



ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Chú ý: Thí sinh làm mỗi bài toán trên một tờ giấy thi.

Bài 1 (4,0 điểm). Cho a là số thực, xét dãy số (u_n) xác định bởi: $u_0 = a, u_{n+1} = u_n^2 + u_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Đặt $S_n = \frac{1}{1+u_1} + \frac{1}{1+u_2} + \dots + \frac{1}{1+u_n}, n \geq 1$. Tìm tất cả các giá trị của a để dãy (S_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó theo a .

Bài 2 (4,0 điểm). Cho đường tròn (O) đường kính AB . Điểm M thuộc tia đối của tia AB (M khác A). Kẻ đường thẳng qua M cắt (O) tại C và D (C nằm giữa M và D). Gọi N là giao điểm của AC và BD , I là giao điểm của AD và BC . Đường thẳng đi qua M vuông góc với AB cắt AD, BC lần lượt tại E, F . Đường tròn (IEF) cắt NI tại điểm thứ hai là J .

a) Chứng minh rằng F, A, J thẳng hàng.

b) Gọi P là điểm đối xứng với I qua O . Đường thẳng đi qua I song song với NP cắt AB tại Q ; đường thẳng đi qua Q song song với NI cắt PA, PB lần lượt tại R, S . Chứng minh rằng (PRS) tiếp xúc với (IEF) .

Bài 3 (4,0 điểm). Tìm giá trị lớn nhất của số nguyên dương k để tồn tại đa thức $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i) $P(x)$ có nghiệm nguyên;

ii) $P(x) - 2024$ có đúng k nghiệm nguyên phân biệt.

Bài 4 (4,0 điểm). Cô giáo viết lên bảng 80 số thực phân biệt và đưa ra thử thách cho một nhóm học sinh. Mỗi bạn ban đầu được phát hai mảnh giấy và sẽ dựa theo các số trên bảng để thảo luận với nhau mà viết lên mỗi mảnh giấy nhận được một con số (các số không nhất thiết phân biệt và cũng không nhất thiết giống số nào đó của cô). Mỗi lượt thử thách cô giáo đọc một số x trên bảng và yêu cầu tất cả học sinh đều phải chọn một trong hai mảnh giấy của mình để giơ lên. Lượt thử thách được vượt qua nếu tổng tất cả các số trên các tờ giấy được giơ lên đúng bằng x . Nhóm học sinh được coi là vượt qua thử thách nếu vượt qua tất cả 80 lượt thử thách ứng với 80 số đã cho.

a) Chứng minh rằng cho dù cô giáo viết những số nào thì một nhóm gồm 79 bạn chắc chắn sẽ luôn có cách vượt qua thử thách.

b) Nếu cô viết các số $0, 1, \dots, 79$ thì nhóm cần ít nhất bao nhiêu bạn để có thể vượt qua thử thách?

Bài 5 (4,0 điểm). Một số nguyên dương h gọi là số “Hòa Bình” nếu tồn tại hai số nguyên x, y thỏa mãn $(x^2 - 6x + 12)(x^2 + 12h) = y^3$ và x lẻ.

a) Chứng minh rằng số 2 là một số “Hòa Bình”.

b) Tìm số “Hòa Bình” nhỏ nhất.

