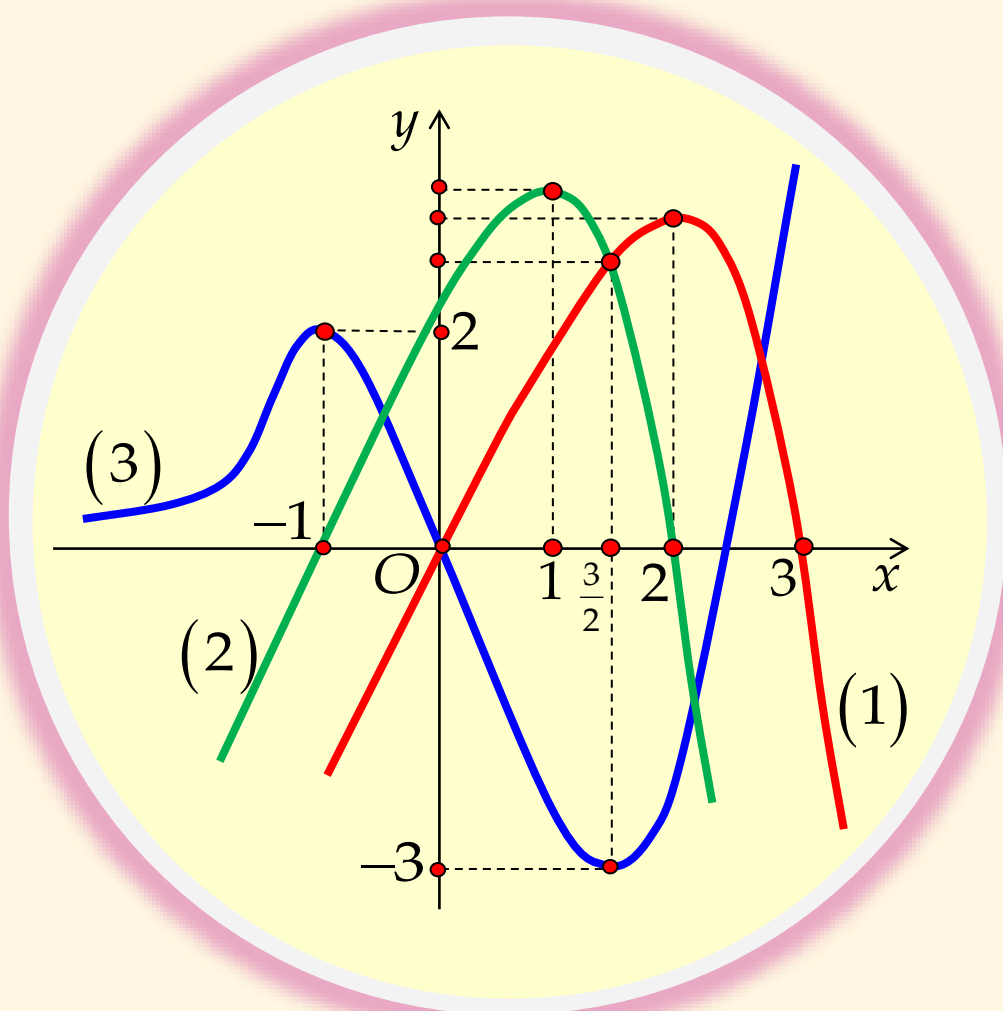


LÊ MINH TÂM

CHƯƠNG 01

KHẢO SÁT HÀM SỐ



TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ

MỤC LỤC

 CHUYÊN ĐỀ 01. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ	4
I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ	4
II. CÁC DẠNG BÀI TẬP	5
○ Dạng toán 1. Tìm khoảng đơn điệu của hàm số cho BBT hoặc Đồ Thị	5
○ Dạng toán 2. Tìm khoảng đơn điệu của hàm số cho trước $f'(x)$	7
○ Dạng toán 3. Tìm khoảng đơn điệu của hàm số	8
○ Dạng toán 4. Tìm tham số m để hàm số đơn điệu	10
○ Dạng toán 5. Hàm hợp $y=f(u(x))$	18
○ Dạng toán 6. Hàm hợp $y=f(x)+h(x)$	22
III. BÀI TẬP RÈN LUYỆN	24
 CHUYÊN ĐỀ 02. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ	54
I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ	54
II. MỘT SỐ BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP	55
2.1. Cực trị của hàm đa thức bậc ba $y = ax^3+bx^2+cx+d$	55
2.2. Cực trị của hàm đa thức bậc bốn (trùng phương) $y = ax^4+bx^2+c$	57
III. CÁC DẠNG BÀI TẬP	59
○ Dạng toán 1. Tìm cực trị của hàm số $y=f(x)$ khi cho BBT hoặc Đồ Thị	59
○ Dạng toán 2. Tìm cực trị của hàm số tường minh	63
○ Dạng toán 3. Tìm m để hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại x_0	66
○ Dạng toán 4. Tìm m để hàm số $y=f(x)$ có n cực trị	68
○ Dạng toán 5. Đường thẳng qua hai điểm cực trị	70
○ Dạng toán 6. Cực trị hàm bậc ba thỏa điều kiện với đường thẳng	73
○ Dạng toán 7. Cực trị hàm bậc ba thỏa điều kiện x_1, x_2	77
○ Dạng toán 8. Cực trị hàm trùng phương	79
○ Dạng toán 9. Cực trị hàm hợp $y=f(u(x))$	82
IV. BÀI TẬP RÈN LUYỆN	87
 CHUYÊN ĐỀ 03. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT	122
I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ	122
II. CÁC DẠNG BÀI TẬP	123
○ Dạng toán 1. Max - Min hàm số cho trước đoạn $[a;b]$	123
○ Dạng toán 2. Max - Min hàm số cho trước đồ thị hoặc BBT	125

○ Dạng toán 3. Max - min trên khoảng $(a;b)$	127
○ Dạng toán 4. Max - min hàm vô tỉ.....	129
○ Dạng toán 5. Max - min hàm lượng giác.	131
○ Dạng toán 6. Max - min hàm trị tuyệt đối.	134
III. BÀI TẬP RÈN LUYỆN.....	138
 CHUYÊN ĐỀ 04. TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ.....	169
I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.....	169
II. CÁC DẠNG BÀI TẬP.....	170
○ Dạng toán 1. LÝ THUYẾT VỀ ĐƯỜNG TIỆM CẬN.....	170
○ Dạng toán 2. TÌM ĐƯỜNG TIỆM CẬN TỪ ĐỒ THỊ HOẶC BBT.	172
○ Dạng toán 3. TÌM ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ TƯỜNG MINH.....	174
○ Dạng toán 4. BIỆN LUẬN TIỆM CẬN CHỨA THAM SỐ m	177
○ Dạng toán 5. TÌM ĐƯỜNG TIỆM CẬN HÀM ẨN.....	180
III. BÀI TẬP RÈN LUYỆN.....	182
 CHUYÊN ĐỀ 05. ĐỒ THỊ HÀM SỐ.....	209
I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.....	209
II. CÁC DẠNG BÀI TẬP.....	216
○ Dạng toán 1. TỪ ĐỒ THỊ/BBT ĐÃ CHO XÁC ĐỊNH HÀM SỐ.....	216
○ Dạng toán 2. XÁC ĐỊNH DẤU CÁC HỆ SỐ.....	219
○ Dạng toán 3. ĐỒ THỊ HÀM SỐ CHỨA TRỊ TUYỆT ĐỐI.	220
III. BÀI TẬP RÈN LUYỆN.....	223
 CHUYÊN ĐỀ 06. SỰ TƯƠNG GIAO.....	246
I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.....	246
II. CÁC DẠNG BÀI TẬP.....	249
○ Dạng toán 1. ĐẾM SỐ GIAO ĐIỂM (ĐIỂM CHUNG) BIẾT HÀM TƯỜNG MINH.	249
○ Dạng toán 2. ĐẾM SỐ GIAO ĐIỂM (ĐIỂM CHUNG) BIẾT ĐỒ THỊ/BBT.	251
○ Dạng toán 3. TÌM m ĐỂ ĐTHS GIAO VỚI (C') TẠI n NGHIỆM.	254
○ Dạng toán 4. TÌM m ĐỂ ĐTHS PHÂN THỨC GIAO VỚI (C') THỎA ĐIỀU KIỆN.....	259
III. BÀI TẬP RÈN LUYỆN.....	262

TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

Định nghĩa 01.

Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và $y = f(x)$ là một hàm số xác định trên K , ta có:

- Hàm số $f(x)$ được gọi là **đồng biến** (tăng) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Hàm số $f(x)$ được gọi là **nghịch biến** (giảm) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K gọi chung là **đơn điệu** trên K .

Định lý 01.

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K . Khi đó:

- Nếu hàm số đồng biến trên khoảng K thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$.
- Nếu hàm số nghịch biến trên khoảng K thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$.

Định lý 02.

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K . Khi đó:

- Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số f đồng biến trên K .
- Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số f nghịch biến trên K .
- Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số f không đổi trên K .

Ta có các nhận xét sau:

Nhận xét 01

- Nếu hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cùng đồng biến (nghịch biến) trên D thì hàm số $f(x) + g(x)$ cũng đồng biến (nghịch biến) trên D . Tính chất này có thể không đúng đối với hiệu $f(x) - g(x)$.

Nhận xét 02

- Nếu hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số dương và cùng đồng biến (nghịch biến) trên D thì hàm số $f(x).g(x)$ cũng đồng biến (nghịch biến) trên D .

Tính chất này có thể không đúng khi các hàm số $f(x), g(x)$ không là các hàm số dương trên D .

Nhận xét 03

- Cho hàm số $u = u(x)$, xác định với $x \in (a; b)$ và $u(x) \in (c; d)$. Hàm số $f[u(x)]$ cũng xác định với $x \in (a; b)$. Ta có nhận xét sau:
- + Giả sử hàm số $u = u(x)$ đồng biến với $x \in (a; b)$. Khi đó, hàm số $f[u(x)]$ đồng biến với $x \in (a; b) \Leftrightarrow f(u)$ đồng biến với $u \in (c; d)$.
- + Giả sử hàm số $u = u(x)$ nghịch biến với $x \in (a; b)$. Khi đó, hàm số $f[u(x)]$ nghịch biến với $x \in (a; b) \Leftrightarrow f(u)$ nghịch biến với $u \in (c; d)$.

Định lý về điều kiện đủ để hàm số đơn điệu

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K . Khi đó:

- Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại hữu hạn điểm thuộc K thì hàm số f đồng biến trên K .
- Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại hữu hạn điểm thuộc K thì hàm số f nghịch biến trên K .

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Dạng toán 1. Tìm khoảng đơn điệu của hàm số cho BBT hoặc Đồ Thị

Phương pháp giải

- Đề cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ hoặc Bảng biến thiên $\rightarrow$ nhìn hướng đi của đồ thị:
 - ☑ Khoảng mà đồ thị có hướng “đi lên” $\rightarrow$ hàm số đồng biến trên khoảng đó.
 - ☑ Khoảng mà đồ thị có hướng “đi xuống” $\rightarrow$ hàm số nghịch biến trên khoảng đó.
- Đề cho đồ thị hàm số $y = f'(x) \rightarrow$ làm theo các bước sau:
 - ☑ Bước 01. Tìm các giao điểm của đồ thị $f'(x)$ với Ox .
 - ☑ Bước 02. Lập bảng xét dấu của $f'(x)$ bằng cách nhìn:
 - 👉 Phần trên Ox mang dấu +.
 - 👉 Phần dưới Ox mang dấu –.
 - ☑ Bước 03. Từ bảng xét dấu ta tìm được chiều “lên – xuống” của $f(x)$.

Ví dụ 01.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	5	-1	$+\infty$			

Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 1)$. B. $(-1; +\infty)$. C. $(0; 1)$. D. $(-\infty; 0)$.

Lời giải

Chọn D

Ta thấy trên khoảng $(-\infty; 0)$ thì bảng biến thiên thể hiện hàm số đồng biến.

Ví dụ 02.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -2)$. B. $(-2; 3)$.
C. $(-1; 0)$. D. $(-1; +\infty)$.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0
y	$-\infty$	-2	-3	$+\infty$

Lời giải

Chọn A

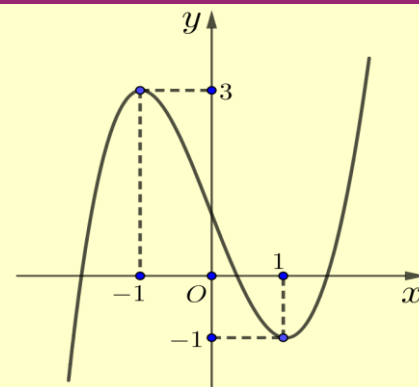
Ta thấy trên khoảng $(-\infty; 0)$ thì bảng biến thiên thể hiện hàm số đồng biến.

Ví dụ 03.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -1)$.
B. $(1; +\infty)$.
C. $(-1; 2)$.
D. $(-1; 0)$.



Lời giải

Chọn D

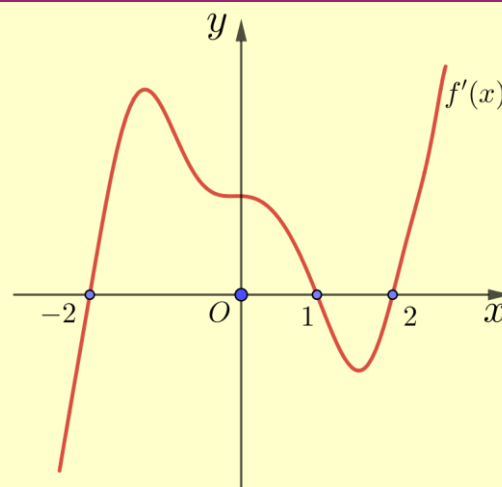
Ví dụ 04.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm

số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2; 1)$.
B. $(1; +\infty)$.
C. $(-2; 2)$.
D. $(1; 2)$.



Lời giải

Chọn D

Đồ thị $f'(x)$ cắt Ox tại $x = -2; x = 1; x = 2$.

Khi đó ta có bảng xét dấu của $f'(x)$:

x	$-\infty$	-2	1	2	$-\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$					

Vậy hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2); (1; 2)$.

Dạng toán 2. Tìm khoảng đơn điệu của hàm số cho trước $f'(x)$.

Phương pháp giải

Bài toán tổng quát: cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = \dots, \forall x \in K$. Tìm khoảng đơn điệu của hàm số $y = f(x)$.

○ **Bước 1.** Tìm nghiệm $f'(x) = 0$ (nếu có).

○ **Bước 2.** Lập bảng xét dấu của $f'(x)$, khi đó tìm được khoảng đơn điệu của $y = f(x)$.

☑ Khoảng $f'(x)$ chứa dấu $+$ thì $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng đó.

☑ Khoảng $f'(x)$ chứa dấu $-$ thì $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng đó.

Ví dụ 01.

(MĐ 105 BGD&ĐT NĂM 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Lời giải

Chọn C

Do hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

Nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Ví dụ 02.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = -2f(x)$ đồng biến trên khoảng

- A. $(-2; 0)$. B. $(0; 2)$. C. $(2; +\infty)$. D. $(-\infty; -2)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = -2f'(x) = -2x^2 + 4x > 0 \Leftrightarrow x \in (0; 2)$.

Suy ra: Hàm số $y = -2f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

Ví dụ 03.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x+3), \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng

- A. $(-3; 1)$. B. $(0; 1)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(-3; 0)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)^2(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$.

Ta lập được bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	-3	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 0)$.

Dạng toán 3. Tìm khoảng đơn điệu của hàm số.

Phương pháp giải

Bài toán tổng quát: cho hàm số $y = f(x)$. Tìm khoảng đơn điệu của hàm số $y = f(x)$.

○ **Bước 1.** Tìm tập xác định của hàm số.

○ **Bước 2.** Tính $f'(x)$ và tìm nghiệm $f'(x) = 0$ (nếu có).

○ **Bước 3.** Lập bảng xét dấu của $f'(x)$, khi đó tìm được khoảng đơn điệu của $y = f(x)$.

☑ Khoảng $f'(x)$ chứa dấu $+$ thì $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng đó.

☑ Khoảng $f'(x)$ chứa dấu $-$ thì $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng đó.

Ví dụ 01.

(MĐ 110 BGD&ĐT NĂM 2017) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.
B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Lập bảng biến thiên rồi suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$

Ví dụ 02.

