

CHUYÊN ĐỀ
BÀI 2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP SỐ PHỨC

Mục tiêu

❖ **Kiến thức**

- + Nhận biết được các phép toán cộng, trừ hai số phức; phép nhân số phức; phép chia hai số phức.

❖ **Kĩ năng**

- + Thành thạo các phép toán cộng, trừ hai số phức và vận dụng vào giải được một số bài toán liên quan.
- + Thành thạo phép nhân hai số phức và vận dụng vào giải được một số bài toán liên quan.
- + Thành thạo phép toán chia hai số phức và vận dụng vào giải được một số bài toán liên quan.
- + Vận dụng các phép toán đã học để giải quyết một số bài toán tổng hợp.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Phép cộng số phức

Định nghĩa

Tổng của hai số phức $z = a + bi, z' = a' + b'i (a, b, a', b' \in \mathbb{R})$

là số phức $z + z' = a + a' + (b + b')i$.

Tính chất

Với mọi $z, z', z'' \in \mathbb{C}$ ta có:

Tính chất kết hợp: $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$;

Tính chất giao hoán: $z + z' = z' + z$;

Cộng với 0: $z + 0 = 0 + z = z$;

$$z + (-z) = (-z) + z = 0.$$

2. Phép trừ số phức

Hiệu của hai số phức $z = a + bi, z' = a' + b'i (a, b, a', b' \in \mathbb{R})$:

$$z - z' = z + (-z') = (a - a') + (b - b')i.$$

3. Phép nhân số phức

Định nghĩa

Tích của hai số phức $z = a + bi, z' = a' + b'i (a, b, a', b' \in \mathbb{R})$ là

$$zz' = aa' - bb' + (ab' + a'b)i.$$

Tính chất

Với mọi $z, z', z'' \in \mathbb{C}$ ta có:

- Tính chất giao hoán: $zz' = z'z$;
- Tính chất kết hợp: $(zz')z'' = z(z'z'')$;
- Nhân với 1: $1 \cdot z = z \cdot 1 = z$;
- Tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng:

$$z(z' + z'') = zz' + zz''.$$

4. Phép chia cho số phức khác 0

Số nghịch đảo của số phức $z \neq 0$ kí hiệu là z^{-1} , là số phức

$$\text{thỏa mãn } zz^{-1} = 1, \text{ hay } z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}.$$

Thương của phép chia số phức z' cho số phức z khác 0,

Ví dụ:

$$(5 + 4i) + (3 - 2i) = 8 + 2i.$$

Ví dụ:

$$z = 5 - \frac{2}{7}i \text{ có số đối là } -z = -5 + \frac{2}{7}i.$$

Ví dụ:

$$(5 + 4i) - (3 - 2i) = 2 + 6i.$$

Ví dụ:

$$(5 + 4i)(3 - 2i) = (15 + 8) + (12 - 10)i = 23 + 2i.$$

Chú ý:

• Ta có thể thực hiện phép cộng và phép nhân các số phức theo các quy tắc như phép toán cộng và nhân các số thực.

◦ Các hằng đẳng thức của các số thực cũng đúng đối với các số phức.

$$\text{Ví dụ: } z^2 + 4 = z^2 - (2i)^2 = (z - 2i)(z + 2i).$$

Ví dụ:

$z = 3 - 2i$ có số phức nghịch đảo là

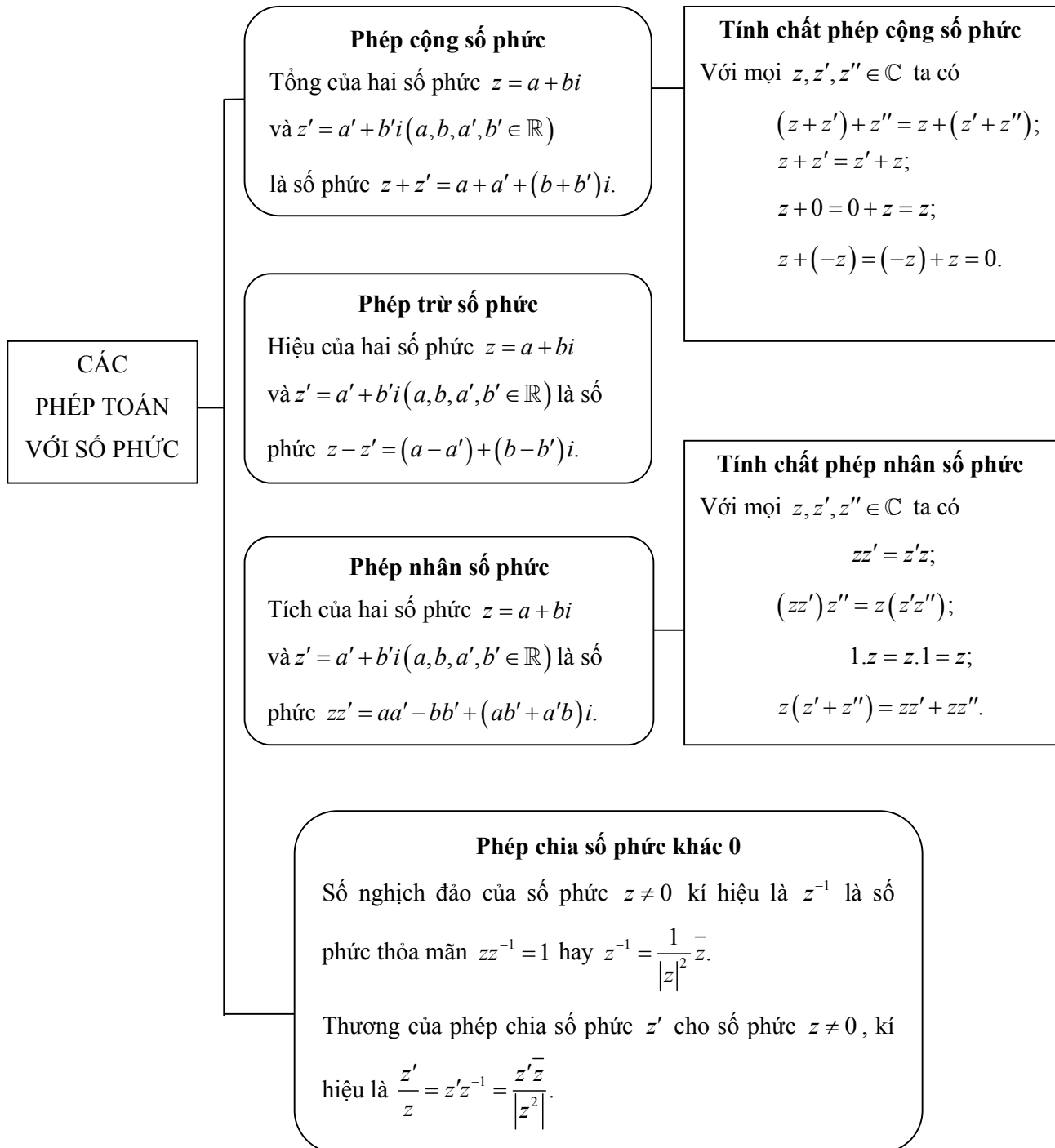
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{13} \cdot (3 + 2i) = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i.$$

