ÔN TẬP

QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

$(u+v)' = u' + v'$

$(u-v)' = u' - v'$

$(u.v)' = u'.v + u.v'$

$(k.u)' = k.u'$ (k là hằng số)

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u.v'}{v^2} (v = v(x) \neq 0)$

$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} (v = v(x) \neq 0)$

CÔNG THỨC TÍNH ĐẠO HÀM

Đạo hàm của hàm số sơ cấp cơ bản	Đạo hàm của hàm số hợp $(\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}))$
$(C)' = 0$	
$x' = 1$ $(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}, (\alpha \in \mathbb{R}, x > 0)$ $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ (x > 0)$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\ (x \neq 0)$ $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}\ (x \neq 0)$ $\lvert x\rvert' = \frac{x}{\lvert x\rvert}$	$(u^\alpha)' = \alpha.u^{\alpha-1}.u', (\alpha \in \mathbb{R}, u > 0)$ $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}\ (u > 0)$ $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}\ (u \neq 0)$ $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{n.u'}{u^{n+1}}\ (x \neq 0)$ $\lvert u\rvert' = \frac{u'.u}{\lvert u\rvert}$
$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$ $(x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$	$(\sin u)' = u'.\cos u$. $(\cos u)' = -u'.\sin u$ $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u'.(1 + \tan^2 u)$ $\left(u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$ $(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u} = -u'.(1 + \cot^2 u)$ $(u \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$
$(a^x)' = a^x \ln a$ $(e^x)' = e^x$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}\ (x > 0)$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}\ (x > 0)$	$(a^u)' = u'.a^u \ln a$ $(e^u)' = u'.e^u$ $(\log_a u)' = \frac{u'}{u.\ln a}\ (u > 0)$ $(\ln u)' = \frac{u'}{u}\ (u > 0)$

ÔN TẬP

ĐẠO HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM PHÂN THỨC

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} \qquad \left(\frac{ax^2+bx+c}{dx+e}\right)' = \frac{adx^2+2aex+be-dc}{(dx+e)^2}$$

$$\left(\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}\right)' = \frac{(ae-bd)x^2+2(af-dc)x+bf-ec}{(dx^2+ex+f)^2}$$

Bài tập tự luyện

Câu 1

Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = x^3 - 3x^2 + 4x$ b. $y = \frac{1}{2}x^4 - \sqrt{x}$ c. $y = (x^2 - 3x)^2$

d. $y = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ e. $y = (x+1)\sqrt{x}$ f. $y = \frac{2x-1}{x+2}$

g. $y = \frac{x^2+x}{x-3}$ h. $y = |x - x^2|$ i. $y = x^2 - \cos 2x$

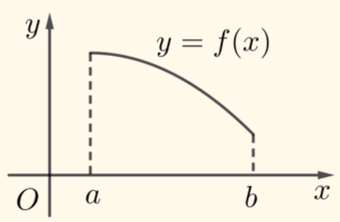
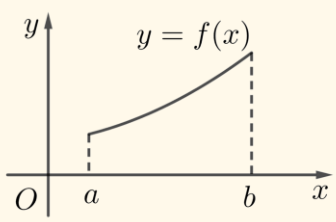
j. $y = x\sin x$ k. $y = \frac{\sin 2x}{x+1}$ l. $y = \cos\left(\sqrt{x^2 - x}\right)$

Chương 1 ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Bài 1 TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

TRỌNG TÂM

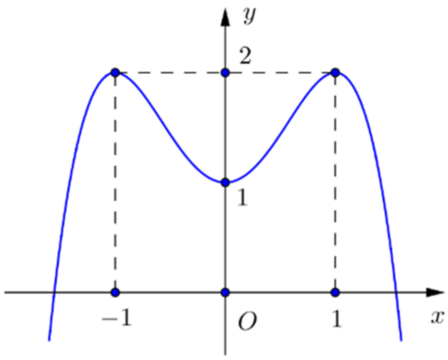
Cho hàm số f(x) xác định trên khoảng (đoạn hoặc nửa khoảng) K.

Hàm số nghịch biến	**Hàm số đồng biến**
Định lí thuận	**Định lí thuận**
Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng K.	Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K.
Định lí đảo	**Định lí đảo**
Nếu hàm số f nghịch biến trên khoảng K thì $f'(x) \le 0, \forall x \in K$.	Nếu hàm số f đồng biến trên khoảng K thì $f'(x) \ge 0, \forall x \in K$.
Định lí thuận “mở rộng”	**Định lí thuận “mở rộng”**
$f'(x) \le 0, \forall x \in K$ và dấu bằng tại hữu hạn điểm trên K thì hàm số nghịch biến trên K.	$f'(x) \ge 0, \forall x \in K$ và dấu bằng tại hữu hạn điểm trên K thì hàm số đồng biến trên K.
Đồ thị	**Đồ thị**
 Đồ thị hàm số là đường đi xuống từ trái sang phải	 Đồ thị hàm số là đường đi lên từ trái sang phải
Định nghĩa	**Định nghĩa**
Hàm số f được gọi là nghịch biến trên K nếu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$	Hàm số f được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Dạng 1. Khảo sát tính đơn điệu của hàm số khi biết một số tính chất

Ví dụ 1.1

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Nhận xét về tính đơn điệu của hàm số đã cho.



Lời giải

....

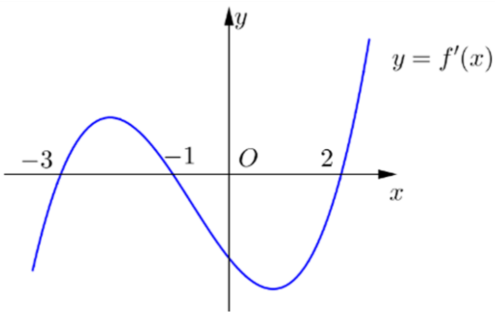
....

....

....

Ví dụ 1.2

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên. Nhận xét về tính đơn điệu của hàm số đã cho.



Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.3

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x) = x(3-2x)(x-2)^2(x-3)^3$. Khảo sát tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.4

Khảo sát tính đơn điệu của hàm số $y = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 2x - 1$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.5

Khảo sát tính đơn điệu của hàm số $y = \frac{x+1}{2-x}$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.6

Khảo sát tính đơn điệu của hàm số $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$?

Lời giải

Ví dụ 1.7

Khảo sát tính đơn điệu của hàm số $y=\sqrt{x^2+3x}$?

Lời giải

Bài tập tự luyện

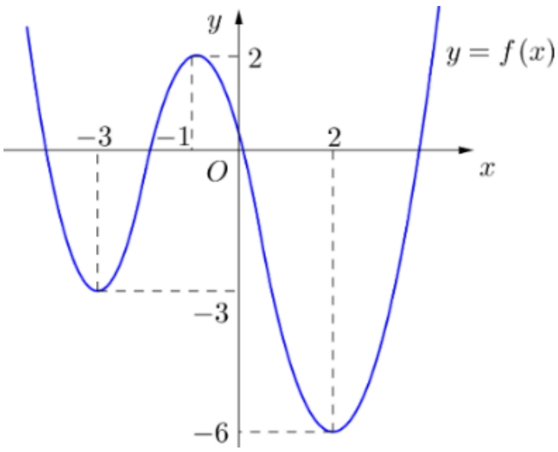
Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Các nhận xét sau là **đúng** hay **sai**?

a. Hàm số đồng biến trên $(-3;-1)$.

b. Hàm số nghịch biến trên $(-1;1)$.

c. Hàm số nghịch biến trên $(3;5)$.

d. Hàm số nghịch biến $(-3;2)$.



Câu 2. Xác định khoảng nghịch biến của hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
			1				$+\infty$
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				-3		

Các nhận xét sau là **đúng** hay **sai**?

a. Hàm số nghịch biến trên $(0; 1)$.

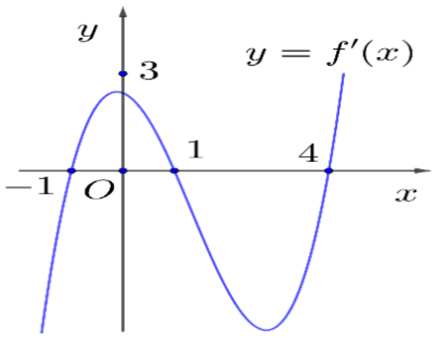
b. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

c. Hàm số đồng biến trên $(3; 4)$.

d. Hàm số đồng biến trên $(-3; +\infty)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên.

Xác định các khoảng đồng biến của hàm số $y = f(x)$?



Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Xác định các khoảng nghịch biến của hàm số $y = f(x)$?

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Khảo sát tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$.

a. $f'(x) = (3 - x)(x - 2)^2$

b. $f'(x) = (1 - x)(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 5x + 4)$

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(2; +\infty)$ có đạo hàm $f'(x) = \frac{x^2(1-x)(2x+5)^3}{\sqrt{x+2}}$. Khảo sát tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$.

Câu 7. Khảo sát tính đơn điệu của các hàm số:

a. $y = 3x^3 + 4x^2 + 5x$

b. $y = -x^3 - 6x^2 - 12x + 7$

c. $y = -x^3 + 3x$

d. $y = x^4 - 2x^2 + 2$

e. $y = -x^4 - 3x^2 + 1$

f. $y = x^4 - 6x^2 - 8x + 1$

g. $y = \frac{x+2}{2x+1}$

h. $y = \frac{x+2}{1-x}$

i. $y = \frac{2}{x^2+1}$

j. $y = x - 1 + \frac{1}{x+2}$

k. $y = \frac{x-1}{x^2-2x}$

l. $y = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$

m. $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$

n. $y = \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$

o. $y = \sqrt{x + 2} + \sqrt{1 - x}$

Dạng 2. Một số bài toán liên quan tính đơn điệu của hàm số

Ví dụ 2.1

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{x-m+2}{x+1}$ giảm trên các khoảng mà nó xác định?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.2

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

1. Xét hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(\Delta = b^2 - 4ac; \Delta' = (b')^2 - ac)$

$$f(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{TH1: } \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c > 0 \end{cases} \\ \text{TH2: } \begin{cases} a > 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \Bigg\| \qquad f(x) \leq 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{TH1: } \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c < 0 \end{cases} \\ \text{TH2: } \begin{cases} a < 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

2. Phương trình $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa

$$\left[\begin{array}{l} x_1 \leq m < x_2 \\ x_1 < m \leq x_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow a.f(m) \leq 0 \qquad \Bigg\| \qquad x_1 < m < x_2 \Leftrightarrow a.f(m) < 0$$

$$m \leq x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(m) \geq 0 \\ S > 2m \end{cases} \qquad \Bigg\| \qquad m < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(m) > 0 \\ S > 2m \end{cases}$$

$$x_1 < x_2 \leq m \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(m) \geq 0 \\ S < 2m \end{cases} \qquad \Bigg\| \qquad x_1 < x_2 < m \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(m) > 0 \\ S < 2m \end{cases}$$

Trong đó : $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, P = x_1.x_2 = \frac{c}{a}$.

3. Nếu hàm số f(x) có giá trị nhỏ nhất trên tập D , khi đó: $\forall x \in D, f(x) \geq m \Leftrightarrow \min_{x \in D} f(x) \geq m$

4. Nếu hàm số f(x) có giá trị lớn nhất trên tập D, khi đó: $\forall x \in D, f(x) \leq m \Leftrightarrow \max_{x \in D} f(x) \leq m$.

Ví dụ 2.3

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - (2m - 3)x - m + 2$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

Lời giải

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.4

Xác định các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (4 - m)x$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Lời giải

Phương pháp 1.

- Trường hợp 1 : Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì đồng biến trên $(2; +\infty)$
- Trường hợp 2 : Đạo hàm của hàm số có hai nghiệm phân biệt thì $x_1 < x_2 \leq 2$.

Phương pháp 2. $f(x) \geq m \Leftrightarrow \min_{x \in D} f(x) \geq m$ hoặc $f(x) \leq m \Leftrightarrow \max_{x \in D} f(x) \leq m$ $(\forall x \in D)$ nếu hàm số tồn tại giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên tập D.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

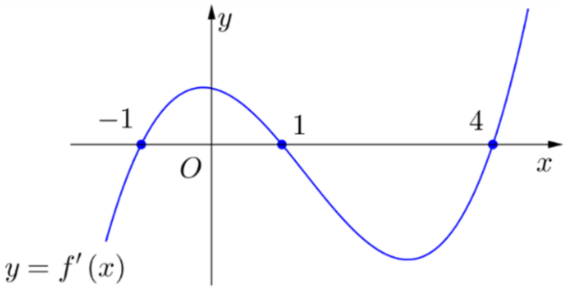
....

....

....

Ví dụ 2.5

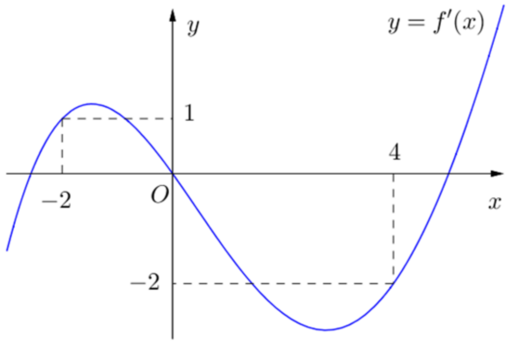
Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Xác định các khoảng đồng biến của hàm số $y = f(-2x^2 - 4x - 1)$ trên $\mathbb{R}$.



Lời giải

Ví dụ 2.6

Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x) = f(1-2x) + x^2 - x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?



A. $(1;3)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $(-3;-1)$. **D.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1. Tìm tất cả giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 - (3m+2)x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 2. Tìm tất cả giá trị của m để hàm số $y = (m^2-1)x^3 + (m-1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 3. Cho hàm số $y=\frac{mx-2m-3}{x-m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{mx-4}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{mx+9}{4x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;4)$?

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^4-2(m-1)x^2+m-2$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$?

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{4}x^4+mx-\frac{3}{2x}$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Câu 8. Cho hàm số $y=x^3-(m+1)x^2-(2m^2-3m+2)x+2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-5;5]$ sao cho hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$?

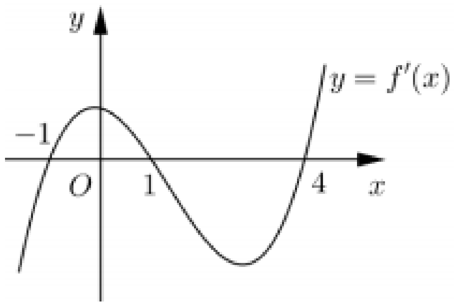
Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(x^2-2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y=f(2-x)$ đồng biến trên khoảng

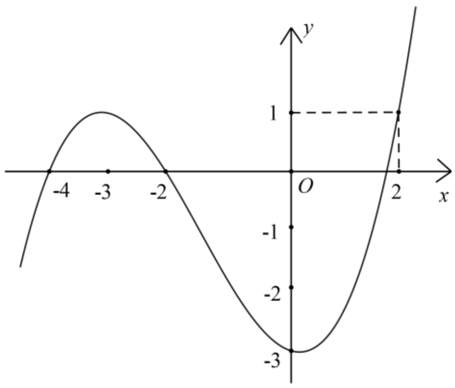


A. $(2;+\infty)$ **B.** $(-2;1)$ **C.** $(-\infty;-2)$ **D.** $(1;3)$

Câu 11. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=3f(x)+x^3-6x^2+9x$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $(0;2)$. **B.** $(-1;1)$.

C. $(1;+\infty)$. **D.** $(-2;0)$.



Bài 2 CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

TRỌNG TÂM

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ và điểm $x_0 \in (a; b)$

a) Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại x_0.

x	$x_0 - h$		x_0		$x_0 + h$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$	

b) Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0.

x	$x_0 - h$		x_0		$x_0 + h$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	

Chú ý:

- Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại điểm x_0 thì x_0 được gọi là **điểm cực đại (điểm cực tiểu)** của hàm số; $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại (giá trị cực tiểu)** của hàm số, ký hiệu là $f_{CD}(f_{CT})$, còn điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực đại (điểm cực tiểu)** của đồ thị hàm số.
- Các điểm cực đại cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị.
- Dễ dàng chứng minh được rằng, nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và đạt cực đại hoặc cực tiểu tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

TRỌNG TÂM

Định lý 1: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $K = (x_0 - h; x_0 + h)$ và có đạo hàm trên K hoặc trên $K\backslash\{x_0\}$, với $h > 0$.

- Nếu $f'(x_0) > 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$và $f'(x_0) < 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là điểm cực đại của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x_0) < 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$và $f'(x_0) > 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

Nhận xét: Xét hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$.

- Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi qua điểm x_0 thì x_0 là điểm cực trị của hàm số.
- Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua điểm x_0 thì x_0 là điểm cực đại của hàm số.
- Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua điểm x_0 thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số.

Định lý 2: Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$ với $h > 0$. Khi đó:

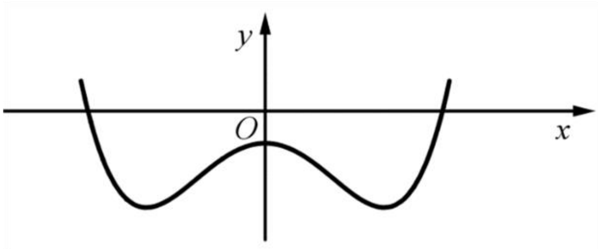
- Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases} \Rightarrow x_0$ là điểm cực tiểu.
- Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases} \Rightarrow x_0$ là điểm cực đại.

Chú ý: Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) = 0$ thì chưa thể khẳng định được x_0 là điểm cực đại hay điểm cực tiểu hay cực trị của hàm số.

Dạng 1. Xác định cực trị của hàm số khi biết một số tính chất

Ví dụ 1.1

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có mấy điểm cực trị?



Lời giải

Đồ thị hàm số có ……… điểm cực đại. Đồ thị hàm số có ……… điểm cực đại.

Đồ thị hàm số có ………điểm cực trị.

Ví dụ 1.2

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên. Xác định các điểm cực đại, cực tiểu, giá trị cực đại, giá trị cực tiểu của hàm số đã cho. Xác định điểm cực đại, điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	

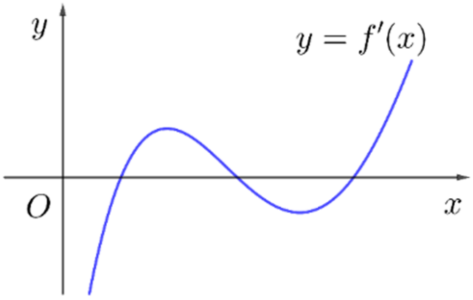
Lời giải

Dựa vào BBT ta kết luận :

- Hàm số đạt cực đại tại điểm $x_{\text{cực đại}} =$………, giá trị cực đại $y_{\text{cực đại}} =$………
- Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x_{\text{cực tiểu}} =$………, giá trị cực tiểu $y_{\text{cực tiểu}} =$………
- Điểm cực đại của đồ thị hàm số $M\left(\frac{2}{3}\qquad\right)$, điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $N\left(\frac{2}{3}\qquad\right)$.

Ví dụ 1.3

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại, bao nhiêu điểm cực tiểu?



Lời giải

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Ví dụ 1.4

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-2)^2(x-3)^3$. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Bảng biến thiên:

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

Kết luận: Hàm số có ...... điểm cực trị.

Ví dụ 1.5

Xác định các điểm cực trị của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Bảng biến thiên:

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

Kết luận: $x_{CĐ} = \dots\dots\dots;\ y_{CĐ} = \dots\dots\dots$

$x_{CT} = \dots\dots\dots;\ y_{CT} = \dots\dots\dots$

Ví dụ 1.6

Hàm số $y = \frac{x+1}{2-x}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

....
....
....
....
....

Bài tập tự luyện

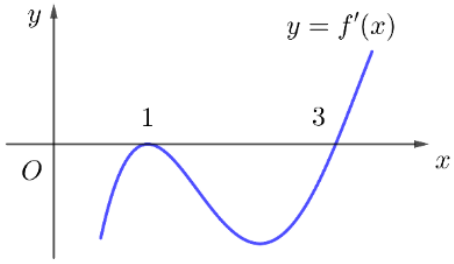
Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	

a. Xác định các điểm cực đại, điểm cực tiểu, giá trị cực đại, giá trị cực tiểu của hàm số đã cho.

b. Xác định điểm cực đại, điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Xác định khoảng đồng biến và điểm cực tiểu của hàm số (nếu có).



Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Xác định điểm cực trị của hàm số (nếu có), biết rằng:

a. $f'(x) = (3 - x)(x - 2)^2$.

b. $f'(x) = (1 - x)(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 5x + 4)$.

Câu 5. Xác định các điểm cực trị của các hàm số sau (nếu có):

a. $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

b. $y = -x^3 - 3x + 2$

c. $y = -3x^4 - 4x^3 + 2$

d. $y = x^4 - 2x^2 + 2$

e. $y = \frac{x+2}{2x+1}$

f. $y = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$

g. $y = \sqrt{x^2 + 3x}$

h. $y = \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$

i. $y = \sqrt{x + 2} + \sqrt{1 - x}$

Dạng 2. Một số bài toán về cực trị của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc ba hoặc bậc bốn. Khi đó :

- $M(x_0; y_0)$ là **điểm cực trị** của đồ thị hàm số $y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = 0 \end{cases}$
- $M(x_0; y_0)$ là **điểm cực đại** của đồ thị hàm số $y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$
- $M(x_0; y_0)$ là **điểm cực tiểu** của đồ thị hàm số $y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$
- Hàm số $y = f(x)$ đạt **cực tiểu** tại $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$
- Hàm số $y = f(x)$ đạt **cực đại** tại $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$

Ví dụ 2.1

Xác định hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ biết rằng đồ thị hàm số nhận điểm $A(-1; 3)$ là điểm cực trị?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.2

Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $f(x) = -x^3 + mx + 3$ đạt cực đại tại $x = 2$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a, b, c, d \in \mathbb{R})$

- Có cực trị :

  Trường hợp 1 (hàm số có 1 điểm cực trị) : $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$

  Trường hợp 2(hàm số có 2 điểm cực trị bao gồm 1 cực đại và 1 cực tiểu) :

  $$\begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$$

- Không có cực trị :

  Trường hợp 1 : $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ Trường hợp 2 : $\begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c\ (a, b, c \in \mathbb{R})$ (hàm trùng phương)

- Có 3 điểm cực trị : $ab < 0$
- Có 1 điểm cực trị :

  Trường hợp 1 : $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ Trường hợp 2 : $\begin{cases} a \neq 0 \\ ab \geq 0 \end{cases}$

- Có 1 điểm cực đại, không có cực tiểu:

  Trường hợp 1 : $\begin{cases} a = 0 \\ b < 0 \end{cases}$ Trường hợp 2 : $\begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$

- Có 1 điểm cực tiểu, không có cực đại :

  Trường hợp 1 : $\begin{cases} a = 0 \\ b > 0 \end{cases}$ Trường hợp 2 : $\begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$

- Có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu: $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$
- Có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu: $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$

Hàm nhất biến $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}\ (a, b, c, d \in \mathbb{R};\ c^2 + d^2 > 0)$: Không có cực trị.

Các hàm số khác có n điểm cực trị : đạo hàm có n nghiệm đơn phân biệt.

Ví dụ 2.3

Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = (m - 2)x^4 - 2(m^2 - 9)x^2 + 2m - 3$ có ba điểm cực trị.

Lời giải

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.4

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx^3 - (m+1)x^2 + \left(2m - \frac{2}{3}\right)x + 1$ có cực trị.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Hàm trùng phương có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow ab < 0$

Ba điểm cực trị của hàm trùng phương tạo thành Δ vuông cân $\Leftrightarrow b^3 + 8a = 0$

Ba điểm cực trị của hàm trùng phương tạo thành Δ đều $\Leftrightarrow b^3 + 24a = 0$

Ba điểm cực trị tạo thành tam giác cân tại A có góc $\widehat{BAC} = \varphi \Leftrightarrow b^3 + \dfrac{8a}{\tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = 0$

Diện tích tam giác tạo bởi ba điểm cực trị : $\begin{cases} ab < 0 \\ S = \sqrt{-\dfrac{b^5}{32a^3}} \end{cases}$

Ba điểm cực trị tạo thành tam giác ABC cân tại A, khi đó:

$$A(0; c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}, BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

Ví dụ 2.5

Tìm tất cả các giá trị m sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 + (m+1)x^2 - 2m - 1$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác có một góc bằng $120°$?

Lời giải

....

....

....

....

Ví dụ 2.6

Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

Lời giải

Cách 1: Phương trình đường thẳng AB : $\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$

Cách 2: Chia đa thức $y = f(x)$ cho $y = f'(x)$ ta được phần dư là $y = ax + b$ là đường thẳng cần tìm

Ví dụ 2.7

Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số $y = \frac{x^2+4x+1}{2-x}$.

Lời giải

$y = k_1x + b_1 \parallel y = k_2x + b_2 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$

$y = k_1x + b_1 \perp y = k_2x + b_2 \Leftrightarrow k_1.k_2 = -1$

Ví dụ 2.8

Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (2m-1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2:

$$x_1 + x_2 = S = -\frac{b}{a}; \quad P = x_1x_2 = \frac{c}{a}; \quad x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$$

Ví dụ 2.9

Tìm tất cả cả các giá trị của tham số m để $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.10

Cho hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2; -1; 0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ là tổng số cực trị của hàm số $y = f(x)$ và số nghiệm phương trình $f(x) = 0$.

Ví dụ 2.11

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1. Xác định hàm số $y=-x^3+ax+b$ $(a,b\in\mathbb{R})$ biết rằng đồ thị hàm số nhận điểm $A(-1;1)$ là điểm cực tiểu?

Câu 2. Xác định hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ biết rằng đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $M(0;-3)$ và $N(3;1)$.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số Hàm số $y=x^4+mx^2+3$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị nguyên của $m\in[-5;5]$ để các hàm số sau thỏa mãn điều kiện:

a. Hàm số $y=x^3-2x^2+(m+3)x-1$ có cực đại, cực tiểu.

b. Hàm số $y=x^3-2x^2+(m+3)x-1$ không có cực trị.

c. Hàm số $y=x^4-(2m-1)x^2+1$ có 1 điểm cực trị.

d. Hàm số $y=-x^4+6x^2+mx$ có ba điểm cực trị?

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x^2+2mx+5)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị?

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^4+2mx^2+1$ có ba điểm cực trị:

a. Tạo thành tam giác vuông cân.

b. Tạo thành tam giác đều.

c. Tạo thành tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

Câu 7. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số $y=-x^3+3x+1$.

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị tham số m để hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-2x+m$ và điểm $M(-3;7)$ thẳng hàng.

Câu 9. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=(2m-1)x+3+m$ song song với đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$

Câu 10. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có 2 điểm cực trị là A và B, tính diện tích tam giác OAB?

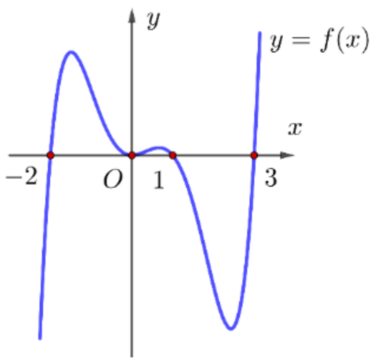
Cách 1: $S_{OAB} = \sqrt{p(p-OA)(p-OB)(p-AB)}$ với $p = \dfrac{OA+OB+AB}{2}$ $\left(AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}\right)$

Cách 2: $S_{OAB} = \dfrac{1}{2}\left|x_{\overrightarrow{OA}}.y_{\overrightarrow{OB}} - x_{\overrightarrow{OB}}.y_{\overrightarrow{OA}}\right|$ $\left(\text{với } \overrightarrow{OA} = (x_A - x_O; y_A - y_O); \overrightarrow{OB} = (x_B - x_O; y_B - y_O)\right)$

Câu 11. Xác định các giá trị tham số m thỏa mãn hàm số $y = x^3 + (m-1)x^2 + (2m+1)x + 2$ có hai điểm cực trị x_1 và x_2 thỏa mãn $3(x_1^2 + x_2^2) + x_1x_2 = 7$?

Câu 12. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + 2$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$?

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $g(x) = f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



Bài 3 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

TRỌNG TÂM

Định nghĩa: Cho hàm số xác định trên D

- Số M được gọi là giá trị lớn nhất (**GTLN**) của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu

$$\begin{cases} f(x) \le M; \forall x \in D \\ \exists x_o \in D: f(x_o) = M \end{cases}, \text{ ta kí hiệu } M = \max_{x \in D} f(x)$$

Chú ý: Nếu $f(x) \le M; \forall x \in D$ thì ta chưa thể suy ra $M = \max\limits_{x \in D} f(x)$

- Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất (**GTNN**) của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu

$$\begin{cases} f(x) \ge M; \forall x \in D \\ \exists x_o \in D: f(x_o) = M \end{cases}, \text{ ta kí hiệu } M = \min_{x \in D} f(x)$$

Chú ý: Nếu $f(x) \ge M; \forall x \in D$ thì ta chưa thể suy ra $M = \min\limits_{x \in D} f(x)$

Dạng 1. Xác định giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của hàm số

Ví dụ 1.1

Xác định giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - 9$ trên $(1; +\infty)$ (nếu có)?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.2

Xác định giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - 9$ trên $[1; 3]$ (nếu có)?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1. Xác định giá trị giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau :

a. $f(x) = x + \frac{4}{x}$ $(x > 0)$.

b. $f(x) = |x|$

c. $f(x) = x^3 - 6x + 5$ trên $[-4; 15]$.

d. $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ trên $[-3; 1]$.

