

Câu 1. (5,0 điểm)

a. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 + 3x} \geq 2x$.

b. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2+3) = 3(x^2+y^2)+2 \\ (y+2)\sqrt{2x-y-1} + (x+5)\sqrt{3x-2y+2} = x^2+5x+6 \end{cases}$$

Câu 2. (5,0 điểm)

a. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hệ bất phương trình $-2 < \frac{mx^2 - 2mx + 2m + 3}{x^2 - 2x + 3} \leq 3$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$?

b. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x - y = 1 + xy \\ (y - m)x + (2m - 3)y = m \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 3. (5,0 điểm)

a. Cho tam giác ABC có góc $\hat{A} = 30^\circ$, bán kính đường tròn nội tiếp tam giác $r = \sqrt{3}$ và độ dài đường cao kẻ từ đỉnh A là h thỏa mãn $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$. Tính giá trị $T = \sin^2 B - \cos^2 C$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

b. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(2;3)$, $B(-1;5)$ và đường thẳng $d: 2x + y + 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm C thuộc đường thẳng d và tọa độ điểm D thuộc đoạn thẳng AC , biết rằng tam giác ABC cân tại B và $DC = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 4. (3,0 điểm)

a. Một cửa hàng chuyên kinh doanh xe máy điện với chi phí mua vào là 23 triệu đồng và bán ra với giá 27 triệu đồng mỗi chiếc. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe này, chủ cửa hàng dự định giảm giá bán và ước tính rằng, theo tỉ lệ nếu cứ giảm 100 nghìn đồng mỗi chiếc thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 20 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải bán với giá mới là bao nhiêu để sau khi giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất?

b. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(x; y; p)$ với p là số nguyên tố thỏa mãn $x^2 + p^2 y^2 = 6(x + 2p)$.

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy = yz + zx$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{4z(z^2 - xy) - (x^2 + y^2)(2z - x - y)}{(x + y)z^2}.$$

HẾT

<https://toanmath.com/>

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay. Giám thị không giải thích gì thêm./

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

LỜI GIẢI TOÁN 10

$$\text{Đk : } \begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ x^2 + 3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ x = 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

* khi $x \leq -3$ hay $x = 0$ bpt đúng

Suy ra $x \leq -3$ hay $x = 0$ là nghiệm của bpt

*khi $x \geq 2$

$$\text{bpt} \Leftrightarrow \sqrt{x-2} + \sqrt{x+3} \geq 2\sqrt{x} \Leftrightarrow 2x+1+2\sqrt{x^2+x-6} \geq 4x$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+x-6} \geq 2x-1 \Leftrightarrow 8x \geq 25 \Leftrightarrow x \geq \frac{25}{8} \text{ thỏa đk } x \geq 2$$

Vậy tập nghiệm của bpt $S = (-\infty; -3] \cup \{0\} \cup [\frac{25}{8}; +\infty)$

$$(1) \Leftrightarrow x^3 - y^3 + 3x - 3y = 3(x^2 + y^2) + 2 \Leftrightarrow (x-1)^3 = (y+1)^3$$

$$\Leftrightarrow x-1 = y+1 \Leftrightarrow y = x-2$$

Thế vào phương trình (2) ta được

$$x\sqrt{x+1} + (x+5)\sqrt{x+6} = x^2 + 5x + 6$$

ĐK : $x \geq -2$.

$$\text{BPT} \Leftrightarrow x(\sqrt{x+1}-2) + (x+5)(\sqrt{x+6}-3) = x^2 - 9$$

$$\Leftrightarrow x \frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2} + (x+5) \frac{x-3}{\sqrt{x+6}+3} = (x-3)(x+3)$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{x+5}{\sqrt{x+6}+3} - (x+3) \right) = 0$$

Ta thấy $\frac{x}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{x+5}{\sqrt{x+6}+3} - (x+3)$

$$= \frac{x+1}{\sqrt{x+1}+2} - \frac{x+1}{2} + \frac{x+5}{\sqrt{x+6}+3} - \frac{x+5}{2} - \frac{1}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$= -\frac{(x+1)\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+2} - \frac{(x+5)(\sqrt{x+6}+1)}{\sqrt{x+6}+3} - \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} < 0, \forall x \geq -2$$

