khi đó tỉ số $\frac{a}{b}$ bằng:

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{1}{2}$

Câu 13: Có bao nhiêu giá trị a trong đoạn $\left[\frac{\pi}{4};2\pi\right]$ thỏa mãn $\int\limits_0^a \frac{\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx=\frac{2}{3}$.

A. 3 B. 2 C. 1 D. 4

Câu 14: Kết quả tích phân $I=\int\limits_0^1 (2x+3)e^x dx$ được viết dưới dạng $I=ae+b$, với a, b là các số hữu tỷ. Tìm khẳng định đúng.

A. $a^3+b^3=28$ B. $ab=3$ C. $a+2b=1$ D. $a-b=2$

Câu 15: Nếu $\int\limits_0^a xe^x dx=1$ thì giá trị của a bằng:

A. 0 B. 1 C. 2 D. e

Câu 16: Nếu $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^n x\cos x dx=\frac{1}{384}$ thì giá trị của n bằng:

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

Câu 17: Biết $\int\limits_0^2 \left(e^x+\frac{3}{x+1}\right)dx=e^2+a\ln 3+b$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tìm $T=a+b$

A. $T=-2$ B. $T=0$ C. $T=-1$ D. $T=2$

Câu 18: Cho $0<a<\frac{\pi}{2}$ và $\int\limits_0^a x\tan x dx=m$. Tính $I=\int\limits_0^a \left(\frac{x}{\cos x}\right)^2$ theo a và m.

A. $I=a\tan a-2m$ B. $I=-a^2\tan a+m$ C. $I=a^2\tan a-2m$ D. $I=a^2\tan a-m$

Câu 19: Biết $I=\int\limits_2^3 \frac{x^2-3x+2}{x^2-x+1}dx=a\ln 7+b\ln 3+c$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính $T=a+2b^2+3c^3$.

A. $T=4$ B. $T=6$ C. $T=3$ D. $T=5$

Câu 20: Biết $\int\limits_1^3 \frac{1}{e^x-1}dx=a+\ln b\,(a,b\in\mathbb{R},b>0)$. Tính be^{a+2}

A. e^3+1 B. e^3-1 C. e^2-e+1 D. e^2+e+1

Câu 21: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để bất phương trình có nghiệm đúng với mọi giá trị thực của x: $\int\limits_0^x \left(\frac{1}{2}t+2(a+1)\right)dx\geq -1$

A. $a\in\left[-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right]$ B. $a\in[0;1]$ C. $a\in[-2;-1]$ D. $a\leq 0$

Câu 22: Giả sử $\int_1^2 \frac{4\ln x+1}{x}dx = a\ln^2 2 + b\ln 2$, với a, b là các số hữu tỷ. Khi đó, tổng $4a+b$ bằng:

A. 3 **B.** 5 **C.** 7 **D.** 9

Câu 23: Biết $\int_0^1 \frac{x^3dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{a+1}\ln 2$. Tính a.

A. $a=1$ **B.** $a=2$ **C.** $a=0$ **D.** $a=4$

Câu 24: Giả sử $\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3}dx = a\ln 5 + b\ln 3$, với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính giá trị

A. -6 **B.** 8 **C.** -5 **D.** -4

Câu 25: Cho $\int_1^2 \ln(9-x^2)dx = a\ln 5 + b\ln 2 + c$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $S=|a|+|b|+|c|$.

A. $S=34$ **B.** $S=13$ **C.** $S=18$ **D.** $S=26$

Câu 26: Cho $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x\sin^2 x} = a+b\sqrt{3}$ với a,b là số hữu tỉ. Tính giá trị của $a-b$.

A. $-\frac{1}{3}$ **B.** $-\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{2}{3}$

Câu 27: Biết $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}dx = a\ln 2 - b\ln 3$, trong đó $a,b\in\mathbb{Q}$. Khi đó a và b đồng thời là 2 nghiệm của phương trình nào dưới đây?

A. $x^2-4x+3=0$ **B.** $x^2-2x+\frac{3}{4}=0$ **C.** $x^2-x-\frac{3}{4}=0$ **D.** $x^2-2x-3=0$

Câu 28: Giả sử $\int_3^5 \frac{dx}{x^2-x} = a\ln 5 + b\ln 3 + c\ln 2$. Tính giá trị của biểu thức $S=-2a+b+3c^2$.

A. $S=3$ **B.** $S=6$ **C.** $S=0$ **D.** $S=-2$

Câu 29: Với các số nguyên a,b thỏa mãn $\int_1^2 (2x+1)\ln x\,dx = a+\frac{3}{2}+\ln b$. Tính tổng $P=a+b$

A. $P=27$ **B.** $P=28$ **C.** $P=60$ **D.** $P=61$

Câu 30: Biết $\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+4x+7}dx = a\ln\sqrt{12} + b\ln\sqrt{7}$, với a, b là các số nguyên. Tính tổng $a+b$ bằng:

A. -1 **B.** 1 **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 0

Câu 31: Biết $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)(2x+1)} = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$. Tính $S = a+b+c$

A. $S=1$ **B.** $S=0$ **C.** $S=2$ **D.** $S=-3$

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Đáp án D.

Đặt $t=\sqrt{3x+1} \Rightarrow t^2 = 3x+1 \Rightarrow 2tdt = 3dx$. Đổi cận: $x=1 \Rightarrow t=2; x=5 \Rightarrow t=4$

Do đó $I = 2\int_2^4 \frac{dt}{t^2-1} = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Big|_2^4 = 2\ln 3 - \ln 5 \Rightarrow a=2, b=-1 \Rightarrow a^2+ab+3b^2=5$

Câu 2: Đáp án C.

Cách 1: Đặt $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx$ và $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$. Ta có:

$$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

$$I-J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx = \ln|\sin x+\cos|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\ln 2$$

Suy ra: $I = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2$. Do đó $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$

Câu 3: Đáp án A.

Đặt $t=\sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow tdt = xdx$. Đổi cận $x=1 \Rightarrow t=\sqrt{2}; x=\sqrt{3} \Rightarrow t=2$.

Khi đó $\int_1^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}dx = \int_{\sqrt{2}}^2 t^2dt = \frac{t^3}{3}\Big|_{\sqrt{2}}^2 = \frac{2}{3}\left(4-\sqrt{2}\right)$. Vậy $a=2b$.

Câu 4: Đáp án D.

Ta có: $\frac{1}{m}\ln a = \int_1^4 \frac{1}{2x+1}dx = \frac{1}{2}\left(\ln|2x+1|\right)\Big|_1^4 = \frac{\ln 9 - \ln 3}{2} = \frac{\ln 3}{2}$

Như vậy $a=3, m=2$, suy ra $m.a=6$.

Câu 5: Đáp án D.

$$I = \int_0^1 x^2dx + \int_1^2 dx = \frac{4}{3}$$

Câu 6: Đáp án C.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2-5x+6} = \int_0^1\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right)dx = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\Big|_0^1 = 2\ln 2 - \ln 3$$

Câu 7: Đáp án B.

Ta có $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)(2x+1)} = \int_1^2 \frac{-1}{x+1}dx + \int_1^2 \frac{2}{2x+1}dx = \ln 2 - 2\ln 3 + \ln 5$. Vậy $S = 0$

Câu 8: Đáp án D.

Đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx$ và $x = 1 \to t = 2; x = 3 \to t = 6$. Ta có:

$$3 = \int_1^3 f(-2x)dx = \frac{1}{2}\int_2^6 f(-t)dt = \frac{1}{2}\int_2^6 f(t)dt \Rightarrow \int_2^6 f(x)dx = 6$$

Vậy $I = \int_{-1}^6 f(x)dx = \int_{-1}^2 f(x)dx + \int_2^6 f(x)dx = 8 + 6 = 14$

➢ **Cách khác.**

Giả sử $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

Ta có $\int_{-1}^2 f(x)dx = 8 \Leftrightarrow F(x)\Big|_{-1}^2 = 8 \Leftrightarrow F(2) - F(-1) = 8$

Do $f(x)$ là hàm số chẵn nên $f(-2x) = f(2x)$ nên ta có $\int_1^3 f(-2x)dx = \int_1^3 f(2x)dx = 3$

Ta có $\int_1^3 f(2x)dx = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}F(2x)\Big|_1^3 = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[F(6) - F(2)\right] = 3 \Leftrightarrow F(6) - F(2) = 6$

Ta có $\int_{-1}^6 f(x)dx = F(x)\Big|_{-1}^6 = F(6) - F(-1) = \left[F(6) - F(2)\right] + \left[F(2) - F(-1)\right] = 8 + 6 = 14$

Câu 9: Đáp án B.

$I = \int_0^1 3e^{\sqrt{1+3x}}dx$ đặt $t = \sqrt{1+3x} \Rightarrow t^2 = 1 + 3x \Rightarrow 2tdt = 3dx$. $I = 2\int_1^2 t.e^t dt = 2\left(t.e^t\Big|_1^2 - e^t\Big|_1^2\right) = 2e^2$

Vậy $2e^2 = \frac{a}{5}e^2 + \frac{b}{3}e + c \; (*) \Rightarrow a = 10, b = c = 0$ nên $T = 10$.

Đến đây ta thấy đề bài có vấn đề bởi lẽ $a, b, c \in \mathbb{R}$ thì ta sẽ chọn được vô số cặp b, c vẫn thỏa mãn đẳng thức (*).

Câu 10: Đáp án B.

Đặt $t = \sqrt{1 + \ln^2 x} \Rightarrow tdt = \frac{\ln x}{x}dx$

$$\int \sqrt{1 + \ln^2 x}\,\frac{\ln x}{x}dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\left(\sqrt{1 + \ln^2 x}\right)^3}{3} + C$$

$F(1) = \frac{1}{3} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \left[3F(e)\right]^2 = 8$

Câu 11: Đáp án A.

Ta có: $\int_0^1 \frac{x^2+e^x+x^2e^x}{1+e^x}dx = \int_0^1\left[x^2+\frac{e^x}{1+e^x}\right]dx = \left[\frac{x^3}{3}+\ln\left(1+e^x\right)\right]\Big|_0^1 = \ln(1+e)+\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

Ta được: $a=1\wedge b=\frac{1}{2}\wedge c=\frac{1}{3}\Rightarrow a+2b+3c=3$

Câu 12: Đáp án D.

Ta xét: $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx, I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ và $\Rightarrow I_1+I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx=\frac{\pi}{4}$

$$I_1-I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x-\sin x)}{\cos x+\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=\ln\left|\sin x+\cos x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\ln 2$$

$$\Rightarrow I_1=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\ln 2\Rightarrow a=\frac{1}{8};b=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$$

✓ Cách 2: Đặt $x=\frac{\pi}{4}-t$.

Câu 13: Đáp án B.

Đặt $t=\sqrt{1+3\cos x}\Rightarrow t^2=1+3\cos x\Rightarrow 2tdt=-3\sin xdx$

Ta được $\int_0^a\frac{\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx=\int_2^{\sqrt{1+3\cos x}}\left(-\frac{2}{3}\right)dt=-\frac{2}{3}\left(\sqrt{1+3\cos a}-2\right)=\frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow\sqrt{1+3\cos a}-2=-1\Leftrightarrow\cos a=0\Leftrightarrow a=\frac{\pi}{2}\text{ hoặc } a=\frac{3\pi}{2}$$

Câu 14: Đáp án C.

Đặt $\begin{cases}u=2x+3\\dv=e^xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2dx\\v=e^x\end{cases}$. Ta được: $I=3e-1\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=-1\end{cases}$

Câu 15: Đáp án B.

Ta có $\int_0^a xe^xdx=\int_0^a xd\left(e^x\right)=xe^x\Big|_0^a-\int_0^a e^xdx=ae^a-e^x\Big|_0^a=ae^a-e^a+1$

Mà $\int_0^a xe^xdx=1\Rightarrow ae^a-e^a=0\Leftrightarrow e^a(a-1)=0\Leftrightarrow a=1.$

Câu 16: Đáp án C.

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^n x\cos xdx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^n xd(\sin x)=\frac{1}{n+1}\sin^{n+1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{n+1}.\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Mà $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^n x\cos xdx=\frac{1}{384}\Rightarrow n=5$

Câu 17: Đáp án D.

$$\int_0^2\left(e^x+\frac{3}{x+1}\right)dx=\left(e^x+3\ln|x+1|\right)\Big|_0^2=e^2+3\ln 3-1\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=-1\end{cases}\Rightarrow T=a+b=2$$

Câu 18: Đáp án C.

Đặt $u=x^2\Rightarrow du=2xdx;dv=\frac{1}{\cos^2 x}dx\Rightarrow v=\tan x$

Khi đó $I=\left[x^2\tan x\right]_0^a-\int_0^a 2x\tan xdx=a^2\tan a-2\int_0^a x\tan xdx=a^2\tan a-2m$

Câu 19: Đáp án A.

Ta có: $I=\int_2^3\left(1+\frac{-2x+1}{x^2-x+1}\right)dx=\int_2^3 dx-\int_2^3\frac{d\left(x^2-x+1\right)}{x^2-x+1}=x\Big|_2^3-\ln\left(x^2-x+1\right)\Big|_2^3=-\ln 7+\ln 3+1$.

Do đó $a=-1;b=1;c=1$. Vậy $T=a+2b^2+3c^3=4$.

Câu 20: Đáp án D.

Ta có: $\int_1^3\frac{1}{e^x-1}dx=\int_1^3\frac{e^x-\left(e^x-1\right)}{e^x-1}dx=\left(\ln\left|e^x-1\right|-x\right)\Big|_1^3$

$=\ln\left(e^3-1\right)-\ln\left(e-1\right)-2=-2+\ln\left(e^2+e+1\right)=a+\ln b$

Do đó: $a+\ln b=-2+\ln\left(e^2+e+1\right)\Leftrightarrow a+2=\ln\frac{e^2+e+1}{b}$

$\Leftrightarrow\frac{e^2+e+1}{b}=e^{a+2}\Leftrightarrow be^{a+2}=e^2+e+1$

Câu 21: Đáp án A.

$$\int_0^x\left(\frac{1}{2}t+2(a+1)t\right)>-1\ \forall x\Leftrightarrow\frac{x^2}{4}+2(a+1)x\ge-1\quad\forall x\Leftrightarrow\frac{x^2}{4}+2(a+1)x+1\ge 0\ \forall x$$

$$\Leftrightarrow\Delta\le 0\Leftrightarrow(a+1)^2-\frac{1}{4}\le 0\Leftrightarrow-\frac{3}{2}\le a\le-\frac{1}{2}.$$

Câu 22: Đáp án D.

Ta có: $I=\int_1^2\frac{2\ln x+1}{x}dx=\left[2\ln^2 x+\ln|x|\right]\Big|_1^2=2\ln^2 2+\ln 2\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$

Câu 23: Đáp án A.

Ta có: $\int_0^1\frac{x^3dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int_0^1 d\left(x^2+1\right)-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}$

$=\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|\Big|_0^1=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+1}\ln 2$

Vậy $a=1$

Câu 24: Đáp án A.

$$\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3}dx = \int_0^2\left(\frac{-1}{x+1}+\frac{2}{x+3}\right)dx = \left(-\ln|x+1|+2\ln|x+3|\right)\Big|_0^2 = 2\ln5-3\ln3$$

Suy ra: $a=2, b=-3$. Do đó: $P=ab=-6$

Câu 25: Đáp án B.

Đặt $\begin{cases} u=\ln(9-x^2) \\ dv=dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{2x}{x^2-9} \\ v=x-3 \end{cases}$

$$\Rightarrow I=(x-3)\ln(9-x^2)\Big|_1^2 - 2\int_1^2 \frac{x(x-3)}{x^2-9}dx = -\ln t+6\ln2-2\int_1^2\frac{x}{x+3}dx$$

$$I=\ln5-6\ln2-2+6\ln(x+3)\Big|_1^2 = -\ln5+6\ln2-2+6\ln5-12\ln2$$

$$=5\ln5-6\ln2-2 \Rightarrow S=13$$

Câu 26: Đáp án B.

Ta có: $I=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2x\sin^2x} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos^2x+\sin^2x)dx}{\cos^2x\sin^2x}$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2x}+\frac{1}{\sin^2x}\right)dx = (\tan x-\cot x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt3}+\sqrt3 = \frac{2}{\sqrt3} = \frac{2\sqrt3}{3} = a+b\sqrt3$$

Do a,b là số hữu tỉ nên $a=0, b=\dfrac{2}{3}$, suy ra $a-b=\dfrac{2}{3}$.

✓ **Lưu ý:** Nếu giả thiết a,b là số thực thì ngoài cặp $a=0, b=\dfrac{2}{3}$ còn những cặp khác, chẳng hạn $a=-\dfrac{1}{\sqrt3}, b=1$, lúc này $a-b=-\dfrac{1}{\sqrt3}-1$, khác với tất cả các phương án A,B,C,D.

Ta có $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2x\sin^2x} = 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^2 2x} = -2\cot 2x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt3}{3} \Rightarrow a=0; b=\frac{2}{3} \Rightarrow a-b=-\frac{2}{3}$.

Câu 27: Đáp án B.

Ta có: $\displaystyle\int_2^3\frac{x}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\left(\int_2^3\frac{dx}{x-1}+\int_2^3\frac{dx}{x+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln|x-1|+\ln|x+1|\right)\Big|_2^3 = \frac{3}{2}\ln2-\frac{1}{2}\ln3$

Do đó $\begin{cases} a=\dfrac{3}{2} \\ b=\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Câu 28: Đáp án B.

$$\int_3^5 \frac{dx}{x^2-x}=\int_3^5 \frac{dx}{x(x-1)}=\int_3^5 \frac{dx}{x-1}-\int_3^5 \frac{dx}{x}=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\Bigg\|_3^5=\ln\frac{4}{5}-\ln\frac{2}{3}$$

$=\ln 4-\ln 5-\ln 2+\ln 3=\ln 2+\ln 3-\ln 5$.

Suy ra: $a=-1, b=1, c=1$. Vậy $S=2+1+3=6$

Câu 29: Đáp án C.

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=(2x+1)dx \end{cases}$ ta có: $\begin{cases} du=\frac{1}{x}dx \\ v=x^2+x \end{cases}$

$$\int_1^2 (2x+1)\ln x dx=\left(x^2+x\right)\ln x\Big|_1^2-\int_1^2 \left(x^2+x\right).\frac{1}{x}dx$$

$$=6\ln 2-\int_1^2 (x+1)dx=6\ln 2-\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_1^2=6\ln 2-\left(4-\frac{3}{2}\right)=-4+\frac{3}{2}+\ln 64$$

$P=a+b=-4+64=60$

Câu 30: Đáp án D.

Ta có: $\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+4x+7}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2+4x+7}d\left(x^2+4x+7\right)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4x+7\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 12-\frac{1}{2}\ln 7$

$=\ln\sqrt{12}-\ln\sqrt{7}$

Suy ra $\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+4x+7}dx=a\ln\sqrt{12}+b\ln\sqrt{7}\Leftrightarrow\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$. Vậy tổng $a+b=0$.

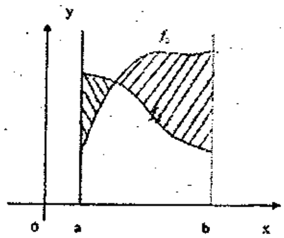
Câu 31: Đáp án B.

Ta có: $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)(2x+1)}=\int_1^2 \frac{-1}{x+1}dx+\int_1^2 \frac{2}{2x+1}dx=\ln 2-2\ln 3+\ln 5$. Vậy $S=0$.

DIỆN TÍCH – THỂ TÍCH

Nếu các hàm số f(x) và g(x) liên tục trên đoạn [a; b] thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=f_1(x)$; $y=f_2(x)$ và các đường thẳng x = a; x = b được tính theo công thức:

✓ **Công thức:** $S=\int_a^b \left|f_1(x)-f_2(x)\right|dx$



$$S=\int_a^b |f(x)|dx=\begin{cases} \int_a^b |f(x)|dx, khi: f(x)\ge 0 \\ -\int_a^b |f(x)|dx, khi: f(x)\le 0 \end{cases}$$

Thể tích khối tròn xoay: $V = \pi\int_a^b \left|f_1^2(x) - f_2^2(x)\right|dx$

❐ Bài tập áp dung

Câu 1: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \ln x, y = 0, x = k\,(k > 1)$. Tìm k để diện tích hình phẳng (H) bằng 1:

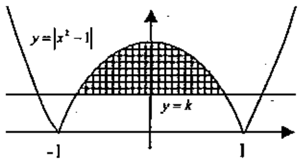
A. $k = 2$ **B.** $k = e^2$ **C.** $k = e$ **D.** $k = e^3$

Câu 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3^x, y = 4 - x$ và trục tung.

A. $S = \frac{7}{2} - \frac{3}{\ln 3}$ **B.** $S = \frac{9}{2} + \frac{3}{\ln 3}$ **C.** $S = \frac{7}{2} - \frac{2}{\ln 3}$ **D.** $S = \frac{9}{2} + \frac{2}{\ln 3}$

Câu 3: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = |x^2 - 1|$ và $y = k$ (với $0 < k < 1$).

Tìm k để diện tích hình (H) gấp đôi diện tích hình phẳng được tô màu trong hình vẽ:



A. $k = \sqrt[3]{2} - 1$ **B.** $k = 0,5$ **C.** $k = \sqrt[3]{4} - 1$ **D.** $k = 4$

Câu 4: Gọi $S(t)$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{1}{(x+1)(x+2)^2}$;

$y = 0; x = 0; x = t\ (t > 0)$. Tìm $\lim\limits_{x\to\infty} S(t)$.

A. $-\ln 2 - \frac{1}{2}$ **B.** $\ln 2 - \frac{1}{2}$ **C.** $\frac{1}{2} - \ln 2$ **D.** $\ln 2 + \frac{1}{2}$

Câu 5: Cho hình (*H*) giới hạn bởi đồ thị $(C): y = x\ln x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 1, x = e$. Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (*H*) quanh trục hoành.

A. $\frac{3}{2}\pi$ **B.** $-\frac{5}{2}e^3 + \ln 64\pi$ **C.** $(-4 + \ln 64)\pi$ **D.** $\frac{\pi}{27}(5e^3 - 2)$

Câu 6: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2^x; y = -x + 3$ và $y = 1$

A. $S = \frac{1}{\ln 2} + 1$ **B.** $S = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{2}$ **C.** $S = \frac{47}{50}$ **D.** $S = \frac{1}{\ln 2} + 3$

Câu 7: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ và trục hoành.

A. $S = \frac{27}{4}$ **B.** $S = \frac{13}{2}$ **C.** $S = \frac{29}{4}$ **D.** $S = -\frac{27}{4}$

Câu 8: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 + x$, trục Ox và hai đường thẳng $x = -1; x = 2$.

A. $\frac{23}{4}$　　B. $\frac{29}{4}$　　C. $\frac{27}{4}$　　D. $\frac{25}{4}$

Câu 9: Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

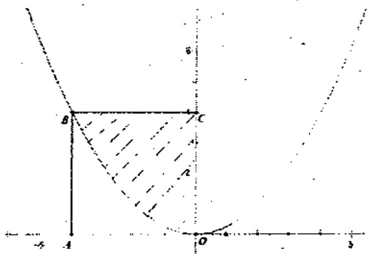
A. $\int_1^3 \left|x^2-2x\right|dx = \int_1^2 \left(x^2-2x\right)dx + \int_2^3 \left(x^2-2x\right)dx$

B. $\int_1^3 \left|x^2-2x\right|dx = -\int_1^2 \left(x^2-2x\right)dx + \int_2^3 \left(x^2-2x\right)dx$

C. $\int_1^3 \left|x^2-2x\right|dx = \int_1^2 \left(x^2-2x\right)dx - \int_2^3 \left(x^2-2x\right)dx$

D. $\int_1^3 \left|x^2-2x\right|dx = \int_1^2 \left|x^2-2x\right|dx - \int_2^3 \left|x^2-2x\right|dx$

Câu 10: Hình vuông OABC có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y=\frac{1}{4}x^2$. Gọi S_1, S_2 là diện tích của phần không bị gạch và phần bị gạch (như hình vẽ). Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.



A. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3}{2}$　　B. $\frac{S_1}{S_2}=2$　　C. $\frac{S_1}{S_2}=1$　　D. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{2}$

Câu 11: Parabol $y=\frac{x^2}{2}$ chia hình tròn có tâm là gốc tọa độ, bán kính bằng $2\sqrt{2}$ thành hai phần có diện tích S_1 và S_2 trong đó $S_1 < S_2$. Tìm tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.

A. $\frac{3\pi+2}{21\pi-2}$　　B. $\frac{3\pi+2}{9\pi-2}$　　C. $\frac{3\pi+2}{12\pi}$　　D. $\frac{9\pi-2}{3\pi+2}$

Câu 12: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn $x^2+y^2=2, y\ge 0$ và parabol $y=x^2$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{\pi}{2}-1$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}$

Câu 13: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=x^2$, đường thẳng $y=2-x$ và trục hoành trong miền $x\ge 0$ bằng:

A. 2　　B. $\frac{7}{6}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{5}{6}$

Câu 14: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y^2=4x$ và đường thẳng $x=1$ bằng S. Giá trị của S là:

A. 1　　B. $\frac{3}{8}$　　C. $\frac{8}{3}$　　D. 16

Câu 15: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=ax^3\left(a>0\right)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1, x=k\left(k>0\right)$ bằng $\dfrac{17a}{4}$. Tìm k.

A. $k=1$ **B.** $k=\dfrac{1}{4}$ **C.** $k=\dfrac{1}{2}$ **D.** $k=2$

Câu 16: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD với $A(-1;2), B(5;5), C(5;0), D(-1;0)$. Quay hình thang ABCD xung quanh trục Ox thì thể tích khối tròn xoay được tạo thành bằng bao nhiêu?

A. 72π **B.** 74π **C.** 76π **D.** 78π

Câu 17: Gọi S_1 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi elip $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{1}=1$ và S_2 là diện tích của hình thoi có các đỉnh là đỉnh của cặp elip đó. Tính tỉ số giữa S_1 và S_2.

A. $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{2}{\pi}$ **B.** $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{3}{\pi}$ **C.** $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\pi}{3}$ **D.** $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\pi}{2}$

Câu 18: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y=\dfrac{1}{4}x^3-x$ và tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ dương bằng -2.

A. 27 **B.** 21 **C.** 25 **D.** 20

Câu 19: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=x^3-x; y=2x$ và các đường $x=-1; x=1$ được xác định bởi công thức.

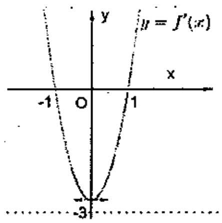
A. $S=\left|\int_{-1}^{1}\left(3x-x^3\right)dx\right|$ **B.** $S=\int_{-1}^{1}\left(3x-x^3\right)dx$

C. $S=\int_{-1}^{0}\left(x^3-3x\right)dx+\int_{0}^{1}\left(3x-x^3\right)dx$ **D.** $S=\int_{-1}^{0}\left(3x-x^3\right)dx+\int_{0}^{1}\left(x^3-3x\right)dx$

Câu 20: Cho parabol $(P): y=x^2+1$ và đường thẳng $(d): y=mx+2$. Biết rằng tồn tại m đểdiện tích hình phẳng giới hạn bởi *(P)* và *(d)* đạt giá trị nhỏ nhất, tính diện tích nhỏ nhất đó.

A. $S=8$ **B.** $S=4$ **C.** $S=\dfrac{4}{3}$ **D.** $S=0$

Câu 21: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$, $\left(a,b,c,d\in\mathbb{R}, a\neq 0\right)$ có đồ thị *(C)*. Biết rằng đồ thị *(C)* tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ cho bởi hình vẽ dưới đây:



Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị *(C)* và trục hoành.

A. $S=\dfrac{21}{4}$ **B.** $S=\dfrac{27}{4}$ **C.** $S=9$ **D.** $S=\dfrac{5}{4}$

Câu 22: Thể tích của khối tròn xoay do hình phẳng *(H)* giới hạn bởi miền $D=\{(x;y)\,|\,x^2+(y-2)^2\le 1\}$ quay quanh trục Ox là:

A. $4\pi^2$ **B.** $2\pi^2$ **C.** $8\pi^2$ **D.** $6\pi^2$

Câu 23: Bổ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn là 28cm, trục nhỏ 25*cm*. Biết cứ 1.000*cm*³ dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20.000đ. Hỏi từ quả dưa như trên có thể thu được bao nhiêu tiền từ việc bán nước sinh tố? (Biết rằng bề dày của vỏ dưa không đáng kể, kết quả đã được quy tròn).

A. 183.000 đ **B.** 180.000 đ **C.** 185.000 đ **D.** 190.000 đ

Câu 24: Parabol $y=\dfrac{x^2}{2}$ chia hình tròn có tâm là gốc tọa độ, bán kính bằng $2\sqrt{2}$ thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2, trong đó $S_1<S_2$. Tìm tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$.

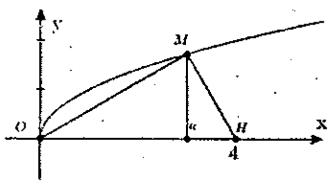
A. $\dfrac{3\pi+2}{21\pi-2}$ B. $\dfrac{3\pi+2}{9\pi-2}$ C. $\dfrac{3\pi+2}{12\pi}$ D. $\dfrac{9\pi-2}{3\pi+2}$

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-1)>0<f(0)$. S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=0, x=-1$ và $x=1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S=\int_{-1}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{1}|f(x)|dx$ B. $S=\int_{-1}^{1}|f(x)|dx$

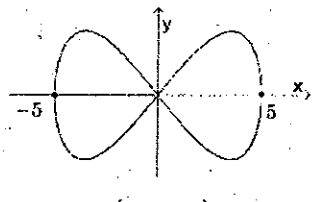
C. $S=\int_{-1}^{1} f(x)dx$ D. $S=\left|\int_{-1}^{1} f(x)dx\right|$

Câu 26 (Chuyên Vinh lần 2): Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}, y=0$ và $x=4$ quanh trục Ox. Đường thẳng $x=a$ $(0<a<4)$ cắt đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ tại M(hình vẽ bên). Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox. Biết rằng $V=2V_1$. Khi đó:



A. $a=2\sqrt{2}$ **B.** $a=\dfrac{5}{2}$ **C.** $a=2$ **D.** $a=3$

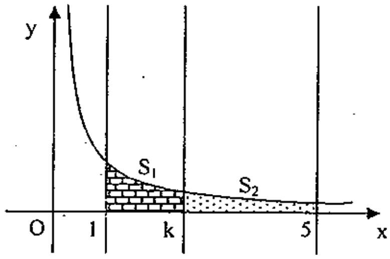
Câu 27(Chuyên Vinh lần 3): Trong Công viên Toán học có những mảnh đất hình dáng khác nhau. Mỗi mảnh được trồng một loài hoa và nó được tạo thành bởi một trong những đường cong đẹp trong toán học.Ở đó có một mảnh đất mang tên Bernoulli, nó được tạo thành từ đường Lemniscate có phương trình trong hệ tọa độ Oxy là $16y^2=x^2(25-x^2)$ như hình



vẽ bên. Tính diện tích S của mảnh đất Bernoulli biết rằng mỗi đơn vị trong hệ trục tọa độ Oxy tương ứng với chiều dài 1 mét.

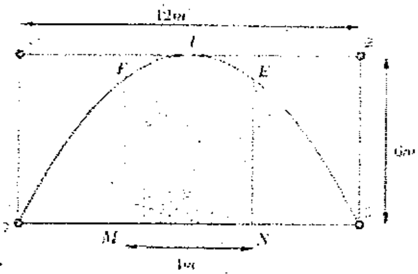
A. $S=\frac{125}{6}\left(m^2\right)$ B. $S=\frac{125}{4}\left(m^2\right)$ C. $S=\frac{250}{3}\left(m^2\right)$ D. $S=\frac{125}{3}\left(m^2\right)$

Câu 28: Cho hình thang cong (*H*) giới hạn bởi các đường $y=\frac{1}{x}, y=0, x=1, x=5$. Đường thẳng $x=k$ $(1<k<5)$ chia hình (*H*) thành hai hình (S_1) và (S_2) như hình bên. Cho hai hình (S_1) và (S_2) quay xung quanh trục *Ox* ta được hai khối tròn xoay có thể tích lần lượt là V_1 và V_2. Tìm *k* để $V_1=2V_2$



A. $k=\sqrt[3]{25}$ B. $k=\frac{15}{7}$ C. $k=\frac{5}{3}$ D. $k=\ln 5$

Câu 29: Một công ty quảng cáo X muốn làm một bức trang trí hình *MNEIF* ở chính giữa một bức tường hình chữ nhật *ABCD* có chiều cao *BC = 6m*, chiều dài *CD = 12m* như hình bên. Cho biết *MNEF* là hình chữ nhật có *MN = 4m*; cung *EIF* có hình dạng là một phần của cung parabol có đỉnh *I* là trung điểm của cạnh *AB* và đi qua hai điểm *C, D*. Kinh phí làm bức tranh là 900.000 đồng / m². Hỏi công ty *X* cần bao nhiêu tiền để làm bức tranh đó?

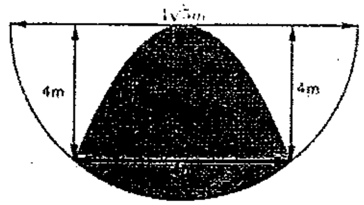


A. 20.400.000 đồng B. 20.600.000 đồng C. 20.800.000 đồng D. 21.200.000 đồng

Câu 30: Để trang trí tòa nhà người ta vẽ lên tường một hình như sau: Trên mỗi cạnh hình lục giác đều có cạnh là 2dm là một cánh hoa hình parabol mà đỉnh parabol (*P*) cách cạnh lục giác là 3dm và nằm phía ngoài lục giác; 2 đầu mút của cạnh cũng là 2 điểm giới hạn của đường (*P*) đó. Hãy tính diện tích hình trên (kể cả lục giác).

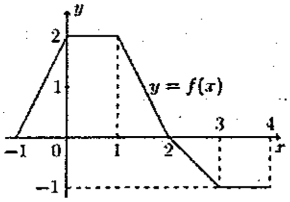
A. $8\sqrt{3}+24\left(dm^2\right)$ B. $8\sqrt{3}+12\left(dm^2\right)$ C. $6\sqrt{3}+12\left(dm^2\right)$ D. $6\sqrt{3}+24\left(dm^2\right)$

Câu 31: Một khuôn viên dạng nửa hình tròn có đường kính bằng $4\sqrt{5}\,(m)$. Trên đó có người thiết kế hai phần để trồng hoa và trồng cỏ Nhật Bản. Phần trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm của nửa hình tròn và hai đầu mút của cánh hoa nằm trên những đườngtròn (phần tô màu) và cách nhau một khoảng bằng 4(m), phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ và kinh phí để trồng cỏ Nhật Bản là 300.000 đồng/m². Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cỏ Nhật Bản trên phần đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



A. 1.791.000 đồng. B. 2.922.000 đồng. C. 3.582.000 đồng. D. 5.843.000 đồng.

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-1;4]$ là một đường gấp khúc như hình vẽ bên. Tính tích phân $I = \int_{-1}^{4} f(x)dx$.



A. $I = \frac{5}{2}$ **B.** $I = 3$

C. $I = \frac{11}{2}$ **D.** $I = 5$

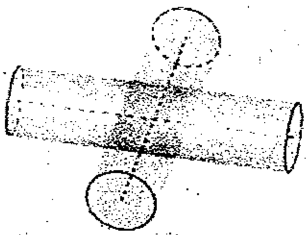
Câu 33: Trong mặt phẳng tọa độ, cho hình chữ nhật (*H*) có một cạnh nằm trên trục hoành, và có hai đỉnh trên một đường chéo là $A(-1;0)$ và $B(a;\sqrt{a})$, với $a > 0$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ chia hình (*H*) thành hai phần có diện tích bằng nhau, tìm *a*.

A. $a = 9$ **B.** $a = 3$ **C.** $a = 4$ **D.** $a = \frac{1}{2}$

Câu 34: Trên quả địa cầu, vĩ tuyến 30^0 Bắc chia khối cầu thành 2 phần. Tính tỉ số thể tích giữa phần lớn và phần bé của khối cầu đó.

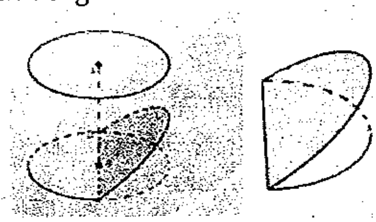
A. $\frac{27}{8}$ B. $\frac{27}{5}$ C. $\frac{24}{5}$ D. $\frac{9}{8}$

Câu 35: Cho hai mặt trụ có cùng bán kính bằng 4 được đặt lồng vào nhau như hình vẽ. Tính thể tích phần chung của chúng biết hai mặt trụ vuông góc và cắt nhau.



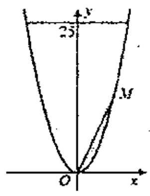
A. 512 **B.** 256π **C.** $\frac{256\pi}{3}$ **D.** $\frac{1024}{3}$

Câu 36: Một vật thể bằng gỗ có dạng khối trụ với bán kính đáy bằng 10 (cm). Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng có giao tuyến với đáy là một đường kính của đáy và tạo với đáy góc $45°$. Thể tích của khối gỗ bé là:



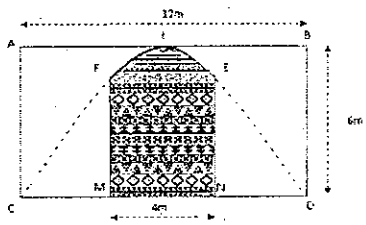
A. $\frac{2000}{3}(cm^3)$ **B.** $\frac{1000}{3}(cm^3)$ **C.** $\frac{2000}{7}(cm^3)$ **D.** $\frac{2000}{9}(cm^3)$

Câu 37: Ông B có một khu vườn giới hạn bởi đường parabol và một đường thẳng. Nếu đặt trong hệ tọa độ Oxy như hình vẽ bên thì parabol có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng là $y = 25$. Ông B dự định dùng một mảnh vườn nhỏ được chia từ khu vườn bởi đường thẳng đi qua O và điểm Mtrên parabol để trồng hoa. Hãy giúp ông B xác định điểm M bằng cách tính độ dài OM để diện tích mảnh vườn nhỏ bằng $\frac{9}{2}$.



A. $OM = 2\sqrt{5}$ B. $OM = 3\sqrt{10}$ C. $OM = 15$ D. $OM = 10$

Câu 38: Một công ty quảng cáo X muốn làm một bức tranh trang trí hình MNEIF ở chính giữa một bức tường hình chữ nhật ABCD có chiều cao $BD = 6m$, chiều dài $CD = 12m$ (hình vẽ bên). Cho biết MNEF là hình chữ nhật có $MN = 4m$, cung EIF có hình dạng là một phần của cung parabol có đỉnh I là trung điểm của cạnh AB và đi qua hai điểm C, D. Kinh phí làm bức tranh là 1.100.000 đồng/m². Hỏi công ty X cần bao nhiêu tiền để làm bức tranh đó?



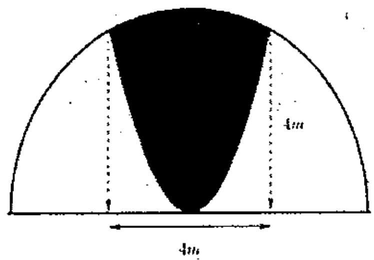
A. 20.400.000 đồng. B. 20.600.000 đồng.

C. 25.422.222 đồng. D. 21.200.000 đồng.

Câu 39: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = \frac{1}{x}, y = 0, x = 1, x = 5$. Đường thẳng $x = k$ $(1 < k < 5)$ chia (H) thành hai phần là (S_1) và (S_2) quay quanh trục Ox ta thu được hai khối tròn xoay có thể tích lần lượt là V_1 và V_2. Xác định k để $V_1 = 2V_2$.

A. $k = \frac{5}{3}$. B. $k = \frac{15}{7}$. C. $k = \ln 5$. D. $k = \sqrt[3]{25}$.

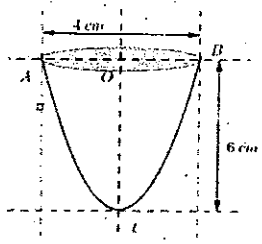
Câu 40: Một khuôn viên dạng nửa hình tròn có đường kính bằng $4\sqrt{5}(m)$. Trên đó người thiết kế hai phần để trồng hoa và trồng cỏ Nhật Bản. Phần trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm nửa hình tròn và hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường trong (phần tô màu) cách nhau một khoảng bằng 4m, phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước như hình vẽ và kinh phí để trồng cỏ Nhật Bản là 200.000 đồng/1m². Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cỏ Nhật Bản trên phần đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn)



A. 3.895.000 đồng B. 1.948.000 đồng

C. 2.388.000 đồng D. 1.194.000 đồng

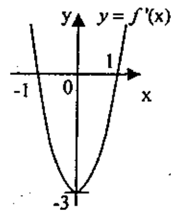
Câu 41: Có một vật thể là hình tròn xoay có dạng giống như một cái ly như hình vẽ dưới đây:



Người ta đo được đường kính của miệng ly là 4cm và chiều cao là 6cm. Biết rằng thiết diện của chiếc ly cắt bởi mặt phẳng qua trục đối xứng là một Parabol. Tính thể tích $V(cm^3)$ của vật thể đã cho

A. $V=\frac{72\pi}{5}$ **B.** $V=12$ **C.** $V=12\pi$ **D.** $V=\frac{72}{5}$

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,(a,b,c,d\in\mathbb{R},a\neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây:



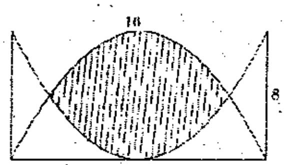
Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành:

A. $S=\frac{21}{4}$ **B.** $S=\frac{27}{4}$ **C.** $S=9$ **D.** $S=\frac{5}{4}$

Câu 43: Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng d thay đổi nhưng luôn đi qua $A(1;4)$ và không song song với trục tung. Tính giá trị nhỏ nhất K của diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và d.

A. $K=12\sqrt{3}$ **B.** $K=4\sqrt{3}$ **C.** $K=\frac{\sqrt{3}}{3}$ **D.** $K=\frac{1}{3}$

Câu 44: Một mảnh vườn toán học có dạng hình chữ nhật, chiều dài là 16mvà chiều rộng là 8m. Các nhà Toán học dùng hai đường parabol, mỗi parabol có đỉnh là trung điểm của một cạnh dài và đi qua 2 mút của cạnh dài đối diện; phần mảnh vườn nằm ở miền trong của cả hai parabol (phần gạch sọc như hình vẽ minh họa) được trồng hoa Hồng. Biết chi phí để trồng hoa Hồng là 45.000đồng/$1m^2$. Hỏi các nhà Toán học phải chi bao nhiêu tiền để trồng hoa trên phần mảnh vườn đó?(Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



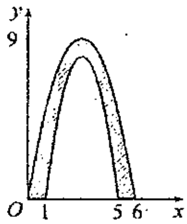
A. 3.322.000 đồng **B.** 3.476.000 đồng **C.** 2.159.000 đồng **D.** 2.715.000 đồng

Câu 45: Xét hình phẳng (D) giới hạn bởi các đường $y=(x+3)^2, y=0, x=0$. Gọi A(0;9), B(b;0) thỏa mãn $(-3<b<0)$. Tìm b để đoạn thẳng AB chia (D) thành hai phần có diện tích bằng nhau.

A. $b=-2$. **B.** $b=-\frac{1}{2}$. **C.** $b=-1$. **D.** $b=-\frac{3}{2}$.

SỞ GD & ĐT ĐỒNG THÁP - KIỂM TRA HỌC KÌ II LỚP 12 GDTHPT

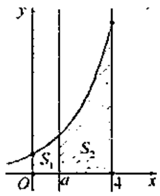
Câu 46: Người ta cần sơn trang trí một bề mặt của một cổng chào có hình dạng như hình vẽ sau đây. Các biên của hình tương ứng là các parabol có phương trình $y=-x^2+6x; y=-2x^2+12x-10$ (đơn vị đo độ dài là mét). Hỏi cần ít nhất bao nhiêu lít sơn? Biết tỉ lệ phủ của sơn là $10m^2$ / lít.



A. 3,6 lít **B.** 2,2 lít

C. 1,5 lít **D.** 2,4 lít

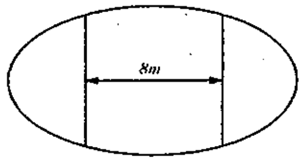
Câu 47: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=2^x$, $y=0, x=0, x=4$. Đường thẳng $x=1(0<a<4)$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm a để $S_2=4S_1$



A. $a=3$ **B.** $a=\log_2 13$

C. $a=2$ **D.** $a=\log_2\frac{16}{5}$

Câu 48: Ông An có một mảnh vườn hình elip có độ dài trụclớn bằng *16m* và độ dài trục bé bằng *10m*. Ông muốn trồnghoa trên một dải đất rộng *8m* và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng(như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa 100.000 đồng/1 m^2. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn)

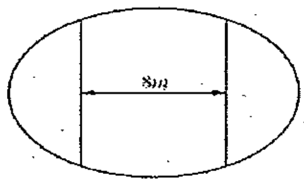


A. 7.862.000 đồng **B.** 7.653.000 đồng **C.** 7.128.000 đồng **D.** 7.826.000 đồng

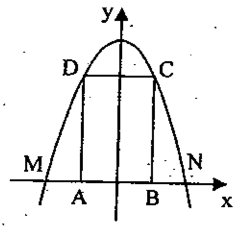
Câu 49: Ông An có một mảnh vườn hình elip có độ dài trục lớn bằng 16m và độ dài trục bé bằng 10m. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng 8m và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 250.000 đồng/1m². Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).

A. 7.862.000 đồng. **B.** 11.479.337 đồng.

C. 7.128.000 đồng. **D.** 7.826.000 đồng.

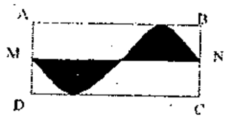


Câu 50: Một chiếc cổng Parabol cao 16m và 2 chân cổng cách nhau 8m như hình vẽ. Nhà thiết kế xây dựng xây 2 cây cột AD, BC cách nhau 4m (2 cây cột này đối xứng với nhau qua trục đối xứng của Parabol), 2 phần cổng nhỏ ở 2 bên dành cho xe máy và xe đạp qua lại và phần cổng to ở giữa chỉ dành riêng cho xe bus BRT. Tính diện tích phần thiết diện cổng dành cho xe bus BRT đi qua.



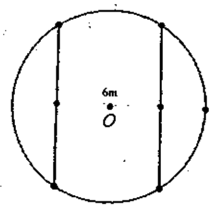
A. $S=\frac{176}{3}\left(m^2\right)$ B. $S=\frac{128}{3}\left(m^2\right)$ C. $S=\frac{64}{3}\left(m^2\right)$ D. $S=\frac{256}{3}\left(m^2\right)$

Câu 51: Người ta trồng hoa vào phần đất được tô màu đen được giới hạn bởi cạnh AB, CD, đường trung bình MN của mảnh đất hình chữ nhật ABCD và một đường cong hình sin (như hình vẽ). Biết $AB=2\pi(m), AD=2(m)$. Tính diện tích phần còn lại.



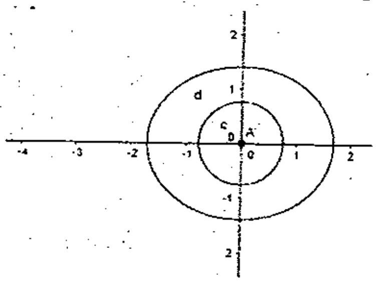
A. $4\pi-1$ B. $4(\pi-1)$ C. $4\pi-2$ D. $4\pi-3$

Câu 52: Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính $6m$. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng $6m$ nhận O làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là 70000 đồng/m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (Số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)



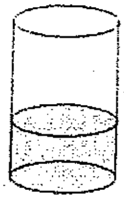
A. 8412322 đồng. B. 8142232 đồng. C. 4821232 đồng. D. 4821322 đồng.

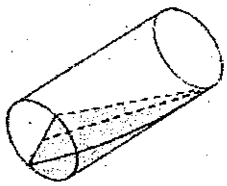
Câu 53: Người ta cần trồng hoa tại phần đất nằm phía ngoài đường tròn tâm gốc tọa độ O, bán kính bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$ và phía trong của elip có độ dài trục lớn bằng $2\sqrt{2}$ và độ dài trục nhỏ bằng 2 (như hình vẽ bên). Trong mỗi một đơn vị diện tích cần bón $\frac{100}{\left(2\sqrt{2}-1\right)\pi}$ kg phân hữu cơ. Hỏi cần sử dụng bao nhiêu kg phân hữu cơ để bón cho hoa?



A. 30kg B. 40kg C. 50kg D. 45kg

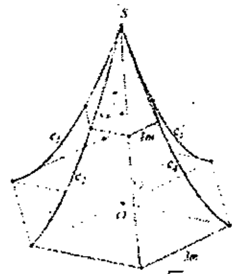
Câu 54: Bạn A có một cốc thủy tinh hình trụ, đường kính trong lòng đáy cốc là 6 cm chiều cao trong lòng cốc là 10 cm đang đựng một lượng nước. Bạn A nghiêng cốc nước, vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy mực nước trùng với đường kính đáy. Tính thể tích lượng nước trong cốc.