Câu 2. Xác định giá trị lớn nhất các của hàm số sau :

a. $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$

b. $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-2}$ trên $(-\infty; 2)$.

c. $f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x - 4}$

d. $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$

Dạng 2. Một số bài toán liên quan đến giá trị nhỏ nhất – giá trị lớn nhất của hàm số

Ví dụ 2.1

Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s = 6t^2 - t^3$ $(s(m); t > 0)$, vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm t (s) bằng bao nhiêu?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.2

Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $f(x) = \frac{x+m}{x-1}$ thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} f(x) = 3$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.3

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 0.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.4

Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1. Trong số các hình chữ nhật có cùng diện tích 48 m^2, hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

Câu 2. Trong số các hình chữ nhật có cùng chu vi 16 cm, hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

Câu 3. Một hợp tác xã nuôi cá thí nghiệm trong hồ. Người ta thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n) = 480 - 20n$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều gam cá nhất?

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{2x+m}{x+1}$ trên $[0; 2]$ bằng 1.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} y + \max\limits_{[2;4]} y = 3$?

Câu 7. Xác định giá trị tham số m để hàm số $y = x + m + \sqrt{1 - x^2}$ có giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{2}$.

Câu 8. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng 16. Tính tổng tất cả các phần tử của S?

Bài 4 ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA HÀM SỐ

TRỌNG TÂM

1. Tiệm cận ngang : Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn là khoảng dạng $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = y_0$ khi thỏa ít nhất 1 trong các điều kiện sau:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0 \text{ hoặc } \lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0$$

2. Tiệm cận đứng : Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = x_0$ khi thỏa ít nhất 1 trong các điều kiện sau:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$$

3. Lưu ý: Hàm nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ luôn có 2 tiệm cận

Tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c}$ Tiệm cận ngang $y = \dfrac{a}{c}$

Dạng 1. Xác định tiệm cận dựa vào BBT, đồ thị

Ví dụ 1.1

Xác định các đường tiệm cận của hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau?

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$-$	
y	3	$\searrow$	$-\infty \;\|\|\; +\infty$	$\searrow$	-2

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

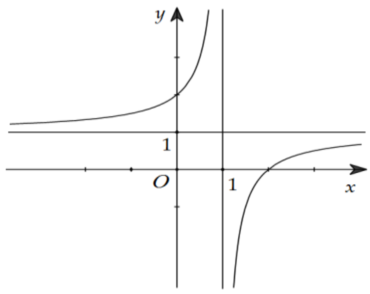
Bài tập tự luyện

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau, xác định các đường tiệm cận của hàm số $y = f(x)$?

a.

x	$-\infty$		0			3		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$		$+$	0	$-$	
y	3	$\searrow$	$-5 \ \Vert \ -\infty$		$\nearrow$	5	$\searrow$	-2

b.



Dạng 2. Xác định tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của hàm số

Ví dụ 2.1

Xác định đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của các đồ thị hàm số

a. $y = \frac{2x-3}{x-1}$ b. $y = \frac{2x-3}{x-1}$

Lời giải

Ví dụ 2.2

Các đồ thị hàm số sau có bao nhiêu đường tiệm cận?

a. $y = \frac{x^2-1}{x^2-3x-4}$ b. $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-2}$

Lời giải

Bài tập tự luyện

Câu 1. Xác định các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của các hàm số (nếu có)

a. $y=\frac{x-1}{3-x}$ b $y=\frac{2x^2-x+1}{2x-3}$ c. $y=\frac{x^2-9}{x^2+6x+9}$ d. $y=\frac{7}{x}-1$

e. $y=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x-4}$ f. $y=\frac{\sqrt{3-x}}{x+2}$ g. $y=x-\sqrt{x^2-2x+2}$ h. $y=\frac{\sqrt{x-1}+1}{x^2-4x-5}$

Dạng 3. Một số bài toán liên quan đến đường tiệm cận của hàm số

Ví dụ 3.1

Xác định tất cả các giá trị tham số m để đường tiệm cận đứng của hàm số $y=\frac{mx+2}{x+m}$ đi qua điểm $A(1;-2)$?

Lời giải

....

....

....

....

Ví dụ 3.2

Xác định m để đồ thị hàm số $y=\frac{x-m}{mx-1}$ không có tiệm cận đứng.

Lời giải

....

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

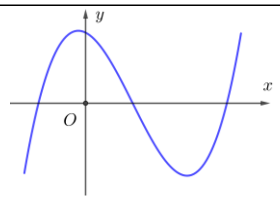
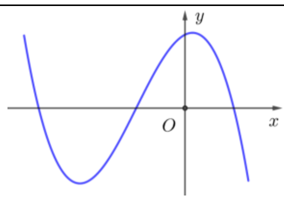
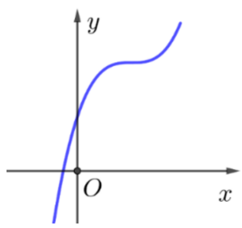
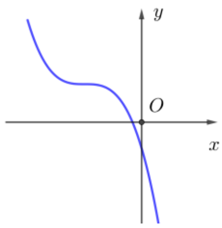
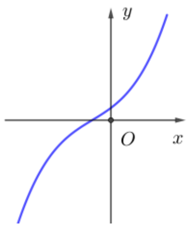
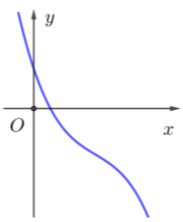
Câu 1. Xác định tất cả các giá trị tham số m để đường tiệm cận ngang của hàm số $y=\frac{mx+2}{x+m}$ đi qua điểm $A(1;-2)$.

Câu 2. Xác định tất cả các giá trị tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{2x^2-3x+m}{x-m}$ không có tiệm cận đứng.

Câu 3. Xác định tất cả các giá trị tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}$ có đúng 2 tiệm cận đứng.

Bài 5 ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Dạng 1. Đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta_{y'} > 0$		
$\Delta_{y'} = 0$		
$\Delta_{y'} < 0$		

Khảo sát dấu của các hệ số a, b, c và d.

$$\underset{(\text{Nét cuối đồ thị})}{a}\begin{cases}\text{đi lên} & \longrightarrow \quad a > 0\\ \text{đi xuống} & \longrightarrow \quad a < 0\end{cases}$$

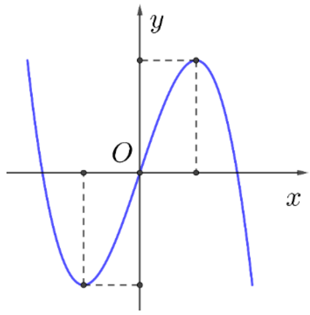
$$\underset{\left(\text{Tâm đối xứng } x = -\frac{b}{3a}\right)}{b}\begin{cases}\text{lệch phải Oy} & \longrightarrow \quad \text{b trái dấu a}\\ \text{lệch trái Oy} & \longrightarrow \quad \text{b cùng dấu a}\\ \text{thuộc Oy} & \longrightarrow \quad b = 0\end{cases}$$

$$\underset{(\text{Vị trí 2 điểm cực trị})}{c}\begin{cases}\text{nằm 2 phía Oy} & \longrightarrow \quad \text{c trái dấu với a}\\ \text{nằm cùng phía Oy} & \longrightarrow \quad \text{c cùng dấu với a}\\ \text{1 cực trị thuộc Oy} & \longrightarrow \quad c = 0\\ \text{không có cực trị} & \longrightarrow \quad \left[\begin{array}{l}\text{c cùng dấu với a}\\ c = b = 0\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\underset{(\text{Giao điểm với Oy})}{d}\begin{cases}\text{trên O} & \longrightarrow \quad d > 0\\ \text{dưới O} & \longrightarrow \quad d < 0\\ \text{qua O} & \longrightarrow \quad d = 0\end{cases}$$

Ví dụ 1.1

Đường cong bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?



A. $y = x^3 - 3x$.
B. $y = -x^3 + 3x - 1$.
C. $y = -x^3 - 3x$.
D. $y = -x^3 + 3x$.

Lời giải

Đồ thị hàm số có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a < 0)$

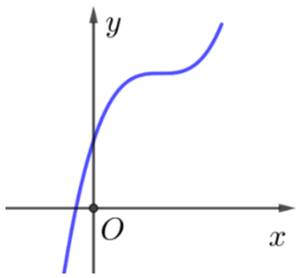
Dấu của b: $b > 0$ vì: ....

Dấu của c: $c > 0$ vì: ....

Dấu của d: $d = 0$ vì: ....

Ví dụ 1.2

Đường cong bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?



A. $y = x^3 - 3x + 1$.
B. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.
C. $y = -x^3 - 3x^2 - 1$.
D. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$.

Lời giải

Đồ thị hàm số có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a > 0)$

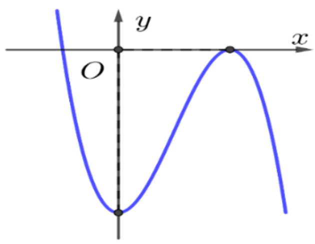
Dấu của b: ....vì: ....

Dấu của c:................ vì: ....

Dấu của d:................ vì: ....

Ví dụ 1.3

Đường cong bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?



A. $y = -x^3 - 3x^2 - 4$.
B. $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.
C. $y = x^3 + 3x^2 - 4$.
D. $y = -x^3 + x^2 - 4$.

Lời giải

Đồ thị hàm số có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a < 0)$

Dấu của b: ....vì: ....

Dấu của c:................ vì: ....

Dấu của d:................ vì: ....

....

....

Ví dụ 1.4

Bảng biến thiên bên là bảng biến thiên của hàm số nào sau đây?

A. $y = x^3 + 3x^2 - 1.$ **B.** $y = x^3 - 3x^2 - 1.$

C. $y = -x^3 - 3x^2 - 1.$ **D.** $y = -x^3 + 3x^2 - 1.$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Lời giải

Đồ thị hàm số có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a < 0)$

Dấu của b: ....vì: ....

Dấu của c:................. vì: ....

Dấu của d: .... vì: ....

Ví dụ 1.5

Bảng biến thiên bên là bảng biến thiên của hàm số nào sau đây?

A. $y = x^3 - 3x + 1.$

B. $y = -x^3 + 3x^2 - 3x.$

C. $y = -x^3 + 3x^2 + 3x.$

D. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1.$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	
y	$+\infty$		$\searrow$		$-\infty$

Lời giải

Đồ thị hàm số có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a < 0)$

....

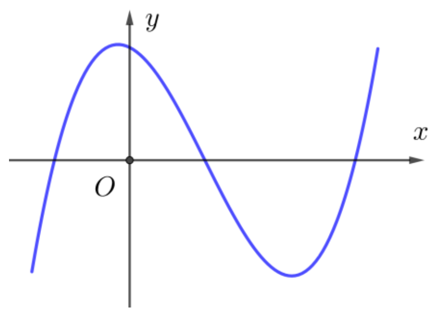
....

....

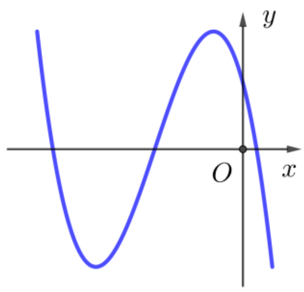
Bài tập tự luyện

Câu 1. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình sau. Có bao nhiêu số dương trong các hệ số a, b, c, d?

a.



b.



Câu 2. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau. Có bao nhiêu số dương trong các hệ số a, b, c, d?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

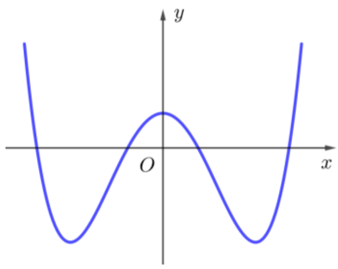
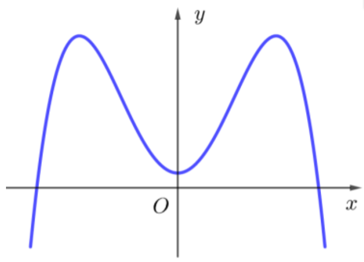
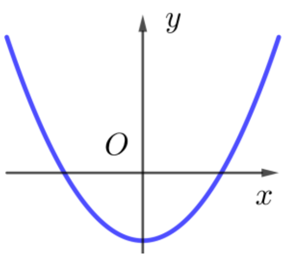
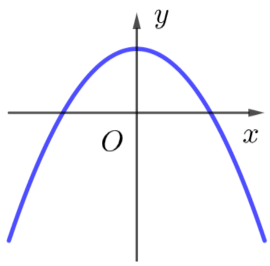
Câu 3. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau. Có bao nhiêu số dương trong các hệ số a, b, c, d?

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

BT 4. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx - 1 \ (a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau. Có bao nhiêu số dương trong các hệ số a, b, c?

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Dạng 2. Đồ thị hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c \ (a \neq 0)$

	$a > 0$	$a < 0$
b trái dấu a		
b cùng dấu a hoặc $b = 0$		

Khảo sát dấu của các hệ số a, b, c và d.

$$\underset{\text{(Nét cuối đồ thị)}}{a}\begin{cases}\text{đi lên} & \longrightarrow \quad a > 0\\ \text{đi xuống} & \longrightarrow \quad a < 0\end{cases}$$

$$\underset{\text{(Số điểm cực trị)}}{b}\begin{cases}\text{3 điểm cực trị} & \longrightarrow \quad \text{b trái dấu a}\\ \text{1 điểm cực trị} & \longrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} b = 0\\ \text{b cùng dấu a}\end{array}\right.\end{cases}$$

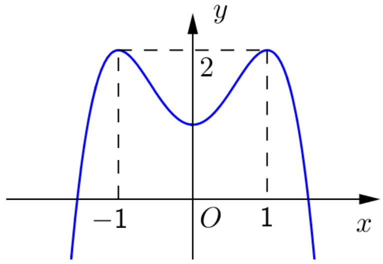
$$\underset{\text{(Giao điểm với Oy)}}{c}\begin{cases}\text{trên O} & \longrightarrow \quad c > 0\\ \text{dưới O} & \longrightarrow \quad c < 0\\ \text{qua O} & \longrightarrow \quad c = 0\end{cases}$$

Ví dụ 2.1

Đường cong bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

A. $y = x^4 - 3x^2 + 1$. **B.** $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

C. $y = -x^4 - 4x^2 + 1$. **D.** $y = x^4 - 2x^2 + 1$.



Lời giải

Đồ thị hàm số có dạng $y = ax^4 + bx^2 + c\ (a < 0)$

Dấu của b: ....vì: ....

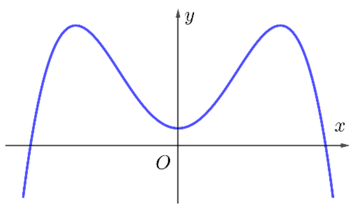
Dấu của c:................. vì: ....

Ví dụ 2.2

Đường cong bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

A. $y = -x^4 + 2x^2$. **B.** $y = x^4 - 2x^2$.

C. $y = -x^4 + 4x^2 + 1$. **D.** $y = -x^3 + 3x^2$.



Lời giải

Đồ thị hàm số có dạng $y = ax^4 + bx^2 + c\ (a < 0)$

Dấu của b: ....vì: ....

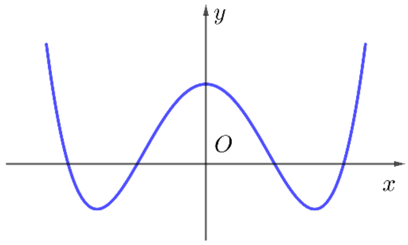
Dấu của c:................. vì: ....

Ví dụ 2.3

Đường cong bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

A. $y = -x^4 - 2x^2 + 2$. **B.** $y = x^4 - 2x^2 + 2$.

C. $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$. **D.** $y = x^4 - 2x^2 - 2$.



Lời giải

Đồ thị hàm số có dạng $y = ax^4 + bx^2 + c \ (a > 0)$

Dấu của b: ....vì: ....

Dấu của c:................ vì: ....

....

....

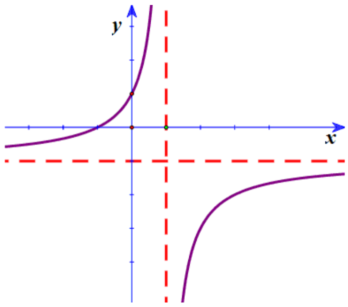
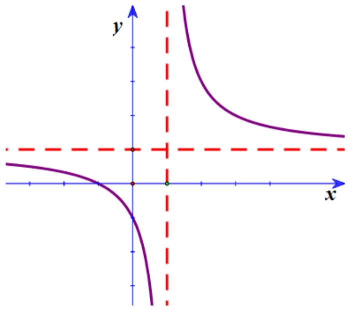
Dạng 3. Đồ thị hàm số nhất biến

Hàm số nhất biến có dạng $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}, (ab - bc \neq 0), \ \ y' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

Tiệm cận đứng: $x = -\dfrac{d}{c}$.

Tiệm cận ngang: $y = \dfrac{a}{c}$.

Tâm đối xứng: $I\left(-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c}\right)$.

$ad - bc > 0$	$ad - bc < 0$
	

Tính đơn điệu (tăng, giảm) của hàm số:

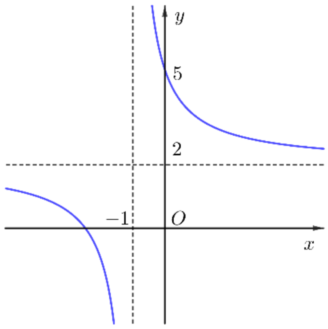
- $ad - bc > 0$ thì đồ thị hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.
- $ad - bc < 0$ thì đồ thị hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Giao điểm với trục tung Oy: $x = 0, y = \dfrac{b}{d}$.

Giao điểm với trục hoành Ox: $x = -\dfrac{b}{a}, y = 0$.

Ví dụ 3.1

Đường cong bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?



A. $y = \frac{2x-5}{x-1}$ **B.** $y = \frac{2x+5}{x+1}$.

C. $y = \frac{x+1}{x+1}$ **D.** $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

Lời giải

Đồ thị hàm số có dạng $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

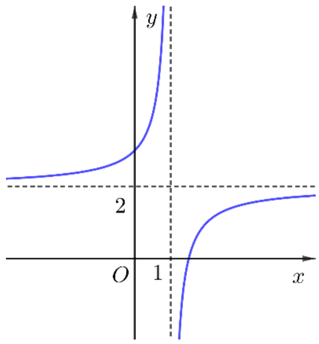
Tiệm cận đứng:............................⇒ Loại đáp án ....

Tiệm cận ngang: .... ⇒ Loại đáp án ....

Giao điểm với trục tung: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \ldots\ldots \end{cases}$. Thử từng đáp án ta chọn đáp án ....

Ví dụ 3.2

Đường cong bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = \frac{2x+3}{x-1}$. **B.** $y = \frac{x-3}{x-1}$.

C. $y = \frac{x-3}{x-2}$. **D.** $y = \frac{2x-3}{x-1}$.

Lời giải

Đồ thị hàm số có dạng $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

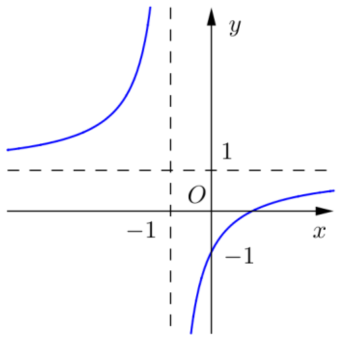
Tiệm cận đứng:............................⇒ Loại đáp án ....

Tiệm cận ngang: .... ⇒ Loại đáp án ....

Giao điểm với trục tung: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \ldots\ldots \end{cases}$. Thử từng đáp án ta chọn đáp án ....

Ví dụ 3.3

Xác định a, b để hàm số $y = \frac{ax-1}{x+b}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Chọn đáp án đúng?

A. $a = 1,\ b = -1$. **B.** $a = 1,\ b = 1$.

C. $a = -1,\ b = 1$. **D.** $a = -1,\ b = -1$.

Lời giải

Nhận xét về đồ thị:

Tiệm cận đứng:.............................

Tiệm cận ngang: ....

Mặt khác xét hàm số $y = \dfrac{ax - 1}{x + b}$ có tiệm cận đứng $x = \ldots\ldots\ldots$ và $y = \ldots\ldots\ldots$....

....

....

....

....

Dạng 4. Một số điểm đặc biệt của hàm số

Xét hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là nghiệm của phương trình: $y'' = 0$

Hàm số nhất biến có dạng $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}, (ab - bc \neq 0)$ có tâm đối xứng: $I\left(-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c}\right)$.

Ví dụ 4.1

Xác định tâm đối xứng của các hàm số sau: a. $y = x^3 - 3x^2 + x - 1$. b. $y = \dfrac{x - 1}{2 - x}$.

Lời giải

....

....

....

....

....

Ví dụ 4.2

Xác định tất cả các điểm có tọa độ nguyên của các đồ thị hàm số: $y = \dfrac{x + 1}{1 - 2x}$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 4.3

Xác định các điểm cố định của đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 4m^2 - 2m$ (nếu có)?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1. Xác định tâm đối xứng của hàm số sau:

a. $y = -x^3 + 3x$.	b. $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

Câu 2. Tìm tất cả các điểm có tọa độ nguyên của các hàm số:

a. $y = \frac{3x-1}{x+1}$	b. $y = \frac{x^2-2x+3}{x+1}$	c. $y = \frac{x+1}{2x-1}$

Câu 3. Xác định các điểm cố định của đồ thị hàm số :

a. $y = x^3 + mx^2 - m - 1$	b. $y = y = x^4 + mx^2 - m - 1$

c. $y = \dfrac{(m-1)x + m + 2}{x + m + 2}$

Bài 6 TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Dạng 1. Bài toán tương giao cơ bản

Nghiệm của phương trình $af(x) + b = 0$ là số giao điểm của đường thẳng $y = -\frac{b}{a}$ với đồ thị hàm số $y = f(x)$

Ví dụ 1.1

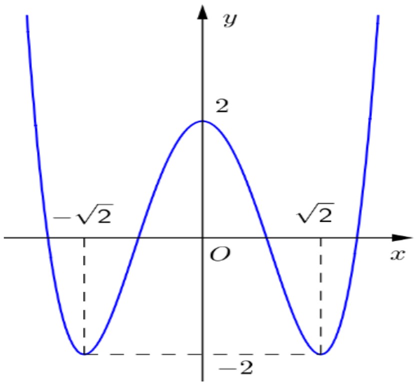
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Xác định số nghiệm của các phương trình

a. $f(x) - 3 = 0$

b. $1 - f(x) = 2$

c. $2f(x) - 4 = 0$

d. $f^2(x) - 4f(x) + 3 = 0$



Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Cho hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$.

Bước 1. Giải phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = g(x)$.

Bước 2. Tìm

Số giao điểm? Hoành độ giao điểm? Tung độ giao điểm?

Ví dụ 1.2

Xác định tọa độ giao điểm của các hàm số sau:

a. $y = x^4 + 6x^2 + 5$ và trục hoành.

b. $y = x^3 + x^2 + 2x$ và $y = x^2 + 5x$.

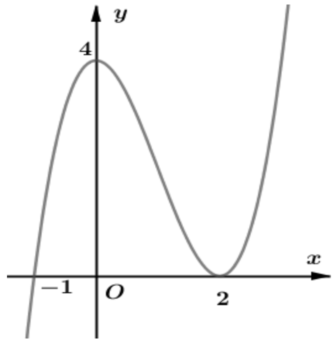
c. $y = -x^4 + 4x^2 + 5$ và trục tung.

d. $y = \frac{2x+1}{x-1}$ và $y = 3x - 1$.

Lời giải

Bài tập tự luyện

Câu 1. Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $3f(x) + 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?



Câu 2. Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Phương trình $2f(x) + 7 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Câu 3. Xác định số giao điểm của các đồ thị hàm số:

a. $y = x^3 - x^2 + 1$ và $y = x^2 + 1$

b. $y = x^4 - 3x^2$ và đường thẳng $y = 2$ là

Câu 4. Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ và đường cong $y = \frac{2x+4}{x-1}$. Khi đó hoành độ x_I của trung điểm I của đoạn MN bằng bao nhiêu? **Hướng dẫn**: $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$

Câu 5. Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A và B. Xác định độ dài đoạn thẳng AB?

Hướng dẫn

Phương trình hoành độ giao điểm: $x - 1 = \dfrac{2x-1}{x+1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \ldots\ldots, y = \ldots\ldots \\ x = \ldots\ldots, y = \ldots\ldots \end{array}\right.$

Tọa độ giao điểm A(;) và B(;).

Khi đó độ dài đoạn thẳng AB bằng: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Câu 6. Biết hai đồ thị hàm số $y = -x^2 + x$ và $y = x^3 + x^2 - 2$ cắt nhau tại ba điểm A, B và C. Tính diện tích tam giác ABC?

Hướng dẫn

Phương trình hoành độ giao điểm: $-x^2 + x = x^3 + x^2 - 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \ldots\ldots, y = \ldots\ldots \\ x = \ldots\ldots, y = \ldots\ldots \\ x = \ldots\ldots, y = \ldots\ldots \end{array}\right.$

Tọa độ giao điểm A(;), B(;) và C(;).

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A; y_C - y_A)$

Khi đó diện tích tam giác ABC được tính theo công thức: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\left|x_{\overrightarrow{AB}}.y_{\overrightarrow{AC}} - y_{\overrightarrow{AB}}.x_{\overrightarrow{AC}}\right|$

Dạng 2. Bài toán chứa tham số m

Ví dụ 2.1

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) + 1 = m$ có đúng hai nghiệm?

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Lời giải

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.2

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ cắt đường thẳng $y = m$ tại ba điểm phân biệt?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Điều kiện cần để phương trình bậc ba có 3 nghiệm tạo thành cấp số cộng/ cấp số nhân:

Xét phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0)\ (*)$

$(*)$ có ba nghiệm tạo thành cấp số cộng $\Rightarrow$ $(*)$ có nghiệm $x = -\dfrac{b}{3a}$

$(*)$ có ba nghiệm tạo thành cấp số nhân $\Rightarrow$ $(*)$ có nghiệm $x = \sqrt[3]{-\dfrac{d}{a}}$

Thay vào $(*)$, giải phương trình thu được ta tìm được giá trị tham số m.

Điều kiện đủ để phương trình bậc ba có 3 nghiệm tạo thành cấp số cộng/ cấp số nhân:

Với m thu được ở trên, thay ngược lại vào phương trình $(*)$ nếu tìm được 3 nghiệm x thì nhận giá trị m thu được (nếu chỉ tìm được 1 nghiệm x thì loại).

Ví dụ 2.3

Xác định tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 6mx + 5 - 5m^2 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Áp dụng định lý Vi – et ta có: $x_1 + x_2 = S = -\frac{b}{a}$; $P = x_1x_2 = \frac{c}{a}$; $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ $(a > 0)$. Khi đó $\min f(x) = \sqrt{-\frac{\Delta}{4a}} \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$

$(\Delta = b^2 - 4ac)$

Ví dụ 2.4

Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$ có đồ thị (C). Biết rằng. Biết rằng đường thẳng $y = 2x + m$ (m là tham số) cắt (C) tại hai điểm phân biệt M và N. Độ dài ngắn nhất của MN bằng bao nhiêu?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 2x^2 - 1 - m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt?

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ cắt đường thẳng $y = x + 2m$.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ cắt đường thẳng $y = m$ tại ba điểm phân biệt.

Câu 4. Để đường thẳng $d: y = x - m + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho độ dài AB ngắn nhất thì giá trị của m thuộc khoảng nào?

A. $m \in (-4; -2)$ **B.** $m \in (2; 4)$ **C.** $m \in (-2; 0)$ **D.** $m \in (0; 2)$

Câu 5. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2m$. Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng?

Câu 6. Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số $y = -2x^3 - 3m^2x^2 + (m^3 + 2m)x + 2$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân?

Chương 2 HÀM SỐ LŨY THỪA HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LÔGARIT

Bài 1 LŨY THỪA

TRỌNG TÂM

Lũy thừa	Điều kiện cơ số a	Điều kiện số mũ α
$a^n = a.a\ldots a$ (n thừa số a)	$a \in \mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}^*$
$a^0 = 1$	$a \neq 0$	
$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$	$a \neq 0$	$n \in \mathbb{N}^*$
$a^\alpha = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\left(\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}\right)$	$a > 0$	$m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$
$a^\alpha = \lim a^{r_n}$	$a > 0$	$\alpha = \lim r_n \ (r_n \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}^*)$

Giả thuyết rằng mỗi biểu thức được xét đều có nghĩa:

$a^m.a^n = a^{m+n}$	$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$(a^m)^n = a^{m.n}$
$(ab)^m = a^m.b^m$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^m$
$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a \text{ nếu n lẻ} \\ \lvert a\rvert \text{ nếu n chẵn} \end{cases}$		$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$

- Nếu $a > 1$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m > n$;
  Nếu $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m < n$.
- Với mọi $0 < a < b$, ta có:
  $$a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0; \qquad a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0.$$
- Chú ý :
  - Các tính chất trên đúng trong trường hợp số mũ nguyên hoặc không nguyên.
  - Khi xét lũy thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm thì cơ số a phải khác 0.
  - Khi xét lũy thừa với số mũ không nguyên thì cơ số a phải dương.