Suy ra BPT tương đương với $x = 3$. Vậy hệ có nghiệm $(3;1)$

Do $x^2 - 2x + 3 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên hệ BPT tương đương với

$$\begin{cases} (m-3)x^2 - 2(m-3)x + 2m-6 \leq 0 & (1) \\ (m+2)x^2 - 2(m+2)x + 2m+9 > 0 & (2) \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán tương đương với hệ (1) và (2) nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$

Kiểm tra được hai giá trị $m = 3, m = -2$ đều thỏa mãn

Với $\begin{cases} m \neq 3 \\ m \neq -2 \end{cases}$ thì yêu cầu bài toán tương đương với

$$\begin{cases} m-3 < 0 \\ \Delta_1 = (m-3)^2 - (m-3)(2m-6) \leq 0 \\ m+2 > 0 \\ \Delta_2 = (m+2)^2 - (m+2)(2m+9) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ -(m-3)^2 \leq 0 \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 3$$

$$\begin{cases} m > -2 \\ m < -7 \end{cases}$$

Vậy $-2 \leq m \leq 3$. Suy ra có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

PT đầu tương đương với $\begin{cases} y \neq 1 \\ x = \frac{1+y}{1-y} \end{cases}$ Thế vào PT thứ hai của hệ ta được

$$(2-m)y^2 + (m-1)y - m = 0 \quad (3)$$

TH1: $m = 2$. (3) tương đương $y = 2$. Hệ có nghiệm duy nhất $(-3;2)$

Suy ra $m = 2$ thỏa mãn

TH2: $m \neq 2$. (3) là PT bậc 2. Ta có các khả năng sau

$$+) (3) \text{ có nghiệm kép khác } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = -3m^2 + 6m + 1 = 0 \\ 2 - m + m - 1 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3}$$

+) (3) có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm bằng 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = -3m^2 + 6m + 1 > 0 \\ 2 - m + m - 1 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$$

Vậy các giá trị m là $m = 2; m = 1; m = \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3}$

$$\text{Ta có } ah_a = 2S = bc \sin A \Rightarrow \frac{1}{h_a^2} = \frac{a^2}{b^2 c^2 \sin^2 A} = \frac{4R^2}{b^2 c^2} \Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{4R^2}{b^2 c^2}$$

$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 = 4R^2 \Leftrightarrow \sin^2 B + \sin^2 C = 1 \Leftrightarrow \sin^2 B + 1 - \cos^2 C = 1 \Leftrightarrow \sin^2 B - \cos^2 C = 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $B \geq C \Rightarrow C \leq 90^\circ \Leftrightarrow \cos C \geq 0$.

$$\text{Khi đó: } \sin^2 B = \cos^2 C \Leftrightarrow \sin B = \cos C = \sin(90^\circ - C)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = 90^\circ - C \\ B + 90^\circ - C = 180^\circ \end{cases}$$

Kết hợp với $B + C = 150^\circ$ ta được $B = 120^\circ, C = 30^\circ = A$ suy ra tam giác ABC cân tại B .

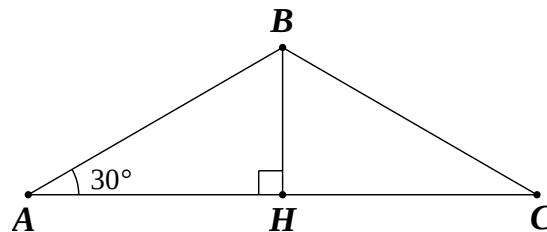
Gọi H là trung điểm

$$AC \Rightarrow BH \perp AC.$$

$$\text{Đặt } BH = x \Rightarrow BC = AB = \frac{BH}{\sin A} = 2x;$$

$$AH = AB \cos A = x\sqrt{3};$$

$$AC = 2AH = 2x\sqrt{3}.$$



$$BH \cdot AC = 2S_{ABC} = (AB + BC + CA) \cdot r$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 \sqrt{3} = (4x + 2x\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{3}$$

$$\text{Suy ra } BC = 2x = 2(2 + \sqrt{3}) \Rightarrow R = \frac{BC}{2 \sin A} = 4 + 2\sqrt{3}$$

$$C \in d \Leftrightarrow C(a; -2a - 1).$$

Tam giác ABC cân tại B suy ra

$$BC = BA \Leftrightarrow (a+1)^2 + (-2a-6)^2 = 3^2 + 2^2$$

$$\Leftrightarrow 5a^2 + 26a + 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ a = -\frac{6}{5} \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } C(-4; 7), \quad C(-\frac{6}{5}; \frac{7}{5})$$