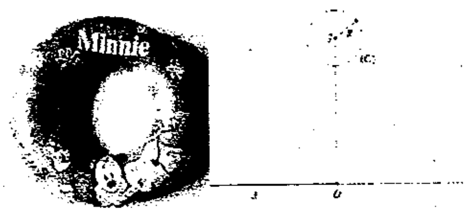
A. $15\pi cm^3$ B. $60\pi cm^3$ C. $60cm^3$ D. $70cm^3$

Câu 55: Người ta dựng một cái lều vải (H) có dạng hình chóp lục giác đều như hình vẽ bên. Đáy của (H) là một hình lục giác đều có độ dài cạnh là 3m.Chiều cao $SO = 6m$ (SO vuông góc với mặt đáy).Các cạnh bên của (H) là các sợi $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ nằm trên các parabol có trục đối xứng song song với SO.Giả sử giao tuyến (nếu có) của (H) với mặt phẳng (P) vuông góc với SO và một lục giác đều và khi (P) đi qua trung điểm của SO thì lục giác đều cạnh bằng 1.Tính thể tích không gian bên trong cái lều (H) đó.



A. $\frac{135\sqrt{3}}{5}\left(m^3\right)$. B. $\frac{96\sqrt{3}}{5}\left(m^3\right)$. C. $\frac{135\sqrt{3}}{4}\left(m^3\right)$. D. $\frac{135\sqrt{3}}{8}\left(m^3\right)$.

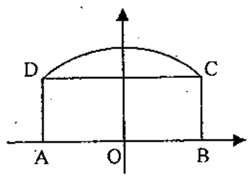
Câu 56: Người ta làm một chiếc phao bơi như hình vẽ (với bề mặt có được bằng cách quay đường tròn (C) quanh trục d). Biết rằng OI = 30cm, R = 5cm. Tính thể tích V của chiếc phao



A. $V = 1500\pi\ cm^3$. B. $V = 1500\pi^2\ cm^3$. C. $V = 9000\pi\ cm^3$. D. $V = 9000\pi^2\ cm^3$.

TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIÊU – LẦN 2

Câu 57: Ông An muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước giống như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol. Giá $1m^2$ cửa rào sắt là 700.000 đồng. Hỏi ông An phải trả baonhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy (làm tròn đến hàng phần nghìn)



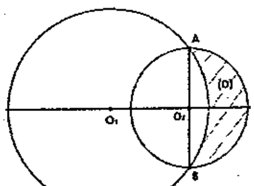
A. 6.320.000 đồng

B. 6.620.000 đồng

C. 6.520.000 đồng

D. 6.417.000 đồng

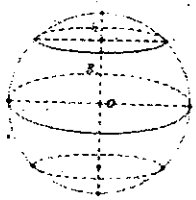
Câu 58: Cho 2 đường tròn $(O_1;5)$ và $(O_2;3)$ cắt nhau tại 2 điểm A, B sao cho AB là 1 đường kính của đường tròn (O_2). Gọi (D) là hình phẳng được giới hạn bởi 2 đường tròn (ở ngoài đường tròn lớn, phần được gạch chéo như hình vẽ). Quay (D) quanh trục O_1, O_2 ta được 1 khối tròn xoay.Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành.



A. $V = \frac{14\pi}{3}$. B. $V = \frac{68\pi}{3}$. C. $V = \frac{40\pi}{3}$. D. $V = 36\pi$.

ĐỀ THI THỬ SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BÌNH PHƯỚC

Câu 59: Một khối cầu có bán kính là 5(dm), người ta cắt bỏ hai phần của khối cầu bằng hai mặt phẳng song song cùng vuông góc đường kính và cách tâm một khoảng 3(dm) để làm một chiếc lu đựng nước (như hình vẽ). Tính thể tích nước mà chiếc lu chứa được.

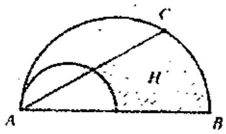


A. $\frac{100}{3}\pi(dm^3)$ **B.** $\frac{43}{3}\pi(dm^3)$ **C.** $41\pi(dm^3)$ **D.** $132\pi(dm^3)$

Câu 60: Cho khối cầu tâm O bán kính R. Mặt phẳng (P) cách O một khoảng $\frac{R}{2}$ chia khối cầu thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó:

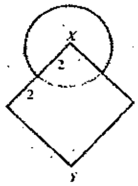
A. $\frac{5}{27}$ **B.** $\frac{5}{19}$ **C.** $\frac{5}{24}$ **D.** $\frac{5}{32}$

Câu 61: Ta vẽ hai nửa đường tròn như hình vẽ bên, trong đó đường kính của nửa đường tròn lớn gấp đôi đường kính của nửa đường tròn nhỏ. Biết rằng nửa hình tròn đường kính AB có diện tích là 8π và $\widehat{BAC}=30^0$. Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình (H) (phần tô đậm) xung quanh đường thẳng AB.



A. $\frac{220}{3}\pi$ **B.** $\frac{98}{3}\pi$ **C.** $\frac{224}{3}\pi$ **D.** $4\pi^2$

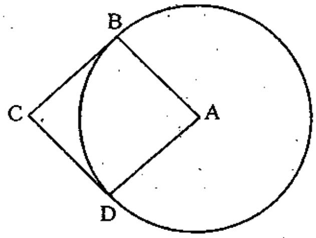
Câu 62: Cho hình tròn có bán kính bằng 2 và hình vuông có cạnh bằng 4 được xếp chồng lên nhau sao cho đỉnh X của hình vuông là tâm của hình tròn (như hình vẽ dưới). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình trên xung hình trục XY.



A. $V=\frac{32\left(\sqrt{2}+1\right)\pi}{3}$ **B.** $V=\frac{8\left(5\sqrt{2}+3\right)\pi}{3}$

C. $V=\frac{8\left(5\sqrt{2}+2\right)\pi}{3}$ **D.** $V=\frac{8\left(4\sqrt{2}+3\right)\pi}{3}$

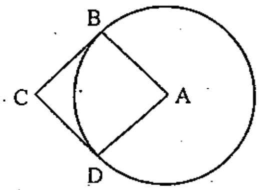
Câu 63: Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính 6m. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng 6m nhận O làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là 70000 *đồng/ m²*.Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị).



A. 8412322 đồng. **B.** 8142232 đồng.

C. 4821232 đồng. **D.** 4821322 đồng.

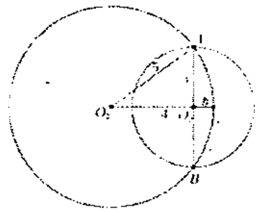
Câu 64: Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 7 và hình tròn (C) có tâm A, đường kính bằng 14 như hình vẽ bên. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay mô hình trên quanh trục là đường thẳng AC.



A. $V=\dfrac{343\left(12+\sqrt{2}\right)\pi}{6}$ B. $V=\dfrac{343\left(4+3\sqrt{2}\right)\pi}{6}$

C. $V=\dfrac{343\left(7+\sqrt{2}\right)\pi}{6}$ D. $V=\dfrac{343\left(6+\sqrt{2}\right)\pi}{6}$

Câu 65: Cho 2 đường tròn $(O_1;10)$ và $(O_2;6)$ cắt nhau tại 2 điểm A, B sao cho AB là 1 đường kính của đường tròn (O_2). Gọi (D) là hình thẳng được giới hạn bởi 2 đường tròn (ở ngoài đường tròn lớn, phần được gạch chéo như hình vẽ). Quay (D) quanh trục O_1, O_2, ta được 1 khối tròn xoay. Thể tích khối tròn xoay được tạo thành là:



A. $V=\dfrac{14\pi}{3}$ B. $V=\dfrac{68\pi}{3}$ C. $V=\dfrac{20\pi}{3}$ D. $V=36\pi$

Câu 66: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16, \int_0^2 f(x)dx=4$. Tính $\int_0^1 xf'(2x)dx$.

A. 13 B. 12 C. 20 D. 7

Câu 67: Người ta dự định xây dựng một cây cầu có hình parabol để bắc qua sông 480m. Bề dày của khối bê tông làm mặt cầu là 30*cm*, chiều rộng của mặt cầu là 5*m*, điểm tiếp giáp giữa mặt cầu với mặt đường cách bờ sông 5*m*, điểm cao nhất của khối bê tông làm mặt cầu so với mặt đường là 2*m*. Thể tích theo m^3 của khối bê tông làm mặt cầu nằm trong khoảng?

A. $(210;220)$ B. $(96;110)$ C. $(490;500)$ D. $(510;520)$

Câu 68: Một khối cầu có bán kính 5dm, người ta cắt bỏ 2 phần bằng 2 mặt phẳng song song và cách tâm 3dm. Thể tích phần còn lại của khối cầu là:

A. 132π lít B. 41π lít C. $\dfrac{100}{3}\pi$ lít D. 43π lít

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Đáp án C.

Diện tích hình phẳng: $S=\int_1^k \ln(x)dx$. Đặt $u=\ln(x)\Rightarrow du=\dfrac{1}{x}dx$

$dv=dx\Rightarrow v=x; S=x.\ln(x)\Big|_1^k-\int_1^k \dfrac{1}{x}dx=k.\ln(k)-k+1\Rightarrow k=e$

Câu 2: Đáp án C.

Hoành độ giao điểm của $y=3^x$ với $y=4-x$ là nghiệm phương trình $3^x=4-x \Leftrightarrow x=1$

$$\Rightarrow S=\int_0^1\left(4-x-e^x\right)dx \Rightarrow \ln 3\left[\int_0^1\left(4-x-3^x\right)dx-\frac{7}{2}\right]=-2$$

Câu 3: Đáp án C.

Yêu cầu bài tập $\Leftrightarrow$ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=1-x^2; y=k; x=0$ bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=1-x^2; y=x^2-1; y=k; x>0$.

$$\int_0^{\sqrt{1-k}}\left(1-x^2-k\right)dx=\int_{\sqrt{1-k}}^{1}\left(k-1+x^2\right)dx+\int_1^{\sqrt{1+k}}\left(k-x^2+1\right)dx$$

$\Rightarrow k=\sqrt[3]{4}-1$

Câu 4: Đáp án B.

Ta có: $S(t)=\int_0^t \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2}=\int_0^t\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{(x+2)^2}\right)dx$

$$=\left(\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|+\frac{1}{x+2}\right)\Bigg|_0^t=\ln\left|\frac{t+1}{t+2}\right|+\frac{1}{2}+\frac{1}{t+2}-\frac{1}{2}$$

Suy ra $\lim\limits_{x\to\infty} S(t)=\ln 2-\frac{1}{2}$

Câu 5:Đáp án D.

$$V_{Ox}=\pi\int_0^1(x\ln x)^2dx=\pi\int_0^1 x^2\ln^2 xdx$$

Đặt: $\begin{cases}u=\ln^2 x\\ dv=x^2dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{2}{x}\ln xdx\\ v=\frac{1}{3}x^3\end{cases}$

$$\Rightarrow V=\frac{\pi}{3}x^3\ln^2 x\Big|_1^2-\frac{2\pi}{3}\int_1^e x^2\ln xdx=\frac{\pi}{3}.e^3-\frac{2\pi}{3}\left(\frac{1}{3}x^3\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{3}\int_1^e x^2dx\right)=\frac{\pi}{27}\left(5e^3-2\right)$$

Câu 6: Đáp án B.

Xét các phương trình:

- $2^x=-x+3\Leftrightarrow 2^x+x-3=0\Leftrightarrow x=1$ (vì vế trái là hàm số đồng biến và nhận $x=1$ làm nghiệm nên nghiệm đó là duy nhất).
- $2^x=1\Leftrightarrow x=0$
- $-x+3=1\Leftrightarrow x=2$

Khi đó diện tích hình phẳng được tính theo công thức:

$$S=\int_0^1\left|2^x-1\right|dx+\int_1^2\left|-x+3-1\right|dx=\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{2}$$

Câu 7: Đáp án A.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3-3x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$

Do đó diện tích hình phẳng là $S=\int_0^3 \left|x^3-3x^2\right|dx=\frac{27}{4}$

Câu 8: Đáp án C.

Diện tích hình phẳng được tính theo công thức: $S=\int_{-1}^2 \left|x^3+x\right|dx=\frac{27}{4}$

Câu 9: Đáp án B.

Ta có: $f(x)=x^2-2x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$

Lập bảng xét dấu ta được: $f(x)<0, x\in(1;2), f(x)>0, x\in(2;3)$

$\int_1^3 f(x)dx=-\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx$

Câu 10: Đáp án B.

Ta có: $S_2=\int_0^4 \frac{1}{4}x^2dx=\frac{16}{3}$. Hình vuông OABC có diện tích $S=4^2=16$.

Suy ra $S_1=S-S_2=16-\frac{16}{3}=\frac{32}{3}$

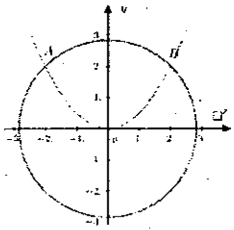
Vậy $\frac{S_1}{S_2}=2$.

Câu 11: Đáp án B.

Diện tích hình tròn là $S=\pi r^2=8\pi$

Ta có: $S_1=\int_{-2}^2 \left|\sqrt{8-x^2}-\frac{x^2}{2}\right|dx=2\pi+\frac{4}{3}$

Suy ra: $S_2=S-S_1=6\pi-\frac{4}{3}$. Vậy: $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi+2}{9\pi-2}$



Câu 12: Đáp án D.

Phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{2-x^2}=x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$

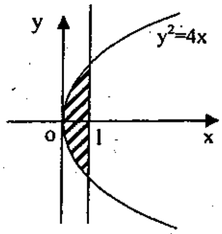
$S=\int_{-1}^1 \left|x^2-\sqrt{2-x^2}\right|dx=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}$

Câu 13: Đáp án B.

Xét phương trình $x^2=2-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2\,(\text{Loại}) \end{array}\right.$

Do đó $S=\int_0^1 (2-x-x^2)dx=\frac{7}{6}$

Câu 14: Đáp án C.



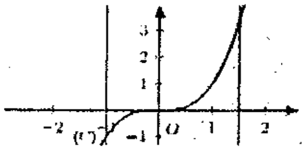
Ta có: $S=2\int_0^1 \sqrt{4x}dx=\frac{8}{3}$

Câu 15: Đáp án D.

Giao điểm của đồ thị hàm số $y=ax^3\ (a>0)$ với trục hoành là $O(0;0)$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường đề bài đã cho:

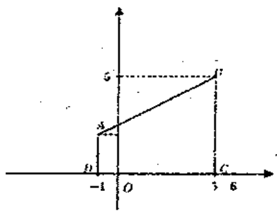
$$S=\left|\int_{-1}^{0} ax^3dx\right|+\left|\int_{0}^{k} ax^3dx\right|=\left|\frac{-ax^4}{4}\Big|_{-1}^{0}\right|+\left|\frac{ax^4}{4}\Big|_{0}^{k}\right|=\left|\frac{-a}{4}\right|+\left|\frac{ak^4}{4}\right|=\frac{a}{4}+\frac{ak^4}{4}$$



Hay $\frac{a}{4}+\frac{ak^4}{4}=\frac{17a}{4}$

$\Leftrightarrow 1+k^4=17 \Leftrightarrow k=2$ do $k>0$

Câu 16: Đáp án D.



Phương trình đường thẳng $AB: y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{3}$

$$V=\pi\int_{-1}^{5}\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right)^2 dx=78\pi$$

Câu 17: Đáp án D.

Elip có độ dài trục lớn là 6, trục bé là 2. Do đó: $S_2=6$

Ta có: $S_1=\frac{4}{3}\int_0^3\sqrt{9-x^2}dx=3\pi$. Vậy $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\pi}{2}$.

Câu 18: Đáp án A.

Ta có: $y'=\frac{3}{4}x^2-1 \Rightarrow y'(-2)=2$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=2x+4$

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{1}{4}x^3-x=2x+4 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^3-3x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=4 \end{array}\right.$

Diện tích cần tìm là: $S=\int_{-2}^{4}\left|\left(\frac{1}{4}x^3-x\right)-(2x+4)\right|dx=27$

Câu 19: Đáp án C.

Xét phương trình $x^3-x=2x \Leftrightarrow x^3-3x=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=\pm\sqrt{3}$.

Diện tích hình phẳng được tính bởi công thức:

$$S=\int_{-1}^{1}\left|x^3-3x\right|dx=\int_{-1}^{0}\left(x^3-3x\right)dx+\int_{0}^{1}\left(3x-x^3\right)dx$$

Câu 20: Đáp án C.

Phương trình hoành độ giao điểm của *(d)* và *(P)* là $x^2+1=mx+2\Leftrightarrow x^2-mx-1=0$

Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1<x_2$. Khi đó diện tích cần tìm

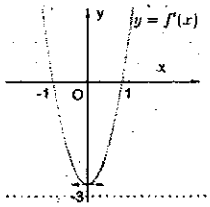
$$S=\int_{x_1}^{x_2}\left(mx+1-x^2\right)dx=\left(\frac{mx^2}{2}+x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2}=\frac{m}{2}\left(x_2^2-x_1^2\right)+\left(x_2-x_1\right)-\frac{1}{3}\left(x_2^3-x_1^3\right)$$

$$=\left(x_2-x_1\right)\left[\left(x_2+x_1\right)\frac{m}{2}+1-\frac{1}{3}\left(\left(x_2+x_1\right)^2-x_1x_2\right)\right]=\sqrt{m^2+4}\left(\frac{m^2}{6}+\frac{2}{3}\right)\geq\frac{4}{3}$$

Câu 21: Đáp án B.

Theo bài ra: $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ từ đồ thị thì $f'(0)=c=-3\Rightarrow c=-3$.

Ta thấy $f'(-1)=3a-2b+c=0; f'(1)=0=3a+2b+c=0$.



Từ hai điều này suy ra được $a=1, b=0$, vậy $f(x)=x^3-3x^2+d$.

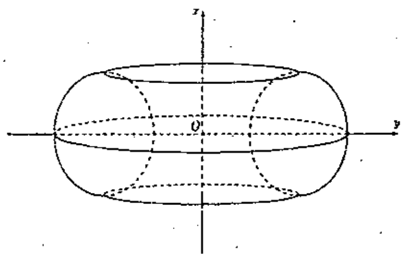
Dùng nốt giả thuyết tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ tại điểm có hoành độ âm. Đường thẳng $y=4$ có hệ số góc $k=0$, giả sử tiếp điểm là x_0 khi đó $y'(x_0)=0$ mà $x_0<0$ nên thấy ngay $x_0=-1$.

Mặt khác, $y(-1)=4=2+d\Rightarrow d=2$

Vậy $y=x^3-3x+2$. Tính diện tích giới hạn bởi đồ thị và trục hoành

$$S=\int_{-2}^{1}\left|f(x)\right|dx=\int_{-2}^{1}\left(x^3-3x+2\right)dx=\frac{27}{4}$$

Câu 22: Đáp án A.

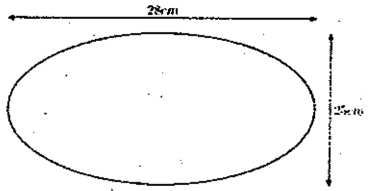


Ta có: $x^2+(y-2)^2=1\Leftrightarrow y=2+\sqrt{1-x^2}\vee y=2-\sqrt{1-x^2},(-1\leq x\leq 1)$

Thể tích khối tròn xoay $V=\pi\int_{-1}^{1}\left[\left(2+\sqrt{1-x^2}\right)^2-\left(2-\sqrt{1-x^2}\right)^2\right]dx=16\pi\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=4\pi^2$

Câu 23: Đáp án A.

Ta có phương trình elip $(E): \frac{x^2}{14^2}+\frac{y^2}{12.5^2}=1$



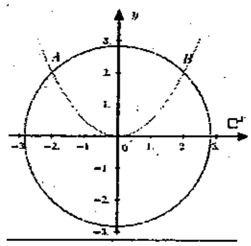
Thể tích của quả dưa

$$V=2\pi\int_0^{14}\left(12.5^2-\frac{12.5^2x^2}{14^2}\right)dx=\frac{8750\pi}{3}\ cm^3$$

Số tiền thu được $T=\frac{8750\pi}{3}.\frac{20.000}{1000}\approx 183.000$ đ.

Câu 24: Đáp án B.

Diện tích hình tròn là $S=\pi r^2=8\pi$



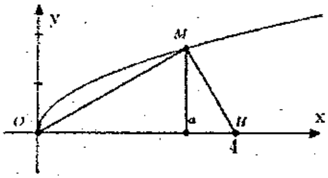
Ta có: $S_1=\int_{-1}^{2}\left|\sqrt{8-x^2}-\frac{x^2}{2}\right|dx=2\pi+\frac{4}{3}$

Suy ra $S_2=S-S_1=6\pi-\frac{4}{3}$

Câu 25: Đáp án B

Câu 26 (Chuyên Vinh lần 2): Đáp án D.

Ta có $V=\pi\int_0^4 xdx=\pi\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^4=8\pi\Rightarrow V_1=4\pi$



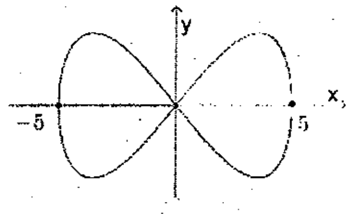
Gọi N là giao điểm của đường thẳng $x=a$ và trục hoành.

Khi đó V_1 là thể tích tạo được khi xoay hai tam giác OMN và MNH quanh trục Ox với N là hìnhchiếu của M trên OH.

Ta có: $V_1=\frac{1}{3}\pi a\left(\sqrt{a}\right)^2+\frac{1}{3}\pi(4-a)\left(\sqrt{a}\right)^2=\frac{4}{3}\pi a=4\pi\Rightarrow a=3$

Câu 27(Chuyên Vinh lần 3): Đáp án D.

Hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là: $x=0;x=-5;x=5$.



Diện tích mảnh đất Bernoulli bao gồm diện tích 4 mảnh đất nhỏ bằng nhau.

Xét diện tích s của mảnh đất nhỏ trong góc phần tư thứ nhất, ta có:

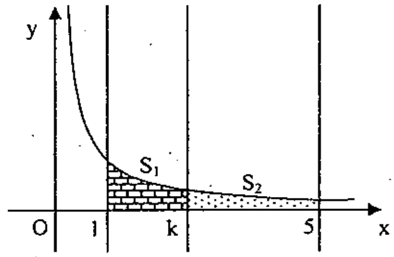
$$4y=x\sqrt{25-x^2},x\in[0;5]\Rightarrow s=\frac{1}{4}\int_0^5 x\sqrt{25-x^2}dx=\frac{125}{12}\Rightarrow S=4.\frac{125}{12}=\frac{125}{3}\left(m^2\right)$$

Câu 28: Đáp án B.

$$V_1=\pi\int_1^k\left(\frac{1}{x}\right)^2dx=\pi\left.\left(-\frac{1}{x}\right)\right|_1^k=\pi\left(1-\frac{1}{k}\right)$$

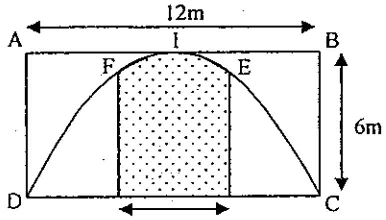
$$V_2=\pi\int_k^5\left(\frac{1}{x}\right)^2dx=\pi\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_k^5=\pi\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{5}\right)$$

$$V_1=2V_1\Leftrightarrow 1-\frac{1}{k}=\frac{2}{k}-\frac{2}{5}\Leftrightarrow k=\frac{15}{7}$$



Câu 29: Đáp án C.

- Nếu chọn hệ trục tọa độ có gốc là trung điểm O của MN, trục hoành trùng với đườngthẳng MN thì parabol có phương trình là $y=-\frac{1}{6}x^2+6$



- Khi đó diện tích của khung tranh là:

$$S=\int_{-2}^{2}\left(-\frac{1}{6}x^2+6\right)dx=\frac{208}{9}\ m^2$$

- Suy ra số tiền là: $\frac{208}{9}\times 900.000=20.800.000$ đồng.

Câu 30: Đáp án D.

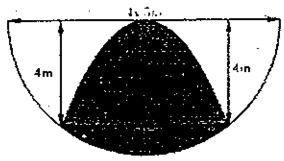
Diện tích lục giác đều cạnh 2dm là $S_1=6.\frac{2^2\sqrt{3}}{4}=6\sqrt{3}$.Parabol đi qua 3 điểm $A(-1;0)$, $B(1;0),C(0;3)$ có phương trình $y=-3x^2+3$. Diện tích của mỗi cánh hoa là:

$$S_2=\int_{-1}^{1}\left(-3x^2+3\right)dx=4$$

Diện tích cần tính là: $6\sqrt{3}+6.4=6\sqrt{3}+24\ \left(dm^2\right)$.

Câu 31: Đáp án D.

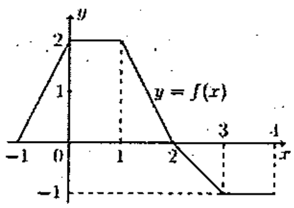
Gắn hệ trục tọa độ Oxy vào hình sao cho O trùng với tâm parabol, trục Ox trùng với đường kính nửa đường tròn và trục Oy hướng xuống. Khi đó diện tích phần trồng hoa bằng $2\int_0^2 x^2-\sqrt{20-x^2}\,dx\approx 11,93962$. Suy ra diện tích phần trồng cỏ Nhật Bản bằng $10\pi-11,93962\approx 19,47631$. Do vậy số tiền cần thiết để trồng cỏ là xấp xỉ 5843000 đồng.



Câu 32: Đáp án A.

Kí hiệuS_1, S_2 là diện tích các hình thang giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành, tương ứng trên miền $-1\le x\le 2$ và trên miền $2\le x\le 4$.

Khi đó $S_1 = \int_{-1}^{2} f(x)dx, S_2 = -\int_{2}^{4} f(x)dx$



Từ giả thiết, ta tính được $S_1 = 4; S_2 = \frac{3}{2}$, do đó:

$$I = \int_{-1}^{4} f(x)dx = \int_{-1}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{4} f(x)dx = S_1 - S_2 = \frac{5}{2}.$$

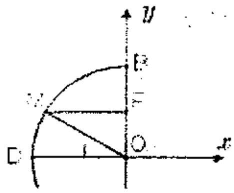
Câu 33: Đáp án B.

Từ giả thiết, các đỉnh của hình chữ nhật (*H*) là $A(-1;0), C(a;0), B(a;\sqrt{a}), D(-1;\sqrt{a})$.

Do đó, diện tích hình chữ nhật (*H*) là $(a+1)\sqrt{a}$. Xét phần của (*H*) (bị chia bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$) mà có chứa đỉnh *C*, diện tích của phần này là $\int_0^a \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}\sqrt{a}^3$. Như vậy ta phải có $(a+1)\sqrt{a} = 2.\frac{2}{3}\sqrt{a}^3 \Leftrightarrow a = 3$.

Câu 34: Đáp án B.

Chọn hệ trục *Oxy* sao cho $O(0;0), B(0;1), D(-1;0)$.



Lấy *M* sao cho $\widehat{MOD} = 30^0$, ta có $y_M = \frac{1}{2}$.

Phương trình đường tròn tâm *O* bán kính *OB* là $x^2 + y^2 = 1$.

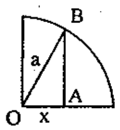
Theo đó, cung *MB* có phương trình $x = -\sqrt{1-y^2}$. Thể tích khối tròn xoay khi quay cung *MB* quanh trục *OB* là: $\pi\int_{\frac{1}{2}}^{0}\left(-\sqrt{1-y^2}\right)^2 dy = \frac{25}{4}\pi$

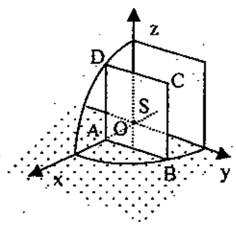
Tỉ số thể tích cần tìm bằng $\dfrac{\frac{4}{3}\pi - \frac{5}{24}\pi}{\frac{5}{24}\pi} = \frac{27}{5}$.

Câu 35: Đáp án D.

✓ **Cách 1:** Ta xét $\frac{1}{8}$ phần giao của hai trụ như hình

Ta gọi trục tọa độ *Oxyz*, như hình vẽ





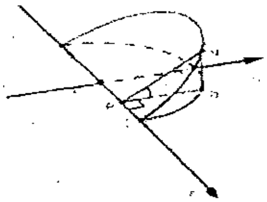
Khi đó phần giao (*H*) là một vật thể có đáy là một phần tư hình tròn tâm *O* bán kính 4, thiết diện của mặt phẳng vuông góc với *Ox* là một hình vuông có diện tích $S(x)=4^2-x^2$

Thể tích khối (*H*) là $\int_0^4 S(x)dx=\int_0^4(16-x^2)dx=\frac{128}{3}$. Vậy thể tích phần giao là $\frac{1024}{3}$.

✓ **Cách 2:** Dùng công thức tổng quát giao hai trụ $V=\frac{16}{3}R^3=\frac{1024}{3}$.

Câu 36: Đáp án A.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó khúc gỗ b1 có đáy là nửa hình tròn có phương trình $y=\sqrt{100-x^2}, x\in[-10;10]$



Một mặt phẳng cắt vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x, $x\in[-10;10]$ cắt khúc gỗ bé theo thiết diện có diện tích là S(x) (xem hình).

Dễ thấy $NP=y$ và $MN=NP.\tan 45°=y=\sqrt{100-x^2}$. Suy ra $S(x)=\frac{1}{2}.MN.PN=100-x^2$

khi đó thể tích khúc gỗ bé là: $V=\int_{-10}^{10}S(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-10}^{10}(100-x^2)dx=\frac{2000}{3}(cm^3)$.

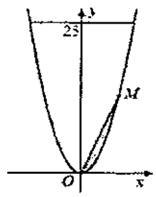
Câu 37: Đáp án B.

Giả sử $M(a;a^2)$ suy ra phương trình $OM: y=ax$

Khi đó diện tích khu vườn là:

$S=\int_0^a(ax-x^2)dx=\left(a\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a=\frac{a^3}{6}=\frac{9}{2}\Leftrightarrow a=3$

Khi đó $OM=3\sqrt{10}$



Câu 38: Đáp án C.

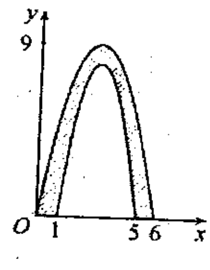
Gọi O là trung điểm của MN và trùng với gốc tọa độ $\Rightarrow M(-2;0), N(2;0)$.

PT parabol đỉnh $I(0;6)$ và đi qua hai điểm $C(-6;0), D(6;0)$ là: $(P): y=6-\frac{1}{6}x^2$.

SỞ GD & ĐT ĐỒNG THÁP - KIỂM TRA HỌC KÌ II LỚP 12 GDTHPT

Câu 46: Đáp án C.

Ta có: $-x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=6 \end{array}\right.$ và $-2x^2+12x-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right.$



Diện tích cần phủ sơn là:

$$S=\int_0^6\left(6x-x^2\right)dx-\int_1^5\left(12x-10-2x^2\right)dx$$

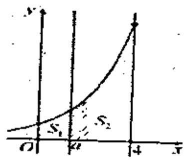
$$=\left(3x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^6-\left(6x^2-10x-\frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_1^5=36-\frac{64}{3}=\frac{44}{3}\left(m^2\right)$$

Do đó lượng sơn cần sử dụng: $\frac{44}{30}\approx 1,5$ lít

Câu 47: Đáp án C.

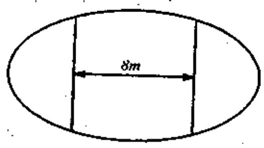
$S_1=\int_0^a 2^x dx=\frac{2^x}{\ln 2}\Bigg|_0^a=\frac{2^a-1}{\ln 2}; S_2=\int_a^4 2^x dx=\frac{2^x}{\ln 2}\Bigg|_a^4=\frac{2^4-1}{\ln 2}$

Từ $S_2=4S_1 \Leftrightarrow \frac{2^4-2^a}{\ln 2}=4.\frac{2^a-1}{\ln 2}\Leftrightarrow 2^a=4\Leftrightarrow a=2$ (thỏa mãn đk)



Câu 48: Đáp án B.

Phương trình elip là: $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1$.



Ta có: diện tích mảnh vườn cần tìm được chia làm 2 qua trục lớn, gọi diện tích 1 phần là S.

Gắn tâm elip là O, trục lớn là Ox, trục bé là Oy.

Sử dụng ứng dụng tích phân, diện tích phần này sẽ giới hạn qua đường cong $y=\sqrt{25-\frac{25x^2}{64}}$ và 2 đường $x=4; x=-4$.

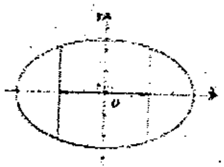
Ta có: $S=\int_{-4}^{4}\sqrt{25-\frac{25x^2}{64}}dx=38,2644591$ (Sử dụng Casio, tuy nhiên có thể giải thông thường qua đặt $x=8\sin t$)

Như vậy số tiền cần có là: $38,2644591.2.100000=7652891\approx 7653000$

Câu 49: Đáp án B.

Chọn hệ trục như hình vẽ với $2a=16; 2b=10$

Suy ra $a=8; b=5$



Khi đó phương trình elip là: $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1$

Xét đường cong nằm phía trên trục Ox khi đó phương trình đường cong là:

$$y = 25\sqrt{1-\frac{x^2}{64}}$$

Khi đó: $S = 5\int_{-4}^{4}\sqrt{1-\frac{x^2}{64}}dx$. Đặt $\sin t = \frac{x}{8}\left(t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right)$ suy ra $\cos tdt = \frac{1}{8}dx$

Đổi cận $\begin{cases} x=-4 \Rightarrow \sin t = -\frac{1}{2} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{6} \\ x = 4 \Rightarrow \sin t = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}\end{cases}$.

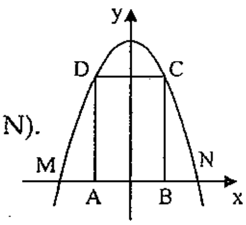
Do đó $S = 5\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1-\sin^2 t}.8\cos tdt = 40\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 tdt$

$$= 20\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2t)dt = 5\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{20\pi}{3}+10\sqrt{3}$$

Khi đó diện tích hình trồng hoa là $S_T = 2S = \frac{40\pi}{3}+20\sqrt{3}\left(m^2\right)$

Do đó số tiền ông An cần để trồng hoa là: $T = S_T.150000 = 11.479.337$

Câu 50: Đáp án A.



Chọn hệ trục như hình vẽ $M(-4;0); N(4;0)$

Khi đó phương trình Parabol có dạng

$y = ax^2+bx+c = a(x-4)(x+4)$ (vì parabol cắt trục Ox tại M và N).

Mặt khác, Parabol đi qua điểm $(0;16) \Rightarrow a = -1$

Do đó $(P): y = 16-x^2$

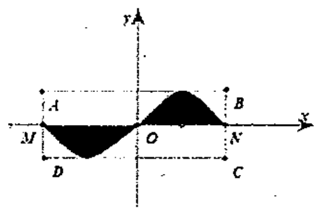
Khi đó diện tích cổng to là $S = \int_{-2}^{2}\left(16-x^2\right)dx = \left(16x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{176}{3}\left(m^2\right)$

Câu 51: Đáp án B.

Gọi O là trung điểm của MN. Chọn hệ trục tọa độ Oxy có trục $Ox \parallel BC, Oy \parallel AB$. Khi đó đồ thị dạng $y = A\sin bx$.

Do $AD = 2 \Rightarrow \max y = 1 \Rightarrow A = 1$

Do hàm số tuần hoàn với chu kì $2\pi \Rightarrow b = 1 \Rightarrow y = \sin x$



Diện tích phần đất trồng hoa là:

$$S = 2\int_0^{\pi}\sin x\,dx = -2\cos x\Big|_0^{\pi} = 4$$

Diện tích phần đất còn lại là: $2\pi.2-4 = 4(\pi-1)$

Câu 52: Đáp án D.

Xét hệ trục tọa độ oxy đặt vào tâm khu vườn , khi đó phương trình đường tròn tâm O là $x^2+y^2=36$. Khi đó phần nửa cung tròn phía trên trục Ox có phương trình $y=\sqrt{36-x^2}=f(x)$. Khi đó diện tích S của mảnh đất bằng 2 lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, đồ thị $y=f(x)$ và hai đường thẳng $x=-3;\ x=3$

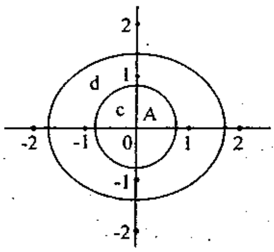
$$\Rightarrow S=2\int_{-3}^{3}\sqrt{36-x^2}\,dx$$

Đặt $x=6\sin t\Rightarrow dx=6\cos t dt$. Đổi cận: $x=-3\Rightarrow t=-\frac{\pi}{6};\ x=3\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow S=2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}36\cos^2 t dt=36\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(\cos 2t+1)\,dt=18(\sin 2t+2t)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=18\sqrt{3}+12\pi$$

Do đó số tiền cần dùng là $70000.S\approx 4821322$ đồng.

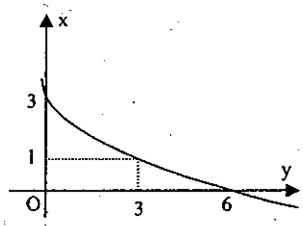
Câu 53: Đáp án C.



✓ **Phương pháp:** Đầu tiên phải tính được S của elip dựa vào phương trình elip

Ta chia để tính $\frac{1}{4}$ elip trước

✓ **Cách giải:** Phương trình elip: $\frac{x^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}+\frac{y^2}{1}=1$



Ta có: $y=\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}$ (một nửa của elip).

Diện tích của elip tạo sẽ là: $S=4\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}dx$

Đặt $x=\sqrt{2}\cos a\Rightarrow 1-\frac{x}{2}=\sin^2 a$. Suy ra:. $dx=-\sqrt{2}\sin a dx$

Đổi cận $x=\sqrt{2}\Rightarrow a=\frac{\pi}{4}; x=0$ thì $a=0;$

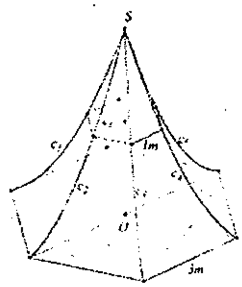
$$S_1=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}-\sqrt{2}\sin^2 a da=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\cos 2a-1)da=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2a-x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0}=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$

$S=4S_1=\sqrt{2}\pi$; Diện tích hình tròn là: $\frac{1}{2}\pi$; Diện tích trồng hoa: $S_b=\pi\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)$

Số kg phân bón là: $\frac{100}{\left(2\sqrt{2}-1\right)\pi}.\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)\pi=50$ kg.

Câu 54: Đáp án B.

Dựng hệ trục tọa độ Oxy (các em tự vẽ hình). Gọi S(x) là diện tích thiết diện do mặtphẳng có phương vuông góc với trục Ox với khối nước, mặt phẳng này cắt trục Ox tại điểm có hoành độ $h\ge x\ge 0$. Ta có: $\frac{r}{R}=\frac{h-x}{h}\Leftrightarrow r=\frac{(h-x)R}{h}$, vì thiết diện này là nửa đường tròn bán kính $r\Rightarrow S(x)=\frac{\pi r^2}{2}=\frac{\pi(h-x)^2R^2}{2h^2}$



Thể tích lượng nước chứa trong bình là:

$$V=\int_0^h S(x)dx=\frac{9\pi}{200}\int_0^{10}(10-x)^2dx$$

$$=\frac{9\pi}{200}\int_0^{10}\left(x^2+100-20x\right)dx=\frac{9\pi}{200}\left(\frac{x^3}{3}+200x-10x^2\right)\Bigg|_0^{10}=60\pi\left(cm^3\right)$$

Câu 55: Đáp án D.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O trùng với gốc tọa độ và SO song song với trục tung suy ra phương trình Parabol chứa cạnh bên lều là: $x=\frac{7-\sqrt{1+8y}}{2}$. Thiết diện vuông góc với SO và cắt các cạnh bên của lục giác đều có diện tích bằng

$$6.\frac{x^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{7-\sqrt{1+8y}}{2}\right)\left(m^2\right).$$

Suy ra thể tích trong lều bằng: $V=\int_0^6\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{7-\sqrt{1+8y}}{2}\right)dy=\frac{135\sqrt{3}}{8}\left(m^2\right)$.

Câu 56: Đáp án B.

Phương trình đường tròn là: $x^2+(y-30)^2=25$

Suy ra $y=30\pm\sqrt{25-x^2}$. Khi đó V được giới hạn bởi hình phẳng $\begin{cases}f(x)=30+\sqrt{25-x^2}\\ g(x)=30-\sqrt{25-x^2}\end{cases}$

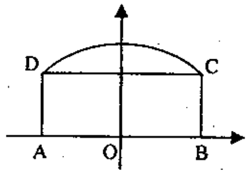
khi quay quanh trục Ox. Ta có: $V=\pi\int_{-5}^{5}\left|f^2(x)-g^2(x)\right|dx=1500\pi^2$.

TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU – LẦN 2

Câu 57: Đáp án D.

– **Phương pháp:**

+ Diện tích khung cửa bằng tổng diện tích hình chữ nhật và diện tích của phần parabol phía trên.



– **Cách giải:**

+ Diện tích hình chữ nhật là $S_1 = AB.BC = 5.1,5 = 7,5\left(m^2\right)$

Gọi đường cong parabol có phương trình $y = ax^2 + bx + C$

Đường cong có đỉnh $I(0;2)$ suy ra: $b = 0, c = 2 \Rightarrow y = ax^2 + 2$

Đường cong đi qua điểm: $C\left(\frac{5}{2};\frac{5}{3}\right) \Rightarrow a = -\frac{2}{25} \Rightarrow y = -\frac{2}{25}x^2 + 2$

Phần diện tích tạo bởi parabol và đường thẳng $y = 1,5$ là: $S_2 = \int_{-2,5}^{2,5}\left(\frac{-2}{25}x^2 + 0,5\right)dx = \frac{5}{3}$

$\Rightarrow S = S_1 + S_2 = \frac{55}{6} \Rightarrow T = \frac{55}{6}.700000 \approx 6417000$ đồng

Câu 58: Đáp án C.

Gọi V_1 là thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng D_1 được giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{9 - (x-4)^2}, y = 0, x = 4, x = 7$ quay trục tung

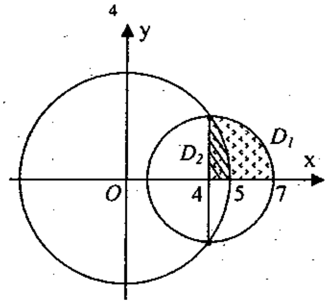
$\Rightarrow V_1 = \pi\int_4^7\left[9 - (x-4)^2\right]dx.$

Gọi V_2 là thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng D_2 được giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{25 - x^2}, y = 0, x = 4, x = 5$ quay trục tung $\Rightarrow V_2 = \pi\int_4^5\left(25 - x^2\right)dx.$

Khi đó thể tích khối tròn xoay cần tính bằng:

$V = V_1 - V_2 = \pi\int_4^7\left[9 - (x-4)^2\right]dx - \pi\int_4^5\left(25 - x^2\right)dx.$

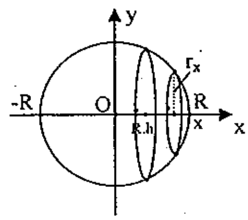
Suy ra $V = \frac{40}{3}\pi.$



ĐỀ THI THỬ SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BÌNH PHƯỚC

Câu 59: Đáp án D.

Thể tích của chỏm cầu có chiều cao h của khối cầu bán kính R là $V_c = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$



Với $h = R-3 = 2$ và bán kính $R=5$ suy ra

$$V_c = \pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right) = \pi 2^2\left(5-\frac{2}{3}\right) = \frac{52\pi}{3}.$$

Vậy thể tích của chiếc lu chứa được là:

$$V_l = V_C - 2V_c = \frac{4}{3}\pi.5^3 - 2.\frac{52\pi}{3} = 132\pi dm^3.$$

✓ **Chú ý:** Công thức thể tích khối chỏm cầu là: $V_c = \pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)$

Thể tích khối chỏm cầu có chiều cao h là:

$$V = \int_{R-h}^{R} S(x)dx = \int_{R-h}^{R} \pi\left(r_x\right)^2 dx = \int_{R-h}^{R} \pi\left(R^2-x^2\right)dx = \pi\left(R^2.x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{R-h}^{R} = \pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right).$$

Câu 60: Đáp án A.

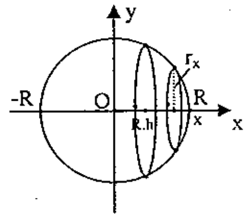
✓ **Chú ý:** Công thức thể tích khối chỏm cầu là: $V_C = \pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)$

Thể tích khối chỏm cầu có chiều cao h là:

$$V = \int_{R-h}^{R} S(x)dx = \int_{R-h}^{R} \pi\left(r_x\right)^2 dx = \pi\int_{R-h}^{R}\left(R^2-x^2\right) = \pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{R-h}^{R} = \pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)$$

Khi đó $V = \frac{4}{3}\pi R^3; V_1 = \pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right) = \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2\left(R-\frac{R}{6}\right) = \frac{5}{24\pi R^3}$

Do đó $\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{V-V_1} = \frac{5}{27}$



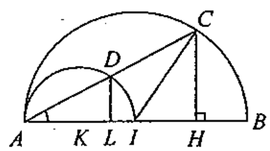
Câu 61: Đáp án B.

Gọi V_1, V_2, V_3, V_4 lần lượt là thể tích khối tròn xoay khi quay tam giác *AHC, ALD* và đa giác *LID, HBC* quanh *AB*. Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn lớn và nhỏ.

Ta có: $2.8\pi = \pi R^2 \Rightarrow R = 4$ và $r = 2$

Vì ΔIHC vuông tại *H*, $\widehat{CIH} = 60^0$ có: $\begin{cases} CH = IC\sin 60^0 = 4.\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \\ IH = \sqrt{IC^2 - CH^2} = \sqrt{16-12} = 2 \\ AL = \frac{1}{2}AH = 3 \end{cases}$

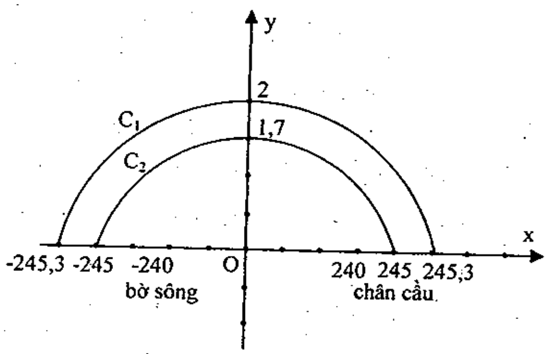
Khi đó $\begin{cases} V_1 = \frac{1}{3}AH.\pi CH^2 = \frac{1}{3}.6\pi.12 = 24\pi \\ V_2 = \frac{1}{3}AL.\pi DL^2 = \frac{1}{3}.3\pi.3 = 3\pi \end{cases}$



$$I=\frac{1}{4}\left(tf(t)\Big|_0^2-\int_0^2 f(t)dt\right)=\frac{1}{4}\left(2f(2)-0.f(0)-4\right)=7$$

Câu 67: Đáp án C.

Vì không có hình minh họa nên lời giải dưới đây chỉ mang tính chất tham khảo.



Gọi đường cong tương ứng với vành trên và vành dưới của cầu lần lượt là (C_1) và (C_2). Dựng hệ trục tọa độ Oxy sao cho đường biểu diễn mặt phẳng sông là trục Ox và vị trí cao nhất của cây cầu có tọa độ là $(0;2)$.

Xét thấy phương trình của 2 parabol (C_1) và (C_2) đều có dạng $y=ax^2+b$, dựa vào các điểm đã có trên hình, ta tìm được 2 phương trình tương ứng:

$$(C_1): y=f(x)=-\frac{2}{245,3^2}x^2+2$$

$$(C_2): y=f(x)=-\frac{1,7}{245^2}x^2+1,7$$

Diện tích mặt cắt cây cầu: $S=2\left(\int_0^{245,3} f(x)dx-\int_0^{245} g(x)dx\right)=\frac{494}{5}\left(m^2\right)$

Suy ra thể tích cây cầu bằng tích của ***diện tích mặt cắt và bề rộng cây cầu,*** tức bằng 494 m³.

Câu 68: Đáp án A.