-----HẾT-----

(Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

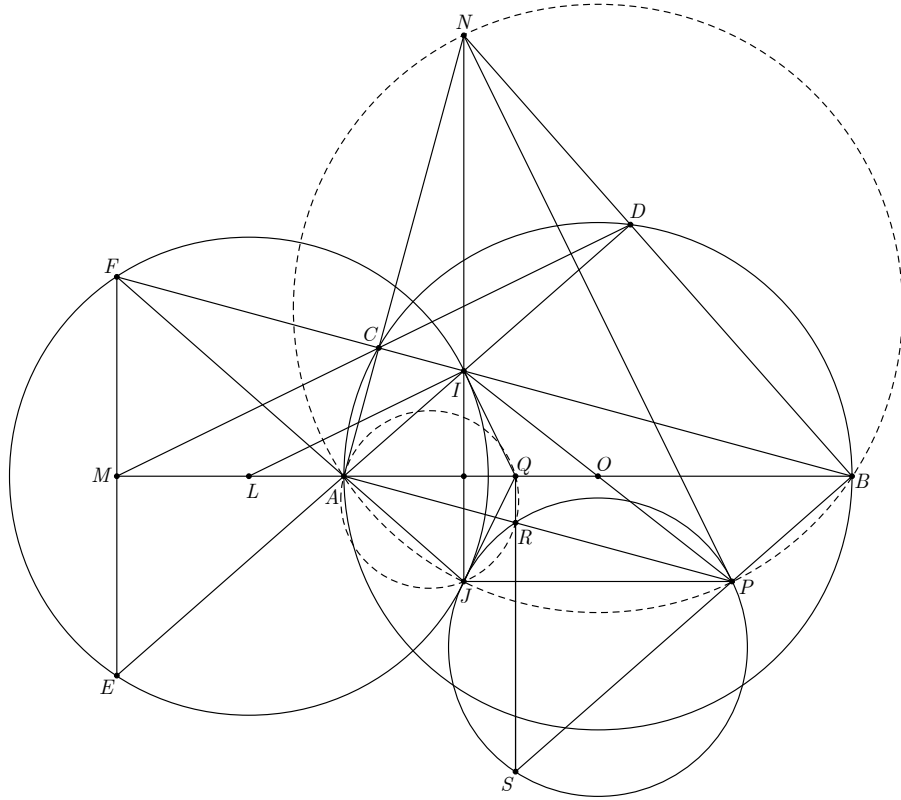
Họ tên thí sinh:

Số báo danh: Phòng thi:

TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ XVIII – HÒA BÌNH 2024	KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG NĂM 2024 HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN, KHỐI 11 (Hướng dẫn chấm gồm có 06 trang)
---	--

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
Câu 1		Bài 1 (4,0 điểm). Cho a là số thực, xét dãy số (u_n) xác định bởi: $u_0 = a, u_{n+1} = u_n^2 + u_n, \forall n \in \mathbb{N}.$ Đặt $S_n = \frac{1}{1+u_1} + \frac{1}{1+u_2} + \dots + \frac{1}{1+u_n}, n \geq 1$. Tìm tất cả các giá trị của a để dãy (S_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó theo a.	
		Ta xét các trường hợp sau: TH1. $a = -1$ hoặc $a = 0$. Khi đó $u_n = 0, \forall n \geq 1$. Suy ra $\lim S_n = \lim n = +\infty.$	0,5
		TH2. $-1 < a < 0$. Bằng quy nạp ta có $-1 < u_n < 0, \forall n \geq 1$. Hay $0 < 1 + u_n < 1, \forall n \geq 1.$ Khi đó $S_n > n, \forall n \geq 1$. Suy ra $\lim S_n = +\infty$.	1,0
		TH3. $a > 0$. Khi đó (u_n) là dãy tăng. Giả sử (u_n) bị chặn trên. Khi đó, theo Định lý Weierstrass, dãy (u_n) hội tụ. Đặt $\lim u_n = b$. Chuyển qua giới hạn công thức xác định dãy ta được $\begin{cases} b = b^2 + b \\ b > 0 \end{cases}, \text{ vô lý.}$ Vậy, (u_n) không bị chặn trên. Do đó $\lim u_n = +\infty$.	1,0
		Từ công thức xác định dãy ta lại có $u_{n+1} = u_n(1 + u_n), \text{ hay } \frac{1}{1+u_n} = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}.$ Khi đó $S_n = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{n+1}} \rightarrow \frac{1}{u_1} = \frac{1}{a^2 + a}.$	1,0
		TH4. $a < -1$. Khi đó $u_1 > 0$. Tiếp theo là hoàn toàn tương tự TH3 ta được $\lim S_n = \frac{1}{a^2 + a}$. Tóm lại, tất cả các giá trị của a để dãy (S_n) có giới hạn hữu hạn là $a < -1 \text{ hoặc } a > 0 \text{ và khi đó } \lim S_n = \frac{1}{a^2 + a}.$	0,5