Ví dụ:

kí hiệu là $\frac{z'}{z} = z'z^{-1} = \frac{z'\bar{z}}{|z|^2}$.

$$\frac{5+4i}{3-2i} = \frac{(5+4i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{7+22i}{13} = \frac{7}{13} + \frac{22}{13}i.$$

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Thực hiện các phép toán của số phức

Phương pháp giải

Cho hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$, trong đó Ví dụ:

$a, b, a', b' \in \mathbb{R}$. Khi đó:

- $z + z' = a + a' + (b + b')i$;
- $z - z' = (a - a') + (b - b')i$;
- $zz' = aa' - bb' + (ab' + a'b)i$;
- $\frac{z'}{z} = \frac{z'\bar{z}}{|z|^2}$.

Hai số phức $z_1 = 3 - 7i, z_2 = 4 + 3i$ có

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (3 + 4) + (-7 + 3)i = 7 - 4i; \\ z_1 - z_2 &= (3 - 4) + (-7 - 3)i = -1 - 10i; \\ z_1 z_2 &= (3 \cdot 4 - (-7) \cdot 3) + (3 \cdot 3 + 4 \cdot (-7))i = 33 - 19i; \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(3 - 7i)(4 - 3i)}{(4 + 3i) \cdot (4 - 3i)} = -\frac{9}{25} - \frac{37}{25}i. \end{aligned}$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho hai số phức $z_1 = 2 + 3i, z_2 = -4 - 5i$. Số phức $z = z_1 + z_2$ là

- A. $z = -2 - 2i$. B. $z = -2 + 2i$. C. $z = 2 + 2i$. D. $z = 2 - 2i$.

Hướng dẫn giải

$$z = z_1 + z_2 = 2 + 3i + (-4 - 5i) = -2 - 2i.$$

Chọn A.

Ví dụ 2: Cho hai số phức $z_1 = 1 - 2i, z_2 = 2 + 3i$. Số phức $w = z_1 - 2z_2$ là

- A. $w = -3 + 8i$. B. $w = -5 + i$. C. $w = -3 - 8i$. D. $w = -3 + i$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } w = z_1 - 2z_2 = 1 - 2i - 2(2 + 3i) = -3 - 8i.$$

Chọn C.

Ví dụ 3: Cho hai số phức $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Số phức là $w = 1 + z + z^2$

- A. $2 - \sqrt{3}i$. B. 1. C. 0. D. $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Hướng dẫn giải

$$w = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = 0.$$

Chọn C.

Chú ý: Các hằng đẳng thức của các số thực cũng dùng đối với các số phức.

Ví dụ 4: Tất cả các số phức z thỏa mãn $2z - 3(1 + i) = iz + 7 - 3i$ là

A. $z = \frac{8}{5} - \frac{4}{5}i$.

B. $z = 4 - 2i$.

C. $z = \frac{8}{5} + \frac{4}{5}i$.

D. $z = 4 + 2i$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $2z - 3(1+i) = iz + 7 - 3i \Leftrightarrow (2-i)z = 10 \Leftrightarrow z = \frac{10}{2-i} \Leftrightarrow z = 4 + 2i$.

Chọn D.

Ví dụ 5: Cho hai số phức $z = (1+i)^2(1+2i)$. Số phức $\bar{z}$ là

A. $-4 + 2i$.

B. $-4 - 2i$.

C. $4 - 2i$.

D. $4 + 2i$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $z = (1+i)^2(1+2i) = 2i(1+2i) = -4 + 2i$.

Do đó: $\bar{z} = -4 - 2i$.

Chọn B.

Ví dụ 6: Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 1 + 3i - |z|i = 0$. Giá trị của $S = a - 3b$ là

A. $S = -\frac{7}{3}$.

B. $S = 3$.

C. $S = -3$.

D. $S = \frac{7}{3}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $z + 1 + 3i - |z|i = 0$

$$\Leftrightarrow a + 1 + (b + 3 - \sqrt{a^2 + b^2})i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 1 = 0 \\ b + 3 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b \geq -3 \\ (b+3)^2 = 1 + b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow S = 3.$$

Chọn B.

Bài tập tự luyện dạng 1

Bài tập cơ bản

Câu 1: Cho hai số phức $z_1 = 3 - 7i$ và $z_2 = 2 + 3i$. Số phức $z = z_1 + z_2$ là

A. $z = 1 - 10i$.

B. $z = 5 - 4i$.

C. $z = 3 - 10i$.

D. $z = 3 + 3i$.

Câu 2: Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = 3 - 4i$. Số phức $2z_1 + 3z_2 - z_1z_2$ là số phức nào sau đây?

A. $10i$.

B. $-10i$.

C. $11 + 8i$.

D. $11 - 10i$.

Câu 3: Số phức z thỏa mãn $z + (2+i)\bar{z} = 3 - 5i$ là

A. $z = 2 + 3i$.

B. $z = -2 + 3i$.

C. $z = 2 - 3i$.

D. $z = -2 - 3i$.

Câu 4: Cho hai số phức $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = -3 + 3i$. Khi đó số phức $z_1 - z_2$ là

A. $-5 + 5i$.

B. $-5i$.

C. $5 - 5i$.

D. $-1 + i$.

Câu 5: Cho số phức $z = 1 + 2i$. Số phức $w = 2z + \bar{z}$ là

A. $w = -3 + 2i$.

B. $w = 2 + 3i$.

C. $w = 3 + 2i$.

D. $w = -2 - 3i$.

Bài tập nâng cao**Câu 6:** Cho số phức z thỏa mãn $(1+z)(1+i) - 5 + i = 0$. Số phức $w = 1 + z$ bằng

A. $-1 + 3i$.

B. $1 - 3i$.

C. $-2 + 3i$.

D. $2 - 3i$.

Câu 7: Cho số phức $z = 1 - \frac{1}{3}i$. Số phức $w = \bar{iz} + 3z$ là

A. $w = \frac{8}{3}$.

B. $w = \frac{8}{3} + i$.

C. $w = \frac{10}{3} + i$.

D. $\frac{10}{3}$.

Câu 8: Cho $z_1 = 2 + 4i, z_2 = 3 - 5i$. Số phức $w = z_1 \cdot z_2^{-2}$ là

A. $-152 + 4i$.

B. $-152 - 4i$.

C. $152 - 4i$.

D. $152 + 4i$.

Câu 9: Cho số phức z thỏa mãn: $z(1 - 2i) + \bar{z}i = 15 + i$. Số phức z là

A. $z = -3 + 4i$.

B. $z = 3 + 4i$.

C. $z = 3 - 4i$.

D. $z = -3 - 4i$.

Câu 10: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + 2 + 3i| = 5$ và $\frac{z}{z-2}$ là số thuần ảo?