Ta có:

Thể tích cần tìm là:

$$V=\int_{-3}^{3} S(x)dx=\int_{-3}^{3}\pi r^2(x)\mathrm{d}x=\int_{-3}^{3}\pi.(25-x^2)dx=132\pi(dm^3)=132(l)$$

$$V=\int_{-3}^{3} S(x)dx=\int_{-3}^{3}\pi r^2(x)dx=\int_{-3}^{3}\pi\left(25-x^2\right)dx=132\pi\left(dm^3\right)=132\pi(l)$$

TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

<u>**Trong chuyển động chúng ta có công thức:**</u>

$s = \int v(t)\,dt$ $\qquad\qquad$ $v = \int a(t)\,dt + v_0$

<u>**Khi vật dừng lại thì vận tốc v = 0.**</u>

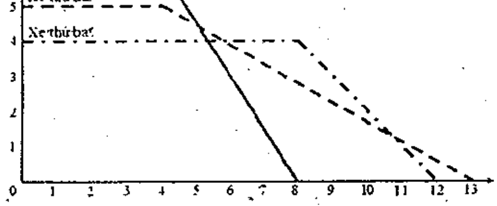
Câu 1: Một viên đạn được bắn theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu 29,4m/s. Gia tốc trọng trường là 9,8m/s². Tính quãng đường S viên đạn đi được từ lúc bắn lên cho đến khi chạm đất.

A. $S = 88,2m$ **B.** $S = 88m$ **C.** $S = 88,5m$ **D.** $S = 89m$

Câu 2: Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 7t\,(m/s)$. Đi được 5(s), người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -70\,(m/s^2)$. Tính quãng đường *S(m)* đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

A. $S = 94,00(m)$ **B.** $S = 96,26(m)$ **C.** $S = 87,50(m)$ **D.** $S = 95,70(m)$

Câu 3: Tại một thời điểm t trước lúc đỗ xe ở trạm dừng nghỉ, ba xe đang chuyển động đều với vận tốc lần lượt là 60*km/h*; 50*km/h* và 40*km/h*. Xe thứ nhất đi thêm 4 phút thì bắt đầu chuyển động chậm dần đều và dừng hẳn ở trạm tại phút thứ 8; xe thứ hai đi thêm 4 phút, bắt đầu chuyển động chậm dần đều và dừng hẳn ở trạm tại phút thứ 13, xe thứ hai đi thêm 8 phút, bắt đầu chuyển động chậm dần đều và dừng hẳn ở trạm tại phút thứ 12. Đồ thị biểu diễn vận tốc ba xe theo thời gian như sau: (đơn vị trục tung *x* 10*km/h*, đơn vị trục hoành là phút). Giả sử tại thời điểm t trên, ba xe đang cách trạm lần lượt là d_1, d_2, d_3. So sánh các khoảng cách này.



A. $d_1 < d_2 < d_3$ **B.** $d_2 < d_3 < d_1$ **C.** $d_3 < d_1 < d_2$ **D.** $d_1 < d_3 < d_2$

Câu 4: Một vận động viên đua xe F đang chạy với vận tốc 10m/s thì anh ta tăng tốc với gia tốc $a(t) = 6t\left(m/s^2\right)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc tăng tốc. Hỏi quãng đường xe của anh ta đi được trong thời gian 10(s) kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là bao nhiêu?

A.1100 m **B.**100 m **C.**1010 m **D.**1110 m

Câu 5: Một vật chuyển động theo quy luật $s = 9t^2 - t^3$ với t (giây) là thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 5 giây, kể từ lúc vật bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A.54(m/s) **B.**15(m/s) **C.**27(m/s) **D.**100(m/s)

Câu 6: Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng nằm ngang (chiều dương hướng sang phải) với gia tốc phụ thuộc thời gian $a(t) = 2t - 7\left(m/s^2\right)$. Biết vận tốc đầu bằng 10(m/s), hỏi trong 6 giây đầu tiên, thời điểm nào chất điểm ở xa nhất về phía bên phải?

A.1(s). **B.**2(s). **C.**5(s). **D.**6(s).

Câu 7: Tại một nơi không có gió, một chiếc khí cầu đang đứng yên ở độ cao 162 (mét) so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật $v(t) = 10t - t^2$. Trong đó t(phút) là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, v(t) được tính theo đơn vị mét/phút (m/p). Nếu như vậy thì khi bắt đầu tiếp đất vận tốc v của khí cầu là:

A. $v = 7(m/p)$ **B.** $v = 9(m/p)$ **C.** $v = 5(m/p)$ **D.** $v = 3(m/p)$

Câu 8: Một vật chuyển động theo quy luật $s = 6t^2 - t^3$, với t(giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 5 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 12 m/s. **B.** 15 m/s. **C.** 100 m/s. **D.** 54 m/s.

Câu 9: Một vận động viên đua xe F đang chạy với vận tốc $10(m/s)$ thì anh ta tăng tốc với gia tốc $a(t) = 6t\left(m/s^2\right)$, trong đó t khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc tăng tốc. Hỏi quãng đường xe của anh ta đi được trong thời gian 8s kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là bao nhiêu?

A. 592 m **B.** 100m **C.** 1010m **D.** 1110m

CHUYÊN THÁI BÌNH LẦN 1

Câu 10: Một chất điểm chuyển động theo qui luật $s = 6t^2 - t^3$ (trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây mà chất điểm bắt đầu chuyển động). Tính thời điểm t (giây) mà tại đó vận tốc (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.

A. $t = 2$ **B.** $t = 4$ **C.** $t = 1$ **D.** $t = 3$

CHUYÊN HẠ LONG

Câu 11: Một vật chuyển động với vận tốc thay đổi theo thời gian được tính bởi công thức $v(t) = 3t + 2$, thời gian tính theo đơn vị giây, quãng đường vật đi được tính theo đơn vị *mét*. Biết tại thời điểm $t = 2s$ thì vật đi được quãng đường là $10m$. Hỏi tại thời điểm $t = 30s$ thì vật đi được quãng đường là bao nhiêu?

A. 1410 m. **B.** 1140 m. **C.** 300 m. **D.** 240 m.

KỲ KIỂM TRA KHẢO SÁT LỚP 12 TRUNG HỌC PHỔ THÔNG – SỞ HÀ NỘI

Câu 12: Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 7t(m/s)$. Đi được 5(s), người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -17,5(m/s^2)$. Tính quãng đường S(m) đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

A. $S = 94,00(m)$ **B.** $S = 122,5(m)$ **C.** $S = 87,50(m)$ **D.** $S = 95,70(m)$

Câu 13: Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng nằm ngang (chiều dương hướng sang phải) với gia tốc phụ thuộc thời gian t (s) là $a(t) = 2t - 7(m/s^2)$. Biết vận tốc ban đầu bằng 10 (m/s), hỏi trong 5 giây đầu tiên, thời điểm nào chất điểm ở xa nhất về phía bên phải?

A. 5 (s) **B.** 6 (s) **C.** 1 (s) **D.** 2 (s)

Câu 14: Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 15m/s$ thì tăng vận tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 4t(m/s^2)$. Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

A. $68,25m$. **B.** $70,25m$. **C.** $69,75m$. **D.** $67,25m$.

Câu 15: Một ô tô đang chạy đều với vận tốc 15 (m/s) thì phía trước xuất hiện chướng ngại vật nên người lái đạp phanh gấp. Kể từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với gia tốc $-a(m/s^2)$. Biết ô tô chuyển động thêm được 20m thì dừng hẳn. Hỏi a thuộc khoảng nào dưới đây

A. $(3;4)$ **B.** $(4;5)$ **C.** $(5;6)$ **D.** $(6;7)$

Câu 16: Một học sinh đi học từ nhà đến trường bằng xe đạp với vận tốc thay đổi theo thời gianđược tính bởi công thức $v(t) = 40t + 100$ (m/phút). Biết rằng sau khi đi được 1 phút thì quãngđường học sinh đó đi được là *120 m*.Biết quãng đường từ nhà đến trường là *3 km*, hỏi thờigian học sinh đó đi đến trường là bao nhiêu phút.

A. 9 phút. **B.** 15 phút. **C.** 10 phút. **D.** 12 phút.

Câu 17: Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t được tính theo công thức $f(t)=45t^2-t^3$, $0\le t\le 25$. Nếu coi $f(t)$ là hàm số xác định trên đoạn $[0;25]$ thì đạo hàm $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t. Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất?

A.Ngày thứ 16 **B.**Ngày thứ 15. **C.**Ngày thứ 5. **D.**Ngày thứ 19.

Câu 18: Một vật chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t)=160-10t(m/s)$. Hỏi rằng trong 3s trước khi dừng hẳn vật di chuyển được bao nhiêu mét?

A. 16 m **B.** 130 m **C.** 170 m **D.** 45 m

Câu 19: Một ô tô đang chạy với vận tốc 12 (m/s) thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-6t+12$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

A. 24 m. **B.** 12 m. **C.** 6 m. **D.** 0,4 m.

Câu 20: Một vật chuyển động với vận tốc $10m/s$ thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian t là $a(t)=3t+t^2$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng $10s$ kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

A. $\frac{130}{3}km.$ **B.** $130km.$ **C.** $\frac{3400}{3}km.$ **D.** $\frac{4300}{3}km.$

Câu 21: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $v=\frac{1}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2+2t+20$ (t tính theo giây). Trong những giây đầu kể từ giây thứ nhất, vận tốc của chất điểm đạt giá trị nhỏ nhất tại thời điểm nào?

A. $t=1$ giây **B.** $t=3$ giây **C.** $t=5$ giây **D.** $t=16$ giây

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Đáp án A.

Ta có: $v(t)=\int a(t)dt=-9,8t+C$

Khi $t=0$ thì $v=29,4$. Suy ra: $C=29,4$. Vậy $v(t)=-9,8t+29,4$

Khi viên đạn có vận tốc bằng 0 thì $t=\frac{29,4}{9,8}=3$. Suy ra quãng đường đi được khi tới đỉnh là: $S=\int_0^3 v(t)dt=\int_0^3(-9,8t+29,4)dt=\left(\frac{t^2}{2}+29,4t\right)\Big|_0^3=44,1(m)$

Khi đi tới đỉnh thì viên đạn rơi xuống đất đúng bằng với quãng đường đi lên được. Do đó tổng quãng đường đi được cho đến khi chạm đất là $2S = 88,2$.

Câu 2: Đáp án B.

Tại $t = 5, v(5) = 35$. Khi đó bắt đầu phanh với $a = -70$ thì cần 0.5s để xe dừng hẳn. Vậy là xe chuyển động trong thời gian là 5.5s với 5s đầu là theo $v(t)$ và lúc sau đi với thời gian 0.5 với $v_2(t) = 70t$. Vậy nên quãng đường đi được là:

$$\int_0^5 7t dt + \int_0^{0,5} 70t.dt = 96,25$$

✓ **Dùng vật lý:** Ta có công thức $v_t^2 - v_0^2 = 2aS$. Trong 5s đầu thì gia tốc $a = 7$ nên ta có quãng được là: $S = \frac{35^2 - 0}{2.7} + \frac{0^2 - 35^2}{2.(-70)} = 96,25$.

Câu 3: Đáp án D.

Ta có $v = v_0 - at, a > 0$

✓ **Xe thứ 1:** Gia tốc $a = 60\frac{60}{4} = 900\left(km/h^2\right) \Rightarrow v = 60 - 900t$

Khoảng cách $d_1 = \int_0^{\frac{1}{60}} (60 - 900t) dt + 60.\frac{4}{60} = 6(km)$

✓ **Xe thứ 2:** Gia tốc $a = 50\frac{60}{9} = \frac{1000}{3}\left(km/h^2\right) \Rightarrow v = 50 - \frac{1000t}{3}$

Khoảng cách $d_2 = \int_0^{\frac{9}{60}} \left(50 - \frac{1000t}{3}\right) dt + 50.\frac{4}{60} = \frac{85}{12} \approx 7,1(km)$

✓ **Xe thứ 3:** Gia tốc $a = 40\frac{60}{4} = 600\left(km/h^2\right) \Rightarrow v = 40 - 600t$

Khoảng cách $d_3 = \int_0^{\frac{4}{60}} (40 - 600t) dt + 40.\frac{8}{60} = \frac{20}{3} \approx 6,7(km)$.

Câu 4: Đáp án A.

Ta có: $v(t) = \int a(t) dt = \int 6t dt = 3t^2 + C; v(0) = 10 \Rightarrow C = 10 \Rightarrow v(t) = 3t^2 + 10$

Vậy quãng đường xe của anh ta đi được trong thời gian 10(s) kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là: $S=\int_0^{10} dt=\int_0^{10}\left(3t^2+10\right)dt=1100m$

Câu 5: Đáp án C.

$s=9t^2-t^3 \Rightarrow v=s'=18t-3t^2 \Rightarrow v'=18-6t=0 \Leftrightarrow t=3$

Khi $t=3 \Rightarrow v=27; t=5 \Rightarrow v=15 \Rightarrow v_{max}=27$.

Câu 6: Đáp án B.

Từ giả thiết, vận tốc của chất điểm tại thời điểm t là $v(t)=\int_0^t a(u)du+v(0)=t^2-7t+10$.

Suy ra, tọa độ của chất điểm tại thời điểm t là: $x(t)=\int_0^t v(u)du=\frac{1}{3}t^3-\frac{7}{2}t^2+10t+C$

Xét hàm số $f(t)=\frac{1}{3}t^3-\frac{7}{2}t^2+10t$ với $t\in[0;6]$ ta có $f'(t)=t^2-7t+10; f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=2\\t=5\end{array}\right.$

Ta có $f(0); f(2)=\frac{26}{3}; f(5)=\frac{25}{6}; f(6)=6$ do đó lớn nhất tại thời điểm $2s$.

Câu 7: Đáp án B.

Khi bắt đầu tiếp đất vật chuyển động được quãng đường là $s=162m$

Ta có: $s=\int_0^t\left(10t-t^2\right)dt=\left(5t^2-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^t=5t^2-\frac{t^3}{3}$ (trong đó t là thời điểm vật tiếp đất)

Cho $5t^2-\frac{t^3}{3}=162 \Rightarrow t=9$ (Do $v(t)=10t-t^2 \Rightarrow 0\le t\le 10$)

Khi đó vận tốc của vật là: $v(9)=10.9-9^2=9(m/p)$.

Câu 8: Đáp án A.

Ta có $v=s'=12t-3t^2$. Xét hàm số $f(t)=12t-3t^2$ với $t\in[0;5]$

Ta có $f'(t)=12-6t; f'(t)=0 \Leftrightarrow t=2$. Ta có $f(0)=0; f(2)=12; f(5)=-15$.

Do đó vận tốc lớn nhất vật đạt được là 12 Chọn A.

Câu 9: Đáp án A.

Ta có $v(t)=v_0+\int a(t)dt=10+\int 6t\,dt=10+3t^2\,(m/s)$

Suy ra quãng đường đi được sẽ bằng $S=\int_0^8 v(t)dt=\int_0^8\left(10+3t^2\right)dt=\left(10+t^3\right)\Big|_0^8=592m$

CHUYÊN THÁI BÌNH LẦN 1

Câu 10: Đáp án A.

$v = s' = 12t - 3t^2$. Phương trình vận tốc là phương trình bậc 2 có hệ số $a = -3 < 0$ nên nó đạt giá trị lớn nhất tại giá trị $t = \frac{-b}{2a}$ hay tại $t = 2$.

CHUYÊN HẠ LONG

Câu 11: Đáp án A.

Ta có: $s(t) = \int v(t)dt = \int (3t+2)dt = \frac{3}{2}t^2 + 2t + C, s(2) = 10 \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow S(30) = 1410$

Câu 12: Đáp án B.

Ta có

- Trong 5(s) đầu tiên, $v_1 = 7t(m/s) \Rightarrow S_1 = \frac{7}{2}t^2 = \frac{7}{2}.5^2 = 87,5(m)$
- Kể từ khi phanh, $v_2 = 35 - 17,5t(m/s) \Rightarrow v_2 = 0 \Leftrightarrow t = 2$
- $\Rightarrow S_2 = \int_0^2 (35 - 17,5t)dt = 35(m)$

Suy ra quãng đường ô tô đi được bằng $S = S_1 + S_2 = 122,5(m)$

Câu 13: Đáp án D.

Vận tốc của vật được tính theo công thức $v(t) = 10 + t^2 - 7t(m/s)$

Suy ra quãng đường vật đi được tính theo công thức $S(t) = \int v(t)dt = \frac{t^3}{3} - \frac{7}{2}t^2 + 10t(m)$

Ta có $S'(t) = t^2 - 7t + 10 \Rightarrow S'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 7t + 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 5 \end{array}\right.$

Suy ra $\begin{cases} S(0) = 0 \\ S(2) = \frac{26}{3} \Rightarrow \underset{[0;6]}{\text{Max}}\, S(t) = S(2) = \frac{26}{3} \\ S(5) = \frac{25}{6} \end{cases}$

Câu 14: Đáp án C.

Ta có $v(t) = \int a(t)dt = \int (t^2 + 4t)dt = \frac{t^3}{3} + 2t^2 + C(m/s)$

Do khi bắt đầu tăng tốc $v_o = 15$ nên $v_{(t=0)} = 15 \Rightarrow C = 15 \Rightarrow v(t) = \frac{t^3}{3} + 2t^2 + 15$

Khi đó quãng đường đi được bằng

$$S = \int_0^3 v(t)dt = \int_0^3 \left(15 + \frac{t^3}{3} + 2t^2\right)dt = \left(15t + \frac{t^4}{12} + \frac{2}{3}t^3\right)\Bigg|_0^3 = 69,75m$$

Câu 15: Đáp án C.

Ta có $v(t) = 15 - a.t(m/s) \Rightarrow v(t) = 0 \Leftrightarrow 15 - a.t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{15}{a}(s)$

Ô tô đi được thêm được 20m, suy ra:

$$\int_0^{\frac{a}{15}} v(t)dt = 20 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{15}{a}} (15 - a.t)dt = 20 \Leftrightarrow \left(15t - \frac{1}{2}a.t^2\right)\Bigg|_0^{\frac{15}{a}} = 20 \Leftrightarrow 15\frac{15}{a} - \frac{1}{2}a.\frac{15^2}{a^2} = 20$$

$$\Leftrightarrow \frac{225}{a} - \frac{225}{2a} = 20 \Leftrightarrow a = 5,625(m/s^2) \Rightarrow a \in (5;6)$$

Câu 16: Đáp án C.

Ta có: $S(t) = \int (40t + 100)dt = 20t^2 + 100t + C$

$S(1) = 120 \Leftrightarrow 120 = 20 + 100 + C \Rightarrow C = 0$

$$S(t) = 3000 \Leftrightarrow 20t^2 + 100t - 3000 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 10 \\ t = -15(l) \end{array}\right.$$

Vậy thời gian đi đến trường là 10 phút.

Câu 17: Đáp án B.

Ta có: $f'(t) = 90t - 3t^2$. Xét hàm số $g(t) = 90t - 3t^2$ là hàm chỉ tốc độ truyền bệnh tại thời điểm t. Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = g(t)$ trên $[0;25]$.

Ta có: $g'(t) = 90 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 15$

Ta có: $g(0) = 0; g(15) = 675; g(25) = 375$. Vậy ngày thứ 15 là ngày mà tốc độ truyền bệnh lớn nhất.

Câu 18: Đáp án D.

✓ **Phân tích:** Cho đến khi vật dừng lại thì vận tốc của vật bằng 0 tức là: $160 - 10t = 0 \Leftrightarrow t = 16$

Nên quãng đường vật đi được trong 3s cuối được tính bằng:

$$\int_{13}^{16}(160-10t)\,dt=\left(160t-5t^2\right)\Big|_{13}^{16}=45\,km$$

Câu 19: Đáp án B.

Khi xe dừng thì $v(t)=0\Leftrightarrow t=2$. Ta có $s'(t)=v(t)\Rightarrow s=\int_0^2(-6t+12)\mathrm{d}t=\left(-3t^2+12t\right)\Big|_0^2=12$

Câu 20: Đáp án D.

Gọi $v(t)$ là vận tốc của vật. Ta có $v(t)=\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2+C$.

Xem thời điểm tăng tốc có mốc thời gian bằng 0. Ta có $v(0)=10\Rightarrow C=10$.

Suy ra $v(t)=\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2+10$.

Vậy quãng đường đi được $S=\int_0^{10}\left(\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2+10\right)dt=\frac{4300}{3}$.

Câu 21: Đáp án A.

Xét hàm số $f(t)=\frac{1}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2+2t+20$ trên $[1;20]$

$f'(t)=t^3-3t+2;\ f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-2\,(l)\end{array}\right.$

Ta so sánh các giá trị $\{f(1);f(20)\}$ thì thấy $f(1)<f(20)$ nên vận tốc của chất điểm đạt GTNN tại thời điểm $t=1$ giây.

Phần 5:

BIỂU THỨC TỔ HỢP – NHỊ THỨC NEWTON

Bài 1. (CĐ Sư phạm Bến Tre khối A 2002)

Có bao nhiêu số tự nhiên x thỏa: $C_x^1+6C_x^2+6C_x^3=9x^2-14x$

A. 0 B. 3 C. 2 D. 1

Bài giải

Điều kiện: $\begin{cases} x\ge 1\\ x\ge 2\\ x\ge 3\\ x\in\mathbb{N}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 3\\ x\in\mathbb{N}\end{cases}$

$$PT \Leftrightarrow x+6\frac{x!}{2!(x-2)!}+6\frac{x!}{3!(x-3)!}=9x^2-14x$$

$$\Leftrightarrow x+3x(x-1)+x(x-1)(x-2)=9x^2-14x$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2-9x+14\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\ (\text{loại})\\ x=7\ (\text{loại})\\ x=2\end{array}\right. \Leftrightarrow x=2$$

Bài 2. (ĐH khối D 2005 dự bị 2)

Có bao nhiêu số nguyên $n>1$ thoả mãn: $2P_n+6A_n^2-P_nA_n^2=12$

A. 1 B. 4 C. 3 D. 2

Bài giải

Ta có: $2P_n+6A_n^2-P_nA_n^2=12\left(n\in\mathbb{N},n>1\right)$

$$\Leftrightarrow 2n!+\frac{6.n!}{(n-2)!}-n!\frac{n!}{(n-2)!}=12 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!}(6-n!)-2(6-n!)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6-n!=0\\ \dfrac{n!}{(n-2)!}-2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n!=6\\ n(n-1)-2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=3\\ n^2-n-2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=3\\ n=2(\text{vì } n\ge 2)\end{array}\right.$$

Vậy: $n=2$ hoặc $n=3$

Bài 3. (ĐH An Ninh khối A 2001)

Tìm các số âm trong dãy số $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ với $X_n=\dfrac{A_{n+4}^4}{P_{n+2}}-\dfrac{143}{4P_n}\ (n=1,2,3,\ldots)$

A. x_1 và x_2 **B.** x_3 và x_4 **C.** x_2 và x_3 **D.** x_1,x_2 và x_3

Bài giải

Ta phải tìm các số tự nhiên n > 0 thoả mãn:

$$X_n = \frac{A_{n+4}^4}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_n} < 0 \Leftrightarrow (n+3).(n+4) - \frac{143}{4} < 0$$

$$\Leftrightarrow 4n^2 + 28n - 95 < 0 \Leftrightarrow -\frac{19}{2} < n < \frac{5}{2}$$

Vì n là số nguyên dương nên ta được n = 1, 2 ⇒ Các số hạng âm của dãy là x_1, x_2

Bài 4. (ĐH khối D 2003 dự bị 2)

Có bao nhiêu số tự nhiên n thoả mãn: $C_n^2 C_n^{n-2} + 2C_n^2 C_n^3 + C_n^3 C_n^{n-3} = 100$

A. 0 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 2

Bài giải

Ta có: $C_n^2 C_n^{n-2} + 2C_n^2 C_n^3 + C_n^3 C_n^{n-3} = 100$

$$\Leftrightarrow \left(C_n^2\right)^2 + 2C_n^2 C_n^3 + \left(C_n^3\right)^2 = 100 \Leftrightarrow \left(C_n^2 + C_n^3\right)^2 = 100 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 10$$

$$\Leftrightarrow \left(n^2 - n\right)(n+1) = 60 \Leftrightarrow n^3 - n - 60 = 0 \Leftrightarrow (n-4)\left(n^2 + 4n + 15\right) = 0 \Leftrightarrow n = 4$$

Bài 5. (ĐH Bách khoa HN khối A, D 2000)

Có bao nhiêu số tự nhiên x thỏa: $\frac{1}{2}A_{2x}^2 - A_x^2 \le \frac{6}{x}.C_x^3 + 10$

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Bài giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ 2 \le 2x \\ 2 \le x \\ 3 \le x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ x \ge 3 \end{cases}$

Ta có: $\frac{1}{2}A_{2x}^2 - A_x^2 \le \frac{6}{x}.C_x^3 + 10 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.2x(2x-1) - x(x-1) \le \frac{6}{x}.\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} + 10$

$$\Leftrightarrow x^2 \le x^2 - 3x + 12 \Leftrightarrow x \le 4$$

Kết hợp điều kiện, ta được: x = 3, x = 4.

Bài 6. (ĐH khối B 2002)

Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{2n}$ (n ≥ 2, n nguyên) nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng số tam giác có các đỉnh là 3 trong 2n điểm $A_1A_2...A_{2n}$ nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 2n điểm $A_1, A_2, ...A_{2n}$. Tìm n?

A. n = 8 **B.** n = 12 **C.** n = 4 **D.** n = 11

Bài giải

Số tam giác có các đỉnh là 3 trong 2n điểm $A_1, A_2, ...A_{2n}$ là C_{2n}^3.

Gọi đường chéo của đa giác đều $A_1A_2...A_{2n}$ đi qua tâm đường tròn (O) là đường chéo lớn thì đa giác đã cho có n đường chéo lớn.

Mỗi hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 2n điểm $A_1, A_2, ...A_{2n}$ có các đường chéo là hai đường chéo lớn. Ngược lại, với mỗi cặp đường chéo lớn ta có các đầu mút của chúng là 4 đỉnh của một hình chữ nhật. Vậy số hình chữ nhật nói trên bằng số cặp đường chéo lớn của đa giác $A_1, A_2, ...A_{2n}$, tức C_n^2.

Theo giả thiết thì: $C_{2n}^3 = 20C_n^2 \Leftrightarrow \dfrac{(2n)!}{3!(2n-3)!} = 20.\dfrac{n!}{2!(n-2)!}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} = 20\dfrac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow 2n-1 = 15 \Leftrightarrow n = 8$

KHAI TRIỂN NEWTON

Bài 7. (ĐHQG HN khối B 2000)

Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của biểu thức sau: $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[4]{x^3}\right)^{17}$, $x \neq 0$

A. 24310 **B.** 23049 **C.** 12339 **D.** 29103

Bài giải

Số hạng tổng quát của khai triển là:

$$C_{17}^k\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^{17-k}\left(x^{\frac{3}{4}}\right)^k = C_{17}^k\left(x^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{17}{12}k-\frac{34}{3}} \qquad (k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le 17)$$

Để số hạng không chứa x thì $\dfrac{17}{12}k - \dfrac{34}{3} = 0 \Rightarrow k = 8$

Vậy số hạng cần tìm là số hạng thứ 9 của khai triển và bằng C_{17}^8

Bài 8. (ĐHSP HN khối A 2000)

Trong khai triển nhị thức $\left(x\sqrt[3]{x} + x^{-\frac{28}{15}}\right)^n$, hãy tìm số hạng không phụ thuộc vào x, biết rằng $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79$

A. 812 **B.** 792 **C.** 293 **D.** 392

Bài giải

* Xác định n: $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79 \Leftrightarrow 1 + n + \dfrac{n(n-1)}{2} = 79$

$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 12 \\ n = -13 \text{(loại)} \end{cases}$

* Ta có: $\left(x\sqrt[3]{x}+x^{-\frac{28}{15}}\right)^{12}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^{k}\left(x^{\frac{4}{3}}\right)^{k}\left(x^{-\frac{28}{15}}\right)^{12-k}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^{k}x^{\frac{48}{15}k-\frac{112}{5}}$

Số hạng không phụ thuộc $x \Leftrightarrow \frac{48}{15}k-\frac{112}{5}=0 \Leftrightarrow k=7$

Vậy số hạng cần tìm là: $C_{12}^{7}=792$

Bài 9. (ĐHSP HN khối B, D 2000)

Biết tổng tất cả các hệ số của khai triển nhị thức $\left(x^2+1\right)^n$ bằng 1024, hãy tìm hệ số a (a là số tự nhiên) của số hạng ax^{12} trong khai triển đó.

A. 120 **B.** 211 **C.** 211 **D.** 312

Bài giải

Ta có: $\left(x^2+1\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^{2k}$ (1)

Số k ứng với số hạng ax^{12} thoả mãn pt: $x^{12}=x^{2k} \Rightarrow k=6$

Trong (1) cho x = 1 thì $\sum_{k=0}^{n}C_n^k=2^n$

Từ giả thiết $\Rightarrow \sum_{k=0}^{n}C_n^k=1024 \Leftrightarrow 2n=1024 \Leftrightarrow n=10$

Vậy hệ số cần tìm là: $C_{10}^{6}=210$

Bài 10. (CĐ Cảnh sát nhân dân khối A 2000)

Tìm hệ số của x^5 trong khai triển của biểu thức: $(x+1)^4+(x+1)^5+(x+1)^6+(x+1)^7$

A. 28 **B.** 13 **C.** 36 **D.** 16

Bài giải

Hệ số của x^5 trong khai triển của biểu thức: $(x+1)^4+(x+1)^5+(x+1)^6+(x+1)^7$ là:

$C_5^5+C_6^5+C_7^5=1+\frac{6!}{5!1!}+\frac{7!}{5!2!}=28$

Bài 11. (ĐH khối A 2003)

Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức Newton của $\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^n$, biết rằng: $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^{n}=7(n+3)$ (n nguyên dương, x > 0).

A. 194 **B.** 346 **C.** 495 **D.** 102

Bài giải

Ta có: $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^{n}=7(n+3) \Leftrightarrow \left(C_{n+3}^{n+1}+C_{n+3}^{n}\right)-C_{n+3}^{n}=7(n+3)$

$\Leftrightarrow \frac{(n+2)(n+3)}{2!}=7(n+3) \Leftrightarrow n+2=7.2!=14 \Leftrightarrow n=12$

Số hạng tổng quát của khai triển là: $C_{12}^{k}\left(x^{-3}\right)^{k}\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{12-k}=C_{12}^{k}x^{\frac{60-11k}{2}}$

Ta có: $x^{\frac{60-11k}{2}}=x^{8}\Leftrightarrow\frac{60-11k}{2}=8\Leftrightarrow k=4$

Do đó hệ số của số hạng chứa x^8 là $C_{12}^{4}=\frac{12!}{4!(12-4)!}=495$

Bài 12. (ĐH khối A 2005 dự bị 2)

Tìm hệ số của x^7 trong khai triển đa thức $(2-3x)^{2n}$, trong đó n là số nguyên dương thoả mãn: $C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{3}+C_{2n+1}^{5}+...+C_{2n+1}^{2n+1}=1024$

A. $-C_{10}^{15}.3^{15}.2^{3}$ **B.** $C_{10}^{7}.3^{8}.2^{4}$ **C.** $C_{10}^{7}.3^{17}.2^{3}$ **D.** $-C_{10}^{7}.3^{7}.2^{3}$

Bài giải

Ta có: $(1+x)^{2n+1}=C_{2n+1}^{0}+C_{2n+1}^{1}x+C_{2n+1}^{2}x^{2}+C_{2n+1}^{3}x^{3}+...+C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n+1}$

Cho x = 1 ta có: $2^{2n+1}=C_{2n+1}^{0}+C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{2}+C_{2n+1}^{3}+...+C_{2n+1}^{2n+1}$ (1)

Cho x = –1 ta có: $0=C_{2n+1}^{0}-C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{2}-C_{2n+1}^{3}+...-C_{2n+1}^{2n+1}$ (2)

Lấy (1) – (2) $\Rightarrow 2^{2n+1}=2\left(C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{3}+...+C_{2n+1}^{2n+1}\right)$

$\Rightarrow 2^{2n}=C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{3}+...+C_{2n+1}^{2n+1}=1024\Rightarrow 2n=10$

Ta có: $(2-3x)^{10}=\sum_{k=0}^{10}(-1)^{k}C_{10}^{k}2^{10-k}(3x)^{k}$

Suy ra hệ số của x^7 là $-C_{10}^{7}.3^{7}.2^{3}$

Bài 13. (ĐH khối A 2006)

Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển nhị thức Newton của $\left(\frac{1}{x^4}+x^7\right)^n$, biết rằng: $C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{2}+...+C_{2n+1}^{n}=2^{20}-1$

A. 110 **B.** 410 **C.** 291 **D.** 210

Bài giải

Từ giả thiết suy ra: $C_{2n+1}^{0}+C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{2}+...+C_{2n+1}^{n}=2^{20}$ (1)

Vì $C_{2n+1}^{k}=C_{2n=1}^{2n+1-k}$, $\forall k,\ 0\le k\le 2n+1$ nên:

$C_{2n+1}^{0}+C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{2}+...+C_{2n+1}^{n}=\frac{1}{2}\left(C_{2n+1}^{0}+C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{2}+...+C_{2n+1}^{2n+1}\right)$ (2)

Từ khai triển nhị thức Newton của $(1+1)^{2n+1}$ suy ra:

$C_{2n+1}^{0}+C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{2}+...+C_{2n+1}^{2n+1}=(1+1)^{2n+1}=2^{2n+1}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: $2^{2n} = 2^{20} \Leftrightarrow n = 10$.

Ta có: $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^n = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \left(x^{-4}\right)^{10-k} \left(x^7\right)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^{11k-40}$

Hệ số của x^{26} là C_{10}^k với k thoả mãn: $11k - 40 = 26 \Leftrightarrow k = 6$

Vậy hệ số của x^{26} là $C_{10}^6 = 210$

Bài 14. (CĐ Điện lực TPHCM 2006)

Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^n$, biết rằng:

$C_n^1 + C_n^3 = 13n$ (n là số tự nhiên lớn hơn 2, x là số thực khác 0).

A. 140 B. 672 C. 102 D. 210

Bài giải

Ta có: $C_n^1 + C_n^3 = 13n \Leftrightarrow n + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 13n \Leftrightarrow n^2 - 3n - 70 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 10 \\ n = -7 \text{ (Loại)} \end{array}\right.$

Số hạng tổng quát của khai triển nhị thức là: $T_{k+1} = C_{10}^k \left(x^2\right)^{10-k} \left(x^{-3}\right)^k = C_{10}^k x^{20-5k}$

T_{k+1} không chứa x $\Leftrightarrow 20 - 5k = 0 \Leftrightarrow k = 4$

Vậy số hạng không chứa x là: $T_5 = C_{10}^4 = 210$

Bài 15. (ĐH khối A 2002)

Cho khai triển nhị thức:

$$\left(2^{\frac{x-1}{2}} + 2^{\frac{-x}{3}}\right)^n = C_n^0\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^n + C_n^1\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^{n-1}\left(2^{\frac{-x}{3}}\right) + \ldots + C_n^{n-1}\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^{n-1}\left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^{n-1} + C_n^n\left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^n$$

(n là số nguyên dương). Biết rằng trong khai triển đó $C_n^3 = 5C_n^1$ và số hạng thứ tư bằng 20.

Tính $x + n$.

A. 20 B. 34 C. 11 D. 5

Bài giải

Từ $C_n^3 = 5C_n^1$ ta có $n \geq 3$ và $\frac{n!}{3!(n-3)!} = 5\frac{n!}{(n-1)!} \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 5n$

$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 28 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -4 \text{ (Loại)} \\ n = 7 \end{array}\right.$

Với $n = 7$ ta có: $C_7^3\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)\left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^3 = 140 \Leftrightarrow 35.2^{2x-2}.2^{-x} = 140 \Leftrightarrow 2^{x-2} = 4 \Leftrightarrow x = 4$

Vậy $n = 7, x = 4$.

Bài 16. (CĐ Công nghiệp HN 2003)

Cho đa thức: $P(x)=(16x-15)^{2003}$. Khai triển đa thức đó dưới dạng:

$P(x)=ax_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{2003}x^{2003}$

Tính tổng $S=a_0+a_1+a_2+\ldots+a_{2003}$.

A. 1 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 2

Bài giải

$$P(x)=(16x-15)^{2003}=\sum_{k=0}^{2003}C_{2003}^{k}(16x)^{2003-k}(-15)^k=\sum_{k=0}^{2003}C_{2003}^{k}(16)^{2003-k}(-15)^k x^{2003-k}$$

Các hệ số trong khai triển đa thức là: ak = $a_k=C_{2003}^{k}(16)^{2003-k}(-15)^k$

Vậy: $S=\sum_{k=0}^{2003}a_k=\sum_{k=0}^{2003}C_{2003}^{k}(16)^{2003-k}(-15)^k=(16-15)^{2003}=1$

➢ **Cách khác.**

Ta dễ dàng thấy $S=a_0+a_1+a_2+...+a_{2003}=P(1)=1$. **Chọn A.**

Bài 17. (ĐH khối A 2004)

Tìm hệ số của x^8 trong khai triển thành đa thức của $\left[1+x^2(1-x)\right]^8$

A. 473 B. 919 C. 371 D. 238

Bài giải

Ta có: $\left[1+x^2(1-x)\right]^8=C_8^0+C_8^1x^2(1-x)+C_8^2x^4(1-x)^2+C_8^3x^6(1-x)^3+C_8^4x^8(1-x)^4$
$+C_8^5x^{10}(1-x)^5+C_8^6x^{12}(1-x)^6+C_8^7x^{14}(1-x)^7+C_8^8x^{16}(1-x)^8$

Bậc của x trong 3 số hạng đầu nhỏ hơn 8, bậc của x trong 4 số hạng cuối lớn hơn 8.

Vậy x^8 chỉ có trong các số hạng thư tư, thứ năm, với hệ số tương ứng là: $C_8^3.C_3^2$; $C_8^4.C_4^0$

Suy ra: $a_8=168+70=238$.

Bài 18. (CĐ Kinh tế đối ngoại khối A, D 2006)

Cho $A=\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{20}+\left(x^3-\frac{1}{x}\right)^{10}$. Sau khi khai triển và rút gọn thì biểu thức A sẽ gồm bao nhiêu số hạng?

A. 29 số hạng **B.** 16 số hạng **C.** 21 số hạng **D.** 43 số hạng

Bài giải

$$A=\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{20}+\left(x^3-\frac{1}{x}\right)^{10}=\sum_{k=0}^{20}(-1)^kC_{20}^{k}x^{20-k}\left(x^{-2}\right)^k+\sum_{n=0}^{10}(-1)^nC_0^n\left(x^3\right)^{10-k}\left(x^{-1}\right)^n$$

$$=\sum_{k=0}^{20}(-1)^kC_{20}^{k}x^{20-3k}+\sum_{n=0}^{10}(-1)^nC_0^nx^{30-4n}$$

Xét trường hợp $20-3k=30-4n \Leftrightarrow 10-n=3(n-k)$

Vì $0 \le n \le 10$ và $10-n$ phải là bội số của 3 nên n = 4 hay n = 7 hay n = 10

$\Rightarrow$ Có 3 số hạng trong hai khai triển trên có lũy thừa của x giống nhau.

Vậy sau khi khai triển và rút gọn thì biểu thức A sẽ gồm: 29 số hạng

Bài 19. (CĐ Sư phạm TPHCM khối BT 2006)

Khai triển biểu thức $(1-2x)^n$ ta được đa thức có dạng: $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$

Tìm hệ số của x^5, biết $a_0+a_1+a_2=71$.

A. 102 B. – 672 C. 487 D. – 571

Bài giải

Số hạng thứ k + 1 trong khai triển $(1-2x)^n$ là: $T_{k+1}=C_n^k(-2)^k.x^k$ $T_{k+1}=C_n^k(-2)^k.x^k$

Từ đó ta có: $a_0+a_1+a_2=71 \Leftrightarrow C_n^0-2C_n^1+4C_n^2=71$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n\in\mathbb{N}, n\ge 2 \\ 1-2n+4\dfrac{n(n-1)}{2}=71 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n\in\mathbb{N}, n\ge 2 \\ n^2+2n-35=0 \end{cases} \Leftrightarrow n=7$$

Với n = 7, ta có hệ số của x^5 trong khai triển $(1-2x)^n$ là: $a_5=C_7^5(-2)^5=-672$

Bài 20. (CĐ Nông Lâm 2003)

Tìm hệ số lớn nhất của đa thức trong khai triển nhị thức Newton của: $\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}x\right)^{15}$

A. $4535.\dfrac{2^{10}}{3^{15}}$ B. $2343.\dfrac{2^{10}}{3^{15}}$ C. $3003.\dfrac{2^{10}}{3^{15}}$ D. $3123.\dfrac{2^{10}}{3^{15}}$

Bài giải

Ta có: $\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}x\right)^{15}=\sum\limits_{k=0}^{15}C_{15}^k\left(\dfrac{1}{3}\right)^{15-k}\left(\dfrac{2}{3}\right)x^k=\sum\limits_{k=0}^{15}C_{15}^k\dfrac{2^k}{3^{15}}x^k$

Gọi a_k là hệ số của x^k trong khai triển: $a_k=\dfrac{1}{3^{15}}C_{15}^k.2^k;\ k=0,1,2,\ldots,15$

Xét sự tăng giảm của dãy a_k:

$a_{k-1}<a_k \Leftrightarrow C_{15}^{k-1}.2^{k-1}<C_{15}^{k-1}.2^k \Leftrightarrow C_{15}^{k-1}<2C_{15}^k \Leftrightarrow k<\dfrac{32}{3}$, $k=0,1,\ldots,15$

Từ đó: $a_0<a_1<a_2<\ldots<a_{10}$

Đảo dấu BĐT trên ta được: $a_{k-1}>a_k \Leftrightarrow k>\dfrac{32}{3} \Rightarrow a_{10}>a_{11}>\ldots>a_{15}$

Vậy hệ số lớn nhất phải tìm là: $a_{10}=\dfrac{2^{10}}{3^{15}}C_{15}^{10}=3003.\dfrac{2^{10}}{3^{15}}$

Bài 21. (HV Kỹ thuật quân sự 2000)

Khai triển đa thức: $P(x)=(1+2x)^{12}$ thành dạng: $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{12}x^{12}$

Tìm $\max(a_1, a_2, \ldots, a_{12})$.

A. 126720 **B.** 120102 **C.** 102012 **D.** 201202

Bài giải

$P(x) = (1+2x)^{12} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{12}x^{12}$

$a_k = C_{12}^k.2^k;\ \ a_k < a_{k+1} \Leftrightarrow k < \dfrac{23}{3} \Rightarrow \max\limits_{i=\overline{1,12}}(a_i) = a_8 = C_{12}^8 = 126720$

Bài 22. (ĐHSP HN khối A 2001)

Trong khai triển của $\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}x\right)^{10}$ thành đa thức:

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_9x^9 + a_{10}x^{10}\ (a_k \in \mathbb{R})$

Hãy tìm hệ số a_k lớn nhất $(0 \le k \le 10)$.

A. $\dfrac{C_{14}^8.2^4}{3^{11}}$ **B.** $\dfrac{C_{14}^8.2^8}{3^9}$ **C.** $\dfrac{C_{14}^9.2^7}{3^{12}}$ **D.** $\dfrac{C_{14}^7.2^7}{3^{10}}$

Bài giải

Ta có: $a_{k-1} \le a_k \Leftrightarrow C_{10}^{k-1}.2^{k-1} \le C_{10}^k.2^k \Leftrightarrow \dfrac{1}{(k-1)!(11-k)!} \le \dfrac{2}{k!(10-k)!}$

$\Leftrightarrow k \le 2(11-k) \Leftrightarrow k \le \dfrac{22}{3}$

Vậy hệ số a_7 là lớn nhất: $a_7 = \dfrac{1}{3^{10}}.C_{10}^7.2^7$

Bài 23. (ĐH khối D 2003)

Với n là số nguyên dương, gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $(x^2+1)^n(x+2)^n$

Có bao nhiêu số n để $a_{3n-3} = 26n$.

A. 0 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

Bài giải

Ta có: $(x^2+1)^n = C_n^0x^{2n} + C_n^1x^{2n-2} + C_n^2x^{2n-4} + \ldots + C_n^n$

$$(x+2)^n = C_n^0x^n + 2C_n^1x^{n-1} + 2^2C_n^2x^{n-2} + 2^3C_n^3x^{n-3} + \ldots + 2^nC_n^n$$

Dễ dàng kiểm tra n = 1, n = 2 không thoả mãn điều kiện bài toán.

Với $n \ge 3$ thì $x^{3n-3} = x^{2n}x^{n-3} = x^{2n-2}x^{n-1}$

Do đó hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $(x^2+1)^n(x+2)^n$ là:

$a_{3n-3} = 2^3.C_n^0.C_n^3 + 2.C_n^1.C_n^1$

$$\Rightarrow a_{3n-3} = 26n \Leftrightarrow \frac{2n\left(2n^2-3n+4\right)}{3} = 26n \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=5 \\ n=-\frac{7}{2}(\text{Loại}) \end{array}\right.$$

Vậy $n = 5$.

Bài 24. (ĐH dự bị 4 2002)

Giả sử n là số nguyên dương và: $(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots + a_nx^n$

Biết rằng tồn tại số k nguyên $(1 \le k \le n-1)$ sao cho $\frac{a_{k-1}}{2} = \frac{a_k}{9} = \frac{a_{k+1}}{24}$

Hãy tính n.

A. $n = 5$ **B.** $n = 5$ **C.** $n = 10$ **D.** $n = 7$

Bài giải

Ta có: $\frac{a_{k-1}}{2} = \frac{a_k}{9} = \frac{a_{k+1}}{24}$ (1) $(1 \le k \le n-1) \Leftrightarrow \frac{C_n^{k-1}}{2} = \frac{C_n^k}{9} = \frac{C_n^{k+1}}{24}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{1}{9}\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{24}\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$

$$\Leftrightarrow 2.(k-1)!(n-k+1)! = 9.k!(n-k)! = 24.(k+1)!(n\ k-1)!$$

$$\Leftrightarrow 2.(n-k+1)(n-k) = 9.k(n-k) = 24.(k+1)k$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(n-k+1) = 9k \\ 9(n-k) = 24(k+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2n+2}{11} \\ k = \frac{3n-8}{11} \end{cases}$$

Để tồn tại k thoả mãn hệ thức (1), điều kiện ắt có và đủ là: $3n - 8 = 2n + 2 \Leftrightarrow n = 10$.

Bài 25. (ĐH Thuỷ lợi II 2000)

Cho đa thức $P(x) = (1+x)^9 + (1+x)^{10} + (1+x)^{11} + \ldots + (1+x)^{14}$ có dạng khai triển là: $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{14}x^{14}$.

Hãy tính hệ số a_9.

A. 2018 **B.** 3023 **C.** 3003 **D.** 2012

Bài giải

$$a_9 = 1 + C_{10}^9 + C_{11}^9 + C_{12}^9 + C_{13}^9 + C_{14}^9 = 1 + C_{10}^1 + C_{11}^2 + C_{12}^3 + C_{13}^4 + C_{14}^5$$

$$= 1 + 10 + \frac{11.10}{2} + \frac{12.11.10}{6} + \frac{13.12.11.10}{24} + \frac{14.13.12.11.10}{120} = 3003$$

Bài 26: (ĐHSP TPHCM 1999)

Có bao nhiêu số tự nhiên thỏa mãn $C_{14}^k + C_{14}^{k+2} = 2C_{14}^{k+1}$

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Bài giải

$C_{14}^{k}+C_{14}^{k+2}=2C_{14}^{k+1}\quad (0\le k\le 12,\ k\in\mathbb{N})$

$\Leftrightarrow \dfrac{14!}{k!(14-k)!}+\dfrac{14!}{(k+2)!(12-k)!}=2\dfrac{14!}{(k+1)!(13-k)!}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{(14-k)(13-k)}+\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}=2\dfrac{1}{(k+1)(13-k)}$

$\Leftrightarrow (k+1)(k+2)+(14-k)(13-k)=2(k+2)(14-k)$

$\Leftrightarrow k^2-12k+32=0\Leftrightarrow k=4$ hoặc $k=8$

Vậy: $k=4$ hoặc $k=8$

Bài 27. (ĐH Ngoại ngữ HN chuyên ban 1999)

Có bao nhiêu số nguyên dương x thoả: $C_x^1+6C_x^2+6C_x^3=9x^3-14x$

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Bài giải

$C_x^1+6C_x^2+6C_x^3=9x^2-14x\quad (x\in\mathbb{N},\ x\ge 3)$

$\Leftrightarrow x+3x^2-3x+x^3-3x^2+2x=9x^2-14x$

$\Leftrightarrow x\left(x^2-9x+14\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0(\text{Loại})\\ x=2(\text{Loại})\\ x=7(\text{thỏa mãn})\end{array}\right.$

Vậy: $x=7$

Bài 28. (ĐH Bách khoa HN 1999)

Tính tổng: $S=C_{2018}^1-2C_{2018}^2+3C_{2018}^3-4C_{2018}^4+...-2018.C_{2018}^{2018}$

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Bài giải

$(n>2)S=C_n^1-2C_n^2+3C_n^3-4C_n^4+...+(-1)^{n-1}.nC_n^n\quad (n>2)$

Xét đa thức $p(x)=(1-x)^n$. Khai triển theo công thức Newton ta được:

$p(x)=(1-x)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k.x^k$

Suy ra: $-p'(x)=n(1-x)^{n-1}=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}.kC_n^k.x^{k-1}$

Cho $x=1$ ta được: $0=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}.kC_n^k=C_n^1-2C_n^2+3C_n^3-4C_n^4+...+(-1)^{n-1}.nC_n^n=S$

Vậy: $S=0$

DÙNG TÍCH

Bài 29. (ĐH dự bị 6 2002)

Gọi $a_1, a_2, ..., a_{11}$ là các hệ số trong khai triển sau:

$(x+1)^{10}.(x+2) = x^{11} + a_1x^{10} + a_2x^9 + ... + a_{11}$

Hãy tính hệ số a_5.