Dạng 1. Rút gọn, biến đổi, tính toán các biểu thức lũy thừa

Ví dụ 1.1

Cho $a > 0, m, n \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a^m + a^n = a^{m+n}$. **B.** $a^m.a^n = a^{m-n}$. **C.** $(a^m)^n = (a^n)^m$. **D.** $\frac{a^m}{a^n} = a^{n-m}$.

Ví dụ 1.2

Với $a > 0, b > 0, \alpha, \beta$ là các số thực bất kì, đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$. **B.** $a^\alpha.a^\beta = a^{\alpha+\beta}$. **C.** $\frac{a^\alpha}{b^\beta} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha-\beta}$. **D.** $a^\alpha.b^\alpha = (ab)^\alpha$.

Ví dụ 1.3

Cho $x, y > 0$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tìm đẳng thức sai dưới đây.

A. $(xy)^\alpha = x^\alpha.y^\alpha$. **B.** $x^\alpha + y^\alpha = (x+y)^\alpha$. **C.** $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$. **D.** $x^\alpha.x^\beta = x^{\alpha+\beta}$.

Ví dụ 1.4

Cho các số thực a, b, m, n $(a, b > 0)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\frac{a^m}{a^n} = \sqrt[n]{a^m}$. **B.** $(a^m)^n = a^{m+n}$. **C.** $(a+b)^m = a^m + b^m$. **D.** $a^m.a^n = a^{m+n}$.

Ví dụ 1.5

Tính giá trị các biểu thức sau:

$A = \left(\frac{1}{3}\right)^{-10}.27^{-3} + (0,2)^{-4}.25^{-2}$

$B = (0,04)^{-1,5} - (0,125)^{-\frac{2}{3}}$

$C = 144^{\frac{3}{4}}:3^{\frac{3}{2}}$

$D = 9^{\frac{2}{5}}.27^{\frac{2}{5}}$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.6

Đưa các biểu thức về về dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ $(a > 0)$.

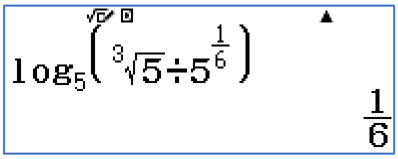
$A = \sqrt[3]{a}: a^{\frac{1}{6}}$ $\qquad$ $B = \sqrt{a.\sqrt[3]{a^2}}$

Lời giải

Sử dụng máy tính đưa A về dạng lũy thừa của B. Ta bấm máy như sau:

$$\boxed{\log_B(A) = m \Rightarrow A = B^m}$$

Sử dụng máy tính : cho $\boxed{a = 5}$, khi đó $\sqrt[3]{a}: a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[3]{5}: 5^{\frac{1}{6}}$



$\Rightarrow \sqrt[3]{5}: 5^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{6}} \Rightarrow \sqrt[3]{a}: a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{6}}$

Ví dụ 1.7

Viết biểu thức $\frac{\sqrt{2\sqrt[3]{4}}}{16^{0,75}}$ về dạng lũy thừa 2^m, tìm giá trị m?

Lời giải

Ví dụ 1.8

Viết biểu thức $\sqrt[5]{\frac{b}{a}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}}$, $(a, b > 0)$ về dạng lũy thừa $\left(\frac{a}{b}\right)^m$ ta được m có giá trị bằng bao nhiêu?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1. Rút gọn biểu thức $Q = b^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{b}$ với $b > 0$.

A. $Q = b^{-\frac{4}{3}}$ **B.** $Q = b^{\frac{4}{3}}$ **C.** $Q = b^{\frac{5}{9}}$ **D.** $Q = b^2$

Câu 2. Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}$ với $x > 0$.

A. $P = \sqrt{x}$ **B.** $P = x^{\frac{1}{8}}$ **C.** $P = x^{\frac{2}{9}}$ **D.** $P = x^2$

Câu 3. Cho a là số thực dương. Giá trị rút gọn của biểu thức $P = a^{\frac{4}{3}}.\sqrt{a}$ bằng

A. $a^{\frac{7}{3}}$. **B.** $a^{\frac{5}{6}}$. **C.** $a^{\frac{11}{6}}$. **D.** $a^{\frac{10}{3}}$.

Câu 4. Cho biểu thức $P = \sqrt[4]{x.\sqrt[3]{x^2.\sqrt{x^3}}}$, với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P = x^{\frac{2}{3}}$ **B.** $P = x^{\frac{1}{2}}$ **C.** $P = x^{\frac{13}{24}}$ **D.** $P = x^{\frac{1}{4}}$

Câu 5. Cho hai số thực dương a, b. Rút gọn biểu thức $A = \frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$ ta thu được $A = a^m.b^n$. Tích của $m.n$ là

A. $\frac{1}{8}$ **B.** $\frac{1}{21}$ **C.** $\frac{1}{9}$ **D.** $\frac{1}{18}$

Dạng 2. So sánh 2 lũy thừa

Với mọi số $a > 0$, ta có: $a^m > a^n \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Trường hợp 1: } \begin{cases} a > 1 \\ m > n \end{cases} \\ \text{Trường hợp 2: } \begin{cases} 0 < a < 1 \\ m < n \end{cases} \end{array}\right.$

Ví dụ 2.1

Kết luận nào đúng về số thực a nếu $(a-1)^{-\frac{2}{3}} < (a-1)^{-\frac{1}{3}}$.

A. $a > 2$. **B.** $a > 0$. **C.** $a > 1$. **D.** $1 < a < 2$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.2

Cho $\left(\sqrt{2}-1\right)^m < \left(\sqrt{2}-1\right)^n$. Khi đó

A. $m = n$. **B.** $m < n$. **C.** $m > n$. **D.** $m \neq n$.

Lời giải

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1. Kết luận nào đúng về số thực a nếu $a^{\sqrt{2}} > a^{\sqrt{3}}$.

A. $a < 1$ **B.** $a > 1$ **C.** $0 < a < 1$ **D.** $a > 2$

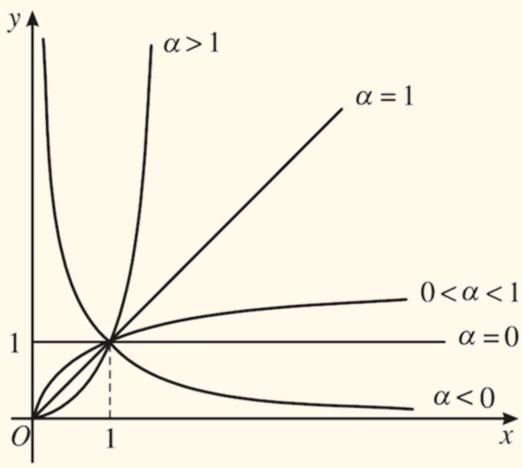
Câu 2. Cho $\left(2+\sqrt{3}\right)^m < \left(7-4\sqrt{3}\right)^{m+3}$. Khi đó:

A. $m > 0$. **B.** $m < -2$. **C.** $m < 2$. **D.** $m > -2$.

Bài 2 HÀM SỐ LŨY THỪA

TRỌNG TÂM

Hàm số lũy thừa	Tập xác định
$y = [f(x)]^{\alpha}$ với $\alpha \in \mathbb{R}$.	Với α nguyên dương: $D = \mathbb{R}$. Với α nguyên âm hoặc bằng 0: $f(x) \neq 0$. Với α không nguyên: $f(x) > 0$.

Tính chất của hàm số lũy thừa $y = x^{\alpha}$ trên khoảng $(0; +\infty)$		
	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$
Đạo hàm	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$	
Chiều biến thiên	$y' = \alpha x^{\alpha-1} > 0\ \forall x \in (0; +\infty)$ Hàm số luôn đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$	$y' = \alpha x^{\alpha-1} < 0\ \forall x \in (0; +\infty)$ Hàm số luôn nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$
Tiệm cận	Không có.	Tiệm cận ngang: trục Ox. Tiệm cận đứng: trục Oy.
Đồ thị	Đồ thị luôn đi qua điểm $(1; 1)$. 	

Dạng 1. Điều kiện xác định của hàm số lũy thừa

Xét hàm số $y = [f(x)]^\alpha$ với $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Với α nguyên dương: $D = \mathbb{R}$.
- Với α nguyên âm hoặc bằng 0: $f(x) \neq 0$.
- Với α không nguyên: $f(x) > 0$.

Ví dụ 1.1

Xác định tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = (2x - 1)^7$ b. $y = (3x^2 - 1)^{-2}$ c. $y = (x^2 - 3x + 2)^{-e}$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1. Xác định tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = (x^2 - 3x - 4)^{-3}$ b. $y = (3x - 5)^{\frac{\pi}{3}}$ c. $y = (x^2 + 4)^{0,1}$

d. $y = (x + 4)^{\frac{1}{2}}$ e. $y = \left(\frac{x+2}{x}\right)^3$ f. $y = (2x - 3)^{-\frac{3}{4}} + \sqrt{9 - x^2}$

Dạng 2. Đạo hàm của hàm số lũy thừa

$$(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1} \qquad (u^\alpha)' = \alpha.u^{\alpha-1}.u'$$

Ví dụ 2.1

Tính đạo hàm các hàm số sau:

a. $y = (x^2 - 1)^3$ b. $y = (x^2 - 2x)^{-\frac{1}{2}}$ c. $y = \sqrt{(x^2 + 1)^3}$

Lời giải

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1. Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[7]{\cos x}$ là:

A. $y' = \frac{-\sin x}{7\sqrt[7]{\cos^8 x}}$ **B.** $y' = \frac{\sin x}{7\sqrt[7]{\sin^6 x}}$ **C.** $y' = \frac{1}{7\sqrt[7]{\cos^6 x}}$ **D.** $y' = \frac{-\sin x}{7\sqrt[7]{\cos^6 x}}$

Câu 2. Hàm số $y = \sqrt[3]{(x^2+1)^2}$ có đạo hàm là:

A. $y' = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2+1}}$ **B.** $y' = \frac{4x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$ **C.** $y' = 2x\sqrt[3]{x^2+1}$ **D.** $y' = 4x\sqrt[3]{(x^2+1)^2}$

Câu 3. Cho $f(x) = x^2\sqrt[3]{x^2}$. Đạo hàm $f'(1)$ bằng:

A. $\frac{3}{8}$ **B.** $\frac{8}{3}$ **C.** 2 **D.** 4

Bài 3 LÔGARIT

TRỌNG TÂM

1. Định nghĩa: Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số m thỏa mãn đẳng thức $a^m = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$. Ta viết: $\boxed{m = \log_a b \Leftrightarrow a^m = b}$.

2. Các tính chất:

Công thức cần nhớ	Điều kiện áp dụng
$\log_a a = 1$ $\quad \log_a 1 = 0$ $\quad a^{\log_a b} = b$ $\log_a(a^m) = m$ $\quad \log_a(b^m) = m\log_a b$ $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$ $\quad \log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n}\log_a b$	$a, b > 0, a \neq 1$ $m \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$
$\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b$	$a, b > 0, a \neq 1, n \neq 0$
$\log_a(b_1.b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$ $\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$	$a, b_1, b_2 > 0, a \neq 1$
$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ $\log_a b = \log_a c\,.\log_c b$	$a, b, c > 0, a \neq 1, c \neq 1$
$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$	$a, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$
$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$	$a, b, c > 0, b \neq 1$

3. Hai logarit cơ số đặt biệt

- **Lôgarit thập phân** là lôgarit cơ số 10. Viết: $\log_{10} b = \log b$ hoặc $\log_{10} b = \lg b$.
- **Lôgarit tự nhiên** là lôgarit cơ số e. Viết: $\log_e b = \ln b$.

Dạng 1. Áp dụng công thức logarit

Ví dụ 1.1

Không dùng máy tính, tìm giá trị các biểu thức sau:

$A = \log_2 8$ $\qquad B = \log_{\frac{1}{3}} 9$ $\qquad C = 3^{2\log_3 5}$ $\qquad D = 4^{\log_2 \frac{1}{7}}$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.2

Không dùng máy tính, tìm giá trị biểu thức.

$A = \log_6 9 + \log_6 4$ $\qquad B = \log_7 49 - \log_7 343$

Lời giải

....

....

....

....

Ví dụ 1.3

Cho $\log_2 6 = a$, khi đó tính giá trị của $\log_3 18$ theo a ?

Lời giải

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.4

Cho $\log_2 3 = a$; $\log_5 3 = b$. Tính $\log_{12} 50$ theo a và b ?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1. Biết $a = \sqrt{b}$ với a và b là hai số thực dương, tính giá trị các biểu thức sau:

$A = \log_a b^3 + \log_a b^2$ $\qquad$ $B = \log_a b - \log_a b^2$

Câu 2. Biết $a^2b = 8$ với a và b là hai số thực dương, tính giá trị biểu thức $A = 2\log_4 a + \log_4 b$?

Câu 3. Cho $\log_3 x = 4\log_3 a + 7\log_3 b\ (a, b > 0)$, biết $x = a^m b^n\ (m, n \in \mathbb{Z})$, tính $m + n$?

Câu 4. Cho $a > 0, b > 0$, nếu biết $\log_3\left(\sqrt[5]{a^3b}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{x}{5}\log_3 a + \frac{y}{15}\log_3 b$, tính giá trị $x + y$?

Câu 5. Cho $a, b, c > 0, a \neq 1$, biết $\log_a b = 2, \log_a c = -3$, tính giá trị của biểu thức $\log_a \frac{a^2b^3}{c^4}$?

Câu 6. Cho $a, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$, biết $\log_a b = \sqrt{3}$, khi đó biểu thức $P = \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\left(\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}\right)$ có giá trị bằng bao nhiêu ?

Câu 7. Với các số $a, b > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 = 6ab$, khẳng định nào đúng ?

A. $\log_2(a+b) = \frac{1}{2}(3 + \log_2 a + \log_2 b)$. $\qquad$ **B.** $\log_2(a+b) = \frac{1}{2}(1 + \log_2 a + \log_2 b)$.

C. $\log_2(a+b) = 1 + \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b)$. $\qquad$ **D.** $\log_2(a+b) = 2 + \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b)$.

Câu 8. Cho $a = \log_{30} 3$ và $b = \log_{30} 5$, tính $\log_{30} 1350$ theo a và b ?

A. $1 - 2a - b$. $\qquad$ **B.** $1 + 2a + b$. $\qquad$ **C.** $2a + b - 1$. $\qquad$ **D.** $1 + a + b$.

Câu 9. Cho $\log_{12} 3 = a$. Tính $\log_{24} 18$ theo a.

A. $\frac{3a-1}{3-a}$. $\qquad$ **B.** $\frac{3a+1}{3-a}$. $\qquad$ **C.** $\frac{3a+1}{3+a}$. $\qquad$ **D.** $\frac{3a-1}{3+a}$.

Câu 10. Đặt $a = \log_2 3, b = \log_5 3$. Nếu biểu diễn $\log_6 45 = \frac{a(m+nb)}{b(a+p)}$ thì $m + n + p$ bằng:

A. 3 $\qquad$ **B.** 4 $\qquad$ **C.** 6 $\qquad$ **D.** -3

Dạng 2. So sánh 2 logarit

Với các số thực $0 < a \neq 1, m, n > 0$: $\log_a m < \log_a n \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Trường hợp 1: } \begin{cases} a > 1 \\ m < n \end{cases} \\ \text{Trường hợp 2: } \begin{cases} 0 < a < 1 \\ m > n \end{cases} \end{array}\right.$

Ví dụ 2.1

Xác định giá trị số thực m nếu $\log_3 m < \log_3(2 - m)$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1. Xác định giá trị số thực a nếu $\log_{\frac{1}{2}} a < \log_{\frac{1}{2}}(2 - a)$?

Câu 2. Nếu $\log_m\left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right) < \log_m\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$ thì

A. $m > 1$ **B.** $m < 1$ **C.** $0 < m < 1$ **D.** $m > 0$

Bài 4 HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LÔGARIT

TRỌNG TÂM

1. **Hàm số mũ:** $y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$.

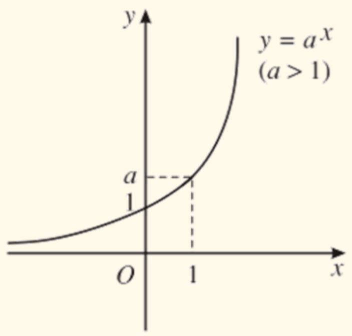
1.1.Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

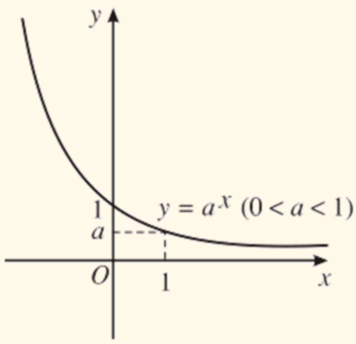
1.2.Tập giá trị: $T = (0, +\infty)$

1.3. Tính đơn điệu:

- Khi $a > 1$ thì hàm số $y = a^x$ đồng biến.
- Khi $0 < a < 1$ thì hàm số $y = a^x$ nghịch biến.

1.4. Đồ thị: Nhận trục hoành làm đường tiệm cận ngang.





2. **Hàm số logarit:** $y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$

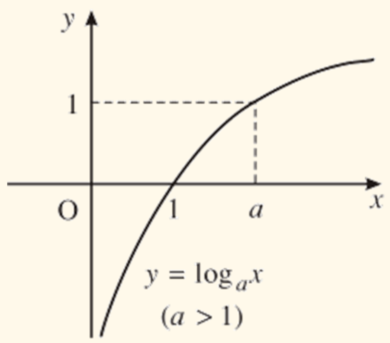
2.1.Tập xác định: $D = (0, +\infty)$.

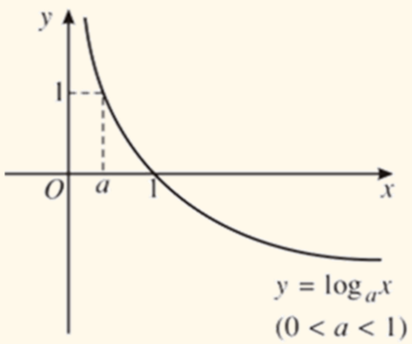
2.2.Tập giá trị: $T = \mathbb{R}$

2.3.Tính đơn điệu:

- Khi $a > 1$ thì $y = \log_a x$ đồng biến trên D.
- Khi $0 < a < 1$ thì $y = \log_a x$ nghịch biến trên D.

2.4. Đồ thị: Nhận trục tung làm đường tiệm cận đứng.

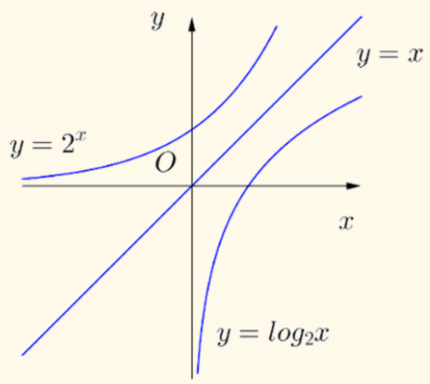




TRỌNG TÂM

Lưu ý: Đồ thị hàm số mũ $y = a^x$ và $y = \log_a x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

Ta minh họa đồ thị $y = 2^x$ và $y = \log_2 x$ đối xứng nhau như hình sau:



Dạng 1. Đồ thị của hàm số mũ và hàm số logarit

Ví dụ 1.1

Cho đồ thị hàm số $y = a^x$ và $y = \log_b x$ như hình vẽ.

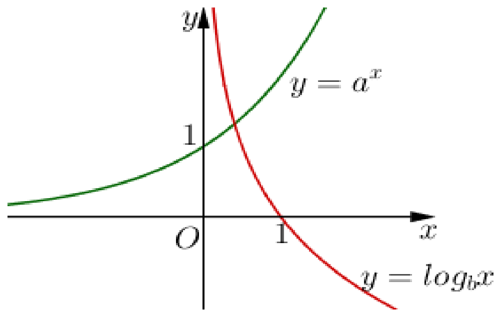
Trong các khẳng định sau, đâu là khẳng định đúng

A. $0 < a < 1, 0 < b < 1$.

B. $a > 1, b < 1$.

C. $0 < b < 1 < a$.

D. $0 < a < 1 < b$.



Ví dụ 1.2

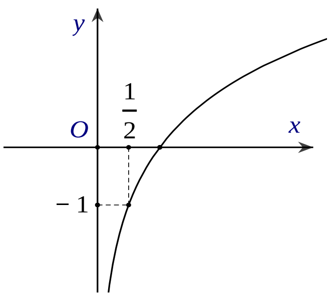
Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số nào sau đây :

A. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

B. $y = \log_2 x$.

C. $y = \log_{\sqrt{2}} x$.

D. $y = \log_2(2x)$.

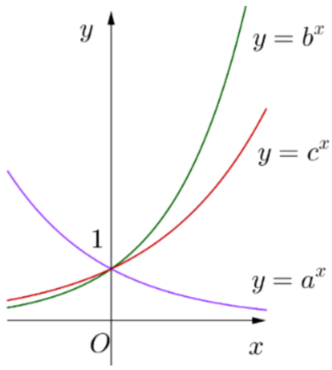


Ví dụ 1.3

Hình bên là đồ thị của ba hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ $(0 < a, b, c \neq 1)$ được vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $a > b > c$ **B.** $b > a > c$

C. $a > c > b$ **D.** $b > c > a$

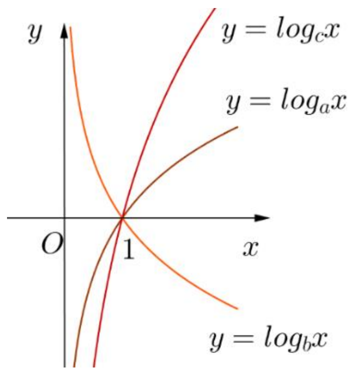


Ví dụ 1.4

Hình bên là đồ thị của ba hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ $(0 < a, b, c \neq 1)$ được vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $a > c > b$ **B.** $a > b > c$

C. $b > c > a$ **D.** $c > b > a$



Dạng 2. Điều kiện xác định của hàm số

Hàm số logarit $y = \log_a[f(x)]$, $(a > 0, a \neq 1)$: Điều kiện xác định : $f(x) > 0$.

Hàm số mũ $y = a^{f(x)}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

Ví dụ 2.1

Xác định tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = 2^x$ b. $y = e^{\frac{x+1}{x-1}}$ c. $y = \log_{\frac{1}{2}}(x + 1)$ d. $y = \ln\frac{x+2}{x^2+3x+2}$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

1. Xét hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(\Delta = b^2 - 4ac;\ \Delta' = (b')^2 - ac)$

$$f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Trường hợp 1: } \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c > 0 \end{cases} \\ \text{Trường hợp 2: } \begin{cases} a > 0 \\ \Delta_{y'} < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

2. Phương trình $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa

$$\left[\begin{array}{l} x_1 \le m < x_2 \\ x_1 < m \le x_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow a.f(m) \le 0 \qquad x_1 < m < x_2 \Leftrightarrow a.f(m) < 0$$

$$m \le x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(m) \ge 0 \\ S > 2m \end{cases} \qquad m < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(m) > 0 \\ S > 2m \end{cases}$$

$$x_1 < x_2 \le m \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(m) \ge 0 \\ S < 2m \end{cases} \qquad x_1 < x_2 < m \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(m) > 0 \\ S < 2m \end{cases}$$

Trong đó : $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, P = x_1.x_2 = \frac{c}{a}$.

3. Nếu hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất trên tập D ,thế thì: $\forall x \in D, f(x) \ge m \Leftrightarrow \min_{x \in D} f(x) \ge m$

4. Nếu hàm số $f(x)$ có giá trị lớn nhất trên tập D, thế thì : $\forall x \in D, f(x) \le m \Leftrightarrow \max_{x \in D} f(x) \le m$.

Ví dụ 2.2

Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 - 2x - m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Lời giải

....

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1. Xác định tập xác định của các hàm số sau

a. $y = e^{2x+1}$ b. $y = 2^{\frac{x+1}{x-1}}$ c. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x^2-4}}$

d. $y = \log_2(5 - 2x)$ e. $y = \ln(x^2 - 4x + 3)$ f. $y = \log_3 \frac{3x+2}{1-x}$

Câu 2. Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \log_2[x^2 - 2(m-1)x - m^2 + 1]$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \ln(-x^2 + mx + 2m + 1)$ xác định với mọi $x \in (1; 2)$.

Dạng 3. Đạo hàm của hàm số

$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u)' = u'a^u \ln a$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u'e^u$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}\ (x > 0)$	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}\ (u > 0)$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}\ (x > 0)$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}\ (u > 0)$

Ví dụ 3.1

Tính đạo hàm của các hàm số : a. $y = \log_{0,5}(x^2)\ (x \neq 0)$ b. $y = 2^{3-x}$

Lời giải

....

....

....

....

Ví dụ 3.2

Cho hàm số $f(x) = x \ln x$. Tính giá trị $f''(e)$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1. Tính đạo hàm các hàm số sau:

a. $y = e^{2x}$ b. $y = \ln(3 - x)$ (với $x < 3$) c. $y = 2^{x^2 - x}$

d. $y = 2xe^x$ e. $y = 2^x \cos x$ f. $y = \frac{x+1}{4^x}$

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = (2m - 1)e^x + 3$. Tìm giá trị của m để $f'(-\ln 3) = \frac{5}{3}$?

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = xe^x$. Tính giá trị $f''(1)$?

Bài 5 PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ, LÔGARIT

TRỌNG TÂM

1. Phương trình mũ

Nếu $a > 0, a \neq 1$ thì $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

Nếu a chứa ẩn thì $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow (a-1)[f(x) - g(x)] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ f(x) = g(x) \end{array}\right.$

$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).\log_a b$ (**logarit hóa**).

2. Phương trình lôgarit

Với $a > 0, a \neq 1$: $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$

$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

$\log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = a^{g(x)}$ (**mũ hóa**)

3. Bất phương trình mũ

Nếu $a > 1$ thì $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ (cùng chiều)

Nếu $0 < a < 1$ thì $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$. (ngược chiều)

Nếu a chứa ẩn thì $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow (a-1)[f(x) - g(x)] > 0$.

4. Bất phương trình lôgarit

Nếu $a > 1$ thì $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ (cùng chiều)

Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$ (ngược chiều)

Nếu a chứa ẩn thì $\log_a f(x) > 0 \Leftrightarrow (a-1)(f(x) - 1) > 0$.

5. Công thức lãi kép: $T = A(1+r)^n$

T : Số tiền thu được sau n kỳ

A : Số tiền gửi ban đầu

r : Lãi suất mỗi kỳ

n : Số kỳ hạn gửi tiền

Dạng 1. Phương trình mũ cơ bản

Ví dụ 1.1

Giải các phương trình: a. $3^{4x+5} = 9^{x}$ b. $3^{2x-1} = 5$ c. $9^{x-1} = \left(27\sqrt{3}\right)^{2x+4}$

Lời giải

Ví dụ 1.2

Giải phương trình $2^{x} + 2^{x+1} = 3^{x} + 3^{x+1}$?

Lời giải

Bài tập tự luyện

Câu 1. Giải các phương trình sau:

a. $2^{2x^2+5x+4}=4$ b. $3^{x^2-4x}=\frac{1}{27}$ c. $(0,2)^{3-x}=3125$

d. $3^{x+1}=2$ e. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}=8^{3-x}$ f. $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2x+1}=2-\sqrt{3}$

g. $\left(\frac{1}{9}\right)^{x}=3^{x-1}$ h. $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1}=\left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$ i. $4^{2x+3}=\left(2\sqrt{2}\right)^{4-x}$

Câu 2. Giải các phương trình sau:

a. $3^{2x-1}+3^{2x}=108$ b. $2^{x-1}+2^{x}+2^{x+1}=28$

Dạng 2. Phương trình logarit cơ bản

Ví dụ 2.1

Giải các phương trình: a. $\log_5(3x-2)=2$ b. $\log_{\sqrt{2}}(x-1)=1-\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1. Giải các phương trình:

a. $\log_3(5x+3)=\log_3(7x+5)$ b. $\ln(x-2)=3$

c. $\log_2(x^2-1)=3$ d. $\log(x^2-6x+7)=\log(x-3)$

Câu 2. Giải các phương trình:

a. $\log_2(x-5)=3-\log_2(x+2)$

b. $\lg(x+2)-\lg(x-2)=1$

c. $\log_3(x^2-6)=\log_3(x-2)+2$

d. $\frac{1}{2}\log(x^2-4x-1)=\log(8x)-\log(4x)$

e. $\log_{\sqrt{2}}x+4\log_4 x+\log_8 x=13$

f. $\log_2 x.\log_3(2x-1)=\log_2 x$

Dạng 3. Sử dụng ẩn phụ để giải phương trình

Ví dụ 3.1

Giải phương trình $9^x-5.3^x+6=0$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.2

Giải phương trình $6.4^x-13.6^x+6.9^x=0$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.3

Giải phương trình $6^{x}-2^{x+1}-3^{x+1}+6=0$?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3.4

Giải phương trình $4\log_{25}^{2}x-5\log_{5}x-6=0$?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài tập tự luyện

Câu 1. Giải các phương trình:

a. $64^{x}-8^{x}-56=0$

b. $2^{2x}-3.2^{x+2}+32=0$

c. $3^{x+1}+3^{1-x}=10$

d. $4^{1+x}+4^{1-x}=2(2^{2+x}-2^{2-x})+8$

Câu 2. Giải các phương trình:

a. $3.4^x - 2.6^x = 9^x$

b. $4.9^x + 12^x - 3.16^x = 0$

c. $2.27^x + 18^x = 4.12^x + 3.8^x$

Câu 3. Giải các phương trình:

a. $12.3^x + 3.15^x - 5^{x+1} = 20$

b. $5^{x^2-4x+3} + 5^{x^2+7x+6} = 5^{2x^2+3x+9} + 1.$

Câu 4. Giải các phương trình

a. $\log_4^2 x - \log_{16} x = 0$

b. $\frac{1}{5-\log_2 x} + \frac{2}{1+\log_2 x} = 1$

Dạng 4. Bất phương trình mũ – bất phương trình logarit

Ví dụ 4.1

Giải các bất phương trình: a. $2^x < 32$ b. $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 32$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 4.2

Giải bất phương trình $9^x - 4.3^x - 5 \geq 0$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 4.3

Giải các bất phương trình a. $\log_{\frac{1}{2}}(3x+1) > -3$ b. $\log_{\sqrt{3}}(2-x) > \log_3 4$

Lời giải

Ví dụ 4.4

Giải bất phương trình $\log_{0,2}^2 x - 5\log_{0,2} x < -6$?