Điểm $C(-4; 7)$ loại vì với $C(-4; 7)$ thì ba điểm A, B, C thẳng hàng.

$$\text{Vậy } C(-\frac{6}{5}; \frac{7}{5}).$$

Ta có $AC = \frac{8\sqrt{5}}{5}; DC = \frac{\sqrt{5}}{5}$, kết hợp với D thuộc đoạn AC suy ra $\overrightarrow{AC} = 8\overrightarrow{DC}$

$$\text{Gọi } D(x; y). \text{ Ta có } \overrightarrow{AC} = 8\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-16}{5} = 8(\frac{-6}{5} - x) \\ \frac{-8}{5} = 8(\frac{7}{5} - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-4}{5} \\ y = \frac{8}{5} \end{cases}. \text{ Vậy } D(-\frac{4}{5}; \frac{8}{5})$$

Giả sử giá bán mỗi chiếc xe giảm x (triệu đồng), $0 \leq x \leq 4$.

Khi đó, số tiền lãi mỗi chiếc xe là $4 - x$ (triệu đồng)

Theo dự kiến, số xe bán ra trong 1 năm là $600 + 200x$ (chiếc)

Tổng số tiền lãi là $T(x) = (4 - x)(600 + 200x) = -200x^2 + 200x + 2400$ (triệu đồng)

$T(x)$ có hệ số của x^2 âm nên $T(x)$ đạt GTLN tại $x = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2}$ (tm)

Suy ra cửa hàng cần giảm giá mỗi chiếc xe 500.000 ngàn đồng thì sẽ thu được lợi nhuận cao nhất.

Vậy Giá bán mới là 26500000 đồng.

Từ phương trình đã cho suy ra $x^2 + p^2 y^2 \vdots 3$.

Mặt khác ta thấy với $a \in \mathbb{Z}$ thì a^2 chia 3 dư 0 hoặc 1. Do đó, để $x^2 + p^2 y^2 \vdots 3$ thì ta phải có

x^2 và p^2y^2 cùng chia hết cho 3. Suy ra x và py cùng chia hết cho 3.

Đặt $x=3a$, với a nguyên dương. Khi đó phương trình trở thành $9a^2 + p^2y^2 = 18a + 12p$ (1).

Do $9a^2$, p^2y^2 , $18a$ đều chia hết cho 9 nên $12p:9 \Rightarrow p:3 \Rightarrow p=3$. Suy ra, (1) trở thành $a^2 + y^2 = 2a + 4 \Leftrightarrow (a-1)^2 + y^2 = 5$

Do $(a-1)^2 \geq 0$ suy ra $y^2 \leq 5$. Do y nguyên dương nên $y \in \{1, 2\}$. Bằng cách thử trực tiếp ta được các cặp (a, y) là $(2, 2)$, $(3, 1)$. Vậy có 2 bộ (x, y, p) thỏa mãn là

$(6, 2, 3)$, $(9, 1, 3)$.

Ta có $xy = yz + zx \Leftrightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. Mặt khác $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \Rightarrow \frac{1}{z} \geq \frac{4}{x+y} \Rightarrow \frac{x+y}{z} \geq 4$

Đặt $\frac{x+y}{z} = t \geq 4$.

Biến đổi biểu thức đã cho ta được $P = \frac{x^2 + y^2}{z^2} - \frac{2(x+y)}{z} + \frac{4z}{x+y} \geq \frac{(x+y)^2}{2z^2} - \frac{2(x+y)}{z} + \frac{4z}{x+y}$

Khi đó, $P \geq \frac{t^2}{2} - 2t + \frac{4}{t}$, $t \geq 4$.

Ta có:
$$P \geq \frac{t^2}{2} - 2t + \frac{4}{t} = \frac{t^2}{2} - \frac{9t}{4} + \frac{4}{t} + \frac{t}{4} = \frac{2t^2 - 9t + 4 - 4}{4} + \frac{4}{t} + \frac{t}{4} = \frac{(t-4)(2t-1)}{4} + \frac{4}{t} + \frac{t}{4} - 1$$
 Vậy

$$\geq 2\sqrt{\frac{4}{t} \cdot \frac{t}{4}} - 1 = 1; P = 1 \text{ khi } t = 4.$$

$P_{\min} = 1$ khi $x = y = 2z$.