A. 672 B. 246 C. 201 D. 339

Bài giải

Ta có: $(x+1)^{10} = x^{10} + C_{10}^1x^9 + C_{10}^2x^8 + C_{10}^3x^7 + ... + C_{10}^9x + 1$

$\Rightarrow (x+10)^{10}(x+2) = x^{11} + C_{10}^1x^{10} + C_{10}^2x^9 + C_{10}^3x^8 + ... + C_{10}^9x^2 + x +$

$+2\left(x^{10} + C_{10}^1x^9 + C_{10}^2x^8 + C_{10}^3x^7 + ... + C_{10}^9x + 1\right)$

$= x^{11} + \left(C_{10}^1 + 2\right)x^{10} + \left(C_{10}^2 + C_{10}^1.2\right)x^9 + \left(C_{10}^3 + C_{10}^2.2\right)x^8 + ... + \left(C_{10}^9 + C_{10}^8.2\right)x^2 + \left(C_{10}^{10} + C_{10}^9.2\right)x + 2$

$= x^{11} + a_1x^{10} + a_2x^9 + ... + a_{11}$

Vậy $a_5 = C_{10}^5 + 2C_{10}^4 = 672$

Bài 30: Tính tổng $S = 1^2C_{2012}^1 + 2^2C_{2012}^2 + 3^2C_{2012}^3 + ... + 2012^2C_{2012}^{2012}$

A. $2011.2012.2^{2010}$ B. 2012.2013 C. $2012.2014.2^{2010}$ D. $2011.2013.2^{2010}$

Bài giải:

$k^2C_{2012}^k = k\left[(k-1)+1\right]C_{2012}^k = k(k-1)C_{2012}^k + kC_{2012}^k, \quad \forall k = 1,2,...,2012$

$k^2C_{2012}^k = k(k-1)\dfrac{2012!}{k!(2012-k)!} + k\dfrac{2012!}{k!(2012-k)!} = 2012(2011C_{2010}^{k-2} + C_{2011}^{k-1}), \quad \forall k = 1,2,...,2012$

Từ đó:

$S = 2012\left[2011(C_{2010}^0 + C_{2010}^1 + ... + C_{2010}^{2010}) + (C_{2011}^0 + C_{2011}^1 + ... + C_{2011}^{2011})\right]$

$= 2012\left[2011(1+1)^{2010} + (1+1)^{2011}\right] = 2012(2011.2^{2010} + 2^{2011}) = 2012.2013.2^{2010}$

Đáp số $S = 2012.2013.2^{2010}$

DÙNG ĐẠO HÀM

Bài 31. (ĐH khối A 2005)

Tìm số nguyên dương n sao cho:

$C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2C_{2n+1}^3 - 4.2^3C_{2n+1}^4 + ... + (2n+1).2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1} = 2005$

A. 919 B. 810 C. 1002 D. 1203

Bài giải

Ta có: $(1+x)^{2n+1}=C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2x^2+C_{2n+1}^3x^3+...+C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n+1}$

Đạo hàm 2 vế ta có: $(2n+1)(1+x)^{2n}=C_{2n+1}^1+2C_{2n+1}^2x+3C_{2n+1}^3x^2+...+(2n+1)C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n}$

Thay $x=-2$, ta có: $C_{2n+1}^1-2.2C_{2n+1}^2x+3.2^2C_{2n+1}^3-...+(2n+1)2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1}=2n+1$

Theo giả thiết ta có: $2n+1=2005\Leftrightarrow n=1002$.

Bài 32: Tìm số tự nhiên n thỏa mãn $C_{2n}^0+2C_{2n}^2+3C_{2n}^4+...+(n+1)C_{2n}^{2n}=1024(n+2)$

A. 5 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 8

Bài giải:

Xét khai triển nhị thức Newton của $(1+x)^{2n}$ và $(1-x)^{2n}$ tạ có:

$(1+x)^{2n}=C_{2n}^0+xC_{2n}^1+x^2C_{2n}^2+...+x^{2n}C_{2n}^{2n}$

$(1-x)^{2n}=C_{2n}^0-xC_{2n}^1-x^2C_{2n}^2+...+x^{2n}C_{2n}^{2n}\Rightarrow(1+x)^{2n}+(1-x)^{2n}$

$=2(C_{2n}^0+x^2C_{2n}^2-x^4C_{2n}^4+...+x^{2n}C_{2n}^{2n})$

Nhân 2 vế với x^2 ta được:

$x^2(1+x)^{2n}+x^2(1-x)^{2n}=2(x^2C_{2n}^0+x^4C_{2n}^2-x^6C_{2n}^4+...+x^{2n+2}C_{2n}^{2n})$

Lấy đạo hàm 2 vế ta được:

$2x(1+x)^{2n}+2x(1-x)^{2n}+2nx^2(1+x)^{2n-1}-2nx^2(1-x)^{2n-1}$

$=4[xC_{2n}^0+2x^3C_{2n}^2+3x^3C_{2n}^4+...+(n+1)x^{2n+2}C_{2n}^{2n}]$

Thay $x=1$ vào ta có: $2^{2n}(n+2)=4[C_{2n}^0+2C_{2n}^2+3C_{2n}^4+...+(n+1)C_{2n}^{2n}]$

$\Leftrightarrow 2^{2n}(n+2)=4.1024(n+2)\Leftrightarrow 2^{2n}=2^{12}\Leftrightarrow n=6$

Vậy $n=6$

Bài 33: Từ khai triển biểu thức $(x-1)^{100}=a_0x^{100}+a_1x^{99}+...+a_{98}x^2+a_{99}x+a_{100}$. Tính tổng $S=100a_0.2^{100}+99a_1.2^{99}+...+2a_{98}.2^2+1a_{99}.2^1+1$

A. 201 **B.** 202 **C.** 203 **D.** 204

Bài giải:

+ Lấy đạo hàm hai vế của (1) : $100(x-1)^{00}=100a_0x^{99}+99a_1x^{98}+...+2a_{98}x+a_{99}$

+ Nhân hai vế cho x: $100x(x-1)^{99}=100a_0x^{100}+99a_1x^{99}+...+2a_{98}x^2+a_{99}x$

+ Cộng hai vế cho 1, thay $x=2$:

$200(2-1)^{99}+1=100a_02^{100}+99a_12^{99}+...+2a_{98}2^2+a_{99}2+1=S$

+ Kết luận: $S=201$

Bài 34: Tìm số nguyên dương n sao cho:

$C_{2n+1}^1-2.2.C_{2n+1}^2+3.2^2.C_{2n+1}^3-4.2^3.C_{2n+1}^4+...+(2n+1).2^{2n}.C_{2n+1}^{2n+1}=2013$

A. 1006 **B.** 1008 **C.** 1010 **D.** 1012

Bài giải:

$$C_{2n+1}^{1}-2.C_{2n+1}^{2}+3.2^{2}.C_{2n+1}^{3}-4.2^{3}.C_{2n+1}^{4}+...+(2n+1).2^{2n}.C_{2n+1}^{2n+1}=2013\ (*)$$

Xét khai triển: $(1+x)^{2n+1}=C_{2n+1}^{0}+xC_{2n+1}^{1}+x^{2}C_{2n+1}^{2}+x^{3}C_{2n+1}^{3}+x^{4}C_{2n+1}^{4}+...+x^{2n+1}C_{2n+1}^{2n+1}$

Đạo hàm cả hai vế của khai triển ta được:

$$(2n+1)(1+x)^{2n}=C_{2n+1}^{1}+2xC_{2n+1}^{2}+3x^{2}C_{2n+1}^{3}+4x^{3}C_{2n+1}^{4}+...+(2n+1)x^{2n}C_{2n+1}^{2n+1}$$

Thay x = - 2 vào ta được:

$$2n+1=C_{2n+1}^{1}-2.2C_{2n+1}^{2}+3.2^{2}.C_{2n+1}^{3}-4.2^{3}.C_{2n+1}^{4}+...+(2n+1)2^{2n}.C_{2n+1}^{2n+1}$$

Do đó: $(2)\Leftrightarrow 2n+1=2013\Leftrightarrow n=1006$

Bài 35: Tìm số nguyên dương n sao cho:

$$C_{2n+1}^{1}-2.2.C_{2n+1}^{2}+3.2^{2}.C_{2n+1}^{3}-4.2^{3}.C_{2n+1}^{4}+...+(2n+1).2^{2n}.C_{2n+1}^{2n+1}=2013$$

A. 1006 B. 2013 C. 2012 D. 1008

Bài giải:

$$C_{2n+1}^{1}-2.C_{2n+1}^{2}+3.2^{2}.C_{2n+1}^{3}-4.2^{3}.C_{2n+1}^{4}+...+(2n+1).2^{2n}.C_{2n+1}^{2n+1}=2013\ (*)$$

Xét khai triển: $(1+x)^{2n+1}=C_{2n+1}^{0}+xC_{2n+1}^{1}+x^{2}C_{2n+1}^{2}+x^{3}C_{2n+1}^{3}+x^{4}C_{2n+1}^{4}+...+x^{2n+1}C_{2n+1}^{2n+1}$

Đạo hàm cả hai vế của khai triển ta được:

$$(2n+1)(1+x)^{2n}=C_{2n+1}^{1}+2xC_{2n+1}^{2}+3x^{2}C_{2n+1}^{3}+4x^{3}C_{2n+1}^{4}+...+(2n+1)x^{2n}C_{2n+1}^{2n+1}$$

Thay x = - 2 vào ta được:

$$2n+1=C_{2n+1}^{1}-2.2C_{2n+1}^{2}+3.2^{2}.C_{2n+1}^{3}-4.2^{3}.C_{2n+1}^{4}+...+(2n+1)2^{2n}.C_{2n+1}^{2n+1}$$

Do đó: $(2)\Leftrightarrow 2n+1=2013\Leftrightarrow n=1006$

Bài 36. (ĐH Kinh tế quốc dân khối A 2000)

Tính tổng: $S=2^{2017}C_{2018}^{1}+2^{2016}C_{2018}^{2}+2^{2015}C_{2018}^{3}+....+2018C_{2018}^{2018}$

A. 2016.3^{2017} B. 2017.3^{2017} C. 2018.3^{2018} D. 2018.3^{2017}

Bài giải

Ta có: $(1+x)^{n}=C_{n}^{0}+C_{n}^{1}x+C_{n}^{2}x^{2}+C_{n}^{3}x^{3}+C_{n}^{4}x^{4}+...+C_{n}^{n}x^{n}$

Lấy đạo hàm hai vế: $(1+x)^{n-1}=C_{n}^{1}+2C_{n}^{2}x+3C_{n}^{3}x^{2}+4C_{n}^{4}x^{3}+...+nC_{n}^{n}x^{n-1}$

$$n(1+x)^{n-1}=C_{n}^{1}+2C_{n}^{2}x+3C_{n}^{3}x^{2}+4C_{n}^{4}x^{3}+...+nC_{n}^{n}x^{n-1}$$

Thay $x=\frac{1}{2}$, ta được: $n\frac{3^{n-1}}{2^{n-1}}=C_{n}^{1}+2C_{n}^{2}.2^{-1}+3C_{n}^{3}.2^{-2}+4C_{n}^{4}.2^{-3}+...+nC_{n}^{n}.2^{-n+1}$

$$\Rightarrow S=2^{n-1}C_{n}^{1}+2^{n-2}C_{n}^{2}+2^{n-3}C_{n}^{3}+....+nC_{n}^{n}=n.3^{n-1}$$

DÙNG TÍCH PHÂN

Bài 37. (ĐH khối B 2003)

Tính tổng: $S=C_{2018}^0+\frac{2^2-1}{2}C_{2018}^1+\frac{2^3-1}{3}C_{2018}^2+...+\frac{2^{2019}-1}{2019}C_{2018}^{2018}$

A. $\frac{3^{2019}-2^{2019}}{2019}$ **B.** $\frac{3^{2018}-2^{2018}}{2018}$ **C.** $\frac{3^{2019}-2^{2019}}{2018}$ **D.** $\frac{3^{2018}-2^{2018}}{2019}$

Bài giải

Ta có: $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^nx^n$

$$\Rightarrow\int_1^2(1+x)^n\,dx=\int_1^2\left(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^nx^n\right)dx$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\Big|_1^2=\left(C_n^0x+C_n^1\frac{x^2}{2}+C_n^2\frac{x^3}{3}+...+C_n^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_1^2$$

$$\Leftrightarrow C_n^0+\frac{2^2-1}{2}C_n^1+\frac{2^3-1}{3}C_n^2+...+\frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$$

Thay $n=2018$ ta có $S=\frac{3^{2019}-2^{2019}}{2019}$.

Bài 38. (ĐHSP TPHCM khối D 2000)

Tính tổng: $S=C_{2018}^0+\frac{1}{2}C_{2018}^1++\frac{1}{3}C_{2018}^2+...+\frac{1}{2019}C_{2018}^{2018}$.

A. $\frac{2^{2020}+1}{2020}$ **B.** $\frac{2^{2020}-1}{2020}$ **C.** $\frac{2^{2019}-1}{2019}$ **D.** $\frac{2^{2019}+1}{2019}$

Bài giải

* Ta có: $I=\int_0^1(1+x)^n\,dx=\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

* $I=\int_0^1\left(C_n^0+C_n^1x+...+C_n^nx^n\right)dx=\left(C_n^0x+C_n^1\frac{x^2}{2}+...+C_n^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_0^1$

$$=C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+...+\frac{1}{n+1}C_n^n=S$$

Vậy: $S=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Thay $n=2018$ ta có $S=\frac{2^{2019}-1}{2019}$.

Bài 39: Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $\frac{1}{2}C_n^0-\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{4}C_n^2-\frac{1}{5}C_n^3+...+\frac{(-1)^n}{n+2}C_n^n=\frac{1}{156}$.

A. 8 **B.** 9 **C.** 10 **D.** 11

Bài giải:

Với mọi $x \in \mathbb{R}$ và mọi số nguyên dương n, theo nhị thức Newton ta có:

$$C_n^0 x - C_n^1 x^2 + ... + (-1)^n C_n^n x^{n+1} = (C_n^0 - C_n^1 x + ... + (-1)^n C_n^n)x = (1-x)^n x$$

Suy ra $\int_0^1 \left(C_n^0 x - C_n^1 x^2 + ... + (-1)^n C_n^n x^{n+1}\right)dx = \int_0^1 (1-x)^n x\,dx$

Hay $\frac{1}{2}C_n^0 x - \frac{1}{3}C_n^1 + ... + \frac{(-1)^n}{n+2}C_n^n = \int_0^1 (1-x)^n dx - \int_0^1 (1-x)^{n+1}dx = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$,

với mọi $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Từ đó ta có $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{156} \Leftrightarrow n^2 + 3n - 154 = 0 \Leftrightarrow n = 11$ (vì $n \in \mathbb{N}^*$)

Câu 40: Rút gọn biểu thức $T = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

A. $T = \frac{2^n}{n+1}$ **B.** $T = 2^{n+1}$ **C.** $T = \frac{2^n - 1}{n+1}$ **D.** $T = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

Bài giải:

Ta có: $\int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 \left(C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n\right)dx = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n$

Mặt khác: $\int_0^1 (1+x)^n dx = \left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

Vậy: $T = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

Bài 41. (ĐH Đà Nẵng khối A 2001)

Hãy tính tổng: $S = C_{2018}^0 + \frac{1}{2}C_{2018}^1.2 + \frac{1}{3}C_{2018}^2.2^2 + \frac{1}{4}C_{2018}^3.2^3 + ... + \frac{1}{2019}.C_{2018}^{2018}.2^{2018}$

A. $\frac{3^{2019}-1}{4038}$ **B.** $\frac{3^{2019}-1}{2019}$ **C.** $\frac{3^{2019}+1}{4038}$ **D.** $\frac{3^{2019}+1}{2019}$

Bài giải

Có $\frac{1}{k+1}C_n^k.2^k = \left.\frac{1}{2(k+1)}C_n^k.x^{k+1}\right|_0^2 = \frac{1}{2}\int_0^2 C_n^k x^k\,dx\ \frac{1}{k+1}C_n^k.2^k = \left.\frac{1}{2(k+1)}C_n^k.x^{k+1}\right|_0^2$

$\Rightarrow S = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1.2 + \frac{1}{3}C_n^2.2^2 + \frac{1}{4}C_n^3.2^3 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n.2^n$

$= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^k.2^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}\int_0^2 C_n^k x^k\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k\right)dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^2 (x+1)^n dx = \frac{1}{2}.\left.\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\right|_0^2 = \frac{3^{n+1}-1}{2(n+1)}$. Thay $n = 2018$ ta có $S = \frac{3^{2019}-1}{4038}$

Bài 49: Biết tổng các hệ số của khai triển $\left(x^2+1\right)^n$ là 1024. Hãy tìm hệ số của a (a là số tự nhiên) của số hạng ax^{12} trong khai triển đó.

A. 10 **B.** 45 **C.** 120 **D.** 210

Giải

Ta có: $T = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 1024 \Leftrightarrow 2^n = 1024 \Leftrightarrow n = 10$

Hệ số của x^12 là: 10C6 = 210.

Đáp án A.

Bài 50: Tính giá trị của $2^{2n}C_{2n}^0 + 2^{2n-2}C_{2n}^2 + ... + 2^0C_{2n}^{2n}$

A. $\frac{9^n+1}{2}$ **B.** $\frac{9^n+3}{2}$ **C.** $\frac{9^n-1}{2}$ **D.** $\frac{9^n+3}{2}$

Giải

$$2^{2n}C_{2n}^0 + 2^{2n-2}C_{2n}^2 + ... + 2^0C_{2n}^{2n} = \frac{\left[(2+1)^{2n} + (2-1)^{2n}\right]}{2} = \frac{9^n+1}{2}$$

Đáp án A.

Bài 51: Tính tổng $S = \frac{-C_n^1}{2.3} + \frac{2C_n^2}{3.4} - \frac{3C_n^3}{4.5} + ... + \frac{(-1)^n nC_n^n}{(n+1)(n+2)}$

A. $\frac{n}{(n+1)(n+2)}$ **B.** $\frac{-2n}{(n+1)(n+2)}$ **C.** $\frac{-n}{(n+1)(n+2)}$ **D.** $\frac{2n}{(n+1)(n+2)}$

Bài giải:

Tính tổng $S = \frac{-C_n^1}{2.3} + \frac{2C_n^2}{3.4} - \frac{3C_n^3}{4.5} + ... + \frac{(-1)^n nC_n^n}{(n+1)(n+2)}$

Ta có $\frac{C_n^k}{k+1} = \frac{n!}{k!(k+1)(n-k)!} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(k+1)!\left[(n+1)-(k+1)\right]!} = \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$ (3)

Áp dụng 2 lần công thức (3) ta được: $\frac{(-1)^k kC_n^k}{(k+1)(k+2)} = \frac{(-1)^k kC_{n+2}^{k+2}}{(n+1)(n+2)}$

Cho k chạy từ 1 đến n rồi cộng vế các đẳng thức trên ta có

$(n+1)(n+2)S = -C_{n+2}^3 + 2C_{n+2}^4 - 3C_{n+2}^5 + ... + (-1)^n nC_{n+2}^{n+2}$

$= -\left(C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3\right) + 2\left(C_{n+1}^3 + C_{n+1}^4\right) - 3\left(C_{n+1}^4 + C_{n+1}^5\right) + ... + (-1)^n nC_{n+1}^{n+1}$

$= -C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 - C_{n+1}^4 + ... + (-1)^n C_{n+1}^{n+1}$

$= C_{n+1}^0 - C_{n+1}^1 - \left(C_{n+1}^0 - C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 - C_{n+1}^3 + C_{n+1}^4 - C_{n+1}^5 + ... + (-1)^{n+1}C_{n+1}^{n+1}\right) = 1 - (n+1) - (1-1)^{n-1} = -n$

Vậy $S = \frac{-n}{(n+1)(n+2)}$.

Đáp án C.

Bài 52: Chứng minh rằng: với mọi cặp số nguyên $k,n\left(1\le k\le n\right)$ ta có: $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$. Tìm số nguyên $n>4$ biết rằng $2C_n^0+5C_n^1+8C_n^2+...+\left(3n+2\right)C_n^n=1600$

A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

Bài giải:

Ta có: $kC_n^k=k\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=n.\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!\left[(n-1)-(k-1)\right]!}=nC_{n-1}^{k-1}$ (Đpcm)

$2C_n^0+5C_n^1+8C_n^2+...+(3n+2)C_n^n=1600\Leftrightarrow 3C_n^1+6C_n^2+...+3nC_n^n+2\left(C_n^0+C_n^1+...+C_n^n\right)=1600$

$\Leftrightarrow 3n\left(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+...+C_{n-1}^{n-1}\right)+2\left(C_n^0+C_n^1+...+C_n^n\right)=1600\Leftrightarrow 3n\left(1+1\right)^{n-1}+2\left(1+1\right)^n=1600$

$\Leftrightarrow 3n.2^{n-1}=1600\Leftrightarrow 3n.2^{n-5}+2^{n-3}=100\Leftrightarrow n=7$.

Đáp án B.

Bài 53: Tìm số nguyên dương n sao cho: $C_{2n}^1+C_{2n}^3+C_{2n}^5+...C_{2n}^{2n-1}=2^{23}$

A. 22 B. 24 C. 25 D. 23

Bài giải:

Ta có: $\left(1+1\right)^{2n}=C_{2n}^0+C_{2n}^1+C_{2n}^2+C_{2n}^3+...+C_{2n}^{2n}$

$\left(1-1\right)^{2n}=C_{2n}^0-C_{2n}^1+C_{2n}^2-C_{2n}^3+...+C_{2n}^{2n}\Rightarrow 2\left(C_{2n}^1+C_{2n}^3+C_{2n}^5+...+C_{2n}^{2n-1}\right)=2^{2n}$

$\Rightarrow C_{2n}^1+C_{2n}^3+C_{2n}^5+...+C_{2n}^{2n-1}=2^{2n-1}$

Do giả thiết: $C_{2n}^1+C_{2n}^3+C_{2n}^5+...+C_{2n}^{2n-1}=2^{23}$ nên $2^{n-1}=2^{23}\Leftrightarrow n-1=23\Leftrightarrow n=24$

Đáp án B.

Bài 54: Tính tổng: $S_1=1^2.C_{2013}^1+2^2.C_{2013}^2+3^2.C_{2013}^3+...+2013^2.C_{2013}^{2013}$

A. $2012.2013.2^{2011}$ B. $2013.2014.2^{2011}$ C. $2009.2011.2^{2011}$ D. $2013.2015.2^{2011}$

Bài giải:

Tính tổng $S_1=1^2.C_{2013}^1+2^2.C_{2013}^2+3^2.C_{2013}^3+...+2013^2.C_{2013}^{2013}$

Số hạng tổng quát của tổng là: $a_k=k^2C_{2013}^k=k.(k-1+1)C_{2013}^k\ \forall k=1,2,...,2013$

$a_k=k.(k-1)C_{2013}^k+k\,C_{2013}^k=k(k-1)\dfrac{2013!}{k!(2013-k)!}+k.\dfrac{2013!}{k!(2013-k)!}\quad\forall k=1,2,...,2013$

$a_k=2012.2013.C_{2011}^{k-2}+2013.C_{2012}^{k-1}\ \forall k=1,2,...,2013$

$S_1=2012.2013\left(C_{2011}^0+C_{2011}^1+...+C_{2011}^{2011}\right)+2013\left(C_{2012}^0+C_{2012}^1+...+C_{2012}^{2012}\right)$

$S_1=2012.2013.(1+1)^{2011}+2013.(1+1)^{2012}=2012.2013.2^{2011}+2013.2^{2012}=2013.2014.2^{2011}$

Đáp án B.

Bài 55: Tính tổng: $S_2=\dfrac{C_{2013}^0}{1}+\dfrac{C_{2013}^1}{2}+\dfrac{C_{2013}^2}{3}+...+\dfrac{C_{2013}^{2013}}{2014}$

A. $\dfrac{2^{2013}-1}{2013}$ B. $\dfrac{2^{2014}-1}{2014}$ C. $2.\dfrac{2^{2014}-1}{2014}$ D. $2.\dfrac{2^{2013}-1}{2013}$

Bài giải:

Tính tổng: $S_2 = \frac{C_{2013}^0}{1} + \frac{C_{2013}^1}{2} + \frac{C_{2013}^2}{3} + ... + \frac{C_{2013}^{2013}}{2014}$

Số hạng tổng quát của tổng là $a_k = \frac{C_{2013}^k}{k+1} \forall k = 0,1,2,...,2013$

$$a_k = \frac{C_{2013}^k}{k+1} = \frac{2013!}{(k+1).k!(2013-k)!} = \frac{1}{2014}.\frac{2014!}{(k+1)!(2013-k)!} \quad \forall k = 0,1,2,...,2013$$

Vậy ta được $a_k = \frac{C_{2014}^{k+1}}{2014} \forall k = 0,1,2,...,2013$

$$S_2 = \frac{1}{2014}.\left(C_{2014}^1 + C_{2014}^2 + ... + C_{2014}^{2014}\right) = \frac{1}{2014}.\left[(1+1)^{2014} - C_{2014}^1\right] = \frac{2^{2014}-1}{2014}$$

Đáp án B.

Bài 56: Tìm số nguyên dương n lớn hơn 4 biết rằng:

$2C_n^0 + 5C_n^1 + 8C_n^2 + ... + (3n+2)C_n^2 = 1600$

A. 6 B. 7 C. 10 D. 12

Bài giải:

Tìm số nguyên dương n lớn hơn 4 biết rằng:

$2C_n^0 + 5C_n^1 + 8C_n^2 + ... + (3n+2)C_n^2 = 1600$

Xét số hạng tổng quát : $(3k+2)C_n^k = 3kC_n^k + 2C_n^k = 3nC_{n-1}^{k-1} + 2C_n^k \quad \forall k=1,2,...,n$

$gt \Leftrightarrow 3n\left(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + ... + C_{n-1}^{n-1}\right) + 2\left(C_n^0 + C_n^1 + C_n^n\right) = 1600$

$\Leftrightarrow 3n(1+1)^{n-1} + 2(1+1)^n = 1600 \Leftrightarrow 3n.2^{n-1} + 2.2^{n+1} = 1600 \Leftrightarrow 2^{n-1}(3n+4) = 1600$

Chia hai vế cho 16 ta được: $2^{n-5}(3n+4) = 100$ (*)

Nếu $n \geq 8 \Rightarrow$ VT* chia hết cho 8 còn VP* không chia hết cho 8 (loại)

Từ đó $5 \leq n \leq 7$ thử các giá trị n = 5, 6, 7 vào (*) chỉ có n = 7 thỏa mãn

Vậy n = 7 thì ta có: $2C_n^0 + 5C_n^1 + 8C_n^2 + ... + (3n+2)C_n^n = 1600$

Đáp án B.

Bài 57. (CĐ Sư phạm TPHCM khối A 2006)

Tính tổng $S = \frac{1.C_n^0}{A_1^1} + \frac{2.C_n^1}{A_2^1} + \frac{3.C_n^2}{A_1^3} + ... + \frac{(n+1).C_n^n}{A_{n+1}^1}$. Biết rằng: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 211$

A. 2^{17} **B.** 2^{50} **C.** 2^{100} **D.** 2^{20}

Bài giải

- $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 211 \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \\ 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 211 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \\ n^2 + n - 420 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow n = 20$

- $\dfrac{(k+1).C_n^k}{A_{k+1}^1}=\dfrac{(k+1).C_n^k}{\dfrac{(k+1)!}{k!}}=C_n^k\left(k=1,2,...,n\right)$

Do đó: với n = 20 ta có: $S=C_{20}^0+C_{20}^1+...+C_{20}^{20}=2^{20}$

Đáp án D.

Bài 58: Tính tổng $S=C_{2016}^0+2C_{2016}^1+3C_{2016}^2+4C_{2016}^3+...+2017C_{2016}^{2016}$

A. 2016.2^{2013} **B.** 2018.2^{2015} **C.** 2014.2^{2012} **D.** 2020.2^{2018}

Bài giải:

Ta có $(x+1)^{2016}=C_{2016}^0+C_{2016}^1x+C_{2016}^2x^2+C_{2016}^3x^3+...+C_{2016}^{2016}x^{2016}$

Nhân hai vế với *x* ta được:

$x(x+1)^{2016}=C_{2016}^0x+C_{2016}^1x^2+C_{2016}^2x^3+C_{2016}^3x^4+...+C_{2016}^{2016}x^{2017}$

Lấy đạo hàm hai vế, ta được:

$(2017x+1)(x+1)^{2015}=C_{2016}^0+2C_{2016}^1x+3C_{2016}^2x^2+4C_{2016}^3x^3+...+2017C_{2016}^{2016}x^{2016}$

Thay x = 1 vào, ta được: $2018.2^{2015}=C_{2016}^0+2C_{2016}^1+3C_{2016}^2+4C_{2016}^3+...+2016C_{2016}^{2016}$

Vậy tổng: $S=2018.2^{2015}$

Đáp án B.

Bài 59: Tính tổng: $S=C_{20}^0C_{12}^{11}+C_{20}^1C_{12}^{10}+...+C_{20}^{10}C_{12}^1+C_{20}^{11}C_{12}^0$

A. C_{32}^{12} **B.** C_{32}^{11} **C.** C_{32}^{14} **D.** C_{32}^{13}

Bài giải:

Ta có: $\left(1+x\right)^{32}=\left(1+x\right)^{20}.\left(x+1\right)^{12}$ (1)

$VT=\left(1+x\right)^{32}=C_{32}^0+C_{32}^1x+C_{32}^2x^2+...+C_{32}^{32}x^{32}$

Hệ số của x^{11} trong khai triển vế trái là C_{32}^{11} (2)

$VP=\left(C_{20}^0+C_{20}^1x+C_{20}^2x^2+...+C_{20}^{20}x^{20}\right)\left(C_{12}^0+C_{12}^1x+C_{12}^2x^2+...+C_{12}^{12}x^{12}\right)$

Hệ số của x^{11} trong khai triển vế phải là: $C_{20}^0C_{12}^{11}+C_{20}^1.C_{12}^{10}+...+C_{20}^{10}C_{12}^1+C_{20}^{11}C_{12}^0$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có: $S=C_{20}^0C_{12}^{11}+C_{20}^1C_{12}^{10}+...+C_{20}^{10}C_{12}^1+C_{20}^{11}C_{12}^0=C_{32}^{11}$

Đáp án B.

Bài 60. (CĐ Kinh tế TPHCM 2006)

Tìm n ∈ N sao cho: $C_{4n+2}^0+C_{4n+2}^2+C_{4n+2}^4+...+C_{4n+2}^{2n}=256$

A. 4 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Bài giải

- **Cách 1:** Ta có: $C_{4n+2}^0+C_{4n+2}^1+C_{4n+2}^2+...+C_{4n+2}^{4n+2}=2^{4n+2}$

$C_{4n+2}^0+C_{4n+2}^2+C_{4n+2}^4+...+C_{4n+2}^{4n+2}=2^{4n+1}$

$C_{4n+2}^{0}+C_{4n+2}^{2}+C_{4n+2}^{4}+...+C_{4n+2}^{2n}=2^{4n}$

Vậy có: $2^{4n}=256\Leftrightarrow n=2$

- **Cách 2:** Đặt $S_n=C_{4n+2}^{0}+C_{4n+2}^{2}+C_{4n+2}^{4}+...+C_{4n+2}^{2n}$

Thì $S_{n+1}=C_{4n+6}^{0}+C_{4n+6}^{2}+C_{4n+6}^{4}+...+C_{4n+6}^{2n}$

Vì $C_{4n+6}^{2k}\ge C_{4n+2}^{2k}\left(0\le k\le n\right)$ nên $S_{n+1}>S_n\Rightarrow$ Dãy (S_n) tăng.

Khi n = 2 thì $S_2=C_{10}^{0}+C_{10}^{2}+C_{10}^{4}=256$

Vậy $S_n=256\Leftrightarrow n=2$.

Đáp án C.

Bài 61. (ĐH Hàng hải 2001)

Tính tổng: $S=C_{2018}^{0}+C_{2018}^{2}.3^2+C_{2018}^{4}.3^4+...+C_{2018}^{2018}.3^{2018}$

A. $2^{2018}\left(2^{2017}+1\right)$ **B.** $2^{2018}\left(2^{2019}+1\right)$ **C.** $2^{2017}\left(2^{2018}+1\right)$ **D.** $2^{2018}\left(2^{2018}+1\right)$

Bài giải

Ta có: $\left(1+3\right)^{2n}=C_{2n}^{0}+C_{2n}^{1}.3^1+C_{2n}^{2}.3^2+...+C_{2n}^{2n}.3^n$

$\left(1-3\right)^{2n}=C_{2n}^{0}C_{2n}^{1}.3^1+C_{2n}^{2}.3^20...+C_{2n}^{2n}.3^n$

Cộng vế theo vế hai đẳng thức trên, ta được:

$4^{2n}+2^{2n}=2\left(C_{2n}^{0}+C_{2n}^{2}.3^2+...+C_{2n}^{2n}.3^{2n}\right)$

Từ đó ta được: $C_{2n}^{0}+C_{2n}^{2}.3^2+C_{2n}^{4}.3^4+...+C_{2n}^{2n}.3^{2n}=2^{2n-1}\left(2^{2n}+1\right)$

Đáp án C.

Bài 62. (ĐH Luật TPHCM khối A 2001)

Tính tổng: $S=C_{2018}^{1}.3^{2017}+2C_{2018}^{2}.3^{2016}+3C_{2018}^{3}.3^{2015}+2018.C_{2018}^{2018}$

A. 2017.4^{2017} **B.** 2017.4^{2018} **C.** 2018.4^{2017} **D.** 2018.4^{2018}

Bài giải

Xét hàm số: $f\left(x\right)=\left(x+3\right)^n=C_n^0 3^n+C_n^1.3^{n-1}x+...+C_n^n.x^n$

Ta có: $f'\left(x\right)=n\left(x+3\right)^{n-1}=C_n^1.3^{n-1}x+2C_n^2.3^{n-2}x+...+nC_n^n.x^{n-1}$

Cho x = 1, ta được: $f'\left(1\right)=n.4^{n-1}=C_n^1.3^{n-1}+2C_n^2.3^{n-2}+3.C_n^3.3^{n-3}+...+n.C_n^n$ (đpcm)

Bài 63. (ĐH Vinh khối DTM 2001)

Tính tổng: $S=C_{2001}^{0}+3^2C_{2001}^{2}+3^4C_{2001}^{4}+3^{2000}.C_{2001}^{2000}$

A. $2^{2000}\left(2^{2001}-1\right)$ **B.** $2^{2000}\left(2^{2001}+1\right)$ **C.** $2^{2001}\left(2^{2001}-1\right)$ **D.** $2^{2001}\left(2^{2000}-1\right)$

Bài giải

Ta có: $\left(x+1\right)^{2001}=\sum_{k=0}^{2001}C_{2001}^{k}.x^k$

$$\left(-x+1\right)^{2001}=\sum_{k=0}^{2001}C_{2001}^{k}.(-x)^k$$

Cộng lại ta được: $(x+1)^{2001}+(-x+1)^{2001}=2\left(C_{2001}^{0}+x^{2}C_{2001}^{2}+x^{4}C_{2001}^{4}+...+x^{2000}C_{2001}^{2000}\right)$

Cho x = 3 ta được: $4^{2001}-2^{2001}=2\left(C_{2001}^{0}+3^{2}C_{2001}^{2}+3^{4}C_{2001}^{4}+...+3^{2000}C_{2001}^{2000}\right)$

$\Rightarrow C_{2001}^{0}+3^{2}C_{2001}^{2}+3^{4}C_{2001}^{4}+...+3^{2000}C_{2001}^{2000}=2^{2000}\left(2^{2000}-1\right)$

Bài 64. (ĐH khối D 2002)

Tìm số nguyên dương n sao cho: $C_{n}^{0}+2C_{n}^{1}+4C_{n}^{2}+...+2^{n}C_{n}^{n}=243$

A. n = 8 B. n = 5 C. n = 17 D. n = 14

Bài giải

Ta có: $(x+1)^{n}=\sum_{k=0}^{n}C_{n}^{k}x^{k}$

Cho x = 2 ta được: $3^{n}=\sum_{k=0}^{n}C_{n}^{k}2^{k}\Rightarrow 3^{n}=243\Leftrightarrow n=5$

21 + 11 – 3 = 29 số hạng. **Đáp án B.**

Bài 65. (CĐ KT Y tế I 2006) Tìm số tự nhiên n thoả mãn đẳng thức sau:

$C_{2n}^{0}+C_{2n}^{2}3^{2}+...+C_{2n}^{2k}3^{2k}+...+C_{2n}^{2n-2}3^{2n-2}+C_{2n}^{2n}3^{2n}=2^{15}\left(2^{16}+1\right)$

A. n = 9 B. n = 4 C. n = 8 D. n = 6

Bài giải

Ta có: $4^{2n}=(1+3)^{2n}=C_{2n}^{0}+C_{2n}^{1}3^{1}+C_{2n}^{2}3^{2}+...+C_{2n}^{2n-1}3^{2n-1}+C_{2n}^{2n}3^{2n}$

$2^{2n}=(1-3)^{2n}=C_{2n}^{0}-C_{2n}^{1}3^{1}+C_{2n}^{2}3^{2}-...-C_{2n}^{2n-1}3^{2n-1}+C_{2n}^{2n}3^{2n}$

$\Rightarrow 4^{2n}+2^{2n}=2\left(C_{2n}^{0}+C_{2n}^{2}3^{2}+...+C_{2n}^{2n}3^{2n}\right)\Rightarrow 4^{2n}+2^{2n}=2.2^{15}\left(2^{16}+1\right)$

$\Rightarrow\left(2^{2n}-2^{16}\right)\left(2^{2n}+2^{16}+1\right)=0\Rightarrow 2^{2n}=2^{16}\Leftrightarrow n=8.$ **Đáp án C.**

Bài 66. (ĐH An ninh nhân dân khối DG 2000)

Tính tổng: $S=C_{2000}^{0}+2C_{2000}^{1}+3C_{2000}^{2}+...+2001C_{2000}^{2000}$

A. 1000.2^{2000} B. 1001.2^{2000} C. 1001.2^{2001} D. 1000.2^{2001}

Bài giải

Có $(x+1)^{2000}=\sum_{i=0}^{2000}C_{2000}^{i}x^{i}$ (1)

Trong (1) cho x = 1 ta được $\sum_{i=0}^{2000}C_{2000}^{i}=2^{2000}$

Đạo hàm 2 vế của (1) theo x, ta có: $2000.(x+1)^{1999}=\sum_{i=0}^{2000}i.C_{2000}^{i}x^{i-1}$

Cho x = 1 ta được: $\sum_{i=1}^{2000}i.C_{2000}^{i}=2^{2000}.1^{1999}=1000.2^{2000}$

Do đó: $S=\sum_{i=0}^{2000}C_{2000}^{i}+\sum_{i=1}^{2000}i.C_{2000}^{i}=1001.2^{2000}.$

Phần 6:

SỬ DỤNG CHO SỐ PHỨC.

Câu 1: Cho $z_1 = 3+i, z_2 = 2-i$. Tính $|z_1 + z_1 z_2|$

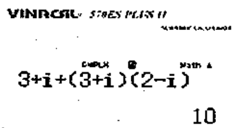
Giải:

$$z_1 + z_1 z_2 = 3+i+(3+i)(2-i) = 10 = 10+0i \Rightarrow |z_1 + z_1 z_2| = \sqrt{10^2+0^2} = 10$$

Dùng Casio như sau: Bấm mode 2:  để chuyển sang chế độ số phức.

Muốn bấm chữ i ta bấm 

Nhập biểu thức: $z_1 + z_1 z_2 = 3+i+(3+i)(2-i)$



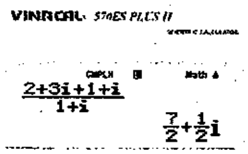
Vậy môdun = 10

Câu 2: Cho $z_1 = 2+3i,\ z_2 = 1+i$. Tính $\left|\dfrac{z_1+z_2}{z_2}\right|; \left|z_1^3 - 3z_2\right|$

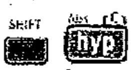
Giải:

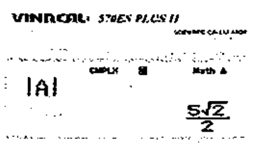
$$+)\ \frac{z_1+z_2}{z_2} = \frac{3+4i}{1+i} = \frac{(3+4i)(1-i)}{1-i^2} = \frac{7+i}{2} \Rightarrow \left|\frac{z_1+z_2}{z_2}\right| = \sqrt{\frac{49}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Dùng Casio: $\dfrac{2+3i+1+i}{1+i}$



Tính môdun. Ta bấm lưu kết quả số phức trên bằng cách bấm Shift Sto A.

Để tính được môdun ta phải bấm Shift hyp  ta được kết quả như sau:

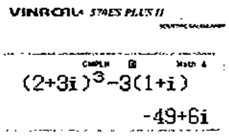


Câu 3: Cho $z_1 = 2+3i,\ z_2 = 1+i$. Tính $\left|z_1^3 - 3z_2\right|$

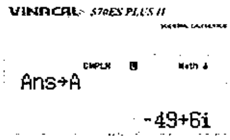
Giải:

$$z_1^3 + 3z_2 = 8 + 36i + 54i^2 + 27i^3 - 3 - 3i = -49 + 6i \Rightarrow \left|z_1^3 + 3z_2\right| = \sqrt{2437}$$

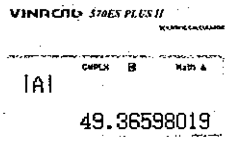
Bấm tương tự bên trên ta thấy màn hình hiện ra như sau:



Ta lưu vào A được như sau:



Tính môđun



Bài 4: Cho $z_1 = 3 + i,\ z_2 = 2 - i$. Tính $\left|z_1 + z_1 z_2\right|$

A. 9 **B.** 10 **C.** 7 **D.** 6

Giải:

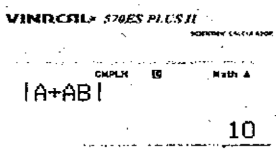
Ấn MODE 2 (chuyển sang chế độ số phức)

Nhập vào máy tính:

3 + ENG SHIFT STO A

2 - ENG SHIFT STO B

Bấm SHIFT hyp rồi nhập như hình:



❒ Bài tập tự luyện:

Bài 5: Cho $z_1 = 2 + 3i,\ z_2 = 1 + i$:

a) Tính $\left|z_1 + 3z_2\right|$

A. $\sqrt{29}$ **B.** $\sqrt{41}$ **C.** $\sqrt{61}$ **D.** 13

b) Tính $\left|\dfrac{z_1 + z_2}{z_2}\right|$

A. $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ **C.** $5\sqrt{2}$ **D.** $5\sqrt{3}$

c) Tính $\left|z_1^3 + 3z_2\right|$

A. $\sqrt{2437}$ B. $\sqrt{2354}$ C. $7\sqrt{46}$ D. $\sqrt{2134}$

Bài 5: Cho số phức $z = a + bi,\ \left(a, b \in \mathbb{R}\right)$ thỏa mãn $z^2 = -60 + 32i$. Tính giá trị biểu thức $A = a + b$:

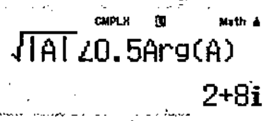
A. A = 5 hoặc A = 4 B. A = 4 hoặc A = 1

C. A = 10 hoặc A = -10 D. A = 2 hoặc A = -2

Giải:

Lưu $-60 + 32i$ vào A bằng cách SHIFT STO A.

Và bấm như hình:



Cách bấm: $|\ |$ bấm SHIFT hyp, $\angle$ bấm SHIFT (-), Arg bấm SHIFT 2 1

Suy ra $-60 + 32i = \left[\begin{array}{l}(2+8i)^2\\(-2-8i)^2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}a+b=10\\a+b=-10\end{array}\right.$

CÔNG THỨC

1. $\left|z_1+z_2\right|^2+\left|z_1-z_2\right|^2=2\left(\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2\right)$
2. $\left|z_1+z_2\right|^2+\left|z_2+z_3\right|^2+\left|z_3+z_1\right|^2=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2+\left|z_3\right|^2+\left|z_1+z_2+z_3\right|^2$.
3. $\left|z_1+z_2+z_3\right|^2+\left|-z_1+z_2+z_3\right|^2+\left|z_1-z_2+z_3\right|^2+\left|z_1+z_2-z_3\right|^2=4\left(\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2+\left|z_3\right|\right)^2$
4. $\left|z_1\right|-\left|z_2\right|\le\left|z_1+z_2\right|\le\left|z_1\right|+\left|z_2\right|$
5. $\left|z_1\right|-\left|z_2\right|\le\left|z_1-z_2\right|\le\left|z_1\right|+\left|z_2\right|$
6. $\left|z_1+z_2\right|+\left|z_2+z_3\right|+\left|z_3+z_1\right|\le\left|z_1\right|+\left|z_2\right|+\left|z_3\right|+\left|z_1+z_2+z_3\right|$
7. $\left|z_1\right|+\left|z_2\right|+\left|z_3\right|\le\left|z_1+z_2-z_3\right|+\left|z_1-z_2+z_3\right|+\left|-z_1+z_2+z_3\right|$
8. Khi $z_1^k+z_2^k+\ldots+z_n^k=0$ với $k,n\in\mathbb{N}^*$ thì $\dfrac{1}{z_1^k}+\dfrac{1}{z_2^k}+\ldots+\dfrac{1}{z_n^k}=0$
9. Khi $\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=\left|z_3\right|=R$ thì $\left|z_1-z_2\right|\left|z_2-z_3\right|+\left|z_2-z_3\right|\left|z_3-z_1\right|+\left|z_3-z_1\right|\left|z_1-z_2\right|\le 9R^2$
10. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z_1z-z_2\right|=r_1$. Tính Min, Max của $\left|z-z_3\right|$.

$$Max=\left|\frac{z_2}{z_1}-z_3\right|+\frac{r_1}{\left|z_1\right|};Min=\left|\frac{r_1}{\left|z_1\right|}-\left|\frac{z_2}{z_1}-z_3\right|\right|$$

11. Cho $z \in \mathbb{C}^*$ thỏa mãn $\left|z+\frac{1}{z}\right|=k$ thì $Max|z|=\frac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}, Min|z|=\frac{\sqrt{k^2+4}-k}{2}$

12. Dạng: $|z_1 z + z_2| + |z_1 z - z_2| = k$ với $z_1 = a+bi; z_2 = c+di; z = x+yi$

Ta có: $Min|z| = \sqrt{\frac{k^2-4(c^2+d^2)}{4(a^2+b^2)}}$ và $Max|z| = \frac{k}{2|z_1|}$

13. Cho $|z+a|=1$ thì $|z^2+a^2| \geq \frac{|1-2|a||}{\sqrt{2}}$

TÍNH MÔĐUN LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT

Câu 1: Cho số phức z thỏa mãn $|z-2i|=\sqrt{5}$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$:

A. $2\sqrt{5}$ **B.** $2+\sqrt{5}$ **C.** $3\sqrt{5}$ **D.** $4+\sqrt{5}$

Câu 2: Với các số phức z thỏa mãn $|(1+i)z+1-7i|=\sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$

A. $\max|z|=4$ **B.** $\max|z|=3$ **C.** $\max|z|=7$ **D.** $\max|z|=6$

Câu 3: Trong số các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-4+3i|=3$, gọi z_0 là số phức có mô đun lớn nhất. Khi đó $|z_0|$ là:

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 8

Câu 4: Trong các số phức z thỏa $|z+3+4i|=2$, gọi z_0 là số phức có mô đun nhỏ nhất. Khi đó

A. Không tồn tại số phức z_0.

B. $|z_0|=2$.

C. $|z_0|=7$.

D. $|z_0|=3$.

Câu 5: Biết rằng số phức z thỏa mãn $u=(z+3-i)(\overline{z}+1+3i)$ là một số thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$

A. 8 **B.** $\sqrt{2}$ **C.** $2\sqrt{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 6: Cho số phức z thỏa mãn $|z+i+1|=|\overline{z}-2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là:

A. $|z|=\frac{1}{2}$ **B.** $|z|=\frac{1}{\sqrt{2}}$ **C.** $|z|=\sqrt{2}$ **D.** $|z|=2$

Câu 7: Biết rằng số phức z thỏa mãn: $\omega=(z+3-i)(\overline{z}+1+3i)$ là một số thực. Tìm số phức z để $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $z=2+2i$. **B.** $z=-2-2i$. **C.** $z=-2+2i$. **D.** $z=2-2i$.

Câu 8: Cho số phức z thỏa mãn $\left|\frac{z+2-i}{z+1-i}\right|=\sqrt{2}$. Tìm trung bình cộng giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $|z|$.

A. 3 **B.** $\sqrt{10}\pm 3$ **C.** $2\sqrt{10}$ **D.** $\sqrt{10}$

Câu 9: Cho số phức z thỏa mãn: $|z+i+1|=|\bar{z}-2i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$?