A. 2.

B. Vô số.

C. 1.

D. 0.

Dạng 2: Xác định các yếu tố của số phức qua các phép toán**Bài toán 1. Tìm phần thực, phần ảo của số phức****Phương pháp giải**

- Số phức $z = a + bi$ có phần thực là a và phần ảo là b .

Ví dụ: Phần thực của số phức z thỏa mãn $(5-i)z = 7-17i$ là

A. 3.

B. -3.

C. 2.

D. -2.

Chú ý: Học sinh thường nhầm phần ảo của số phức $z = 3 - 12i$ là $-12i$ **Hướng dẫn giải**

$$(5-i)z = 7-17i \Leftrightarrow z = \frac{7-17i}{5-i} = 2-3i$$

Phần thực của số phức z là 2.**Chọn C.****Ví dụ mẫu****Ví dụ 1:** Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z = 14-2i$. Tổng phần thực và phần ảo của $\bar{z}$ bằng

A. 14.

B. 2.

C. -2.

D. -14.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } (1+i)z = 14-2i \Leftrightarrow z = \frac{14-2i}{1+i} \Leftrightarrow z = 6-8i \Rightarrow \bar{z} = 6+8i.$$

Suy ra, $\bar{z}$ có phần thực bằng 6 và phần ảo bằng 8.

Do đó tổng phần thực và phần ảo của $\bar{z}$ bằng 14.

Chọn A.

Ví dụ 2: Cho hai số phức $z = 3 + 2i$ và $z' = a + (a^2 - 11)i$. Tất cả các giá trị thực của a để $z + z'$ là một số thực là

A. $a = -3$.

B. $a = 3$.

C. $a = 3$ hoặc $a = -3$.

D. $a = \sqrt{13}$ hoặc $a = -\sqrt{13}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $z + z' = 3 + 2i + a + (a^2 - 11)i = 3 + a + (a^2 - 9)i$.

$$z + z' \text{ là số thực khi và chỉ khi } a^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ a = 3 \end{cases}.$$

Chọn C.

Ví dụ 3: Cho số phức $z = (1 + i)^2(1 + 2i)$. Số phức có phần ảo là

A. 2.

B. 4.

C. -2.

D. $2i$.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$z = (1 + i)^2(1 + 2i) = (1 + 2i + i^2)(1 + 2i) = 2i(1 + 2i) = 2i + 4i^2 = 2i - 4$$

Vậy số phức z có phần ảo là 2.

Chọn A.

Bài toán 2. Tìm số phức liên hợp, tính môđun số phức

 **Phương pháp giải**

• Số phức $z = a + bi$ có $\bar{z} = a - bi$ và $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Chú ý: Nếu $z = a + bi$ thì $z + \bar{z} = 2a$; $z\bar{z} = a^2 + b^2$.

Ví dụ: Số phức liên hợp của số phức

$$z = (2 - 3i)(3 + 2i) \text{ là}$$

A. $\bar{z} = 12 - 5i$.

B. $\bar{z} = -12 + 5i$.

C. $\bar{z} = -12 - 5i$.

D. $\bar{z} = 12 + 5i$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } z = (2 - 3i)(3 + 2i) = 6 - 5i - 6i^2 = 12 - 5i$$

$$\Rightarrow \bar{z} = 12 + 5i.$$

Chọn D.

 **Ví dụ mẫu**

Ví dụ 1: Cho số phức z thỏa mãn $z(2 - i) + 13i = 1$. Môđun của số phức z là

A. $|z| = 34$.

B. $|z| = \frac{5\sqrt{34}}{3}$.

C. $|z| = \sqrt{34}$.

D. $|z| = \frac{\sqrt{34}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $z(2-i) + 13i = 1 \Rightarrow z = \frac{1-13i}{2-i} = 3-5i$.

Do đó $|z| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$.

Chọn C.

Ví dụ 2: Cho số phức $z_1 = 3 + 2i, z_2 = 6 + 5i$. Số phức liên hợp của số phức $z = 6z_1 + 5z_2$ là

- A. $\bar{z} = 51 + 40i$. B. $\bar{z} = 51 - 40i$. C. $\bar{z} = 48 + 37i$. D. $\bar{z} = 48 - 37i$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $z = 6z_1 + 5z_2 = 6(3 + 2i) + 5(6 + 5i) = 48 + 37i$.

Suy ra $\bar{z} = 48 - 37i$.

Chọn D.

Ví dụ 3: Gọi z_1, z_2 lần lượt có điểm biểu diễn là M và N trên mặt phẳng Oxy ở hình bên. Khi đó

$|z_1 + z_2|$ bằng

- A. $2\sqrt{29}$. B. 20. C. $2\sqrt{5}$. D. 116.

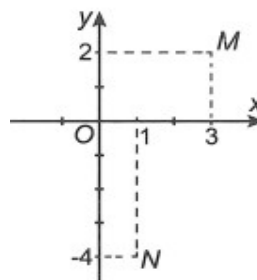
Hướng dẫn giải

Từ hình vẽ ta có điểm $M(3; 2)$ biểu diễn số phức

$z_1 = 3 + 2i$, điểm $N(1; -4)$ biểu diễn số phức $z_2 = 1 - 4i$.

Ta có $z_1 + z_2 = 4 - 2i$

$\Rightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{(4)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}$.



Chọn C.

Ví dụ 4: Cho số phức $z = a + bi$, với a, b là các số thực thỏa mãn

$a + bi + 2i(a - bi) + 4 = i$, với i là đơn vị ảo. Môđun của $\omega = 1 + z + z^2$ là

- A. $|\omega| = \sqrt{229}$. B. $|\omega| = \sqrt{13}$. C. $|\omega| = 229$. D. $|\omega| = 13$.

Hướng dẫn giải

Ta có $a + bi + 2i(a - bi) + 4 = i \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = -4 \\ b + 2a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$. Suy ra $z = 2 - 3i$.

Do đó $\omega = 1 + z + z^2 = -2 - 15i$. Vậy $|\omega| = \sqrt{(-2)^2 + (-15)^2} = \sqrt{229}$

Chọn A.