Câu 2	(4,0 điểm). Cho đường tròn (O) đường kính AB. Điểm M thuộc tia đối của tia AB (M khác A). Kẻ đường thẳng qua M cắt (O) tại C và D (C nằm giữa M và D). Gọi N là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của AD và BC. Đường thẳng đi qua M vuông góc với AB cắt AD, BC lần lượt tại E, F. Đường tròn (IEF) cắt NI tại điểm thứ hai là J. a) Chứng minh rằng F, A, J thẳng hàng. b) Gọi P là điểm đối xứng với I qua O. Đường thẳng đi qua I song song với NP cắt AB tại Q; đường thẳng đi qua Q song song với NI cắt PA, PB lần lượt tại R, S. Chứng minh rằng (PRS) tiếp xúc với (IEF).	
		a) Gọi K là giao của NI với CD. Xét tam giác NAB có AD, BC, NI đồng quy nên $(MKCD) = -1$ nên $I(MKCD) = -1$. (1) Vì $C, D \in (O)$ nên $\widehat{ACB} = 90^\circ, \widehat{ADB} = 90^\circ$. Do đó I là trực tâm tam giác NAB. Suy ra $NI \perp AB$. Dẫn đến $NI \parallel EF$. (2) Từ (1) và (2) suy ra M là trung điểm EF Kết hợp với $MA \perp EF$ suy ra tâm của (IEF) thuộc AM. Do đó AM là đường trung trực của EF và IJ. Suy ra phép đối xứng trục AM biến E, A, I lần lượt thành F, A, J. Từ đó ta có F, A, J thẳng hàng.
		1,0
		1,0



1,0

2b

Gọi L là tâm của (IEF) . Ta có $\widehat{FCA} = 90^\circ$, $\widehat{FMA} = 90^\circ$ nên tứ giác $FCAM$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{CMA} = \widehat{CFA} = \widehat{CFJ} = \frac{1}{2}\widehat{sdIJ} = \widehat{ILA}$. Do đó $LI \parallel CD$. (3)

Vì O là trung điểm của IP và AB nên $IAPB$ là hình bình hành. Dẫn đến $PA \perp NA$, $PB \perp NB$. Do đó tứ giác $NAPB$ nội tiếp. Suy ra

$\widehat{PNB} + \widehat{NDC} = \widehat{PAB} + \widehat{NAB} = 90^\circ$. Do đó $NP \perp CD$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $LI \perp NP \Rightarrow LI \perp IQ$. Do đó QI là tiếp tuyến của (IEF) . Theo tính chất đối xứng ta có QJ là tiếp tuyến của (IEF) .

Vì $QS \parallel NI$ nên $QS \perp AB$. Suy ra

$$\begin{aligned}\widehat{ARQ} &= 90^\circ - \widehat{BAP} = 90^\circ - \widehat{ABI} = 90^\circ - \widehat{CDI} \\ &= 90^\circ - \widehat{LIA} = \widehat{AIQ} = \widehat{AJQ}.\end{aligned}$$

Suy ra tứ giác $AQRJ$ nội tiếp. (5)

Theo tính chất đối xứng qua AB ta có $\widehat{AJB} = \widehat{AIB} = \widehat{APB}$. Suy ra tứ giác $ABPJ$ nội tiếp. (6)

Từ (5) và (6) suy ra J là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $BPRQAS$.

Suy ra $J \in (PRS)$.

Ta có NP là đường kính của đường tròn $(NAJPB)$ nên

$$\widehat{PJN} = 90^\circ \Rightarrow PJ \parallel AB.$$

Do đó $\widehat{RPJ} = \widehat{QAR} = \widehat{QJR}$. Suy ra QJ là tiếp tuyến của (PRS) . (**)

Từ (*) và (**) suy ra (PRS) tiếp xúc với (IEF) tại J .