A. $-\frac{1}{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 10: Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i|=|z-2i|$. Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

A. $z=-1+i$ **B.** $z=-2+2i$ **C.** $z=2+2i$ **D.** $z=3+2i$

Câu 11: Số phức z nào sau đây có môđun nhỏ nhất thỏa $|z|=|\bar{z}-3+4i|$:

A. $z=3-\frac{7}{8}i$ **B.** z = -3 – 4i **C.** $z=-\frac{3}{2}-2i$ **D.** $z=\frac{3}{2}+2i$

Câu 12: Số phức Z có mô đun nhỏ nhất sao cho: $|z|=|\bar{z}-3+4i|$ là:

A. $z=-\frac{3}{2}-2i$ B. $z=-\frac{3}{2}+2i$ C. $z=\frac{3}{2}+2i$ D. $z=\frac{3}{2}-2i$

Câu 13: Cho số phức z thoả mãn điều kiện $|z-2-4i|=|z-2i|$. Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

A. $z=-1+i$ **B.** $z=-2+2i$ **C.** $z=2+2i$ **D.** $z=3+2i$

Câu 14: Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z+2-2i|=|z-4i|, w=iz+1$. Giá trị nhỏ nhất của $|w|$ là:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** 2 **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ **D.** $2\sqrt{2}$

Câu 15: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=|z+1|+2|z-1|$

A. $\text{Max}\,T=2\sqrt{5}$. **B.** $\text{Max}\,T=2\sqrt{10}$. **C.** $\text{Max}\,T=3\sqrt{5}$. **D.** $\text{Max}\,T=3\sqrt{2}$.

Câu 16: Trong số các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-4+3i|=3$, gọi z_0 là số phức có môđun nhỏ nhất. Khi đó $|z_0|$ là:

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 2

Câu 17: Cho số phức z thỏa mãn $|z^2-2z+5|=|(z-1+2i)(z+3i-1)|$. Tính $\min|w|$, với $w=z-2+2i$.

A. $\min|w|=\frac{3}{2}$ **B.** $\min|w|=2$ **C.** $\min|w|=1$ **D.** $\min|w|=\frac{1}{2}$

Câu 18: Cho số phức z thỏa mãn $|z-4|+|z+4|=10$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ lần lượt là:

A.10 và 4 B.5 và 4 C.4 và 3 D.5 và 3

Câu 19 (Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa): Cho số phức $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R};a\geq 0,\ b\geq 0)$. Đặt đa thức $f(x)=ax^2+bx-2$. Biết $f(-1)\leq 0,\ f\left(\frac{1}{4}\right)\leq -\frac{5}{4}$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$

A. $\max|z|=2\sqrt{5}$ B. $\max|z|=3\sqrt{2}$ C. $\max|z|=5$ D. $\max|z|=2\sqrt{6}$

Câu 20: Cho z là số phức thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $|z|=1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|1+z|+|1-z+z^2|$. Tính giá trị biểu thức $T=\frac{M}{4m^2+1}$

A. $T=13$ B. $T=\frac{1}{4}$ C. $T=\frac{13}{4}$ D. $T=1$

Câu 21: Cho số phức z, tìm giá trị lớn nhất của $|z|$ biết z thỏa mãn điều kiện $\left|\frac{-2-3i}{3-2i}z+1\right|=1$.

A. 3. B. 2. C. 1. D. $\sqrt{2}$.

Câu 22: Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i|=|z-2i|$. Modun nhỏ nhất của số phức *z* là:

A. 8 B. 4 C. $2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{2}$

Câu 23: Tìm số phức z có $|z|=1$ và $|z+i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. 1 B. -1 C. *i* D. *-i*

Câu 24: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=6|z+1|+8|z-1|$ là:

A. $\max T=10$ B. $\max T=\sqrt{10}$ C. $\max T=20$ D. $\max T=2\sqrt{5}$

Câu 25: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=2$. Gọi A và B lần lượt là điểm biểu diễn của z và $\bar{z}$. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác OAB.

A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. 1 D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 26: Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-3i|=1$. Giá trị lớn nhất của $|\bar{z}+1+i|$ là:

A. $\sqrt{13}+2$ B. 4 C. 6 D. $\sqrt{13}+1$

Câu 27: Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $z_1+z_2=8+6i$ và $|z_1-z_2|=2$. Tìm giá trị lớn nhấtcủa $P=|z_1|+|z_2|$?

A. $P=4\sqrt{6}$ B. $P=5+3\sqrt{5}$ C. $P=2\sqrt{26}$ D. $P=34+3\sqrt{2}$

Câu 28: Biết số phức $z = x + yi\left(x, y \in \mathbb{R}\right)$ thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i| = |z-2i|$ có môđun nhỏ nhất. Tính $M = 2x^2 - y^2$.

A. $M = 4$ **B.** $M = -4$ **C.** $M = 8$ **D.** $M = 2$

Câu 29: Cho số phức z thỏa mãn: $|z| = m^2 + 2m + 5$, với m là tham số thực thuộc $\mathbb{R}$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (3-4i)z - 2i$ là một đường tròn. Tính bán kính r nhỏ nhất của đường tròn đó.

A. $r = 20$ **B.** $r = 4$ **C.** $r = 22$ **D.** $r = 5$

Câu 30: Cho số phức z thỏa mãn $|z| \leq 1$, đồng thời z có phần thực dương, phần ảo âm. Đặt $A = \dfrac{2z-i}{2+iz}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $|A| \leq 1$ **B.** $|A| \geq 1$ **C.** $|A| < 1$ **D.** $|A| > 1$

Câu 31: Cho hai số phức z_1; z_2 thỏa mãn $\left|iz_1 + \sqrt{2}\right| = \dfrac{1}{2}$ và $z_2 = iz_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1 - z_2|$

A. $2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **B.** $2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **C.** $\sqrt{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **D.** $\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Câu 32: Cho số phức z và số phức liên hợp của nó $\overline{z}$ có điểm biểu diễn là M, M'. Số phức $z.(4+3i)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn lần lượt là N, N'. Biết rằng 4 điểm M, N, M', N' tạo thành hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z + 4i - 5|$.

A. $\dfrac{5}{\sqrt{34}}$ **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **D.** $\dfrac{4}{\sqrt{13}}$

Câu 33: Cho số phức z có môđun $|z| = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |1+z| + 3|1-z|$ là:

A. $3\sqrt{10}$ **B.** $2\sqrt{10}$ **C.** 6 **D.** $4\sqrt{2}$

Câu 34: Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện $\left|-2-3i+\overline{z}\right| = |z-i|$.

A. $\dfrac{3}{5} - \dfrac{6}{5}i$ **B.** $\dfrac{6}{5} - \dfrac{3}{5}i$ **C.** $\dfrac{9}{5}$ **D.** $\sqrt{\dfrac{9}{5}}$

Câu 35: Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-3i| = 1$. Giá trị lớn nhất của $\left|\overline{z}+1+i\right|$ là:

A. $\sqrt{13}+2$. **B.** 4. **C.** 6. **D.** $\sqrt{13}+1$.

Câu 36: Cho số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $|z| \geq 2$. Tìm tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left|\dfrac{z+i}{z}\right|$.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 37: Gọi T là tập hợp các số phức z thỏa mãn $|z-i|\ge 3$ và $|z-1|\le 5$. Gọi $z_1;z_2\in T$ lần lượt là các số phức có môđun nhỏ nhất và lớn nhất. Tìm số phức z_1+2z_2

A. $12+2i$ B. $-2+12i$ C. $6-4i$ D. $12+4i$

Câu 38: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1|+|z^2-z+1|$. Tính giá trị của M.n

A. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{39}{4}$ C. $3\sqrt{3}$ D. $\frac{13}{4}$

Câu 39: Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn $|z-i|\ge 3$ và $|z-2-2i|\le 5$. Kí hiệu z_1,z_2 là hai số phức thuộc S và là những số phức có môđun lần lượt nhỏ nhất và lớn nhất. Tính giá trị của biểu thức $P=|z_2+2z_1|$.

A. $P=2\sqrt{6}$ B. $P=3\sqrt{2}$ C. $P=\sqrt{33}$ D. $P=8$

Câu 40: Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$. Tính môđun số phức $w=M+mi$.

A. $|w|=2\sqrt{314}$ B. $|w|=\sqrt{1258}$ C. $|w|=3\sqrt{137}$ D. $|w|=2\sqrt{309}$

Câu 41: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z+1|+2|z-1|$.

A. $P_{max}=2\sqrt{5}$ B. $P_{max}=2\sqrt{10}$ C. $P_{max}=3\sqrt{5}$ D. $P_{max}=3\sqrt{2}$

Câu 42: Cho số phức $z=x+yi\ (x,y\in R)$ thỏa mãn $|z-2-4i|=|z-2i|$ và $m=min|z|$. Tính môđun số phức $w=m-(x+y)i$.

A. $|w|=2\sqrt{3}$ B. $|w|=3\sqrt{2}$ C. $|w|=5$ D. $|w|=2\sqrt{6}$

Câu 43: Cho số phức $z=x+yi\ (x,y\in R)$ thỏa mãn $|z+i+1|=|\bar{z}-2i|$. Tìm môđun nhỏ nhất của z.

A. $min|z|=\sqrt{2}$ B. $min|z|=1$ C. $min|z|=0$. D. $min|z|=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Câu 44: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=|z^3+3z+\bar{z}|-|z+\bar{z}|$. Tính $M+m$

A. $\frac{7}{4}$ B. $\frac{13}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{15}{4}$

Câu 45: Cho số phức z thỏa mãn $\left|\frac{3-3\sqrt{2}i}{1+2\sqrt{2}i}z-1-\sqrt{2}i\right|=\sqrt{3}$. Gọi M và n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-3-3i|$. Tính $M.m$

A. $M.n=25$ B. $M.n=20$ C. $M.n=24$ D. $M.n=30$

Câu 2: Đáp án D.

– **Phương pháp:**

+ Đặt $z = a + bi(a, b \in \mathbb{R})$

+ Biến đổi điều kiện đề bài, sử dụng các bất đẳng thức cần thiết để đánh giá $|z|$

– **Cách giải:**

Đặt $z = a + bi(a, b \in \mathbb{R})$. Điều kiện đề bài tương đương với

$|(1+i)(a+bi)+1-7i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |(a-b+1)+(a+b-7)i| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (a-b+1)^2 + (a+b-7)^2 = 2 \Leftrightarrow (a^2+b^2) - 2(3a+4b) + 24 = 0$ (*)

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$(3a+4b)^2 \le (3^2+4^2)(a^2+b^2) \Rightarrow 3a+4b \le 5\sqrt{a^2+b^2}$

$(*) \Rightarrow 0 \ge (a^2+b^2) - 10\sqrt{a^2+b^2} + 24 \Rightarrow 4 \le \sqrt{a^2+b^2} \le 6 \Rightarrow |z| \le 6$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow z = \frac{18}{5} + \frac{24}{5}i$

Câu 3: Đáp án D.

➢ Cách giải: gọi $z = x + yi$; Khi đó $z - 4 + 3i = (x-4) + (y+3)i$ khi đó

$|z-4+3i| = |(y-4)+(y+3)i| = 3 \Rightarrow (x-4)^2 + (y+3)^2 = 9$

Vậy quỹ tích các điểm z thuộc đường tròn tâm $I(4;-3); R = 3$

Đặt $\begin{cases} y = 3\sin t + 4 \\ y = 3\cos t - 3 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = (3\sin t + 4)^2 + (3\cos t - 3)^2$

$= 9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 24\sin t - 18\cos t + 25 = 24\sin t - 18\cos t + 34$

$= 24\sin t - 18\cos t \le \sqrt{(24^2+18^2)(\sin^2 t + \cos^2 t)} = 30$ (theo bunhiacopxki)

$\Rightarrow x^2 + y^2 \le 30 + 34 = 64 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} \le 8 \Rightarrow |z| \le 8$.

➢ **Cách khác.**

Giả sử $z = x + yi(x, y \in \mathbb{R})$ ta có:

$|z-4+3i| = 3 \Leftrightarrow |x+yi-4+3i| = 3 \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y+3)^2 = 9$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x + 6y + 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 16 = 8x - 6y$

Ta có $(8x-6y)^2 \le (8^2 + (-6)^2)(x^2+y^2) = 100(x^2+y^2) \Rightarrow 8x - 6y \le 10\sqrt{x^2+y^2}$

$\Rightarrow (x^2+y^2) + 16 \le 10\sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow |z|^2 + 16 \le 10|z| \Leftrightarrow |z|^2 - 10|z| + 16 \le 0 \Leftrightarrow 2 \le |z| \le 8$

Do đó suy ra $|z_0| = 8$.

Câu 4: Đáp án D.

➤ **Cách 1:**

Đặt $z = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R})$.

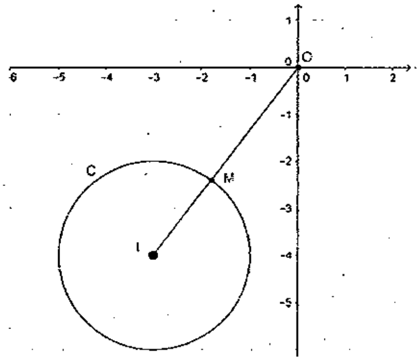
Khi đó $|z + 3 + 4i| = 2 \Leftrightarrow (a+3)^2 + (b+4)^2 = 4$.

Suy ra biểu diễn hình học của số phức z là đường tròn (C) tâm $I(-3;-4)$ và bán kính $R = 5$.

Gọi $M(z)$ là điểm biểu diễn số phức z.

Ta có: $M(z) \in (C)$. $|z| = OM \geq OI - R = 3$.

Vậy $|z|$ bé nhất bằng 3 khi $M(z) = (C) \cap IM$.



➤ **Cách khác.**

Giả sử $z = x + yi(x, y \in \mathbb{R})$ ta có

$|z + 3 + 4i| = 2 \Leftrightarrow |x + yi + 3 + 4i| = 2 \Leftrightarrow (x+3)^2 + (y+4)^2 = 4$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6x + 8y + 21 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 21 = -6x - 8y$

Ta có $(-6x - 8y)^2 \leq \left[(-6)^2 + (-8)^2\right](x^2 + y^2) = 100(x^2 + y^2) \Rightarrow -6x - 8y \leq 10\sqrt{x^2 + y^2}$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 21 \leq 10\sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow |z|^2 + 21 \leq 10|z| \Leftrightarrow |z|^2 - 10|z| + 21 \leq 0 \Leftrightarrow 3 \leq |z| \leq 7.$

Do đó suy ra $|z_0| = 3$.

Câu 5: Đáp án C.

Giả sử $z = x + yi(x, y \in R)$, ta có:

$u = (z + 3 - i)(\bar{z} + 1 + 3i) = [x + 3 + (y-1)i][x + 1 - (y-3)i] = x^2 + y^2 + 4x - 4y + 6 + 2(x - y - 4)i$

Theo giả thiết $u \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x - y - 4 = 0$

➤ **Cách 1:** $|z|$ min $\Leftrightarrow |z|^2$ min

$|z|^2 = x^2 + y^2 = (y+4)^2 + y^2 = 2y^2 + 8y + 16 = 2(y+2)^2 + 8 \geq 8$

Dấu "=" xảy ra khi $y = -2 \Rightarrow x = 2$

Vậy $|z|$ min $\Leftrightarrow z = 2 - 2i \Rightarrow |z|_{\min} = 2\sqrt{2}$

➤ **Cách 2:** Giả sử $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của z thì $|z|_{\min} \Leftrightarrow OM_{\min} \Leftrightarrow OM \perp d$

Ta tìm được $M(2;-2) \Leftrightarrow z = 2 - 2i \Leftrightarrow |z|_{\min} = 2\sqrt{2}$

Câu 6: Đáp án B.

Gọi số phức cần tìm là $z = a + bi(a, b \in \mathbb{R})$. Khi đó từ giả thiết, ta có:

$|a + bi + i + 1| = |a - bi - 2i| \Leftrightarrow (a+1)^2 + (b+1)^2 = a^2 + (b+2)^2 \Leftrightarrow 2a - 2b - 2 = 0$

$a = b + 1$

Câu 14: Đáp án A.

Đặt $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$, khi đó $z+2-2i=a+2+\left(b-2\right)i$ và $z-4i=a+\left(b-4\right)i$

Nên ta có $\left(a+2\right)^2+\left(b-2\right)^2=a^2+\left(b-4\right)^2\Leftrightarrow a+b=2\Leftrightarrow b=2-a$

Khi đó $w=iz+1=\left(a+bi\right)i+1=1-b+ai\Rightarrow\left|w\right|=\sqrt{a^2+\left(b-1\right)^2}=\sqrt{a^2+\left(a-1\right)^2}$

Ta có $a^2+\left(a-1\right)^2=2a^2-2a+1=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\ge\frac{1}{2}\Rightarrow\left|w\right|\ge\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 15: Đáp án A.

$T=\left|z+1\right|+2\left|z-1\right|\le\sqrt{\left(1+2^2\right)\left(\left|z+1\right|^2+\left|z-1\right|^2\right)}=\sqrt{5.2\left(\left|z\right|^2+1\right)}=2\sqrt{5}$

(BĐT Cauchy - Swart)

Chú ý: $\left|z+1\right|^2+\left|z-1\right|^2=2x^2+2y^2+2=2\left(\left|z\right|^2+1\right)$ với $z=x+yi$

➢ **Cách 2:** Đặt $z=x+yi$ ta có:

$T=\left|x+yi+1\right|+2\left|x-yi-1\right|=\sqrt{\left(x+1\right)^2+y^2}+2\sqrt{\left(x-1\right)^2+y^2}$

Lại có $x^2+y^2=1\Rightarrow T=\sqrt{2x+2}+2\sqrt{-2x+2}=f\left(x\right)$

Ta có: $f'\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2x+2}}-\frac{2}{\sqrt{2-2x}}=0\Leftrightarrow x=\frac{-6}{10}\Rightarrow T_{max}=2\sqrt{5}$

Câu 16: Đápán D.

Gọi $z=x+yi,\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

Ta có: $\left|z-4+3i\right|=3\Leftrightarrow\left|\left(x-4\right)+\left(y+3\right)i\right|=3\Leftrightarrow\left(x-4\right)^2+\left(y+3\right)^2=9$

Ta được $\left|z\right|^2=x^2+y^2=8x-6y-16=8\left(x-4\right)-6\left(y+3\right)+34$

Ta thấy $\left|8\left(x-4\right)-6\left(y+3\right)\right|\le\sqrt{\left(8^2+6^2\right)\left[\left(x-4\right)^2+\left(y+3\right)^2\right]}=30$

Ta được: $2\le\left|z\right|\le\left|8\right|$.

Câu 17: Đáp án C.

Ta có: $\left|z^2-2z+5\right|=\left|\left(z-1+2i\right)\left(z+3i-1\right)\right|\Leftrightarrow\left|\left(z-1\right)^2+4\right|=\left|\left(z-1+2i\right)\right|\left|\left(z+3i-1\right)\right|$

$\Leftrightarrow\left|\left(z-1+2i\right)\left(z-1+2i\right)\right|=\left|\left(z-1+2i\right)\right|\left|\left(z+3i-1\right)\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z-1+2i=0\ (1)\\ \left|z-1-2i\right|=\left|z+3i-1\right|\ (2)\end{array}\right.$

Từ $(1)\Rightarrow z=1-2i\Rightarrow w=-1\Rightarrow\left|w\right|=1$.

Xét (2). Gọi $z=x+yi$

Khi đó $\left|z-1-2i\right|=\left|z+3i-1\right|\Leftrightarrow\left|\left(x-1\right)+\left(y-2\right)i\right|=\left|\left(x-1\right)+\left(y+3\right)i\right|$.

Ta được $(x-1)^2+(y-2)^2=(x-1)^2+(y+3)^2 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}$

Suy ra $w=(x-2)+\frac{3}{2}i \Rightarrow |w|=\sqrt{(x-2)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2} \geq \frac{3}{2}>1$

Câu 18: Đáp án D.

➢ **Cách 1:** Gọi $z=x+yi, x, y \in \mathbb{R}$ điểm biểu diễn số phức z là $M(x;y)$

Gọi $F_1(-4;0), F_2(4;0)$, ta thấy:

$MF_1+MF_2=\sqrt{(x-4)^2+y^2}+\sqrt{(x+4)^2+y^2}=|z-4|+|z+4|=10$

Do đó tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện $|z-4|+|z+4|=10$ là đường elip, với $2a=10, b=\sqrt{a^2-b^2}=3$. Có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow y^2=\frac{9}{25}(25-x^2)$

Có $T=|z|^2=x^2+y^2=x^2+\frac{9}{25}(25-x^2)=\frac{16}{25}x^2+9$

Vì $M(x;y)$ thuộc elip nên $-5 \leq x \leq 0 \Rightarrow 9 \leq T \leq 25 \Rightarrow 3 \leq |z| \leq 5$

➢ **Cách 2:** $|z-4|+|z+4|=\sqrt{(x-4)^2+y^2}+\sqrt{(x+4)^2+y^2}=10$

Áp dụng bất đẳng thức vectơ, ta có:

$\sqrt{(x-4)^2+y^2}+\sqrt{(x+4)^2+y^2} \geq \sqrt{(x+4+x-4)^2+(y+y)^2}=\sqrt{4x^2+4y^2}$

$\Rightarrow x^2+y^2 \leq 25 \Rightarrow |z| \leq 25$

Áp dụng bất đẳng thức ***Cauchy – Swarz*** **ta có:**

$\sqrt{(x-4)^2+y^2}+\sqrt{(x+4)^2+y^2} \leq \sqrt{(1+1)\left((x-4)^2+y^2+(x+4)^2+y^2\right)}$

$=\sqrt{2(2x^2+2y^2+32)} \Rightarrow x^2+y^2 \geq 9 \Rightarrow |z| \geq 3$

Câu 19 (Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa):Đáp án A.

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} f(-1) \leq 0 \\ f\left(\frac{1}{4}\right) \leq -\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b-2 \leq 0 \\ \frac{a}{16}+\frac{b}{4}-2 \leq -\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq b+2 \\ a+4b \leq 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq b+2 \\ b \leq \frac{12-a}{4} \end{cases}$

Khi đó $a \leq b+2 \leq \frac{12-a}{4}+2=\frac{20-a}{4} \Leftrightarrow a \leq 4$. Vậy $|z|^2=a^2+b^2 \leq a^2+\frac{(12-a)^2}{16}$

Xét hàm số $f(a)=16a^2+(12-a)^2=17a^2-24a+144$ với $a \in [0;4]$, có $f'(a)=0 \Leftrightarrow a=\frac{12}{17}$

Tính các giá trị $f(0)=144$, $f(4)=320$, $f\left(\frac{12}{17}\right)=\frac{2304}{17}$ suy ra $\max\limits_{[0;4]}=f(a)=320$

Vậy giá trị lớn nhất của $|z|$ là: $|z|_{max}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

Câu 30: Đáp án A.

Đặt $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$. Do $|z| \le 1$ nên $a^2 + b^2 \le 1$.

Ta có: $|A| = \left|\dfrac{2z - i}{2 + iz}\right| = \left|\dfrac{2a + (2b-1)i}{2 - b + ai}\right| = \sqrt{\dfrac{4a^2 + (2b+1)^2}{(2-b)^2 + a^2}}$

Ta chứng minh $\dfrac{4a^2 + (2b+1)^2}{(2-b)^2 + a^2} \le 1$

Thật vậy, ta có: $\dfrac{4a^2 + (2b+1)^2}{(2-b)^2 + a^2} \le 1 \Leftrightarrow 4a^2 + (2b+1)^2 \le (2-b)^2 + a^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \le 1$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a^2 + b^2 = 1$.

Vậy $|A| \le 1$

Câu 31: Đáp án A.

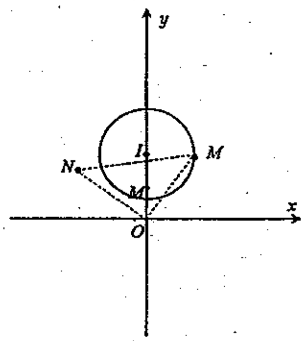
$\left|i(x_1 + y_1 i) + \sqrt{2}\right| = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left|ix_1 - y_1 + \sqrt{2}\right| = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x_1^2 + (y_1 - \sqrt{2})^2 = \dfrac{1}{4}$. Suy ra tập hợp các điểm M biểu diễn z_1 là đường tròn (C) có tâm $I(0; \sqrt{2})$ và bán kính $R = \dfrac{1}{2}$.

Khi đó nếu N là điểm biểu diễn của số phức z_2 thì việc tìm GTNN của $|z_1 - z_2|$ là việc tìm GTNN của MN.

Theo đề thì $z_2 = iz_1 = -y_1 + x_1 i \Rightarrow N(-y_1; x_1)$ là điểm biểu diễn z_2. Ta nhận thấy rõ ràng $\overline{OM}.\overline{ON} = x_1y_1 + x_1y_1 = 0 \Rightarrow \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$. Dễ nhận thấy OM=ON=$\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

Ta có hình vẽ sau:



Do OMN là tam giác vuông cân tại O nên $MN = OM\sqrt{2}$, do đó để MN nhỏ nhất thì OM nhỏ nhất. Dễ thấy, OM nhỏ nhất khi $M \equiv M'$ (M' là giao điểm của OI với đường tròn như hình vẽ). Tức là $M\left(0; \sqrt{2} - \dfrac{1}{2}\right)$. Khi đó:

$MN = OM\sqrt{2} = \left(\sqrt{2} - \dfrac{1}{2}\right)\sqrt{2} = 2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Câu 32: Đáp án C.

* Giả sử $x = a + bi\left(a,b \in \mathbb{R}\right)$. Ta có: $M\left(a;b\right)$ và $M'\left(a;-b\right)$

* Khi đó: $z\left(4+3i\right) = \left(4a-3b\right) + \left(3aq+4b\right)i$.

  Suy ra $N\left(4a-3b;3a+4b\right)$ và $N'\left(4a-3b;-3a-3b\right)$

* Do 4 điểm *M, N, M′, N′* tạo thành hình thang cân nhận *Ox* làm trục đối xứng nên 4 điểm đó lập thành hình chữ nhật $\Leftrightarrow MM' = NN' \Leftrightarrow 4b^2 = 4\left(3a+4b\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ a=-\frac{8}{3}b \end{array}\right.$.

* Với $a=-b$, ta có:

  $$\left|z+4i-5\right| = \sqrt{\left(b+5\right)^2 + \left(b+4\right)^2} = \sqrt{2\left(b+\frac{9}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$$

  Dấu bằng xảy ra khi $a=\frac{9}{2}, b=-\frac{9}{2}$.

* Với $a=-\frac{8}{3}$, ta có:

  $$\left|z+4i-5\right| = \sqrt{\left(\frac{8}{3}b+5\right)^2 + \left(b+4\right)^2} = \sqrt{\frac{73}{9}b^2 + \frac{104}{3}b + 41} \ge \frac{289}{73} > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

  Vậy $\min\left|z+4i-5\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Câu 33: Đáp án B.

Đặt $z = x + yi\left(x,y \in \mathbb{R}\right)$. Ta có: $\left|z\right| = 1 \Leftrightarrow x^2+y^2=1 \Rightarrow x,y \in \left[-1;1\right]$

$A = \sqrt{2\left(1+x\right)} + 3\sqrt{2\left(1-x\right)} \Rightarrow MaxA = 2\sqrt{10}$

Câu 34: Đáp án A.

Gọi $z = a + bi\ \left(a,b \in \mathbb{R}\right)$

Ta có $\left|-2-3i+\bar{z}\right| = \left|z-i\right| \Leftrightarrow \left|a-2-\left(b+3\right)i\right| = \left|a+\left(b-1\right)i\right|$

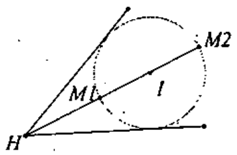
$\Leftrightarrow \left(a-2\right)^2 + \left(b+3\right)^2 = a^2 + \left(b-1\right)^2 \Leftrightarrow a = 2b+3$

Ta cần tìm zsao cho $\sqrt{a^2+b^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có: $a^2+b^2 = \left(2b+3\right)^2 + b^2 = 5\left(b+\frac{6}{5}\right)^2 + \frac{9}{5} \ge \frac{9}{5}$

Do đó $\min\left(\sqrt{a^2+b^2}\right) = \sqrt{\frac{9}{5}} \Leftrightarrow b = \frac{-6}{5} \wedge a = \frac{3}{5} \Rightarrow z = \frac{3}{5} - \frac{6}{5}i$. Vậy $z = \frac{3}{5} - \frac{6}{5}i$.

Câu 35: Đáp án D.



Gọi $z = x + yi$ ta có $z - 2 - 3i = x + yi - 2 - 3i = x - 2 + (y - 3)i$.

Theo giả thiết $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ nên điểm M biểu diễn cho số phức z nằm trên đường tròn tâm $I(2;3)$ bán kính $R = 1$.

Ta có $|\bar{z} + 1 + i| = |x - yi + 1 + i| = |x + 1 + (1 - y)i| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}$.

Gọi $M(x;y)$ và $H(-1;1)$ thì $HM = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}$.

Do M chạy trên đường tròn, H cố định nên MH lớn nhất khi M là giao của HI với đường tròn.

Phương trình HI: $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$, giao của HI và đường tròn ứng với t thỏa mãn: $9t^2 + 4t^2 = 1$

$\Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{\sqrt{13}}$ nên $M\left(2 + \frac{3}{\sqrt{13}}; 3 + \frac{2}{\sqrt{13}}\right), M\left(2 - \frac{3}{\sqrt{13}}; 3 - \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$.

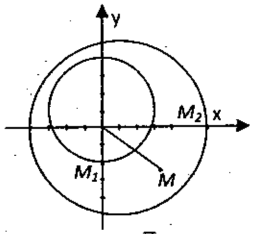
Tính độ dài MH ta lấy kết quả $HM = \sqrt{13} + 1$.

Câu 36: Đáp án B.

Ta có: $1 - \left|\frac{i}{z}\right| \le \left|1 + \frac{i}{z}\right| \le 1 + \left|\frac{i}{z}\right| \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{|z|} \le \left|1 + \frac{i}{z}\right| \le 1 + \frac{1}{|z|}$. Mặt khác $|z| \ge 2 \Leftrightarrow \frac{1}{|z|} \le \frac{1}{2}$ suy ra $\frac{1}{2} \le P \le \frac{3}{2}$. Suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất là $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$. Vậy tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 2.

Câu 37: Đáp án A.

Do $|z - 1| \ge 3$ và $|z - 1| \le 5$ nên tập hợp điểm M là các điểm nằm ngoài đường tròn $I_1(0;1)$; $R_1 = 3$ và nằm trong đường tròn $I_2(1;0); R_2 = 5$



Dựa vào hình vẽ ta chứng minh được $OM_1 \le |z| = OM \le OM_2$

Khi đó $z_1 = -2i; z_2 = 6 \Rightarrow z_1 + 2z_2 = -2i + 12$

Câu 38: Đáp án A.

➢ **Cách 1:**

Re(z) là phần thực của số phức z, Im(z) là phần ảo của số phức z, $|z| = 1 \Leftrightarrow z.\bar{z} = 1$

- Đặt $t = |z + 1|$, ta có: $0 = |z| - 1 \le |z + 1| \le |z| + 1 = 2 \Rightarrow t \in [0;2]$
- $t^2 = (1 + z)(1 + \bar{z}) = 1 + z.\bar{z} + z + \bar{z} = 2 + 2\text{Re}(z) \Rightarrow \text{Re}(z) = \frac{t^2 - 2}{2}$
- $|z^2 - z + 1| = |z^2 - z + z.\bar{z}| = |z||z - 1 + \bar{z}| = |t^2 - 3|$
- Xét hàm số: $f(t) = t + |t^2 - 3|, t \in [0;2]$. Xét 2 trường hợp:

- $Maxf(t)=\dfrac{13}{4}$; $Minf(t)=\sqrt{3}\Rightarrow M.n=\dfrac{13\sqrt{3}}{4}$

Câu 39: Đáp án C.

- $3\le|z-i|\le|z|+1\Rightarrow|z|\ge 2$
- Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases}x^2+(y-1)^2=9\\x^2+y^2=4\end{cases}\Leftrightarrow z_1=-2i$
- $|z|-2\sqrt{2}\le|z-2-2i|\le 5\Rightarrow|z|\le 5+2\sqrt{2}$
- Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2=25\\x^2+y^2=33+20\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow z_2=\dfrac{4+5\sqrt{2}}{2}+\left(\dfrac{4+5\sqrt{2}}{2}\right)i$
- $P=\left|\dfrac{4+5\sqrt{2}}{2}+\left(\dfrac{4+5\sqrt{2}}{2}\right)i-4i\right|=\sqrt{33}$

Câu 40: Đáp án B.

➢ **Cách 1:**

$P=4x+2y+3\Rightarrow y=\dfrac{P-4x-3}{2}$

$|z-3-4i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow(x-3)^2+(y-4)^2=5\Leftrightarrow(x-3)^2+\left(\dfrac{P-4x-3}{2}-4\right)^2-5=f(x)$

$f'(x)=8(x-3)-8(P-4x-11)=0\Leftrightarrow x=0,2P-1,6\Rightarrow y=0,1P+1,7$

Thay vào $f(x)$ ta được: $(0,2P-1,6-3)^2+(0,1P+1,7-4)^2-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}P=33\\P=13\end{array}\right.$

➢ **Cách 2:**

$|z-3-4i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow(x-3)^2+(y-4)^2=5:(C)$

$(\Delta):4x+2y+3-P=0$

Tìm P sao cho đường thẳng Δ và đường tròn (C) có điểm chung

$\Leftrightarrow d(I;\Delta)\le R\Leftrightarrow|23-P|\le 10\Leftrightarrow 13\le P\le 33$

Vậy $MaxP=33$; $MinP=13$

$w=33+13i\Rightarrow|w|=\sqrt{1258}$

Câu 41: Đáp án A.

Theo BĐT Bunhiacopxki:

❖ $P=|z+1|+2|z-1|\le\sqrt{(1^2+2^2)\left(|z+1|^2+|z-1|^2\right)}=\sqrt{10\left(|z|^2+1\right)}=2\sqrt{5}$

Câu 42: Đáp án D.

➢ **Cách 1:**

$|z-2-4i|=|z-2i|\Leftrightarrow x+y=4$

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}\ge\sqrt{\frac{(x+y)^2}{2}}=\sqrt{\frac{4^2}{2}}=2\sqrt{2}$

$min|z|=2\sqrt{2}$, Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}x+y=4\\x=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}\Rightarrow w=2\sqrt{2}-4i\Rightarrow|w|=2\sqrt{6}$

✓ **Chú ý:** Với mọi x, y là số thực ta có: $x^2+y^2\ge\frac{(x+y)^2}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y$

$|z-2-4i|=|z-2i|\Leftrightarrow y=4-x$

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(4-x)^2}=\sqrt{2(x-2)^2+8}\ge2\sqrt{2}$

$min|z|=2\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}x+y=4\\x=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}\Rightarrow w=2\sqrt{2}-4i\Rightarrow|w|=2\sqrt{6}$

Câu 43: Đáp án D.

➢ **Cách 1:**

$|z+i+1|=|\bar{z}-2i|\Leftrightarrow x-y=1$

$x^2+y^2\ge\frac{(x-y)^2}{2}=\frac{1}{2}$

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}\ge\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

✓ **Chú ý:** Với mọi x, y là số thực ta có: $x^2+y^2\ge\frac{(x-y)^2}{2}$

➢ **Cách 2:**

$|z+i+1|=|\bar{z}-2i|\Leftrightarrow y=x-1$

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(x-1)^2}=\sqrt{2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\ge\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy $min|z|=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Câu 44: Đáp án D.

➢ **Cách 1:**

- Ta có $|z|^2=1\Leftrightarrow z.\bar{z}=1$
- Đặt $t=|z+\bar{z}|\in[0;2]\Rightarrow t^2=(z+\bar{z})(\bar{z}+z)=z^2+2z.\bar{z}+\bar{z}^2=2+z^2+\bar{z}^2$
- $|z^3+3z+\bar{z}|=|z||z^2+3+\bar{z}^2|=|t^2+1|=t^2+1$
- $P=t^2-t+1\ge\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}$
- Vậy $minP=\frac{3}{4}$; $maxP=3$ khi $t=2$

- Mặc khác: $z_1z_2z_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Leftrightarrow |z_1z_2z_3| = 1 \Leftrightarrow |z_1||z_2||z_3| = 1$
- Suy ra $P \geq 3$. Dấu "=" xảy ra khi $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$

Câu 49: Đáp án A.

$$\left|\frac{z-3}{z-1+2i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-3| = |z-1+2i| \Leftrightarrow x+y=1$$

$P = 16x^2y^2 - 8xy$, Đặt $t = xy \Rightarrow 0 \leq t \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$P = 16t^2 - 8t, t \in \left[0; \frac{1}{4}\right] \Rightarrow MaxP = 0; MinP = -1$.

Câu 50: Đáp án D.

❖ Ta có: $|z| = 1 \Rightarrow |-z| = 1$

❖ $P = |1+z| + |1+z^2| + |1+z^3| = |1+z| + |-z||1+z^2| + |1+z^3| \geq |1+z-z(1+z^2)+1+z^3| = 2$

Câu 51: Đáp án C.

$$\left|\frac{6z-i}{2+3iz}\right| \leq 1 \Leftrightarrow |6z-i| \leq |2+3iz| \Leftrightarrow |6z-i|^2 \leq |2+3iz|^2$$

$$(6z-i)(\overline{6z-i}) \leq (2+3iz)(\overline{2+3iz}) \Leftrightarrow (6z-i)(6\bar{z}+i) \leq (2+3iz)(2-3i\bar{z})$$

$$\Leftrightarrow z.\bar{z} \leq \frac{1}{9} \Leftrightarrow |z|^2 \leq \frac{1}{9} \Leftrightarrow |z| \leq \frac{1}{3}$$

Câu 52: Đáp án A.

- $|z-2-3i| = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ (1)
- Đặt $P = |\bar{z}+1+i| \Rightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = P^2$ (2) với $P > 0$
- Lấy (1)-(2) ta được: $y = \frac{P^2+10-6x}{4}$. Thay vào (1):
- $(x-2)^2 + \left(\frac{P^2+10-6x}{4} - 3\right)^2 = 1 \Leftrightarrow 52x^2 - (40+12P^2)x + (P^4 - 4P^2 + 52) = 0$ (*)
- Để PT (*) có nghiệm thì: $\Delta = (40+12P^2)^2 - 4.52.(P^4 - 4P^2 + 52) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{14-2\sqrt{13}} \leq P \leq \sqrt{14+2\sqrt{13}}$$

- Vậy $M = \sqrt{14+2\sqrt{13}}, m = \sqrt{14-2\sqrt{13}} \Rightarrow M^2 + m^2 = 28$

Câu 53: Đáp án B.

- $\left(z+\frac{1}{z}\right)^3 = z^3 + \frac{1}{z^3} + 3\left(z+\frac{1}{z}\right) \Leftrightarrow z^3 + \frac{1}{z^3} = \left(z+\frac{1}{z}\right)^3 - 3\left(z+\frac{1}{z}\right)$

- $M+n=\dfrac{15}{4}$

➢ **Cách khác.**

Theo giả thiết, ta có $z=\cos x+i\sin x$ và khi đó

$$P=\left|(\cos 3x+i\sin 3x)+3(\cos x+i\sin x)+(\cos x-i\sin x)\right|-2|\cos x|$$

$$=\left|(\cos 3x+4\cos x)+i(\sin 3x+2\sin x)\right|-2|\cos x|$$

$$=\sqrt{(\cos 3x+4\cos x)^2+(\sin 3x+2\sin x)^2}-2|\cos x|$$

$$=\sqrt{(4\cos^3 x+\cos x)^2+\sin^2 x(4\cos^2 x+1)^2}-2|\cos x|=4\cos^2 x+1-2|\cos x|$$

$$=4|\cos x|^2-2|\cos x|+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\left(2|\cos x|-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}\Rightarrow m=\frac{3}{4}$$

Mặt khác, $P=\left(2|\cos x|-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\le\left(2-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}=3\Rightarrow M=3\Rightarrow M+n=\dfrac{15}{4}$

Câu 45: Đáp án C.

➢ **Dạng tổng quát:** Cho số phức z thỏa mãn $|z_1z-z_2|=r$. Tính Min, Max của $|z-z_3|$.

Ta có $Max=\left|\dfrac{z_2}{z_1}-z_3\right|+\dfrac{r}{|z_1|};Min=\left|\dfrac{r}{|z_1|}-\left|\dfrac{z_2}{z_1}-z_3\right|\right|$

➢ Áp dụng công thức trên với $z_1=\dfrac{3-3\sqrt{2}i}{1+2\sqrt{2}i};z_2=1+\sqrt{2}i,z_3=3+3i;r=\sqrt{3}$ ta được $Max=6;Min=4$

Câu 46: Đáp án B.

- **Dạng tổng quát:** $|z_1z+z_2|+|z_1z-z_2|=k$ với $z_1=a+bi;z_2=c+di;z=x+yi$
- Ta có: $Min|z|=\dfrac{\sqrt{k^2-4|z_2|^2}}{2|z_1|}$ và $Max|z|=\dfrac{k}{2|z_1|}$
- ADCT trên ta có: $z_1=1;z_2=1;k=4\Rightarrow\begin{cases}m=\dfrac{\sqrt{4^2-4}}{2}=\sqrt{3}\\ M=\dfrac{4}{2}=2\end{cases}$

Câu 47: Đáp án B.

❖ Ta có: $z_1=i;z_2=\dfrac{2}{1-i};k=4\Rightarrow\begin{cases}m=\sqrt{2}\\ M=2\end{cases}$

Câu 48: Đáp án C.

- Áp dụng BĐT Cô-si, ta có: $P\ge 3\sqrt[3]{|z_1|^2.|z_2|^2.|z_3|^2}$

- $\Leftrightarrow\left|z^3+\frac{1}{z^3}\right|=\left|\left(z+\frac{1}{z}\right)^3-3\left(z+\frac{1}{z}\right)\right|\Leftrightarrow\left|\left(z+\frac{1}{z}\right)^3-3\left(z+\frac{1}{z}\right)\right|\le 2$
- Mặt khác: $\left|\left(z+\frac{1}{z}\right)^3-3\left(z+\frac{1}{z}\right)\right|\ge\left|z+\frac{1}{z}\right|^3-3\left|z+\frac{1}{z}\right|$
- Suy ra: $\left|z+\frac{1}{z}\right|^3-3\left|z+\frac{1}{z}\right|\le 2$, đặt $t=\left|z+\frac{1}{z}\right|\ge 0$, ta được:
- $t^3-3t-2\le 0\Leftrightarrow(t-2)(t+1)^2\le 0\Rightarrow t\le 2\Rightarrow\left|z+\frac{1}{z}\right|\le 2\Rightarrow M=2$

Câu 54: Đáp án B.

❖ $|z_1-z_2|^2+|z_2-z_3|^2+|z_3-z_1|^2=(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})+(z_2-z_3)(\overline{z_2}-\overline{z_3})+(z_3-z_1)(\overline{z_3}-\overline{z_1})$

$=9-(z_1+z_2+z_3)(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3})=9-|z_1+z_2+z_3|^2$

- Theo BĐT Cauchy- Schwarz:
- $P\ge\frac{9}{|z_1-z_2||z_1-z_3|+|z_2-z_1||z_2-z_3|+|z_2-z_1||z_2-z_3|}\ge\frac{9}{|z_1-z_2|^2+|z_2-z_3|^2+|z_3-z_1|^2}=\frac{9}{9-|z_1+z_2+z_3|^2}$
- Do đó: $P\ge\frac{9}{9}=1$ (do $|z_1+z_2+z_3|^2\ge 0$)

Câu 55: Đáp án A.

Chuẩn hóa $|z|\le 1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}z=1\\z=0\end{array}\right.$

- $z=1\Rightarrow P=\left|\frac{2-i}{2+i}\right|=1$ do đó loại B, C.
- $z=0\Rightarrow P=\left|\frac{-i}{2}\right|=\frac{1}{2}$ do đó loại D, chọn đáp án A.

Câu 56: Đáp án C.

- $|z+1+i|=|2z+\overline{z}-5-3i|\Leftrightarrow y=(x-2)^2$
- $P=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=\sqrt{y+(y-2)^2}=\sqrt{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}\ge\sqrt{\frac{7}{4}}$
- Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases}y=\frac{3}{2}\\y=(x-2)^2\end{cases}\Leftrightarrow z=\frac{4+\sqrt{6}}{2}+\frac{3}{2}i$

Câu 57: Đáp án C.

- $|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+|z_1+z_2+z_3|^2=\frac{3}{2}$

- Theo BĐT Bunhiacôpxki, ta có:

$$P=|z_1+z_2|+2|z_2+z_3|+2|z_3+z_1|\le\sqrt{\left(1+2^2+2^2\right)\left(|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2\right)}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$$

Câu 58: Đáp án A.

- $|z-1|=\sqrt{2}\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2=2$
- $P=\sqrt{x^2+(y+1)^2}+\sqrt{(2-x)^2+(1-y)^2}\overset{vecto}{\ge}\sqrt{(x+2-x)^2+(y+1+1-y)^2}=2\sqrt{2}$
- $P=\sqrt{x^2+(y+1)^2}+\sqrt{(2-x)^2+(1-y)^2}\overset{bunhiacopxki}{\le}\sqrt{2.2\left[(x-1)^2+y^2+2\right]}=4$
- $|w|=\left|4+2\sqrt{2}i\right|=2\sqrt{6}$

Câu 59: Đáp án A.

- Ta có: $|z_1+z_2|=1;\sqrt{3}=|z_1-z_2|\le|z_1|+|z_2|$
- $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)\Rightarrow 2=|z_1|^2+|z_2|^2\ge\frac{\left(|z_1|+|z_2|\right)^2}{2}\Rightarrow\sqrt{3}\le|z_1|+|z_2|\le 2$
- $P=4\left(|z_1|^3+|z_2|^3\right)-3\left(|z_1|+|z_2|\right)+5\ge\left(|z_1|+|z_2|\right)^3-3\left(|z_1|+|z_2|\right)+5$
- Xét hàm số: $f(t)=t^3-3t+5,t\in\left[\sqrt{3};2\right];f'(t)=3t^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-1\end{array}\right.$
- Do đó $minf(t)=3\Rightarrow minP=3$
- Dấu "=" xảy ra khi $|z_1|+|z_2|=1$

BÀI TOÁN SỬ DỤNG KỸ THUẬT CHUẨN HÓA PHƯƠNG PHÁP CHUẨN HÓA TRONG SỐ PHỨC

Câu 1: Cho số phức $z=a+bi\ne 0$ sao cho z không phải là số thực và $w=\frac{z}{1+z^3}$ là số thực. Tính $\frac{|z|^2}{1+|z|^2}$.

A. $\frac{1}{2a+1}$ B. $\frac{2}{a+2}$ C. $\frac{1}{3a+2}$ D. $\frac{1}{2a+2}$

Câu 2: Cho hai số phức z,w khác 0 và thỏa mãn $|z-w|=2|z|=|w|$. Gọi a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $u=\frac{z}{w}$. Tính $a^2+b^2=?$

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{7}{2}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{4}$

Câu 3: Cho hai số phức z, w khác 0 và thỏa mãn $|z-w| = 5|z| = |w|$. Gọi a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $u = z.w$. Tính $a^2 + b^2 = ?$

A. $\frac{1}{50}$ B. $\frac{1}{25}$ C. $\frac{1}{100}$ D. $\frac{1}{10}$

Câu 4: Cho z_1, z_2, z_3 là các số phức thoả mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$ B. $|z_1 + z_2 + z_3| > |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$

C. $|z_1 + z_2 + z_3| < |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$ D. $|z_1 + z_2 + z_3| \neq |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$

Câu 5: Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

A. 0 B. –1 C. 1 D. 2

Câu 6: Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1999$ và $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$. Tính $P = \left|\frac{z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1}{z_1 + z_2 + z_3}\right|$.

A. $P = 1999$ B. $P = 1999^2$ C. $P = 999,5$ D. $P = 5997$

Câu 7: Cho các số phức a, b, c, z thỏa $az^2 + bz + c = 0$ $(a \neq 0)$. Gọi z_1 và z_2 lần lượt là hai nghiệm của phương trình bậc hai đã cho. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 - 2\left[|z_1| - |z_1|\right]^2$$

A. $P = 2\left|\frac{c}{a}\right|$ B. $P = \left|\frac{c}{a}\right|$ C. $P = 4\left|\frac{c}{a}\right|$ D. $P = \frac{1}{2}.\left|\frac{c}{a}\right|$

Câu 8: Nếu z không phải là số thực đồng thời $\frac{1}{|z| - z}$ có phần thực bằng 4 thì môđun của z là?

A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{12}$ D. $\frac{1}{16}$

Câu 9: Nếu hai số thức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1$ và $z_1.z_2 \neq -1$ thì số phức $w = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1z_2}$ có phần ảo bằng?