(ĐỀ MINH HỌA GBD&ĐT NĂM 2017) Hỏi hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty; 0)$.

B. $(-\infty; -\frac{1}{2})$.

C. $(0; +\infty)$.

D. $(-\frac{1}{2}; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

$y = 2x^4 + 1$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 8x^3$; $y' = 0 \Leftrightarrow 8x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ suy ra $y(0) = 1$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$+\infty$	1	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ví dụ 03.

(ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2017) Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$. Mệnh đề nào đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Ví dụ 04.

Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = \frac{-x^2 + 2x - 1}{x + 2}$

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{-x^2 - 4x + 5}{(x+2)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 - 4x + 5}{(x+2)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-5	-2	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		12	$+\infty$	0	$-\infty$

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -5)$ và $(1; +\infty)$.

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-5; -2)$ và $(-2; 1)$.

Dạng toán 4. Tìm tham số m để hàm số đơn điệu.

Dạng 4.1. Hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).

Dạng 4.1.1. Hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) đơn điệu trên TXĐ.

Phương pháp giải

○ **Bước 1.** Tính $f'(x)$.

○ **Bước 2.** Thực hiện yêu cầu bài toán:

□ **Cách 01.**

☑ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta_{f'} \leq 0 \end{cases}$$

☑ Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì

$$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta_{f'} \leq 0 \end{cases}$$

□ **Cách 02.**

☑ Hàm số đồng/nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $b^2 - 3ac \leq 0$.

Ví dụ 01.

Tìm các giá trị của tham số để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3(m+2)x + 3m - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3(m+2)x + 3m - 1$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = 3x^2 - 6x + 3(m+2) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ 9 - 9(m+2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq -1.$$

Vậy với $m \in [-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}]$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 02.

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Hàm số luôn giảm trên $y' = -3x^2 + 6x + 3(m^2 - 1) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 < 0 \\ \Delta' = 9 + 3 \cdot 3(m^2 - 1) = 9m^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy $m = 0$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 03.

Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}(3-m)x^3 - (m+3)x^2 + (m+2)x - 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Hàm số $y = \frac{1}{3}(3-m)x^3 - (m+3)x^2 + (m+2)x - 3$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Xét $a = 3 - m = 0 \Leftrightarrow m = 3 \rightarrow y = -6x^2 + 5x - 3$ là hàm số bậc hai lúc tăng lúc giảm khi xét trên $\mathbb{R} \rightarrow m = 3$ loại.

Xét $a = 3 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = (3-m)x^2 - 2(m+3)x + (m+2) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 - m > 0 \\ \Delta' = 2m^2 + 5m + 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ -\frac{3}{2} \leq m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq m \leq -1.$$

Vậy với $-\frac{3}{2} \leq m \leq -1$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Dạng 4.1.2. Hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) đơn điệu trên khoảng $(a; b)$.

❖ **Phương pháp 1.** (Khi $f'(x) = 0$ nhẩm được nghiệm).

○ **Bước 1.** Tính $f'(x)$.

○ **Bước 2.** Giải $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases}$.

○ **Bước 3.** Lập bảng xét dấu, xác định các khoảng đơn điệu của hàm số.

○ **Bước 4.** Từ bảng xét dấu, giả sử điều kiện để hàm số đơn điệu (đồng biến hoặc nghịch biến theo yêu cầu bài toán) là D .

○ **Bước 5.** Để hàm số đơn điệu trên K là $K \subset D$.

❖ **Phương pháp 2.** (Khi $f'(x) = 0$ không nhẩm được nghiệm).

○ **Bước 1.** Tính $f'(x)$.

○ **Bước 2.** Cô lập m , đưa về một trong các dạng sau:

+) $m \geq g(x), \forall x \in K \Leftrightarrow m \geq \max_K g(x);$

+) $m \leq g(x), \forall x \in K \Leftrightarrow m \leq \min_K g(x).$

○ **Chú ý:** Trong trường hợp không có giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất thì ta có thể xét đến cận trên đúng hoặc cận dưới đúng của $g(x)$ và dấu "=" cần xem xét cẩn thận.

Ví dụ 01.

Tìm m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx - 1$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -3x^2 + 6x + 3m$

Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx - 1$ nghịch biến trên $(0; +\infty) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (0; +\infty)$.

Hay $-3x^2 + 6x + 3m \leq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m \leq x^2 - 2x, \forall x \in (0; +\infty)$. (1)

Xét hàm số $f(x) = x^2 - 2x$ trên $(0; +\infty)$ có $f'(x) = 2x - 2; f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	$\searrow$ -1 $\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có (1) $m \leq -1$.

Vậy với $m \leq -1$ thì hàm số đã cho nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Ví dụ 02.

Tìm m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m+3)x + 4$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -x^2 + (m-1)x + m+3$

Hàm số đồng biến trên nửa khoảng $(0;3)$ khi và chỉ khi hàm số $y' \geq 0, \forall x \in (0;3)$.

Hay $-x^2 + (m-1)x + m+3 \geq 0, \forall x \in (0;3) \Leftrightarrow m(2x+1) \geq x^2 + 2x - 3, \forall x \in (0;3)$. (1)

Trên $(0;3)$ ta có $2x+1 > 0$, nên ta có $m \geq \frac{x^2 + 2x - 3}{2x+1}, \forall x \in (0;3)$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{2x+1}$ trên $[0;3]$ có $f'(x) = \frac{2x^2 + 2x + 8}{(2x+1)^2} > 0, \forall x \in [0;3]$..

Bảng biến thiên

x	0	3
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-3	$\frac{12}{7}$

Từ bảng biến thiên ta có (2) $m \geq \frac{12}{7}$.

Vậy với $m \geq \frac{12}{7}$, hàm số đã cho luôn đồng biến trên $(0;3)$.

Ví dụ 03.

Tìm m để hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 2(2m+1)x + m^2 + 2m$; $\Delta_{y'} = (2m+1)^2 - 3(m^2 + 2m) = (m-1)^2$.

Với $m=1$, ta có $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Do đó $m=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m \neq 1$, ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2m+1-|m-1|}{3} \\ x_2 = \frac{2m+1+|m-1|}{3} \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		y_1		y_2		$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$x_2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2m+1+|m-1|}{3} \leq 0 \Leftrightarrow |m-1| \leq -2m-1.$$

Với $m > 1$, ta có $|m-1| \leq -2m-1 \Leftrightarrow m-1 \leq -2m-1 \Leftrightarrow m < 0$ (loại).

Với $m < 1$, ta có $|m-1| \leq -2m-1 \Leftrightarrow -m+1 \leq -2m-1 \Leftrightarrow m \leq -2$ (thỏa mãn).

Vậy với $m \leq -2$ hoặc $m = 1$, hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Dạng 4.1.3. Hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) đơn điệu trên khoảng có độ dài bằng k hoặc nhỏ/lớn hơn k với $k > 0$.

❖ **Phương pháp 2.**

○ **Bước 1.** Tính $f'(x)$.

○ **Bước 2.** Tìm điều kiện của tham số để hàm số có khoảng đơn điệu: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$.

○ **Bước 3.** Biến đổi $|x_1 - x_2| = k (*) \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = k^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2 = k^2$.

○ **Bước 4.** Sử dụng định lý Vi-ét để đưa $(*)$ thành phương trình theo tham số.

○ **Bước 5.** Giải $(*)$, so sánh điều kiện để chọn kết quả thỏa mãn.

Ví dụ 01.

Tìm a để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + ax + a$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1.

Lời giải

Tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x + a$; $\Delta_{y'} = 9 - 3a$.

Với $9 - 3a > 0 \Leftrightarrow a < 3 \Rightarrow y'$ có hai nghiệm x_1, x_2 ($x_1 < x_2$).

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1 khi và chỉ

khi $|x_1 - x_2| = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2 = 1 \Leftrightarrow 4 - \frac{4a}{3} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{9}{4}$. (thỏa mãn).

Vậy với $a = \frac{9}{4}$, hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1.

Ví dụ 02.

Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{3}(m+1)x^3 + (2m-1)x^2 - (3m+2)x + m$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 4

Lời giải

Tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R}$.

Với $m = -1$, ta có $y = -3x^2 + x - 1$ nên không thể NB trên đoạn có độ dài bằng 4.

Với $m \neq -1$, ta có: $y' = (m+1)x^2 + 2(2m-1)x - (3m+2)$.

Suy ra $\Delta'_{y'} = (2m-1)^2 + (m+1)(3m+2) = 7m^2 + m + 3 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Khi đó giả sử y' có 2 nghiệm $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$. Ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2(2m-1)}{m+1} \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{3m+2}{m+1} \end{cases}$$

Hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 4 khi và chỉ khi $m > -1$ và $|x_1 - x_2| = 4$.

Bình phương 2 vế được $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2 = 16$

$$\Leftrightarrow \frac{4(2m-1)^2}{(m+1)^2} + \frac{4(3m+2)}{m+1} = 16$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 1 + 3m^2 + 5m + 2 = 4m^2 + 8m + 4 \Leftrightarrow 3m^2 - 7m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{7 \pm \sqrt{61}}{6} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy với $m = \frac{7 \pm \sqrt{61}}{6}$, hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 4.

Ví dụ 03.

Tìm m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + (3m+2)x + m - 3$ đồng biến trên đoạn có độ dài nhỏ hơn 4.

Lời giải

Tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -x^2 + 2x + 3m + 2; \Delta'_{y'} = 3m + 3$

Với $m \leq -1$, ta có $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m > -1$, giả sử y' có hai nghiệm $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = -3m - 2 \end{cases}$$

Hàm số đồng biến trên đoạn có độ dài nhỏ hơn 4 khi và chỉ khi $|x_1 - x_2| < 4$.

$$\text{Bình phương hai vế được } (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2 < 16 \Leftrightarrow 12m + 12 < 16 \Leftrightarrow m < \frac{1}{3}$$

Kết hợp ta có $m \in \left(-1; \frac{1}{3}\right)$, hàm số đồng biến trên đoạn có độ dài nhỏ hơn 4.

Dạng 4.2. Hàm phân thức $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ad - cb \neq 0$).

Dạng 4.2.1. Hàm phân thức $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ad - cb \neq 0$) đơn điệu trên từng khoảng xác định.

○ **Bước 1.** Tính $f'(x) = \frac{ad - cb}{(cx + d)^2}$.

○ **Bước 2.** Thực hiện yêu cầu bài toán:

☑ Hàm số **đồng biến** trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{ad - cb}{(cx + d)^2} > 0 \Leftrightarrow ad - cb > 0$.

☑ Hàm số **ngược biến** trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{ad - cb}{(cx + d)^2} < 0 \Leftrightarrow ad - cb < 0$.

Ví dụ 01.

Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx + m - 7}{5x - m + 3}$ đồng biến trên mọi khoảng của tập xác định

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{m-3}{5} \right\}$.

Ta có: $y' = \frac{-m^2 - 2m + 35}{(5x - m + 3)^2}$.

Hàm số đồng biến trên mọi khoảng của tập xác định khi và chỉ khi

$$y' > 0, \forall x \neq \frac{m-3}{5} \Leftrightarrow -m^2 - 2m + 35 > 0 \Leftrightarrow m \in (-7; 5).$$

Vậy $m \in (-7; 5)$ thì hàm số đồng biến trên mọi khoảng xác định của nó.

Ví dụ 02.

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{mx - 2}{x - m + 1}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó

Lời giải

Hàm số $y = \frac{mx - 2}{x - m + 1}$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m - 1\}$.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định

$$\Leftrightarrow y' = \frac{-m^2 + m + 2}{(x - m + 1)^2} < 0, \forall x \neq m - 1 \Leftrightarrow -m^2 + m + 2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases}.$$

Vậy $m \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

Dạng 4.2.2. Hàm phân thức $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ad - cb \neq 0$) **đơn điệu trên khoảng** $(m; n)$.

○ **Bước 1.** Điều kiện xác định $cx + d \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{d}{c}$.

○ **Bước 2.** Tính $f'(x) = \frac{ad - cb}{(cx + d)^2}$.

○ **Bước 3.** Thực hiện yêu cầu bài toán:

☑ Hàm số **đồng biến** trên khoảng $(a; b) \Leftrightarrow \begin{cases} ad - cb > 0 \\ -\frac{d}{c} \notin (m; n) \end{cases}$ với $-\frac{d}{c}$ chứa tham số m .

☑ Hàm số **nghịch biến** trên khoảng $(a; b) \Leftrightarrow \begin{cases} ad - cb < 0 \\ -\frac{d}{c} \notin (m; n) \end{cases}$ với $-\frac{d}{c}$ chứa tham số m .

Ví dụ 01.

Tìm m để hàm số $y = \frac{mx + 4}{x + m}$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$. Ta có: $y' = \frac{m^2 - 4}{(x + m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ khi và chỉ khi $y' < 0, \forall x \in (-\infty; 1)$.

$$\text{Hay } \begin{cases} -m \notin (-\infty; 1) \\ m^2 - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m \geq 1 \\ -2 < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq -1.$$

Vậy với $m \in (-2; -1]$ hàm số đã cho luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

Ví dụ 02.

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{mx - 4}{x - m}$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$

$$\text{Đạo hàm: } y' = \frac{-m^2 + 4}{(x - m)^2}$$

$$\text{Hàm số nghịch biến trên } (0; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ y' < 0, \forall x \in (0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ 4 - m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m^2 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2$$

Với $m \in (-\infty; -2)$ thì hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Ví dụ 03.

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m}$ đồng biến trên $(2; +\infty)$

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$

$$y' = \frac{m^2 - 1}{(x+m)^2}, x \neq -m$$

Hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m}$ đồng biến trên $(2; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' > 0$ với mọi $x \in (2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m \leq 2 \\ m^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ m < -1 \Leftrightarrow m \in [-2; -1) \cup (1; +\infty). \\ m > 1 \end{cases}$$

Dạng toán 5. Hàm hợp $y=f(u(x))$.

Bài toán. Cho đồ thị $y = f'(x)$ hỏi tính đơn điệu của hàm $y = f(u)$.

Phương pháp giải

○ **Bước 1.** Tính $y' = u' \cdot f'(u) \rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u' = 0 \\ f'(u) = 0 (*) \end{cases}$

○ **Bước 2.** Để giải (*) ta tìm $f'(x) = 0$ (đồ thị cắt trục hoành).

$$\text{Giả sử } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ \vdots \\ x = b \end{cases} \Rightarrow f'(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = a \\ \vdots \\ u = b \end{cases} \rightarrow \text{nghiệm của } (*).$$

○ **Bước 3.** Lập bảng xét dấu của $y' = u' \cdot f'(u) \Rightarrow$ khoảng đơn điệu cần tìm.

Ví dụ 01.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-9)(x-4)^2$. Khi đó hàm số $y = f(x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(3; +\infty)$. B. $(-3; 0)$. C. $(-\infty; -3)$. D. $(-2; 2)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y' = [f(x^2)]' = (x^2)' x^4 (x^2 - 9)(x^2 - 4)^2 = 2x^5 (x-3)(x+3)(x-2)^2 (x+2)^2.$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Ta có bảng xét dấu của y' như sau:

x	$-\infty$	-3	-2	0	2	3	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$

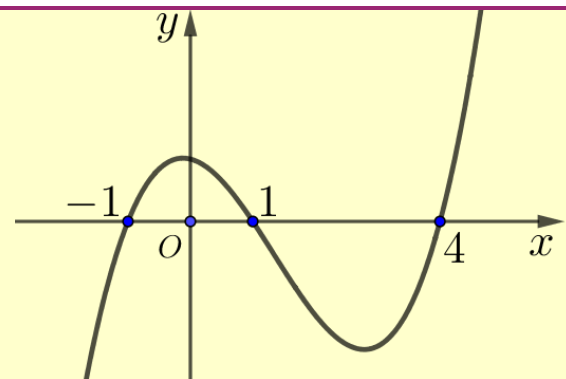
Dựa vào bảng xét dấu, hàm số $y = f(x^2)$ nghịch biến trên $(-\infty; -3)$ và $(0; 3)$.

Ví dụ 02.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số

$y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Hãy xét sự đơn điệu của hàm số $y = f(2-x)$.



Lời giải

$$\text{Ta có } (f(2-x))' = (2-x)f'(2-x) = -f'(2-x)$$

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ thì

$$(f(2-x))' > 0 \Leftrightarrow f'(2-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x < -1 \\ 1 < 2-x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -2 < x < 1 \end{cases}$$

$$(f(2-x))' < 0 \Leftrightarrow f'(2-x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 2-x < 1 \\ 2-x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 3 \\ x < -2 \end{cases}$$

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-2; 1)$ và $(3; +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -2)$ và $(1; 3)$.

