

Câu 1 (1,0 điểm) Cho bất phương trình $(m^2 - m - 6)x^2 - 2(m + 2)x + 2 \geq 0$ (1). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Câu 2 (2,0 điểm) Giải các bất phương trình sau:

a. $2\sqrt{2x+5} < x+4$.

b. $\frac{2x+1}{x-1} + 2\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} - 3 \geq 0$.

Câu 3 (2,0 điểm)

a. Cho $\sin x = -\frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P = 3 \cos x \cdot \sin 2x + \cos 2x$.

b. Chứng minh rằng: $4 \cos \left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos \left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 4 \sin^2 x = 1$.

Câu 4 (3,0 điểm)

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $d_1: x - y - 1 = 0$ và $d_2: 7x - y - 13 = 0$.

a. Tính cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng d_1 và d_2 .

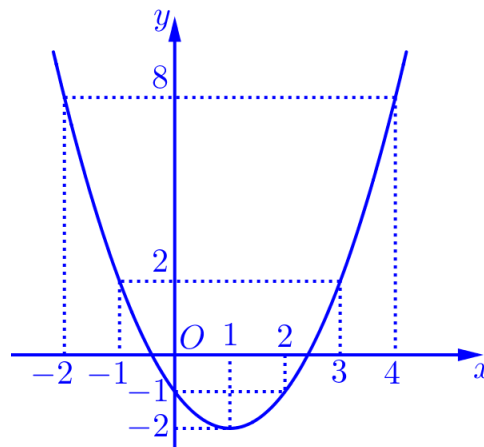
b. Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua gốc tọa độ O và song song với d_2 .

c. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I nằm trên đường thẳng d_1 , tiếp xúc với d_2 và có bán kính $R = 3\sqrt{2}$.

2. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm M nằm trên cạnh CD sao cho $DC = 3DM$ và điểm N đối xứng với điểm C qua điểm B . Biết đỉnh $B(-2;2)$, điểm A nằm trên đường thẳng $\Delta: x + y - 3 = 0$ và đường thẳng MN có phương trình là $3x - 4y + 4 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình chữ nhật $ABCD$.

Câu 5 (1,0 điểm) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y^2 + 4x = xy + y + 12 \\ 2x^2 + y^2 + \sqrt{x+y} + 2\sqrt{4x-y} = 8x \end{cases}$$

Câu 6 (1,0 điểm) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $f(-x^2 + 4x) > m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;3)$?

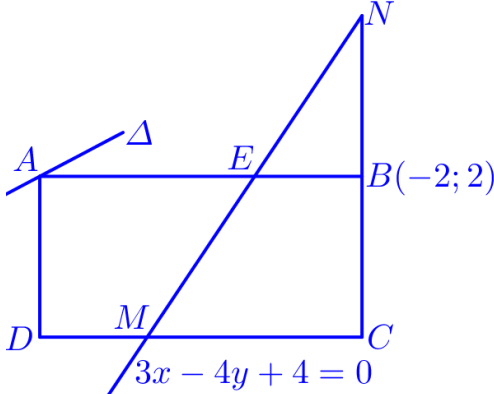


----- HẾT -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu	Đáp án	Điểm
1 (1,0 điểm)	Cho bất phương trình $(m^2 - m - 6)x^2 - 2(m + 2)x + 2 \geq 0$ (1). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.	
	▪ TH1: $m^2 - m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 3 \end{cases}$ Với $m = -2 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 2 \geq 0$ (luôn đúng) $\Rightarrow m = -2$ thỏa mãn đề bài. Với $m = 3 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow -10x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{5} \Rightarrow m = 3$ không thỏa mãn đề bài.	0,25
	▪ TH2: $m^2 - m - 6 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq 3 \end{cases}$ Khi đó, (1) nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 6 > 0 \\ \Delta' = -m^2 + 6m + 16 \leq 0 \end{cases}$.	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 8 \\ m < -2 \end{cases}$	0,25
	Vậy giá trị m thỏa mãn đề bài là $m \in (-\infty; -2] \cup [8; +\infty)$.	0,25
2 (2,0 điểm)	a. (1,0 điểm) $2\sqrt{2x + 5} < x + 4$.	
	$\text{BPT} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 > 0 \\ 2x + 5 \geq 0 \\ 4(2x + 5) < (x + 4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x \geq -\frac{5}{2} \\ 8x + 20 < x^2 + 8x + 16 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{5}{2} \\ x^2 - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{5}{2} \\ x > 2 \\ x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{2} \leq x < -2 \\ x > 2 \end{cases}$	0,5
	Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[-\frac{5}{2}; -2\right) \cup (2; +\infty)$.	0,25
	b. (1,0 điểm) $\frac{2x + 1}{x - 1} + 2\sqrt{\frac{2x + 1}{x - 1}} - 3 \geq 0$.	
	Đặt $t = \sqrt{\frac{2x + 1}{x - 1}} \ (t \geq 0)$. Khi đó, bất phương trình trở thành: $t^2 + 2t - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 1 \\ t \leq -3 \end{cases}$ $\Rightarrow t \geq 1$ thỏa mãn điều kiện	0,5