Ví dụ 5: Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z} = \frac{1+3i}{1-i}$. Môđun của số phức $w = i\bar{z} + z$ là

- A. $|w| = 4\sqrt{2}$. B. $|w| = \sqrt{2}$. C. $|w| = 3\sqrt{2}$. D. $|w| = 2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\bar{z} = \frac{1+3i}{1-i} = -1+2i$.

$$\Rightarrow z = -1-2i \Rightarrow w = i \cdot (-1+2i) + (-1-2i) = -3-3i.$$

$$\Rightarrow |w| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Chọn C.

Ví dụ 6: Cho z_1, z_2 là các số phức thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1$ và $|z_1 - 2z_2| = \sqrt{6}$.

Giá trị của biểu thức $P = |2z_1 + z_2|$ là

A. $P = 2$.

B. $P = \sqrt{3}$.

C. $P = 3$.

D. $P = 1$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z_1 = a_1 + b_1i; a_1, b_1 \in \mathbb{R}, z_2 = a_2 + b_2i; a_2, b_2 \in \mathbb{R}$.

Suy ra $a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = 1$ và $|z_1 - 2z_2| = \sqrt{6} \Leftrightarrow a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 = \frac{-1}{4}$.

Ta có: $2z_1 + z_2 = 2a_1 + a_2 + (2b_1 + b_2)i$

$$\Rightarrow |2z_1 + z_2| = \sqrt{(2a_1 + a_2)^2 + (2b_1 + b_2)^2} = 2\sqrt{(a_1^2 + b_1^2) + \frac{1}{4} \cdot (a_2^2 + b_2^2) + (a_1a_2 + b_1b_2)}$$

Suy ra $P = |2z_1 + z_2| = 2$.

Chọn A.

Bài toán 3. Bài toán liên quan đến điểm biểu diễn số phức

 **Ví dụ mẫu**

Ví dụ 1: Điểm biểu diễn của số phức $z = \frac{1}{2-3i}$ là

A. $(3; -2)$.

B. $\left(\frac{2}{13}; \frac{3}{13}\right)$.

C. $(-2; 3)$.

D. $(4; -1)$.

Hướng dẫn giải

$$z = \frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i.$$

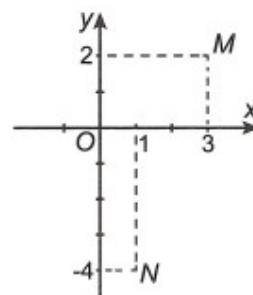
Suy ra điểm biểu diễn của số phức $z = \frac{1}{2-3i}$ là: $\left(\frac{2}{13}; \frac{3}{13}\right)$.

Chọn B.

Chú ý: Để xác định tọa độ điểm biểu diễn số phức, ta cần viết số phức dưới dạng

$$z = a + bi \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

Ví dụ 2: Gọi z_1, z_2 lần lượt có điểm biểu diễn là M, N trên mặt phẳng phức (hình bên). Khi đó phần ảo của số phức $\frac{z_1}{z_2}$ là



- A. $\frac{14}{17}$. B. $-\frac{1}{4}$.
C. $-\frac{5}{17}$. D. $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Dựa vào hình vẽ ta có được

$$z_1 = 3 + 2i, z_2 = 1 - 4i \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 2i}{1 - 4i} = -\frac{5}{17} + \frac{14}{17}i.$$

Chọn A.

Ví dụ 3: Cho số phức z thỏa mãn $(1 + i)z = 11 - 3i$. Điểm M biểu diễn cho số phức z trong mặt phẳng tọa độ là

- A. $M(4; -7)$. B. $M(14; -14)$. C. $M(8; -14)$. D. $M(7; -7)$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } (1 + i)z = 11 - 3i \Rightarrow z = \frac{11 - 3i}{1 + i} = 4 - 7i.$$

Suy ra điểm biểu diễn cho số phức z là $M(4; -7)$.

Chọn A.

Ví dụ 4: Cho A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $4 - 3i, (1 + 2i)i, \frac{1}{i}$. Số phức có điểm biểu diễn D sao cho $ABCD$ là hình bình hành là

- A. $z = -6 - 4i$. B. $z = -6 + 3i$. C. $z = 6 - 5i$. D. $z = 4 - 2i$.

Hướng dẫn giải

Ta có

A là điểm biểu diễn của số phức $4 - 3i$ nên $A(4; -3)$.

B là điểm biểu diễn của số phức $(1 + 2i)i = -2 + i$ nên $B(-2; 1)$.

C là điểm biểu diễn của số phức $\frac{1}{i} = -i$ nên $C(0; -1)$.

Điều kiện để $ABCD$ là hình bình hành là $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D - x_A = x_C - x_B \\ y_D - y_A = y_C - y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = x_C + x_A - x_B = 6 \\ y_D = y_C + y_A - y_B = -5 \end{cases} \Rightarrow D(6; -5) \Rightarrow z = 6 - 5i.$$

Chọn C.

Ví dụ 5: Cho tam giác ABC có ba đỉnh A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn hình học của các số phức $z_1 = 2 - i, z_2 = -1 + 6i, z_3 = 8 + i$. Số phức z_4 có điểm biểu diễn hình học là trọng tâm của tam giác ABC . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $z_4 = 3 - 2i$.

B. $|z_4| = 5$.

C. $(z_4)^2 = 13 + 12i$.

D. $\overline{z_4} = 3 - 2i$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $A(2; -1), B(-1; 6), C(8; 1)$.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC .

$$\Rightarrow G(3; 2) \Leftrightarrow z_4 = 3 + 2i \Rightarrow \overline{z_4} = 3 - 2i.$$

Chọn D.

Ví dụ 6: Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 3, |z_2| = 4, |z_1 - z_2| = 5$. Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Diện tích S của $\triangle OAB$ (với O là gốc tọa độ) là

A. $S = 5\sqrt{2}$.

B. $S = 6$.

C. $S = \frac{25}{2}$.

D. $S = 12$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $|z_1| = OA = 3, |z_2| = OB = 4, |z_1 - z_2| = AB = 5$

$\Rightarrow \triangle OAB$ vuông tại O (vì $OA^2 + OB^2 = AB^2$)

$$\Rightarrow S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6.$$

Chọn B.