Ví dụ 03.

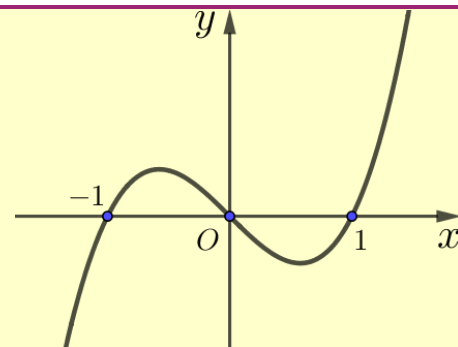
Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $g(x) = f(x^3)$ đồng biến trên khoảng nào ?

A. $(-\infty; -1)$.

B. $(-1; 1)$.

C. $(1; +\infty)$.

D. $(0; 1)$.



Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = 3x^2 f'(x^3)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ f'(x^3) = 0 \end{cases} \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^3 = 0 \\ x^3 = -1 \\ x^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

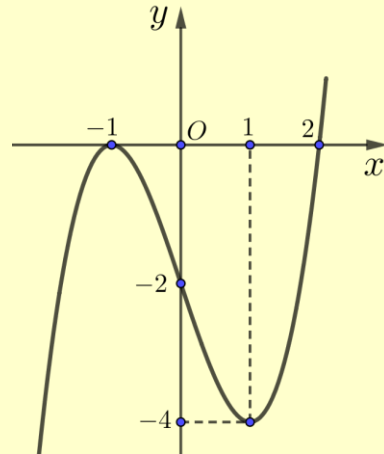
x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
g							

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số $g(x) = f(x^3)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Ví dụ 04.

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình bên dưới. Đặt $g(x) = f(x^2 - 2)$. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

- A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
- B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
- C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.
- D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.



Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2 - 2)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 2) = 0 \end{cases} \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2 = -1 \text{ (nghiem kep)} \\ x^2 - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

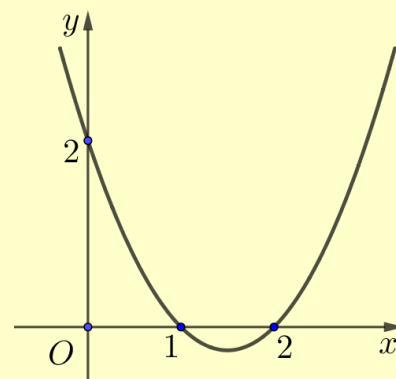
x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
g							

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số đồng biến trên $(-1;0)$.

Ví dụ 05.

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.
Hỏi hàm số $g(x) = f(1-x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(1;2)$. B. $(0;+\infty)$.
C. $(-2;-1)$. D. $(-1;1)$.



Lời giải

Chọn B

$$g'(x) = -2xf'(1-x^2).$$

$$\text{Ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(1-x^2) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} \begin{cases} x = 0 \\ 1-x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0. \\ 1-x^2 = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	$+$	0	$-$
g			

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số $g(x) = f(1-x^2)$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ chọn $x = 1 \in (0;+\infty)$.

● $x = 1 \longrightarrow -2x < 0$. (1)

● $x = 1 \longrightarrow 1-x^2 = 0 \longrightarrow f'(1-x^2) = f'(0) \xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} f'(0) = 2 > 0$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $g'(1) < 0$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Nhận thấy nghiệm của $g'(x) = 0$ là nghiệm đơn nên qua nghiệm đổi dấu.

Dạng toán 6. Hàm hợp $y=f(x)+h(x)$.

Bài toán. Cho đồ thị $y = f'(x)$ hỏi tính đơn điệu của hàm $y = f(x) \pm h(x)$.

Phương pháp giải

○ **Bước 1.** Tính $y' = f'(x) \pm h'(x) \rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \mp h'(x)$ (*).

○ **Bước 2.** Giải (*) bằng cách vẽ thêm $h'(x)$ vào hệ trục tọa độ và xét các điểm mà f' cắt h' .

Sau khi tìm được các nghiệm ta lập bảng xét dấu của $y' = f'(x) \pm h'(x)$.

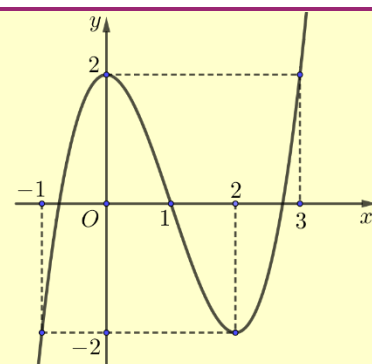
○ **Bước 3.** Từ bảng xét dấu của $y' = f'(x) \pm h'(x) \Rightarrow$ khoảng đơn điệu cần tìm.

Ví dụ 01.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.

Đặt $g(x) = 2f(x) - x^2 + 2x$. Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $g(x)$.

- A. $(-1; 0)$. B. $(-\infty; 0)$.
C. $(0; 1)$. D. $(1; +\infty)$.



Lời giải

Chọn A

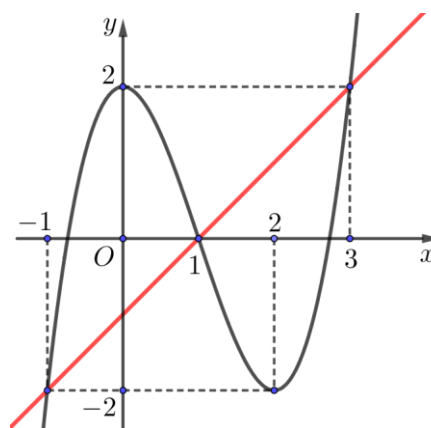
Ta có $g'(x) = 2f'(x) - 2x + 2 = 2(f'(x) - x + 1)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$			
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

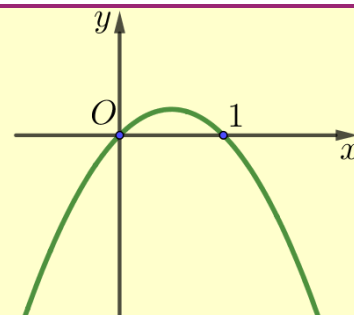
Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 1); (3; +\infty)$.



Ví dụ 02.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x+2) - 3$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A. $(-1; 0)$. B. $(0; 1)$.
C. $(-\infty; 0)$. D. $(1; +\infty)$.



Lời giải

Chọn B

Ta tính đạo hàm $y = f(x+2) - 3$; $y' = (x+2)' f'(x+2) = f'(x+2)$ sự biến thiên của hàm số $y = f(x+2) - 3$ phụ thuộc vào dấu của $f'(x+2)$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$ suy ra $f'(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ x+2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-1 \end{cases}$ (nghiệm đơn)
- $f'(x) > 0$ khi $0 < x < 1$ suy ra $f'(x+2) > 0$ khi $0 < x+2 < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < -2$
- $f'(x) < 0$ khi $x < 0 \vee x > 1$ suy ra $f'(x+2) < 0$. Trên các khoảng còn lại

x	$-\infty$	-2		-1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$				1	$-\infty$

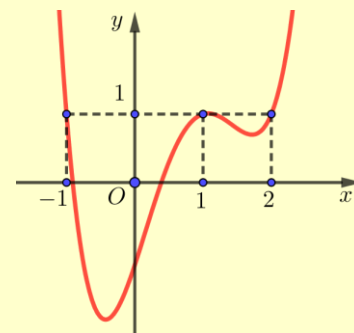
$\swarrow$ 0 $\nearrow$ $\searrow$

Ví dụ 03.

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.

Đặt $g(x) = f(x) - x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $g(1) < g(-1) < g(2)$.
- B. $g(-1) < g(1) < g(2)$.
- C. $g(2) < g(1) < g(-1)$.
- D. $g(2) < g(-1) < g(1)$.



Lời giải

Chọn C

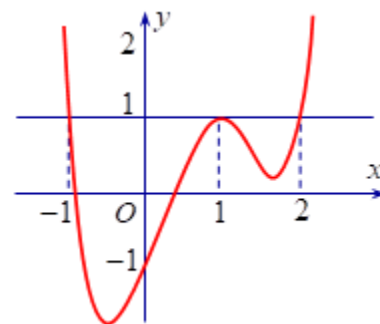
Ta có $g'(x) = f'(x) - 1 \rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1		1		2		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
g	$-\infty$		$g(-1)$		$g(1)$		$g(2)$	

$\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$

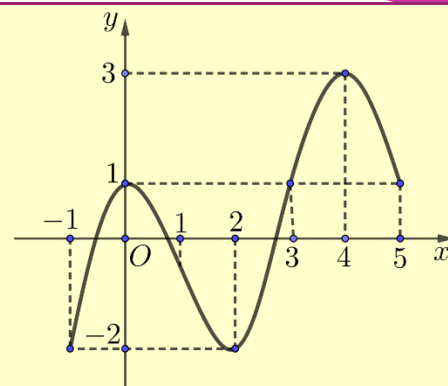
Vậy $g(2) < g(1) < g(-1)$.



Ví dụ 04.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình bên. Hàm số $y = -2f(2-x) + x^2$ nghịch biến trên khoảng

- A. $(-3; -2)$.
- B. $(-2; -1)$.
- C. $(-1; 0)$.
- D. $(0; 2)$.



Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = -(2-x)' 2f'(2-x) + 2x$

$$\Rightarrow y' < 0 \Leftrightarrow f'(2-x) + x < 0 \Leftrightarrow f'(2-x) < (2-x) - 2.$$

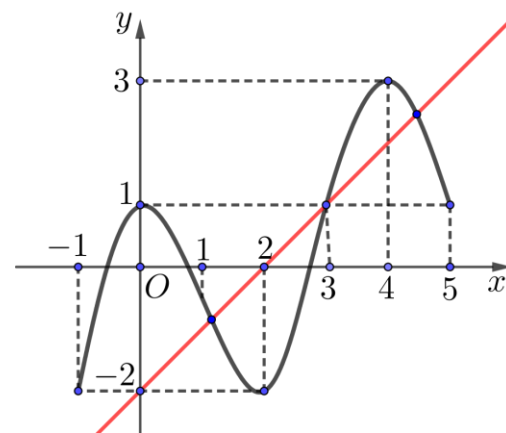
Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y = x - 2$ cắt đồ thị $y = f'(x)$ tại hai điểm có hoành độ liên tiếp là

$$\begin{cases} 1 < x_1 < 2 \\ x_2 = 3 \end{cases} \text{ và cũng từ đồ thị ta thấy } f'(x) < x - 2 \text{ trên}$$

miền $2 < x < 3$ nên $f'(2-x) < (2-x) - 2$ trên miền

$$2 < 2-x < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 0.$$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.



III. BÀI TẬP RÈN LUYỆN.

Câu 1. (MĐ101 – 2020 L1) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-1	4	-1	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -1)$.
- B. $(0; 1)$.
- C. $(-1; 1)$.
- D. $(-1; 0)$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 2. (ĐMH 2020 – L1) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			2		2			
	$-\infty$			-1			$-\infty$	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(0; 1)$. C. $(-1; 0)$. D. $(-\infty; 0)$.

Lời giải

Chọn C

Câu 3. (ĐMH 2020 – L2) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			2		2			
	$-\infty$			1			$-\infty$	

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-1; 0)$. C. $(-1; 1)$. D. $(0; 1)$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Câu 4. (MĐ02 – 2020 L1) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			4		4			
	$-\infty$			1			$-\infty$	

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-1; 1)$. C. $(0; 1)$. D. $(-1; 0)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Câu 5. (MĐ103 – 2020 L1) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$		3		3	
	$-\infty$		2		$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây

- A. $(-2; 2)$ B. $(0; 2)$ C. $(-2; 0)$ D. $(2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Câu 6. (MĐ104 – 2020 L1) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$							$+\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 -1 1 -1

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-3; 0)$. B. $(-3; 3)$. C. $(0; 3)$. D. $(-\infty; -3)$.

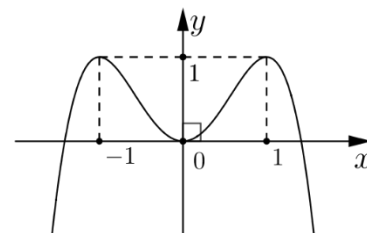
Lời giải

Chọn A

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-3; 0)$ và $(3; +\infty)$.

Câu 7. (MĐ102 – 2020 – L2) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; 0)$. B. $(-\infty; -1)$.
C. $(0; 1)$. D. $(0; +\infty)$.



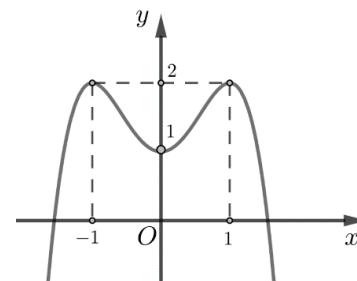
Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$,

Câu 8. (MĐ 107 – 2020 L2) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; 1)$. B. $(-\infty; 0)$.
C. $(1; +\infty)$. D. $(-1; 0)$.



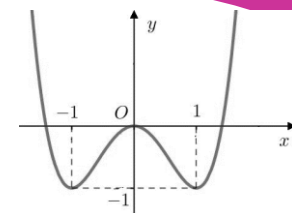
Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có hàm số đồng biến trên hai khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$

$\Rightarrow$ chọn đáp án A.

Câu 9. (MĐ 103 – 2020 – L2) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $(-1; 0)$. B. $(-\infty; -1)$.
C. $(0; +\infty)$. D. $(0; 1)$.

Lời giải

Chọn A

Câu 10. (MĐ 104 BGD&DT NĂM 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Lời giải

Chọn D

Theo bảng xét dấu thì $y' < 0$ khi $x \in (0; 2)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Câu 11. (ĐMH 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$				
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		
y			3		-1		3		$-\infty$

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; +\infty)$ B. $(-\infty; -2)$ C. $(0; 2)$ D. $(-2; 0)$

Lời giải

Chọn D

Câu 12. (ĐMH 1, NĂM 2017) Hỏi hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(-\infty; -\frac{1}{2})$. B. $(0; +\infty)$. C. $(-\frac{1}{2}; +\infty)$. D. $(-\infty; 0)$

Lời giải

Chọn C

$y = 2x^4 + 1$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 8x^3$; $y' = 0 \Leftrightarrow 8x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ su ra $y(0) = 1$

Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 13. (ĐMH 2, NĂM 2017) Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$. **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 3x^2 - 4x + 1 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$+$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

Câu 14. (MĐ 110 - NĂM 2017) Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A.** $y = \frac{x-1}{x-2}$ **B.** $y = x^3 + x$ **C.** $y = -x^3 - 3x$ **D.** $y = \frac{x+1}{x+3}$

Lời giải

Chọn B

Vì $y = x^3 + x \Rightarrow y' = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 15. (ĐMH NĂM 2017) Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$
B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Câu 16. (ĐMH NĂM 2017) Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. $y = x^4 + 3x^2$.

B. $y = \frac{x-2}{x+1}$.

C. $y = 3x^3 + 3x - 2$.

D. $y = 2x^3 - 5x + 1$.

Lời giải

Chọn C

$y' = 9x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Câu 17. (MĐ 110 NĂM 2017) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$. B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Lập bảng biến thiên rồi suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$

Câu 18. (MĐ 123 NĂM 2017) Hàm số $y = \frac{2}{x^2 + 1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; +\infty)$

B. $(0; +\infty)$

C. $(-\infty; 0)$

D. $(-1; 1)$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = \frac{-4x}{(x^2 + 1)^2} < 0 \Leftrightarrow x > 0$

Câu 19. (MĐ 123 NĂM 2017) Cho hàm số $y = x^3 + 3x + 2$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

Lời giải

Chọn C

+) TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

+) $y' = 3x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 20. (MĐ 104 NĂM 2017) Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2 + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$

Lời giải

Chọn A

Ta có $D = \mathbb{R}$, $y' = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$; $y' > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 21. (ĐMH NĂM 2017) Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

A. 0

B. 3

C. 2

D. 1

Lời giải

Chọn C

TH1: $m = 1$. Ta có: $y = -x + 4$ là phương trình của một đường thẳng có hệ số góc âm nên hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó nhận $m = 1$.

TH2: $m = -1$. Ta có: $y = -2x^2 - x + 4$ là phương trình của một đường Parabol nên hàm số không thể nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó loại $m = -1$.