Lời giải

Ví dụ 4.5

Giải bất phương trình $\left(3^{x^2} - 9^x\right)[\log_3(x+25) - 3] \leq 0$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1. Giải các bất phương trình

a. $4^x > 64^{x-1}$

b. $3^{x^2-x} < 9$

c. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} \geq \frac{1}{32}$

d. $\left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2-3x} < \frac{9}{7}$

Câu 2. Giải các bất phương trình

a. $4^x - 3.2^x - 4 > 0$

b. $3.9^x - 10.3^x + 3 < 0$

c. $3.9^x - 10.3^x + 3 < 0$

Câu 3. Giải các bất phương trình

a. $\log_5(x+1) \leq -1$

b. $\log_8(4-2x) \geq 2$

c. $\log_{\frac{1}{5}}(3x-5) > \log_{\frac{1}{5}}(x+1)$

Câu 4. Giải các bất phương trình

a. $\lg(x+2)-\lg(x-2)<1$

b. $\log_4(2x^2+3x+1)>\log_2(2x+1)$

c. $2\log_2(x-1)\le\log_2(5-x)+1$

d. $\frac{1}{2}\log(x^2-4x-1)>\log(8x)-\log(4x)$

Câu 5. Giải bất phương trình $\log^2 x^3-20\log\sqrt{x}+1\ge 0$.

Câu 6. Giải các phương trình, bất phương trình

a. $\log_2(5-2^x)=2-x$

b. $\log_2(5^{x+1}-25^x)=2$

c. $\log_2(3.2^x-2)<2x$

Câu 7. Giải các bất phương trình:

a. $(4^x-65.2^x+64)[2-\log_3(x+3)]\ge 0$

b. $(x^3-9x)\ln(x+5)\le 0$

Dạng 5. Bài toán lãi kép

Công thức lãi kép: $T=A(1+r)^n$

T : Số tiền thu được sau n kỳ

A : Số tiền gửi ban đầu

r : Lãi suất mỗi kỳ

n : Số kỳ hạn gửi tiền

Ví dụ 1.1

Một người gửi số tiền 2 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,65%/tháng. Biết rằng nếu người đó không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Số tiền người đó lãnh được sau hai năm, nếu trong khoảng thời gian này không rút tiền ra và lãi suất không đổi là bao nhiêu?

Lời giải

....

....

....

Ví dụ 1.2

Một người gửi số tiền 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6%/năm. Biết rằng nếu người đó không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Nếu không rút tiền ra và lãi suất không đổi trong các năm sau đó, sau ít nhất bao nhiêu năm thì người này nhận được ít nhất 25 triệu tiền lãi?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1. Một người gửi số tiền 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,6%/tháng. Biết rằng nếu người đó không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Nếu trong 5 năm người này không rút tiền ra và lãi suất không đổi thì tổng số tiền người đó được nhận là bao nhiêu?

Câu 2. Năm 2020 một hãng xe niêm yết giá bán loại xe X là 750000000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm **giảm 2%** giá bán so với giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)

Câu 3. Một người quyết định gửi vào ngân hàng 20 triệu với lãi suất 6,5%/năm. Biết rằng nếu người đó không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Người này phải gửi ngân hàng ít nhất bao nhiêu năm thì nhận được số tiền cả gốc lẫn lãi trên 50 triệu?

Câu 4. Một người quyết định gửi vào ngân hàng với lãi suất 7%/năm. Biết rằng nếu người đó không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Người này phải gửi ngân hàng ít nhất bao nhiêu năm thì nhận được số tiền gấp đôi số tiền ban đầu?

Chương 1 NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Bài 1 NGUYÊN HÀM

TRỌNG TÂM

1. Nguyên hàm

Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (K là khoảng, đoạn hay nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

2. Tính chất của nguyên hàm

Tính chất 1: $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ và $\int f'(x)dx = f(x) + C$

Tính chất 2: $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ với k là hằng số khác 0

Tính chất 3: $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

3. Bảng nguyên hàm thường gặp (với các biểu thức có nghĩa)

Hàm sơ cấp	Thường gặp
$\int k\,dx = kx + C$	
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1)$	$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C\ (x \neq 0)$	$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C\ (a \neq 0)$
$\int \frac{dx}{x^n} = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + C\ \ (x \neq 0)$	$\int \frac{dx}{(ax+b)^n} = \frac{-1}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}} + C$
$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$

TRỌNG TÂM

Hàm sơ cấp	Thường gặp
$\int \tan x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$ với $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\int \tan(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\ln\lvert\cos(ax+b)\rvert + C$ với $ax+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\int \cot x\,dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$ với $x \neq k\pi$	$\int \cot(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\ln\lvert\sin(ax+b)\rvert + C$ với $ax+b \neq k\pi$
$\int \tan^2 x\,dx = \tan x - x + C$ với $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\int \tan^2(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}[\tan(ax+b) - (ax+b)] + C$ với $ax+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\int \cot^2 x\,dx = -\cot x - x + C$ với $x \neq k\pi$	$\int \cot^2(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}[\cot(ax+b) + ax + b] + C$ với $ax+b \neq k\pi$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$ với $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$ với $ax+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$ với $x \neq k\pi$	$\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$ với $ax+b \neq k\pi$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ (0 < a \neq 1)$	$\int a^{px+q}dx = \frac{1}{p.\ln a}a^{px+q} + C \ (0 < a \neq 1)$

Dạng 1. Nguyên hàm cơ bản

Ví dụ 1.1

Tính các nguyên hàm sau:

$I_1 = \int 5\,dx$ $\quad$ $I_2 = \int 2\sqrt{x}\,dx$ $\quad$ $I_3 = \int 5x^2\,dx$

Lời giải

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.2

Tính các nguyên hàm sau:

$I_1 = \int \left(x^2 - 3x + \frac{1}{x} - 2\right) dx$ $\quad$ $I_2 = \int (x+1)(x+2)\,dx$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.3

Tính các nguyên hàm sau:

$I_1 = \int \frac{2}{2x+4}\,dx$ $\quad$ $I_2 = \int \sin 2x \sin 3x\,dx$

Lời giải

....

....

....

Ví dụ 1.4

Tìm $F(x)$, biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=3\sin(2x)$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$?

Lời giải

Bài tập tự luyện

Câu 1: Tính các nguyên hàm sau:

$I_1=\int x^3\,dx$ $\quad I_2=\int \frac{1}{3x}dx$ $\quad I_3=\int \frac{3}{x^5}dx$ $\quad I_4=\int \frac{1}{\sin^2 x}dx$

$I_5=\int \tan x\,dx$ $\quad I_6=\int -\frac{3}{\sqrt{x}}dx$ $\quad I_7=\int 3^x\,dx$ $\quad I_8=\int \sqrt[5]{x}\,dx$

Câu 2: Tính các nguyên hàm sau:

$I_1=\int (x^2-2x+\sin\ x)\,dx$ $\quad I_2=\int \left(5-2x+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)dx$ $\quad I_3=\int (2x+1)(1-3x)\,dx$

Câu 3: Tính các nguyên hàm sau:

$I_1=\int \sqrt{3-5x}\,dx$ $\quad I_2=\int \cos 2x\cos x\,dx$

Câu 4: Tìm $F(x)$, biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=x^2$ và $F(1)=\frac{5}{3}$?

Câu 5: $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\frac{1}{2x-3}$ và $F(1)=3$, tính $F(0)$?

Dạng 2. Nguyên hàm của hàm phân thức

Ví dụ 2.1

Tìm F(x) là nguyên hàm của $f(x) = \frac{2x^4+3}{x^2}$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.2

Tính nguyên hàm $I = \int \frac{2x^2-7x+5}{x-3}dx$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.3

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x+1}{x^2+6x+9}$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

$$\frac{mx+n}{(x-a)(x-b)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}\quad\left(\begin{array}{l} A=\dfrac{mx+n}{\dfrac{d}{dx}\big((x-a)(x-b)\big)\Big|_{x=X}}\xrightarrow{\text{CALC } x=a} A \\ B=\dfrac{mx+n}{\dfrac{d}{dx}\big((x-a)(x-b)\big)\Big|_{x=X}}\xrightarrow{\text{CALC } x=b} B \end{array}\right)$$

$$\frac{px^2+qx+r}{(x-m)(ax^2+bx+c)}=\frac{A}{x-m}+\frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}\ \text{với } \Delta=b^2-4ac<0$$

$$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x-b)^2}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-b)^2}+\frac{C}{x-b}$$

$$\frac{px^3+qx^2+rx+s}{(x-a)^2(x-b)^2}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}+\frac{C}{x-b}+\frac{D}{(x-b)^2}$$

Ví dụ 2.4

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x-1}{2x^2-5x+2}$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.5

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x+1}{(x-1)(x+2)^2}$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1: Tính các nguyên hàm

$I_1 = \int \frac{x^3-2x^2+1}{x^2}dx$ $\quad$ $I_2 = \int \frac{3x+2}{2x-1}dx$ $\quad$ $I_3 = \int \frac{2x^2-7x+5}{x-3}dx$

Câu 2: Tính các nguyên hàm:

$I_1 = \int \frac{x-2}{x^2+2x+1} dx$ $\quad$ $I_2 = \int \frac{2x+1}{(x+1)^3} dx$

Câu 3: Tính các nguyên hàm:

$I_1 = \int \frac{x-2}{x^2-4x+3} dx$ $\quad$ $I_2 = \int \frac{3}{3x^2-10x+3} dx$ $\quad$ $I_3 = \int \frac{2x^2+x-1}{x^3-x^2-2x} dx$

Câu 4: Tính các nguyên hàm:

$I_1 = \int \frac{2x^2+3x-6}{(x+1)(x+2)^2} dx$ $\quad$ $I_2 = \int \frac{x-2}{x^3-4x^2+4x} dx$

Dạng 3. Nguyên hàm đặt ẩn phụ

Ví dụ 3.1

Biết $F(x) = e^x + x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó tính $I = \int f(2x)\, dx$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

1. $\int f(\ln x).\frac{1}{x} dx$	$t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$
2. $\int e^{f(x)}.f'(x)\, dx$	$t = f(x) \Rightarrow dt = f'(x)dx$
3. $\int f(ax+b)^n.x\, dx$	$t = ax + b \Rightarrow dt = xdx$
4. $\int \sqrt[n]{f(x)}.f'(x)\, dx$	$t = \sqrt[n]{f(x)} \Rightarrow t^n = f(x) \Rightarrow nt^{n-1}dt = f'(x)dx$
5. $\int f(\sin x).\cos x\, dx$	$t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x\, dx$
6. $\int f(\cos x).\sin x\, dx$	$t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x\, dx$
7. $\int f(\tan x)\frac{1}{\cos^2 x} dx$	$t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$
8. $\int f(\cot x)\frac{1}{\sin^2 x} dx$	$t = \cot x \Rightarrow dt = -\frac{1}{\sin^2 x} dx$

Ví dụ 3.2

Tìm các nguyên hàm

$I_1 = \int \frac{\ln x\, dx}{x}$ $\qquad$ $I_2 = \int \cos x\, e^{\sin x} dx$

$I_3 = \int x.\sqrt{1+x^2}\, dx$ $\qquad$ $I_4 = \int x(1-x)^{19} dx$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1: Biết $F(x) = e^x - x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó tính $\int f(2x)\,dx$.

Câu 2: Cho $\int f(4x)\,dx = x^2 + 3x + C$. Tính $\int f(x+2)\,dx$. $(4t = x + 2)$

Câu 3: Tìm các nguyên hàm sau bằng phương pháp đặt ẩn phụ

$I_1 = \int \frac{\ln x + 1}{x} dx \ \ (t = \ln x + 1)$ $\qquad$ $I_2 = \int \frac{\ln x + 1}{x.\ln x} dx \ \ (t = \ln x)$

$I_3 = \int 2x.e^{x^2+1} dx \ \ (t = x^2 + 1)$ $\qquad$ $I_4 = \int \sin x . e^{\cos x} dx \ \ (t = \cos x)$.

$I_5 = \int \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx \ \ \left(t = \sqrt{2x+1}\right)$ $\qquad$ $I_6 = \int x^3(x^2+1)^3\,dx \ \ (t = x^2 + 1; x^3 = x^2.x)$

$I_7 = \int \frac{x^3}{x^4+1} dx \ \ (t = x^4 + 1)$ $\qquad$ $I_8 = \int \sin^4 x \cos x\,dx \ \ (t = \sin x)$

Dạng 4. Nguyên hàm từng phần

Cho hai hàm số u và v liên tục trên $[a; b]$ và có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$. Khi đó:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Với $P(x)$ là đa thức, ta thường gặp các dạng nguyên hàm từng phần sau:

$$1. \int P(x).\ln(mx+n)\,dx \Rightarrow \begin{cases} u = \ln(mx+n) \\ dv = P(x)dx \end{cases}$$

$$2. \int P(x).\begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} dx \Rightarrow \begin{cases} u = P(x) \\ dv = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} dx \end{cases}$$

$$3. \int P(x).e^{ax+b}\,dx \Rightarrow \begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax+b}dx \end{cases}$$

$$4. \int \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix}.e^x\,dx \Rightarrow \begin{cases} u = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} \\ dv = e^x dx \end{cases}$$

Ví dụ 4.1

Tính các nguyên hàm: $I_1 = \int (x-1)\ln x\,dx$ $\quad I_2 = \int x^2 \sin 2x\,dx$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 4.2

Tính nguyên hàm: $I = \int \sin x \,.\, e^x\,dx$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1: Tính các nguyên hàm

$I_1 = \int 2x\cos(1-x)\,dx$

$I_2 = \int (x^2 - x)e^x\,dx$

$I_3 = \int x\ln x\,dx$

$I_4 = \int \cos x\,.\,e^x\,dx$

Bài 2 TÍCH PHÂN

TRỌNG TÂM

1. Định nghĩa

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

2. Tính chất của tích phân : với $a < b < c$

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3. $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

4. $\int_a^b k.f(x)\,dx = k.\int_a^b f(x)\,dx\ (k \in \mathbb{R})$

5. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$

Dạng 1. Tích phân cơ bản

Ví dụ 1.1

Cho $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Tính $I = \int_1^2 f(x)\,dx$.

Lời giải

....

....

....

Ví dụ 1.2

Tính tích phân $I=\int_0^1 (2x-1)\,dx$?

Lời giải

....

....

....

....

Ví dụ 1.3

Cho hàm số f(x) và g(x) liên tục trên đoạn $[1;5]$, $\int_1^5 f(x)\,dx=2$. Tính $\int_1^5 [3f(x)-x^2]\,dx$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.4

Cho hàm số f(x) liên tục trên đoạn $[1;5]$, $\int_1^5 f(x)dx=2$ và $\int_1^3 f(x)\,dx=7$. Tính $\int_3^5 f(x)dx$.

Lời giải

....

....

....

....

....

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Ví dụ 1.5

Biết F(x) là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x-1}$ và $F(2) = 1$. Tính $F(3)$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1: Cho $F(x) = \sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$, tính giá trị $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} f(x)\,dx$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;5]$, $\int_1^2 f(x)\,dx = 9$ và $\int_2^5 f(x)\,dx = 6$. Tính $\int_1^5 f(x)\,dx$?

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$, $\int_{-1}^3 f(x)\,dx = 2$ và $\int_1^3 f(x)\,dx = 5$. Tính $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$?

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$, $\int_0^3 f(x)\,dx = -2$ và $\int_1^2 f(x)\,dx = 5$. Tính $I = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx$?

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$, $\int_1^3 f(x)\,dx = 5$ và $\int_1^3 g(x)\,dx = 1$. Tính $\int_1^3 [2g(x) - f(x)]\,dx$.

Câu 6: Tính các tích phân

$I_1 = \int_0^1 (x+1)\,dx$ $\quad$ $I_2 = \int_0^1 \frac{1}{2x+1}\,dx$ $\quad$ $I_3 = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ $\quad$ $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin x\,dx$

Câu 7: Tìm giá trị số thực a thỏa mãn $\int_{-1}^a e^{x+1}\,dx = e^2 - 1$.

Câu 8: Cho $\int_0^2 f(x)\,dx = 3$, tính giá trị $I = \int_2^0 [5x - 2f(x)]dx$?

Câu 9: Cho $\int_0^2 f(x)\,dx = -5$ và $\int_2^0 g(x)\,dx = 1$, tính giá trị $I = \int_0^2 [3x - f(x) + 2g(x)]\,dx$.

Câu 10: Biết F(x) là một nguyên hàm của $f(x) = \sin x$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$. Tính $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Dạng 2. Tích phân đặt ẩn phụ

Ví dụ 2.1

Cho $\int\limits_{-1}^{1} f(2x+1)\,dx = 6$, tính tích phân $I = \int\limits_{-1}^{3} f(2-x)\,dx$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

1. $\int f(\ln x).\frac{1}{x}dx$	$t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x}\,dx$
2. $\int e^{f(x)}.f'(x)\,dx$	$t = f(x) \Rightarrow dt = f'(x)\,dx$
3. $\int [f(x)]^n.f'(x)\,dx$	$t = f(x) \Rightarrow dt = f'(x)\,dx$
4. $\int \sqrt[n]{f(x)}.f'(x)\,dx$	$t = \sqrt[n]{f(x)} \Rightarrow t^n = f(x) \Rightarrow nt^{n-1}dt = f'(x)\,dx$
5. $\int f(\sin x).\cos x\,dx$	$t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x\,dx$
6. $\int f(\cos x).\sin x\,dx$	$t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x\,dx$
7. $\int f(\tan x)\frac{1}{\cos^2 x}dx$	$t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx$
8. $\int f(\cot x)\frac{1}{\sin^2 x}dx$	$t = \cot x \Rightarrow dt = -\frac{1}{\sin^2 x}dx$
9. $\int f\left(\sqrt{a^2-x^2}\right).x^{\text{chẵn}}\,dx$	$\left[\begin{array}{l} x = a\sin t \Rightarrow dx = a\cos t\,dt \\ x = a\cos t \Rightarrow dx = -a\sin t\,dt \end{array}\right.$
10. $\int f\left(\sqrt{x^2+a^2}\right).x^{\text{chẵn}}\,dx$	$\left[\begin{array}{l} x = a\tan t \Rightarrow dx = a(1+\tan^2 t)\,dt \\ x = a\cot t \Rightarrow dx = -a(1+\cot^2 t)\,dt \end{array}\right.$

11. $\int f\left(\sqrt{x^2-a^2}\right).x^{\text{chẵn}}\,dx$ $\quad \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{a}{\sin t} \Rightarrow dx = a\cos t\,(1+\cot^2 t)\,dt \\ x=\dfrac{a}{\cos t} \Rightarrow dx = -a\sin t\,(1+\tan^2 t)\,dt \end{array}\right.$

Ví dụ 2.2

Tính tích phân $I=\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.2

Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, e^{\sin x}\,dx$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1: Cho $\int_{-3}^{1} f(x)\,dx = 4$, tính $I = \int_{-1}^{1} f(2x-1)\,dx$?

Câu 2: Cho $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 12$, tính $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} f(2\cos x)\sin x\,dx$?

Câu 3: Cho $\int_{-1}^{1} f(2x-1)\,dx = 4$, tính $I = \int_{-3}^{1} f(x)\,dx$?

Câu 4: Cho $\int_{0}^{2} x\,f(x^2)\,dx = 1$, tính $I = \int_{0}^{4} f(x)\,dx$?

Câu 5: Cho $\int_{0}^{1} f(x+2)\,dx = 2$, tính $I = \int_{1}^{2} [2f(4-x) - x + 2]\,dx$?

Câu 6: Tính các tích phân:

$I_1 = \int_{e}^{e^2} \frac{\ln x + 1}{x.\ln x}\,dx$ $(t = \ln x)$ $I_2 = \int_{0}^{1} 2x.e^{x^2+1}\,dx$ $(t = x^2 + 1)$

$I_3 = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x.e^{\cos x}\,dx$ $(t = \cos x)$ $I_4 = \int_{0}^{4} \sqrt{2x+1}\,dx$ $(t = \sqrt{2x+1})$

$I_5 = \int_{0}^{1} x\sqrt{1+x^2}\,dx$ $(t = \sqrt{1+x^2})$ $I_6 = \int_{0}^{4} \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\,dx$ $(t = \sqrt{2x+1})$

$I_7 = \int_{0}^{1} x(1-x)^{19}\,dx$ $(t = 1 - x)$ $I_8 = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cos^3 x\,dx$ $(t = \cos x)$

Dạng 3. Tích phân của hàm phân thức

Ví dụ 3.1

Tính tích phân $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{2x^4 + 3}{x^2}\,dx$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.2

Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{2x^2 - 7x + 5}{x - 3} dx$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.3

Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x + 1}{x^2 + 6x + 9} dx$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

$$\frac{mx+n}{(x-a)(x-b)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}\quad\left(\begin{array}{l} A=\dfrac{mx+n}{\dfrac{d}{dx}\big((x-a)(x-b)\big)\Big|_{x=X}}\xrightarrow{\text{CALC } x=a} A \\ B=\dfrac{mx+n}{\dfrac{d}{dx}\big((x-a)(x-b)\big)\Big|_{x=X}}\xrightarrow{\text{CALC } x=b} B\end{array}\right)$$

$$\frac{px^2+qx+r}{(x-m)(ax^2+bx+c)}=\frac{A}{x-m}+\frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}\ \text{với } \Delta=b^2-4ac<0$$

$$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x-b)^2}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-b)^2}+\frac{C}{x-b}$$

$$\frac{px^3+qx^2+rx+s}{(x-a)^2(x-b)^2}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}+\frac{C}{x-b}+\frac{D}{(x-b)^2}$$

Ví dụ 3.3

Tính tích phân $I=\int_{-1}^{0}\frac{x-1}{2x^2-5x+2}dx$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1: Tính các tích phân:

$I_1 = \int_1^2 \frac{x+1}{x}dx$ $\quad$ $I_2 = \int_1^2 \frac{x^3-2x^2+1}{x^2}dx$

Câu 2: Tính các tích phân

$I_1 = \int_1^2 \frac{3x+2}{2x-1}dx$ $\quad$ $I_2 = \int_1^2 \frac{6x+2}{3x-1}dx$ $\quad$ $I_3 = \int_1^2 \frac{2x^2-7x+5}{x-3}dx$

Câu 3: Tính các tích phân:

$I_1 = \int_0^1 \frac{2x+1}{(x+1)^3}dx$ $\quad$ $I_2 = \int_0^1 \frac{3x+1}{4x^2+4x+1}dx$

Câu 4: Tính các tích phân:

$I_1 = \int_{-1}^0 \frac{-2}{x^2-4x+3}dx$ $\quad$ $I_2 = \int_{-1}^0 \frac{x-2}{x^2-4x+3}dx$

$I_3 = \int \frac{2x^2+x-1}{x^3-x^2-2x}dx$ $\quad$ $I_4 = \int_0^1 \frac{x^2+2x+3}{x^2+4x+3}dx$

Câu 5: Biết $I = \int_3^4 \frac{dx}{x^2+x} = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a + b + c$.

Dạng 4. Tích phân từng phần

Cho hai hàm số u và v liên tục trên [a; b] và có đạo hàm liên tục trên [a; b]. Khi đó:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Với P(x) là đa thức, ta thường gặp các dạng nguyên hàm từng phần sau:

1. $\int P(x).\ln(mx+n)\,dx \Rightarrow \begin{cases} u = \ln(mx+n) \\ dv = P(x)dx \end{cases}$

2. $\int P(x).\begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} dx \Rightarrow \begin{cases} u = P(x) \\ dv = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} dx \end{cases}$

3. $\int P(x).e^{ax+b}\,dx \Rightarrow \begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax+b}dx \end{cases}$

4. $\int \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix}.e^x\,dx \Rightarrow \begin{cases} u = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} \\ dv = e^x dx \end{cases}$

Ví dụ 4.1

Tính các tích phân : $\quad I_1 = \int_1^e (2x-5)\ln x\,dx \quad\quad I_2 = \int_0^1 xe^{2x-1}\,dx$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 4.3

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và $f(1)=2$. Biết rằng $\int_0^1 f(x)\,dx=1$. Tính $I=\int_0^1 x\,f'(x)\,dx$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1: Cho $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (3 - 2x)\cos 2x\,dx$. Khi đó ta được:

A. $I = (2x-3)\sin 2x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x\,dx$

B. $I = (2x-3)\sin 2x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x\,dx$

C. $I = \frac{1}{2}(3-2x)\sin 2x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x\,dx$

D. $I = \frac{1}{2}(3-2x)\sin 2x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x\,dx$

Câu 2: Tính các tích phân sau:

$I_1 = \int_1^e \ln x\,dx$	$\begin{pmatrix} u = \ln x \\ dv = dx \end{pmatrix}$	$I_2 = \int_1^e (x+1)\ln x\,dx$	$\begin{pmatrix} u = \ln x \\ dv = (x+1)\,dx \end{pmatrix}$
$I_3 = \int_0^1 x\ln(x+1)\,dx$	$\begin{pmatrix} u = \ln(x+1) \\ dv = x\,dx \end{pmatrix}$	$I_4 = \int_0^1 (x+1)e^x\,dx$	$\begin{pmatrix} u = x+1 \\ dv = e^x\,dx \end{pmatrix}$
$I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\sin x\,dx$	$\begin{pmatrix} u = x+1 \\ dv = \sin x\,dx \end{pmatrix}$	$I_5 = \int_0^1 (x^2 - x)e^x\,dx$	$\begin{pmatrix} u = x^2 - x \\ dv = e^x\,dx \end{pmatrix}$
$I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (x^2+1)\cos x\,dx$	$\begin{pmatrix} u = x^2+1 \\ dv = \cos x\,dx \end{pmatrix}$	$I_8 = \int_1^e \ln^2 x\,dx$	$\begin{pmatrix} u = \ln^2 x \\ dv = 1\,dx \end{pmatrix}$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(3) = 1$ và $\int_0^1 xf(3x)\,dx = 1$. Tính $\int_0^3 x^2 f'(x)\,dx$.

Bài 3 ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TRONG HÌNH HỌC

TRỌNG TÂM

1. Diện tích hình phẳng

a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định:

$$\boxed{S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx}$$

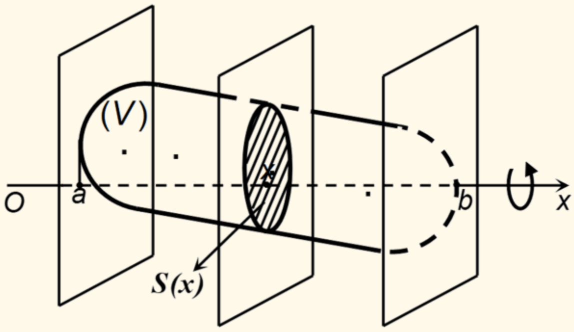
b) Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, $x = h(y)$ và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ được xác định:

$$\boxed{S = \int_c^d |g(y) - h(y)|\,dy}$$

TRỌNG TÂM

2. Thể tích khối tròn xoay

a) Thể tích vật thể: Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b; S(x) là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a \le x \le b)$. Giả sử S(x) là hàm số liên tục trên đoạn [a; b].



$$\boxed{V = \int_a^b S(x)\,dx}$$

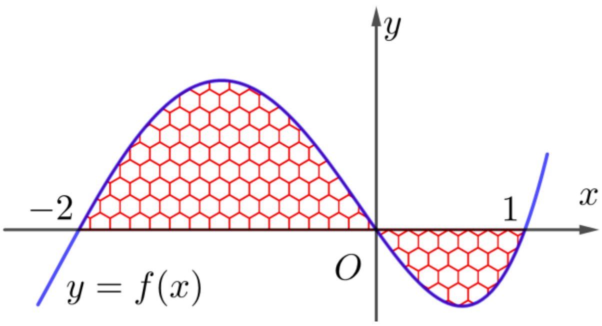
b) Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox:

$$\boxed{V = \pi \int_a^b \left|f^2(x) - g^2(x)\right| dx}$$

Dạng 1. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các hàm số

Ví dụ 1.1

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Diện tích hình phẳng phần được đánh dấu trong hình được tính theo công thức nào dưới đây:



A. $S = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx$.

B. $S = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx$.

C. $S = \int_{0}^{-2} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx$.

D. $S = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx - \int_{0}^{1} f(x)\,dx$.

Lời giải

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.2

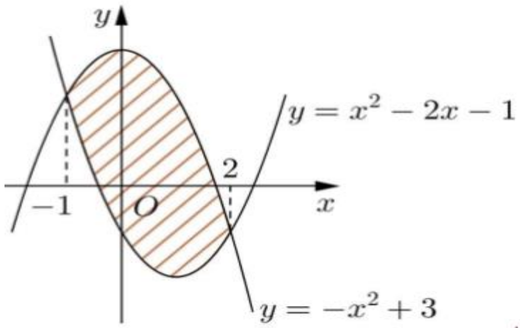
Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây:

A. $S=\int_{-1}^{2}(2x^2-2x-4)\,dx$.

B. $S=\int_{-1}^{2}(-2x+2)\,dx$.

C. $S=\int_{-1}^{2}(2x-2)\,dx$.

D. $S=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)\,dx$.



Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.3

Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-2x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=3$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.4

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x - x^2$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

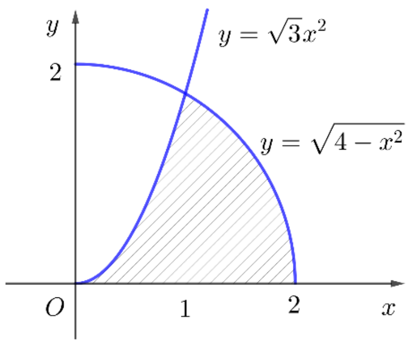
....