Bài tập tự luyện dạng 2

Bài tập cơ bản

Câu 1: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $z + 2\overline{z} = 6 - 4i$ với i là đơn vị ảo. Phần ảo của số phức z là

A. -4 .

B. 4 .

C. 2 .

D. 6 .

Câu 2: Biết $\overline{z} = (\sqrt{3} + i)^2 (1 + i\sqrt{3})$. Phần thực, phần ảo của số phức z là

A. Phần thực bằng -4 và phần ảo bằng $4\sqrt{3}i$.

B. Phần thực bằng 4 và phần ảo bằng $-4\sqrt{3}i$.

C. Phần thực bằng 4 và phần ảo bằng $4\sqrt{3}$.

D. Phần thực bằng -4 và phần ảo bằng $-4\sqrt{3}$.

Câu 3: Cho số phức $z = (2a - b + 4) - (a + b + 6)i$, với $a, b \in \mathbb{R}$, i là đơn vị ảo. Biết rằng z là số thuần ảo và $z + 2 + i$ là số thực. Giá trị của $S = a^2 + b^2$ là

A. $S = 13$.

B. $S = 5$.

C. $S = 20$.

D. $S = 36$.

Câu 4: Cho số phức $z = 3a - (2a + 1)i$ với $a \in \mathbb{R}$, i là đơn vị ảo. Biết rằng z^2 là một số phức có phần thực bằng 8 , giá trị của a là

- A. $a = -1; a = -\frac{9}{5}$. B. $a = 1; a = \frac{9}{5}$. C. $a = -1; a = \frac{9}{5}$. D. $a = 1; a = -\frac{9}{5}$.

Câu 5: Số phức $z = (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{2018}$ có phần ảo bằng

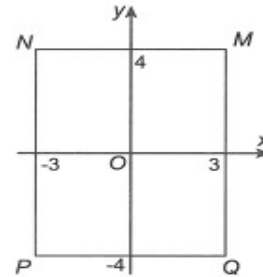
- A. $2^{1009} - 1$. B. $2^{1009} + 1$. C. $1 - 2^{1009}$. D. $-(2^{1009} + 1)$.

Câu 6: Môđun của số phức $z = 2 + 3i - \frac{1+5i}{3-i}$ là

- A. $|z| = \frac{\sqrt{170}}{7}$. B. $|z| = \frac{\sqrt{170}}{4}$. C. $|z| = \frac{\sqrt{170}}{5}$. D. $|z| = \frac{\sqrt{170}}{3}$.

Câu 7: Cho số phức z thỏa mãn $(2+i)z = 10-5i$. Hỏi điểm biểu diễn số phức z là điểm nào trong các điểm M, N, P, Q ở hình bên?

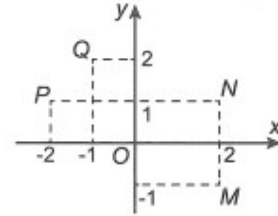
- A. Điểm Q .
B. Điểm M .
C. Điểm P .
D. Điểm N .



Câu 8: Biết điểm M trong hình vẽ bên biểu diễn cho số phức z .

Điểm biểu diễn số phức $\bar{iz}$ là

- A. M .
B. N .
C. P .
D. Q .



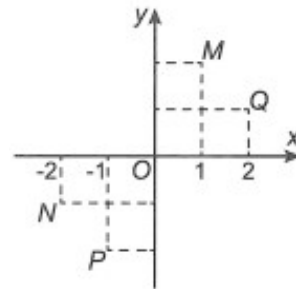
Câu 9: Cho số phức z thỏa mãn $z(1+i) = 3-5i$. Môđun của z là

- A. $|z| = \sqrt{17}$. B. $|z| = 16$. C. $|z| = 17$. D. $|z| = 4$.

Câu 10: Cho số phức z thỏa mãn $z(2+2i) - 2 = iz + 2 + 7i$.

Trong hình bên, điểm biểu diễn số phức $\bar{z} - 5 + i$ là

- A. M .
B. Q .
C. P .
D. N .



Bài tập nâng cao

Câu 11: Cho số phức z có phần thực là số nguyên và z thỏa mãn $|z| - 2\bar{z} = -7 + 3i + z$. Môđun của số phức $w = 1 - z + z^2$ bằng

- A. $|w| = \sqrt{445}$. B. $|w| = \sqrt{425}$. C. $|w| = \sqrt{37}$. D. $|w| = \sqrt{457}$.

Câu 12: Cho số phức z thỏa mãn $(3+2i)z + (2-i)^2 = 4+i$. Môđun của số phức $w = (z+1)\bar{z}$ bằng

- A. 2. B. $\sqrt{10}$. C. $\sqrt{5}$. D. 4.

Câu 13: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 6, |z_2| = 2$. Gọi M, N là các điểm biểu diễn cho z_1 và iz_2 .

Biết $\widehat{MON} = 60^\circ$. Giá trị của $T = |z_1^2 + 9z_2^2|$ là

- A. $T = 18$. B. $T = 24\sqrt{3}$. C. $T = 36\sqrt{2}$. D. $T = 36\sqrt{3}$.

Câu 14: Môđun của số phức z thỏa mãn: $3z\bar{z} + 2017(z - \bar{z}) = 12 - 2018i$ là

- A. $|z| = 2$. B. $|z| = \sqrt{2017}$. C. $|z| = 4$. D. $|z| = \sqrt{2018}$.

Câu 15: Cho hai số phức $z_1 = 2 + i, z_2 = 1 - 2i$. Môđun của số phức $w = \frac{z_1^{2016}}{z_2^{2017}}$ là

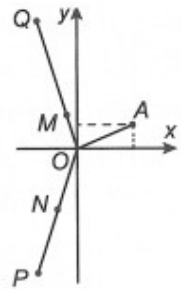
- A. $|w| = 5$. B. $|w| = \sqrt{3}$. C. $|w| = 3$. D. $|w| = \sqrt{5}$.

Câu 16: Cho số phức z thỏa mãn $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và điểm A trong hình vẽ bên

là điểm biểu diễn của z . Biết rằng trong hình vẽ bên, điểm biểu diễn của số phức

$w = \frac{1}{iz}$ là một trong bốn điểm M, N, P, Q . Khi đó điểm biểu diễn của số phức w là

- A. Điểm Q . B. Điểm M .
C. Điểm N . D. Điểm P .

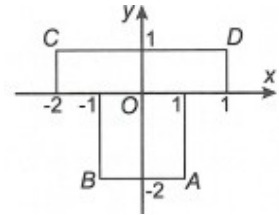


Câu 17: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $z - (2 + 3i)\bar{z} = 1 - 9i$.

Số phức $w = \frac{5}{iz}$ có điểm biểu diễn là điểm nào trong các điểm A, B, C, D

ở hình bên?

- A. Điểm D . B. Điểm C .
C. Điểm B . D. Điểm A .



Câu 18: Cho A, B, C, D là bốn điểm trong mặt phẳng tọa độ theo thứ tự biểu diễn các số phức $1 + 2i; 1 + \sqrt{3} + i; 1 + \sqrt{3} - i; 1 - 2i$. Biết $ABCD$ là tứ giác nội tiếp tâm I . Tâm I biểu diễn số phức nào sau đây?