TH3: $m \neq \pm 1$. Khi đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow y' \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, dấu “=” chỉ xảy ra ở hữu hạn điểm trên $\mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow 3(m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1)x - 1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ (m - 1)^2 + 3(m^2 - 1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ (m - 1)(4m + 2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ -\frac{1}{2} \leq m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m < 1.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 0$.

Vậy có 2 giá trị m nguyên cần tìm là $m = 0$ hoặc $m = 1$.

Câu 22. (MĐ 123 NĂM 2017) Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m + 9)x + 5$, với m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

A. 5

B. 4

C. 6

D. 7

Lời giải

Chọn D

Ta có:

+) TXĐ: $D = \mathbb{R}$

+) $y' = -3x^2 - 2mx + 4m + 9$.

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$ khi $y' \leq 0, \forall x \in (-\infty; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 < 0 \\ \Delta' = m^2 + 3(4m + 9) \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m \in [-9; -3] \Rightarrow$ có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 23. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}(m^2 - m)x^3 + 2mx^2 + 3x - 2$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

$y' = (m^2 - m)x^2 + 4mx + 3$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

+ Với $m = 0$ ta có $y' = 3 > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

+ Với $m = 1$ ta có $y' = 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{4} \Rightarrow m = 1$ không thỏa mãn.

+ Với $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$ ta có $y' \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m > 0 \\ \Delta' = m^2 + 3m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m < 0$.

Tổng hợp các trường hợp ta được $-3 \leq m \leq 0$.

$m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài ra.

Câu 24. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = mx^3 + mx^2 + m(m-1)x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m \leq \frac{4}{3}$ và $m \neq 0$.

B. $m = 0$ hoặc $m \geq \frac{4}{3}$.

C. $m \geq \frac{4}{3}$.

D. $m \leq \frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn C

TH1: $m = 0 \Rightarrow y = 2$ là hàm hằng nên loại $m = 0$.

TH2: $m \neq 0$. Ta có: $y' = 3mx^2 + 2mx + m(m-1)$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \Delta' = m^2 - 3m^2(m-1) \leq 0 \\ 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2(4-3m) \leq 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{4}{3} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{4}{3}$$

Câu 25. Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (3m+2)x + 1$. Tìm tất cả giá trị của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $\begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq -2 \end{cases}$. B. $-2 \leq m \leq -1$. C. $-2 < m < -1$. D. $\begin{cases} m > -1 \\ m < -2 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D = \mathbb{R}$, $y' = -x^2 + 2mx + 3m + 2$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta' = m^2 + 3m + 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m \leq -1.$$

Câu 26. Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1)x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. Không có giá trị m thỏa mãn. B. $m \neq 1$.
C. $m = 1$. D. Luôn thỏa mãn với mọi m .

Lời giải

Chọn C

$$y' = 3x^2 - 6mx + 3(2m-1)$$

Ta có: $\Delta' = (-3m)^2 - 3 \cdot 3 \cdot (2m-1)$. Để hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $\Delta' \leq 0$

$$\Leftrightarrow 9m^2 - 18m + 9 < 0 \Leftrightarrow 9(m^2 - 2m + 1) \leq 0 \Leftrightarrow 9(m-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Câu 27. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - 2mx^2 + (3m+5)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. 4. B. 2. C. 5. D. 6.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = mx^2 - 4mx + 3m + 5$.

Với $a = 0 \Leftrightarrow m = 0 \Rightarrow y' = 5 > 0$. Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Với $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ (2m)^2 - m(3m+5) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2 - 5m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 0 \leq m \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 5.$$

$$\text{Vì } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}.$$

Câu 28. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x - m$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

- A. $[-2; 2]$. B. $(-\infty; 2)$. C. $(-\infty; -2]$. D. $[2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } y' = x^2 + 2mx + 4.$$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (-\infty; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2.$$

Câu 29. Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + (2a+1)x - 3a + 2$ (a là tham số). Với giá trị nào của a thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $a \leq 1$. B. $a \geq -\frac{5}{2}$. C. $a \leq -\frac{5}{2}$. D. $a \geq 1$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } b^2 - 3ac \leq 0 \Leftrightarrow 2^2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (2a+1) \leq 0 \Leftrightarrow 4 + 2a + 1 \leq 0 \Leftrightarrow a \leq -\frac{5}{2}$$

Câu 30. Tìm điều kiện của tham số thực m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3(m+1)x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m \geq 2$. B. $m < 2$. C. $m < 0$. D. $m \geq 0$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } y' = 3x^2 - 6x + 3(m+1)$$

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = -9m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 0.$$

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = (m-1)x^3 - 3(m-1)x^2 + 3x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $1 < m \leq 2$. B. $1 < m < 2$. C. $1 \leq m \leq 2$. D. $1 \leq m < 2$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y' = 3(m-1)x^2 - 6(m-1)x + 3.$$

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1=0 \\ m-1 > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m > 1 \\ 9(m-1)^2 - 9(m-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m > 1 \\ 1 \leq m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 2.$$

Câu 32. (ĐMH NĂM 2019) Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + (4m-9)x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ là

- A. $\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right]$ B. $[0; +\infty)$ C. $(-\infty; 0]$ D. $\left[-\frac{3}{4}; +\infty\right)$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = -3x^2 - 12x + 4m - 9$

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ thì $y' = -3x^2 - 6x + 4m - 9 \leq 0 \quad \forall x \in (-\infty; -1)$

$$\Leftrightarrow 4m \leq 3x^2 + 12x + 9 \quad \forall x \in (-\infty; -1) \Leftrightarrow 4m \leq \min_{(-\infty; -1]} f(x), \quad f(x) = 3x^2 + 12x + 9$$

Ta có $f'(x) = 6x + 12; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Khi đó, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y	$+\infty$	-3	$+\infty$

$$\text{Suy ra } \min_{(-\infty; 0]} f(x) = -3 \Rightarrow 4m \leq -3 \Leftrightarrow m \leq -\frac{3}{4}.$$

Câu 33. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ là

- A. $(-1; 5)$. B. $(-\infty; -3]$. C. $(-\infty; -4]$. D. $(-1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 + 6x - m$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ thì $y' \geq 0, \forall x \in (-\infty; 0)$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x - m \geq 0, \forall x \in (-\infty; 0)$$

$$\Leftrightarrow m \leq 3x^2 + 6x, \forall x \in (-\infty; 0).$$

Đặt $g(x) = 3x^2 + 6x$, hàm số $g(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0
y'		$-$	0
y	$-\infty$	$\searrow$	$\nearrow$
		-3	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\Leftrightarrow m \leq 3x^2 + 6x, \forall x \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow m \leq -3$.

Câu 34. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = f(x) = \frac{mx^3}{3} + 7mx^2 + 14x - m + 2$ giảm trên nửa khoảng $[1; +\infty)$?

- A. $\left(-\infty; -\frac{14}{15}\right]$. B. $\left[-2; -\frac{14}{15}\right]$. C. $\left[-\frac{14}{15}; +\infty\right)$. D. $\left(-\infty; -\frac{14}{15}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R}$, yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình

$$mx^2 + 14mx + 14 \leq 0, \forall x \geq 1, \text{ tương đương với } g(x) = \frac{-14}{x^2 + 14x} \geq m \quad (1)$$

Đễ dàng có được $g(x)$ là hàm tăng $\forall x \in [1; +\infty)$, suy ra $\min_{x \geq 1} g(x) = g(1) = -\frac{14}{15}$

Kết luận: $(1) \Leftrightarrow \min_{x \geq 1} g(x) \geq m \Leftrightarrow -\frac{14}{15} \geq m$

Câu 35. Xác định các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - m$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$?

- A. $m \geq 0$. B. $m < \frac{1}{2}$. C. $m \leq 0$. D. $m \geq \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$y' = 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2m \\ x = 0 \end{cases}$$

Hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - m$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1) \Leftrightarrow 2m \geq 1 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$

Câu 36. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

- A. $m \leq 0$. B. $m \geq -2$. C. $m \leq -3$. D. $m \leq -1$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 3x^2 + 6x - m$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x < 0$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x - m \geq 0, \forall x < 0.$$

Cách 1:

$$3x^2 + 6x - m \geq 0, \forall x < 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x \geq m, \forall x < 0.$$

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 + 6x$ trên khoảng $(-\infty; 0)$, ta có:

$$f'(x) = 6x + 6. \text{ Xét } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1. \text{ Ta có } f(-1) = -3.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-3	0

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $m \leq -3$.

Cách 2:

$$\text{Ta có } \Delta' = 9 + 3m.$$

$$\text{Nếu } \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -3 \text{ thì } y' \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y' \geq 0 \forall x < 0.$$

Nếu $\Delta' > 0$ thì y' có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Khi đó để $y' \geq 0 \forall x < 0$ thì ta phải có $0 \leq x_1 < x_2$. Điều này không thể xảy ra vì $S = x_1 + x_2 = -2 < 0$.

Vậy $m \leq -3$.

Cách 3:

Phương án B: Với $m = -3$ ta có $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$. Khi đó $y' = 3(x+1)^2 \geq 0 \forall x$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$. Vậy B là đáp án đúng.

Câu 37. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 9m^2x$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

A. $-1 < m < \frac{1}{3}$.

B. $m > \frac{1}{3}$.

C. $m < -1$.

D. $m \geq \frac{1}{3}$ hoặc $m \leq -1$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6mx - 9m^2; y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx - 9m^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 3m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -m \\ x = 3m \end{cases}.$$

• Nếu $-m = 3m \Leftrightarrow m = 0$ thì $y' \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số không có khoảng nghịch biến.

• Nếu $-m < 3m \Leftrightarrow m > 0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-m; 3m)$.

$$\text{Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng } (0; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} -m \leq 0 \\ 3m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{3}.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $m \geq \frac{1}{3}$.

• Nếu $-m > 3m \Leftrightarrow m < 0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(3m; -m)$.

Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3m \leq 0 \\ -m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1.$

Kết hợp với điều kiện ta được $m \leq -1.$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ khi $m \leq -1$ hoặc $m \geq \frac{1}{3}.$

Câu 38. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - m + 2$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$..

- A. $m = 0.$ B. $m > 1.$ C. $m \leq -\frac{1}{2}.$ D. $m < -\frac{1}{2}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = x^2 - 2mx + 2m - 1.$ Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2m - 1 \end{cases}.$

Nếu $1 \leq 2m - 1$ thì ta có biến đổi $y' \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2m - 1.$

(trường hợp này hàm số không thể nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$).

Xét $2m - 1 < 1$ ta có biến đổi $y' \leq 0 \Leftrightarrow x \in [2m - 1; 1].$

x	$-\infty$	$2m-1$			1	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
	$-\infty$					$+\infty$

Vậy, hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$ thì $(-2;0) \subset [2m - 1; 1].$

$$\Leftrightarrow 2m - 1 \leq -2 \Leftrightarrow m \leq -\frac{1}{2}..$$

Câu 39. Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 2$ tăng trên khoảng $(1; +\infty).$

- A. $m < 3.$ B. $m \geq 3.$ C. $m \neq 3.$ D. $m \leq 3.$

Lời giải

Chọn B

Đạo hàm : $y' = 3x^2 - 6x + m$

YCBT $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (1; +\infty).$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow m \geq -3x^2 + 6x, \forall x \in (1; +\infty)$$

Xét hàm số: $f(x) = -3x^2 + 6x, \forall x \in (1; +\infty) \Rightarrow f'(x) = -6x + 6 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, f(1) = 3.$ Do đó : $m \geq f(x), x \in (1; +\infty) \Rightarrow m \geq 3.$

Câu 40. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 - (m-6)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$ là:

- A. $(-\infty;3)$. B. $(-\infty;3]$. C. $[3;6]$. D. $(-\infty;6]$.

Lời giải

Chọn B

$y' = 3x^2 - 2mx - (m-6)$. Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;4)$ thì: $y' \geq 0, \forall x \in (0;4)$.

tức là $3x^2 - 2mx - (m-6) \geq 0 \forall x \in (0;4) \Leftrightarrow \frac{3x^2+6}{2x+1} \geq m \forall x \in (0;4)$

Xét hàm số $g(x) = \frac{3x^2+6}{2x+1}$ trên $(0;4)$.

$$g'(x) = \frac{6x^2+6x-12}{(2x+1)^2}, g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \in (0;4) \\ x=-2 \notin (0;4) \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	0	1	4
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	6	3	$\frac{54}{13}$

Vậy để $g(x) = \frac{3x^2+6}{2x+1} \geq m \forall x \in (0;4)$ thì $m \leq 3$.

Câu 41. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 6mx + m$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

- A. $m \leq -\frac{1}{4}$. B. $m \geq \frac{1}{4}$. C. $m \geq 2$. D. $m \geq 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 6x^2 - 6x - 6m$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi $y' \leq 0$ với $\forall x \in (-1;1)$ hay $m \geq x^2 - x$ với $\forall x \in (-1;1)$.

Xét $f(x) = x^2 - x$ trên khoảng $(-1;1)$ ta có $f'(x) = 2x - 1; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

x	-1	$\frac{1}{2}$	1
y'	$-$	0	$+$
y	2		0

$-\frac{1}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $m \geq f(x)$ với $\forall x \in (-1; 1) \Leftrightarrow m \geq 2$.

* Có thể sử dụng $y' \leq 0$ với $\forall x \in (-1; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} y'(-1) \leq 0 \\ y'(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6m \leq 0 \\ 12 - 6m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 2$.

Câu 42. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. $m \geq 12$.

B. $m \leq 12$.

C. $m \geq 0$.

D. $m \leq 0$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 3x^2 - 12x + m$

+Trường hợp 1:

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \text{ (hn)} \\ 36 - 3m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 12$

+Trường hợp 2: Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty) \Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < x_2 \leq 0$ (*)

Trường hợp 2.1: $y' = 0$ có nghiệm $x = 0$ suy ra $m = 0$. Nghiệm còn lại của $y' = 0$ là $x = 4$ (không thỏa (*))

Trường hợp 2.2: $y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa

$$x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36 - 3m > 0 \\ 4 < 0 \text{ (vl)} \\ \frac{m}{3} > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{không có } m. \text{ Vậy } m \geq 12$$

Cách 2: Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty) \Leftrightarrow m \geq 12x - 3x^2 = g(x), \forall x \in (0; +\infty)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(0; +\infty)$.

x	0	2	$+\infty$	
g'		+	0	-
g	0	12	$-\infty$	

Câu 43. Tập hợp các giá trị m để hàm số $y = mx^3 - x^2 + 3x + m - 2$ đồng biến trên $(-3; 0)$ là

- A. $\left[-\frac{1}{3}; 0\right)$. B. $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$. C. $\left(-\infty; \frac{-1}{3}\right)$. D. $\left[\frac{-1}{3}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3mx^2 - 2x + 3$. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 0)$ khi và chỉ khi:

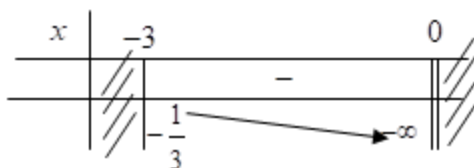
$y' \geq 0, \forall x \in (-3; 0)$ (Dấu "=" xảy ra tại hữu hạn điểm trên $(-3; 0)$)

$$\Leftrightarrow 3mx^2 - 2x + 3 \geq 0, \forall x \in (-3; 0)$$

$$\Leftrightarrow m \geq \frac{2x-3}{3x^2} = g(x) \quad \forall x \in (-3; 0)$$

Ta có: $g'(x) = \frac{-2x+6}{3x^3}; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$

BBT



$$\text{Vậy } m \geq \max_{x \in (-3; 0)} g(x) = -\frac{1}{3}.$$

Câu 44. Tìm m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx + m - 1$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

- A. $m \leq -1$. B. $m \leq 1$. C. $m < 1$. D. $m > -1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = -3x^2 + 6x + 3m = 3(-x^2 + 2x + m)$.

Vì hàm số liên tục trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ nên hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$ cũng tương đương hàm số nghịch trên $[0; +\infty)$ khi chỉ khi $y' \leq 0, \forall x \in [0; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow -x^2 + 2x + m \leq 0 \quad \forall x \in [0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \leq x^2 - 2x = f(x) \quad \forall x \in [0; +\infty) \Leftrightarrow m \leq \min_{x \in [0; +\infty)} f(x) = f(1) = -1.$$

Câu 45. (MĐ 104 NĂM 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+3m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -6)$.