A. 0 B. –1 C. 1 D. Lớn hơn 1

Câu 10: Cho số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện $|z^2 + 4| = 2|z|$. Đặt $P = 8(b^2 - a^2) - 12$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P = (|z| - 2)^2$ B. $P = (|z| - 4)^2$ C. $P = (|z|^2 - 2)^2$ D. $P = (|z|^2 - 4)^2$

Câu 26: Cho số phức w và hai số thực a, b. Biết rằng $w+i$ và $2w-1$ là hai nghiệm của phương trình $z^2+az+b=0$. Tính $2a+9b=?$

B. 5 B. 3 C. 9 D. 11

Câu 27: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1+z_2=8+6i$ và $|z_1-z_2|=2$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z_1|+|z_2|$.

A. $P_{max}=5+3\sqrt{5}$ B. $P_{max}=2\sqrt{26}$ C. $P_{max}=4\sqrt{6}$ D. $P_{max}=34+3\sqrt{2}$

Câu 28: Cho 3 số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $z_1+z_2+z_3=0$ và $|z_1|=|z_2|=|z_3|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2=\frac{8}{3}$

C. $|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2=2\sqrt{2}$ D. $|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2=1$

Câu 29: Cho 2 số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=1, |z_1+z_2|=\sqrt{3}$. Tính $|z_1-z_2|$.

A.1 B.2 C.3 D.4

Câu 30: Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $|z_1|=3, |z_2|=4, |z_1-z_2|=\sqrt{37}$. Xét số phức $z=\frac{z_1}{z_2}=a+b$. Tìm $|b|$

A. $|b|=\frac{3\sqrt{3}}{8}$ **B.** $|b|=\frac{\sqrt{39}}{8}$ **C.** $|b|=\frac{3}{8}$ **D.** $|b|=\frac{\sqrt{3}}{8}$

Câu 31: Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $|z_1|=3, |z_2|=4, |z_1-z_2|=\sqrt{37}$. Xét số phức $z=\frac{z_1}{z_2}=a+bi$. Tìm $|a|$

A. $|a|=\frac{3\sqrt{3}}{8}$ **B.** $|a|=\frac{\sqrt{39}}{8}$ **C.** $|a|=\frac{3}{8}$ **D.** $|a|=\frac{\sqrt{3}}{8}$

Câu 32: Cho z_1, z_2 là các số phức thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=1$ và $|z_1-z_2|=\sqrt{3}$. Tính $P=\left|\frac{1}{3}z_1+\frac{1}{3}z_2\right|$

A. $P=\frac{1}{3}$ **B.** $P=0$ **C.** $P=\frac{1}{9}$ **D.** $P=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 33: Cho số phức z thoả mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$. Tính môđun của số phức $w=M+mi$

A. $|w|=2\sqrt{314}$ **B.** $|w|=2\sqrt{309}$ **C.** $|w|=\sqrt{1258}$ **D.** $|w|=3\sqrt{137}$

Câu 34: Cho số phức w, biết rằng $z_1 = w - 2i$ và $z_2 = 2w - 4$ là hai nghiệm của phương trình $z^2 + az + b = 0$ với a, b là các số thực. Tính $T = |z_1| + |z_2|$.

A. $T = \frac{8\sqrt{10}}{3}$ **B.** $T = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ **C.** $T = 5$ **D.** $T = \frac{2\sqrt{37}}{3}$

THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN – NINH THUẬN

Câu 35: Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $|z_1^2 + z_2^2 + z_3^2| = |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$ **B.** $|z_1^2 + z_2^2 + z_3^2| > |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$

C. $|z_1^2 + z_2^2 + z_3^2| < |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$ **D.** $3 = |z_1^2 + z_2^2 + z_3^2| . |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$

Câu 36: Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ và $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $|z_1^2 + z_2^2 + z_3^2| = |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$. **B.** $|z_1^2 + z_2^2 + z_3^2| < |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$.

C. $|z_1^2 + z_2^2 + z_3^2| > |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$. **D.** $|z_1^2 + z_2^2 + z_3^2| \neq |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$.

Câu 37: Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Tính $A = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

A. $A = 1 + i$ **B.** $A = 0$ **C.** $A = -1$ **D.** $A = 1$

Câu 38: Cho 3 điểm *A, B, C* lần lượt biểu diễn cho các số phức z_1, z_2, z_3. Biết $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ và $z_1 + z_2 = 0$. Khi đó tam giác *ABC* là tam giác gì?

A. Tam giác *ABC* vuông tại C. **B.** Tam giác *ABC* đều.

C. Tam giác *ABC* vuông cân tại C. **D.** Tam giác *ABC* cân tại C.

Câu 39: Tính tích môđun của tất cả các số phức z thỏa mãn $|2z - 1| = |\bar{z} + 1 + i|$, đồng thời điểm biểu diễn của z trên mặt phẳng tọa độ thuộc đường tròn có tâm $I(1;1)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.

A. 1. **B.** $3\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 3.

Câu 40: Xét ba điểm A, B, C theo thứ tự trong mặt phẳng phức biểu diễn ba số phức phân biệt z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3|$. Biết $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, khi đó tam giác *ABC* có tính chất gì?

A. Tù **B.** Vuông **C.** Cân **D.** Đều

Câu 41: Cho hai số thực *b* và $c\,(c > 0)$. Kí hiệu A, B là hai điểm của mặt phẳng phức biểu diễn hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2bz + c = 0$. Tìm điều kiện của *b* và *c* để tam giác *OAB* là tam giác vuông (O là gốc tọa độ)

A. $b^2 = 2c$ **B.** $c = 2b^2$ **C.** $b = c$ **D.** $b^2 = c$

Câu 42: Cho hai số thực b và c $(c>0)$. Kí hiệu A, B là hai điểm của mặt phẳng biểu diễn hai nghiệm phức của phương trình $z^2+2bz+2c=0$. Tìm điều kiện của b và c để tam giác OAB là tam giác vuông (O là gốc tọa độ)

A. $b^2=2c$ B. $c=2b^2$ C. $b=c$ D. $b^2=c$

Câu 43: Cho H là hình biểu diễn tập hợp các số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $|2\bar{z}-3z|\le 5$ và số phức z có phần ảo không âm. Tính diện tích hình H.

A. $\frac{5}{2}\pi$ B. 3π C. $\frac{3}{2}\pi$ D. 5π

LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

Câu 1: Đáp án A.

Chuẩn hóa: Vì w là số thực nên tachọn $w=1\Rightarrow \frac{z}{1+z^3}=1\Rightarrow z\approx 0,6624+0,5623i$

Suy ra $\frac{|z|^2}{1+|z|^2}-\frac{1}{2a+1}=\frac{|0,6624+0,5623i|^2}{1+|0,6624+0,5623i|^2}-\frac{1}{2.0,6624+1}\approx 0$

Câu 2: Đáp án D.

Chuẩn hóa: $w=1$. Theo đề, ta có:

$$\begin{cases}|z-1|=2|z|\\|z-1|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2+y^2=4(x^2+y^2)\\(x-1)^2+y^2=1\end{cases}\Rightarrow 1=4(x^2+y^2)\Rightarrow y^2=\frac{1}{4}-x^2$$

Thay vào phương trình 2 ta được: $(x-1)^2+\frac{1}{4}-x^2=1$. Dùng chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE ta dò được $x=\frac{1}{8}\Rightarrow y=\frac{\sqrt{15}}{8}\Rightarrow z=\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{15}}{8}i\Rightarrow u=\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{15}}{8}i$

Câu 3: Đáp án B.

Chuẩn hóa: $w=1$. Theo đề, ta có: $\begin{cases}|z-1|=5|z|\\|z-1|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2+y^2=25(x^2+y^2)\\(x-1)^2+y^2=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow z=\frac{1}{50}\pm\frac{3\sqrt{11}}{50}i\Rightarrow u=\frac{1}{50}\pm\frac{3\sqrt{11}}{50}i\Rightarrow a^2+b^2=\frac{1}{25}$

Câu 4: Đáp án A.

Chuẩn hóa: $z_1=i, z_2=-i, z_3=1$

Câu 5: Đáp án A.

Chuẩn hóa: $z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, z_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, z_3=-1$ Suy ra $P=0$

Câu 6: Đáp án A.

Chuẩn hóa: $z_1 = 1999; z_2 = -1999; z_3 = 1 + i\sqrt{1999^2 - 1}$ suy ra $P = 1999$

Câu 7: Đáp án C.

Chuẩn hóa: $a = b = c = 1 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases} \Rightarrow P = 4$. Đáp án C thỏa mãn $P = 4$

Câu 8: Đáp án A.

➤ **Thử đáp án:**

➤ **Đáp án A:**

Với $|z| = \dfrac{1}{8}$, chọn $x = \dfrac{1}{9} \Rightarrow y = \pm\dfrac{\sqrt{17}}{72}$, do đó $z = \dfrac{1}{9} \pm \dfrac{\sqrt{17}}{72}i$

Thay z vào ta được $\dfrac{1}{|z| - z} = 4 + 4\sqrt{17}i$ (thỏa yêu cầu đề bài có phần thực bằng 4)

Câu 9: Đáp án A.

Chuẩn hóa: $z_1 = i$; $z_2 = 1$ do đó $w = \dfrac{i+1}{1+i.1} = 1 \Rightarrow$ phần ảo của w bằng 0

Câu 10: Đáp án C.

Ta có: $|z^2 + 4| = 2|z| \Leftrightarrow \left(a^2 - b^2 + 4\right)^2 + 4a^2b^2 = 4\left(a^2 + b^2\right)$

Chọn $b = 0 \Rightarrow \left(a^2 + 4\right)^2 = 4a^2 \Rightarrow a = 1 + i\sqrt{3}$ suy ra $z = 1 + i\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \sqrt{3} \end{cases}$. Thay a, b vào P ta được $P = 4$

Thay $z = 1 + i\sqrt{3}$ vào đáp án C ta được kết quả là 4.

Câu 11: Đáp án D.

Chuẩn hóa: $z_1 = 1 \Rightarrow 2 + \dfrac{1}{z_2} = \dfrac{1}{z_2 + 1} \Rightarrow z_2 = -0,5 + 0,5i$

$$P = \left|\frac{1}{-0,5+0,5i}\right| + \left|\frac{-0,5+0,5i}{1}\right| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Câu 12: Đáp án C.

Chuẩn hóa: Vì w là số thực nên tachọn $w = 1 \Rightarrow \dfrac{z}{1+z^2} = 1 \Rightarrow z = 0,5 + 0,5\sqrt{3}i$

Suy ra $\dfrac{|z|}{1+|z|^2} = \dfrac{|0,5+0,5\sqrt{3}i|}{1+|0,5+0,5\sqrt{3}i|^2} = \dfrac{1}{2}$

Câu 13: Đáp án A.

Chuẩn hóa: $\begin{cases} z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases} \Rightarrow P = -1$

Câu 14: Đáp án C.

Chuẩn hóa cho $z_1 = 2017$, $z_2 = 2017i$. Ta được đáp án C

Câu 15: Đáp án B.

Chuẩn hóa $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_3 = -1$ Suy ra $P = 0$

Câu 16: Đáp án B.

Chuẩn hóa $z_1 = i, z_2 = -i, z_3 = 1$. Suy ra $P = 1$

Câu 17: Đáp án D.

❖ Chuẩn hóa: $w = 1$. Theo đề ta có:

$$\begin{cases} |z-1| = 2|z| \\ |z-1| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 4(x^2+y^2) \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow z = \frac{1}{8} \pm \frac{\sqrt{15}}{8}i \Rightarrow u = \frac{1}{8} \pm \frac{\sqrt{15}}{8}i \Rightarrow a^2 + 4b^2 = \frac{61}{64}$$

Câu 18: Đáp án D.

Lấy ví dụ $z_1 = 1, z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 19: Đáp án D.

Lấy ví dụ $z_1 = 1, z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 20: Đáp án B.

Chứng minh công thức:

✓ $|z_1+z_2|^2 + |z_2+z_3|^2 + |z_3+z_1|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1+z_2+z_3|^2$

❖ Ta có: $|z|^2 = z.\overline{z}$ và $\overline{z_1 + z_2 + \ldots + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \ldots + \overline{z_n}$. Áp dụng tính chất này ta có vế trái:

$$= (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) + (z_2+z_3)(\overline{z_2}+\overline{z_3}) + (z_3+z_1)(\overline{z_3}+\overline{z_1})$$

$$= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_3\overline{z_3} + z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_3\overline{z_3} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_2} + z_3\overline{z_1} + z_1\overline{z_3}$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + z_1(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}) + z_2(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}) + z_3(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3})$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + (z_1+z_2+z_3)(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3})$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1+z_2+z_3|^2$$

Câu 21: Đáp án B.

Chứng minh côngthức:

✓ $\left|z_1+z_2\right|^2+\left|z_2+z_3\right|^2+\left|z_3+z_1\right|^2=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2+\left|z_3\right|^2+\left|z_1+z_2+z_3\right|^2$

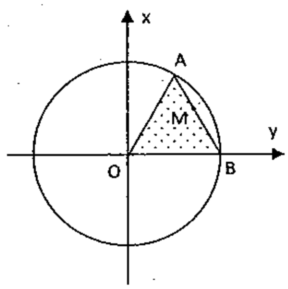
❖ Ta có: $|z|^2=z.\overline{z}$ và $\overline{z_1+z_2+...+z_n}=\overline{z_1}+\overline{z_2}+...+\overline{z_n}$. Áp dụng tính chất này ta có vế trái:

$$=\left(z_1+z_2\right)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)+\left(z_2+z_3\right)\left(\overline{z_2}+\overline{z_3}\right)+\left(z_3+z_1\right)\left(\overline{z_3}+\overline{z_1}\right)$$
$$=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+z_3\overline{z_3}+z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+z_3\overline{z_3}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_3}+z_3\overline{z_2}+z_3\overline{z_1}+z_1\overline{z_3}$$
$$=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2+\left|z_3\right|^2+z_1\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}\right)+z_2\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}\right)+z_3\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}\right)$$
$$=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2+\left|z_3\right|^2+\left(z_1+z_2+z_3\right)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}\right)$$
$$=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2+\left|z_3\right|^2+\left|z_1+z_2+z_3\right|^2=3$$

Câu 22: Đáp án B.

$$\left(1-\sqrt{5}i\right)|z|=\frac{2\sqrt{42}}{z}+\sqrt{3}i+\sqrt{15}\Leftrightarrow\left(1-\sqrt{5}i\right)|z|-\sqrt{3}i\left(1-\sqrt{5}i\right)=\frac{2\sqrt{42}}{z}$$
$$\Leftrightarrow\left(1-\sqrt{5}i\right)\left(|z|-\sqrt{3}i\right)=\frac{2\sqrt{42}}{z}\Leftrightarrow\left|1-\sqrt{5}i\right|\left||z|-\sqrt{3}i\right|=\frac{2\sqrt{42}}{|z|}$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{6}.\sqrt{|z|^2+3}=\frac{2\sqrt{42}}{|z|}\Leftrightarrow 6\left(|z|^2+3\right).|z|^2-4.42=0\Leftrightarrow|z|=2$$

Câu 23: Đáp án B.



❖ Đặt $z=x+yi$, $|2z-i|=|2+iz|\Rightarrow x^2+y^2=1$

❖ Gọi A, B là hai điểm biểu diễn z_1,z_2.

❖ Ta có $\left|z_1-z_2\right|=\left|\overline{OA}-\overline{OB}\right|=\left|\overline{AB}\right|=1$

❖ Suy ra $AB=OA=OB$ hay tam giác OAB đều.

❖ $P=\left|z_1+z_2\right|=\left|\overline{OA}+\overline{OB}\right|=\left|2\overline{OM}\right|=\left|2.\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{3}$

Câu 24. Đáp án B.

Đặt $z=x+yi$ ta có $|2z-i|=|2+iz|\Rightarrow x^2+y^2=1\Rightarrow\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=1$

Ta có $\left|2z_1+3z_2\right|^2+\left|2z_1-3z_2\right|^2=2\left(4\left|z_1\right|^2+9\left|z_2\right|^2\right)\Rightarrow\left|2z_1+3z_2\right|=5.$

Câu 25: Đáp án C.

❖ Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases}3w+i-1=-a\\(w+i)(2w-1)=b\end{cases}\Rightarrow\left(\dfrac{1-i-a}{3}+i\right)\left(\dfrac{2-2i-2a}{3}-1\right)=b$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2a^2}{9}-\frac{a}{9}+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{2}{9}a+\frac{4}{9}\right)i=b\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2a^2}{9}-\dfrac{a}{9}+\dfrac{1}{3}=b\\\dfrac{2}{9}a+\dfrac{4}{9}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=\dfrac{13}{9}\end{cases}\Rightarrow a+b=-\frac{5}{9}$$

Câu 26: Đáp án C.

❖ Theo định lý Viet, ta có: $\begin{cases}3w+i-1=-a\\(w+i)(2w-1)=b\end{cases}\Rightarrow\left(\dfrac{1-i-a}{3}+i\right)\left(\dfrac{2-2i-2a}{3}-1\right)=b$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2a^2}{9}-\frac{a}{9}+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{2}{9}a+\frac{4}{9}\right)i=b\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2a^2}{9}-\dfrac{a}{9}+\dfrac{1}{3}=b\\\dfrac{2}{9}a+\dfrac{4}{9}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=\dfrac{13}{9}\end{cases}\Rightarrow 2a+9b=9$$

Câu 27: Đáp án B.

❖ Ta có: $z_1+z_2=8+6i\Rightarrow|z_1+z_2|=10$

❖ $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)\Rightarrow 52=|z_1|^2+|z_2|^2\ge\dfrac{\left(|z_1|+|z_2|\right)^2}{2}$

$\Rightarrow|z_1|+|z_2|\le\sqrt{2.52}=2\sqrt{26}$

Câu 28: Đáp án B.

$$|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+|z_1+z_2+z_3|^2=\frac{8}{3}$$

Câu 29: Đáp ánA.

Gọi M, N, K lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $z_1,z_2,(z_1+z_2)$ trong mặt phẳng phức.

$\Rightarrow\Delta OMK$ cân tại M và $\widehat{KMO}=120^0\Rightarrow\Delta OMN$ là tam giác đều $\Rightarrow|z_1-z_2|=MN=1$

Câu 30: Đáp án A.

Đặt $z_1=x+yi,z_2=c+di\left(x,y,c,d\in\mathbb{R}\right)$. Ta có: $|z_1|=3\Rightarrow x^2+y^2=9$

$|z_2|=4\Rightarrow c^2+d^2=16$

$|z_1-z_2|=\sqrt{37}\Rightarrow(x-c)^2+(y-d)^2=37\Leftrightarrow x^2+y^2+c^2+d^2-2xc-2yd=37\Leftrightarrow xc+yd=-6$

Lại có: $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x+yi}{c+di}=\dfrac{(x+yi)(c-di)}{c^2+d^2}=\dfrac{xc+yd+(yc-xd)i}{c^2+d^2}=\dfrac{xd+yd}{c^2+d^2}+\dfrac{yc-xd}{c^2+d^2}i=a+bi$

$=-\dfrac{3}{8}+bi$

Mà $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{3}{4} = \sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow a^2+b^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow b^2 = \frac{9}{16} - \left(-\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{27}{64} \Rightarrow b = \pm\frac{3\sqrt{3}}{8}$

Vậy: $|b| = \frac{3\sqrt{3}}{8}$

Câu 31: Đáp án C.

Đặt $z_1 = x+yi, z_2 = c+di\left(x,y,c,d \in \mathbb{R}\right)$. Ta có: $|z_1| = 3 \Rightarrow x^2+y^2 = 9$

$|z_2| = 4 \Rightarrow c^2+d^2 = 16$

$|z_1 - z_2| = \sqrt{37} \Rightarrow (x-c)^2 + (y-d)^2 = 37 \Leftrightarrow x^2+y^2+c^2+d^2-2xc-2yd = 37 \Leftrightarrow xc+yd = -6$

Lại có: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x+yi}{c+di} = \frac{(x+yi)(c-di)}{c^2+d^2} = \frac{xc+yd+(yc-xd)i}{c^2+d^2} = \frac{xd+yd}{c^2+d^2} + \frac{yc-xd}{c^2+d^2}i = a+bi$

$= -\frac{3}{8} + bi$

Mà $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{3}{4} = \sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow a^2+b^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow b^2 = \frac{9}{16} - \left(-\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{27}{64} \Rightarrow b = \pm\frac{3\sqrt{3}}{8}$

Vậy: $|b| = \frac{3\sqrt{3}}{8}$

Câu 32: Đáp án A.

Sử dụng công thức quen thuộc $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$ (*)

Áp dụng (*) với $\begin{cases} |z_1| = |z_2| = 1 \\ |z_1 - z_2| = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow |z_1+z_2|^2 = 2\left(1^2+1^2\right) - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow |z_1+z_2 = 1|$

Mặt khác $P = \left|\frac{1}{3}z_1 + \frac{1}{3}z_2\right| = \left|\frac{1}{3}(z_1+z_2)\right| = \left|\frac{1}{3}\right|.|z_1+z_2| = \frac{|z_1+z_2|}{3} = \frac{1}{3}$

Câu 33: Đáp án C.

Đặt $z = x+yi$. Ta có $P = (x+2)^2 + y^2 - \left[x^2 + (y-1)^2\right] = 4x+2y+3$

Mặt khác: $|z-3-4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5 \quad x = 3+\sqrt{5}\sin t; y = 4+\sqrt{5}\cos t$

Suy ra: $P = 4\sqrt{5}\sin t + 2\sqrt{5}\cos t + 23$

$-10 \le 4\sqrt{5}\sin t + 2\sqrt{5}\cos t \le 10$. Do đó $13 \le P \le 33 \Rightarrow |w| = \sqrt{1258}$

Câu 34: Đáp án A.

Đặt $w = x+yi$. Theo định lí Viet ta có: $z_1+z_2 = -a = 3w-2i-4 = (3x-4)+(3y-2)i$

là số thực nên $y = \frac{2}{3}$. Lại có $z_1z_2 = b = \left(x+\frac{2}{3}i-2i\right)\left(2x+\frac{4}{3}i-4\right)$ là số thực.

Suy ra $\left(x-\frac{4}{3}i\right)\left(2x-4+\frac{4}{3}i\right) = x(2x-4) - \frac{4}{3}i(x-4) + \frac{16}{9}$ là số thực suy ra $x = 4$

Do đó $z_1 = 4+\frac{2}{3}i-2i = 4-\frac{4}{3}i; z_2 = 4+\frac{4}{3}i \Rightarrow T = \frac{8\sqrt{10}}{3}$

THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN – NINH THUẬN

Câu 35: Đáp án A.

Ta có

$(z_1+z_2+z_3)^2 = z_1^2+z_2^2+z_3^2+2(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1) \Rightarrow z_1^2+z_2^2+z_3^2 = -2(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)$

Mặt khác $|z_1|=1 \Rightarrow |z_1|^2=1 \Leftrightarrow z_1.\overline{z_1}=1$, tương tự $z_2.\overline{z_2}=1, z_3.\overline{z_3}=1$ nên

$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}$

Khi đó

$$z_1+z_2+z_3{}^2 = -2z_1z_2z_3\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right) = -2z_1z_2z_3(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}) = -2z_1z_2z_3(\overline{z_1+z_2+z_3}) = 0$$

Vậy $|z_1^2+z_2^2+z_3^2| = |z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|$.

Câu 36: Đáp án A.

Do $z_1+z_2+z_3=0$ và $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ nên các điểm biểu diễn của z_1, z_2, z_3 trên mặt phẳng tọa độ Oxy là A, B, C đều thuộc đường tròn đơn vị và ABC tạo thành tam giác đều.

Do các phép toán cộng và nhân số phức phụ thuộc vào vị trí tương đối của các điểm biểu diễn nên ta có thể cho: $z_1=1$, $z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Thay vào ta được $|z_1^2+z_2^2+z_3^2|=0$ và $|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|=0$.

Câu 37: Đáp án B.

Do $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ nên $\overline{z_1}=\frac{1}{z_1}; \overline{z_2}=\frac{1}{z_2}; \overline{z_3}=\frac{1}{z_3}$. Từ đó:

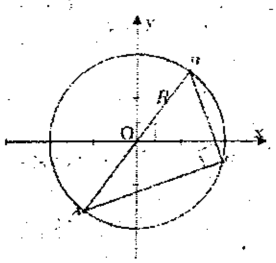
$$0=\overline{0}=\overline{z_1+z_2+z_3}=\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1z_2z_3}$$

Suy ra : $z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=0$. Do đó:

$$A=z_1^2+z_2^2+z_3^2=(z_1+z_2+z_3)^2-2(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)=0$$

Câu 38: Đáp án A.

Giả sử $|z_1|=|z_2|=|z_3|=R$. Khi đó A, B, C nằm trên đường tròn tâm $O(0;0)$ bán kính R. Do $z_1+z_2=0$ nên hai điểm A và B đối xứng nhau qua O. Như vậy điểm C nằm trên đường tròn đường kính AB hay tam giác ABC vuông tại C.



Câu 39: Đáp án C.

Đặt $z = x + yi\ (x, y \in \mathbb{R})$. Khi đó: $|2z-1| = |\bar{z}+1+i| \Leftrightarrow |2x-1+2yi| = |x+1+(1-y)i|$

$\Leftrightarrow (2x-1)^2 + 4y^2 = (x+1)^2 + (1-y)^2 \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 6x + 2y - 1 = 0\ (1)$

Mà điểm biểu diễn $M_z \in (C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 5\ \ (2)$

Từ (1), (2) suy ra: $\begin{cases} x = 0; y = -1 \\ x = 2; y = -1 \end{cases} \Rightarrow |z_1||z_2| = \sqrt{5}.$

Câu 40: Đáp án D.

Ta sẽ chỉ ra $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_1 - z_3|$,

Ta có $|z_1 + z_2|^2 + |z_2 - z_1|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) \Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 = 3|z_3|^2$

Làm tương tự ta có điều phải chứng minh, khi đó ΔABC là tam giác đều.

Câu 41: Đáp án B.

Phương trình $z^4 + 2bz + c = 0$ có hai nghiệm phức nên $\Delta' = b^2 - c < 0$

Với điều kiện $b^2 - c < 0$, phương trình có 2 nghiệm $z_1 = -b - \sqrt{\Delta'} = -b - i\sqrt{c - b^2}$ và $z_2 = -b + \sqrt{\Delta'} = -b + i\sqrt{c - b^2}$

ΔOAB có $O(0;0); A\left(-b; -\sqrt{c-b^2}\right); B\left(-b; \sqrt{c-b^2}\right)$

Suy ra $OA = OB = \sqrt{b^2 + c - b^2} = \sqrt{c}; AB = 2\sqrt{c - b^2}$

Do ΔOAB cân tại O nên giả sử ΔOAB thì vuông tại O, suy ra :

$AB = OA\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{c - b^2} = \sqrt{2c} \Leftrightarrow 4c - 4b^2 = 2c \Leftrightarrow 2c = 4b^2 \Leftrightarrow c = 2b^2$

Câu 42: Đáp án D.

Phương trình $z^4 + 2bz + 2c = 0$ có hai nghiệm phức nên $\Delta' = b^2 - 2c < 0$

Với điều kiện $b^2 - 2c < 0$, phương trình có 2 nghiệm $z_1 = -b - \sqrt{\Delta'} = -b - i\sqrt{2c - b^2}$ và $z_2 = -b + \sqrt{\Delta'} = -b + i\sqrt{2c - b^2}$

ΔOAB có $O(0;0); A\left(-b; -\sqrt{2c-b^2}\right); B\left(-b; \sqrt{2c-b^2}\right)$

Suy ra $OA = OB = \sqrt{b^2 + 2c - b^2} = \sqrt{2c}; AB = 2\sqrt{2c - b^2}$

Do ΔOAB cân tại O nên giả sử ΔOAB thì vuông tại O, suy ra:

$AB = OA\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2c - b^2} = \sqrt{4c} \Leftrightarrow 8c - 4b^2 = 4c \Leftrightarrow 4c = 4b^2 \Leftrightarrow c = b^2$

Câu 43: Đáp án A.

Gọi $z = x + yi(x, y \in \mathbb{R})$. Từ giả thiết suy ra $\frac{x^2}{25} + y^2 = 1, y \geq 0$. Khi đó H là một nửacủa hình elip có trục lớn bằng 10, trục bé bằng 2 và $S_H = 2\int_0^5 \sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}dx = \frac{5}{2}\pi$.

Phần 7:

CÁC BÀI TOÁN XÁC SUẤT LUYỆN TẬP NÂNG CAO

Câu 1: Đội tuyển học sinh giỏi "thầy Quang" gồm 18 em, trong đó có 7 học sinh khối 12, 6 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách cử 8 học sinh trong đội đi thi quốc gia sao cho mỗi khối có ít nhất một em được chọn?

A.48118 B.41181 C.41811 D.41818

Câu 2: Đội tuyển học sinh giỏi của một trường gồm 13 em, trong đó có 5 học sinh khối 12, 4 học sinh khối 11 và 4 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách cử 5 học sinh trong đội đi dự trại hè sao cho mỗi khối có ít nhất một em được chọn?

A.979 B.909 C.1049 D.1119

Câu 3: Lớp Toán 11 thầy Quang có số học sinh nam và nữ bằng nhau, cần chọn ra mộtđôi gồm 4 học sinh để dự thi quốc gia. Biết rằng xác suất để trong 4 học sinh được chọncó đúng 3 học sinh nam là $\frac{5}{21}$. Hãy tính số học sinh của "Lớp Toán 11 thầy Quang".

A.8 B.9 C.10 D.11

Câu 4: Một dãy phố có 5 cửa hàng bán quần áo. Có 5 người khách đến mua quần áo, mỗi người khách vào ngẫu nhiên một trong năm cửa hàng đó.Tính xác suất để có ít nhất một cửa hàng có nhiều hơn 2 người khách vào.

A. $\frac{36}{125}$ B. $\frac{32}{125}$ C. $\frac{181}{625}$ D. $\frac{28}{125}$

Câu 5: Hưng và Hoàng cùng tham gia kì thi THPT Quốc gia, trong đó có hai môn trắc nghiệm là Vật lí và Hóa học. Đề thi của mỗi môn gồm 6 mã khác nhau và các môn khác nhau có mã khác nhau.Đề thi được sắp xếp và phát cho thí sinh một cách ngẫu nhiên. Tính xác suất để trong hai môn thi đó Hưng và Hoàng có chung đúng một mã đề thi.

A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{18}$ C. $\frac{5}{18}$ D. $\frac{5}{36}$

Câu 6: Đội admin của 'học sinh thầy Quang' gồm 4 admin lớp 12A, 3 admin lớp 12B và 2 admin lớp 12C. Chọn ngẫu nhiên 5 bạn từ đội admin để chữa đề THPT Quốc gia năm 2017.Tính xác suất sao cho lớp nào cũng có admin được chọn và có ít nhất 2 admin lớp 12A.

A. $\frac{13}{21}$ B. $\frac{3}{7}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{10}{21}$

Câu 7: Đội cờ đỏ của một trường phổ thông có 12 học sinh gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Chọn ngẫu nhiên 4 học sinh đi làm nhiệm vụ. Tính xác suất để trong 4 học sinh được chọn không quá 2 trong 3 lớp trên.

A. $\frac{6}{11}$ B. $\frac{5}{11}$ C. $\frac{14}{33}$ D. $\frac{19}{33}$

Câu 8: Một nhóm gồm 6 học sinh có tên khác nhau, trong đó có hai học sinh tên là Minh và Lâm. Xếp ngẫu nhiên nhóm học sinh đó thành một hàng dọc.Tính xác suất sao cho hai học sinh Minh và Lâm đứng cạnh nhau.

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{12}$

Câu 9: Để chuẩn bị cho lễ kỉ niệm 50 năm thành lập trường, nhà trường cần chọn 20 học sinh nữ để tiếp đón đại biểu đến tham dự. Số học sinh này được lấy ngẫu nhiên theo danh sách từ 15 học sinh nữ của lớp 11A và 22 học sinh nữ của lớp 11B. Tính xác suất để mỗi lớp có ít nhất 9 học sinh được chọn.

A.0,222 B.0,3441 C.0,3868 D.0,4142

Câu 10: Trường trung học phổ thông Đức Thọ có tổ Toán- Tin gồm 10 giáo viên trong đó có 3 giáo viên nam, 7 giáo viên nữ. Tổ Lý- Hóa - Sinh gồm 12 giáo viên trong đó có 3 giáo viên nam, 9 giáo viên nữ. Chọn ngẫu nhiên mỗi tổ 2 giáo viên đi chuyên đề.Tính xác suất sao cho các giáo viên được chọn có cả nam và nữ.

A. $\frac{41}{55}$ B. $\frac{329}{330}$ C. $\frac{49}{66}$ D. $\frac{42}{55}$

Câu 11: Có 30 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 30. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Tìm xác suất để có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn, trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10.

A. $\frac{33}{667}$ B. $\frac{66}{667}$ C. $\frac{99}{667}$ D. $\frac{11}{667}$

Câu 12: Một lớp học có 40 học sinh trong đó có 20 em thuộc nhóm máu A, 10 em thuộc nhóm máu B và 10 em thuộc nhóm máu O. Chọn ngẫu nhiên 4 em đi tham gia hiến máu nhân đạo. Tính xác suất để trong 4 em được chọn phải có ít nhất 2 em thuộc nhóm máu A.

A. $\frac{671}{962}$ B. $\frac{355}{962}$ C. $\frac{310}{481}$ D. $\frac{205}{481}$

Câu 13: Gọi M là tập hợp các số có 4 chữ số đôi một khác nhau lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Lấy ra từ tập M một số bất kỳ.Tính xác suất để lấy được số có tổng các chữ số là số lẻ?

A. $\frac{4}{35}$ B. $\frac{12}{35}$ C. $\frac{16}{35}$ D. $\frac{20}{35}$

Câu 14: Trong giải bóng đá nữ của trường THPT Lương Ngọc Quyến có 12 đội tham gia, Trong đó có hai đội của hai lớp 12A6 và 10A3. Ban tổ chức giải tiến hành bốc thăm ngẫu nhiên để chia thành hai bảng A và B, mỗi bảng 6 đội. Tính xác suất để hai đội 12A6 là 10A3 ở cùng một bảng.

A. $\frac{5}{11}$ B. $\frac{6}{11}$ C. $\frac{7}{11}$ D. $\frac{8}{11}$

Câu 15: Cho X là tập hợp gồm 6 số tự nhiên lẻ và 4 số tự nhiên chẵn. Chọn ngẫu nhiên từ tập X ba số tự nhiên. Tính xác suất chọn được ba số tự nhiên có tích là một số chẵn.

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{5}{6}$

Câu 16: Một thùng đựng 12 hộp sữa. Trong 12 hộp đó có 5 hộp sữa cam, 7 hộp sữa dâu. Lấy ngẫu nhiên 3 hộp sữa trong thùng, tính xác suất để trong 3 hộp sữa được lấy ra có ít nhất 2 hộp sữa cam.

A. $\frac{5}{11}$ B. $\frac{7}{22}$ C. $\frac{8}{22}$ D. $\frac{2}{11}$

Câu 17: Một tổ gồm 9 học sinh trong đó có 3 học sinh nữ. Cần chia tổ đó thành 3 nhóm đều nhau, mỗi nhóm có 3 học sinh.Tính xác suất để khi chia ngẫu nhiên ta được mỗi nhóm có đúng 1 học sinh nữ.

A. $\frac{9}{28}$ B. $\frac{5}{14}$ C. $\frac{11}{28}$ D. $\frac{7}{14}$

Câu 18: Lớp 'Thầy Quang' có 25 nam sinh và 15 nữ sinh. Chọn ngẫu nhiên 4 học sinh làm nhiệm vụ.Tính xác suất sao cho trong 4 học sinh được chọn có ít nhất một bạn nam.

A. $\frac{694}{703}$ B. $\frac{1385}{1406}$ C. $\frac{73}{74}$ D. $\frac{693}{703}$

Câu 19: Trong kì thi học sinh giỏi cấp tỉnh của trường THPT Trưng Vương có 10 học sinh đạt giải trong đó có 4 học sinh nam và 6 học sinh nữ. Nhà trường muốn chọn một nhóm 5 học sinh trong 10 học sinh trên để tham dự buổi lễ tuyên dương khen thưởng cuối học kỳ 1 năm học 2015 – 2016 do huyện uỷ Văn Lâm tổ chức. Tính xác suất để chọn được một nhóm gồm 5 học sinh mà có cả nam và nữ, biết số học sinh nam ít hơn số học sinh nữ.

A. $\frac{3}{7}$ B. $\frac{4}{7}$ C. $\frac{5}{7}$ D. $\frac{6}{7}$

Câu 20: Trong một chiếc hộp có mười hai tấm thẻ được đánh số từ số 1 đến số 12. Lấy ngẫu nhiên ra hai thẻ.Tính xác suất để hai tấm thẻ lấy ra phải có tấm thẻ đánh số chẵn.

A. $\frac{15}{66}$ B. $\frac{51}{66}$ C. $\frac{5}{22}$ D. $\frac{17}{22}$

Câu 21: Có n cái kẹo trong túi, trong đó có 6 kẹo màu cam còn lại là kẹo màu vàng. Chi lấy một chiếc kẹo bất kỳ từ trong túi và ăn chiếc kẹo đó. Sau đó Chi lấy một chiếc kẹo khác và ăn luôn chiếc kẹo này. Tìm n biết xác suất để Chi ăn được hai chiếc kẹo màu cam là 1/3.

A.8 B.9 C.10 D.11

Câu 22: Để bảo vệ Đại hội Đảng toàn quốc lần thứ XII diễn ra từ ngày 20 đến 28 tháng 01 năm 2016, Bộ Công an thành lập 5 đội bảo vệ, Bộ Quốc phòng thành lập 7 đội bảo vệ. Ban tổ chức chọn ngẫu nhiên 5 đội thường trực để bảo vệ tại Trung tâm Hội nghị Quốc gia Mỹ Đình (nơi diễn ra Đại hội). Tính xác suất để trong 5 đội được chọn có ít nhất 1 đội thuộc Bộ Công an, ít nhất 1 đội thuộc Bộ Quốc phòng.

A. $\frac{1}{36}$ B. $\frac{1}{12}$ C. $\frac{35}{36}$ D. $\frac{11}{12}$

Câu 23: Trường trung học phổ thông Trưng Vương số 1 có tổ Toán gồm 15 giáo viên trong đó có 8 giáo viên nam, 7 giáo viên nữ. Tổ Lý gồm 12 giáo viên trong đó có 5 giáo viên nam, 7 giáo viên nữ. Chọn ngẫu nhiên mỗi tổ 2 giáo viên đi dự tập huấn chuyên đềdạy học tích hợp.Tính xác suất sao cho trong các giáo viên được chọn có 2 nam và 2 nữ.

A. $\frac{19}{165}$ B. $\frac{28}{165}$ C. $\frac{197}{495}$ D. $\frac{211}{495}$

Câu 24: Một tổ gồm 9 học sinh nam và 3 học sinh nữ. Cần chia tổ đó thành 3 nhóm, mỗi nhóm 4 học sinh để đi làm 3 công việc trực nhật khác nhau.Tính xác suất để khi chia ngẫu nhiên ta được mỗi nhóm có đúng 1 nữ.

A. $\frac{8}{165}$ B. $\frac{16}{55}$ C. $\frac{16}{165}$ D. $\frac{8}{55}$

Câu 25: Trong một hộp kín đựng 2 viên bi đỏ, 5 viên bi trắng và 7 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi, tìm xác suất để 4 viên bi lấy ra không có đủ cả ba màu.

A. $\frac{8}{13}$ B. $\frac{9}{13}$ C. $\frac{10}{13}$ D. $\frac{11}{13}$

Câu 26: Một hộp đựng 9 viên bi trong đó có 4 viên bi màu đỏ, 5 viên bi màu xanh. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất để trong 3 viên bi lấy được có ít nhất 2 viên bi màu xanh.

A. $\frac{10}{21}$ B. $\frac{5}{42}$ C. $\frac{25}{42}$ D. $\frac{8}{21}$

Câu 27: Gọi A là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 4 chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập A, tính xác suất để số chọn được là số chia hết cho 5.

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{5}{36}$ C. $\frac{11}{36}$ D. $\frac{1}{3}$

Câu 28: Đội dự tuyển học sinh giỏi giải toán trên máy tính cầm tay môn toán của trường THPTTrưng Vương có 4 học sinh nam khối 12, 2 học sinh nữ khối 12 và 2 học sinh nam khối 11. Để thành lập đội tuyển dự thi học sinh giỏi giải toán trên máy tính cầm tay môn toán cấp tỉnh nhà trường cần chọn 5 em từ 8 em học sinh trên. Tính xác suất để trong 5 em được chọn có cả học sinh nam và học sinh nữ, có cả học sinh khối 11 và học sinh khối 12.

A. $\frac{5}{7}$ B. $\frac{4}{7}$ C. $\frac{12}{14}$ D. $\frac{11}{14}$

Câu 29: Trong bộ môn Toán, thầy giáo có 40 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 15 câu hỏi trung bình, 20 câu hỏi dễ. Một ngân hàng đề thi mỗi đề thi có 7 câu hỏi được chọn từ 40 câu hỏi đó.Tính xác suất để chọn được đề thi từ ngân hàng đề trên nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 4.

A. $\frac{915}{3848}$ B. $\frac{951}{3848}$ C. $\frac{915}{4838}$ D. $\frac{951}{3838}$

Câu 30: Lập số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau từ các chữ số {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7}. Hãy tính xác suất để lập được số tự nhiên chia hết cho 5.

A. $\frac{8}{49}$ B. $\frac{1}{49}$ C. $\frac{13}{49}$ D. $\frac{15}{49}$

Câu 31: Trong đợt thi học sinh giỏi của tỉnh Hưng Yên trường THPT Trưng Vương môn Toán có 5 em đạt giải trong đó có 4 nam và 1 nữ, môn Văn có 5 em đạt giải trong đó có 1 nam và 4 nữ, môn Hóa học có 5 em đạt giải trong đó có 2 nam và 3 nữ, môn Vật lí có 5 em đạt giải trong đó có 3 nam và 2 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn mỗi môn một em học sinh để đi dự đại hội thi đua? Tính xác suất để có cả học sinh nam và nữ để đi dự đại hội?

A. $\frac{48}{625}$ B. $\frac{577}{625}$ C. $\frac{24}{625}$ D. $\frac{621}{625}$

Câu 32: Cho đa giác đều có 12 đỉnh. Chọn ngẫu nhiên ba đỉnh trong 12 đỉnh của đa giác, tính xác suất để 3 đỉnh được chọn tạo thành một tam giác đều.

A. $\frac{2}{55}$ B. $\frac{4}{55}$ C. $\frac{3}{165}$ D. $\frac{8}{165}$

Câu 33: Đội văn nghệ của một lớp có 5 bạn nam và 7 bạn nữ. Chọn ngẫu nhiên 5 bạn tham gia biểu diễn, tìm xác suất để trong 5 bạn được chọn có cả nam và nữ, đồng thời số bạn nam nhiều hơn số bạn nữ.

A. $\frac{31}{792}$ B. $\frac{210}{792}$ C. $\frac{245}{792}$ D. $\frac{35}{792}$

Câu 34: Có 5 bì thư được đánh số từ 1,2,3,4,5 và 5 con tem thư được đánh số từ 1,2,3,4,5. Dán 5 con tem thư lên 5 bì thư và mỗi bì thư chỉ dán 1 tem thư. Tính xác xuất để có ít nhất một bì thư được dán trùng số với tem thư.

A. $\frac{13}{24}$ B. $\frac{11}{20}$ C. $\frac{14}{30}$ D. $\frac{19}{30}$

Câu 35: Có hai hộp bi, hộp thứ nhất chứa 5 viên bi đỏ và 4 viên bi trắng, hộp thứ hai chứa 4 viên bi đỏ và 6 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra 2 viên bi, tính xác suất để 4 viên bi lấy ra trong 2 hộp thỏa mãn có ít nhất 3 viên bi đỏ.

A. $\frac{7}{27}$ B. $\frac{10}{27}$ C. $\frac{4}{18}$ D. $\frac{7}{18}$

Câu 36: Một hộp chứa 20 quả cầu giống nhau gồm 12 quả đỏ và 8 quả xanh. Lấy ngẫu nhiên (đồng thời) 3 quả. Tính xác suất để có ít nhất một quả cầu màu xanh.

A. $\frac{13}{57}$ B. $\frac{44}{57}$ C. $\frac{11}{57}$ D. $\frac{46}{57}$

Câu 37: Một chiếc hộp đựng 6 quảcầu trắng, 4 quả cầu đỏ và 2 quả cầu đen. Chọn ngẫu nhiên 4 quả. Tính xác suất để 4 quả được chọn có đủ cả 3 màu.

A. $\frac{64}{165}$ B. $\frac{24}{55}$ C. $\frac{32}{165}$ D. $\frac{16}{55}$

Câu 38: Nhà trường tổ chức tham quan dã ngoại cho 10 thành viên tiêu biểu của câu lạc bộ Toán học và 10 thành viên tiêu biểu của câu lạc bộ Tiếng Anh. Trong một trò chơi, ban tổ chức chọn ngẫu nhiên 5 thành viên tham gia trò chơi. Tính xác suất sao cho trong 5 thành viên được chọn, mỗi câu lạc bộ có ít nhất 1 thành viên

A. $\frac{625}{646}$ B. $\frac{21}{646}$ C. $\frac{81}{646}$ D. $\frac{565}{646}$

Câu 39: Gọi X là tập hợp các số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau được tạo thành từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp X. Tính xác suất để số được chọn chỉ chứa 3 chữ số lẻ.

A. $\frac{1}{1512}$ B. $\frac{1}{21}$ C. $\frac{5}{42}$ D. $\frac{10}{21}$

Câu 40: Lớp 12A có 3 bạn học sinh nam và 3 bạn học sinh nữ đi cổ vũ cuộc thi tìm hiểu Luật an toàn giao thông. Các em được xếp ngồi vào 6 ghế hàng ngang. Tính xác suất sao cho ba bạn nữ ngồi cạnh nhau.

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{120}$ C. $\frac{1}{30}$ D. $\frac{2}{5}$

Câu 41: Trong cụm thi để xét công nhận tốt nghiệp THPT thí sinh phải thi 4 môn trong đó có 3 môn bắt buộc là Toán, Văn, Ngoại ngữ và 1 môn do thí sinh tự chọn trong số các môn: Vật lí, Hóa học, Sinh học, Lịch sử và Địa lí. Trường X có 40 học sinh đăng kí dự thi, trong đó 10 học sinh chọn môn Vật lí và 20 học sinh chọn môn Hóa học. Lấy ngẫu nhiên 3 học sinh bất kỳ của trường X. Tính xác suất để trong 3 học sinh đó luôn có học sinh chọn môn Vật lí và học sinh chọn môn Hóa học.

A. $\frac{70}{247}$ B. $\frac{145}{494}$ C. $\frac{120}{247}$ D. $\frac{195}{494}$

Câu 42: Một xí nghiệp có 50 công nhân, trong đó có 30 công nhân tay nghề loại A, 15 công nhân tay nghề loại B, 5 công nhân tay nghề loại C. Lấy ngẫu nhiên theo danh sách 3 công nhân. Tính xác suất để 3 người được lấy ra có 1 người tay nghề loại A, 1 người tay nghề loại B, 1 người tay nghề loại C.

A. $\frac{43}{392}$ B. $\frac{44}{392}$ C. $\frac{45}{392}$ D. $\frac{46}{392}$

Câu 43: Từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4 lập được bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số đôi một khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một số trong các số lập được, tính xác suất để lấy được số chẵn.

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{5}{8}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{7}{8}$

Câu 44: Trong kế hoạch không kích tổ chức khủng bố IS,Mỹ huy động 15 chiến đấu cơ, Pháp huy động 3 chiến đấu cơ và Anh huy động 7 chiến đấu cơ. Cần cho một đội bay 6 chiếc để thực hiện nhiệm vụ. Tính xác suất để trong đội bay đó có ít nhất 4 chiến đấu cơ của Mỹ.

A. $\frac{688}{1265}$ B. $\frac{689}{1265}$ C. $\frac{134}{253}$ D. $\frac{61}{115}$

Câu 45: Trong giải cầu lông kỷ niệm ngày truyền thống học sinh sinh viên có 8 người tham gia trong đó có hai bạn Việt và Nam. Các vận động viên được chia làm hai bảng A và B, mỗi bảng gồm 4 người. Giả sử việc chia bảng thực hiện bằng cách bốc thăm ngẫu nhiên, tính xác suất để cả hai bạn Việt và Nam nằm chung một bảng đấu.

A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{3}{7}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

Câu 46: Tại một kì thi SEA Games, môn bóng đá nam có 10 đội bóng tham dự (trong đó có đội Việt Nam và đội Thái Lan). Ban tổ chức bốc thăm ngẫu nhiên để chia 10 đội bóng nói trên thành 2 bảng A và B, mỗi bảng 5 đội. Tính xác suất để đội Việt Nam và đội Thái Lan ở cùng một bảng.

A. $\frac{2}{9}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{4}{9}$ D. $\frac{2}{3}$

Câu 47: Ảo thuật gia Dynamo trình diễn tiết mục đoán suy nghĩ. Anh yêu cầu một khán giả ghi ngẫu nhiên một dãy có 5 chữ số bất kỳ vào giấy.Ảo thuật gia sử dụng kĩ thuật điêu luyện và dự đoán rằng dãy số được ghi ra giấy là một số tự nhiên khác 0, chia hết cho 9 và là số chẵn.Tính xác suất để điều dự đoán trên là đúng.