- A. $z = \sqrt{3}$. B. $z = 1 - \sqrt{3}i$. C. $z = 1$. D. $z = -1$.

Câu 19: Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn điều kiện $|z_1| = 4, |z_2| = 3, |z_3| = 2$ và

$|4z_1z_2 + 16z_2z_3 + 9z_1z_3| = 48$. Giá trị của biểu thức $P = |z_1 + z_2 + z_3|$ bằng

- A. 1. B. 8. C. 2. D. 6.

Câu 20: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1$. Khi đó $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2$ bằng

- A. 2. B. 4. C. 1. D. 0.

Dạng 3. Tìm số phức thỏa mãn điều kiện cho trước

 **Ví dụ mẫu**

Ví dụ 1: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $\begin{cases} |z - i| = |z - 1| \\ |z - 2i| = |z| \end{cases}$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

$$\text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = (x-1)^2 + y^2 \\ x^2 + (y-2)^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow x = y = 1.$$

Do đó $z = 1 + i$ nên có một số phức thỏa mãn.

Chọn A.

Ví dụ 2: Có bao nhiêu số phức z thỏa điều kiện $|z\bar{z} + z| = 2$ và $|z| = 2$?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } |z\bar{z} + z| = 2 \Leftrightarrow ||z|^2 + z| = 2 \Leftrightarrow |z + 4| = 2.$$

Suy ra điểm M biểu diễn số phức z là giao của hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 = 4$

$$\text{và } (C_2): (x+4)^2 + y^2 = 4.$$

Vì $I_1 I_2 = R_1 + R_2$ (I_1, I_2 là tâm của các đường tròn $(C_1), (C_2)$) nên (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau.

Suy ra: Có một số phức z thỏa mãn yêu cầu.

Chọn C.

Ví dụ 3: Có bao nhiêu số phức thỏa mãn $|z|(z - 6 - i) + 2i = (7 - i)z$?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Nhận xét: Từ giả thiết, ứng với mỗi $|z|$ cho ta duy nhất một số phức z .

Đặt $|z| = a \geq 0, a \in \mathbb{R}$, khi đó ta có

$$|z|(z - 6 - i) + 2i = (7 - i)z$$

$$\Leftrightarrow a(z - 6 - i) + 2i = (7 - i)z$$

$$\Leftrightarrow (a - 7 + i)z = 6a + ai - 2i$$

$$\Leftrightarrow (a - 7 + i)z = 6a + (a - 2)i$$

$$\Leftrightarrow |(a - 7 + i)||z| = |6a + (a - 2)i|$$

$$\Leftrightarrow [(a - 7)^2 + 1]a^2 = 36a^2 + (a - 2)^3$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 14a^3 + 13a^2 + 4a - 4 = 0 \Leftrightarrow (a - 1)(a^3 - 13a^2 + 4) = 0.$$

Hàm số $f(a) = a^3 - 13a^2$ ($a \geq 0$) có bảng biến thiên:

a	0	$\frac{26}{3}$	$+\infty$
$f'(a)$	-	0	+
$f(a)$	0	$-\frac{8788}{27}$	$+\infty$

Đường thẳng $y = -4$ cắt đồ thị hàm số $f(a)$ tại hai điểm nên phương trình $a^3 - 13a^2 + 4 = 0$ có hai nghiệm khác 1 (do $f(1) \neq 0$). Thay giá trị môđun của z vào giả thiết ta được 3 số phức thỏa mãn điều kiện.

Chọn B.

Ví dụ 4: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để có đúng hai số phức z thỏa

$$\text{mãn } |z - (2m-1) - i| = 10 \text{ và } |z - 1 + i| = |\bar{z} - 2 + 3i|?$$

A. 40.

B. 41.

C. 165.

D. 164.

Hướng dẫn giải

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) và $M(x, y)$ là điểm biểu diễn số phức z .

$$\text{Ta có: } |z - (2m-1) - i| = 10 \Leftrightarrow |z - (2m-1) - i|^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow [x - (2m-1)]^2 + (y-1)^2 = 100.$$

Khi đó điểm biểu diễn số phức z nằm trên đường tròn (C) có tâm $I(2m-1; 1)$, bán kính $R = 10$.

$$\text{Lại có } |z - 1 + i| = |\bar{z} - 2 + 3i| \Leftrightarrow |(x-1) + (y+1)i|^2 = |(x-2) + (3-y)i|^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = (x-2)^2 + (3-y)^2 \Leftrightarrow 2x + 8y - 11 = 0.$$

Khi đó điểm biểu diễn số phức z cũng nằm trên đường thẳng $\Delta: 2x + 8y - 11 = 0$

Có đúng hai số phức z thỏa mãn nếu đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại 2 điểm phân biệt.

$$\text{Tức là } d(I, \Delta) < 10 \Leftrightarrow \frac{|2(2m-1) + 8 - 11|}{\sqrt{2^2 + 8^2}} < 10 \Leftrightarrow \frac{5 - 20\sqrt{17}}{4} < m < \frac{5 + 20\sqrt{17}}{4}.$$

Vậy có 41 giá trị nguyên của m để có đúng hai số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn B.

Ví dụ 5: Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $|z_1| = 3, |z_2| = 4, |z_1 - z_2| = \sqrt{37}$. Hỏi có bao nhiêu số z mà

$$z = \frac{z_1}{z_2} = a + bi?$$

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Đặt $z_1 = x + yi, z_2 = c + di$ ($x, y, c, d \in \mathbb{R}$). Ta có:

$$|z_1| = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9;$$

$$|z_2| = 4 \Rightarrow c^2 + d^2 = 16;$$

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{37} \Rightarrow x^2 + y^2 + c^2 + d^2 - 2xc - 2yd = 37 \Leftrightarrow xc + yd = -6.$$

Lại có:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x + yi}{c + di} = \frac{xc + yd}{c^2 + d^2} + \frac{yc - xd}{c^2 + d^2}i = -\frac{3}{8} + bi. \text{ Suy ra } a = -\frac{3}{8}.$$

$$\text{Mà } \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{3}{4} = \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow b^2 = \frac{9}{16} - a^2 = \frac{27}{64} \Rightarrow b = \pm \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Vậy có hai số phức z thỏa mãn.

Chọn B.

Ví dụ 6: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z \cdot \bar{z} = 1$ và $|z - \sqrt{3} + i| = m$. Số phần tử của S là

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Dễ thấy $m > 0$.

Đặt $z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}$ ta có hệ phương trình.

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ (a - \sqrt{3})^2 + (b + 1)^2 = m^2 \end{cases}$$

Phương trình $a^2 + b^2 = 1$ là đường tròn tâm O , bán kính $R = 1$.

Phương trình $(a - \sqrt{3})^2 + (b + 1)^2 = m^2$ là đường tròn tâm $I(\sqrt{3}; -1)$, bán kính $R = m$.