- A. 2 B. 6 C. Vô số D. 1

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = (-\infty; -3m) \cup (-3m; +\infty)$.

Ta có $y' = \frac{3m-2}{(x+3m)^2}$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -6) \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-2 > 0 \\ -6 \leq -3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2}{3} \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} < m \leq 2.$

Mà m nguyên nên $m = \{1; 2\}$.

Câu 46. (MĐ 103 NĂM 2017-2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+1}{x+3m}$ nghịch biến trên khoảng $(6; +\infty)$?

A. 0

B. 6

C. 3

D. Vô số

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-3m\}$; $y' = \frac{3m-1}{(x+3m)^2}$.

Hàm số $y = \frac{x+1}{x+3m}$ nghịch biến trên khoảng $(6; +\infty)$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} y' < 0 \\ (6; +\infty) \subset D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-1 < 0 \\ -3m \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{3} \\ m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m < \frac{1}{3}.$$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0\}$.

Câu 47. (MĐ 101 NĂM 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -10)$?

A. 2

B. Vô số

C. 1

D. 3

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-5m\}$.

$$y' = \frac{5m-2}{(x+5m)^2}.$$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -10)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} 5m-2 > 0 \\ -5m \in [-10; +\infty) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2}{5} \\ -5m \geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{5} < m \leq 2.$$

Vì m nguyên nên $m \in \{1; 2\}$. Vậy có 2 giá trị của tham số m .

Câu 48. (MĐ 104 NĂM 2017) Cho hàm số $y = \frac{mx+4m}{x+m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S .

A. 4

B. Vô số

C. 3

D. 5

Lời giải

Chọn D

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}; y' = \frac{m^2 - 4m}{(x+m)^2}.$$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định khi $y' < 0, \forall x \in D \Leftrightarrow m^2 - 4m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên có 3 giá trị thỏa mãn.

Câu 49. (MĐ 102 NĂM 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10; +\infty)$?

A. Vô số

B. 4

C. 5

D. 3

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-5m\}$.

$$y' = \frac{5m-6}{(x+5m)^2}$$

Hàm số nghịch biến trên $(10; +\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} y' < 0, \forall x \in D \\ -5m \notin (10; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m-6 < 0 \\ -5m \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{6}{5} \\ m \geq -2 \end{cases}.$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1\}$.

Câu 50. (MĐ 105 NĂM 2017) Cho hàm số $y = \frac{mx-2m-3}{x-m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S .

A. Vô số

B. 3

C. 5

D. 4

Lời giải

Chọn B

$y' = \frac{-m^2+2m+3}{(x-m)^2}$ hàm số đồng biến trên khoảng xác định khi $-1 < m < 3$ nên có 3 giá trị của m nguyên

Câu 51. (ĐMH NĂM 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$

B. $m \leq 0$

C. $1 \leq m < 2$

D. $m \geq 2$

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \tan x$, vì $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in (0; 1)$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t-2}{t-m} \forall t \in (0; 1)$. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$

Ta có $f'(t) = \frac{2-m}{(t-m)^2}$.

Ta thấy hàm số $t(x) = \tan x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$. Nên để hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$

đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ khi và chỉ khi: $f'(t) > 0 \forall t \in (0; 1)$

$$\Leftrightarrow \frac{2-m}{(t-m)^2} > 0 \forall t \in (0; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2-m > 0 \\ m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m \leq 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; 0] \cup [1; 2) \\ m \geq 1 \end{cases}$$

CASIO: Đạo hàm của hàm số ta được $y' = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}(\tan x - m) - (\tan x - 2) \frac{1}{\cos^2 x}}{(\tan x - m)^2}$

Ta nhập vào máy tính thành $y' \setminus \text{CALC} \setminus \text{Calc } x = \frac{\pi}{8}$ (Chọn giá trị này thuộc $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$)

$\setminus = \setminus m = ?$ 1 giá trị bất kỳ trong 4 đáp án.

Đáp án D $m \geq 2$. Ta chọn $m = 3$. Khi đó $y' = -0,17 < 0$ (Loại)

Đáp án C $1 \leq m < 2$ Ta chọn $m = 1,5$. Khi đó $y' = 0,49 > 0$ (nhận)

Đáp án B $m \geq 0$ Ta chọn $m = 0$. Khi đó $y' = 13,6 > 0$ (nhận)

Vậy đáp án B và C đều đúng nên chọn đáp án **A**.

Câu 52. Tìm m để hàm số $y = \frac{\cos x - 2}{\cos x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

A. $\begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -2 \end{cases}$

B. $m > 2$

C. $\begin{cases} m \leq 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{cases}$

D. $-1 < m < 1$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = \frac{2-m}{(\cos x - m)^2} \cdot (-\sin x)$, $\sin x > 0 \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Do đó: Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2-m > 0 \\ \cos x - m \neq 0 \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{cases}.$$

Câu 53. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số để hàm số $y = \frac{\cos x - 3}{\cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

- A. $\begin{cases} 0 \leq m < 3 \\ m \leq -1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} 0 < m < 3 \\ m < -1 \end{cases}$. C. $m \leq 3$. D. $m < 3$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\cos x \neq m$. Ta có: $y' = \frac{(-m+3)}{(\cos x - m)^2} \cdot (-\sin x) = \frac{(m-3)}{(\cos x - m)^2} \cdot \sin x$

Vì $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow \sin x > 0, (\cos x - m)^2 > 0, \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right): \cos x \neq m$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Leftrightarrow y' < 0 \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-3 < 0 \\ \cos x \neq m \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-3 < 0 \\ m \notin (-1; 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq m < 3 \\ m \leq -1 \end{cases}.$$

Chú ý: Tập giá trị của hàm số $y = \cos x, \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ là $(-1; 0)$.

Câu 54. Cho hàm số $y = \frac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong khoảng $(-10; 10)$ sao cho hàm số đồng biến trên $(-8; 5)$?

- A. 14. B. 13. C. 12. D. 15.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = -\sqrt{6-x}$ vì $x \in (-8; 5) \Rightarrow t \in (-\sqrt{14}; -1)$ và $t = -\sqrt{6-x}$ đồng biến trên $(-8; 5)$.

Hàm số trở thành $y = \frac{-(4-m)t+3}{-t+m}$ tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\} \Rightarrow y' = \frac{m^2 - 4m + 3}{(-t+m)^2}$.

$$\text{Để hàm số đồng biến trên khoảng } (-\sqrt{14}; -1) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + 3 > 0 \\ m \leq -\sqrt{14} \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\sqrt{14} \\ -1 \leq m < 1 \\ m > 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m = \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -1, 0, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \text{ có 14 giá trị.}$$

Câu 55. (ĐMH 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = x^3 + mx - \frac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

A. 0

B. 4

C. 5

D. 3

Lời giải

Chọn B

$$y' = 3x^2 + m + \frac{1}{x^6}$$

Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' = 3x^2 + m + \frac{1}{x^6} \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow -3x^2 - \frac{1}{x^6} \leq m, \forall x \in (0; +\infty). \text{ Xét hàm số } g(x) = -3x^2 - \frac{1}{x^6} \leq m, x \in (0; +\infty)$$

$$g'(x) = -6x + \frac{6}{x^7} = \frac{-6(x^8 - 1)}{x^7}, g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1(\text{loại}) \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
$g(x)$	$-\infty$	-4	$-\infty$

Dựa vào BBT ta có $m \geq -4$, suy ra các giá trị nguyên âm của tham số m là $-4; -3; -2; -1$

Câu 56. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \frac{1}{5}m^2x^5 - \frac{1}{3}mx^3 + 10x^2 - (m^2 - m - 20)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. $\frac{5}{2}$.

B. -2 .

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f'(x) &= m^2x^4 - mx^2 + 20x - (m^2 - m - 20) = m^2(x^4 - 1) - m(x^2 - 1) + 20(x + 1) \\ &= m^2(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) - m(x - 1)(x + 1) + 20(x + 1) \end{aligned}$$

$$= (x+1) \left[m^2 (x-1)(x^2+1) - m(x-1) + 20 \right]$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ m^2 (x-1)(x^2+1) - m(x-1) + 20 = 0 (*) \end{cases}$$

Ta có $f'(x) = 0$ có một nghiệm đơn là $x = -1$, do đó nếu $(*)$ không nhận $x = -1$ là nghiệm thì $f'(x)$ đổi dấu qua $x = -1$. Do đó để $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ hay $(*)$ nhận $x = -1$ làm nghiệm (bậc lẻ).

$$\text{Suy ra } m^2(-1-1)(1+1) - m(-1-1) + 20 = 0 \Leftrightarrow -4m^2 + 2m + 20 = 0.$$

Tổng các giá trị của m là $\frac{1}{2}$.

Câu 57. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x + 1 + \frac{m}{x-2}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó là

- A. $[0; 1)$. B. $(-\infty; 0]$. C. $[0; +\infty) \setminus \{1\}$. D. $(-\infty; 0)$.

Lời giải

Chọn B

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó khi và chỉ khi:

$$y' \geq 0, \forall x \in D \Leftrightarrow 1 - \frac{m}{(x-2)^2} \geq 0, \forall x \in D$$

$$\Leftrightarrow m \leq (x-2)^2, \forall x \in D$$

Xét hàm số $f(x) = (x-2)^2$ ta có:

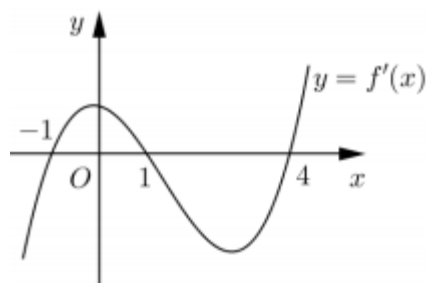
$$f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Vậy, để hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó thì $m \leq 0$.

Câu 58. (ĐMH 2018) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến trên khoảng



A. $(2; +\infty)$

B. $(-2; 1)$

C. $(-\infty; -2)$

D. $(1; 3)$

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Ta thấy $f'(x) < 0$ với $\begin{cases} x \in (1; 4) \\ x < -1 \end{cases}$ nên $f(x)$ nghịch biến trên $(1; 4)$ và $(-\infty; -1)$ suy ra

$g(x) = f(-x)$ đồng biến trên $(-4; -1)$ và $(1; +\infty)$. Khi đó $f(2-x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 1)$ và $(3; +\infty)$

Cách 2:

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 1 < x < 4 \end{cases}$.

Ta có $(f(2-x))' = (2-x)' \cdot f'(2-x) = -f'(2-x)$.

Để hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến thì $(f(2-x))' > 0 \Leftrightarrow f'(2-x) < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x < -1 \\ 1 < 2-x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -2 < x < 1 \end{cases}.$$

Câu 59. (MĐ 104 - 2019) Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(5-2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(3; 4)$.

B. $(1; 3)$.

C. $(-\infty; -3)$.

D. $(4; 5)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = f'(5-2x) = -2f'(5-2x)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow -2f'(5-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5-2x = -3 \\ 5-2x = -1 \\ 5-2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 3 \\ x = 2 \end{cases}.$$

$$f'(5-2x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5-2x < -3 \\ -1 < 5-2x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ 2 < x < 3 \end{cases}; f'(5-2x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5-2x > 1 \\ -3 < 5-2x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ 3 < x < 4 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	2	3	4	$+\infty$
y'	-	0	+	0	+
y					

Dựa vào bảng biến thiên hàm số $y = f(5-2x)$ đồng biến trên khoảng $(4;5)$.

Câu 60. (MĐ 103 - 2019) Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	+

Hàm số $y = f(3-2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0;2)$. B. $(2;3)$. C. $(-\infty;-3)$. D. $(3;4)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = -2.f'(3-2x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x \leq -3 \\ -1 \leq 3-2x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Câu 61. (MĐ 102 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	+

Hàm số $y = f(5-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(3;5)$. B. $(5;+\infty)$. C. $(2;3)$. D. $(0;2)$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ suy ra hàm số $y = f(5-2x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = f(5-2x)$ có $y' = -2.f'(5-2x), \forall x \in \mathbb{R}$.

$$y' \leq 0 \Leftrightarrow f'(5-2x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq 5-2x \leq -1 \\ 5-2x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x \leq 4 \\ x \leq 2 \end{cases}.$$

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;2);(3;4)$. Do đó B phương án chọn.

Câu 62. (MĐ 101 - 2019) Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	+

Hàm số $y = f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2;1)$. B. $(2;4)$. C. $(1;2)$. D. $(4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = -2.f'(3-2x).$$

Hàm số nghịch biến khi $y' \leq 0 \Leftrightarrow -2.f'(3-2x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq 3-2x \leq -1 \\ 3-2x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq 3 \\ x \leq 1 \end{cases}.$$

Câu 63. Cho hàm số $f'(x)$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-2;1)$. **B.** $(-4;-3)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: Đặt: $y = g(x) = f(x^2 + 2x)$; $g'(x) = [f(x^2 + 2x)]' = (2x + 2) \cdot f'(x^2 + 2x)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x + 2) \cdot f'(x^2 + 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2 = 0 \\ f'(x^2 + 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x = -2(VN) \\ x^2 + 2x = 1 \\ x^2 + 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -1 - \sqrt{2} \\ x = -1 + \sqrt{2} \\ x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

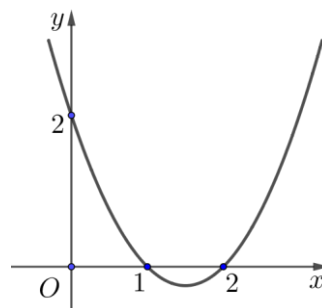
(Trong đó: $x = -1 - \sqrt{2}$; $x = -1 + \sqrt{2}$ là các nghiệm bội chẵn của PT: $x^2 + 2x = 1$)

+ Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	$-1 - \sqrt{2}$	-1	$-1 + \sqrt{2}$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$							

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;-1)$.

Câu 64. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$. Hàm số $g(x) = f(x - x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?



A. $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

B. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$.

C. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

D. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

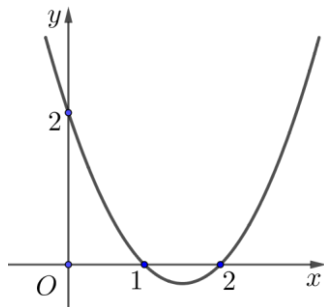
Chọn C

Ta có: $g'(x) = (1-2x)f'(x-x^2)$.

Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên $(a; b) \Leftrightarrow g'(x) \leq 0 \forall x \in (a; b)$ và bằng 0 tại hữu hạn điểm.

Ta có $g'(-1) = 3f'(-2) > 0 \Rightarrow$ Loại đáp án A, B và D

Câu 65. Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $y = f(2-x^2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(-\infty; 0)$.

B. $(0; 1)$.

C. $(1; 2)$.

D. $(0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = f(2-x^2)$ có $y' = -2x \cdot f'(2-x^2)$

$$y' = -2x \cdot f'(2-x^2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1 < 2-x^2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x < -1 \end{cases}$$

Do đó hàm số đồng biến trên $(0; 1)$.

Câu 66. (ĐMH NĂM 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	+	0	-	0	+	

Hàm số $y = 3f(x+2) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; -1)$.

B. $(-1; 0)$.

C. $(0; 2)$.

D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 3[f'(x+2) - (x^2 - 3)]$

Với $x \in (-1; 0) \Rightarrow x+2 \in (1; 2) \Rightarrow f'(x+2) > 0$, lại có $x^2 - 3 < 0 \Rightarrow y' > 0; \forall x \in (-1; 0)$

Vậy hàm số $y = 3f(x+2) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Chú ý:

+) Ta xét $x \in (1; 2) \subset (1; +\infty) \Rightarrow x+2 \in (3; 4) \Rightarrow f'(x+2) < 0; x^2 - 3 > 0$

Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$ nên loại hai phương án A, D.

+) Tương tự ta xét

$x \in (-\infty; -2) \Rightarrow x+2 \in (-\infty; 0) \Rightarrow f'(x+2) < 0; x^2 - 3 > 0 \Rightarrow y' < 0; \forall x \in (-\infty; -2)$

Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ nên loại hai phương án B.

Câu 67. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$			
$f'(x)$	-	0	+	0	+	0	-	0	+

Hàm số $y = 2f(1-x) + \sqrt{x^2+1} - x$ nghịch biến trên những khoảng nào dưới đây

A. $(-\infty; -2)$. B. $(-\infty; 1)$. C. $(-2; 0)$. D. $(-3; -2)$.

Lời giải

Chọn C

$$y' = -2f'(1-x) + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1.$$

Có $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 < 0, \forall x \in (-2; 0)$.