	Với $t \geq 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \leq -2 \end{cases}$	0,25
	Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -2] \cup (1; +\infty)$.	0,25
3 (2,0 điểm)	a. (1,0 điểm) Cho $\sin x = -\frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P = 3 \cos x \cdot \sin 2x + \cos 2x$.	
	Ta có $P = 3 \cos x \cdot 2 \sin x \cdot \cos x + \cos 2x$	0,25
	$= 6 \cos^2 x \cdot \sin x + 1 - 2 \sin^2 x$	0,25
	$= 6(1 - \sin^2 x) \cdot \sin x + 1 - 2 \sin^2 x$	0,25
	$= 6\left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 - 2 \cdot \frac{1}{9} = -1$	0,25
	b. (1,0 điểm) Chứng minh rằng: $4 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 4 \sin^2 x = 1$.	
	$VT = 2\left(\cos 2x + \cos \frac{2\pi}{3}\right) + 4 \sin^2 x = 2\left(\cos 2x - \frac{1}{2}\right) + 2(1 - \cos 2x)$	0,5
	$= 2 \cos 2x - 1 + 2 - 2 \cos 2x = 1 = VP$ (đpcm)	0,5
4 (3,0 điểm)	1a. (0,5 điểm) Tính cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng d_1 và d_2 .	
	Ta có: $\vec{n}_1 = (1; -1)$ là một VTPT của d_1 và $\vec{n}_2 = (7; -1)$ là một VTPT của d_2 .	0,25
	Do đó, $\cos(d_1, d_2) = \frac{ 1 \cdot 7 + (-1) \cdot (-1) }{\sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{7^2 + 1^2}} = \frac{4}{5}$.	0,25
	1b. (0,5 điểm) Viết phương trình tham số của Δ đi qua O và song song với d_2 .	
	$\Delta // d_2 \Rightarrow \Delta$ nhận $\vec{n}_2 = (7; -1)$ là một VTPT $\Rightarrow \vec{u} = (1; 7)$ là một VTCP của Δ .	0,25
	Mà $O(0; 0) \in \Delta \Rightarrow$ phương trình tham số của Δ là: $\begin{cases} x = t \\ y = 7t \end{cases}$.	0,25
	1c. (1,0 điểm) Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I nằm trên đường thẳng d_1 , tiếp xúc với d_2 và có bán kính $R = 3\sqrt{2}$.	
	Giả sử $I(a; a-1) \in d_1$.	0,25
	(C) tiếp xúc với $d_2 \Leftrightarrow d(I; d_2) = R$	
	$\Leftrightarrow \frac{ 7a - (a-1) - 13 }{\sqrt{7^2 + 1^2}} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \Rightarrow I(7; 6) \\ a = -3 \Rightarrow I(-3; -4) \end{cases}$	0,25
	Với $I(7; 6) \Rightarrow$ phương trình (C) là $(x-7)^2 + (y-6)^2 = 18$.	0,25
	Với $I(-3; -4) \Rightarrow$ phương trình (C) là $(x+3)^2 + (y+4)^2 = 18$.	0,25