A.0,03333 B.0,04444 C.0,05555 D.0,06666

Câu 48: Một lớp đại học có 80 học sinh và bạn An có số thứ tự số 69. Một giáo viên chọn ngẫu nhiên 5 học sinh lên hát bài "Không phải dạng vừa đâu" của Sơn Tùng MTP.Tính xác suất để 4 bạn học sinh được chọn có số thứ tự nhỏ hơn và 1 bạn có số thứ tự lớn hơn số thứ tự của bạn An.

A. $\frac{8958234}{24040016}$ *B.* $\frac{8958235}{24040016}$ *C.* $\frac{8958236}{24040016}$ *D.* $\frac{8958237}{24040016}$

Câu 49: Một tổ có 5 học sinh nam và 6 học sinh nữ. Giáo viên chọn ngẫu nhiên 3 học sinh để làm trực nhật.Tính xác suất để 3 học sinh được chọn có cả nam và nữ.

A. $\frac{5}{11}$ B. $\frac{4}{11}$ C. $\frac{7}{11}$ D. $\frac{9}{11}$

Câu 50: Hai thí sinh A và B tham gia một buổi thi vấn đáp. Cán bộ hỏi thi đưa cho mỗi thí sinh một bộ câu hỏi thi gồm 10 câu hỏi khác nhau, được đựng trong 10 phong bì dán kín, có hình thức giống hệt nhau, mỗi phong bì đựng 1 câu hỏi; thí sinh chọn 3 phong bì trong số đó để xác định câu hỏi thi của mình. Biết rằng bộ 10 câu hỏi thi dành cho các thí sinh là như nhau, tính xác suất để 3 câu hỏi A chọn và 3 câu hỏi B chọn là giống nhau.

A. $\frac{1}{80}$ B. $\frac{1}{100}$ C. $\frac{1}{120}$ D. $\frac{1}{140}$

Câu 51: Một lớp học có 33 học sinh, trong đó có 10 học sinh giỏi, 11 học sinh khá và 12 học sinh trung bình. Chọn ngẫu nhiên lớp học 4 học sinh tham dự trại hè.Tính xác suất để nhóm học sinh được chọn có đủ học sinh giỏi, học sinh khá và học sinh trung bình.

A. $\frac{21}{62}$ B. $\frac{10}{31}$ C. $\frac{23}{62}$ D. $\frac{15}{31}$

Câu 52: Có ba bó hoa. Bó thứ nhất có 8 bông hoa hồng, bó thứ hai có 7 bông hoa ly, bó thứ ba có 6 bông hoa huệ. Chọn ngẫu nhiên 7 bông hoa từ ba bó hoa trên để cắm vào một lọ hoa. Tính xác suất để trong 7 bông được chọn có số bông hoa hồng bằng số bông hoa ly.

A.0,2052 B.0,0447 C.0,103 D.0,0543

Câu 53: Trong cuộc thi "Rung chuông vàng" thuộc chuỗi hoạt động Sparkling Chu Văn An, có 20 bạn lọt vào vòng chung kết, trong đó có 5 bạn nữ và 15 bạn nam. Để sắp xếp vị trí chơi, Ban tổ chức chia các bạn thành 4 nhóm A, B, C, D, mỗi nhóm có 5 bạn. Việc chia nhóm được thực hiện bằng cách bốc thăm ngẫu nhiên. Tính xác suất để 5 bạn nữa vào cùng một nhóm.

A. $\frac{1}{15504}$ B. $\frac{5}{3876}$ C. $\frac{4}{15504}$ D. $\frac{7}{3876}$

Câu 54: Cho một đa giác đều 12 đỉnh $A_1A_2...A_{12}$ nội tiếp đường tròn (O). Chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh của đa giác đó. Tính xác suất để 4 đỉnh được chọn ra tạo thành một hình chữ nhật.

A. $\frac{2}{33}$ B. $\frac{1}{66}$ C. $\frac{3}{33}$ D. $\frac{2}{66}$

Câu 55: Một lớp học có 20 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Thầy giáo chủ nhiệm chọn ra 5 học sinh để lập một tốp ca hát mừng ngày thành lập Quân đội nhân dân Việt Nam (22 tháng 12). Tính xác suất sao cho trong đó có ít nhất 1 học sinh nữ.

A.0,04776 B.0.95556 C.0,95224 D.0,04444

Câu 56: Một tổ có 7 học sinh (trong đó có 3 học sinh nữ và 4 học sinh nam). Xếp ngẫu nhiên 7 học sinh đó thành 1 hàng ngang. Tìm xác suất để 3 học sinh nữ đứng cạnh nhau.

A. $\frac{2}{7}$ B. $\frac{2}{14}$ C. $\frac{4}{7}$ D. $\frac{6}{14}$

Câu 57: Mỗi đề thi gồm 4 câu được lấy ngẫu nhiên từ 15 câu hỏi trong một ngân hàng đề thi gồm 15 câu hỏi. Bạn Thủy đã học thuộc 8 câu trong ngân hàng đề thi. Tính xác suất để bạn Thủy rút ngẫu nhiên được một đề thi có ít nhất hai câu đã thuộc.

A. $\frac{28}{39}$ B. $\frac{22}{65}$ C. $\frac{10}{13}$ D. $\frac{94}{195}$

Câu 58: Một bình đựng 4 viên bi đỏ, 3 viên bi xanh, 2 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên từ bình ra 3 viên bi. Tính xác suất để lấy được 3 viên bi có đủ ba màu.

A. $\frac{1}{7}$ B. $\frac{2}{7}$ C. $\frac{3}{7}$ D. $\frac{4}{7}$

Câu 59: Tổ 1 lớp 12A1 có 12 học sinh gồm có 7 học sinh nam và 5 học sinh nữ, trong đó An là tổ trưởng còn Hoa là tổ phó. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh trong tổ để tham gia hoạt động tập thể của trường nhân dịp ngày thành lập Đoàn 26 tháng 3. Tính xác suất để sao cho nhóm học sinh được chọn có 3 học sinh nam và 2 học sinh nữ trong đó phải nhất thiết có bạn An hoặc bạn Hoa nhưng không có cả hai (An là học sinh nam, Hoa là học sinh nữ).

A. $\frac{5}{44}$ B. $\frac{10}{99}$ C. $\frac{5}{22}$ D. $\frac{85}{396}$

Câu 60: Một hộp đựng 10 viên bi đỏ, 8 viên bi vàng và 6 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi. Tính xác suất để các viên bi lấy được đủ cả 3 màu.

A.0,474 B.0,3614 C.0,3162 D.0,271

Câu 61: Một tổ có 8 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Giáo viên chọn ngẫu nhiên 3 học sinh để làm trực nhật. Tính xác suất để 3 học sinh được chọn có cả nam và nữ.

A. $\frac{11}{51}$ B. $\frac{39}{51}$ C. $\frac{40}{51}$ D. $\frac{30}{51}$

Câu 62: Cho một hộp đựng 4 viên bi đỏ, 5 viên bi xanh và 7 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên một lần ba viên bi. Tính xác suất để trong ba viên bi lấy được chỉ có hai màu.

A. $\frac{7}{80}$ B. $\frac{27}{80}$ C. $\frac{73}{80}$ D. $\frac{53}{80}$

Câu 63: Tổ một có 3 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Tổ hai có 5 học sinh nam và 2 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên mỗi tổ một học sinh đi làm nhiệm vụ. Tính xác suất sao cho chọn được hai học sinh có cả nam và nữ

A. $\frac{20}{49}$ B. $\frac{29}{49}$ C. $\frac{6}{49}$ D. $\frac{26}{49}$

Câu 64: Từ một hộp đựng 4 viên bi đỏ và 5 viên bi xanh, chọn ngẫu nhiên hai viên bi. Tính xác suất để hai viên bi được chọn cùng màu.

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{4}{9}$ C. $\frac{5}{18}$ D. $\frac{2}{3}$

Câu 65: Trong hộp đựng 5 cái bút chì và 6 cái bút mực, sáng nay trước lúc đi thi bạn An lấy ngẫu nhiên 4 cái bút. Tính xác suất để An lấy được cả bút chì và bút mực.

A. $\frac{2}{33}$ B. $\frac{1}{22}$ C. $\frac{31}{33}$ D. $\frac{21}{22}$

Câu 66: Một hộp đựng 20 quả bóng. Trong đó có 4 quả màu xanh, 5 quả màu đỏ, 5 quả màu trắng và 6 quả màu vàng. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 4 quả bóng.Tính xác suất để lấy được ít nhất hai quả bóng cùng màu.

A. $\frac{14}{17}$ B. $\frac{283}{323}$ C. $\frac{284}{323}$ D. $\frac{15}{17}$

Câu 67: Có 6 tấm bìa được đánh số 0, 1, 2, 3, 4, 5. Lấy ngẫu nhiên 4 tấm bìa và xếp thành hàng ngang từ trái sang phải. Tính xác suất để xếp được một số tự nhiên có 4 chữ số.

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{5}{6}$

Câu 68: Chuẩn bị cho tết Ất Mùi 2015 một đội thanh niên tình nguyện của trường THPT Nghèn gồm 9 học sinh trong đó có 3 học sinh nữ chia thành 3 tổ đều nhau làm công tác vệ sinh môi trường tại nghĩa trang liệt sỹ huyện Can Lộc. Hãy tính xác suất để mỗi tổ có đúng một học sinh nữ.

A. $\frac{9}{28}$ B. $\frac{1}{672}$ C. $\frac{3}{56}$ D. $\frac{3}{28}$

Câu 69: Một chi đoàn có 15 đoàn viên trong đó có 7 nam và 8 nữ. Người ta chọn ra 4 người trong chi đoàn đó để lập một đội thanh niên tình nguyện. Tính xác suất để trong 4 người được chọn có ít nhất 1 nữ.

A. $\frac{1}{39}$ B. $\frac{12}{13}$ C. $\frac{38}{39}$ D. $\frac{1}{13}$

Câu 70: Cho tập hợp $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Từ các phần tử của tập A lập các số tự nhiên có bốn chữ số, các chữ số đôi một khác nhau, chọn ngẫu nhiên một số từ các số mới lập đó. Tính xác suất để số được chọn có chữ số hàng nghìn nhỏ hơn 5.

A. $\frac{1}{7}$ B. $\frac{3}{7}$ C. $\frac{4}{7}$ D. $\frac{6}{7}$

Câu 71: Một đội văn nghệ có 15 người gồm 9 nam và 6 nữ. Chọn ngẫu nhiên 8 người đi hát đồng ca. Tính xác suất để trong 8 người được chọn có số nữ nhiều hơn số nam.

A. $\frac{56}{715}$ B. $\frac{12}{143}$ C. $\frac{4}{715}$ D. $\frac{15}{143}$

Câu 72: Cho tập hợp X gồm các số tự nhiên có 3 chữ số phân biệt được lập từ các chữ số 1,2,3,4,5,6. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên từ tập hợp X, tính xác suất để số được chọn có tổng các chữ số bằng 8.

A. 0,3 B. 0,6 C. 0,1 D. 0,2

Câu 73: Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có hai chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp S. Tính xác suất để số được chọn có chữ số hàng đơn vị và hàng chục đều là chữ số chẵn.

A. $\frac{5}{18}$ B. $\frac{8}{45}$ C. $\frac{4}{18}$ D. $\frac{9}{45}$

Câu 74: Cho 100 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 100, chọn ngẫu nhiên 3 thẻ. Tính xác suất để tổng các số ghi trên 3 thẻ được chọn là một số chia hết cho 2.

A. 0,2 B. 0,3333 C. 0,4 D. 0,5

Câu 75: Một hộp đựng các số tự nhiên có 4 chữ số được thành lập từ các số 0,1,2,3,4. Bốc ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để số tự nhiên được bốc ra là số có 4 chữ số mà chữ số đằng trước nhỏ hơn chữ số đằng sau.

A. $\frac{1}{500}$ B. $\frac{1}{250}$ C. $\frac{3}{500}$ D. $\frac{1}{625}$

Câu 76: Một hộp đựng chứa 4 viên bi trắng, 5 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 4 viên bi. Tính xác suất để 4 viên bi được chọn có đủ 3 màu và số bi đỏ nhiều nhất.

A. $\frac{12}{91}$ B. $\frac{16}{91}$ C. $\frac{20}{91}$ D. $\frac{24}{91}$

Câu 77: Một chiếc hộp có chín thẻ giống nhau được đánh số liên tiếp từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên đồng thời hai thẻ (không kể thứ tự) rồi nhân hai số ghi trên hai thẻ với nhau. Tính xác suất để kết quả nhận được là một số chẵn.

A. $\frac{2}{18}$ B. $\frac{5}{9}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{13}{18}$

Câu 78: Một hộp đựng 4 viên bi đỏ, 5 viên bi trắng, 6 viên bi vàng (các viên bi có kích thước giống nhau, chỉ khác nhau về màu). Người ta chọn ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp đó. Tính xác suất để 4 viên bi chọn ra không có đủ cả ba màu.

A. $\frac{4}{13}$ B. $\frac{43}{91}$ C. $\frac{36}{91}$ D. $\frac{32}{91}$

Câu 79: Trong môn Toán thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau trong đó có 5 câu khó,10 câu trung bình,15 câu dễ từ 30 câu này có thể lập ra bao nhiêu đề kiểm tra có 5 câu hỏi sao cho phải có đủ 3 loại khó, trung bình,dễ và số câu dễ không ít hơn 2.

A.34125 B.10500 C.56875 D.23625

Câu 80: Trong một cái hộp có 40 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 40. Lấy ngẫu nhiên 3 tấm thẻ trong hộp đó.Tính xác suất để tổng các số trên 3 tấm thẻ lấy được là một số chia hết cho 3.

A.0,2 B.0.33 C.0,4 D.0,45

Câu 81: Một tổ học sinh gồm có 5 học sinh nam và 7 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 học sinh đi chăm sóc bồn hoa.Tính xác suất để 2 học sinh được chọn đi chăm sóc bồn hoa có cả nam và nữ.

A.54% B.55% C.56% D.57%

Câu 82: Cho một đa giác đều 14 đỉnh $A_1A_2\ldots A_{12}$ nội tiếp đường tròn (O). Chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh của đa giác đó. Tính xác suất để 4 đỉnh được chọn ra tạo thành một hình chữ nhật.

A. $\frac{2}{15}$ B. $\frac{3}{143}$ C. $\frac{4}{15}$ D. $\frac{140}{143}$

Câu 83: Một bình đựng 5 viên bi đỏ, 4 viên bi xanh, 3 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên từ bình ra 3 viên bi. Tính xác suất để lấy được 3 viên bi có đủ ba màu.

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{4}{11}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{11}$

Câu 84: Tổ một có 5 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Tổ hai có 6 học sinh nam và 7 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên mỗi tổ một học sinh đi làm nhiệm vụ. Tính xác suất sao cho chọn được hai học sinh có cả nam và nữ

A. $\frac{20}{49}$ B. $\frac{59}{117}$ C. $\frac{6}{49}$ D. $\frac{8}{49}$

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Đáp án C.

➤ **Lời giải:** Số cách chọn 8 học sinh từ 18 học sinh của đội tuyển là: $C_{18}^{8} = 43758$ cách

– Số cách chọn 8 học sinh khối 12 và 11 là C_{13}^8

– Số cách chọn 8 học sinh khối 11 và 10 là C_{11}^8

– Số cách chọn 8 học sinh khối 12 và 10 là C_{12}^8

Suy ra số cách chọn theo yêu cầu bài toán là: $43758 - C_{13}^8 - C_{11}^8 - C_{12}^8 = 41811$ cách.

Câu 2: Đáp án A.

➢ **Lời giải:** Số cách chọn 5 học sinh từ 13 học sinh của đội tuyển là: $C_{13}^5 = 1287$ cách

– Số cách chọn 5 học sinh khối 12 và 11 là C_9^5

– Số cách chọn 5 học sinh khối 11 và 10 là C_8^5

– Số cách chọn 5 học sinh khối 12 và 10 là C_9^5

Suy ra số cách chọn theo yêu cầu bài toán là: $1287 - C_9^5 - C_8^5 - C_9^5 = 979$ cách

Câu 3: Đáp án C.

➢ **Lời giải:** Gọi x là số học sinh nữ, x là số học sinh nam $(x \geq 4)$

Theo bài ra, ta có:

$$\frac{C_x^3.C_x^1}{C_{2x}^4} = \frac{5}{21} \Leftrightarrow \frac{\dfrac{x!}{3!.(x-3)!}x}{\dfrac{(2x)!}{4!.(2x-4)!}} = \frac{5}{21} \Leftrightarrow \frac{\dfrac{x.x(x-1)(x-2)}{3!}}{\dfrac{2x(2x-1)(2x-2)(2x-3)}{4!}} = \frac{5}{21}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -3(\text{loại}) \end{array}\right.$$

Vậy số học sinh của 'Lớp Toán 11 thầy Quang là 10.

Câu 4: Đáp án C.

➢ **Lời giải:** Người khách thứ nhất có 5 cách chọn một cửa hàng để vào.

Không gian mẫu là: $|\Omega| = 3125$

Để có ít nhất một cửa hàng có nhiều hơn 2 khách vào thì có các trường hợp (TH) sau:

✓ TH1: Một cửa hàng có 3 khách, một cửa hàng có 2 khách, ba cửa hàng còn lại không có khách nào. TH này có $C_5^1.C_5^3.C_4^1.C_2^2 = 200$ khả năng xảy ra.

✓ TH2: Một cửa hàng có 3 khách, hai cửa hàng có 1 khách, hai cửa hàng còn lại không có khách nào. TH này có $C_5^1.C_5^3.C_4^2.P_2 = 600$ khả năng xảy ra.

✓ TH3: Một cửa hàng có 4 khách, một cửa hàng có 1 khách, ba cửa hàng còn lại không có khách nào. TH này có $C_5^1.C_5^4.C_4^1 = 100$ khả năng xảy ra.

✓ TH4: Một cửa hàng có 5 khách, các cửa hàng khác không có khách nào. TH này có $C_5^1 = 5$ khả năng xảy ra.

Suy ra có tất cả $200 + 600 + 100 + 5 = 905$ khả năng thuận lợi cho biến cố "có ít nhất một cửa hàng có nhiều hơn 2 người khách vào".

Vậy xác suất cần tính là: $P = \frac{905}{3125} = \frac{181}{625}$

Câu 5: Đáp án C.

➢ **Lời giải:** Số cách nhận mã đề hai môn Hưng là 6.6=36

Số cách nhận mã đề hai môn Hoàng là 6.6=36

Số phần tử của không gian mẫu $|\Omega| = 36.36 = 1296$

Gọi A là biến cố"Hưng và Hoàng có chung đúng một mã đề thi"

✓ Khả năng 1: Có cùng mã đề Vật lí

Hưng có 6.6 cách nhận mã đề hai môn, khi đó Hoàng có 5 cách nhận mã đề

Do đó có 36.5=180 cách

✓ Khả năng 2: Tương tự có cùng mã đề Hóa học có 180 cách

$\Rightarrow |\Omega_A| = 360$. Vậy $P(A) = \frac{360}{1296} = \frac{5}{18}$

Câu 6: Đáp án A.

➢ **Lời giải:** Gọi không gian mẫu của phép chọn ngẫu nhiên là Ω

Số phần tử của không gian mẫu là: $C_9^5 = 126$

Gọi A là biến cố "Chọn ngẫu nhiên 5 bạn từ đội admin để chữa đề THPT Quốc gia năm 2017 và có ít nhất 2 admin (ad) lớp 12A".

Chỉ có 3 khả năng xảy ra thuận lợi cho biến cố A là:

+ 2 ad lớp 12A, 1 ad lớp 12B, 2 ad lớp 12C
+ 2 ad lớp 12A, 1 ad lớp 12B, 2 ad lớp 12C
+ 3 ad lớp 12A, 1 ad lớp 12B, 1 ad lớp 12C

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là: $C_4^2.C_3^1.C_2^2 + C_4^2.C_3^2.C_2^1 + C_4^3.C_3^1.C_2^1 = 78$

Xác suất cần tìm là $P = \frac{78}{126} = \frac{13}{21}$

Câu 7: Đáp án B.

➢ **Lời giải:** $n(\Omega) = C_{12}^4 = 495$

Gọi A là biến cố : " 4 học sinh được chọn không quá 2 trong 3 lớp trên"

$\Rightarrow \overline{A}$: " 4 học sinh được chọn là học sinh của cả 3 lớp trên"

Ta có các trường hợp sau:

+ 2 học sinh lớp A, 1 học sinh lớp B và 1 học sinh lớp C có $C_5^2.C_4^1.C_3^1 = 120$ cách
+ 2 học sinh lớp B, 1 học sinh lớp A và 1 học sinh lớp C có $C_5^1.C_4^2.C_3^1 = 90$ cách
+ 2 học sinh lớp C, 1 học sinh lớp A và 1 học sinh lớp C có $C_5^1.C_4^1.C_3^2 = 60$ cách

$\Rightarrow n(\overline{A}) = 270 \Rightarrow P(\overline{A}) = \frac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \frac{6}{11}$

Vậy xác suất của biến cố A là: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{5}{11}$

Câu 8: Đáp án A.

➢ **Lời giải:** Mỗi cách xếp ngẫu nhiên 6 học sinh thành 1 hàng dọc là một hoán vị của 6 phần tử $\Rightarrow n(\Omega)=6!=720$ (phần tử)

Gọi A là biến cố: "Minh và Lâm đứng cạnh nhau". $\Rightarrow n(A)=5!.2!=240$ (phần tử)

$\Rightarrow P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{240}{720}=\dfrac{1}{3}$ (phần tử)

Câu 9: Đáp án C.

➢ **Lời giải:** Tổng số học sinh nữ ở hai lớp là 15 + 22 = 37. Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega|=C_{37}^{20}$

Gọi A là biến cố đã cho, khi đó có ba trường hợp: Một lớp có 9 học sinh lớp còn lại 11 học sinh, hoặc cả hai lớp cùng có 10 học sinh. Suy ra $|\Omega_A|=C_{15}^{9}C_{22}^{11}+C_{15}^{10}C_{22}^{10}+C_{15}^{11}C_{22}^{9}$

Xác suất cần tìm là: $P(A)=\dfrac{C_{15}^{9}C_{22}^{11}+C_{15}^{10}C_{22}^{10}+C_{15}^{11}C_{22}^{9}}{C_{37}^{20}}\approx 0,38676$

Câu 10: Đáp án C.

➢ **Lời giải:** Số phần tử của của không gian mẫu: $n(\Omega)=C_{10}^{2}.C_{12}^{2}=2970$

Gọi A: "Các giáo viên được chọn có cả nam và nữ"

Suy ra $\overline{A}$: " Các giáo viên được chọn chỉ có nam hoặc nữ"

$n(\overline{A})=C_3^2.C_3^2+C_7^2.C_9^2=765 \Rightarrow n(A)=C_{10}^{2}.C_{12}^{2}-\left(C_3^2.C_3^2+C_7^2.C_9^2\right)=2205$

Vậy xác suất cần tìm là $P(A)=\dfrac{49}{66}$

Câu 11: Đáp án C.

➢ **Lời giải:**Gọi Ω là tập hợp các cách chọn ra 10 tấm thẻ từ 30 tấm thẻ đã cho

Suy ra $|\Omega|=C_{30}^{10}$

Trong 30 tấm thẻ có 15 tấm thẻ mang số lẻ, 15 tấm thẻ mang số chẵn trong đó có 3 tấm thẻ mang số chia hết cho 10.

Gọi Ω_A là tập hợp các cách chọn ra có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn, trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10

Suy ra $|\Omega_A|=C_{15}^{5}.C_{12}^{4}.C_{3}^{1}$

Vậy $P(A)=\dfrac{C_{15}^{5}.C_{12}^{4}.C_{3}^{1}}{C_{30}^{10}}=\dfrac{99}{667}$

Câu 12: Đáp án A.

Ta có không gian mẫu là $|\Omega|=C_{40}^{4}$

Gọi A: "Trong 4 em được chọn có ít nhất 2 em thuộc nhóm máu A"

✓ TH1: 2 em nhóm máu A, 1 em nhóm máu B, 1 em nhóm máu O

$\Rightarrow$ có $C_{20}^{2}.C_{10}^{1}.C_{10}^{1}$ cách chọn

✓ TH2: 2 em nhóm máu A, 2 em nhóm máu B, 0 em nhóm máu O

$\Rightarrow$ có $C_{20}^2.C_{10}^2.C_{10}^0$ cách chọn

✓ TH3: 2 em nhóm máu A, 0 em nhóm máu B, 2 em nhóm máu O

$\Rightarrow$ có $C_{20}^2.C_{10}^0.C_{10}^2$ cách chọn

✓ TH4: 3 em nhóm máu A, 1 em nhóm máu B, 0 em nhóm máu O

$\Rightarrow$ có $C_{20}^3.C_{10}^1.C_{10}^0$ cách chọn

✓ TH5: 3 em nhóm máu A, 0 em nhóm máu B, 1 em nhóm máu O

$\Rightarrow$ có $C_{20}^3.C_{10}^0.C_{10}^1$ cách chọn

✓ TH6: 4 em nhóm máu A, 0 em nhóm máu B, 0 em nhóm máu O

$\Rightarrow$ có $C_{20}^4.C_{10}^0.C_{10}^0$ cách chọn

$$\Rightarrow |\Omega_A| = 63745 \Leftrightarrow P_A = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{63745}{C_{40}^4} = \frac{671}{962}.$$

Câu 13: Đáp án C.

➢ **Lời giải:** Gọi A là biến cố " Số chọn được là số có 4 chữ số đôi một khác nhau và tổng các chữ số là một số lẻ". Số các số có 4 chữ số đôi một khác nhau lập từ 7 chữ số đã cho là $A_7^4 = 840$ (số), suy ra $|\Omega| = 840$.

Gọi số 4 chữ số đôi một khác nhau và tổng các chữ số là một số lẻ có dạng $\overline{abcd}$. Do tổng $a+b+c+d$ là số lẻ nên số chữ số lẻ là lẻ.

✓ Trường hợp 1: có 1 chữ số lẻ, 3 chữ số chẵn: có $C_4^1.C_3^3 = 4$ bộ số.

✓ Trường hợp 2: có 3 chữ số lẻ, 1 chữ số chẵn: có $C_4^3.C_3^1 = 12$ bộ số.

Từ mỗi bộ số trên ta lập được $P_4 = 24$ số

Tất cả có $16.24 = 384$ số, suy ra: $|\Omega_A| = 384$

Vậy $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{384}{840} = \frac{16}{35}$

Câu 14: Đáp án A.

➢ **Lời giải:** Gọi X là biến cố "Hai đội 12A6 và 10A3 ở cùng một bảng"

Số cách chia 12 đội thành hai bảng, mỗi bảng có 6 đội là: $n(\Omega) = C_{12}^6 C_6^6 = 924$

Số cách chia 12 đội thành hai bảng, mỗi bảng có 6 đội, hai đội 12A6 và 10A3 ở cùng một bảng là:

- Hai đội cùng bảng A hoặc B: có 2 cách
- Chọn 4 đội còn lại vào cùng với bảng của hai đội: có C_{10}^4 cách
- Chọn 6 đội còn lại cho bảng còn lại: có $C_6^6 = 1$ cách

Suy ra $n(X) = 2.C_{10}^4 = 420$ cách

Xác suất xảy ra biến cố X là: $P(X) = \frac{420}{924} = \frac{5}{11}$

Câu 15: Đáp án D.

➤ **Lời giải:** Phép thử T: "Chọn ngẫu nhiên từ tập X ba số tự nhiên".

$\Rightarrow$ Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{10}^3 = 120$

Gọi A là biến cố "Chọn được ba số tự nhiên có tích là một số chẵn".

$\Rightarrow \overline{A}$ là biến cố "Chọn được ba số tự nhiên có tích là một số lẻ"

Chọn được 3 số tự nhiên lẻ có C_6^3 cách.

$\Rightarrow n(\overline{A}) = C_6^3 = 20$

Do đó: $P(\overline{A}) = \dfrac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \dfrac{20}{120} = \dfrac{1}{6}$

Vậy $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$

Câu 16: Đáp án C.

➤ **Lời giải:**

- Lý luận và chỉ ra được số phần tử của không gian mẫu: $|\Omega| = C_{12}^3 = 220$
- Gọi A là biến cố 3 hộp sữa lấy được có ít nhất 2 hộp sữa cam

  Lý luận cách chọn đúng và $\Rightarrow |\Omega_A| = C_5^2.C_7^1 + C_5^3 = 80$
- Suy ra xác suất cần tìm là $\dfrac{4}{11}$

Câu 17: Đáp án A.

➤ **Lời giải:** Gọi phép thử T: "Chia 9 học sinh thành 3 nhóm"

- Chọn 3 học sinh từ 9 học sinh cho nhóm một: có C_9^3 cách
- Chọn 3 học sinh từ 6 học sinh cho nhóm hai: có C_6^3 cách
- Chọn 3 học sinh còn lại cho nhóm ba: có C_3^3 cách

  Do không quan tâm đến thứ tự của các nhóm

  $\Rightarrow$ Số phần tử của không gian mẫu là: $|\Omega| = \left(C_9^3 C_6^3 C_3^3\right) : 3! = 280$

  Gọi A là biến cố: "Mỗi nhóm có đúng 1 học sinh nữ"
- Chia 6 học sinh nam thành 3 nhóm: tương tự trên có $\left(C_6^2.C_4^2.C_2^2\right) : 3!$ cách
- Xếp 3 học sinh nữ vào 3 nhóm: có 3! cách

  $\Rightarrow$ Số phần tử của biến cố A là: $|A| = C_6^2.C_4^2.C_2^2 = 90$

  Vậy: $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{9}{28}$

Câu 18: Đáp án B.

➤ **Lời giải:** Không gian mẫu: $|\Omega| = C_{40}^4$

Gọi A là biến cố cần tính xác suất ta có $\overline{A}$ là biến cố cả 4 bạn được chọn đều là nữ sinh nên $|\Omega_A| = C_{15}^4 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{C_{15}^4}{C_{40}^4} = \frac{1385}{1406}$

Câu 19: Đáp án C.

➤ **Lời giải:** Không gian mẫu $n(\Omega) = C_{10}^5 = 252$

Gọi A là biến cố 5 học sinh được chọn có cả nam và nữ đồng thời số học sinh nam ít hơn học sinh nữ.

✓ **Trường hợp 1:** Chọn 1 học sinh nam và 4 học sinh nữ nên ta có $C_4^1.C_6^4$

✓ **Trường hợp 2:** Chọn 2 học sinh nam và 3 học sinh nữ nên ta có $C_4^2.C_6^3$

Suy ra $n(A) = C_4^1.C_6^4 + C_4^2.C_6^3 = 180$

Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \frac{5}{7}$

Câu 20: Đáp án B.

➤ **Lời giải:** Chọn 2 thẻ trong 12 thẻ nên số phần tử của KGM là: $C_{12}^2 = 66$

Số cách chọn 2 thẻ đều là số lẻ: $C_6^2 = 15$

Số cách chọn 2 thẻ mà trong đó phải có thẻ đánh số chẵn là: $C_{12}^2 - C_6^2 = 51$

Xác suất cần tìm là: $\frac{51}{66}$

Câu 21: Đáp án C.

➤ **Lời giải:** Gọi Ω là không gian mẫu ta có $n(\Omega) = n(n-1)$

Gọi A là biến cố "Chi ăn được hai chiếc kẹo màu cam" $n(A) = 6.5 = 30$

Xác suất để Chi ăn được hai chiếc kẹo màu cam là 1/3 suy ra

$$\frac{30}{n(n-1)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow n(n-1) = 90 \Leftrightarrow n^2 - n - 90 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} n = -9 & (\text{loại}) \\ n = 10 & (\text{thỏa mãn}) \end{array}\right.$$

Câu 22: Đáp án C.

➤ **Lời giải:** Số cách chọn ngẫu nhiên 5 đội trong 12 đội là $C_{12}^5 = 792 \Rightarrow n(\Omega) = 792$

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A: "Mỗi Bộ có ít nhất một đội bảo vệ" là:

$$n(A) = C_{12}^5 - C_5^5 - C_7^5 = 770 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{35}{36}$$

Câu 23: Đáp án C.

➤ **Lời giải:** Số phần tử của của không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{15}^2 C_{12}^2$

Gọi A là biến cố: "Các giáo viên được chọn có 2 nam và 2 nữ"

$$n(A) = C_8^2 C_7^2 + C_5^2 C_7^2 + C_8^1 C_7^1 C_7^1 C_5^1$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{197}{495}$$

Câu 24: Đáp án A.

Không gian mẫu là $|\Omega| = C_{12}^4.C_8^4.C_4^4$

Không gian biến cố là $|\Omega_A| = C_9^3.C_6^3.C_3^3$

Do đó xác suất là $P_A = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{C_9^3.C_6^3.C_3^3}{C_{12}^4.C_8^4.C_4^4} = \dfrac{8}{165}$.

Câu 25: Đáp án A.

➢ **Lời giải:** Số cách lấy 4 viên bi bất kỳ là $C_{14}^4 = 1001$

Ta đếm số cách lấy 4 viên bi có đủ cả màu

+ TH1: 1Đ, 1T, 2V có $C_2^1.C_5^1.C_7^2$

+ TH2: 1Đ, 2T, 1V có $C_2^1.C_5^2.C_7^1$

+ TH3: 2Đ, 1T, 1V có $C_2^2.C_5^1.C_7^1$

Vậy số cách lấy 4 viên bi có đủ 3 màu là $C_2^1.C_5^1.C_7^2 + C_2^1.C_5^2.C_7^1 + C_2^2.C_5^1.C_7^1 = 385$ cách

Xác suất lấy 4 viên bi không đủ 3 màu là $P = \dfrac{1001-385}{1001} = \dfrac{616}{1001} = \dfrac{8}{13}$

Câu 26: Đáp án C.

➢ **Lời giải:**

Gọi Ω là không gian mẫu của phép lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ 9 viên bi suy ra $n(\Omega) = C_9^3 = 84$

Gọi A là biến cố lấy được ít nhất 2 viên bi xanh.

✓ Trường hợp 1: Trong 3 viên bi lấy được có 2 viên bi xanh, 1 viên bi đỏ, có $C_5^2.C_4^1 = 40$ cách

✓ Trường hợp 2: Ba viên bi lấy ra toàn màu xanh, có $C_5^3 = 10$ cách

Suy ra $n(A) = C_5^2.C_4^1 + C_5^3 = 50$. Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{50}{84} = \dfrac{25}{42}$

Câu 27: Đáp án C.

➢ **Lời giải:** Số phần tử của A là $6.A_6^3 = 720$

Số cách chọn một số có hàng đơn vị là số 0 có $1.A_6^3 = 120$

Số cách chọn một số có hàng đơn vị là số 5 có $1.5.A_5^2 = 100$

Suy ra số cách chọn một số chia hết cho 5 là $120 + 100 = 220$

Vậy xác suất cần tìm bằng $\dfrac{220}{720} = \dfrac{11}{36}$

Câu 28: Đáp án D.

➢ **Lời giải:** Số cách chọn 5 em học sinh từ 8 học sinh trên là $C_8^5 = 56$ cách

- Để chọn 5 em thỏa mãn bài ra, ta xét các trường hợp sau

\+ 1 nam khối 11, 1 nữ khối 12 và 3 nam khối 12 có: $C_2^1C_2^1C_4^3$ cách

\+ 1 nam khối 11, 2 nữ khối 12 và 2 nam khối 12 có: $C_2^1C_2^2C_4^2$ cách

\+ 2 nam khối 11, 1 nữ khối 12 và 2 nam khối 12 có: $C_2^2C_2^1C_4^2$ cách

\+ 2 nam khối 11, 2 nữ khối 12 và 1 nam khối 12 có: $C_2^2C_2^2C_4^1$ cách

Số cách chọn 5 em thỏa mãn bài ra là: $C_2^1C_2^1C_4^3+C_2^1C_2^2C_4^2+C_2^2C_2^1C_4^2+C_2^2C_2^2C_4^1=44$ cách

\- Vậy xác suất cần tính là: $\dfrac{44}{56}=\dfrac{11}{14}$

Câu 29: Đáp án A.

➢ **Lời giải:** Không gian mẫu của việc tạo đề thi là: $|\Omega|=C_{40}^7=18643560$

Gọi A là biến cố chọn được đề thi có đủ 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 4.

$|\Omega_A|=C_{20}^4.C_5^2.C_{15}^1+C_{20}^4.C_5^1.C_{15}^2+C_{20}^5.C_5^1.C_{15}^1=4433175$

Xác suất cần tìm là: $P(A)=\dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\dfrac{915}{3848}$

Câu 30: Đáp án C.

➢ Lời giải: Gọi A là biến cố lập được số tự nhiên chia hết cho 5, có 5 chữ số khác nhau.

* Số các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau: $A_8^5-A_7^4=5880$ số

* Số các số tự nhiên chia hết cho 5 có 5 chữ số khác nhau: $A_7^4+6.A_6^3=1560$ số

$\Rightarrow P(A)=\dfrac{1560}{5880}=\dfrac{13}{49}$

Câu 31: Đáp án B.

➢ **Lời giải:** Có tất cả 5.5.5.5=625 cách $\Rightarrow n(\Omega)=625$

Gọi A là biến cố "có cả HS nam và nữ đi dự đại hội"

$\Rightarrow \overline{A}$ là biến cố "Cả bốn HS nam hoặc cả 4 HS nữ đi dự ĐH"

$\Rightarrow n(\overline{A})=4.1.2.3+1.4.3.2=48\Rightarrow P(\overline{A})=\dfrac{n(\overline{A})}{n(\Omega)}=\dfrac{48}{625}$

Vậy $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\dfrac{48}{625}=\dfrac{577}{625}$

Câu 32: Đáp án C.

➢ **Lời giải:** Số cách chọn 3 đỉnh bất kì $C_{13}^2=220$

Để 3 đỉnh được chọn tạo thành một tam giác đều thì các đỉnh đó phải nằm ở các vị trí cách đều nhau, nên số cách chọn ra được một tam giác đều là $\dfrac{12}{3}=4$

Vậy xác suất cần tính $P=\dfrac{4}{220}=\dfrac{1}{55}$

Câu 33: Đáp án C.

➢ **Lời giải:** Số cách chọn 5 bạn bất kì là: $C_{12}^{5}=729$. Để chọn được 5 bạn thỏa mãn yêu cầu bài toán, ta có hai khả năng sau:

- TH1: Chọn 4 bạn nam và 1 bạn nữ, có $C_5^4.C_7^1=35$ cách chọn.
- TH2: Chọn 3 bạn nam và 2 bạn nữ, có $C_5^3.C_7^2=210$ cách chọn.

Vậy xác suất cần tìm là: $P=\dfrac{35+210}{792}=\dfrac{245}{792}$

Câu 34: Đáp án D.

➢ **Lời giải:** Không gian mẫu là số cách dán 5 tem thư lên 5 bì thư có 5! cách

Suy ra $n(\Omega)=5!$

*) Gọi A là biến cố có ít nhất một bì thư được dán trùng số với tem thư.

Các trường hợp thuận lợi cho biến cố A xảy ra là:

- TH1: 1 bì thư được dán trùng số với tem thư có: $C_5^1.3.3.1.1=45$
- TH2: 2 bì thư được dán trùng số với tem thư có: $C_5^2.2.1.1=20$
- TH3: 3 bì thư được dán trùng số với tem thư có: $C_5^3.1.1=10$
- TH4: 4 bì thư được dán trùng số với tem thư không xảy ra.
- TH5: 4 bì thư được dán trùng số với tem thư có: $C_5^5=1$

Suy ra $n(A)=45+20+10+1=76$

Vậy xuất xuất cần tính $P(A)=\dfrac{76}{5!}=\dfrac{19}{30}$

Câu 35: Đáp án A.

➢ **Lời giải:** Không gian mẫu $|\Omega|=C_9^2.C_{10}^2=1620$

Gọi A: "4 viên bi lấy ra trong hai hộp thỏa mãn có ít nhất 3 viên bi đỏ"

Vì trong 4 viên bi lấy ra thì có ít nhất 3 viên bi đỏ nên ta có các trường hợp sau:

- TH1: 4 viên bi có 3 viên bi đỏ và 1 viên bi trắng:

* Số cách lấy ra 2 viên bi đỏ ở hộp thứ nhất và 1 viên bi đỏ ở hộp thứ hai:
$C_5^2.C_4^1.C_6^1=240$ cách

* Số cách lấy ra 1 viên bi đỏ ở hộp thứ nhất và 2 viên bi đỏ ở hộp thứ hai:
$C_5^1.C_4^1.C_4^2=120$ cách

Số cách lấy ra 4 viên bi trong hai hộp có 3 viên bi đỏ là 240+120=360.

- TH2: Số cách lấy ra 4 viên bi đỏ trong hai hộp là $C_5^2.C_4^2=60$

Vậy số cách lấy ra 4 viên bi trong hai hộp từ hai hộp có ít nhất 3 viên bi đỏ là: 420 cách.

$\Rightarrow|\Omega_A|=420$

Vậy xác suất thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $P=\dfrac{420}{1620}=\dfrac{7}{27}$

Câu 36: Đáp án D.

➢ **Lời giải:** Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{20}^3$

Gọi A là biến cố "Chọn được ba quả cầu trong đó có ít nhất một quả cầu màu xanh"

Thì $\overline{A}$ là biến cố "Chọn được ba quả cầu màu đỏ" $\Rightarrow n(\overline{A}) = C_{12}^3 \Rightarrow P(\overline{A}) = \frac{C_{12}^3}{C_{20}^3}$

Vậy xác suất của biến cố A là $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{C_{12}^3}{C_{20}^3} = \frac{46}{57}$

Câu 37: Đáp án B.

➢ **Lời giải:** Không gian mẫu có số phần tử là C_{12}^4

Số cách chọn được 4 quả cầu đủ cả 3 màu là: $C_6^2.C_4^1.C_2^1 + C_6^1.C_4^2.C_2^1 + C_6^1.C_4^1.C_2^2$.

Xác suất cần tìm: $P = \frac{C_6^2.C_4^1.C_2^1 + C_6^1.C_4^2.C_2^1 + C_6^1.C_4^1.C_2^2}{C_{12}^4} = \frac{24}{55}$

Câu 38: Đáp án A.

➢ **Lời giải:** Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{20}^5$

Gọi A là biến cố "Chọn được 5 thành viên, sao cho mỗi câu lạc bộ có ít nhất 1 thành viên"

Số kết quả thuận lợi cho $\overline{A}$ là $C_{10}^5 + C_{10}^5 = 504$

Xác suất của biến cố A là $P(A) = 1 - \frac{504}{C_{20}^5} = \frac{625}{646}$

Câu 39: Đáp án D.

➢ **Lời giải:** Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử: "Chọn ngẫu nhiên một số từ tập X".

Khi đó: $|\Omega| = A_9^6 = 60480$

Gọi A là biến cố: "Số được chọn chỉ chứa 3 chữ số lẻ". Khi đó:

\+ Chọn 3 chữ số lẻ đôi một khác nhau từ các chữ số 1 3 5 7 9 có: C_5^3 cách

\+ Chọn 3 chữ số chẵn đôi một khác nhau từ các chữ số 2 4 6 8 có: C_4^3 cách

\+ Sắp xếp các chữ số trên để được số thỏa mãn biến cố A có: 6! cách.

Do đó $|\Omega_A| = C_5^3.C_4^3.6! = 28800$

Vậy xác suất cần tìm là: $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{28800}{60480} = \frac{10}{21}$

Câu 40: Đáp án A.

➢ **Lời giải:** Không gian mẫu là tập hợp các cách xếp 6 học sinh ngồi vào 6 ghế hàng ngang. Số phần tử của không gian mẫu là: $|\Omega| = 6!$

Gọi A là biến cố "Ba bạn nữ ngồi cạnh nhau"

Ta coi ba bạn nữ ngồi cạnh nhau là một phần tử x. Số cách chọn phần tử x là 3!.

Việc xếp 6 bạn học sinh thành hàng ngang sao cho ba bạn nữ ngồi cạnh nhau trở thành việc xếp thứ tự 4 phần tử (3 bạn nam và phần tử x). Số cách xếp là 4!.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là: $|\Omega_A| = 3!.4!$

Xác suất của biến cố A là: $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{3!.4!}{6!} = \frac{1}{5}$

Câu 41: Đáp án C.

➢ **Lời giải:** Số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = C_{40}^3$

Gọi A là biến cố "3 học sinh được chọn luôn có học sinh chọn môn Vật lý và học sinh chọn môn Hóa học"

Số phần tử của biến cố A là: $n_A = C_{10}^1.C_{20}^2 + C_{10}^2.C_{20}^1 + C_{20}^1.C_{10}^1.C_{10}^1$

Vậy xác suất để xảy ra biến cố A là $P_A = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{120}{247}$

Câu 42: Đáp án C.

➢ **Lời giải:** Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = C_{50}^3 = 19600$

Số kết quả thuận lợi cho biến cố "Trong 3 người được lấy ra, mỗi người thuộc 1 loại" là $C_{30}^1.C_{15}^1.C_5^1 = 2250$. $P = \frac{2250}{19600} = \frac{45}{392}$. Xác suất cần tính là $P = \frac{2250}{19600} = \frac{45}{392}$

Câu 43: Đáp án B.

Lời giải:

Lập được 24 + 36 = 60 số

Xác suất chọn được số chẵn là: $P = \frac{60}{96} = \frac{5}{8}$

Câu 44: Đáp án B.

➢ **Lời giải:** Gọi A: "Trong đội bay đó có ít nhất 4 chiến đấu cơ của Mỹ"

$\Rightarrow \overline{A}$: "Trong đội bay đó số chiến cơ của Mỹ ít hơn 4 chiến cơ"

Ta có: $|\Omega| = C_{25}^6$

+ Trường hợp 1: Không có chiến cơ nào của Mỹ$\Rightarrow$ có $C_{15}^0.C_{10}^6$ cách chọn

+ Trường hợp 2: Có 1 chiến cơ của Mỹ$\Rightarrow$ có $C_{15}^1.C_{10}^5$ cách chọn

+ Trường hợp 3: Có 2 chiến cơ của Mỹ$\Rightarrow$ có $C_{15}^2.C_{10}^4$ cách chọn

+ Trường hợp 3: Có 3 chiến cơ của Mỹ$\Rightarrow$ có $C_{15}^3.C_{10}^3$ cách chọn

$\Rightarrow |\Omega_{\overline{A}}| = C_{15}^0.C_{10}^6 + C_{15}^1.C_{10}^5 + C_{15}^2.C_{10}^4 + C_{15}^3.C_{10}^3$

$\Rightarrow P_{\overline{A}} = \frac{C_{15}^0.C_{10}^6 + C_{15}^1.C_{10}^5 + C_{15}^2.C_{10}^4 + C_{15}^3.C_{10}^3}{C_{25}^6}$

Câu 45: Đáp án B.

➢ **Lời giải:**

Số phần tử của không gian mẫu là: $|\Omega| = C_8^4 = 70$

Gọi A là biến cố: "Cả hai bạn Việt và Nam nằm chung một bảng đấu".

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là: $|\Omega_A| = C_2^1 C_6^2 = 30$

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}$

Câu 46: Đáp án C.

➢ **Lời giải:** Gọi M là biến cố: "Việt Nam và Thái Lan ở cùng một bảng".

Số biến cố đồng khả năng: Số cách chia 10 đội bóng thành 2 bảng đều nhau

$n(\Omega) = C_{10}^5 . C_5^5 = 252$

Xét số cách chia mà Việt Nam và Thái Lan ở cùng một bảng:

+ Chọn bảng (A hoặc B): có 2 cách.
+ Chọn nốt 3 đội còn lại: có C_8^3 cách
+ Chọn 5 đội của bảng kia: có C_5^5 cách

$\Rightarrow n(M) = 2.C_8^3.C_5^5 = 112$. Suy ra: xác suất của biến cố M: $p(M) = \frac{n(M)}{n(\Omega)} = \frac{112}{252} = \frac{4}{9}$

Câu 47: Đáp án C.

➢ **Lời giải:** Không gian mẫu là số cách ghi ngẫu nhiên 1 dãy số có 5 chữ số được lập từ 10 số (0,1,...,9) $\Rightarrow |\Omega| = 10^5$

Gọi A là biến cố: "Dãy số được ghi lập thành một số tự nhiên khác 0 chia hết cho 9 và là số chẵn"

Xét cấp số cộng $u_1 = 18, u_n = 99990$ có số hạng tổng quát $u_n = 18 + (n-1)18$

$\Rightarrow n = 5555 \Rightarrow |\Omega_A| = 5555$. Xác suất là $P = \frac{5555}{10^5} = 0,05555$

Câu 48: Đáp án B.

➢ **Lời giải:** Chọn 5 học sinh trong 80 bạn có: C_{80}^5 cách chọn.

Chọn 4 bạn học sinh có STT nhỏ hơn 69 ta có: C_{68}^4 cách chọn.

Chọn 1 bạn có STT lớn hơn 69 (từ 70 đến 80) có: C_{11}^1 cách chọn.