1,0

Câu 3		(4,0 điểm). Tìm giá trị lớn nhất của số nguyên dương k để tồn tại đa thức $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau: i) $P(x)$ có nghiệm nguyên; ii) $P(x) - 2024$ có đúng k nghiệm nguyên phân biệt.	
		Trước hết ta chỉ ra tồn tại $P(x)$ khi $k = 6$. Thật vậy, ta có $2024 = -4 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$. Xét đa thức $P(x) = -(x-4)(x-1)(x+1)(x+2)(x+11)(x+23) + 2024.$ Rõ ràng $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $P(0) = 0$ và $P(x) - 2024$ có đúng 6 nghiệm nguyên phân biệt là $4, 1, -1, -2, -11 \text{ và } -23.$	1,5
		Tiếp theo ta chỉ ra nếu $k \geq 7$ thì không tồn tại $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện của bài toán. Thật vậy, giả sử $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ mà $P(x) - 2024$ nhận 7 nghiệm nguyên phân biệt là $x_1, x_2, \dots, x_7$. Khi đó $P(x) - 2024 = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_7)Q(x) \text{ với } Q(x) \in \mathbb{Z}[x]. \quad (1)$ Giả sử $P(x)$ có nghiệm nguyên là a. Thay $x = a$ vào (1) ta được $-2024 = (a - x_1)(a - x_2) \dots (a - x_7)Q(a). \quad (2)$ Vì $x_1, x_2, \dots, x_7$ phân biệt nên $a - x_1, a - x_2, \dots, a - x_7$ phân biệt. Trong khi đó $2024 = 8 \cdot 11 \cdot 23$ chỉ biểu diễn được thành tích của nhiều nhất là 6 số nguyên phân biệt. Điều này mâu thuẫn với (2). Do đó nếu $k \geq 7$ thì không tồn tại $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện của bài toán. Từ đó ta có giá trị lớn nhất của k cần tìm là 6.	2,5
Câu 4		(4,0 điểm). Cô giáo viết lên bảng 80 số thực phân biệt và đưa ra thử thách cho một nhóm học sinh. Mỗi bạn ban đầu được phát hai mảnh giấy và sẽ dựa theo các số trên bảng để thảo luận với nhau mà viết lên mỗi mảnh giấy nhận được một con số (các số không nhất thiết phân biệt và cũng không nhất thiết giống số nào đó của cô). Mỗi lượt thử thách cô giáo đọc một số x trên bảng và yêu cầu tất cả học sinh đều phải chọn một trong hai mảnh giấy của mình để giơ lên. Lượt thử thách được vượt qua nếu tổng tất cả các số trên các tờ giấy được giơ lên đúng bằng x. Nhóm học sinh được coi là vượt qua thử thách nếu vượt qua tất cả 80 lượt thử thách. a) Chứng minh rằng cho dù cô giáo viết những số nào thì một nhóm gồm 79 bạn chắc chắn sẽ luôn có cách vượt qua thử thách. b) Nếu cô viết các số $0, 1, \dots, 79$ thì nhóm cần ít nhất bao nhiêu bạn để có thể vượt qua thử thách?	
	4a	a) Giả sử cô đã viết lên bảng các số $a_1, a_2, \dots, a_{80}$. Với 79 học sinh, ta có thể cho các bạn chọn viết các số như sau: $(a_1; a_1 - a_{79} + a_{80}), (a_2 - a_1; 0), (a_3 - a_2; 0), \dots, (a_{79} - a_{78}; 0).$ Khi đó, để biểu diễn a_1, bạn đầu tiên chọn a_1 và các bạn còn lại chọn số 0. Cứ thế, để biểu diễn số a_k với $1 \leq k \leq 79$, chỉ cần k bạn đầu tiên chọn số thứ nhất của họ và các bạn còn lại chọn số 0 là được, tổng sẽ là	2,0