		2. (1,0 điểm) Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình chữ nhật $ABCD$. Gọi $E = AB \cap MN$. Vì B là trung điểm CN nên $BE = \frac{1}{2}CM = \frac{1}{3}CD = \frac{1}{3}AB$. Suy ra $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{EB}$ (*) 	
		Giả sử $A(a; 3-a) \in \Delta \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2-a; -1+a)$, $\overrightarrow{EB} = (-2-x_E; 2-y_E)$. Do đó (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} -2-a = -6-3x_E \\ -1+a = 6-3y_E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = \frac{a-4}{3} \\ y_E = \frac{7-a}{3} \end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{a-4}{3}; \frac{7-a}{3}\right)$. Mà $E \in MN \Leftrightarrow 3\left(\frac{a-4}{3}\right) - 4\left(\frac{7-a}{3}\right) + 4 = 0 \Leftrightarrow a = 4 \Rightarrow A(4; -1)$.	0,25
		Đường thẳng BC đi qua $B(-2; 2)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = (-6; 3)$ là một VTPT. $\Rightarrow$ phương trình đường thẳng BC là $2x - y + 6 = 0$. Vì $N = MN \cap BC \Rightarrow N(-4; -2)$. Mặt khác B là trung điểm $CN \Rightarrow C(0; 6)$.	0,25
		Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 = 0 - x_D \\ 3 = 6 - y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 6 \\ y_D = 3 \end{cases} \Rightarrow D(6; 3)$. Vậy $A(4; -1)$, $C(0; 6)$, $D(6; 3)$.	0,25
5 (1,0 điểm)		Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2 + 4x = xy + y + 12 & (1) \\ 2x^2 + y^2 + \sqrt{x+y} + 2\sqrt{4x-y} = 8x & (2) \end{cases}$ Điều kiện: $\begin{cases} x+y \geq 0 \\ 4x-y \geq 0 \end{cases}$ (*) PT (1) $\Leftrightarrow y^2 - y - 12 + 4x - xy = 0 \Leftrightarrow (y+3)(y-4) - x(y-4) = 0$ $\Leftrightarrow (y-4)(y+3-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ y = x-3 \end{cases}$ ▪ Với $y = 4 \Rightarrow (2) \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 16 + \sqrt{x+4} + 4\sqrt{x-1} = 0$ $\Leftrightarrow 2(x-2)^2 + 8 + \sqrt{x+4} + 4\sqrt{x-1} = 0$ (3) Ta có (*) $\Leftrightarrow x \geq 1 \Rightarrow VT_{(3)} > 0 \Rightarrow (3)$ vô nghiệm. ▪ Với $y = x-3 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ 3x+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$. Khi đó (2) $\Leftrightarrow 3x^2 - 14x + 9 + \sqrt{2x-3} + 2\sqrt{3x+3} = 0$	

	$\Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 12 + \sqrt{2x - 3} - (x - 1) + 2\sqrt{3x + 3} - (x + 4) = 0$ $\Leftrightarrow 3(x^2 - 4x + 4) - \frac{x^2 - 4x + 4}{\sqrt{2x - 3} + x - 1} - \frac{x^2 - 4x + 4}{2\sqrt{3x + 3} + x + 4} = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = -1 \text{ (tm)} \\ 3 - \frac{1}{\sqrt{2x - 3} + x - 1} - \frac{1}{2\sqrt{3x + 3} + x + 4} = 0 \text{ (4)} \end{cases}$	0,25												
	Vì $x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{2x - 3} + x - 1 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2x - 3} + x - 1} \leq 2$. $2\sqrt{3x + 3} + x + 4 > 4 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{3x + 3} + x + 4} < \frac{1}{4}.$ Suy ra $\frac{1}{\sqrt{2x - 3} + x - 1} + \frac{1}{2\sqrt{3x + 3} + x + 4} < 2 + \frac{1}{4} < 3 \Rightarrow (4)$ vô nghiệm. Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (2; -1)$.	0,25												
6 (1,0 điểm)	Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m ...													
	Đặt $t = -x^2 + 4x$ với $x \in (0; 3)$ Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>2</td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>t</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>4</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr></table> Suy ra $0 < t \leq 4$.	x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$	t	$-\infty$	$-\infty$	4	$-\infty$	$-\infty$	0,5
x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$									
t	$-\infty$	$-\infty$	4	$-\infty$	$-\infty$									
	Khi đó, bất phương trình trở thành: $f(t) > m \text{ (1)}$ Vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = f(t)$ ứng với $t \in (0; 4]$.	0,25												
	Bất phương trình đã cho có nghiệm thuộc khoảng $(0; 3) \Leftrightarrow (1)$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $(0; 4] \Leftrightarrow$ có phần đồ thị của hàm số $y = f(t)$ với $t \in (0; 4]$ nằm phía trên đường thẳng $d : y = m \Leftrightarrow m < 8$. Vậy số các giá trị nguyên dương của tham số m là 7.		0,25											

▪ **Chú ý:** Các cách giải khác đáp án và đúng đều cho điểm tối đa.