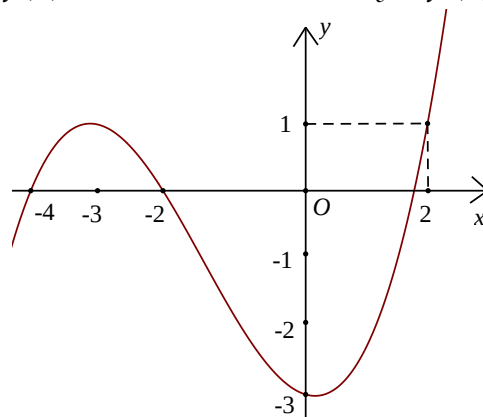
Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	$+\infty$		
$f'(1-x)$		+	0	-	0	+	0	-

$$\Rightarrow -2f'(1-x) < 0, \forall x \in (-2; 0)$$

$$\Rightarrow -2f'(1-x) + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 < 0, \forall x \in (-2; 0).$$

Câu 68. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.



Hàm số $y = 3f(x) + x^3 - 6x^2 + 9x$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

- A. $(0; 2)$. B. $(-1; 1)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(-2; 0)$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, (a \neq 0); f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$.

Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ đi qua các điểm $(-4; 0), (-2; 0), (0; -3), (2; 1)$ nên ta có:

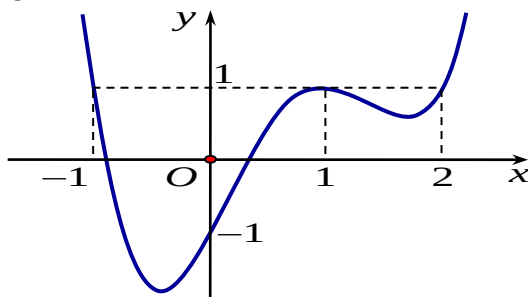
$$\begin{cases} -256a + 48b - 8c + d = 0 \\ -32a + 12b - 4c + d = 0 \\ d = -3 \\ 32a + 12b + 4c + d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{96} \\ b = \frac{7}{24} \\ c = -\frac{7}{24} \\ d = -3 \end{cases}$$

Do đó hàm số $y = 3f(x) + x^3 - 6x^2 + 9x; y' = 3(f'(x) + x^2 - 4x + 3) = 3\left(\frac{5}{24}x^3 + \frac{15}{8}x^2 - \frac{55}{12}x\right)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -11 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}. \text{Hàm số đồng biến trên các khoảng } (-11; 0) \text{ và } (2; +\infty).$$

Câu 69. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số

$g(x) = f(x-1) + \frac{2019-2018x}{2018}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $(2; 3)$. B. $(0; 1)$. C. $(-1; 0)$. D. $(1; 2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = f'(x-1) - 1$.

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x-1) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow f'(x-1) \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \leq -1 \\ x-1 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 3 \end{cases}.$$

Từ đó suy ra hàm số $g(x) = f(x-1) + \frac{2019-2018x}{2018}$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Câu 70. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	-1	2	4	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = -2f(x) + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A. $(-4; 2)$. B. $(-1; 2)$. C. $(-2; -1)$. D. $(2; 4)$.

Lời giải

Chọn B

Xét $y = g(x) = -2f(x) + 2019$.

$$\text{Ta có } g'(x) = (-2f(x) + 2019)' = -2f'(x), \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$, ta có bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$	-2	-1	2	4	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 2)$.

----- HẾT -----

CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

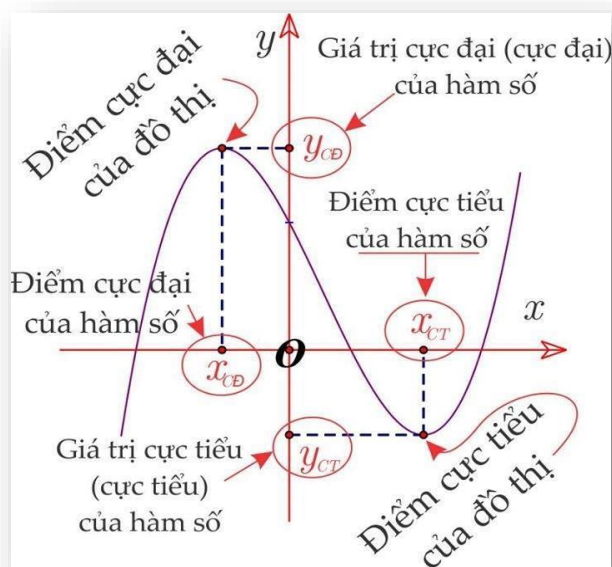
Định nghĩa 01.

Giả sử hàm số f xác định trên tập K và $x_0 \in K$. Ta nói:

- x_0 là *điểm cực tiểu* của hàm số f nếu tồn tại $(a;b)$ chứa x_0 sao cho $(a;b) \subset K$ và $f(x) > f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là *giá trị cực tiểu* của hàm số f .
- x_0 là *điểm cực đại* của hàm số f nếu tồn tại $(a;b)$ chứa x_0 sao cho $(a;b) \subset K$ và $f(x) < f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là *giá trị cực đại* của hàm số f .

Chú ý:

Tên gọi	Ký hiệu
↪ Điểm cực đại và điểm cực tiểu gọi chung là <i>điểm cực trị</i> .	x_0
↪ Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu gọi chung là <i>cực trị (giá trị cực trị)</i> .	y_0
↪ Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là <i>điểm cực trị của hàm số</i> .	$M(x_0; f(x_0))$



Định lý 01. (điều kiện cần)

Giả sử hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 .

- Khi đó, nếu $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Chú ý:

- ① Đạo hàm $f'(x)$ có thể bằng 0 tại điểm x_0 nhưng hàm số f không đạt cực trị tại điểm x_0 .
- ② Hàm số có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm.
- ③ Hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc tại đó hàm số không có đạo hàm.

Định lý 02. (điều kiện cần)

Giả sử hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0 .

○ Khi đó, nếu hàm số f có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

□ Nếu $\begin{cases} f'(x) > 0 & \forall x \in (x_0 - h; x_0) \\ f'(x) < 0 & \forall x \in (x_0; x_0 + h) \end{cases} \rightarrow x_0$ là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

□ Nếu $\begin{cases} f'(x) < 0 & \forall x \in (x_0 - h; x_0) \\ f'(x) > 0 & \forall x \in (x_0; x_0 + h) \end{cases} \rightarrow x_0$ là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
y'	—	0	+
y			

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
y'	+	0	—
y			

Định lý 03.

Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$ với $h > 0$. Khi đó:

□ Nếu $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại x_0 .

□ Nếu $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại x_0 .

Từ **định lý 03**, ta có một quy tắc khác để tìm **cực trị** của hàm số

☑ **Bước 1:** Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.

☑ **Bước 2:** Tìm các nghiệm x_i ($i = 1; 2; \dots$) của phương trình $f'(x) = 0$.

☑ **Bước 3:** Tính $f''(x)$ và tính $f''(x_i)$.

* Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_i .

* Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_i .

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP.

2.1. Cực trị của hàm đa thức bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

2.1.1. Cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước.

✎ Xét hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$). Có đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ ($a \neq 0$).

Điều kiện		Cách giải quyết
Có hai cực trị		$b^2 - 3ac > 0$
Không có cực trị (hàm số đơn điệu trên $\mathbb{R}$).		$b^2 - 3ac \leq 0$
Có hai cực trị trái dấu		$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ P = x_1.x_2 = \frac{c}{3a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ ac < 0 \end{cases}$
Có hai cực trị cùng dấu		$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ P = x_1.x_2 = \frac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ ac > 0 \end{cases}$
Có hai cực trị cùng dấu dương		$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} > 0 \\ P = x_1.x_2 = \frac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ ab < 0 \\ ac > 0 \end{cases}$
Có hai cực trị cùng dấu âm		$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} < 0 \\ P = x_1.x_2 = \frac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ ab > 0 \\ ac > 0 \end{cases}$
Có hai cực trị $x_1; x_2$ thỏa	$x_1 < \alpha < x_2$	$\Leftrightarrow (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) < 0 \Leftrightarrow x_1.x_2 - \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2 < 0$.
	$x_1 < x_2 < \alpha$	$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \\ x_1 + x_2 < 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1.x_2 - \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 2\alpha \end{cases}$
	$\alpha < x_1 < x_2$	$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \\ x_1 + x_2 > 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1.x_2 - \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 2\alpha \end{cases}$

2.1.2. Cực trị thỏa mãn điều kiện với đường thẳng.

2.1.2.1. Cực trị nằm cùng phía, khác phía so với một đường thẳng.

Tổng quát: VTTĐ giữa 2 điểm với đường thẳng

Cho 2 điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ và đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$.

- ☑ Nếu $(ax_A + by_A + c)(ax_B + by_B + c) < 0$ thì hai điểm A, B nằm khác phía so với đường thẳng Δ .
- ☑ Nếu $(ax_A + by_A + c)(ax_B + by_B + c) > 0$ thì hai điểm A, B nằm cùng phía so với đường thẳng Δ .

Các điểm cực trị của đồ thị nằm **cùng phía đối với trục Oy**
 $\Leftrightarrow$ hàm số có 2 cực trị cùng dấu
 $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu

Các điểm cực trị của đồ thị nằm **khác phía đối với trục Oy**
 $\Leftrightarrow$ hàm số có 2 cực trị trái dấu
 $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu

Các điểm cực trị của đồ thị nằm **cùng phía đối với trục Ox**
 $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $y_{CD} \cdot y_{CT} > 0$.

① Cùng về phía trên đối với trục Ox.

$$\Leftrightarrow y' = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt và } \begin{cases} y_{CD} \cdot y_{CT} > 0 \\ y_{CD} + y_{CT} > 0 \end{cases}$$

② Cùng về phía dưới đối với trục Ox.

$$\Leftrightarrow y' = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt và } \begin{cases} y_{CD} \cdot y_{CT} > 0 \\ y_{CD} + y_{CT} < 0 \end{cases}$$

Các điểm cực trị của đồ thị nằm **khác phía đối với trục Ox**
 $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt và $y_{CD} \cdot y_{CT} < 0$

Hoặc

$$\Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ có 3 nghiệm phân biệt (khi nhầm được nghiệm).}$$

Đặc biệt:

2.1.2.2. Phương trình đường thẳng qua các hai cực trị:

$$g(x) = \left(\frac{2c}{3} - \frac{2b^2}{9a} \right) x + d - \frac{bc}{9a} \quad \text{hoặc} \quad g(x) = y - \frac{y' \cdot y''}{18a} \quad \text{hoặc} \quad g(x) = y - \frac{y' \cdot y''}{3y'''}$$

2.1.2.3. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc 3 là:

$$AB = \sqrt{\frac{4e + 16e^3}{a}} \quad \text{với } e = \frac{b^2 - 3ac}{9a}$$

2.2. Cực trị của hàm đa thức bậc bốn (trùng phương) $y = ax^4 + bx^2 + c$.

2.2.1. Cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước.

✎ Xét hàm số bậc bốn $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$).

Điều kiện

Tổng quát

Cụ thể

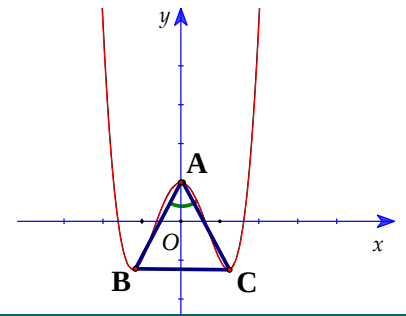
Có một điểm cực trị (một cực trị)	$ab \geq 0$	Đúng một cực trị và cực trị là cực tiểu	$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$
		Đúng một cực trị và cực trị là cực đại	$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$
Có ba điểm cực trị (hai cực trị).	$ab < 0$	Hai cực tiểu và một cực đại	$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$
		Một cực tiểu và hai cực đại	$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$

2.2.2. Cực trị thỏa mãn điều kiện hình học.

Giả sử hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 3 cực trị: $A(0; c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ tạo thành tam

giác ABC thỏa mãn đủ kiện: $ab < 0$. Đặt $BAC = \alpha$.

Tổng quát: $\cot^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{-b^3}{8a}$



DỮ KIẾN CỤ THỂ		CÔNG THỨC THỎA MÃN $ab < 0; c \neq 0$
Tính chất (vuông/đều/nhọn)	$\triangle ABC$ vuông cân tại A .	$b^3 = -8a$.
	$\triangle ABC$ đều.	$b^3 = -24a$.
	$\triangle ABC$ có 3 góc nhọn.	$b(8a + b^3) > 0$.
Diện tích	$\triangle ABC$ có $S_{\triangle ABC} = S_0$.	$32a^3(S_0)^2 + b^5 = 0$.
	$\triangle ABC$ có $\max(S_0)$.	$S_0 = \sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}$.
Thỏa độ dài cạnh	$\triangle ABC$ có $BC = m_0$.	$am_0^2 + 2b = 0$.
	$\triangle ABC$ có $AB = AC = n_0$.	$16a^2n_0^2 - b^4 + 8ab = 0$.
	$\triangle ABC$ có $BC = kAB = kAC$.	$b^3.k^2 - 8a(k^2 - 4) = 0$.
Trọng/trục tâm	$\triangle ABC$ có trọng tâm O .	$b^2 = 6ac$.
	$\triangle ABC$ có trục tâm O .	$b^3 + 8a - 4ac = 0$.

Nội/ngoại tiếp đường tròn	$\triangle ABC$ có bán kính đường tròn nội tiếp $r_{\triangle ABC} = r_0$.	$r = \frac{b^2}{4 a \left(1 + \sqrt{1 - \frac{b^3}{8a}}\right)}.$
	$\triangle ABC$ có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R_{\triangle ABC} = R$.	$R = \frac{b^3 - 8a}{8 a b}.$
	$\triangle ABC$ có O là tâm đường tròn nội tiếp	$b^3 - 8a - 4abc = 0.$
	$\triangle ABC$ có O là tâm đường tròn ngoại tiếp	$b^3 - 8a - 8abc = 0.$
Phương trình đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là: $x^2 + y^2 - \left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a} + c\right)y + c\left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}\right) = 0$		
Liên quan trục tọa độ	$\triangle ABC$ có cực trị $B, C \in Ox$	$b^2 = 4ac$
	$\triangle ABC$ có điểm cực trị cách đều Ox .	$b^2 = 8ac.$
	Trục hoành chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau	$b^2 = 4\sqrt{2} ac .$
Liên quan tứ giác	$\triangle ABC$ cùng gốc O tạo thành hình thoi	$b^2 = 2ac.$

III. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Dạng toán 1. Tìm cực trị của hàm số $y=f(x)$ khi cho BBT hoặc Đồ Thị

Phương pháp giải

- Đề cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ hoặc Bảng biến thiên $\rightarrow$ nhìn vị trí “cù chỗ”:
 - ☑ Thấy “đi lên” rồi “đi xuống” $\rightarrow$ “cù chỗ” là cực đại.
 - ☑ Thấy “đi xuống” rồi “đi lên” $\rightarrow$ “cù chỗ” là cực tiểu.
- Đề cho bảng xét dấu $f'(x) \rightarrow$ nếu đề hỏi:
 - ☑ Số điểm cực trị $\rightarrow$ đếm số lần $f'(x)$ đổi dấu ($f'(x)$ đổi dấu bao nhiêu lần thì $f(x)$ có bấy nhiêu cực trị).
 - ☑ Số điểm cực đại/cực tiểu $\rightarrow$ từ bảng xét dấu của $f'(x)$ “phác họa” đường đi của $f(x)$ rồi kết luận.

 **Chú ý:**

Tên gọi	Ký hiệu
↻ Điểm cực đại và điểm cực tiểu gọi chung là điểm cực trị .	x_0
↻ Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu gọi chung là cực trị (giá trị cực trị) .	y_0
↻ Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị của hàm số .	$M(x_0; f(x_0))$

Khi đó ta có hệ quả:

□ Khoảng cách giữa:

① Hai điểm cực trị của hàm số:

② Hai cực trị của hàm số:

③ Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số:

Công thức

$$|x_2 - x_1|$$

$$|y_2 - y_1|$$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ví dụ 01.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'		0	0	
	$+$	$-$	$+$	
y		5	-1	
	$-\infty$		$+\infty$	

Điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$ là

- A. $x = -1$. B. $x = 5$. C. $x = 1$. D. $x = 0$.