		$a_1 + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_k - a_{k-1}) + 0 + \cdots + 0 = a_k.$ Cuối cùng, để biểu diễn số a_{80}, bạn đầu tiên chọn số $a_1 - a_{79} + a_{80}$, còn tất cả các bạn còn lại chọn số thứ nhất của họ, tổng thu được sẽ là $(a_1 - a_{79} + a_{80}) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{79} - a_{78}) = a_{80}.$ Như thế, cách chọn trên là hợp lệ và 79 bạn sẽ vượt qua thử thách.	
		b) Giả sử có tất cả k học sinh. Ta thấy rằng trong mỗi lần, từng bạn sẽ có 2 cách chọn số để giơ lên nên sẽ có tất cả 2^k cách chọn bộ số cho nhóm học sinh này. Rõ ràng các tổng thu được có thể phân biệt hoặc không nên số lượng tổng tạo thành sẽ không vượt quá 2^k. Vì thế, để nhóm bạn vượt qua thử thách này thì cần có điều kiện $2^k \geq 80 \text{ hay } k \geq 7.$	1,0
	4b	Với $k = 7$, ta có thể cho các bạn viết các số sau đây: $\{0, 2^0\}, \{0, 2^1\}, \{0, 2^2\}, \dots, \{0, 2^6\}$. Khi đó, với số 0, tất cả các bạn cũng chỉ cần giơ số 0 lên. Rõ ràng tổng lớn nhất có thể biểu diễn được là $2^0 + 2^1 + \cdots + 2^6 = 2^7 - 1 = 127$ và mỗi số nguyên dương không vượt quá 127 đều có thể viết thành tổng của các lũy thừa phân biệt của 2 nên các bạn luôn có cách giơ bảng để biểu diễn cho mọi số từ 1, 2, ..., 79 mà cô viết lên bảng. Do đó, số lượng học sinh ít nhất cần để vượt qua thử thách là 7.	1,0
		(4,0 điểm). Một số nguyên dương h gọi là số “Hòa Bình” nếu tồn tại hai số nguyên x, y thỏa mãn $(x^2 - 6x + 12)(x^2 + 12h) = y^3$ và x lẻ. a) Chứng minh rằng số 2 là một số “Hòa Bình”. b) Tìm số “Hòa Bình” nhỏ nhất.	
	5a	Với $h = 2$, ta chọn $x = 5$ thì $(5^2 - 6 \cdot 5 + 12)(5^2 + 24) = 7 \cdot 49 = 7^3$, là một lập phương đúng, cặp số $(x, y) = (5; 7)$ là thỏa mãn. Vậy $h = 2$ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn đề bài.	1,0
Câu 5	5b	Với $h = 1$, ta sẽ chỉ rằng không có cặp số nguyên (x, y) nào thỏa mãn đề bài. Thật vậy, giả sử phản chứng rằng có (x, y) nguyên mà $(x^2 - 6x + 12)(x^2 + 12) = y^3$ và x lẻ. Nếu $3 \mid x$ thì rõ ràng $3 \mid y$ nên $27 \mid y^3$. Mặt khác $x^2 + 12 \equiv 3 \pmod{9}$ và $x^2 - 6x + 12 \equiv 3 \pmod{9}$ nên hai số này chia hết cho 3 chứ không chia hết cho 9. Điều này kéo theo $v_3\left((x^2 - 6x + 12)(x^2 + 12)\right) = 2, \text{ không thỏa mãn.}$	1,0

	Do đó, kết hợp với x lẻ ta có $\gcd(x, 6) = 1$. Đặt $d = \gcd(x^2 - 6x + 12, x^2 + 12)$. Dễ thấy $\gcd(x^2 - 6x + 12, 6) = 1$ nên $\gcd(d, 6) = 1$. Ta có $d \mid (x^2 + 12) - (x^2 - 6x + 12) = 6x$ nên $d \mid x$. Từ đó $d \mid (x^2 + 12) - x^2 = 12$ nên có $d = 1$. Vì thế, mỗi số $x^2 - 6x + 12$ và $x^2 + 12$ đều phải là lập phương đúng. Đặt $x - 3 = a$ thì có số nguyên b để $b^3 = x^2 - 6x + 12 = (x - 3)^2 + 3 = a^2 + 3$. Vì x lẻ nên a chẵn và b lẻ. Nếu $b \equiv 1 \pmod{4}$ thì $b^3 \equiv 1 \pmod{4}$, kéo theo $a^2 \equiv 2 \pmod{4}$, rõ ràng vô lý. Vì thế nên $b \equiv -1 \pmod{4}$. Ta viết lại $a^2 + 4 = b^3 + 1 = (b + 1)(b^2 - b + 1)$. Khi đó $b^2 - b + 1 \equiv (-1)^2 + (-1) + 1 = 3 \pmod{4}$, và để ý $b^2 - b + 1 > 0$ nên nó sẽ có ước nguyên tố p có dạng $4k + 3$ (với $k \in \mathbb{Z}^+$). Ta có bổ đề sau (Bổ đề Fermat về số nguyên tố dạng $4k + 3$): <i>Bổ đề:</i> nếu p là số nguyên tố có dạng $4k + 3$ và $a, b \in \mathbb{Z}$ thoả mãn $p \mid a^2 + b^2$ thì $p \mid a, b$. Khi đó $p \mid a^2 + 2^2$ nên theo bổ đề trên thì có ngay $p \mid 2$, vô lý. Do đó, trong trường hợp này không có cặp số nguyên (x, y) nào thoả mãn. Vậy số “Hòa Bình” nhỏ nhất là 2.	2,0
	<i>Ghi chú: không yêu cầu học sinh chứng minh bổ đề đã nêu trong bài, vì nếu dùng thẳng dư bậc hai thì cũng có ngay kết quả tương ứng như trên.</i>	

----- HẾT -----