Có duy nhất số phức thỏa mãn đề bài

$$\Leftrightarrow \text{Hệ phương trình } \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ (a - \sqrt{3})^2 + (b + 1)^2 = m^2 \end{cases} \text{ có nghiệm duy nhất}$$

$\Leftrightarrow$ Hai đường tròn này tiếp xúc với nhau

$$\Leftrightarrow OI = |m \pm 1| \Leftrightarrow |m \pm 1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn } m > 0).$$

Vậy, có hai số thực thỏa mãn.

Chọn A.

Ví dụ 7: Có tất cả bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z| = 1$ và $\left| \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \right| = 1$.

A. 3.

B. 4.

C. 6.

D. 8.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$. Ta có

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1.$$

$$\left| \frac{z}{z} + \frac{\bar{z}}{z} \right| = \left| \frac{z^2 + \bar{z}^2}{z \cdot \bar{z}} \right| = \frac{|(a+bi)^2 + (a-bi)^2|}{|z|^2} = |2a^2 - 2b^2| = 1.$$

Ta có hệ: $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ |2a^2 - 2b^2| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ a^2 - b^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ a^2 - b^2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{3}{4} \\ b^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = \frac{1}{4} \\ b^2 = \frac{3}{4} \end{cases}.$$

Suy ra $(a; b) \in \left\{ \left(\frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right); \left(-\frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right); \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \pm \frac{1}{2} \right); \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \pm \frac{1}{2} \right) \right\}.$

Vậy có 8 cặp số $(a; b)$ do đó có 8 số phức thỏa mãn.

Chọn D.

Bài tập nâng cao dạng 3

Bài tập cơ bản

Câu 1: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $z^2 = |z|^2 + \bar{z}$?

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 2: Số các số phức thỏa mãn điều kiện $z^2 + 2\bar{z} = 0$ là

- A. 0. B. 4. C. 1. D. 2.

Câu 3: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z| = 1$ và $|z^2 + 4| = 2\sqrt{3}$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 4: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $\frac{z}{1+z}$ là số thuần ảo và $|z^2 + 1| = \frac{\sqrt{5}}{2}$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Bài tập nâng cao

Câu 5: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z + |z|^2 i - 1 - \frac{3}{4}i = 0$?

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

Câu 6: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z - 5 - i) + 2i = (6 - i)z$?

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 7: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z^3 + 2i|z|^2 = 0$?

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 6.

Câu 8: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z - 10 + 2i| = |z + 2 - 14i|$ và $|z - 1 - 10i| = 5$?

- A. Hai. B. Không. C. Một. D. Vô số.

Câu 9: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z^5 + 16i|z| = 0$?

- A. 4. B. 10. C. 8. D. 6.

Câu 10: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z|^2 = |z + \bar{z}| + 1$ và $(z - 2)(\bar{z} + 1)$ là số thuần ảo?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 11: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + 1 - 3i| = 3\sqrt{2}$ và $(z + 2i)^2$ là số thuần ảo?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 12: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| = 2\sqrt{2}$ và $(z - 1)^2$ là số thuần ảo?

- A. 0. B. 4. C. 3. D. 2.

Câu 13: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + 3i| = \sqrt{13}$ và $\frac{z}{z + 2}$ là số thuần ảo?

- A. Vô số. B. 2. C. 0. D. 1.

Câu 14: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z - 3i| = \sqrt{5}$ và $\frac{z}{z - 4}$ là số thuần ảo?

- A. 0. B. Vô số. C. 2. D. 1.

Câu 15: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z\bar{z} = 1$ và $|z - 3 - 4i| = m$. Tổng các phần tử thuộc S là

- A. 10. B. 42. C. 52. D. 40.

Dạng 4: Bài toán tập hợp điểm biểu diễn số phức

Phương pháp giải

Sử dụng các định nghĩa, tính chất hình học đã biết.

Cho trước các điểm cố định $I, F_1, F_2; F_1F_2 = 2c (c > 0)$

Tập hợp các điểm M thỏa mãn $MI = R (R > 0)$ là đường tròn tâm I bán kính R .

Tập hợp các điểm M thỏa mãn $MF_1 + MF_2 = 2a (a > c)$ là elip có hai tiêu điểm là F_1, F_2 .

Tập hợp các điểm M thỏa mãn $MF_1 = MF_2$ là đường trung trực của đoạn thẳng F_1F_2 .

Ví dụ:

Trên mặt phẳng Oxy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z + 2 - 5i| = 4$ là đường tròn tâm $I(-2; 5)$, bán kính $R = 2$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Xét các số phức z thỏa mãn $(z - 6)(8 + \bar{z}i)$ là số thực. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn, có tâm $I(a; b)$ và bán kính R . Giá trị $a + b + R$ bằng

Chú ý:

Trong mặt phẳng Oxy , $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ là

A. 6. B. 4. C. 12. D. 24.

phương trình đường tròn
có tâm $I(a; b)$ và bán kính
 $R > 0$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$.

Vì $(z - 6)(8 + \bar{z}i) = [(x - 6) + yi][(y + 8) + xi]$ là số thực nên

$$x(x - 6) + y(y + 8) = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25.$$

Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là đường tròn có tâm $I(3; -4)$, bán kính $R = 5$.

Vậy $a + b + R = 4$.

Chọn B.

Ví dụ 2: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3| + |z + 3| = 10$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là

- A. Một parabol.
- B. Một đường tròn.
- C. Một elip.
- D. Một hypebol.

Hướng dẫn giải

Gọi $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$ thì $|z - 3| + |z + 3| = 10 \Leftrightarrow |(x - 3) + yi| + |(x + 3) + yi| = 10 (*)$

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z và các điểm $F_1(3; 0), F_2(-3; 0)$. Dễ thấy $F_1F_2 = 6 = 2c$

Khi đó: $|z - 3| + |z + 3| = 10 \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 10 = 2a$.

Vậy tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là elip có hai tiêu điểm F_1, F_2 , độ dài trục lớn là $2a = 10$

Chọn C.

Ví dụ 3: Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 10$ và $w = (6 + 8i)\bar{z} + (1 - 2i)^2$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm là

- A. $I(-3; -4)$.
- B. $I(3; 4)$.
- C. $I(1; -2)$.
- D. $I(6; 8)$.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$w = (6 + 8i)\bar{z} + (1 - 2i)^2$$

$$\Leftrightarrow w - (-3 - 4i) = (6 + 8i)\bar{z}$$

$$\Leftrightarrow |w - (-3 - 4i)| = \sqrt{6^2 + 8^2} |\bar{z}|$$

$$\Leftrightarrow |w - (-3 - 4i)| = 10.10 \Leftrightarrow |w - (-3 - 4i)| = 100$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn (C) có tâm $I(-3; -4)$.