Lời giải

Chọn D

Điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$ là $x = 0$.

Ví dụ 02.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

Giá trị cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là

- A. $y = -3$. B. $y = -2$.
C. $y = -1$. D. $y = 0$.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-2	-3	$+\infty$	

Lời giải

Chọn A

Giá trị cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là $y = -3$.

Ví dụ 03.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 0.
B. 2.
C. 1.
D. 3.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	2		$+\infty$		$+\infty$
		$-\infty$		-2	

Lời giải

Chọn C

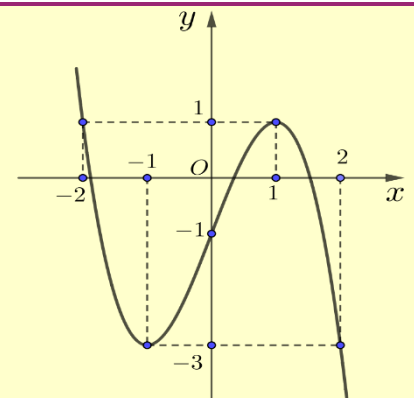
Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 1 lần nên đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực trị.

Ví dụ 04.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên.

Giá trị cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là

- A. $y = -3$.
B. $x = 1$.
C. $x = -1$.
D. $(-1; -3)$.



Lời giải

Chọn A

Giá trị cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là $y = -3$.

Ví dụ 05.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Thực hiện các yêu cầu sau:

1. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị:

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

2. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu:

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

3. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại:

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

Lời giải

1. Chọn C

Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 2 lần nên đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị.

2. Chọn B

Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương 1 lần nên đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực tiểu.

3. Chọn A

Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm 1 lần nên đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực đại.

Ví dụ 06.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên.

Thực hiện các yêu cầu sau:

1. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là:

A. $\sqrt{2}$.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

2. Khoảng cách giữa hai cực trị của hàm số $y = f(x)$ là:

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. $\frac{1}{2}$.

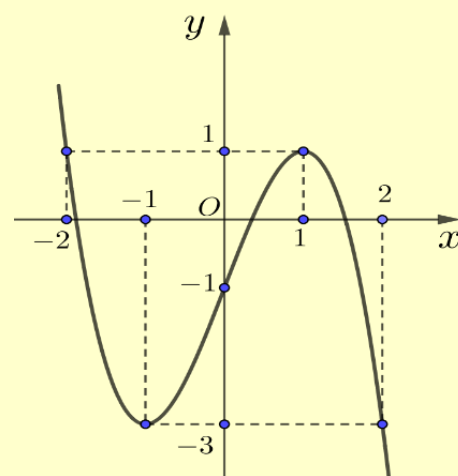
3. Khoảng cách giữa điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là:

A. $\frac{2}{5}$.

B. $2\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{2}$.

D. $2\sqrt{5}$.



Lời giải

Từ hình ta thấy $(-1; -3)$ và $(1; 1)$ lần lượt là điểm cực tiểu và điểm cực đại của ĐTHS.

1. Chọn C

Khi đó khoảng cách giữa hai điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là: $|1 - (-1)| = |2| = 2$.

2. Chọn B

Khi đó khoảng cách giữa hai cực trị của hàm số $y = f(x)$ là: $|1 - (-3)| = |4| = 4$.

3. Chọn D

Khi đó khoảng cách giữa điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là:

$$\sqrt{(1 - (-1))^2 + (1 - (-3))^2} = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}.$$

Dạng toán 2. Tìm cực trị của hàm số tường minh.

Phương pháp giải

□ **Quy tắc 01:**

- **Bước 1.** Tìm tập xác định của hàm số.
- **Bước 2.** Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.
- **Bước 3.** Lập bảng biến thiên.
- **Bước 4.** Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

□ **Quy tắc 02:**

- **Bước 1.** Tìm tập xác định của hàm số.
- **Bước 2.** Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x)=0$ và ký hiệu x_i ($i=1,2,3,\dots$) là các nghiệm của nó.
- **Bước 3.** Tính $f''(x) \rightarrow f''(x_i)$.
- **Bước 4.** Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i .
 - ↪ $f''(x_i) > 0 \rightarrow x_i$ là điểm cực tiểu.
 - ↪ $f''(x_i) < 0 \rightarrow x_i$ là điểm cực đại.

Ví dụ 01.

Tìm cực trị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Cách 1: Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			6		-26		$+\infty$
	$-\infty$						

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = -1$, $y_{CD} = 6$ và đạt cực tiểu tại $x = 3$, $y_{CT} = -26$.

Cách 2:

$$y'' = 6x - 6.$$

$$y''(-1) = -12 < 0 \Rightarrow \text{Hàm số đạt cực đại tại } x = -1, y_{CD} = 6.$$

$$y''(3) = 12 > 0 \Rightarrow \text{Hàm số đạt cực tiểu tại } x = 3, y_{CT} = -26.$$

Ví dụ 02.

Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 - 3$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 2x^3 - 4x = 2x(x^2 - 2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$.

Cách 1: Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$		-5	-3	-5		$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CD} = -3$ và đạt cực tiểu tại $x = \pm\sqrt{2}$, $y_{CT} = -5$.

Cách 2:

$$y'' = 6x^2 - 4.$$

$y''(0) = -4 < 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CD} = -3$.

$y''(\pm\sqrt{2}) = 8 > 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm\sqrt{2}$, $y_{CT} = -5$.

Ví dụ 03.

Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D$.

Do đó hàm số không có cực trị.

Ví dụ 04.

Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{x^2 - x + 2}{x - 2}$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta có $y' = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$; y' không xác định khi $x = 2$.

Cách 1:

Bảng biến thiên của hàm số :

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	-1	$+\infty$	7	$+\infty$	

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x=0$, $y_{CD} = -1$ và hàm số đạt cực tiểu tại $x=4$, $y_{CT} = 7$.

Cách 2:

Ta có $y'' = \frac{8}{(x-2)^3}$.

Vì $y''(0) = -1 < 0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=0$, $y_{CD} = -1$.

Vì $y''(4) = 1 > 0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=4$, $y_{CT} = 7$.

Ví dụ 05.

Tìm cực trị của hàm số $y = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & \text{khi } x \geq 2 \\ 3x^2 - x + 5 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$.

Lời giải

+) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

+) Xét trên khoảng $(2; +\infty)$ ta có : $y = x^2 - 2x + 2 \Rightarrow y' = 2x - 2 > 0, \forall x \in (2; +\infty)$.

+) Trên khoảng $(-\infty; 2)$ ta có : $y = 3x^2 - x + 5 \Rightarrow y' = 6x - 1$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{1}{6}$	2	$+\infty$
y'	-	0	+	+
y	$+\infty$	$\frac{59}{12}$	15	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = \frac{1}{6}$, $y_{CT} = \frac{59}{12}$.

Ví dụ 06.

Tìm cực trị của hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$.

Lời giải

Tập xác định: $\mathbb{R}$.

Ta có $y = |x^2 - 4x + 3| = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{khi } x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty) \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{khi } x \in (1; 3) \end{cases}$.

$$y' = \begin{cases} 2x-4 & \text{khi } x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty) \\ -2x+4 & \text{khi } x \in (1; 3) \end{cases}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$		
y'	-		+	0	-		+
y	$+\infty$			1			$+\infty$
					</		

Hàm số đạt cực đại tại $x=2$, $y_{CD}=1$; hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và tại $x=3$, $y_{CT}=0$.

Dạng toán 3. Tìm m để hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại x_0 .

Phương pháp giải

Bài toán: Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $f'(x) = 0$ đạt cực trị tại $x = x_0$.

○ **Bước 1.** Tính $f'(x) \rightarrow f''(x)$.

○ **Bước 2.** Thực hiện yêu cầu bài toán:

□ Hàm số đạt cực đại tại $x = x_0 \Rightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) < 0 \end{cases}$.

□ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = x_0 \Rightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) > 0 \end{cases}$.

Ví dụ 01.

Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.

A. $m = -1$

B. $m = -7$

C. $m=5$

D. $m=1$.

Lời giải

Chon C

Ta có $y' = x^2 - 2mx + (m^2 - 4)$; $y'' = 2x - 2m$.

Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} y'(3) = 0 \\ y''(3) < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9-6m+m^2-4=0 \\ 6-2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-6m+5=0 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1(L) \\ m=5(TM) \\ m > 3 \end{cases}$$

Vậy $m=5$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 02.

Tìm m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + mx + 1$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

- A. không tồn tại m . B. $m = \pm 1$. C. $m = 1$. D. $m \in \{1; 2\}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Để } x=1 \text{ là điểm cực tiểu của hàm số} \Leftrightarrow \begin{cases} y'(1)=0 \\ y''(1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-4m+m=0 \\ 6-4m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m<\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m=1.$$

Thử lại với $m=1$, ta có $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$; $y' = 3x^2 - 4x + 1$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+
y						



Quan sát bảng biến thiên ta thấy $m=1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 03.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$ đạt cực tiểu tại $x=2$.

- A. $m=0$. B. $m > 4$. C. $0 \leq m < 4$. D. $0 < m \leq 4$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = 3x^2 - 6x + m; y'' = 6x - 6.$$

$$\text{Hàm số đạt cực tiểu tại } x=2 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(2)=0 \\ y''(2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ 6>0 \end{cases} \Leftrightarrow m=0.$$

Ví dụ 03.

Tìm tất cả tham số thực m để hàm số $y = (m-1)x^4 - (m^2-2)x^2 + 2019$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

- A. $m=0$. B. $m=-2$. C. $m=1$. D. $m=2$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 4(m-1)x^3 - 2(m^2-2)x$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1 \Rightarrow y'(-1) = 0 \Leftrightarrow -4(m-1) + 2(m^2-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$.

Với $m = 0$, hàm số thành $y = -x^4 + 2x^2 + 2019$. Dễ thấy hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

Với $m = 2$, hàm số thành $y = x^4 - 2x^2 + 2019$. Dễ thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Vậy $m = 2$ thì hàm số $y = (m-1)x^4 - (m^2-2)x^2 + 2019$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Dạng toán 4. Tìm m để hàm số $y=f(x)$ có n cực trị.

Phương pháp giải

○ **Hàm bậc 3** $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$):

Có 2 điểm cực trị $b^2 - 3ac > 0$

Không có điểm cực trị $b^2 - 3ac \leq 0$

○ **Hàm bậc 4 (trùng phương)** $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$):

Có 3 điểm cực trị	$ab < 0$	Có 1 Đại – 2 Tiểu	$\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$
		Có 2 Đại – 1 Tiểu	$\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$
Có 1 điểm cực trị	$ab \geq 0$	Chỉ có Đại	$\begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$
		Chỉ có Tiểu	$\begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$

Ví dụ 01.

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = m^2x^4 - (m^2 - 2019m)x^2 - 1$ có đúng một cực trị?

A. 2019.

B. 2020.

C. 2018.

D. 2017.

Lời giải

Chọn A

Trường hợp 1: $m = 0 \Rightarrow y = -1$ nên hàm số không có cực trị.

$\Rightarrow m = 0$ (loại).

Trường hợp 2: $m \neq 0 \Rightarrow m^2 > 0$.

Hàm số $y = m^2x^4 - (m^2 - 2019m)x^2 - 1$ có đúng một cực trị

$$\Leftrightarrow -m^2 \cdot (m^2 - 2019m) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 2019m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2019.$$

Vì $m \neq 0 \Rightarrow 0 < m \leq 2019$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên có 2019 giá trị nguyên của tham số m thỏa đề.

Ví dụ 02.

Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(7m-3)x$. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có cực trị. Số phần tử của S là

- A. 2. B. 4. C. 0. D. Vô số.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 3(7m-3)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + 7m - 3 = 0.$$

Để hàm số không có cực trị thì

$$\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - (7m-3) \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 4.$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow S = \{1; 2; 3; 4\}$. Vậy S có 4 phần tử.

Ví dụ 03.

Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x + 1$ có hai cực trị là:

- A. $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$ B. $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$
C. $(-1; 2)$ D. $[-1; 2]$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m + 2$.

Để hàm số có hai cực trị thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt nên

$$y' > 0 \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases}$$

Ví dụ 04.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + mx^2 - 2mx + 1$ có hai điểm cực trị.

- A. $0 < m < 2$. B. $m > 2$. C. $m > 0$. D. $\begin{cases} m > 2 \\ m < 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = -x^2 + 2mx - 2m$

Hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + mx^2 - 2mx + 1$ có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 2m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 0 \end{cases}.$$

Ví dụ 05.

Cho hàm số $y = mx^4 - x^2 + 1$. Tập hợp các số thực m để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị là

- A. $(0; +\infty)$. B. $(-\infty; 0]$. C. $[0; +\infty)$. D. $(-\infty; 0)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Trường hợp 1: $m = 0$ hàm số đã cho trở thành $y = -x^2 + 1$ là một hàm bậc hai nên luôn có một cực trị.

Trường hợp 2: $m \neq 0$, ta có $y' = 4mx^3 - 2x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4mx^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(2mx^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2mx^2 - 1 = 0 (*) \end{cases}.$$

Để hàm số có đúng một cực trị thì phương trình $y' = 0$ có đúng 1 nghiệm.

Ycbt $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ có một nghiệm $x = 0$ hoặc vô nghiệm suy ra $m < 0$.

Vậy $m \leq 0$.

Dạng toán 5. Đường thẳng qua hai điểm cực trị.

Phương pháp giải

Bài toán: Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$:

○ Sử dụng một trong các cách sau:

$$\textcircled{1} \quad g(x) = \left(\frac{2c}{3} - \frac{2b^2}{9a} \right)x + d - \frac{bc}{9a}.$$

$$\textcircled{2} \quad g(x) = y - \frac{y' \cdot y''}{18a} = y - \frac{y' \cdot y''}{3y'''}.$$

③ Dùng phép chia đa thức: đề chia đạo $\rightarrow$ lấy dư.

Bài toán: Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$:

○ Sử dụng tính chất: Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số hữu tỷ $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ thì giá trị cực trị

tương ứng của hàm số là $y_0 = \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$ (đạo tử chia đạo mẫu).

Ví dụ 01.

Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB .

- A. $P(1;0)$. B. $M(0;-1)$. C. $N(1;-10)$. D. $Q(-1;10)$.

Lời giải

Chọn C

$$y' = 3x^2 - 6x - 9.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 6 \\ x = 3 \Rightarrow y = -26 \end{cases}$$

Ta có $A(-1;6), B(3;-26) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (4;-32)$ nên) Chọn -1.

Phương trình đường thẳng 0 là:

$$8(x+1)+1(y-6)=0 \Leftrightarrow 8x+y+2=0.$$

Thay tọa độ các điểm P, M, N, Q vào phương trình đường thẳng AB ta có điểm $N(1;-10)$ thuộc đường thẳng.

Ví dụ 02.

Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (3m+1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

- A. $\frac{1}{3}$. B. $-\frac{1}{6}$. C. $m = \frac{1}{6}$. D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$

$$\text{Có : } y' = 3x^2 - 6x, \quad y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)y' - 2x - 1.$$

Do đó, đường thẳng Δ qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số này có phương trình là $y = -2x - 1$.

$$\text{Để } d \text{ vuông góc với } \Delta \text{ thì } (3m+1) \cdot (-2) = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{6}.$$

Vậy giá trị cần tìm của m là $m = -\frac{1}{6}$.

Ví dụ 03.

Tìm tổng tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6m(1-2m)x$ song song đường thẳng $y = -4x$.

- A. $m = -\frac{1}{3}$. B. $m = \frac{2}{3}$. C. $m = -\frac{2}{3}$. D. $m = 1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6m(1-2m)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = 1-2m \end{cases}$.

Để hàm số có hai cực trị thì $m \neq 1-2m \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{3}$.

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(m; -7m^3 + 3m^2)$, $B(1-2m; 20m^3 - 24m^2 + 9m - 1)$.

Do đó $\overrightarrow{AB} = (1-3m; (3m-1)^3)$. Do đó AB có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = ((3m-1)^2; 1)$.

Do đó $AB: (3m-1)^2 x + y - 2m^3 + 3m^2 - m = 0 \Leftrightarrow y = -(3m-1)^2 x + 2m^3 - 3m^2 + m$.