Vậy xác suất cần tìm của bài toán là: $P = \frac{C_{68}^4 . C_{11}^1}{C_{80}^5} = \frac{8958235}{24040016}$ là giá trị cần tìm.

Câu 49: Đáp án D.

➢ **Lời giải:** Gọi A: "3 học sinh được chọn có cả nam và nữ".

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{11}^3 = 165$

✓ TH1: 3 học sinh được chọn có 1 nam và 2 nữ, có $C_5^1.C_6^2 = 75$

✓ TH2: 3 học sinh được chọn có 2 nam và 1 nữ, có $C_5^2.C_6^1 = 60$

Số phần tử của A: $n(A) = 75 + 60 = 135$

Vậy $P(A) = \frac{135}{165} = \frac{9}{11}$

Câu 50: Đáp án C.

➢ **Lời giải:** Không gian mẫu Ω là tập hợp gồm tất cả các cặp hai bộ 3 câu hỏi, mà ở vị trí thứ nhất của cặp là bộ 3 câu hỏi thí sinh A chọn và ở vị trí thứ hai của cặp là bộ 3 câu hỏi thí sinh B chọn.

Vì A cũng như B đều có C_{10}^3 cách chọn 3 câu hỏi từ 10 câu hỏi thi nên theo quy tắc nhân, ta có $n(\Omega)=\left(C_{10}^3\right)^2$

Kí hiệu X là biến cố "Bộ 3 câu hỏi A chọn và bộ 3 câu hỏi B chọn là giống nhau".

Vì với mỗi cách chọn 3 câu hỏi của A, B chỉ có duy nhất cách chọn 3 câu hỏi giống như A nên $n(\Omega_x)=C_{10}^3.1=C_{10}^3$

Vì vậy $P(X)=\dfrac{n(\Omega_x)}{n(\Omega)^2}=\dfrac{C_{10}^3}{\left(C_{10}^3\right)^2}=\dfrac{1}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{120}$

Câu 51: Đáp án D.

➢ **Lời giải:** Gọi A là biến cố: "4 HS được chọn có đủ HS giỏi, HS khá và HS trung bình".

Số phần tử không gian mẫu: $|\Omega|=C_{33}^4=40920$

Ta có các trường hợp được chọn sau:

(1) Có 2 HS giỏi, 1 HS khá và 1 HS trung bình. Số cách chọn là: $C_{10}^2.C_{11}^1.C_{12}^1=5940$

(2) Có 1 HS giỏi, 2 HS khá và 1 HS trung bình. Số cách chọn là: $C_{10}^1.C_{11}^2.C_{12}^1=6600$

(3) Có 1 HS giỏi, 1 HS khá và 2 HS trung bình. Số cách chọn là: $C_{10}^1.C_{11}^1.C_{12}^2=7260$

Ta được: $|\Omega_A|=5940+6600+7260=19800$

Do đó $P(A)=\dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\dfrac{15}{31}$

Câu 52: Đáp án A.

➢ **Lời giải:** Chọn ngẫu nhiên 7 bông hoa từ ba bó hoa có C_{21}^7

Chọn 7 bông hoa trong đó số bông hoa hồng bằng số bông hoa ly xảy ra các TH sau:

✓ TH1: Chọn 7 bông hoa trong đó có 1 bông hoa hồng, 1 bông hoa ly và 5 bông hoa huệ có $C_8^1C_7^1C_6^5$ cách.

✓ TH2: Chọn 7 bông hoa trong đó có 2 bông hoa hồng, 2 bông hoa ly và 3 bông hoa huệ có $C_8^2C_7^2C_6^3$ cách.

✓ TH3: Chọn 7 bông hoa trong đó có 3 bông hoa hồng, 3 bông hoa ly và 1 bông hoa huệ có $C_8^3C_7^3C_6^1$ cách.

Từ các TH trên ta có $C_8^1C_7^1C_6^5+C_8^2C_7^2C_6^3+C_8^3C_7^3C_6^1=23856$ cách chọn 7 bông hoa trong đó số bông hoa hồng bằng số bông hoa ly.

Xác suất cần tính là: $P=\dfrac{23856}{19380}\approx 0.2052$

Câu 53: Đáp án C.

➢ **Lời giải:** Gọi X là biến cố:"Chia 20 bạn thành 4 nhóm A, B, C, D, mỗi nhóm 5 bạn sao cho 5 bạn nữ thuộc cùng một nhóm.

Ta có $|\Omega| = C_{20}^5 C_{15}^5 C_{10}^5 C_5^5$ cách chia 20 bạn thành 4 nhóm A, B, C, D.

Xét 5 bạn nữ thuộc nhóm A, có $C_{15}^5 C_{10}^5 C_5^5$ cách chia các bạn nam vào 3 nhóm còn lại.

Do vai trò các nhóm như nhau, có $4C_{15}^5 C_{10}^5 C_5^5$ cách chia các bạn vào các nhóm A, B, C, D trong đó 5 bạn nữ thuộc một nhóm.

Xác suất cần tìm là: $P(X) = \dfrac{4C_{15}^5 C_{10}^5 C_5^5}{C_{20}^5} = \dfrac{1}{3876}$.

Câu 54: Đáp án D.

➢ **Lời giải:** Không gian mẫu Ω là tập hợp tất cả các cách chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh trong 12 đỉnh

Ta có: $n(\Omega) = C_{12}^4 = 495$

Gọi A là biến cố: "4 đỉnh được chọn tạo thành một hình chữ nhật"

Gọi đường chéo của đa giác đều đi qua tâm đường tròn (O) là đường chéo lớn thì đa giác đã cho có 6 đường chéo lớn. Ngược lại, mỗi cặp đường chéo lớn có các đầu mút là 4 đỉnh của một hình chữ nhật.

Do đó số hình chữ nhật được tạo thành là: $n(A) = C_6^2 = 15$

Vậy xác suất cần tính là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{15}{495} = \dfrac{1}{33}$

Câu 55: Đáp án C.

➢ **Lời giải:** Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh trong 35 học sinh của lớp, có $|\Omega| = C_{35}^5$ (cách).

Gọi A là biến cố: "Chọn được 5 học sinh trong đó có ít nhất một em nữ"

Suy ra $\overline{A}$ là biến cố: "Chọn được 5 học sinh trong đó không có em nữ nào"

Ta có số kết quả thuận lợi cho $\overline{A}$ là C_{20}^5

$$P(\overline{A}) = \frac{C_{20}^5}{C_{35}^5} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{C_{20}^5}{C_{35}^5} = \frac{2273}{2387} \approx 0.95224$$

Câu 56: Đáp án B.

➢ **Trả lời:** Gọi A là biến cố "3 học sinh nữ đứng cạnh nhau"

+ Số biến cố đồng khả năng: Xếp 7 học sinh ngẫu nhiên, có số hoán vị là 7!

+ Số cách xếp có 3 học sinh nữ cạnh nhau:

Coi 3 học sinh nữ là 1 phần tử, kết hợp 4 học sinh nam suy ra có 5 phần tử, có 5! cách sắp xếp.

Với mỗi cách sắp xếp đó lại có 3! cách hoán vị 3 học sinh nữ. Vậy có 5!.3! cách sắp xếp.

+ Xác suất của biến cố A là: $P(A) = \dfrac{5!.3!}{7!} = \dfrac{1}{7}$ $(P \approx 0,14)$

(Cách 2: 7 vị trí. Xếp 3 nữ cạnh nhau có 5 cách: (123)…(567) Mỗi cách xếp lại có 3! cách hoán vị nữ. Có 4! cách hoán vị 4 nam. Vậy P(A) = 5.3!.4!/7!=1/7).

Câu 57: Đáp án C.

➢ **Lời giải:** Lấy ngẫu nhiên 4 câu hỏi từ ngân hàng đề để lập một đề thi, có $C_{15}^4 = 1365$ đề thi

Bạn Thủy rút ngẫu nhiên được một đề có 2 câu đã thuộc, có $C_8^2.C_7^2 = 588$

Bạn Thủy rút ngẫu nhiên được một đề có 3 câu đã thuộc, có $C_8^3.C_7^1 = 392$

Bạn Thủy rút ngẫu nhiên được một đề có 4 câu đã thuộc, có $C_8^4 = 70$

Vậy xác suất cần tìm là: $P = \dfrac{588+392+70}{1365} = \dfrac{10}{13}$

Câu 58: Đáp án B.

➢ **Lời giải:** Số phần tử của không gian mẫu (số kết quả có thể xảy ra): C_9^3

Số cách chọn ba viên bi có đủ ba màu: 4.3.2 = 24. Do đó xác suất cần tính là $P = \dfrac{24}{84} = \dfrac{2}{7}$

Câu 59: Đáp án D.

➢ **Trả lời:** Mỗi cách chọn nhóm 5 học sinh từ 12 học sinh là một tổ hợp chập 5 của 12. Vì vậy không gian mẫu Ω gồm: $C_{12}^5 = 792$ phần tử

Gọi A là biến cố cần tìm xác suất, B là biến cố chọn được nhóm gồm 3 học sinh nam, 2 học sinh nữ trong đó có bạn An và không có bạn Hoa. C là biến cố chọn được nhóm gồm 3 học sinh nam, 2 học sinh nữ trong đó có bạn Hoa và không có bạn An.

Như vậy, $A = B \cup C$ và $n(A) = n(B) + n(C)$

Tính n(B):

+ Chọn bạn An, có 1 cách.

+ Chọn 2 bạn nam từ 6 bạn nam còn lại, có C_6^2 cách

+ Chọn 2 bạn nữ từ 4 bạn nữ, có C_4^2 cách

Theo quy tắc nhân: $n(B) = 1.C_6^2.C_4^2 = 90$

Tương tự, $n(C) = 1.C_6^3.C_4^1 = 80$. Vậy $n(A) = 90 + 80 = 170$

Xác suất của biến cố A là: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{85}{396}$

Câu 60: Đáp án A.

➢ **Lời giải:** Tổng số viên bi trong hộp là 24. Gọi Ω là không gian mẫu.

Lấy ngẫu nhiên 4 viên trong hộp ta có C_{24}^4 cách lấy hay $n(\Omega) = C_{24}^4$

Gọi A là biến cố lấy được các viên bi có đủ cả 3 màu. Ta có các trường hợp sau:

+) 2 bi đỏ, 1 bi vàng và 1 bi xanh: có $C_{10}^2.C_8^1.C_6^1 = 2160$ cách

+) 1 bi đỏ, 2 bi vàng và 1 bi xanh: có $C_{10}^1.C_8^2.C_6^1 = 1680$ cách

+) 1 bi đỏ, 1 bi vàng và 2 bi xanh: có $C_{10}^1.C_8^1.C_6^2 = 1200$ cách

Do đó, $n(A)=5040$

Vậy, xác suất biến cố A là $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{5040}{10626}\approx 0,474$

Câu 61: Đáp án C.

➢ **Lời giải:** $n(\Omega)=C_{18}^{3}$

Số cách chọn 3 học sinh có cả nam và nữ là $C_8^2.C_{10}^1+C_8^1.C_{10}^2$

Do đó xác suất để 3 học sinh được chọn có cả nam và nữ là $\dfrac{C_8^2.C_{10}^1+C_8^1.C_{10}^2}{C_{18}^3}=\dfrac{40}{51}$.

Câu 62: Đáp án D.

➢ **Lời giải:** Gọi A là biến cố "Ba viên bi lấy được chỉ có hai màu"

Ta có: Số phần tử của không gian mẫu: $C_{13}^{6}=560$

Số cách chọn được ba viên bi chỉ có một màu: $C_4^3+C_5^3+C_7^3=49$

Số cách chọn được ba viên bi có đủ ba màu: $C_4^1C_5^1C_7^1=140$

Vậy xác suất cần tìm là: $P(A)=1-\dfrac{49+140}{560}=\dfrac{53}{80}$

Câu 63: Đáp án D.

➢ **Lời giải:** Chọn ngẫu nhiên mỗi tổ một học sinh: có $C_7^1.C_7^1=49$ cách $\Rightarrow n(\Omega)=49$

Gọi A là biến cố : " Chọn được 2 học sinh có cả nam và nữ". Có các trường hợp sau:

+ TH1: Chọn học 1 sinh nữ ở tổ một, 1 học sinh nam ở tổ hai. Có 4.5 = 20 cách

+ TH2: Chọn học 1 sinh nam ở tổ một, 1 học sinh nữ ở tổ hai. Có 3.2 = 6 cách

Theo quy tắc cộng $\Rightarrow n(A)=26\Rightarrow P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{26}{49}$

Câu 64: Đáp án B.

➢ **Lời giải:** Không gian mẫu có: $|\Omega|=C_9^2=36$

Gọi A là biến cố lấy được hai viên bi cùng màu: $|\Omega_A|=C_4^2+C_5^2=16$

Xác suất của biến cố: $P_A=\dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\dfrac{16}{36}=\dfrac{4}{9}$

Câu 65: Đáp án C.

➢ **Lời giải:** Số cách chọn ngẫu nhiên 4 cái bút trong 11 cái là: $C_{11}^4=330\Rightarrow n(\Omega)=330$

Gọi A là biến cố: " Trong 4 cái bút lấy được có cả bút chì và bút bi".

Tính số cách chọn 4 cái bút không đủ cả hai loại:

- Chọn được 4 cái đều là bút chì có: $C_5^4=5$ cách
- Chọn được 4 cái đều là bút bi có: $C_6^4=15$ cách

$\Rightarrow n(\overline{A})=5+15=20\Rightarrow n(A)=330-20=310$

$\Rightarrow P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{310}{330}=\dfrac{31}{33}$. Vậy $P=\dfrac{31}{33}$

Câu 66: Đáp án B.

➢ **Lời giải:**

* Số phần tử của không gian mẫu là: $C_{20}^4 = 4845$

* Số cách lấy 4 quả bóng trong đó không có 2 quả nào cùng màu là $C_4^1.C_5^1.C_5^1.C_6^1 = 600$

* Số cách lấy 4 quả bóng trong đó có ít nhất 2 quả bóng cùng màu là:
$C_{20}^4 - C_4^1.C_5^1.C_5^1.C_6^1 = 4845 - 600 = 4245$

* Xác suất cần tìm là: $P = \dfrac{4245}{4845} = \dfrac{283}{323}$

Câu 67: Đáp án D.

➢ **Lời giải:** Phép thử T: "Lấy ngẫu nhiên 4 tấm bìa và xếp thành hàng ngang từ trái sang phải" ⇒ số phần tử của không gian mẫu là: $|\Omega| = A_6^4 = 360$

- Gọi A là biến cố "Xếp được một số tự nhiên gồm 4 chữ số"
Giả sử $n = \overline{a_1a_2a_3a_4}$ là số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau
Chọn a_1 có 5 cách
Chọn $\overline{a_2a_3a_4}$ có A_5^3 cách $\Rightarrow |\Omega_A| = 5.A_5^3 = 300$
Vậy xác suất cần tìm: $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{300}{360} = \dfrac{5}{6}$

Câu 68: Đáp án A.

➢ **Lời giải:** Số phần tử của không gian mẫu là: $C_9^3C_6^3C_3^3 = 1680$
Số kết quả thuận lợi cho biến cố "Chia 3 tổ học sinh đều nhau và mỗi tổ có 1 nữ" là:
$3!C_6^2.C_4^2.C_2^2 = 540$. Xác suất cần tính là: $P = \dfrac{540}{1680} = \dfrac{9}{28}$

Câu 69: Đáp án C.

➢ **Lời giải:** Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{15}^4 = 1365$
Gọi A là biến cố "Trong 4 người được chọn có ít nhất 1 nữ"
Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $|\Omega_A| = C_{15}^4 - C_7^4 = 1330$
Vậy xác suất cần tính là $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{1330}{1365} = \dfrac{38}{39}$

Câu 70: Đáp án C.

➢ **Lời giải:**

* Có A_7^4 số có 4 chữ số đôi một khác nhau lấy từ tập A, suy ra không gian mẫu $|\Omega| = 840$

* Gọi số có 4 chữ số, các chữ số đôi một khác nhau là $\overline{abcd}$, với a < 5 suy ra có 4 cách chọn a, chọn b,c,d có A_6^3. Vậy có $4.A_6^3$ số dạng này.
Gọi Mlà"Số lập được có chữ số hàng nghìn bé hơn 5".
Suy ra $|\Omega_M| = 480$

* Xác suất cần tìm: $P = \dfrac{|\Omega_M|}{|\Omega|} = \dfrac{4.A_6^3}{840} = \dfrac{4}{7}$

❖ ***Nhận xét:*** *Có thể giải ngắn gọn như sau: Do vai trò của các số của tập A như nhau, ta có 4 số nhỏ hơn 5 trong 7 số đã cho của tập A, suy ra xác suất cần tìm là* $\frac{4}{7}$.

Câu 71: Đáp án B.

➤ **Lời giải:** Số cách chọn ra 8 người là: $C_{15}^{8}=6435$

Số cách chọn ra 8 người mà số nữ nhiều hơn số nam là: $C_6^5.C_9^3+C_6^6.C_9^2=540$

Xác suất để chọn được 8 người thỏa mãn là: $\frac{540}{6435}=\frac{12}{143}$

Câu 72: Đáp án C.

➤ **Lời giải:**

+) Số cần tìm có dạng $\overline{abc}$

+) $n(S)=A_6^3$

+) B: "Số được chọn có tổng các chữ số bằng 8" $\Rightarrow n(B)=12$

+) Vậy xác suất cần tìm là: $P(B)=\frac{12}{120}=0.1$

Câu 73: Đáp án C.

➤ **Lời giải:** Số phần tử của tập hợp S là 90.

Gọi $\overline{ab}$ là số tự nhiên có hai chữ số mà a, b đều là số chẵn. Ta có:

$a\in\{2;4;6;8\}, b\in\{0;2;4;6;8\}$. Suy ra có $4.5=20$ số $\overline{ab}$

Xác suất để chọn được một số tự nhiên có hàng chục và hàng đơn vị đều là số chẵn là $\frac{20}{90}=\frac{2}{9}$

Câu 74: Đáp án D.

➤ **Lời giải:** Số phần tử của không gian mẫu là: C_{100}^3. Do tổng 3 số được chọn chia hết cho 2 nên ta có các trường hợp sau:

+ Cả 3 số đều chẵn, số cách chọn là: C_{50}^3

+ Trong 3 số có một số chẵn, hai số lẻ số cách chọn là: $C_{50}^1C_{50}^2$

Vậy xác suất tính được là: $\frac{C_{50}^3+C_{50}^1C_{50}^2}{C_{100}^3}=\frac{1}{2}$

Câu 75: Đáp án A.

➤ **Lời giải:** Gọi số có 4 chữ số là $\overline{abcd}$, với $a\neq 0$

Số cách thành lập số có 4 chữ số là: 4.5.5.5= 500.

Theo giả thiết số đằng trước không thể là số 0. Như vậy số có 4 chữ số được thành lập từ 1, 2, 3, 4; mà chữ số đằng trước nhỏ hơn chữ số đằng sau chỉ có 1 cách đó là số 1234

Vậy xác suất cần tìm là $\frac{1}{500}$

Câu 76: Đáp án B.

➤ **Lời giải:** Gọi A là biến cố "4 viên bi được chọn có đủ 3 màu và số bi đỏ nhiều nhất"

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=C_{15}^{4}=1365$

Số kết quả thuận lợi của biến cố A là: $n(A)=C_5^2C_4^1C_6^1=240$

Do đó: $P(A)=\dfrac{240}{1365}=\dfrac{16}{91}$

Câu 77: Đáp án D.

➤ **Lời giải:** Số phần tử của không gian mẫu là $C_9^2=36$

Gọi A là biến cố: "Kết quả nhận được là số chẵn".

Số kết quả thuận lợi cho A là: $C_5^1.C_4^1+C_4^2$. Xác suất cần tìm là $P(A)=\dfrac{26}{36}=\dfrac{13}{18}$

Câu 78: Đáp án B.

➤ **Lời giải:** Gọi T là phép thử: Chọn ngẫu nhiên 4 quả cầu từ hộp

$\Rightarrow$ Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=C_{15}^4=1365$

Gọi A là biến cố: "4 viên bị chọn ra không có đủ cả 3 màu"

Khi đó biến cố $\overline{A}$ là: "4 viên bi chọn ra có đủ cả ba màu"

✓ TH1: 4 viên bi được chọn có 2 bi đỏ, 1 bi trắng và 1 bi vàng $\Rightarrow$ Số cách chọn là $C_4^2.C_5^1.C_6^1$

✓ TH2: 4 viên bi được chọn có 1 bi đỏ, 2 bi trắng và 1 bi vàng $\Rightarrow$ Số cách chọn là $C_4^1.C_5^2.C_6^1$

✓ TH3: 4 viên bi được chọn có 1 bi đỏ, 1 bi trắng và 2 bi vàng $\Rightarrow$ Số cách chọn là $C_4^1.C_5^1.C_6^2$

$\Rightarrow n(\overline{A})=C_4^2.C_5^1.C_6^1+C_4^1.C_5^2.C_6^1+C_4^1.C_5^1.C_6^2=720$

Do đó $P(\overline{A})=\dfrac{n(\overline{A})}{n(\Omega)}=\dfrac{720}{1365}=\dfrac{48}{91}\Rightarrow P(A)=1-P(\overline{A})=\dfrac{43}{91}$

Câu 79: Đáp án C.

➤ **Lời giải:**

* Trường hợp 1: 2 câu dễ, 1 câu trung bình, 2 câu khó. Số cách chọn là: $C_{15}^2.C_{10}^1.C_5^2$
* Trường hợp 2: 2 câu dễ, 2 câu trung bình, 1 câu khó. Số cách chọn là: $C_{15}^2.C_{10}^1.C_5^2$
* Trường hợp 3: 3 câu dễ, 1 câu trung bình, 1 câu khó. Số cách chọn là: $C_{15}^3.C_{10}^1.C_5^1$

Do đó số cách chọn là: $C_{15}^2.C_{10}^1.C_5^2+C_{15}^2.C_{10}^2.C_5^1+C_{15}^3.C_{10}^1.C_5^1=56875$ cách

Câu 80: Đáp án B.

➤ **Lời giải:** - Số cách lấy ngẫu nhiên 3 tấm thẻ trong hộp là: C_{40}^3

- Trong 40 tấm thẻ đó có:

$\dfrac{39-3}{3}+1=13$ tấm thẻ mang số chia hết cho 3

$\dfrac{40-1}{3}+1=14$ tấm thẻ mang số chia 3 dư 1

$\dfrac{38-2}{3}+1=13$ tấm thẻ mang số chia 3 dư 2

- Để tổng 3 số ghi trên 3 tấm thẻ là số chia hết cho 3 thì phải xảy ra các trường hợp sau:

  Cả 3 số đều chia hết cho 3: có C_{13}^3

  Cả 3 số đều chia 3 dư 1: có C_{14}^3

  Cả 3 số đều chia 3 dư 2: có C_{13}^3

  Có 1 số chia hết cho 3, 1 số chia 3 dư 1, 1 số chia 3 dư 2: có $C_{13}^1.C_{14}^1.C_{13}^1$ cách

- Suy ra xác suất cần tính là: $P = \dfrac{C_{13}^3 + C_{14}^3 + C_{13}^3 + C_{13}^1.C_{14}^1.C_{13}^1}{C_{40}^3} = \dfrac{127}{380} \approx 0,33$

Câu 81: Đáp án B.

➢ **Lời giải:** Gọi Ω là không gian mẫu: A là biến cố "2 học sinh được chọn gồm cả nam và nữ".

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{12}^2 = 66$

Số trường hợp thuận lợi cho A là $n(A) = C_5^1.C_7^1 = 35$

Xác suất của biến cố A là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{35}{66} \approx 55,03\%$

Câu 82: Đáp án B.

➢ Lời giải: Không gian mẫu Ω là tập hợp tất cả các cách chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh trong 12 đỉnh

Ta có: $n(\Omega) = C_{14}^4$

Gọi A là biến cố: "4 đỉnh được chọn tạo thành một hình chữ nhật"

Gọi đường chéo của đa giác đều đi qua tâm đường tròn (O) là đường chéo lớn thì đa giác đã cho có 7 đường chéo lớn. Ngược lại, mỗi cặp đường chéo lớn có các đầu mút là 4 đỉnh của một hình chữ nhật.

Do đó số hình chữ nhật được tạo thành là: $n(A) = C_7^2$

Vậy xác suất cần tính là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{C_7^2}{C_{14}^4} = \dfrac{3}{143}$.

Câu 83: Đáp án D.

➢ **Lời giải:** Số phần tử của không gian mẫu (số kết quả có thể xảy ra): C_{12}^3

Số cách chọn ba viên bi có đủ ba màu: $5.4.3 = 60$. Do đó xác suất cần tính là $P = \dfrac{60}{C_{12}^3} = \dfrac{3}{11}$.

Câu 84: Đáp án B.

➢ **Lời giải:** Chọn ngẫu nhiên mỗi tổ một học sinh. Có: $C_9^1.C_{13}^1 = 117$ cách $\Rightarrow n(\Omega) = 117$

Gọi A là biến cố: "Chọn được 2 học sinh có cả nam và nữ". Có các trường hợp sau:

+ TH1: Chọn học 1 sinh nữ ở tổ một, 1 học sinh nam ở tổ hai. Có 4.6 = 24 cách

+ TH2: Chọn học 1 sinh nam ở tổ một, 1 học sinh nữ ở tổ hai. Có 5.7 = 35 cách

Theo quy tắc cộng $\Rightarrow n(A) = 59 \Rightarrow P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{59}{117}$

Phần 8:

BÀI TOÁN BIỆN LUẬN TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ

Câu 1: Giá trị của a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2}, & x<2\\ ax+\dfrac{1}{4} & , x\geqslant 2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$ là:

A. 3 B. 0 C. 1 D. 2

Câu 2: Hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}, & x\neq 3\\ m & , x=3\end{cases}$ liên tục tại $x=3$ khi m có giá trị bằng:

A. 4 B. 1 C. –4 D. –1

Câu 3: Hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}, & x\neq 0\\ 2a-\dfrac{5}{4} & , x=0\end{cases}$ liên tục tại $x=0$ khi:

A. $a=3$ B. $a=\dfrac{3}{4}$ C. $a=2$ D. $a=1$

Câu 4: Hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}, & x\neq 4\\ ax-\dfrac{5}{2} & , x=4\end{cases}$ liên tục tại $x=4$ khi:

A. $a=3$ B. $a=2$ C. $a=0$ D. $a=1$

Câu 5: Hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4}, & x\neq 4\\ a+2 & , x=4\end{cases}$ liên tục tại $x=4$ khi:

A. $a=3$ B. $a=2$ C. $a=-\dfrac{11}{6}$ D. $a=\dfrac{5}{2}$

Câu 6: Giá trị của m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-7x+6}{x-6}, & khi\ x>6\\ 2mx+3, & khi\ x\leq 6\end{cases}$ liên tục tại $x_o=6$ là:

A. $\dfrac{1}{10}$ B. $\dfrac{1}{6}$ C. $\dfrac{1}{5}$ D. 0

Câu 7: Giá trị của a để hàm số sau liên tục tại x = 2 là:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^3+3x^2+4}{x+2} & \text{khi } x\neq -2\\ \dfrac{2a+2}{x+1} & \text{khi } x=-2\end{cases}$$

A. 7 **B.** 5 **C.** −5 **D.** −7

Câu 8: Giá trị nào sau đây của a để hàm số sau liên tục tại x = −2?

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3x+2}{4-x^2} & \text{khi } x\neq -2\\ a^2+ax+1 & \text{khi } x=-2\end{cases}$$

A. $a=\frac{5}{2}$ **B.** $a=-\frac{1}{2}$ **C.** 0 **D.** $\frac{3}{2}$

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Đáp án B.

➢ **Lời giải:**

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3(x-2)}{(x-2)\left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+2\sqrt[3]{3x+2}+4\right]}$

$=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3}{\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+2\sqrt[3]{3x+2}+4}=\dfrac{1}{4}.$

$\lim\limits_{x\to 2^+}\left(ax+\dfrac{1}{4}\right)=2a+\dfrac{1}{4}=f(2).$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 2a+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow a=0.$

Câu 2: Đáp án C.

➢ **Lời giải:**

Ta có $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(3-x)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\left(-\sqrt{x+1}-2\right)=-4.$

Vậy hàm số liên tục tại $x=3\Leftrightarrow m=-4.$

Câu 3: Đáp án B.

➢ **Lời giải:**

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\dfrac{1}{4}.$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 2a-\frac{5}{4}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow a=\frac{3}{4}$.

Câu 4: Đáp án D.

➢ **Lời giải:**

Ta có $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(x-4)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}+3}{\sqrt{x}+2}=\frac{3}{2}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(4)=4a-\frac{5}{2}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow a=1$.

Câu 5: Đáp án C.

➢ **Lời giải:**

Ta có $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5}\right)}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5}}=\frac{1}{6}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow a+2=\frac{1}{6}\Leftrightarrow a=-\frac{11}{6}$.

Câu 6: Đáp án B.

Có $\lim\limits_{x\to 6^-}(2mx+3)=12m+3=f(6)$, $\lim\limits_{x\to 6^+}\frac{x^2-7x+6}{x-6}=\lim\limits_{x\to 6^+}\frac{(x-6)(x-1)}{x-6}=5$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 12m+3=5\Leftrightarrow m=\frac{1}{6}$.

Có $\lim\limits_{x\to 6^-}(2mx+3)=12m+3$, $\lim\limits_{x\to 6^+}\frac{x^2-7x+6}{x-6}=\lim\limits_{x\to 6^+}(x-1)=5$, $f(6)=12m+3$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 12m+3=5\Leftrightarrow m=\frac{1}{6}$.

Câu 7: Đáp án D.

Có $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^3+3x^2+4}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{(x+2)\left(2x^2-x+2\right)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\left(2x^2-x+2\right)=12$.

Hàm số liên tục tại $x=-2\Leftrightarrow f(-2)=-2a-2=12\Leftrightarrow a=-7$.

Câu 8: Đáp án A.

Có $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3-3x+2}{4-x^2}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x+2)(2-x)}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{(x-1)^2}{2-x}=\frac{9}{4}$.

Để hàm số liên tục tại $x=-2\Leftrightarrow f(-2)=a^2-2a+1=\frac{9}{4}\Leftrightarrow |a-1|=\frac{3}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\frac{5}{2}\\ a=\frac{1}{2}\end{array}\right.$.

CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM DỰA VÀO TÍNH LIÊN TỤC

➢ **Vấn đề1: Bài toán về số lượng nghiệm của phương trình:**

***Bài toán chứng minh phương trình f(x)=0 có nghiệm thuộc khoảng*(a;b)**

* Nếu f liên tục trên đoạn [a;b] và f (a).f(b)<0 thì có ít nhất một giá trị c thuộc khoảng (a;b) sao cho f(c)=0 hay phương trình *f(x)=0* có nghiệm $x = c$ thuộc khoảng (a;b)

➢ ***Bài tập:***

Ví dụ 1: Chứng minh phương trình $2x^2 + 3x - 4 = 0$ có 2 nghiệm trong khoảng (–3; 1).

Giải:

Xét hàm số $f(x) = VT$ liên tục trên R.

Có $f(0) = -4, f(1) = 1, f(-3) = 5 \Rightarrow \begin{cases} f(0).f(-3) < 0 \\ f(0).f(1) < 0 \end{cases}$

Suy ra phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm trên mỗi khoảng $(-3;0), (0;1)$.

Hay ta có đpcm.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng phương trình $x^5 + \frac{x}{\sqrt{x^2-2}} - 2012 = 0$ có đúng hai nghiệm dương phân biệt.

Giải:

Điều kiện $x > \sqrt{2}$ vì $x > 0$.

Xét hàm số $f(x) = x^5 + \frac{x}{\sqrt{x^2-2}} - 2012$ với $x > \sqrt{2}$

$f'(x) = 5x^4 - \frac{1}{\sqrt{(x^2-2)^3}}$; $f''(x) = 20x^3 + \frac{3x}{\sqrt{(x^2-2)^5}} > 0$ với $\forall x > \sqrt{2}$

Vì $f''(x) = 0$ vô nghiệm nên $f'(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm, suy ra $f(x) = 0$ có nhiều nhất hai nghiệm.

Mặt khác, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}^+} f(x) = +\infty$, $f(\sqrt{3}) < 0$ nên $f(x) = 0$ có hai nghiệm $x_1 \in (\sqrt{2}; \sqrt{3})$, $x_2 \in (\sqrt{3}; +\infty)$ (đpcm)

Ví dụ 3: Chứng minh phương trình sau đây có nghiệm: $x^5 + x - 1 = 0$

Giải:

Đặt $f(x) = x^5 + x - 1$, hàm đa thức này được xác định trên R nên liên tục trên R (do đó liên tục trên mọi đoạn [a;b])

Ta có $f(0)=-1; f(1)=1 (0).f(1)<0$

Vậy phương trình trên có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$

Ví dụ 4: Cho các phát biểu sau:

(1): Phương trình $x^4-3x^3+1=0$ có nghiệm trên khoảng $(-1;3)$?

(2): PT sau: $\cos 2x = 2\sin x - 2$ có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{6};\pi\right)$

(3): $x^5-5x-1=0$ có ít nhất ba nghiệm

(4): Phương trình $x^3-3x+1=0$ có ít nhất 2 nghiệm trên $(-2;2)$

Hỏi có bao nhiêu phát biểu đúng

A.1 B.2 C.3 D.4

Giải:

Chọn D.

- **(1):** Xét hàm số $f(x)=x^4-3x^3+1$, hàm này liên tục trên R.

  $f(-1)=5>0; f(3)=1>0$, nên ta không kết luận được PT có nghiệm trong khoảng $(-1;3)$ hay không?

  Nhưng nếu xét trên đoạn $[-1;2]$ ta có $f(-1).f(2)=5.(-7)<0$ nên PT có nghiệm trên khoảng $(-1;2)$, nên có nghiệm trên khoảng $(-1;3)$

  Bài này nhắc nhở chúng ta rằng, định lí trên chỉ là một điều kiện đủ để PT có nghiệm, chứ không phải là đk cần để một PT có nghiệm.

- **(2):** Xét hàm số $f(x)=\cos 2x-2\sin x+2$ liên tục trên R.

  $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\pi-2\sin\frac{\pi}{2}+2=-1<0$

  $f(\pi)=\cos 2\pi-2\sin\pi+2=3>0$

  Do đó PT có ít nhất 2 nghiệm thuộc khoảng các khoảng $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, hay nó có ít nhất hai nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{6};\pi\right)$

- **(3):** Xét hàm số $f(x)=x^5-5x-1$ liên tục trên R

  $f(-2)=-23<0, f(-1)=3>0; f(0)=-1<0; f(2)=21>0$

  Vậy PT trên có ít nhất ba nghiệm lần lượt thuộc các khoảng $(-2;-1),(-1;0),(0;2)$

- **(4):** Chứng minh phương trình $x^3-3x+1=0$ có ít nhất 2 nghiệm trên $(-2;2)$

  Ta có: $f(-2)=-1$; $f(0)=1$; $f(1)=1$

  Do đó: $f(-2).f(0)=-1<0$; $f(0).f(1)=-1<0$.

  Vậy phương trình có ít nhất hai nghiệm trên $(-2;2)$

Ví dụ 5: Cho các mệnh đề sau:

(1): Phương trình $2x^3-10x-7=0$ chỉ có 1 nghiệm.

(2): Phương trình sau có nghiệm: $3^x+4^x=8^x$

(3): Phương trình sau có: *sinx +1 = x có thể vô nghiệm*

Có bao nhiêu mệnh đề sai

A.1 B.2 C.0 D.3

Giải:

Chọn D

- **(1) Sai:** Xét hàm số $f(x)=VT$ liên tục trên R.

Có $f(0)=-7, f(-1)=1, f(3)=14 \Rightarrow \begin{cases} f(0).f(3)<0 \\ f(0).f(-1)<0 \end{cases}$.

Suy ra phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm trên mỗi khoảng $(-;3),(-1;0)$.

- (2): Phương trình sau có nghiệm: $3^x+4^x=8^x$

Xét hàm số $f(x)=3^x+4^x-8^x$, khi đó hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên R. Mặt khác $f(0).f(1)=-1.1<0$ nên tồn tại $x_0\in(0;1)$ sao cho $f(x_0)=0$, hay phương trình luôn có nghiệm.

- (3): Phương trình sau có nghiệm: *sinx +1 = x*

Xét hàm số $f(x)=\sin x+1-x$, khi đó hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên R. Mặt khác $f(0).f(\pi)=-\pi+1<0$ nên tồn tại $x_0\in(0;\pi)$ sao cho $f(x_0)=0$, hay phương trình luôn có nghiệm.

BÀI TOÁN CÓ THAM SỐ M

Ví dụ 6: Chứng minh phương trình sau có nghiệm với mọi m.

$\left(m^6-m+1\right)x^{2012}+2x-1=0$.

Giải:

$f(0)=-1.f(1)=m^6-m+2\geq 0$

$\Rightarrow f(0)f(1)\leq 0$. Vậy phương trình có nghiệm với mọi m

Ví dụ 7: $m\sin 2x+2(\sin x-\cos x)=0$

Đặt $t=\sin x-\cos x$. Phương trình tiếp tuyến: $-mt^2-2t+m=0$

Ta có: $2f(0)+f\left(-\sqrt{2}\right)+f\left(\sqrt{2}\right)=0$

Vậy phương trình có nghiệm thuộc $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\Leftrightarrow t=\sin x-\cos x$ có nghiệm

$\Rightarrow$ đpcm

Ví dụ 8: Chứng minh phương trình $3m^2x^3 + (2m + 5)x^2 + 4m^2x - 3 = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm dương $\forall m$.

Giải:

Xét $f(x) = VT$ liên tục trên R.

Có $f(0) = -3, f(1) = 7m^2 + 2m + 5 > 0 \Rightarrow f(0).f(1) < 0.$

Suy ra phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thuộc (0;1).

Suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 9: Chứng minh phương trình sau: $f(x) = mx^6 + 2x - 3 - m = 0$ có nghiệm với mọi m.

Giải:

Rõ ràng hàm số $f(x) = m(x^6 - 1) + 3x + 2$ liên tục trên R

Ta chọn các số thực sao cho giá trị hàm số tại đó triệt tiêu m: $f(-1) = -1 < 0;\ f(1) = 5 > 0$

Vậy phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1;1)$

Ví dụ 10: Chứng minh phương trình $m(x-3)(x-5)+x^2-15=0$ luôn có nghiệm với mọi m.

Giải:

Xét hàm số $f(x) = m(x-3)(x-5) + x^2 - 15$, khi đó hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên R. Mặt khác $f(3).f(5) = -6.10 < 0, \forall m$ nên tồn tại $x_0 \in (3;5)$ sao cho $f(x_0) = 0$, hay phương trình luôn có nghiệm khi m thay đổi.

❒ Bài toán trắc nghiệm:

Câu 1: Điều kiện để phương trình sau luôn có nghiệm $\frac{1}{\sin x} + \frac{3}{\cos x} = m$, m là tham số.

A.Không tồn tại m B.Chỉ khi m = 1 C.Chỉ khi m > 1 D.Với mọi m

Câu 2: Cho phương trình $(m^2 + 1)(x^2 - 3x + 2)^{2011} - 3x + 4 = 0$

Các phát biểu:

(1) Phương trình trên vô nghiệm vơi mọi m

(2) Khi m = 1 phương trình trên có nghiệm

(3) Không tồn tại m để phương trình trên vô nghiệm

Chọn đáp án đúng:

A.(1) đúng B.(2),(3) đúng C.A,B đều đúng D.Tất cả đều sai

Câu 3: Phương trình $(m^4 + m + 1)x^{2011} + x^5 - 32 = 0$

(1) Phương trình trên có ít nhất một nghiệm dương với mọi giá trị của m.

(2) Phương trình trên vô nghiệm

(3) Phương trình trên có nghiệm với mọi m

Chọn đáp án đúng

A.Cả 3 đều sai B.Cả 3 đều đúng C.Chỉ có (1) đúng D.(1),(3) đúng

LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

Câu 1: Đáp án D.

➢ **Lời giải:**

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{\sin x}+\frac{3}{\cos x}-m$, khi đó hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $(\frac{\pi}{2};\pi)$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)=-\infty$ nên tồn tại $a\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)\subset\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ sao cho $f(a)<0$

và $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)=+\infty$ nên tồn tại $b\in(\pi-\varepsilon;\pi)\subset\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ sao cho $f(b)>0$

với $e>0$ đủ bé sao cho $\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)\cap(\pi-\varepsilon;\pi)=\phi$.

Do đó $f(a).f(b)<0$ nên tồn tại $x_0\in(a;b)$ sao cho $f(x_0)=0$, hay phương trình luôn có nghiệm.

Câu 2: Đáp án B.

➢ Lời giải: Ta có $f(1).f(2)=-2<0$, nên phương trình có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(1;2)$. Vậy phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

Câu 3: Đáp án D.

➢ **Lời giải:** Ta có $m^4+m+1>0,\forall m$, $f(0).f(2)=-32(m^4+m+1).2^{2011}<0,\forall m$, suy ra phương trình luôn có ít nhất một nghiệm dương trên khoảng với mọi m.

❑ <u>Bài toán nhiều tham số:</u>

Câu 4: Cho 3 số a,b,c thoả 12a+15b+20c = 0. Chứng minh phương trình $ax^2+bx+c=0$ luôn có nghiệm thuộc đoạn $[0;4/5]$

Giải:

Xét hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$, khi đó hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên R.

Ta có: $f(\frac{4}{5})=\frac{16}{25}a+\frac{4}{5}b+c$ nên $\frac{75}{4}f(\frac{4}{5})=12a+15b+\frac{75}{4}c$

$f(0)=c$ nên $\frac{5}{4}f(0)=\frac{5}{4}c$

Do đó $\frac{75}{4}f(\frac{4}{5})+\frac{5}{5}f(0)=12a+15b+20c=0$ suy ra một trong hai giá trị $f(\frac{4}{5}), f(0)$ có một giá trị âm và một giá trị dương, hoặc cả hai giá trị đều bằng 0.

⇒ Điều phải chứng minh.

Câu 5: Chứng minh phương trình ab(x-a)(x-b)+bc(x-b)(x-c)+ca(x-c)(x-a)=0luôn có nghiệm với mọi a,b,c.

Giải:

Đặt $f(x)=ab(x-a)(x-b)+bc(x-b)(x-c)+ca(x-c)(x-a)$, ta có $f(x)$ liên tục trên R, và: $f(a)=bc(a-b)(a-c)$

$f(b)=ac(b-a)(b-c)$

$f(c)=ab(c-a)(c-b)$

$\Rightarrow f(a).f(b).f(c)=-a^2b^2c^2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\le 0,\forall a,b,c$

- Nếu $f(a).f(b).f(c)=0$, thì một trong ba giá trị a,b,c là nghiệm của phương trình $f(x)=0$
- Nếu $f(a).f(b).f(c)<0$ thì tồn tại $x_0\in\{a,b,c\},x_0\ne 0$ và a,b,c khác 0 sao cho $f(x_0)<0$, mà $f(0)=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2>0$ nên $f(x_0).f(0)<0$ do đó phương trình $f(x)=0$ có nghiệm.

Câu 6: Chứng minh các phương trình sau luôn có hai nghiệm $x^{2012}+ax^3+bx^2+cx-2=0$

Giải:

Xét hàm số $f(x)=x^{2012}+ax^3+bx^2+cx-2$, khi đó hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên R.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ nên tồn tại $p<0$ sao cho $f(p)>0$; ta lại có $f(0)=-1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ nên tồn tại $q>0$ sao cho $f(q)>0$

Do đó $f(p)f(0)<0$ và $f(0)f(q)<0$ suy ra phương trình $f(x)=0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt.

Câu 7: Cho $a>0,b>0$. Chứng minh rằng phương trình $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+b}=0$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc $(a;b)$

Giải:

Ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+b}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne 0\wedge x\ne a\wedge x\ne -b\\(x-a)(x+b)+(x+b)x+x(x-a)=0\end{cases}$

Đặt $f(x)=(x-a)(x+b)+(x+b)x+x(x-a)$ ta có hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên R.

Ta có $f(-b)=b(b+a)$, $f(0)=-ab<0$, $f(a)=a(a+b)$ nên $f(-b).f(0)=-ab^2(b+a)<0$ và $f(0).f(a)=-a^2b(b+a)<0$

Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $-b<x_1<0<x_2<a$

Câu 8: Cho a, b, c là các số thực có tổng khác 0. Chứng minh phương trình sau luôn có nghiệm.

$\mathrm{a}(\mathrm{x}-\mathrm{b})(\mathrm{x}-\mathrm{c})+\mathrm{b}(\mathrm{x}-\mathrm{c})(\mathrm{x}-\mathrm{a})+\mathrm{c}(\mathrm{x}-\mathrm{a})(\mathrm{x}-\mathrm{b})=0 \quad (1)$

Giải:

Xét $f(x)=a(x-b)(x-c)+b(x-c)(x_a)+c(x-a)(x-b)$ liên tục trên R

$f(a)=a(a-b)(a-c)$, $f(b)=b(b-c)(b-a)$, $f(c)=c(c-a)(c-b)$, $f(0)=-3abc$

$f(0).f(a).f(b).f(c)=-3[abc(a-b)(b-c)(c-a)]^2\le 0$ nên tồn tại $p,q\in\{a,b,c,0\}$ sao cho $f(p).f(q)\le 0$. Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Câu 9: Chứng minh: $a\sin 3x+b\cos 2x+c\cos x+\sin x=0$ phương trình luôn có nghiệm. Với *a, b, c* là tham số.

Giải:

Xét hàm số $f(x)=a\sin 3x+b\cos 2x+c\cos x+\sin x$ khi đó hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên R.

Ta có:

$f(0)=b+c$ $f(\frac{\pi}{2})=-a-b+1$

$f(\pi)=b-c$ $f(\frac{3\pi}{2})=a-b-1$

Nên $f(0)+f(\frac{\pi}{2})+f(\pi)+f(\frac{3\pi}{2})=0;\forall a,b,c$ do đó tồn tại hai giá trị *p*, *q* thuộc $\{0;\frac{\pi}{2};\pi;\frac{3\pi}{2}\}$ sao cho $f(p).f(q)<0$ hay phương trình luôn có nghiệm.

Câu 10: Chứng minh phương trình sau có nghiệm thuộc khoảng $(0;2\pi)$

$a\cos 2x+b\cos x+c\sin 2x+d\sin x=0$

Giải:

Xét hàm số $f(x)=a\cos 2x+b\cos x+c\sin 2x+d\sin x$, hàm này liên tục trên R.

$f(0)=a+b$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=a\cos\pi+b\cos\frac{\pi}{2}+c\sin\pi+d\sin\frac{\pi}{2}=-a+d$

$f(\pi)=a-b$; $f\left(3\frac{\pi}{2}\right)=-a-d$

Ta thấy: $f(0)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f(\pi)+f\left(3\frac{\pi}{2}\right)=0$

Nên phải tồn tại ít nhất 1 cặp trái dấu, hoặc cả 4 giá trị trên bằng 0.

Do đó hiển nhiên phương trình trên có nghiệm thuộc khoảng $(0;2\pi)$

MỤC LỤC

CHINH PHỤC ĐIỂM 8, 9, 10 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM GIẢI TÍCH

MẪN NGỌC QUANG - ĐỖ XUÂN SỸ - PHẠM MINH TUẤN

NHÀ XUẤT BẢN DÂN TRÍ
Số 9 – Ngõ 26 – Phố Hoàng Cầu – Quận Đống Đa – TP. Hà Nội
VPGD: Số 347 Đội Cấn – Quận Ba Đình – TP. Hà Nội
ĐT: (024). 66860751 – (024). 66860752
Email: nxbdantri@gmail.com
Website: nxbdantri.com.vn

Chịu trách nhiệm xuất bản
BÙI THỊ HƯƠNG
Chịu trách nhiệm nội dung
VŨ QUANG VINH

Biên tập: VŨ THỊ THU NGÂN
Vẽ bìa: Công ty KHANG VIỆT
Sửa bản in: Công ty KHANG VIỆT
Trình bày sách: Công ty KHANG VIỆT
Chế bản: Công ty KHANG VIỆT

Đối tác LKXB:

CÔNG TY TNHH MTV
DỊCH VỤ VĂN HÓA KHANG VIỆT
Địa chỉ: 71 Đinh Tiên Hoàng - P. Đa Kao - Q.1 - TP. Hồ Chí Minh
Điện thoại: (028) 39115694 - 39105797 - 39111969 - 39111968 - 39103821
Fax: (028) 39110880
Mail: khangvietbookstore@yahoo.com.vn / nhasachkhangviet@gmail.com
www.khangvietbook.com.vn

In: 1.000 cuốn. Khổ: 19x27 cm, tại: Công ty TNHH SX DV TM Bao Bì Kiến Á.
Địa chỉ số: 320/32 A Trần Bình Trọng, P. 4, Q. 5 TP. HCM.
Số xác nhận đăng ký xuất bản số: 2953-2017/CXBIPH/7-102/DT
Quyết định xuất bản số: 2953-7/QĐXB/NXBDT, do Nhà xuất bản Dân Trí cấp ngày 11 tháng 9 năm 2017.
Mã ISBN: 978-604-88-5095-1
In xong và nộp lưu chiểu: Quý I/2018.