Chọn A.

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z

thỏa mãn $|z-1+2i| = |\bar{z}+1+2i|$ là đường thẳng có phương trình

- A. $x-2y+1=0$. B. $x+2y=0$.
C. $x-2y=0$. D. $x+2y+1=0$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = x - yi$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức z .

Ta có: $|z-1+2i| = |\bar{z}+1+2i|$

$$\Leftrightarrow |x+yi-1+2i| = |x-yi+1+2i|$$

$$\Leftrightarrow |(x-1)+(y+2)i| = |(x+1)+(2-y)i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (2-y)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4$$

$$\Leftrightarrow x - 2y = 0.$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán là đường thẳng có phương trình là $x - 2y = 0$.

Chọn C.

Ví dụ 5: Gọi M là điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $3|z+i| = |2\bar{z}-z+3i|$.

Tập hợp tất cả các điểm M như vậy là

- A. Một parabol. B. Một đường thẳng.
C. Một đường tròn. D. Một elip.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi; \forall x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$3|z+i| = |2\bar{z}-z+3i| \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 + (y+1)^2} = \sqrt{x^2 + (-3y+3)^2}$$

$$\Leftrightarrow 9[x^2 + (y+1)^2] = x^2 + (-3y+3)^2 \Leftrightarrow y = -\frac{2x^2}{9}$$

Vậy tập hợp tất cả các điểm M là một đường parabol.

Chọn A.

Ví dụ 6: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $3 \leq |z-3i+1| \leq 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z tạo thành một hình phẳng. Diện tích của hình phẳng đó là

- A. $S = 25\pi$. B. $S = 8\pi$. C. $S = 4\pi$. D. $S = 16\pi$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(a; b)$ là điểm biểu diễn của số phức z và $A(-1; 3)$ là điểm biểu

Chú ý:

Trong mặt phẳng Oxy ,
 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ là
phương trình đường
parabol.

Chú ý: Phần hình phẳng
cần tính diện tích là hình
vành khăn màu xám trong
hình vẽ dưới đây:

diễn số phức $-1+3i$.

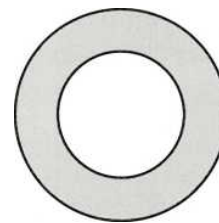
Khi đó $AM = |z-3i+1| = \sqrt{(a+1)^2 + (b-3)^2}$.

Suy ra $3^2 \leq (a+1)^2 + (b-3)^2 \leq 5^2 \Leftrightarrow 3^2 \leq AM \leq 5^2$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z là hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn $(A;3)$ và $(A;5)$, kể cả các điểm nằm trên hai đường tròn này.

$$S = 25\pi - 9\pi = 16\pi.$$

Chọn D.

Bài tập tự luyện dạng 4



Câu 1: Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = \frac{6+8i}{z} + i$ là một đường tròn. Bán kính r của đường tròn đó là

- A. $r = 40$. B. $r = 5$. C. $r = \frac{5}{2}$. D. $r = 10$.

Câu 2: Cho số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{5}$ và tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (4+2i)z + 3i$ là một đường tròn. Toạ độ tâm và bán kính r của đường tròn đó là

- A. $I(3;0)$, bán kính $r = 10$. B. $I(3;0)$, bán kính $r = \sqrt{10}$.
C. $I(0;3)$, bán kính $r = 10$. D. $I(0;3)$, bán kính $r = \sqrt{10}$.

Câu 3: Cho hai số phức z và $w = \frac{z+2+5i}{z-i}$. Biết rằng w là một số thuần ảo và tập hợp điểm số phức z là một đường tròn. Bán kính r của đường tròn đó là

- A. $r = \sqrt{3}$. B. $r = \sqrt{10}$. C. $r = 3$. D. $r = 5$.

Câu 4: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1| + |\bar{z}+1-i| = 3$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là

- A. Một đường thẳng B. Một elip. C. Một đường tròn. D. Một hypebol.

Câu 5: Cho số phức z thỏa mãn $|z-2i| = |\bar{z}+2z-1|$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z là

- A. Một đường tròn. B. Một elip. C. Một parabol. D. Một hypebol.

Câu 6: Cho số phức z thỏa mãn $|z-2i| = 2|\bar{z}+2+i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z là

- A. Một đường tròn. B. Một elip. C. Một parabol. D. Một đường thẳng.

Câu 7: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1| = 2$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (1+i\sqrt{3})z + 2$ là một đường tròn. Bán kính r của đường tròn đó là

- A. $r = 8$. B. $r = 4$. C. $r = 2\sqrt{2}$. D. $r = 2$.

Câu 8: Gọi A, B, C, D lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $1+2i, 1+\sqrt{3}+i, 1+\sqrt{3}-i, 1-2i$ trên mặt phẳng tọa độ. Biết tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong một đường tròn, tâm của đường tròn đó biểu diễn số phức có phần thực là

- A. $\sqrt{3}$. B. 2. C. $\sqrt{2}$. D. 1.

Câu 9: Cho các số phức z thỏa mãn $|z+1|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=(1+i\sqrt{8})z+i$ là một đường tròn. Bán kính r của đường tròn đó là

- A. 9. B. 36. C. 6. D. 3.

Câu 10: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn $|z+2-i|+|z-4-i|=10$ là

- A. 15π . B. 12π . C. 20π . D. 18π .

Câu 11: Biết các số phức z thỏa mãn $(\bar{z}+2i)(z-2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

- A. 2. B. $2\sqrt{2}$. C. 4. D. $\sqrt{2}$.

Câu 12: Cho số phức z thỏa mãn $\left|\frac{1+z}{iz}-i\right|=3$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=\frac{3-2i}{z}+i\sqrt{2}$ là một đường tròn. Bán kính của đường tròn đó là

- A. $3\sqrt{13}$. B. $2\sqrt{13}$. C. $\frac{\sqrt{13}}{3}$. D. $\frac{3}{\sqrt{13}}$.

Câu 13: Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn $|z-5-3i|=5$ và $|z_1-z_2|=8$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=z_1+z_2$ là đường tròn có phương trình nào dưới đây?

- A. $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$. B. $(x-10)^2+(y-6)^2=36$.
C. $(x-10)^2+(y-6)^2=16$. D. $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=9$.

Câu 14: Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z}-2i)(z+2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

- A. $2\sqrt{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. 2. D. 4.

Câu 15: Cho các số phức z thỏa mãn $|z-2i|=3$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=2iz+3-3i$ là đường tròn. Diện tích của hình tròn giới hạn bởi đường tròn đó bằng

- A. 9π . B. 36π . C. 6π . D. 18π .