....

....

Ví dụ 1.5

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \sqrt{3}x^2$ $(x \geq 0)$ và cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4 - x^2}$ (với $0 \leq x \leq 2$) và trục hoành (phần được giới hạn trong hình vẽ). Diện tích của (H) có giá trị bằng:



A. $\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ **C.** $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

....

....

....

Ví dụ 1.6

Tính diện tích giới hạn bởi các đường $y = x^2$ (1), $y = \frac{x^2}{8}$ (2), $y = \frac{27}{x}$ (3).

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

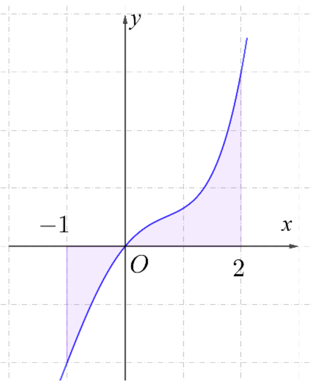
....

....

....

Bài tập tự luyện

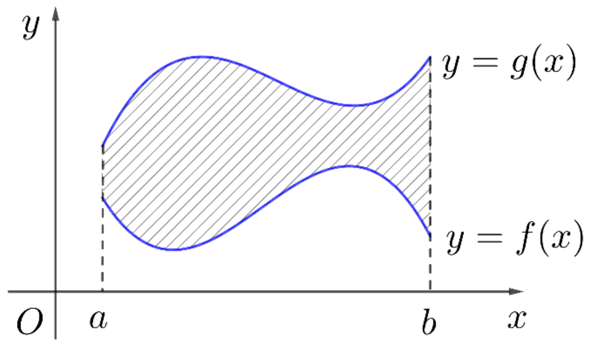
Câu 1: Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$. Đặt $a = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx$, $b = \int_{0}^{2} f(x)\,dx$, mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $S = -a + b$.	**B.** $S = a + b$.

C. $S = -a - b$.	**D.** $S = a - b$.

Câu 2. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây:



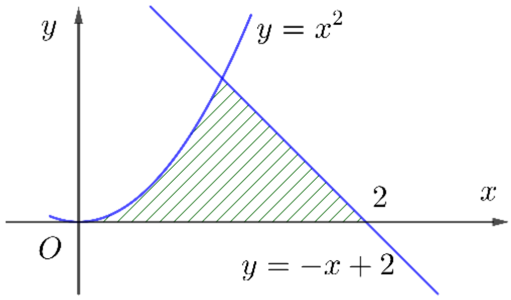
A. $S = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

B. $S = -\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

C. $S = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

D. $S = -\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

Câu 3. Tính diện tích hình phẳng tạo thành bởi parabol $y = x^2$, đường thẳng $y = -x + 2$ và trục hoành trên đoạn $[0; 2]$ (hình vẽ minh họa ở bên).



Câu 4. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị các hàm số:

a. $y = x^2 - 2x, y = x, x = -1, x = 2.$

b. $y = e^{2x}$, trục hoành và $x = 0, x = 1.$

Câu 5. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị các hàm số:

a. $y = x^2 - 4x + 6$ và $y = 3.$

b. $y = \frac{x+1}{x+2}$, trục hoành và đường thẳng $x = 2.$

Câu 6. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị các hàm số:

a. $y = \ln x, y = 1 - x, y = 1.$

b. $y = 2x - 2, y = \frac{x}{2} + 1, y = x^2 - 4x + 3, x \geq 2.$

Dạng 2. Thể tích của vật thể

Ví dụ 2.1

Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 1$ và $x = 3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1 \leq x \leq 3)$ thì được thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2 - 2}$?

Lời giải

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.2

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 2, y = 0, x = 1, x = 2$. Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục hoành.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1. Tìm thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{4}{x}$, $y = 0, x = 1, x = 4$ quanh trục Ox.

Câu 2. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x-1}$, trục hoành và đường thẳng $x = 3$. Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox.

Câu 3. Tìm thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x - 1, y = -x^2 + 3$ quanh trục trục hoành.

Chương 4 SỐ PHỨC

Bài 1 SỐ PHỨC – CÁC PHÉP TOÁN TRONG TẬP PHỨC

TRỌNG TÂM

1. Định nghĩa.

- **Đơn vị ảo** : Số i thỏa mãn $i^2 = -1$ được gọi là **đơn vị ảo.**
- Số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Gọi a là **phần thực**, b là **phần ảo** của số phức z.
- Tập số phức $\mathbb{C} = \{a + bi / a, b \in \mathbb{R}; i^2 = -1\}$.

  Tập số thực $\mathbb{R}$ là tập con của tập số phức $\mathbb{C}$.
- Hai số phức bằng nhau: $a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

✍ Đặc biệt:

- Khi phần ảo $b = 0 \Leftrightarrow z = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z$ là **số thực**.
- Khi phần thực $a = 0 \Leftrightarrow z = bi \Leftrightarrow z$ là **số thuần ảo.**
- Số $0 = 0 + 0i$ **vừa là số thực, vừa là số ảo.**

2. Môđun của số phức.

- $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ được gọi là môđun của số phức z.
- Kết quả: $\forall z \in \mathbb{C}$ ta có:

$$|z| \geq 0; |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0;\ |z^2| = |z|^2;\ |z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|;\ \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

3. Số phức liên hợp.

- Cho số phức $z = a + bi$. Ta gọi số phức liên hợp của z là $\bar{z} = a - bi$.
- Kết quả: $\forall z \in \mathbb{C}$ ta có:

$$\bar{\bar{z}} = z;\ \ |\bar{z}| = |z|;\ \ \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2};\ \ \overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2};\ \ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

z là số thực $\Leftrightarrow z = \bar{z}$ z là số thuần ảo $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$

TRỌNG TÂM

4. Phép toán trên tập số phức:

Cho hai số phức $z_1 = a + bi$ và $z_2 = c + di$ thì:

- **Phép cộng số phức:** $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$
- **Phép trừ số phức:** $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$

  Mọi số phức $z = a + bi$ thì **số đối** của z là

$$-z = -a - bi;\ z + (-z) = (-z) + z = 0$$

- **Phép nhân số phức:** $z_1 . z_2 = (ab - bd) + (ad + bc)i$

  Chú ý $\begin{cases} i^{4k} = 1 \\ i^{4k+1} = i \\ i^{4k+2} = -1 \\ i^{4k+3} = -i \end{cases}$

- **Phép chia số phức:**

  Số phức nghịch đảo của $z = a + bi \neq 0$: $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{1}{a^2 + b^2} \cdot \bar{z}$

  Phép chia số phức: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 . \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2} . i$ (với $z_2 \neq 0$)

Dạng 1. Các tính chất của số phức và các phép toán trên tập phức

Ví dụ 1.1

Cho số phức $z = 3i - 2$. Xác định phần thực, phần ảo, số phức liên hợp, modul, số phức đối và số phức nghịch đảo của z?

Lời giải

Với $z = 3i - 2 = -2 + 3i = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ ta có

- Phần thực $x = \boxed{}$, phần ảo $y = \boxed{}$.
- Số phức liên hợp $\bar{z} = x - yi = \boxed{}$
- .. Modul của số phức: ....
- .. Số phức đối :..
- Số phức nghịch đảo:

  ....

  ....

  ....

  ....

Ví dụ 1.2

Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Xác định phần thực, phần ảo của số phức:

$$w = 3z_1 - 2z_2$$

Lời giải

....

....

Ví dụ 1.3

Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Xác định phần ảo của số phức $w = z_1 z_2$?

Lời giải

....

....

Ví dụ 1.4

Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Xác định modun của số phức $w = \frac{z_1}{z_2}$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.5

Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn z^2 là thuần ảo và $|z| = \sqrt{2}$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1. Cho số phức $z_1 = 3 + 4i$ và $z_2 = 8i - 6$. Xác định phần thực, phần ảo, số phức liên hợp, modul, số phức đối và số phức nghịch đảo của z_1, z_2?

Câu 2. Cho $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = 3 - i$. Xác định số phức liên hợp, modul của các số phức:

$$w_1 = z_1 + 3z_1z_2 \qquad\qquad w_2 = \frac{z_1 - z_2}{z_2}$$

Câu 3. Cho số phức $z = 3 + 2i$. Tìm số phức $w = z(1 + i)^2 - \overline{z}$.

Câu 4. Tìm môđun của các số phức $z_1 = 1 + i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{2000}$

Câu 5. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $(1 + 2i)z$ là thuần ảo và $|2z - \overline{z}| = \sqrt{13}$?

Dạng 2. Phương trình phức

Ví dụ 2.1

Cho số phức $z + 2 - 4i = 1 - 6i$. Xác định phần thực, phần ảo của z?

Lời giải

....

....

....

....

Ví dụ 2.2

Cho số thực x, y thỏa mãn đẳng thức $(x - 3yi + 1) - i(2x + yi - 1) = 1 - 3i$

Tính $x + 3y$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.3

Biết $z = 1 - 2i$ là nghiệm phức của phương trình $z^2 - az + b = 0$. Biết $z = 1 - 2i$, tính giá trị $a + b$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.4

Tìm số phức z, biết $z - (2 + 3i)\overline{z} = 1 - 9i$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.5

Cho số phức $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $z + 2 + i - |z|(1 + i) = 0$ và $|z| > 1$. Tính $P = a + b$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.6

Tìm số phức z thỏa mãn $|z| = 5$ và $|z + 3| = |z + 3 + 10i|$?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

....

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1. Xác định số phức z thỏa mãn các phương trình sau:

a. $\bar{z} - i = (2+i)(1-i) + 1 + 3i$

b. $(2+i)z + \frac{1-i}{1+i} = 5 - i$

c. $z + 4 = z(2-i)$

d. $(1+i)z + 2 - 3i = z(2-i) - 2$

Câu 2. Tìm tất cả các số thực x, y thỏa mãn điều kiện:

a. $(1-2i)x + (1+2y)i = 1 + i$

b. $2x + y + (2y - x)i = x - 2y + 3 + (y + 2x)i$

Câu 3. Phương trình $z^2 + az + b = 0$ nhận số phức $1 - \sqrt{2}i$ là nghiệm, xác định a và b ?

Câu 4. Xác định số phức z thỏa mãn các phương trình sau:

a. $(1-i)z + 4\bar{z} = 7 - 7i$

b. $z + (1-2i)\bar{z} = 2 - 4i$

c. $2(z+1) = 3\bar{z} + i(5-i)$

d. $3z.\bar{z} + 2017(z - \bar{z}) = 12 - 2018i$

Câu 5. Cho số phức z thỏa mãn $|z+3| = 5$ và $|z - 2i| = |z - 2 - 2i|$. Tính $|z|$.

Câu 6. Cho số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $z + 1 + 3i - |z|i = 0$. Tính $S = a + 3b$.

Dạng 3. Phương trình bậc hai với hệ số thực

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ $(a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0)$. Xét $\Delta = b^2 - 4ac$, ta có

- $\Delta = 0$: phương trình có nghiệm thực $x = -\frac{b}{2a}$.
- $\Delta > 0$: phương trình có hai nghiệm thực được xác định bởi công thức: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- $\Delta < 0$: phương trình có hai nghiệm phức được xác định bởi công thức:$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

Chú ý: Mọi phương trình bậc n: $A_o z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots + A_{n-1} z + A_n = 0$ luôn có n nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt).

Ví dụ 3.1

Trong $\mathbb{C}$, giải phương trình $z^2 - z + 1 = 0$?

Lời giải

....

....

....

Ví dụ 3.2

Biết $z_1; z_2$ là hai nghiệm của phương trình $2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$. Tinh giá trị của $z_1^2 + z_2^2$?

Lời giải

....

....

....

....

Ví dụ 3.3

Trong $\mathbb{C}$, tính tổng modul các nghiệm của phương trình $z^4 - 3z^2 - 4 = 0$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1. Giải các phương trình sau trên tập số phức

a. $-3z^2 + 2z - 1 = 0$

b. $7z^2 + 3z + 2 = 0$

c. $z^4 + z^2 - 6 = 0$

d. $z^4 + 7z^2 + 10 = 0$

Câu 2. Gọi $z_1; z_2$ là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 4 = 0$. Tính các giá trị

a. $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$

b. $B = |z_1|^2 + z_1.z_2$

c. $C = z_1z_2 + i(z_1 + z_2)$

Câu 3. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + a = 0$. Xác định giá trị của a, biết rằng $z_1^2 + z_2^2 = 2$.

Bài 2 TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN CỦA SỐ PHỨC

TRỌNG TÂM

Số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ có **điểm biểu diễn là M**$(\mathbf{a}; \mathbf{b})$ trên mặt phẳng tọa độ phức.

1. Phương trình đường thẳng

Các dạng phương trình đường thẳng

Dạng tổng quát: $ax + by + c = 0$

Dạng đại số: $y = ax + b$

Dạng tham số: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$

Dạng chính tắc: $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$

Phương trình đoạn chắn $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

2. Phương trình đường tròn

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \text{ có tâm } I(a; b) \text{ và bán kính } R$$

Điều kiện để phương trình (C): $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ là phương trình đường tròn:

$$a^2 + b^2 - c > 0$$

Khi đó pương trình đường tròn (C) có tâm $I(a; b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

3. Phương trình parabol: $y = ax^2 + bx + c$

4. Phương trình elip hoặc đoạn thẳng

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm cố định F_1 và F_2, điểm M thỏa mãn tính chất :

$$MF_1 + MF_2 = 2a$$

TH$_1$: $F_1F_2 = 2c < 2a$; Quỹ tích điểm M là đường elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a^2 = b^2 + c^2)$

TH$_2$: $F_1F_2 = 2a$; Quỹ tích điểm M là đoạn thẳng F_1F_2.

Chuẩn hóa Elip :

Hai điểm F_1, F_2 không nằm trên Ox, Oy, ta có thể chuẩn hóa bằng cách như sau :

$$z = \frac{w}{\overline{z_1} - \overline{z_2}} + \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Dạng 1. Tập hợp điểm biểu diễn của số phức

Ví dụ 1.1

Xác định số phức có điểm biểu diễn là $M(-1;3)$?

A. $z=3-i$ **B.** $z=-1+3i$ **C.** $z=1+3i$ **D.** $z=-1-3i$

Ví dụ 1.2

Trên mặt phẳng tạo độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|i-z|=|i\bar{z}-2|$ là:

A. một đường thẳng **B.** một đường tròn **C.** một đường elip **D.** một đoạn thẳng

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.3

Trên mặt phẳng tạo độ Oxy, xác định tọa độ tâm và bán kính đường tròn là tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn:

a. $|\bar{z}-2i+1|=4$ b. $|z-i|=|(1+i)z|$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.4

Xét các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 1 - 3i| = 5$. Xác định tọa độ tâm và bán kính đường tròn là tập hợp các điểm M biểu diễn số phức w thỏa mãn $w = (2 + i)z + 1 - 2i$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.5

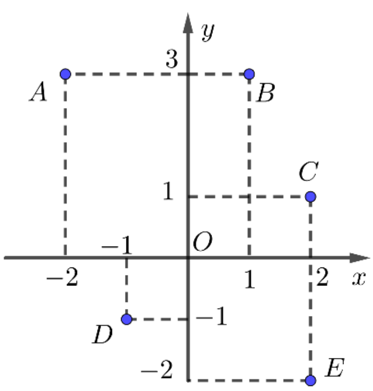
Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xác định tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn

a. $|z-2+2i|+|z+1-2i|=5$ b. $|z+1|+|z-1|=4$

Lời giải

Bài tập tự luyện

Câu 1. Xác định các số phức z_1, z_2, z_3, z_4 và z_5 có điểm biểu diễn lần lượt là các điểm A, B, C, D và E.



Câu 2. Cho $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 - i$ và z_3 lần lượt có điểm biểu diễn là A, B, C. Xác định z_3 sao cho A là trung điểm đoạn thẳng BC?

Câu 3. Cho $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 - i$ và $z_3 = z_1 z_2$ lần lượt có điểm biểu diễn là A, B, C. Xác định z_4 có điểm biểu diễn là D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành?

Câu 4. Trên mặt phẳng tạo độ Oxy, xác định tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn:

a. $|z + 2 + i| = |\bar{z} - 3i|$

b. $z(\bar{z} - 2 + i) + 4i - 1$ là số thực

Câu 5. Trên mặt phẳng tạo độ Oxy, xác định tọa độ tâm và bán kính của đường tròn là tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn:

a. $|\bar{z} + 2i - 1| = 4$

b. $(2 - z)(\bar{z} + i)$ là số thuần ảo.

Câu 6. Trên mặt phẳng tạo độ Oxy, xác định tọa độ tâm và bán kính của đường tròn là tập hợp điểm biểu diễn số phức w thỏa mãn:

a. $w = 2z + i$ với $|z - 1 + 2i| = 3$

b. $w = \frac{5+iz}{1+z}$ với $|z| = \sqrt{2}$

Câu 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xác định tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn

$$3|z + i| = |2\bar{z} - z + 1 + 3i|$$

Câu 8. Xác định độ dài hai trục của elip $|z + 4 + i| + |z - 4 - 3i| = 10$?

Dạng 2. Bài toán giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của modul số phức

Ví dụ 2.1

Cho số phức thỏa mãn $|z - 1 + i| = |\bar{z} - 2i|$, xác định z để $P = |z + 1 - 2i|$ đạt giá trị nhỏ nhất ?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.2

Cho số phức thỏa mãn $|z-3+4i|=2$, xác định giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của môđun số phức $z+3-2i$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Chương 1 KHỐI ĐA DIỆN

Bài 1 KHỐI ĐA DIỆN – KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

TRỌNG TÂM

Hình đa diện – Khối đa diện – Đa diện lồi

Hình đa diện là hình không gian được tạo bởi hữu hạn các đa giác có tính chất

a) Hai đa giác phân biệt chỉ có thể không có điểm chung, hoặc chỉ có 1 đỉnh chung hoặc chỉ có 1 cạnh chung,

b) Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng 2 đa giác.

Khối đa diện là phần không gian được giới hạn bởi 1 hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.

Các khối đa diện có thể lắp ghép lại với nhau nhưng không được kết nối chỉ bằng 1 cạnh hay 1 đỉnh

Nối 2 đỉnh bất kỳ, đoạn thẳng được tạo thành nằm trong hoặc trên mặt bên của khối đa diện thì đó là đa diện lồi.

Khối đa diện đều: Một khối đa diện lồi là đều nếu và chỉ nếu thỏa mãn cả ba tính chất sau

1. Tất cả các mặt của nó là các đa giác đều, bằng nhau
2. Các mặt không cắt nhau ngoài các cạnh
3. Mỗi đỉnh là giao của một số mặt như nhau (cũng là giao của số cạnh như nhau).

Mỗi khối đa diện đều có thể xác định bởi ký hiệu $\{p,\ q\}$ trong đó

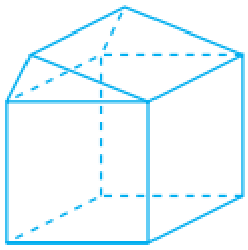
1. p = số các cạnh của mỗi mặt (hoặc số các đỉnh của mỗi mặt)
2. q = số các mặt gặp nhau ở một đỉnh (hoặc số các cạnh gặp nhau ở mỗi đỉnh).

Có **5 khối đa diện đều**: Tứ diện đều, Khối lập phương, Bát diện đều, Mười hai mặt đều, Hai mươi mặt đều.

Dạng 1. Khối đa diện

Ví dụ 1.1

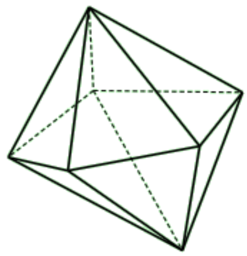
Đa diện bên có bao nhiêu cạnh :



A. 10. **B.** 17.
C. 9. **D.** 4.

Ví dụ 1.2

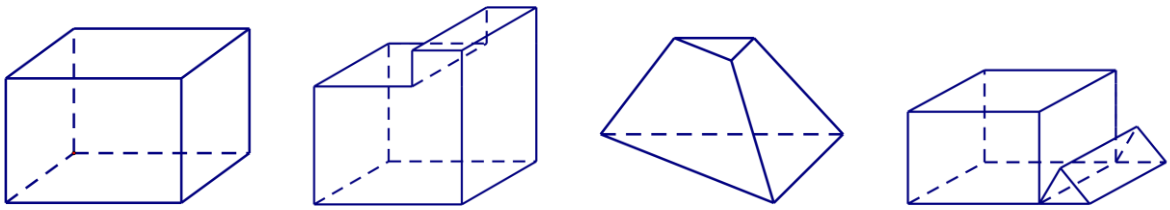
Đa diện bên có bao nhiêu mặt :



A. 11. **B.** 12.
C. 10. **D.** 7.

Ví dụ 1.3

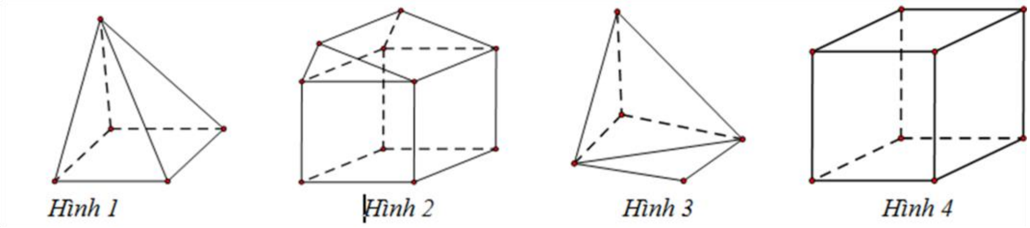
Có bao nhiêu khối đa diện ?



A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Ví dụ 1.4

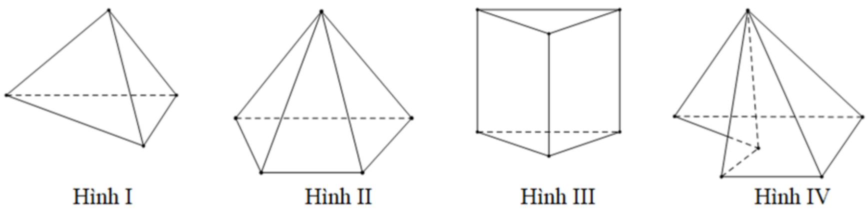
Hình nào dưới đây không phải là hình đa diện?



A. Hình 1. **B.** Hình 2. **C.** Hình 4. **D.** Hình 3.

Ví dụ 1.5

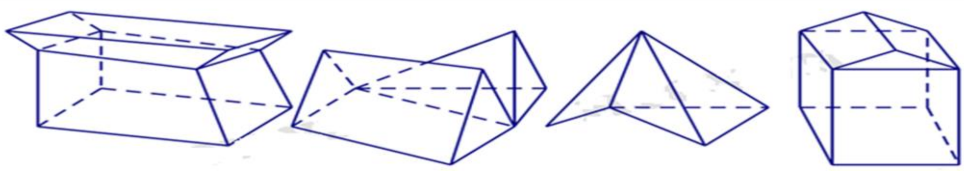
Trong các hình dưới đây hình nào không phải đa diện lồi?



A. Hình 1. **B.** Hình 2. **C.** Hình 4. **D.** Hình 3.

Ví dụ 1.6

Số hình đa diện lồi trong các hình dưới đây là



A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Dạng 2. Khối đa diện đều, mặt phẳng đối xứng

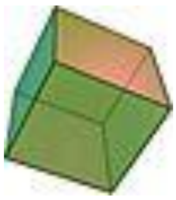
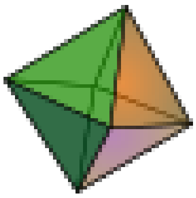
Một khối đa diện lồi là đều nếu và chỉ nếu thỏa mãn cả ba tính chất sau

1. Tất cả các mặt của nó là các đa giác đều, bằng nhau
2. Các mặt không cắt nhau ngoài các cạnh
3. Mỗi đỉnh là giao của một số mặt như nhau (cũng là giao của số cạnh như nhau).

Mỗi khối đa diện đều có thể xác định bởi ký hiệu $\{p,\ q\}$ trong đó

1. p = số các cạnh của mỗi mặt (hoặc số các đỉnh của mỗi mặt)
2. q = số các mặt gặp nhau ở một đỉnh (hoặc số các cạnh gặp nhau ở mỗi đỉnh).

Có 5 khối đa diện đều được tóm tắt trong bảng sau

Khối đa diện đều		**Số đỉnh**	**Số cạnh**	**Số mặt**	**Loại** $\{p,\ q\}$
Tứ Diện Đều		4	6	4	{3,3}
Khối Lập Phương		8	12	6	{4,3}
Khối Bát Diện Đều		6	12	8	{3,4}
Khối Mười Hai Mặt Đều		20	30	12	{5,3}
Khối Hai Mươi Mặt Đều		12	30	20	{3,5}

Số mặt phẳng đối xứng của một số khối đa diện thường gặp

3	Khối chóp tam giác đều (độ dài cạnh bên và đáy khác nhau) Khối hộp chữ nhật ba kích thước khác nhau Khối hộp đứng có đáy là hình thoi
4	Khối lăng trụ tam giác đều Khối chóp tứ giác đều
5	Khối lăng trụ tứ giác đều (độ dài cạnh bên và đáy khác nhau)
6	Khối tứ diện đều
9	Khối lập phương Khối bát diện đều
15	Khối 12 mặt đều Khối 20 mặt đều

Bài 2 THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

TRỌNG TÂM

Thể tích khối chóp: $\mathbf{V} = \frac{1}{3}\mathbf{B.h}$

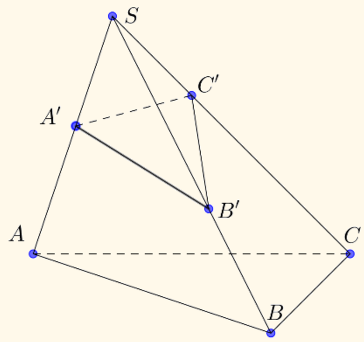
Thể tích khối lăng trụ $\mathbf{V} = \mathbf{B.h}$

B: Diện tích mặt đáy.

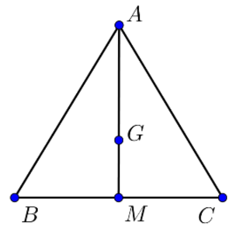
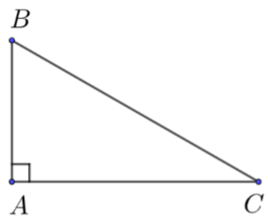
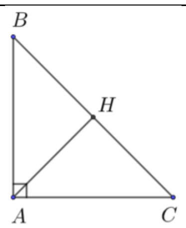
h: Chiều cao của khối chóp.

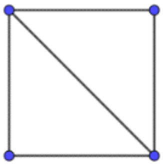
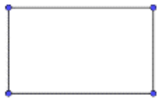
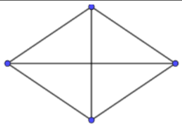
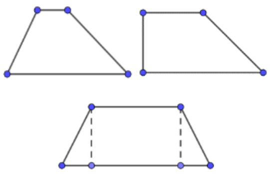
Tỷ lệ thể tích

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$$



Công thức hình học cơ bản

	HÌNH VẼ	TÍNH CHẤT
Tam giác đều		$S_{\text{tam giác đều}} = \frac{(\text{cạnh})^2\sqrt{3}}{4}$ $AM = \frac{\text{cạnh}\sqrt{3}}{2}$ $AG = \frac{\text{cạnh}\sqrt{3}}{3}$ $GM = \frac{\text{cạnh}\sqrt{3}}{6}$
Tam giác vuông		$S_{\text{tam giác vuông}} = \frac{1}{2}.(\text{cạnh góc vuông}).(\text{cạnh góc vuông})$ $AB^2 + AC^2 = BC^2$ $\sin\widehat{ABC} = \frac{\text{đối}}{\text{huyền}} = \frac{AC}{BC}$ $\cos\widehat{ABC} = \frac{\text{kề}}{\text{huyền}} = \frac{AB}{BC}$ $\tan\widehat{ABC} = \frac{\text{đối}}{\text{kề}} = \frac{AC}{AB}$
Tam giác vuông cân		$S_{\text{tam giác vuông}} = \frac{1}{2}(\text{cạnh góc vuông})(\text{cạnh góc vuông})$ $\text{huyền} = (\text{cạnh góc vuông}).\sqrt{2}$ $AH = \text{cao}_{(\text{tam giác vuông cân})} = \frac{\text{huyền}}{2}$

Hình vuông		$S_{\text{hình vuông}} = (\text{cạnh})^2$ $\text{chéo} = \text{cạnh}\sqrt{2}$
Hình chữ nhật		$S_{\text{hình chữ nhật}} = \text{dài}.\text{rộng}$
Hình thoi		$S_{\text{hình thoi}} = \dfrac{1}{2}\text{chéo}.\text{chéo}$ $S_{\text{hình thoi}} = \text{cạnh}.\text{cạnh}.\sin(\text{góc xen giữa hai cạnh})$
Hình thang, hình thang vuông, hình thang cân		$S_{\text{hình chữ nhật}} = \dfrac{(\text{đáy lớn} + \text{đáy bé}).\text{cao}}{2}$

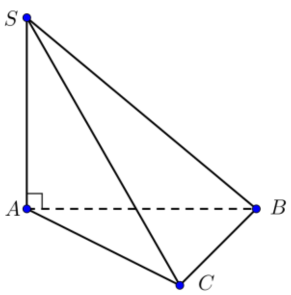
Dạng 1. Thể tích khối đa diện

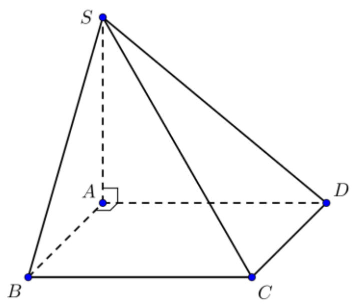
1. Thể tích khối chóp: $\mathbf{V} = \frac{1}{3}\mathbf{B}.\mathbf{h}$ Thể tích khối lăng trụ $\mathbf{V} = \mathbf{B}.\mathbf{h}$

   B: Diện tích mặt đáy. h: Chiều cao của khối chóp.

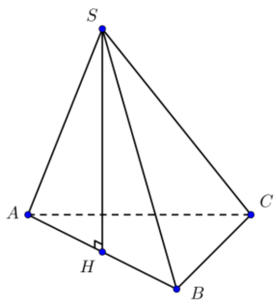
2. Các khối đa diện thường gặp

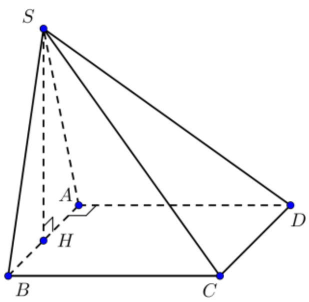
   - Khối chóp có cạnh bên SA vuông góc mặt đáy $\Rightarrow h_{\text{chóp}} = SA$



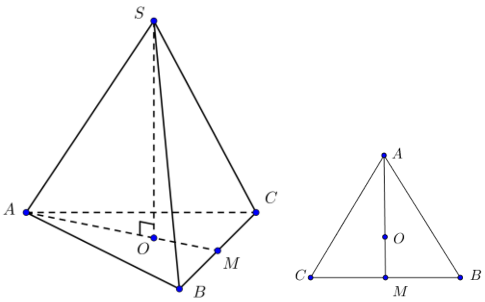


   - Khối chóp có mặt bên là tam giác cân hoặc tam giác đều và vuông góc mặt đáy $\Rightarrow h_{\text{chóp}} = h_{\text{mặt bên}} = SH$

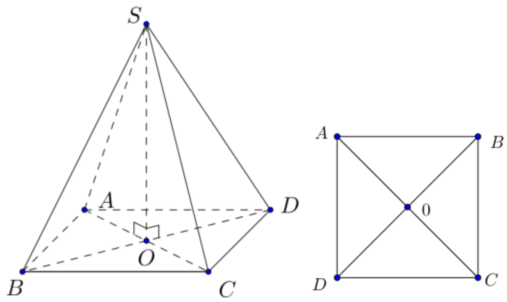




- Khối chóp đều $\Rightarrow \mathrm{h}_{\text{chóp}} = \mathrm{SO}$ với O là tâm của đa giác đáy

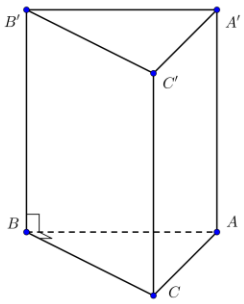


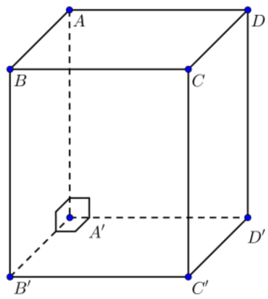
Chóp tam giác đều hoặc Tứ diện đều



Chóp tứ giác đều

- Lăng trụ đứng $\Rightarrow \mathrm{h}_{\text{lăng trụ}} = \mathrm{AA'} = \mathrm{BB'} = \mathrm{CC'}$





3. Hình chóp cụt $\mathrm{ABC.A'B'C'}$: $\mathrm{V}_{\text{chóp cụt}} = \frac{\mathrm{h}}{3}\left(\mathrm{B} + \mathrm{B'} + \sqrt{\mathrm{BB'}}\right)$ Với $\mathrm{B}, \mathrm{B'}, \mathrm{h}$ là diện tích hai đáy và chiều cao.
4. Thể tích một số khối hình thường gặp
   - Khối chóp có 3 cạnh đôi một vuông góc có độ dài ba cạnh lần lượt là a, b, c:
   $$\mathrm{V}_{\text{chóp 3 cạnh đôi một vuông góc}} = \frac{1}{6}\mathrm{abc}$$
   - Khối chóp có 3 cạnh đôi một vuông góc có diện tích 3 mặt vuông góc lần lượt là $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \mathrm{S}_3$:
   $$\mathrm{V}_{\text{chóp 3 cạnh đôi một vuông góc}} = \frac{\sqrt{2\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2\mathrm{S}_3}}{3}$$
   - Chóp tam giác đều tất cả các cạnh nhau, tứ diện đều: $\mathrm{V}_{\text{tứ diện đều}} = \frac{(\text{cạnh})^3\sqrt{2}}{12}$
   - Chóp tam giác đều có cạnh đáy và cạnh bên: $\mathrm{V}_{\text{chóp tam giác}} = \frac{(\text{đáy})^2\sqrt{3(\text{bên})^2-(\text{đáy})^2}}{12}$
   - Chóp tứ giác đều tất cả các cạnh nhau: $\mathrm{V}_{\text{chóp tứ giác đều các cạnh bằng nhau}} = \frac{(\text{cạnh})^3\sqrt{2}}{6}$
   - Chóp tứ giác đều có cạnh đáy và cạnh bênh: $\mathrm{V}_{\text{chóp tứ giác đều}} = \frac{(\text{đáy})^2\sqrt{4(\text{bên})^2-2(\text{đáy})^2}}{6}$
   - Khối bát diện đều:
   $$\mathrm{V}_{\text{bát diện đều}} = \frac{(\text{cạnh})^3\sqrt{2}}{3} \qquad \mathrm{S}_{\text{toàn phần }_{\text{bát diện đều}}} = 2(\text{cạnh})^2\sqrt{2}$$
   - Hình hộp chữ nhật: $\mathrm{AC'} = \mathrm{A'C} = \mathrm{BD'} = \mathrm{B'D} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AD}^2 + \mathrm{AA'}^2}$
   $$\mathrm{V}_{\text{hình hộp chữ nhật}} = \text{cạnh}_1.\text{cạnh}_2.\text{cạnh}_3 \qquad \mathrm{V}_{\text{hình hộp chữ nhật}} = \sqrt{\mathrm{S}_1.\mathrm{S}_2.\mathrm{S}_3}$$
   - Hình lập phương:
     - $\mathrm{AC'} = \mathrm{A'C} = \mathrm{BD'} = \mathrm{B'D} = \text{cạnh}\sqrt{3}$
     - $\mathrm{V}_{\text{lập phương}} = (\text{cạnh})^3 \qquad \mathrm{S}_{\text{toàn phần }_{\text{lập phương}}} = 6(\text{cạnh})^2$

- Khối bát diện đều có đỉnh là tâm các mặt hình lập phương: $V = \frac{(\text{cạnh})^3}{6}$
- Khối lập phương có đỉnh là tâm các mặt bát diện đều: $V = \frac{2(\text{cạnh})^3\sqrt{2}}{27}$

Ví dụ 1.1

Tính thể tích khối lập phương có độ dài cạnh bằng 2a?

Lời giải

Ví dụ 1.2

Tính thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy bằng 3 và chiều cao bằng 2?

Lời giải

Ví dụ 1.3

Khối chóp tam giác S. ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và SA = a. Tính thể tích của khối chóp S. ABC?

Lời giải

Ví dụ 1.4

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải

Ví dụ 1.5

Khối chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với $(ABCD)$, $ABCD$ là hình vuông cạnh a, góc giữa SC và $(ABCD)$ là $30°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$?

Lời giải

Ví dụ 1.6

Tính thể tích khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $2a$?

Lời giải

Bài tập tự luyện

Câu 1: Cho khối chóp O.ABC có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. Biết độ dài các cạnh OA, OB và OC lần lượt là 2, 3 và 4. Tính thể tích khối chóp O.ABC?

Câu 2: Tính thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có số đo ba cạnh AB, AD VÀ AA' lần lượt là 3, 5 và 7.

Câu 3: Cho khối chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a$, $AB = a$, $BC = 2a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$?

Câu 4: Cho khối chóp tam giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = 2a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$?

Câu 5: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy tam giác ABC vuông tại B, $AB = 2BC = 2a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$?

Câu 6: Khối chóp tam giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$?

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = 2a$, tam giác SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$?

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC = a\sqrt{2}$, tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$?

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB là tam giác cân và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy, $SA = \sqrt{3}a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$?

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$, tam giác SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$?

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$?

Câu 12: Khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với (ABC), đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a$, góc giữa SB và (ABC) là $45°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$?

Câu 13: Khối chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với $(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, góc giữa SC và $(ABCD)$ là $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$?

Câu 14: Khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với (ABC), $SA = a$, đáy ABC là tam giác đều, góc giữa SB và (ABC) là $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$?

Câu 15: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a, góc giữa AB' và mặt đáy bằng $60°$. Tính thể tích khối $ABCD.A'B'C'D'$?

Câu 16: Tính thể tích khối tứ diện đều có tất cả các cạnh bằng a.

Câu 17: Tính thể tích khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $2a$?

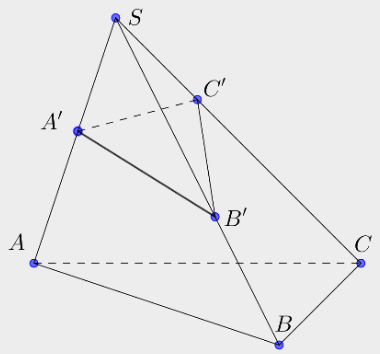
Câu 18: Tính thể tích khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, tam giác SAC vuông cân tại S.

Câu 19: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Câu 20: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $30°$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Dạng 2. Tỷ lệ thể tích

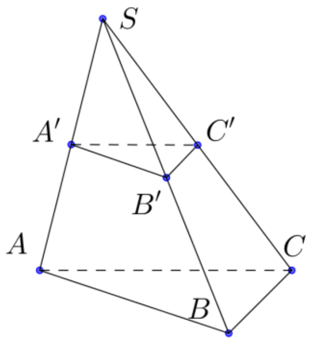
$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$$



Ví dụ 2.1

Cho hình chóp $S.ABC$. Trên 3 cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy 3 điểm A', B', C' sao cho $SA' = \frac{1}{2}SA$; $SB' = \frac{1}{2}SB$, $SC' = \frac{1}{2}SC$. Gọi V và V' lần lượt là thể tích của các khối chóp $S.ABC$ và $S.A'B'C'$. Khi đó tính tỷ số $\frac{V'}{V}$?

Lời giải



....

....

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB. Tính tỉ số $\frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ABC}}$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB. Tính tỉ số $\frac{V_{AMNCB}}{V_{S.ABC}}$.

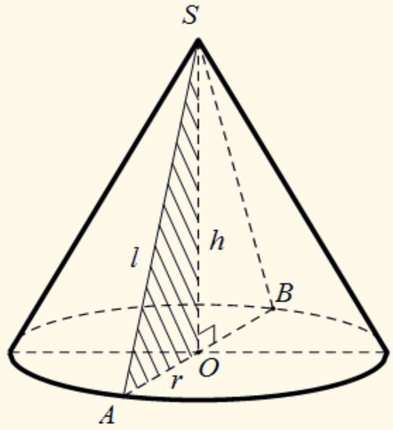
Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật. Trên 4 cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt lấy 4 điểm A', B', C' và D' là trung điểm các cạnh SA, SB, SC và SD. Gọi V và V' lần lượt là thể tích của các khối chóp $S.ABCD$ và $S.A'B'C'D'$. Khi đó tính tỷ số $\frac{V'}{V}$.

Chương 2 MẶT NÓN, MẶT TRỤ, MẶT CẦU

Bài 1 MẶT NÓN TRÒN XOAY

TRỌNG TÂM

Sự tạo thành hình nón: quay tam giác vuông SAO quanh cạnh góc vuông SO thì tạo thành hình nón có chiều cao SO, bán kính AO, đường sinh SA.



Công thức Pytago trong hình nón: $\boxed{h^2 + r^2 = l^2}$

Diện tích đáy hình nón: $\boxed{S_{đáy_{nón}} = \pi r^2}$

Chu vi đáy hình nón: $\boxed{C_{đáy_{nón}} = 2\pi r}$

Diện tích xung quanh hình nón: $\boxed{S_{xq_{nón}} = \pi rl}$

Diện tích toàn phần hình nón:

$$\boxed{S_{tp_{nón}} = S_{đáy_{nón}} + S_{xq_{nón}} = \pi r^2 + \pi rl = \pi r(r + l)}$$

Thể tích khối nón : $\boxed{V_{nón} = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$ $(B = \pi r^2)$

Góc ở đỉnh $\widehat{ASB} = \alpha \Rightarrow \widehat{ASO} = \frac{\alpha}{2}$

Dạng 1. Các khái niệm cơ bản

Ví dụ 1.1

Cho hình nón (N) có chiều cao $h = 4$, bán kính đáy $r = 3$. Độ dài đường sinh của (N) là:

Lời giải

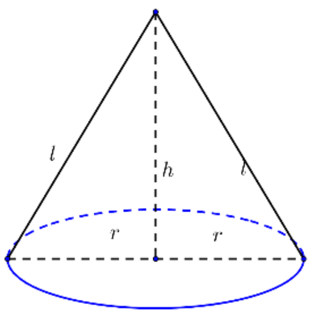
....

....

....

....

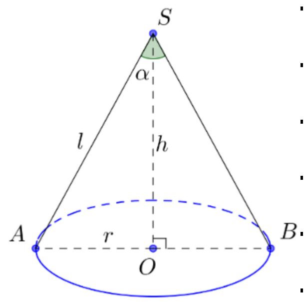
....



Ví dụ 1.2

Một hình nón có chiều cao bằng 3a, góc ở đỉnh bằng 60°. Tính diện tích toàn phần của hình nón?

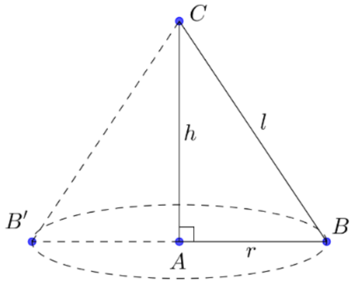
Lời giải



Ví dụ 1.3

Tam giác ABC vuông tại A có AB = 2, AC = 1. Quay tam giác ABC quanh cạnh AC ta được khối nón có đường sinh bằng bao nhiêu?

Lời giải



Bài tập tự luyện

Câu1. Cho hình nón (N) có $h = 6, l = 10$. Xác định độ dài đường kính đáy của (N)?

Câu 2. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình nón (N) có $h = 4, r = 3$?

Câu 3. Tính thể tích của khối nón (N) có $h = 4, r = 3$?

Câu 4. Cho khối nón (N) có đường sinh bằng đường kính đáy bằng 6, tính thể tích của (N)?

Câu 5. Cho hình nón (N) có diện tích xung quang bằng 10π, biết bán kính đáy bằng 2, xác định diện tích toàn phần của (N)?

Câu 6. Biết khối (N) có thể tích bằng 15π, chiều cao khối nón bằng 5. Tìm độ dài đường sinh (N)?

Câu 7. Tính thể tích khối nón có bán kính đáy bằng a, góc ở đỉnh bằng 60°?

Câu 8. Tính thể tích khối nón có đường sinh bằng a, góc ở đỉnh bằng 120°?

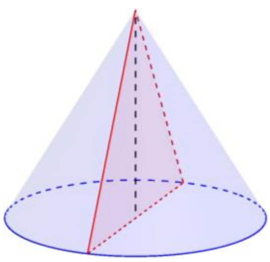
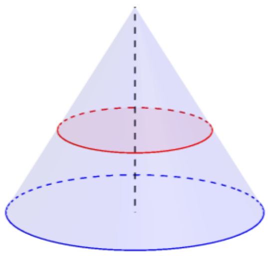
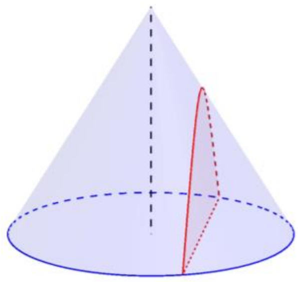
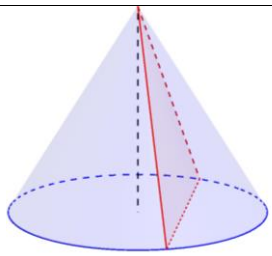
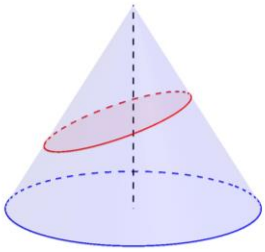
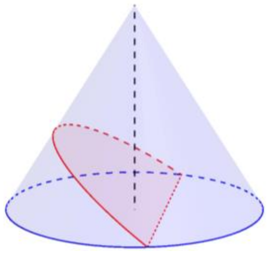
Câu 9. Tam giác ABC vuông tại A có $AB = 4$ và $BC = 5$. Tính độ dài đường cao của hình nón được tạo thành khi quay đường gấp khúc BCA quanh cạnh AC?

Câu 10. Tam giác ABC vuông tại A có $AB = 4$ và $AC = 3$. Tính diện tích xung quanh hình nón được tạo thành khi quay đường gấp khúc BCA quanh cạnh AB?

Câu 11. Tam giác ABC vuông tại A có $AB = 4$ và $AC = 3$. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay đường gấp khúc BCA quanh cạnh BC?

Dạng 2. Thiết diện của hình nón

Các loại thiết diện của khối nón khá phức tạp, có thể kể tên như sau:

 Thiết diện qua trục của khối nón.	 Thiết diện song song với đáy của khối nón.	 Thiết diện song song với trục của khối nón.
 Thiết diện không song song với trục và đi qua đỉnh của khối nón.	 Thiết diện không song song với trục, không đu qua đỉnh và không cắt mặt đáy của khối nón.	 Thiết diện không song song với trục, không đi qua đỉnh và cắt mặt đáy của khối nón.

Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác vuông cân: $\begin{cases} h = r = \dfrac{\text{cạnh huyền}}{2} \\ l = \text{cạnh góc vuông} \\ \text{cạnh huyền} = \text{cạnh góc vuông}\sqrt{2} \end{cases}$

Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác đều: $\begin{cases} h = \dfrac{\text{cạnh}\sqrt{3}}{2} \\ r = \dfrac{\text{cạnh}}{2} \\ l = \text{cạnh} \end{cases}$

Ví dụ 2.1

Một hình nón có chiều cao bằng a, thiết diện qua trục là một tam giác vuông. Tính diện tích toàn phần của hình nón?

Lời giải

....

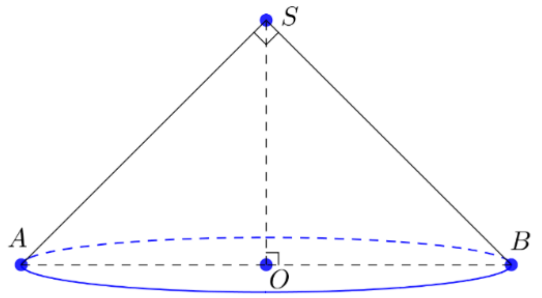
....

....

....

....

....



....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1. Một hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác vuông có cạnh huyền bằng 2a. Tính diện tích xung quanh của hình nón?

Câu 2. Một hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác vuông có cạnh góc vuông bằng a. Tính thể tích khối nón?

Câu 3. Tính thể tích khối nón (N) biết rằng thiết diện qua trục của (N) là tam giác đều cạnh 2a?

Câu 4. Một hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác đều có cạnh bằng a, tính diện tích xung quanh của hình nón?

Câu 5. Một hình nón (N) có thiết diện qua trục là một tam giác đều. Biết diện tích xung quanh của hình nón bằng 50π. Tính thể tích (N)?

Bài 2 MẶT TRỤ TRÒN XOAY

TRỌNG TÂM

Sự tạo thành hình trụ: quay hình chữ nhật ABCD quanh cạnh AB thì tạo thành hình trụ có chiều cao AB, bán kính AD, đường sinh CD.

Diện tích đáy hình trụ: $\boxed{S_{đáy_{trụ}} = \pi r^2}$

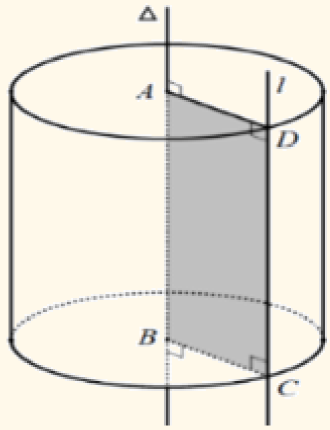
Chu vi đáy hình trụ: $\boxed{C_{đáy_{trụ}} = 2\pi r}$

Diện tích xung quanh hình trụ: $\boxed{S_{xq_{trụ}} = 2\pi rl = 2\pi rh}$

Diện tích toàn phần hình trụ:

$\boxed{S_{tp_{trụ}} = 2S_{đáy_{trụ}} + 2S_{xq_{trụ}} = 2\pi r^2 + 2\pi rl = 2\pi r^2 + 2\pi rh}$

Thể tích khối trụ : $\boxed{V_{trụ} = Bh = \pi r^2 h}$ $(B = \pi r^2)$



Dạng 1. Các khái niệm cơ bản

Ví dụ 1.1

Tính diện tích xung quanh của hình trụ có bán kính đáy bằng 5, chiều cao bằng 7?

Lời giải

....

....

Ví dụ 1.2

Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 2 và AD = 4, gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AD và BC. Quanh hình chữ nhật ABCD quanh cạnh MN ta được khối trụ có thể tích bằng bao nhiêu?

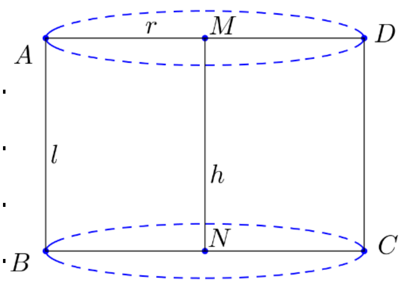
Lời giải

....

....

....

....



Bài tập tự luyện

Câu 1. Tính diện tích toàn phần hình trụ có chiều cao bằng 2 và bán kính đáy bằng 3?

Câu 2. Tính thể tích khối trụ, biết rằng độ dài đường sinh của khối trụ bằng 4 và bằng đường kính mặt đáy?

Câu 3. Một khối trụ có thể tích bằng $2a^3\pi$, bán kính đáy bằng a, khi đó diện tích toàn phần hình nón đã cho bằng bao nhiêu?

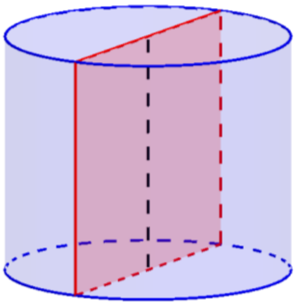
Câu 4. Một hình trụ có diện tích toàn phần bằng $6a^2\pi$ và bán kính đáy bằng a, khi đó thể tích khối trụ đã cho bằng bao nhiêu?

Câu 5. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 2$ và $AD = 4$, gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD. Tính diện tích toàn phần hình trụ thu được khi quanh hình chữ nhật ABCD quanh cạnh MN?

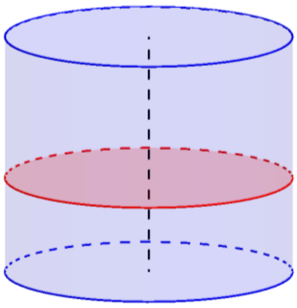
Câu 6. Tính thể tích khối trụ được tạo thành khi quay hình chữ nhật ABCD có $AB = 2$ và $AD = 4$ quanh cạnh AB?

Dạng 2. Thiết diện của hình trụ

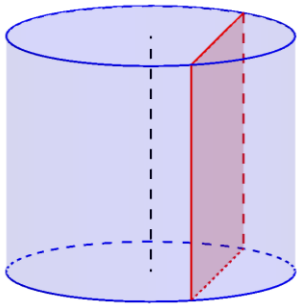
Các loại thiết diện của hình khối trụ khá phức tạp, có thể kể tên như sau:



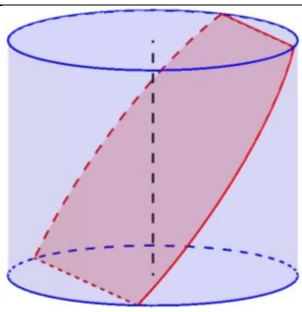
Thiết diện qua trục của khối trụ



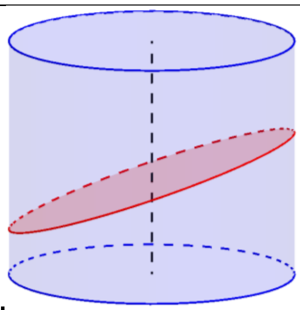
Thiết diện song song với hai đáy của khối trụ



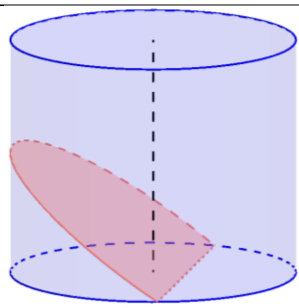
Thiết diện song song với trục của khối trụ



Thiết diện không song song với trục và cắt hai đáy



Thiết diện không song song với trục và không cắt hai đáy



Thiết diện không song song với trục và cắt một đáy

Thiết diện qua trục của hình trụ là hình chữ nhật có : $\begin{cases} \text{Chu vi} = 2h + 4r \\ \text{Diện tích} = 2hr \end{cases}$

Thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông: $l = h = 2r =$ cạnh

Ví dụ 2.1

Khối trụ có thiết diện qua trục là hình vuông cạnh 2a có thể tích bằng bao nhiêu?

Lời giải

....

....

....

....

Ví dụ 2.2

Khối trụ có bán kính đáy bằng a, chu vi của thiết diện qua trục bằng 10a. Tính diện tích toàn phần của khối trụ đã cho

Lời giải

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 3a. Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng qua trục, thiết diện thu được là một hình vuông. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng bao nhiêu?

Câu 2. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng a. Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng qua trục, thiết diện thu được có diện tích bằng 4a. Xác định thể tích của khối trụ đã cho?

Bài 3 MẶT CẦU – KHỐI CẦU

TRỌNG TÂM

Diện tích mặt cầu $S_{\text{mặt cầu}} = 4\pi(\text{bán kính}_{\text{cầu}})^2$

Thể tích khối cầu $V_{\text{khối cầu}} = \frac{4}{3}\pi(\text{bán kính}_{\text{cầu}})^3$.

Dạng 1. Các khái niệm cơ bản

Ví dụ 1.1

Cho hình cầu có bán kính $R\sqrt{3}$, tính diện tích mặt cầu?

Lời giải

....

....

Ví dụ 1.1

Cho hình tròn đường kính 6a quay quanh đường kính của nó. Khi đó tính thể tích khối tròn xoay sinh ra?

Lời giải

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1. Tính thể tích khối cầu có bán kính bằng $R\sqrt{2}$?

Câu 2. Tính diện tích mặt cầu có đường kính bằng 2a?

Câu 3. Khối cầu có thể tích bằng 36π có bán kính bằng bao nhiêu?

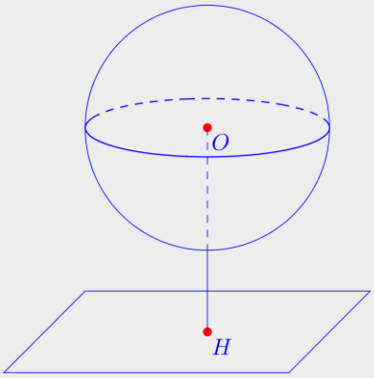
Câu 4. Một mặt cầu có diện tích bằng 16π thì bán kính mặt cầu đó bằng bao nhiêu?

Câu 5. Một mặt cầu có diện tích bằng 36π, tính thể tích khối cầu được giới hạn bởi mặt cầu đó?

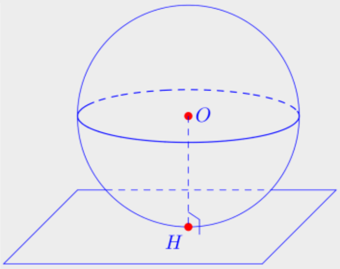
Câu 6. Quay một đường tròn có bán kính bằng 3R quanh đường kính của nó tạo thành một mặt cầu. Tính diện tích mặt cầu được sinh ra?

Dạng 2. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng

Cho mặt cầu (S) có tâm O, bán kính R và mặt phẳng (P). Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (P). Khi đó $OH = d(O;(P))$. Ta có các trường hợp về vị trí tương đối của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) như sau:

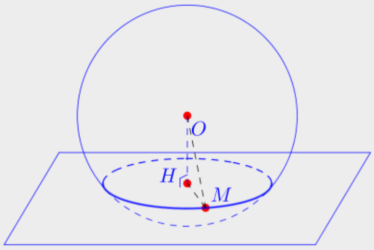


Mặt phẳng và mặt cầu không có điểm chung: $OH > R$.



Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu:

$OH = R$



Mặt phẳng cắt mặt cầu tạo thành đường tròn tâm H bán kính r.

$$R^2 = r^2 + OH^2$$

Ví dụ 2.1

Cho mặt cầu có bán kính bằng 5 cắt mặt phẳng cách tâm một khoảng bằng 3, giao tuyến tạo thành là một đường tròn. Tính diện tính hình tròn đó?

Lời giải

....

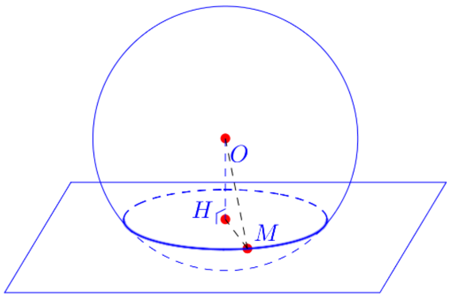
....

....

....

....

....



Bài tập tự luyện

Câu 1. Cho mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (P) cách tâm một khoảng bằng 3, giao tuyến tạo thành là một đường tròn có bán kính bằng 4. Tính thể tích mặt cầu (S)?

Câu 2. Cho mặt cầu (S) có tâm I và bán kính bằng 5, mặt phẳng (P) cách điểm I một khoảng bằng 4 cắt mặt cầu tạo thành giao tuyến hình tròn. Tính diện tích thiết diện được hình thành?

Dạng 3. Mặt cầu nội tiếp, ngoại tiếp các hình khối

Mặt cầu ngoại tiếp đa diện: Mặt cầu đi qua tất cả các đỉnh của đa diện.

Các đa diện thường gặp có mặt cầu ngoại tiếp:

Hình chóp có đáy là: **tam giác**, **hình chữ nhật**, **hình thang cân** và **đa giác đều** (tam giác đều, hình vuông, ngũ giác đều, lục giác đều,...).

Lăng trụ đứng và có đáy là các hình như trên.

Mặt cầu nội tiếp đa diện: Mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của đa diện.

Khối cầu ngoại tiếp hình lập phương: $R = \dfrac{\text{cạnh}_{\text{hình lập phương}}\sqrt{3}}{2}$

Khối cầu nội tiếp hình lập phương: $R = \dfrac{\text{cạnh}_{\text{hình lập phương}}}{2}$

$\left(\text{Lưu ý: } AC' = A'C = BD' = B'D = \text{cạnh}\sqrt{3}\right)$

Khối cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật hoặc khối chóp có ba cạnh đôi một vuông góc:

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{(\text{cạnh}_1)^2 + (\text{cạnh}_2)^2 + (\text{cạnh}_3)^2}$$

Khối cầu ngoại tiếp lăng trụ đứng: $R = \sqrt{\left(\dfrac{\text{cao}_{\text{lăng trụ}}}{2}\right)^2 + \left(\text{bán kính đáy}_{\text{ngoại tiếp}}\right)^2}$

Khối cầu ngoại tiếp hình chóp có SA vuông góc với đáy hoặc lăng trụ đứng:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\text{cao}_{\text{hình chóp}}}{2}\right)^2 + \left(\text{bán kính đáy}_{\text{ngoại tiếp}}\right)^2}$$

Khối cầu ngoại tiếp chóp đều: $R = \dfrac{(\text{cạnh bên})^2}{2\text{cao}}$; $R = \dfrac{(\text{cạnh bên})^2}{2\sqrt{(\text{cạnh bên})^2 - \left(\text{bán kính đáy}_{\text{ngoại tiếp}}\right)^2}}$

Với cách tìm bán kính đáy là:

$r_{\text{nội}_{\text{tam giác đều}}} = \dfrac{\text{cạnh}\sqrt{3}}{6}$ $\qquad$ $r_{\text{ngoại}_{\text{tam giác đều}}} = \dfrac{\text{cạnh}\sqrt{3}}{3}$

$r_{\text{nội}_{\text{hình vuông}}} = \dfrac{\text{cạnh}}{2}$ $\qquad$ $r_{\text{ngoại}_{\text{hình vuông}}} = \dfrac{\text{cạnh}\sqrt{2}}{2}$

$r_{\text{ngoại}_{\text{tam giác vuông}}} = \dfrac{\text{huyền}}{2}$ $\qquad$ $r_{\text{ngoại}_{\text{hình chữ nhật}}} = \dfrac{\text{chéo}_{\text{hình chữ nhật}}}{2}$

Ví dụ 3.1

Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình lập phương có cạnh bằng a?

Lời giải

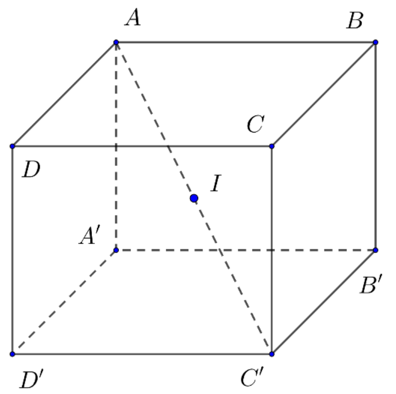
Cách 1: Dựng hình

Gọi I là trung điểm AC' thì I cách đều các đỉnh A, B, C, D, A', B', C', D', ta dễ dàng chứng minh được:

$$IA = IB = IC = ID = IA' = IB' = IC' = ID'$$

Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương. Bán kính mặt cầu là IA:

$$R = IA = \frac{AC'}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2}}{2} = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



Lưu ý: do khoảng cách từ I đến sáu mặt của hình lập phương bằng nhau và bằng $\frac{AB}{2}$ nên I cũng là tâm mặt cầu nội tiếp hình lập phương.

Cách 2: Dùng công thức giải nhanh

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.2

Cho tứ diện S. ABC có ba đường thẳng SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một, $SA = 3$, $SB = 4$, $SC = 5$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp S. ABC?

Lời giải

Cách 1: Dựng hình

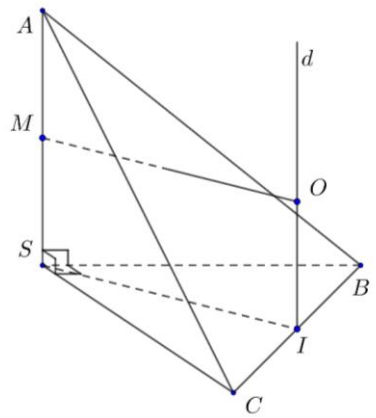
Bước 1: Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy

Xét hình chóp có đáy là tam giác vuông SBC và đường cao SA.

Gọi I là *tâm đường tròn ngoại tiếp* tam giác đáy SBC.

Do SB vuông góc SC nên tam giác SBC vuông tại S.

$\Rightarrow$ I là trung điểm cạnh huyền BC



Bước 2: Dựng trục đường tròn ngoại tiếp của đa giác đáy.

Kẻ đường thẳng d qua điểm I và vuông góc mặt phẳng (SBC), khi đó đường thẳng d được gọi là *trục đường tròn ngoại tiếp* tam giác SBC.

$SA \perp (SBC) \Rightarrow SA \parallel d$. Với mọi điểm O nằm trên d, ta có $OS = OB = OC$ (1).

Bước 3: Dựng tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

Gọi M là trung điểm SA, kẻ $MO \perp d\ (O \in d) \Rightarrow MO$ là đường trung trực của đoạn thẳng SA

$\Rightarrow OS = OA\ (2)$.

Từ (1) và (2), $OS = OA = OB = OC$ nên O cách đều các điểm S, A, B, C. Hay O được gọi là *tâm mặt cầu ngoại tiếp* chóp S.ABC với bán kính $R = SO$.

Bước 4: Tìm bán kính mặt cầu

Với O là tâm mặt cầu được xác định, bán kính mặt cầu là đoạn thẳng OS

$$R = SO = \sqrt{OI^2 + SI^2} = \sqrt{SM^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{SA}{2}\right)^2 + \frac{BC^2}{4}} = \sqrt{\frac{SA^2}{4} + \frac{SB^2 + SC^2}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + SB^2 + SC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Cách 2: Dùng công thức giải nhanh

....

....

....

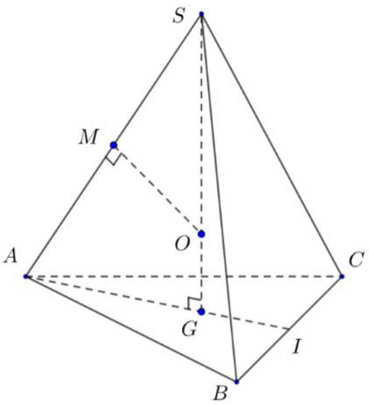
....

....

Ví dụ 3.3

Tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đều cạnh bằng a?

Lời giải



Cách 1: Dựng hình

Bước 1: Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy

Tứ diện đều nên có đã giác đáy tam giác ABC là tam giác đều.

Vậy *tâm đường tròn ngoại tiếp* tam giác ABC là điểm G với G là trọng tâm tác giác ABC.

Bước 2: Dựng trục đường tròn ngoại tiếp của đa giác đáy.

Do tứ diện S.ABC là tứ diện đều nên $SG \perp (ABC)$, vậy SG là *trục đường tròn ngoại tiếp* tam giác ABC.

Với điểm O bất kỳ nằm trên SG thì $OA = OB = OC\ (1)$.

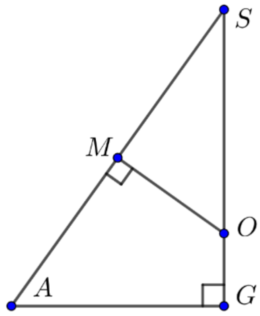
Bước 3: Dựng tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

Xét cạnh bên SA có trung điểm M. Trong mặt phẳng (SAG), dựng đường trung trực đoạn thẳng SA đi qua M và cắt SG tại điểm O. Khi đó $OS = OA\ (2)$.

Từ (1) và (2), $OS = OA = OB = OC$ nên O cách đều các điểm S, A, B, C.

Hay O được gọi là *tâm mặt cầu ngoại tiếp* tứ diện đều S.ABC với bán kính $R = SO$.

Bước 4: Tìm bán kính mặt cầu



Xét hai tam giác đồng dạng SAG và SMO có: $\dfrac{SO}{SA} = \dfrac{SM}{SG}$

$$\Rightarrow SO = \frac{SA.SM}{SG} = \frac{SA.\dfrac{SA}{2}}{\sqrt{SA^2 - AG^2}} = \frac{SA^2}{2\sqrt{SA^2 - AG^2}}$$

Do tam giác ABC là tam giác đều cạnh a nên: $AG = \dfrac{AB\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$$\Rightarrow R = SO = \frac{SA^2}{2\sqrt{SA^2 - AG^2}} = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

Cách 2: Dùng công thức giải nhanh

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.4

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật có $AB = a$, $AD = 2a$, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp S.ABCD?

Lời giải

Bước chuẩn bị: Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác ở mặt bên vuông góc với mặt đáy

Gọi H là trung điểm đoạn thẳng AB. Khi đó $SH \perp AB$ (tính chất tam giác đều)

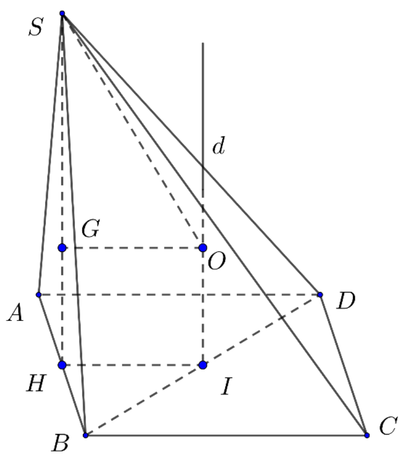
$$\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ AB = (SAB) \cap (ABCD) \\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$$

⇒ SH là đường cao của hình chóp S.ABCD.

Gọi G *tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB*

⇒ G là trọng tâm ΔSAB, G nằm trên đoạn SH.

Bước 1: Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy



Gọi I là giao điểm hai đường chéo AC và BD trong hình chữ nhật ABCD.

Khi đó I là tâm đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD.

Bước 2: Dựng trục đường tròn ngoại tiếp của đa giác đáy.

Dựng đường thẳng d đi qua điểm I và vuông góc $(ABCD)$, khi đó đường thẳng d được gọi là *trục đường tròn ngoại tiếp* của hình chữ nhật ABCD.

Với điểm O bất kỳ nằm trên d thì $OA = OB = OC = OD$ (1).

Mặt khác $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \parallel d$

Bước 3: Dựng tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

Trong mặt phẳng (SH; d), dựng đoạn thẳng $GO \perp SH$ với $O \in d$. Hiển nhiên $GO \parallel HI$.

Khi đó ta nhận xét: $\begin{cases} GO \perp (SAB) \\ G \text{ là tâm đường tròn ngoại tiếp } (SAB) \end{cases}$

$\Rightarrow$ GO là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB $\Rightarrow OS = OA = OB$ (2)

Từ (1) và (2), $OS = OA = OB = OC = OD$ nên O cách đều các điểm S, A, B, C và D. Hay O được gọi là *tâm mặt cầu ngoại tiếp* hình chóp S.ABCD với bán kính $R = SO$.

Bước 4: Tìm bán kính mặt cầu

$$R = SO = \sqrt{SG^2 + OG^2} = \sqrt{\left(\frac{SA\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{AD}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2a}{2}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Cách 2: Dùng công thức giải nhanh

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương có cạnh bằng a?

Câu 2. Tính thể tích khối cầu nội tiếp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC' = a$?

Câu 3. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AB = 2$, $AD = 4$ và $AA' = 1$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với đáy, ABC là tam giác vuông tại A và $BC = 2a$, $SA = 2a$. Tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$?

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với đáy, ABC là tam giác đều cạnh $2a$, $SA = 2a$. Tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$?

Câu 6. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều cạnh 2 và chiều cao bằng 4?

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh SA vuông góc với đáy, $SC = a\sqrt{3}$, $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD?

Câu 8. Cho hình $S.ABCD$ có cạnh SA vuông góc với đáy, $SA = a$, $ABCD$ là hình vuông, góc giữa cạnh SC và (ABCD) bằng $45°$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD?

Câu 9. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp tam giác đều có cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$, cạnh đáy bằng a?

Câu 10. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a?

Câu 11. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp tứ giác đều có cạnh bên bằng a và góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $45°$?

Câu 12. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$?

Câu 13. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$?

Chương 3 PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Bài 1 HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

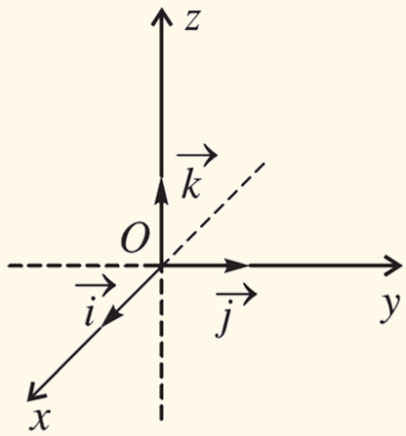
TRỌNG TÂM

1. Tọa độ của vectơ

a) Định nghĩa: $\vec{u} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị: $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$ có tính chất:

$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ và $\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{j} = 0$.



b) Tính chất: Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ $k \in \mathbb{R}$

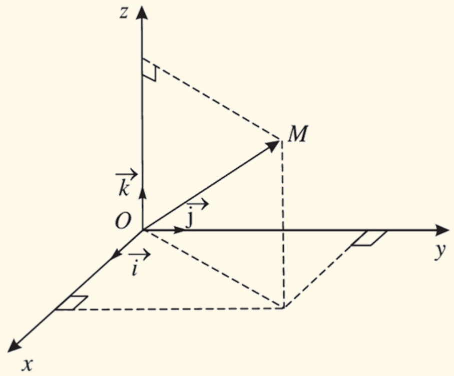
- $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$
- $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$
- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$
- $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}$ $\left(\vec{b} \neq \vec{0}\right)$ $\Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}\ (k \in \mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \text{hoặc } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k\ (\text{với } b_1b_2b_3 \neq 0)$$

- Tích vô hướng: $\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$
- Hai vectơ vuông góc: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$
- Modul của vectơ (độ lớn của vectơ): $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_2^2}$
- $\vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$
- Góc giữa hai vectơ: $\left(\text{với } \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}\right)$ $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

TRỌNG TÂM

2. Tọa độ của điểm



a) Định nghĩa: $M(x;y;z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$

(x: hoành độ, y: tung độ, z: cao độ)

Chú ý:

- $M \in (Oxy) \Leftrightarrow M(x;y;0)$
- $M \in Ox \Leftrightarrow M(x;0;0)$
- $M \in (Oyz) \Leftrightarrow M(0;y;z)$
- $M \in Oy \Leftrightarrow M(0;y;0)$
- $M \in (Oxz) \Leftrightarrow M(x;0;z)$
- $M \in Oz \Leftrightarrow M(0;0;z)$

b) Tính chất: Cho $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$

- Vectơ $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
- Ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}\ (k \in \mathbb{R})$
- Độ dài đoạn thẳng AB: $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB: $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$
- Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

- Toạ độ trọng tâm G của tứ diện ABCD:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_C}{4}\right)$$

3. Tích có hướng của hai vectơ

Ký hiệu: $\vec{a} \wedge \vec{b}$ hoặc $[\vec{a}, \vec{b}]$

Khi đó: $[\vec{a}, \vec{b}] = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$

Tính chất:

- $\left|[\vec{a}, \vec{b}]\right| = |\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|.\sin(\vec{a}, \vec{b})$
- $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}$ và $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}$
- $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$
- $[\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k}$
- $[\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i}$
- $[\vec{k}, \vec{i}] = \vec{j}$
- $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$.
- $[\vec{a}, \vec{b}].\vec{c} = 0 \Leftrightarrow$ 3 vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ đồng phẳng

TRỌNG TÂM

Ứng dụng của tích có hướng:

Diện tích hình bình hành ABCD: $\begin{cases} S_{\square ABCD} = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| \\ S_{\square ABCD} = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\right| \end{cases}$

Diện tích tam giác ABC: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|$

Độ dài đường cao tam giác ABC kẻ từ A: $AH = \frac{S_{\Delta ABC}}{BC} = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|}{2\left|\overrightarrow{BC}\right|}$

Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$

Thể tích tứ diện ABCD: $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$

Độ dài đường cao của tứ diện kẻ từ A: $AH = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right]\right|}$

Các bài toán dưới đây đều được xét trong hệ trục tọa độ Oxyz.

Dạng 1. Làm quen với hệ trục tọa độ Oxyz

Ví dụ 1.1

Cho điểm $A(2; -3; 5)$. Xác định tọa độ các điểm:

a. H là hình chiếu vuông góc của A lên Oy. b. B là điểm đối xứng với A qua Oy.

Lời giải

....

....

....

....

Ví dụ 1.2

Cho điểm $A(2; -3; 5)$. Xác định tọa độ các điểm:

a. H là hình chiếu vuông góc của A lên (Oxz). b. B là điểm đối xứng với A qua (Oxz).

Lời giải

....

....

....

....

Ví dụ 1.3

Cho hai điểm $A(3;1;0)$, $B(4;3;1)$, xác định tọa độ $\overrightarrow{AB}$.

Lời giải

....

Ví dụ 1.4

Tìm số thực x và y sao cho $\vec{a} = (x-2; 3-2y; -4)$ cùng phương $\vec{b} = (-3;1;2)$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.5

Cho ba điểm thẳng hàng $A(3;1;0)$, $B(4;3;1)$ và $C(x;y;-2)$. Tính giá trị $x-3y$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.6

Cho $\vec{a} = (1; -1; 2), \vec{b} = (3; 0; -1)$. Tìm tọa độ $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.7

Cho $\vec{a} = (-12; 15; 5), \vec{b} = (3; 0; -1), \vec{c} = (-2; 5; 1)$. Xác định x, y sao cho $\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c}$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.8

Cho 2 điểm $A(2; 3; -5), B(-4; 1; 1)$. Xác định tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB?

Lời giải

....

....

....

Ví dụ 1.9

Cho 3 điểm $A(-1;0;0)$, $B(0;-3;0)$, $C(0;0;2)$. Xác định tọa độ của điểm D biết rằng ABCD là hình bình hành.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1. Cho điểm $A(3;1;0)$, xác định tọa độ các điểm:

a. A_1 là điểm đối xứng với A qua gốc tọa độ O.

b. A_2 là hình chiếu vuông góc của A qua lên Oz.

c. A_3 là điểm đối xứng của A qua Oz.

d. A_4 là hình chiếu vuông góc của A qua lên Oyz.

e. A_5 là điểm đối xứng của A qua Oxy.

Câu 2. Cho vectơ $\vec{a} = (2x;-1;4)$, tìm số thực x và y sao cho $\vec{b} = (-2;y+1;-2)$ cùng phương $\vec{a}$.

Câu 3. Cho hai điểm $A(3;1;0)$, $B(4;3;1)$, xác định tọa độ $\overrightarrow{BA}$.

Câu 4. Cho ba điểm $A(3;1;0)$, $B(4;3;1)$. Xác định tọa độ điểm C nằm trên mặt phẳng (Oyz) sao cho ba điểm A, B, C thẳng hàng?

Câu 5. Cho vectơ $\vec{a} = (1;-1;2)$, tìm tọa độ vectơ $\vec{u} = \vec{a} - \vec{i} + 2\vec{j}$.

Câu 6. Cho ba vectơ $\vec{a} = (2;1;-2)$, $\vec{b} = (3;-3;5)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{u}$ thỏa : $\vec{u} - 2\vec{k} = \vec{a} + 2\vec{b}$

Câu 7. Cho ba vectơ $\vec{a} = (1;-1;2)$, $\vec{b} = (3;0;-1)$, $\vec{c} = (-2;5;1)$. Xác định các số thực x, y, z thỏa mãn $\vec{i} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

Câu 8. Xác định tọa độ trung điểm P của đoạn thẳng MN với $M(-3;2;1)$, $N(1;2;5)$

Câu 9. Cho 2 điểm $A(2;3;-5)$, $B(-4;1;1)$. Xác định tọa độ điểm C sao cho A là trung điểm đoạn thẳng BC.

Câu 10. Xác định tọa độ điểm G là trọng tâm tam giác ABC với $A(2;3;-5)$, $B(-6;1;1)$, $C(1;2;1)$

Câu 11. Cho tam giác ABC với $A(1;-3;3)$; $B(2;-4;5)$, $C(a;-2;b)$ nhận điểm $G(1;c;3)$ làm trọng tâm của nó. Tính giá trị của tổng $a+b+c$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho $A(2;3;-5)$, $B(-4;1;1)$, $C(1;2;1)$. Xác định tọa độ điểm D sao cho ABCD là hình bình hành.

Câu 13. Trong không gian Oxyz, cho $A(-1;1;2)$, $B(2;-1;-3)$ và $C(7;4;-3)$. Tìm tọa độ M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Dạng 2. Tích vô hướng của 2 vectơ và ứng dụng

Ví dụ 2.1

Cho $\vec{a} = (2;-1;2)$, $\vec{b} = (3;-2;1)$ Tính $\vec{a}.\vec{b}$.

Lời giải

....

Ví dụ 2.2

Cho $\vec{a} = (2;-1;2)$, $\vec{b} = (m;1;1)$. Xác định số thực m sao cho $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Lời giải

....

....

....

Ví dụ 2.3

Cho điểm $A(1;2;-3)$ và $B(-2;1;1)$, xác định tọa độ điểm C trên trục Oy sao cho tam giác ABC vuông tại B?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.4

Cho $\vec{a} = (2; -1; -1)$, tính độ dài vectơ $\vec{a}$?

Lời giải

....

....

Ví dụ 2.5

Cho $A(1; 0; -3)$, $B(2; 4; -1)$. Xác định độ dài đoạn thẳng AB.

Lời giải

....

....

Ví dụ 2.6

Tính khoảng cách từ điểm $A(-1; 2; 3)$ đến mặt phẳng Oz?

Lời giải

....

....

....

....

Ví dụ 2.7

Tính khoảng cách từ điểm $A(-1; 2; 3)$ đến mặt phẳng (Oyz)?

Lời giải

....

....

....

....

Ví dụ 2.8

Cho $\vec{a} = (2; -1; 2)$, $\vec{b} = (3; -2; 1)$, xác định số đo góc giữa 2 vectơ đã cho?

Lời giải

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1. Cho hai vectơ $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{k}, \vec{b} = (2; -1; 5)$ Tính $\vec{a}.\vec{b}$.

Câu 2. Cho hai vectơ $\vec{a} = (2; -1; 2), \vec{b} = (3; -2; 1)$. Tính $\vec{a}.\left(\vec{a} - 2\vec{b}\right)$.

Câu 3. Cho ba điểm $M(2; 3; -1), N(-1; 1; 1)$ và $P(1; m - 1; 2)$. Tìm m để MN vuông góc NP.

Câu 4. Cho điểm $A(2; 3; 2)$ và $B(-2; -1; 3)$, xác định tọa độ điểm C trên trục Ox sao cho tam giác ABC vuông tại A?

Câu 5. Cho vectơ $\vec{u} = (1; 1; 4)$, tính $|\vec{u}|$?

Câu 6. Xác định độ dài đoạn thẳng MN biết $M(-3; 2; 1), N(1; 2; 5)$.

Câu 7. Cho hai điểm $A(1; 0; -3), B(2; 4; -1)$. Tìm tọa độ điểm $C \in Oy$ sao cho $AB = BC$?

Câu 8. Xác định khoảng cách từ điểm $A(2; -3; 1)$ đến trục Ox và mặt phẳng (Oxz)?

Câu 9. Cho hai vecto $\vec{a} = (2; 1; 2), \vec{b} = (1; -2; -2)$, xác định số đo góc giữa 2 vectơ đã cho?

Câu 10. Cho hai vecto $\vec{a} = (2; 1; 2), \vec{b} = (x; 4; -3)$. Có bao nhiêu số thực x sao cho góc giữa 2 vectơ đã cho bằng $60°$?

Dạng 3. Tích có hướng của 2 vectơ và ứng dụng

Ví dụ 3.1

Cho $\vec{a} = (2; -1; 2), \vec{b} = (3; -2; 1)$. Tính $\vec{a} \wedge \vec{b}$.

Lời giải

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.2

Cho $\vec{a} = (1; 2; 1), \vec{b} = (-1; 1; 2)$ và $\vec{c} = (x; 3x; x + 2)$. Tìm x để 3 vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.3

Cho $A(1;-2;0)$, $B(3;3;2)$, $C(-1;2;2)$. Tính diện tích của tam giác ABC.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.4

Cho $A(1;-2;0)$, $B(3;3;2)$, $C(-1;2;2)$. Tính độ dài đường cao AH của tam giác ABC.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.5

Cho $A(1;-2;0), B(3;3;2), C(-1;2;2), D(3;3;1)$ Tính thể tích của tứ diện ABCD ?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1. Cho hai vecto $\vec{a} = (1;1;-2), \vec{b} = (2;1;-1)$, tính $[\vec{a};\vec{b}]$?

Câu 2. Cho 3 vectơ $\vec{a} = (1;1;-2), \vec{b} = (-1;1;2)$ và $\vec{c} = (x+2;2x-1;1)$. Tìm x để 3 vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

Câu 3. Cho bốn điểm $A(1;-2;0), B(1;0;-1), C(0;-1;2)$ và $D(0;3;d)$. Xác định d để bốn điểm A, B, C và D đồng phẳng?

Câu 4. Cho $A(3;3;2), B(-1;2;2), C(3;3;1)$. Tính diện tích của tam giác ABC.

Câu 5. Cho hình bình hành ABCD có $A(1;-2;0), B(3;3;2), C(-1;2;2)$. Tính diện tích của hình bình hành ABCD.

Câu 6. Cho $A(1;-2;0), B(3;3;2), C(-1;2;2)$. Tính độ dài đường cao BK của tam giác ABC.

Câu 7. Tính thể tích tứ diện ABCD với $A(-1;-2;4), B(-4;-2;0), C(3;-2;1)$ và $D(1;1;1)$.

Câu 8. Cho bốn điểm không đồng phẳng $A(1;-2;0), B(3;3;2), C(-1;2;2), D(3;3;1)$. Xác định độ dài đường cao AH kẻ từ A của tứ diện ABCD.

$$\left(V_{ABCD} = \frac{1}{3}AH.S_{BCD} \Leftrightarrow AH = \frac{3V_{ABCD}}{S_{BCD}} = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\right|}\right)$$

Dạng 4. Mặt cầu

Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R:

$$(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

Xét phương trình $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Điều kiện để (S) là phương trình mặt cầu: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

Khi đó, mặt cầu (S) có $I(a;b;c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

Ví dụ 4.1

Xác định tọa độ tâm I và bán kính mặt cầu:

a. $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 9$

b. $(S): 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x - 2y - 2z + 2 = 0$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 4.2

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 6z + 14 = 0$ là phương trình của mặt cầu ?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 4.3

Viết phương trình mặt cầu (S) thõa mãn:

a. Tâm $I(1; 1; -2)$ và bán kính bằng 3

b. Tâm $I(1; 1; -2)$ và đi qua điểm $A(2; -1; 1)$

c. Đường kính với $A(1; 1; -3)$ và $B(-3; 1; 5)$

Lời giải

....

....

....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4.4

Cho bốn điểm $A(6;-2;3)$, $B(0;1;6)$, $C(2;0;-1)$ và $D(4;1;0)$. Khi đó mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có bán kính bằng bao nhiêu?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1. Xác định tâm và bán kính các mặt cầu sau:

a. $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 9$

b. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 2 = 0$

c. $(S): 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 12y - 12z + 18 = 0$

Câu 2. Viết phương trình mặt cầu (S) thỏa :

a. Tâm $I(1;-2;3)$, bán kính $R = 2$?

b. Tâm $I(2;-1;3)$ và đi qua điểm $A(3;-4;4)$.

c. Đường kính AB với $A(0,2,0)$, $B(2;3;1)$.

Câu 3. Cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;-3;0)$và $C(0;0;6)$. Xác định bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp OABC?

Câu 4. Viết phương trình của mặt cầu (S) đi qua $A(0,2,0)$, $B(2;3;1)$, $C(0,3;1)$ và có tâm ở trên mặt phẳng (Oxz)?

Bài 2 PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

TRỌNG TÂM

1. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

$Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C)$.

2. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là vectơ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với (P).

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(A; B; C)$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

3. Các mặt phẳng tọa độ

Mặt phẳng (Oxy): $z = 0$	Mặt phẳng (Oyz): $x = 0$	Mặt phẳng (Oxz): $y = 0$
VTPT là $\vec{k} = (0; 0; 1)$	VTPT là $\vec{i} = (1; 0; 0)$	VTPT là $\vec{j} = (0; 1; 0)$

4. Các trường hợp riêng

Xét phương trình mặt phẳng (α): $Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

- Nếu $D = 0$ thì mặt phẳng (α) chứa điểm $O(0; 0; 0)$.
- Nếu một trong các hệ số A, B hoặc C bằng 0 thì mặt phẳng sẽ song song $(D \neq 0)$ hoặc chứa $(D = 0)$ các trục tọa độ tương ứng là Ox, Oy hoặc Oz.
- Nếu (α) cắt các trục tọa độ tại các điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ với $abc \neq 0$.

  Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn (α): $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Các bài toán dưới đây đều được xét trong hệ trục tọa độ Oxyz.

Dạng 1. Phương trình mặt phẳng

Ví dụ 1.1

Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng $(P): -2x + y - 5 = 0$

A. $(-2; 5; 0)$. **B.** $(-2; 2; -5)$. **C.** $(0; -1; -5)$. **D.** $(-2; 1; -5)$.

Ví dụ 1.2

Mặt phẳng $(P): -2x + 2y - 4z - 3 = 0$ có vectơ pháp tuyến là:

A. $\vec{n} = (-2; 2; 4)$ **B.** $\vec{n} = (-2; -2; 4)$ **C.** $\vec{n} = (1; -1; 2)$ **D.** $\vec{n} = (1; 1; 2)$

Lời giải

....

Ví dụ 1.3

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(-1;1;0)$, và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(0;2;-1)$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.4

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;-2;1)$ và vuông góc BC với $B(-1;-1;2)$, $C(2;1;1)$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.5

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua các điểm $A(-1;1;0)$, $B(0;2;2)$, $C(0;0;-2)$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.6

Cho các điểm $A(1;1;1)$, $B(-2;1;2)$, $C(-1;1;3)$, $D(2;2;-1)$. Viết phương trình mặt phẳng chứa AB và song song với CD.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.7

Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB với $A(-1;0;1)$, $B(-3;2;1)$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.8

Viết phương trình mặt phẳng chứa trục Oy và điểm $A(1;-2;2)$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Xét phương trình mặt phẳng (α): $Ax+By+Cz+D=0$ với $A^2+B^2+C^2\neq 0$.

- Nếu (α) cắt các trục tọa độ tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $abc\neq 0$.

  Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn (α): $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

- Mặt phẳng đi qua điểm $H(x_0;y_0;z_0)$ cắt các trục tọa độ tại A, B, C sao cho H là **trực tâm tam giác** được tạo thành: $x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0$
- Mặt phẳng đi qua điểm $H(x_0;y_0;z_0)$ cắt các trục tọa độ sao cho H là **trọng tâm tam giác** được tạo thành có phương trình: $\frac{x}{3x_0}+\frac{y}{3y_0}+\frac{z}{3z_0}=1$
- Mặt phẳng đi qua điểm $H(a;b;c)$ cắt các trục tọa độ tại ba điểm A, B, C sao cho **thể tích khối chóp OABC là nhỏ nhất**: $\frac{x}{3x_0}+\frac{y}{3y_0}+\frac{z}{3z_0}=1$

Ví dụ 1.9

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua các điểm $A(0;1;0)$, $B(0;0;2)$, $C(-2;0;0)$.

Lời giải

....

....

....

Ví dụ 1.10

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $H(1; 1; -3)$ cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho H là trực tâm tam giác ABC?

Lời giải

....

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1. Viết phương trình mặt phẳng (P) thỏa mãn:

a. Đi qua điểm $M(2; 2; -3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2; 1)$.

b. Đi qua các ba điểm $A(0; 1; 0)$, $B(1; 0; 2)$, $C(-2; 2; 0)$.

c. Đi qua điểm A và vuông góc AB với $A(0; 1; 0)$, $B(1; 0; 2)$.

d. Đi qua điểm A và vuông góc BC với $A(1; 1; 1)$, $B(-2; 1; 2)$, $C(-1; 1; 3)$.

e. Chứa BC và song song với AD với $A(1; 1; 1)$, $B(-2; 1; 2)$, $C(-1; 1; 3)$, $D(2; 2; -1)$

f. Chứa điểm $A(1; -2; 1)$, $B(2; 1; 2)$ và song song trục Oz.

g. Đi qua điểm $A(1; -2; 1)$ và song song trục Ox, Oy.

h. Chứa trục Oz và điểm $A(1; -2; 2)$.

i. (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng MN với $M(2; 1; 2)$, $N(-2; 3; 0)$.

j. Đi qua các điểm $A(0; 1; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(0; 0; -3)$.

k. Đi qua điểm $A(1; -2; 1)$, cắt các trục tọa độ lần lượt tại M, N và P sao cho A là trọng tâm tam giác MNP.

l. Đi qua điểm $A(1; -2; 1)$, cắt các trục tọa độ lần lượt tại M, N và P sao cho A là trực tâm tam giác MNP.

m. (P) đi qua $H(1; 1; -3)$ cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho thể tích khối chóp $OABC$ là nhỏ nhất?

Dạng 2. Khoảng cách

Trong không gian hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ và điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (P), ký hiệu là $d\big(M_0; (P)\big)$, được tính theo công thức :

$$d\big(M_0; (P)\big) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ví dụ 2.1

Tính khoảng cách từ điểm $A(2; 1; -3)$ đến mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z + 4 = 0$.

Lời giải

....

....

Ví dụ 2.2

Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $(P): x - 2y - 2z + 4 = 0$ và $(Q): -x + 2y + 2z + 2 = 0$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.3

Viết phương trình mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; -2; -1)$ và cách điểm $A(2; 1; -2)$ một khoảng bằng 3

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.4

Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;1)$, tiếp xúc mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 7 = 0$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

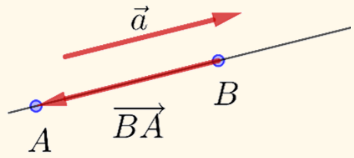
Câu 1. Tính khoảng cách từ điểm $M(2;2;-3)$ đến mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 7 = 0$.

Câu 2. Viết phương trình mặt cầu có tâm $A(1;1;1)$ và tiếp xúc mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 7 = 0$.

Bài 3 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

TRỌNG TÂM

Vectơ chỉ phương của đường thẳng là vectơ có giá song song hoặc nằm trên đường thẳng.



Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ với ${a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 \neq 0$ làm vectơ chỉ phương.

Khi đó đường thẳng Δ có phương trình

- Dạng tham số: $\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t ; \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_0 + a_2 t \end{cases}$
- Dạng chính tắc: $\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$ $(a_1 a_2 a_3 \neq 0)$

Phương trình tham số của các trục tọa độ:

- Trục Ox: $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ có vectơ chỉ phương $\vec{i}(1; 0; 0)$
- Trục Oy: $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ có vectơ chỉ phương $\vec{j}(0; 1; 0)$.
- Trục Oz: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ có vectơ chỉ phương $\vec{k}(0; 0; 1)$.

Các bài toán dưới đây đều được xét trong hệ trục tọa độ Oxyz.

Dạng 1. Phương trình đường thẳng

Ví dụ 1.1

Xác định vectơ chỉ phương của các đường thẳng:

a. $\Delta_1 : \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{3}$

b. $\Delta_2 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 3t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = -2t \end{cases}$

c. Đường thẳng đi qua hai điểm $A(0; -2; 1)$ và $B(3; 1; -5)$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.2

Đưa phương trình đường thẳng $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3t \\ z = -1 + 5t \end{cases}$ về dạng chính tắc.

Lời giải

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.3

Đưa phương trình đường thẳng $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{1}$ về dạng tham số.

Lời giải

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.4

Viết phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm $M(1; 2; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1; -3; 2)$.

a. Dạng chính tắc

b. Dạng tham số

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1. Xác định một vectơ chỉ phương của các đường thẳng:

$d_1: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{-1}$;

$d_2: \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{3-y}{2} = \dfrac{z-5}{4}$;

$d_3: \begin{cases} x = 3 - m \\ y = 2 + m \\ z = -2 + 3m \end{cases} \quad (m \in \mathbb{R})$

d_4: Đi qua hai điểm $M(1; 2; -2)$ và $N(2; -1; 1)$

Câu 2. Đưa phương trình đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3t - 1 \\ z = 1 + t \end{cases}$ về dạng chính tắc.

Câu 3. Đưa phương trình đường thẳng $\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{3}$ về dạng tham số.

Câu 4. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(2; -1; 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1; -2; -1)$.

a. Dạng chính tắc

b. Dạng tham số

Câu 5. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $M(1; 2; -2)$ và $N(2; -1; 1)$.

a. Dạng chính tắc

b. Dạng tham số

Bài 4 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI

Các bài toán dưới đây đều được xét trong hệ trục tọa độ Oxyz.

Dạng 1. Vị trí tương đối giữa các đối tượng trong không gian

Cho hai mặt phẳng $(P): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(Q): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Xét vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng (P) và (Q):

$(P) \parallel (Q): \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$

$(P) \perp (Q): A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

$(P) \equiv (Q): \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$

(P) cắt (Q): trường hợp còn lại.

Ví dụ 1.1

xét vị trí tương đối giữa các đối tượng sau:

a. $(P): 2x - y + 3z + 1 = 0$ và $(Q): 4x - 2y + 6z - 1 = 0$

b. $(P): 2x - y + 3z + 1 = 0$ và $(Q): 4x - 2y + 6z + 2 = 0$

c. $(P): 2x - y + 3z + 1 = 0$ và $(Q): 2x + y - z - 2 = 0$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.2

cho hai mặt phẳng $(P): x + (m+1)y - 2z + m = 0$ và $(Q): 2x - y + 3 = 0$, với m là tham số thực. Xác định giá trị tham số m để $(P) \perp (Q)$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.3

Cho hai mặt phẳng $(P): 2x + 4y + 3z - 5 = 0$ và $(Q): mx - ny - 6z + 2 = 0$. Giá trị của m, n sao cho (P) song song với (Q) là bao nhiêu?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Cho hai mặt phẳng $(P): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ cắt $(Q): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.
Đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng là đường thẳng thỏa:

- Vectơ chỉ phương $\vec{u} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2}$.
- Đi qua điểm $M(x_0; y_0; 0)$ với x_0, y_0 thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + D_1 = 0 \\ A_2x_0 + B_2y_0 + D_2 = 0 \end{cases}$

Ví dụ 1.4

Viết phương trình tuyến hai mặt phẳng $(P): x + y = 0$ và $(Q): x - y + z + 4 = 0$:

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Cho hai đường thẳng d_1 có VTCP $\overrightarrow{u_1} = (a_1; b_1; c_1)$ và đi qua điểm $A(x_A; y_A; z_A)$, d_2 có VTCP $\overrightarrow{u_2} = (a_2; b_2; c_2)$ và đi qua điểm $B(x_B; y_B; z_B)$.

Xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng d_1 và d_2.

$d_1 \equiv d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_1} \text{ cùng phương } \overrightarrow{u_2} \\ \overrightarrow{AB} \text{ cùng phương } \overrightarrow{u_2} \end{cases}$

$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_1} \text{ cùng phương } \overrightarrow{u_2} \\ \overrightarrow{AB} \text{ không cùng phương } \overrightarrow{u_2} \end{cases}$

d_1 cắt $d_2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}).\overrightarrow{AB} = 0$

d_1 chéo $d_2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}).\overrightarrow{AB} \neq 0$

$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_3 = 0$ (kiểm tra tính chất này khi d_1 cắt hoặc chéo d_2)

Ví dụ 1.5

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, xét vị trí tương đối giữa các đường thẳng :

a. $d_1: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{-3}$ và $d_2: \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$

b. $d_1: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{-3}$ và $d_2: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$

c. $d_1: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{4}$ và $d_2: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

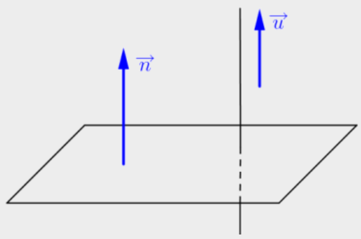
....

....

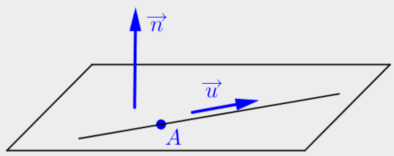
Mặt phẳng (P): $Ax + By + Cz + D = 0$ có VTPT $\vec{n} = (A; B; C)$

Đường thẳng d: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + xt \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ có VTCP $\vec{u} = (a; b; c)$.

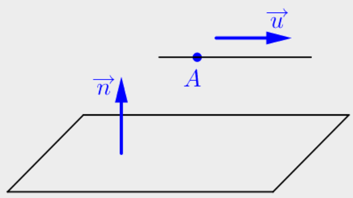
- Đường thẳng vuông góc mặt phẳng $\Leftrightarrow$ $\vec{n}$ cùng phương $\vec{u}$.



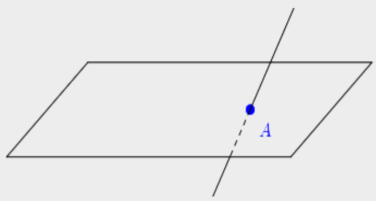
- Đường thẳng nằm trong mặt phẳng $\Leftrightarrow$ Hệ $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \\ Ax+By+Cz + D = 0 \end{cases}$ có vô số nghiệm



- Đường thẳng song song mặt phẳng $\Leftrightarrow$ Hệ $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \\ Ax+By+Cz + D = 0 \end{cases}$ vô nghiệm



- Đường thẳng cắt mặt phẳng $\Leftrightarrow$ Hệ $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \\ Ax+By+Cz + D = 0 \end{cases}$ có một nghiệm



Ví dụ 1.6

Xét vị trí tương đối giữa các đối tượng sau:

a. $d: \dfrac{x-3}{-9} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-4}{6}$ và $(P): 3x - y - 2z + 5 = 0$.

b. $d: \begin{cases} x = -1 - t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$ và $(P): x + 2y + 3z - 6 = 0$.

c. $d: \begin{cases} x = -1 - t \\ y = -1 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$ và $(P): x + 2y + 3z - 6 = 0$.

d. $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-1}{-3}$ và $(P): 2x - y + z + 1 = 0$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 1.7

Xác định tọa độ giao điểm của hai đối tượng:

a. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{2}$ và $(P): x - y + z + 4 = 0$.

b. $\Delta: \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 \end{cases}$ và $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 2. Góc

Mặt phẳng (P) có VTPT $\overrightarrow{n_1} = (a_1; a_2; a_3)$, (Q) có VTPT $\overrightarrow{n_2} = (b_1; b_2; b_3)$

Khi đó: $\cos\big((P);(Q)\big) = \dfrac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|} = \dfrac{|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

Đường thẳng d_1 có VTCP $\overrightarrow{u_1} = (a_1; a_2; a_3)$, d_2 có VTCP $\overrightarrow{u_2} = (b_1; b_2; b_3)$

Khi đó: $\cos(d_1; d_2) = \dfrac{|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}|.|\overrightarrow{u_2}|} = \dfrac{|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n} = (a_1; a_2; a_3)$; Đường thẳng d có VTCP $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$

Khi đó: $\sin\big((P); d\big) = \dfrac{|\vec{n}.\vec{u}|}{|\vec{n}|.|\vec{u}|} = \dfrac{|a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}$

Ví dụ 2.1

Xác định góc giữa d: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$ và (P): $2x + y + 2z - 1 = 0$.

Lời giải

....

....

....

....

....

Bài tập tự luyện

Câu 1. Xác định góc giữa hai đối tượng sau:

a. d: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$ và d': $\begin{cases} x = 3t \\ y = -2 + t. \\ z = 1 - t \end{cases}$

b. (P): $2x + y + 2z = 0$ và (Q): $3x - 4z + 2 = 0$

Dạng 3. Phương trình đường thẳng, mặt phẳng ứng dụng tính chất song song, vuông góc

$(P)||(Q) \Rightarrow \overrightarrow{n_{(P)}}$ cùng phương $\overrightarrow{n_{(Q)}}$

$(P) \perp (Q) \Rightarrow \overrightarrow{n_{(P)}} \perp \overrightarrow{n_{(Q)}}$

$\Delta||d \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta}$ cùng phương $\overrightarrow{u_d}$

$\Delta \perp d \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} \perp \overrightarrow{u_d}$

$(P)||\Delta \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{u}$

$(P) \perp \Delta \Rightarrow \vec{n}$ cùng phương $\vec{u}$

$\Delta \subset (P) \Rightarrow \begin{cases} \vec{n} \perp \vec{u} \\ \text{lấy } A \in d \Rightarrow A \in (P) \end{cases}$

Ví dụ 3.1

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(2;1;-5)$ và song song $(Q): x - 2y + 2z - 3 = 0$.

Lời giải

....

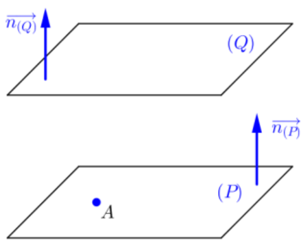
....

....

....

....

....



Ví dụ 3.2

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(2;1;-5)$, vuông góc với $(Q): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và $(R): 2x - y + z - 1 = 0$.

Lời giải

....

....

....

....

....

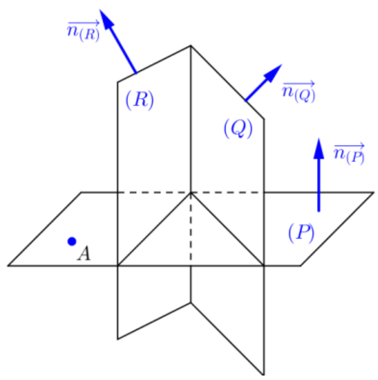
....

....

....

....

....



Ví dụ 3.4

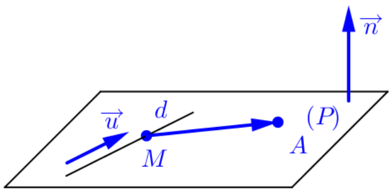
Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(1;2;3)$ và vuông góc với $d_1: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$ và song song $(P): x - y + z + 4 = 0$.

Lời giải

Ví dụ 3.3

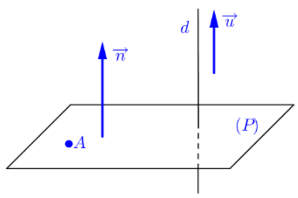
Viết phương trình mặt phẳng chứa điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x}{3} = \frac{y-1}{4} = z + 3$.

Lời giải

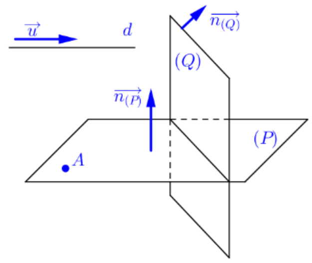


Bài tập tự luyện

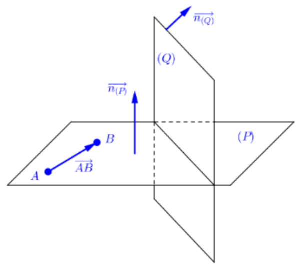
Câu 1. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(2;1;-5)$ và vuông góc với $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t. \\ z = -2t \end{cases}$



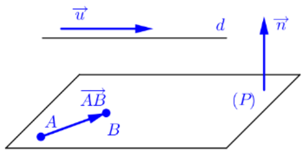
Câu 2. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(2;1;-5)$, vuông góc với $(Q): x-2y+2z-3=0$ và song song với $d:\begin{cases}x=2+t\\y=3+2t.\\z=1-t\end{cases}$



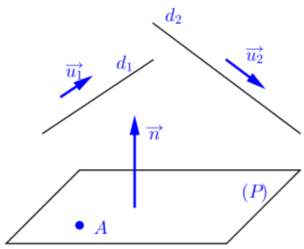
Câu 3. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa hai điểm $A(1;-1;2)$, $B(2;1;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x+y+z+1=0$.



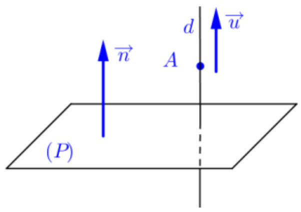
Câu 4. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa hai điểm $A(1;-1;2)$, $B(2;1;1)$ và song song với đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=-2+2t\end{cases}$.



Câu 5. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa điểm $A(1;-1;2)$, song song với hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=-2+2t\end{cases}$ và $d_2: \frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{x+2}{2}$.



Câu 6. Viết phương trình đường thẳng d đi qua $A(2;1;-5)$ và vuông góc với $(P): x-2y+2z-3=0$.

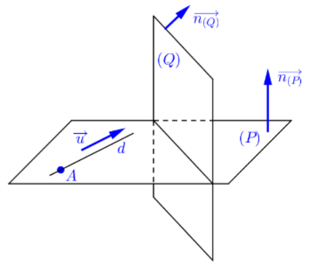


Câu 7. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(2;1;-5)$ và song song với $d': \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{2}$.

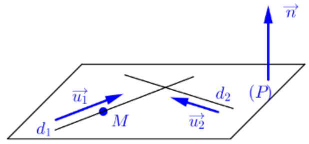
Câu 8. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(1;2;3)$, song song với $(P): x+y=0$ và $(Q): x-y+z+4=0$.

Câu 9. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(1;2;3)$ và vuông góc với 2 đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=-2+2t\end{cases}$ và $d_2: \frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{x+2}{2}$.

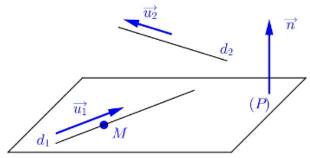
Câu 10. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $d\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q)\colon 2x + y - z = 0$.



Câu 11. Viết phương trình mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau $d_1\colon \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{3}$ và $d_2\colon \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$.



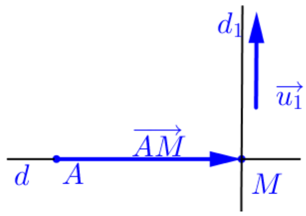
Câu 12. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$ và song song $d_2\colon \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{3}$.



Dạng 4. Đường thẳng cắt một đường thẳng cho trước

Ví dụ 4.1

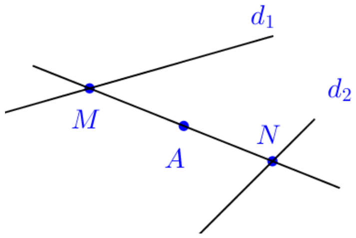
Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(1; 2; 3)$, cắt và vuông góc với $d_1\colon \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+3}{-2}$?



Lời giải

Ví dụ 4.2

Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(0;2;-4)$, cắt cả hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{4}$ và $d_2: \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 3 + 3t \\ z = -2 - t \end{cases}$?



Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

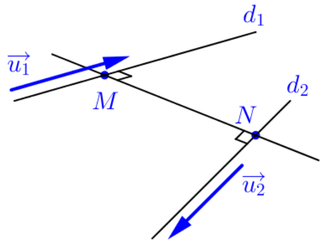
....

....

Ví dụ 4.3

Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng

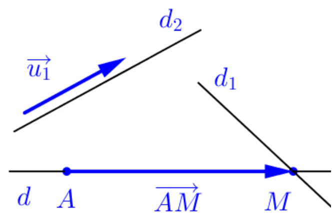
$d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+3}{-2}$ và $d_2: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$?



Lời giải

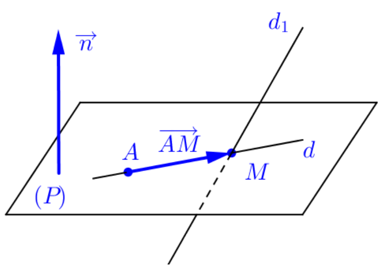
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài tập tự luyện

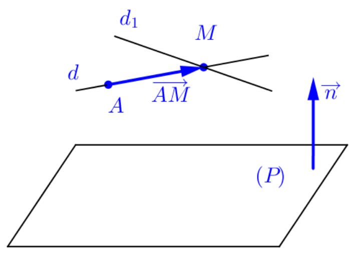


Câu 1. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(1;2;3)$, cắt $d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+3}{-2}$ và vuông góc với $d_2: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$?

Câu 2. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(1;2;3)$, cắt $d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+3}{-2}$ và nằm trên mặt phẳng $(P): x - y + 2z - 5 = 0$



d nằm trên (P)



d song song (P)

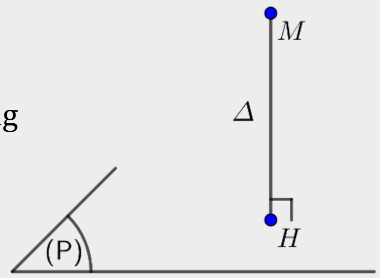
Câu 3. Xác định một vectơ chỉ phương của đường thẳng đi qua điểm $A(0;-1;0)$, cắt cả hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = -2 \\ z = 2 - 2t \end{cases}$?

Câu 4. Viết phương trình dạng đường vuông góc chung của hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = -2 \\ z = 2 - 2t \end{cases}$?

Bài 5 HÌNH CHIẾU VUÔNG GÓC

Cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$

$H(x; y; z)$ là hình chiếu vuông góc của M lên (P):



- $H \in \Delta$ với Δ là đường thẳng đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và vuông góc (P): $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$
- $H \in (P): Ax + By + Cz + D = 0$

Khi đó, tọa độ điểm $H(x; y; z)$ là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt \\ z = z_0 + Ct \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$

Ví dụ 1

Cho điểm $A(0; 1; 2)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z = 0$.

a. Xác định tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của A lên (P).

b. Xác định tọa độ điểm B là điểm đối xứng với A qua (P).

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

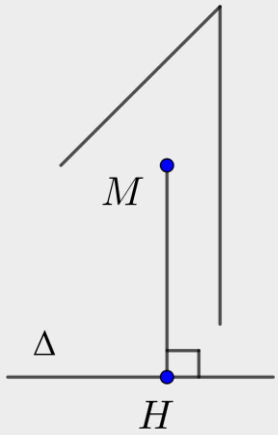
....

....

....

Cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases}$

$H(x; y; z)$ là hình chiếu vuông góc của M lên Δ



- $H \in \Delta$ với $\Delta: \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases}$
- $H \in (P)$ là mặt phẳng đi qua điểm M và vuông góc Δ.
  $(P): a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

Khi đó, tọa độ điểm $H(x; y; z)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = x_1 + At \\ y = y_1 + Bt \\ z = z_1 + Ct \\ a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \end{cases}$$

Ví dụ 2

Cho điểm $M(2; 0; 1)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$?

a. Xác định tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của A lên Δ.

b. Xác định tọa độ điểm B là điểm đối xứng với A qua Δ.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$

Khi đó: Đường thẳng d là hình chiếu vuông góc của Δ lên mặt phẳng (P) có tính chất:

- Vectơ chỉ phương $\vec{u} = (\overrightarrow{u_\Delta} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{n}$
- Đi qua giao điểm $M(x; y; z)$ là giao điểm của Δ và (P) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt \\ z = z_0 + Ct \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

Ví dụ 3

Viết phương trình d_1 là hình chiếu vuông góc của d: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + t \\ z = 4 - 7t \end{cases}$ lên $(P): x + y + z = 0$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ có H là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng Δ.

Khi đó: (P) là mặt phẳng chứa Δ, cách M một khoảng lớn nhất.

$\Leftrightarrow$ (P) đi qua H và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{MH}$.

Ví dụ 4

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$ sao cho khoảng cách từ $M(2;5;3)$ đến (P) lớn nhất?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Cho điểm M có H là hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng (P). Điểm A nằm trên (P)

Khi đó: Δ là đường thẳng đi qua A, nằm trong (P) và cách M một khoảng nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ Δ đi qua A và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AH}$

Ví dụ 5

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $K(3;0;0)$, nằm trong mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ sao cho khoảng cách từ điểm $M(3;2;1)$ đến đường thẳng Δ là nhỏ nhất.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....