Để đường thẳng AB song song với đường thẳng $y = -4x$ thì:

$$\begin{cases} -(3m-1)^2 = -4 \\ 2m^3 - 3m^2 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{1}{3} \\ m \neq 0 \\ m \neq \frac{1}{2} \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}.$$

Ví dụ 04.

Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{2x + 1}$.

A. $y = 2x + 2$.

B. $y = x + 1$.

C. $y = 2x + 1$.

D. $y = 1 - x$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$.

$y' = \frac{2x^2 + 2x - 4}{(2x + 1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 (\Rightarrow y = 2) \\ x = -2 (\Rightarrow y = -1) \end{cases}$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $M(1; 2)$ và $N(-2; -1)$.

Vậy phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của ĐTHS là: $y = x + 1$.

Cách 2: Phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị có dạng:

$y = \frac{(x^2 + 2x + 3)'}{(2x + 1)'} = \frac{2x + 2}{2} \rightarrow y = x + 1$.

Dạng toán 6. Cực trị hàm bậc ba thỏa điều kiện với đường thẳng.

Phương pháp giải

○ **Vị trí tương đối:**

Cho 2 điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ và đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$.

Xét biểu thức $T = (ax_A + by_A + c)(ax_B + by_B + c)$. Khi đó:

☑ Nếu $T < 0$ thì hai điểm A, B nằm khác phía so với đường thẳng Δ .

☑ Nếu $T > 0$ thì hai điểm A, B nằm cùng phía so với đường thẳng Δ .

○ **Đặc biệt**

① Các điểm cực trị của đồ thị nằm **cùng phía đối với trục Oy**

$\Leftrightarrow$ hàm số có 2 cực trị cùng dấu

$\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.

② Các điểm cực trị của đồ thị nằm **khác phía đối với trục Oy**

$\Leftrightarrow$ hàm số có 2 cực trị trái dấu

$\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

③ Các điểm cực trị của đồ thị nằm **cùng phía đối với trục Ox**

$\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $y_{CD} \cdot y_{CT} > 0$.

☑ Cùng **phía trên** đối với trục Ox $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt và $\begin{cases} y_{CD} \cdot y_{CT} > 0 \\ y_{CD} + y_{CT} > 0 \end{cases}$

☑ Cùng **phía dưới** đối với trục Ox $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt và $\begin{cases} y_{CD} \cdot y_{CT} > 0 \\ y_{CD} + y_{CT} < 0 \end{cases}$.

④ Các điểm cực trị của đồ thị nằm **khác phía đối với trục Ox**

$\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt và $y_{CD} \cdot y_{CT} < 0$

Hoặc

$\Leftrightarrow f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt (khi nhầm được nghiệm).

○ **Bài toán:** Hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng d .

○ **Bước 1.** Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Rightarrow m \in D_1$.

○ **Bước 2.** Tìm tọa độ 2 điểm cực trị A, B . Có 2 trường hợp thường gặp:

☞ **Trường hợp 1:** $y' = 0$ có nghiệm đẹp x_1, x_2 , tức có $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

☞ **Trường hợp 2:** $y' = 0$ không giải ra tìm được nghiệm. Khi đó ta cần viết phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị là Δ và lấy $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) \in \Delta$.

○ **Bước 3.** Gọi $I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Do A, B đối xứng qua d nên thỏa hệ $\begin{cases} \Delta \perp d \\ I \in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_d = 0 \\ I \in d \end{cases} \Rightarrow m \in D_2$.

○ **Bước 4.** Kết luận $m = D_1 \cap D_2$.

○ **Bài toán:** Hai điểm cực trị cách đều đường thẳng d .

○ **Bước 1.** Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Rightarrow m \in D_1$.

○ **Bước 2.** Tìm tọa độ 2 điểm cực trị A, B . Có 2 trường hợp thường gặp:

↳ **Trường hợp 1:** $y' = 0$ có nghiệm đẹp x_1, x_2 , tức có $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

↳ **Trường hợp 2:** $y' = 0$ không giải ra tìm được nghiệm. Khi đó ta cần viết phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị là Δ và lấy $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) \in \Delta$.

○ **Bước 3.** Do A, B cách đều đường thẳng d nên $d(A; d) = d(B; d) \Rightarrow m \in D_2$.

○ **Bước 4.** Kết luận $m = D_1 \cap D_2$.

Ví dụ 01.

Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn $OA = OB$ (O là gốc tọa độ)?

A. $m = \frac{3}{2}$.

B. $m = 3$.

C. $m = \frac{1}{2}$.

D. $m = \frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$y' = 3x^2 - 6x, y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Do đó đồ thị hàm số đã cho luôn có hai điểm cực trị lần lượt có tọa độ là $A(0; m)$ và $B(2; -4 + m)$.

$$\text{Ta có } OA = OB \Leftrightarrow \sqrt{0^2 + m^2} = \sqrt{2^2 + (4 - m)^2} \Leftrightarrow m^2 = 4 + (4 - m)^2 \Leftrightarrow 20 - 8m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}.$$

Ví dụ 02.

Cho hàm số $y = x^3 - (m + 6)x^2 + (2m + 9)x - 2$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành.

A. $\begin{cases} m \geq -2 \\ m \leq -6 \end{cases}$.

B. $m \geq -2$.

C. $m \leq -6$.

D. $\begin{cases} m > -2 \\ m < -6 \\ m \neq \frac{-3}{2} \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

$$y' = 3x^2 - 2(m+6)x + 2m + 9.$$

$$y' = 3x^2 - 2(m+6)x + 2m + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{2m+9}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Hàm số có 2 cực trị} \Leftrightarrow \frac{2m+9}{3} \neq 1 \Leftrightarrow m \neq -3. \quad (1)$$

$$y(1) = m + 2.$$

$$y\left(\frac{2m+9}{3}\right) = -m \frac{(2m+9)^2}{27} - 2.$$

$$\text{Ycbt} \Leftrightarrow y(1) \cdot y\left(\frac{2m+9}{3}\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow (m+2) \cdot \left[-m \frac{(2m+9)^2}{27} - 2 \right] < 0 \Leftrightarrow (m+2) \cdot (4m^3 + 36m^2 + 81m + 54) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -6 \\ m > -2 \\ m \neq \frac{-3}{2} \end{cases}. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) ta có ycbt} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m < -6 \\ m \neq \frac{-3}{2} \end{cases}.$$

Ví dụ 03.

(ĐMH NĂM 2017) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $d: y = 5x - 9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

A. 3

B. 6

C. -6

D. 0

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = x^2 - 2mx + (m^2 - 1)$$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m-1 \\ x = m+1 \end{cases} \Rightarrow A\left(m-1; \frac{m^3-3m+2}{3}\right) \text{ và } B\left(m+1; \frac{m^3-3m-2}{3}\right)$$

Dễ thấy phương trình đường thẳng $AB: y = -\frac{2}{3}x + \frac{m(m^2-1)}{3}$ nên AB không thể song song hoặc trùng với $d \Rightarrow A, B$ cách đều đường thẳng $d: y = 5x - 9$ nếu trung điểm I của AB nằm trên d

$$I\left(m; \frac{m^3 - 3m}{3}\right) \in d \Rightarrow \frac{m^3 - 3m}{3} = 5m - 9 \Leftrightarrow m^3 - 18m + 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Với $m = 3 \Rightarrow A, B$ thỏa điều kiện nằm khác phía so với d .

Với $m = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow A, B$ thỏa điều kiện nằm khác phía so với d .

Tổng các phần tử của S bằng 0.

Ví dụ 04.

Tổng tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 0.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$.

Để hàm số có cực đại cực tiểu thì $m \neq 0$.

Khi đó các điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0; 4m^3)$, $B(2m; 0)$.

Ta có $I(m; 2m^3)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là $d: x - y = 0$.

Do đó để điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua d thì:

$$\begin{cases} 2m - 4m^3 = 0 \\ m - 2m^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 - 2m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy tổng tất cả các giá trị của tham số thực m là 0.

Dạng toán 7. Cực trị hàm bậc ba thỏa điều kiện x_1, x_2 .

Phương pháp giải

Bài toán: Hàm số có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ thỏa điều kiện:

○ **Bước 1.** Tính y' .

○ **Bước 2.** Tìm điều kiện để hàm số có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ (1).

○ **Bước 3.** Áp dụng định lý Vi-ét:
$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} (*)$$

○ **Bước 4.** Biến đổi ycbt về dạng $S; P \rightarrow$ thay (*) vào ycbt giải tìm m (2).

○ **Bước 5.** Từ (1); (2) $\rightarrow m \in ?$

Ví dụ 01.

Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + 2018$ với m là tham số. Tổng bình phương tất cả các giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$ bằng

A. $\frac{40}{9}$

B. $\frac{22}{9}$

C. $\frac{25}{4}$

D. $\frac{8}{3}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt.

$$\Rightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - 3m(m-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -2m^2 + 4m + 1 > 0 \end{cases}$$

Theo định lý Vi-ét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{3(m-2)}{m} \end{cases}$$

Theo bài ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3m-4}{m} \\ x_2 = 1 - \frac{2(m-1)}{m} = \frac{2-m}{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{3m-4}{m} \cdot \frac{2-m}{m} = \frac{3(m-2)}{m} \Rightarrow 3(2-m)m + (3m-4)(2-m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2(t/m) \\ m = \frac{2}{3}(t/m) \end{cases}$$

Vậy $m_1^2 + m_2^2 = \frac{40}{9}$.

Ví dụ 02.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$

A. $m = -3$

B. $m = 3$

C. $m = -1$

D. $m = 1$.

Lời giải

Chọn A

$y' = 3x^2 - 6x + m$.

Hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 . Vậy x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $y' = 0$

Theo Viet ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m}{3} \end{cases}$$

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

$= 4 - \frac{2m}{3} \Rightarrow 4 - \frac{2m}{3} = 6 \Rightarrow m = -3$

Ví dụ 03.

Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$.

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = 2x^2 - 2mx - 2(3m^2 - 1) = 2(x^2 - mx - 3m^2 + 1)$,

$g(x) = x^2 - mx - 3m^2 + 1$; $\Delta = 13m^2 - 4$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi y' có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow g(x)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2\sqrt{13}}{13} \\ m < -\frac{2\sqrt{13}}{13} \end{cases} \cdot (*)$$

x_1, x_2 là các nghiệm của $g(x)$ nên theo định lý Vi-ét, ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = -3m^2 + 1 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 2m + 1 = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện (*), ta thấy chỉ $m = \frac{2}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng toán 8. Cực trị hàm trùng phương.

Phương pháp giải			
Điều kiện	Tổng quát	Cụ thể	
Có một điểm cực trị (một cực trị)	$ab \geq 0$	Đúng một cực trị và cực trị là cực tiểu	$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$
		Đúng một cực trị và cực trị là cực đại	$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$
Có ba điểm cực trị (hai cực trị).	$ab < 0$	Hai cực tiểu và một cực đại	$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$
		Một cực tiểu và hai cực đại	$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Giả sử hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 3 cực trị: $A(0; c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ tạo thành tam giác ABC thỏa mãn đủ điều kiện: $ab < 0$ và có $AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}, BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$.

$\checkmark$ Đặt $BAC = \alpha$, luôn có: $8a(1 + \cos\alpha) + b^3(1 - \cos\alpha) = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$ và $S^2 = -\frac{b^5}{32a^3}$

$\checkmark$ Phương trình qua điểm cực trị: $BC: y = -\frac{\Delta}{4a}$ và $AB, AC: y = \pm \left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right)^3 x + c$

$\checkmark$ Phương trình đường tròn đi qua $A, B, C: x^2 + y^2 - (c + n)x + c.n = 0$, với $n = \frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác là $R = \left| \frac{b^3 - 8a}{8ab} \right|$

Xem thêm các dạng ở mục **“2.2.2. Cực trị thỏa mãn điều kiện hình học”**.

Ví dụ 01.

Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$. Diện tích S của tam giác có ba đỉnh là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho có giá trị là

- A. $S = 3$. B. $S = \frac{1}{2}$. C. $S = 1$. D. $S = 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 2 \\ x = \pm 1 \rightarrow y = 1 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$			2			1		$+\infty$

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $A(0; 2)$, $B(-1; 1)$, $C(1; 1)$.

Nhận xét $\triangle ABC$ cân tại A . Vì vậy $S = \frac{1}{2} |y_A - y_B| \cdot |x_C - x_B| = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$.

Ví dụ 02.

Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị $A(0; 1)$, B , C thỏa mãn $BC = 4$?

- A. $m = \sqrt{2}$. B. $m = 4$. C. $m = \pm 4$. D. $m = \pm \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$y' = 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m > 0$.

Tọa độ điểm cực trị của đồ thị hàm số: $A(0; 1)$, $B(\sqrt{m}; -m^2 + 1)$, $C(-\sqrt{m}; -m^2 + 1)$.

$BC = 4 \Leftrightarrow 4m = 16 \Leftrightarrow m = 4$.

Ví dụ 03.

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông. Số phần tử của tập hợp S là

- A. 2. B. 0. C. 4. D. 1.

Lời giải

Chọn A

- $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4(m+1)x = 4x(x^2 - m - 1)$.
- Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.
 $\Leftrightarrow x^2 - m - 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0.
 $\Leftrightarrow m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Khi đó: $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{m+1} \\ x = 0 \\ x = \sqrt{m+1} \end{cases}.$

• Giả sử A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

$$\Rightarrow A(-\sqrt{m+1}; -2m-1), B(0; m^2), C(\sqrt{m+1}; -2m-1)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (\sqrt{m+1}; (m+1)^2), \overrightarrow{CB} = (-\sqrt{m+1}; (m+1)^2)$$

$$\Delta ABC \text{ vuông tại } B \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow -(m+1) + (m+1)^4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 0.$$

Ví dụ 04.

Cho hàm số $y = x^4 + 2(m-4)x^2 + m+5$ có đồ thị (C_m) . Tìm m để (C_m) có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm.

A. $m=1$ hoặc $m = \frac{17}{2}$.

B. $m=1$.

C. $m=4$.

D. $m = \frac{17}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 4x^3 + 4(m-4)x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 4-m \end{cases}.$

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m < 4$. Khi đó các điểm cực trị của (C_m) là

$$A(0; m+5), B(\sqrt{4-m}; m+5-(m-4)^2), C(-\sqrt{4-m}; m+5-(m-4)^2).$$

Do O là trọng tâm tam giác ABC nên $3(m+5) = 2(m-4)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{17}{2} \end{cases}.$

Do $m < 4$ nên $m = 1$.

Dạng toán 9. Cực trị hàm hợp $y=f(u(x))$.

Phương pháp giải

Bài toán: Cho hàm số $y = f(x)$ (đề có thể ra bằng hàm, đồ thị, bảng biến thiên của $f(x), f'(x)$).
 Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(u)$.

Cách 01.

○ **Bước 1.** Tính $y' = u' \cdot f'(u)$.

○ **Bước 2.** Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u' = 0 \\ f'(u) = 0 \end{cases}$

○ **Bước 3.** Giải lần lượt $u' = 0$ và $f'(u) = 0$ thông thường giải $u' = 0$ sẽ đơn giản, để

giải $f'(u) = 0$ ta tìm $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ \vdots \\ x = b \end{cases}$ (đồ thị cắt Ox)

$$\rightarrow f'(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = a \\ \vdots \\ u = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = ? \\ \vdots \\ x = ? \end{cases}.$$

○ **Bước 4.** Lập bảng xét dấu của $y' = u' \cdot f'(u)$.

○ **Bước 5.** Từ bảng xét dấu kết luận yêu cầu bài toán.

Cách 02.

○ **Bước 1.** Tính $y' = u' \cdot f'(u)$.

○ **Bước 2.** Từ đề ra ta tìm được $f'(x)$, giả sử đề ra:

① Bảng xét dấu của $f'(x) \rightarrow$ nhìn những vị trí $f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ \vdots \\ x = b \end{cases} \Rightarrow f'(x) = (x-a) \dots (x-b)$.

② Đồ thị của $f'(x) \rightarrow$ nhìn những vị trí đồ thị cắt Ox $\rightarrow \begin{cases} x = a \\ \vdots \\ x = b \end{cases} \Rightarrow f'(x) = (x-a) \dots (x-b)$.

③ Đồ thị của $f(x) \rightarrow$ nhìn những vị trí "cù chỏ" $\rightarrow \begin{cases} x = a \\ \vdots \\ x = b \end{cases} \Rightarrow f'(x) = (x-a) \dots (x-b)$.

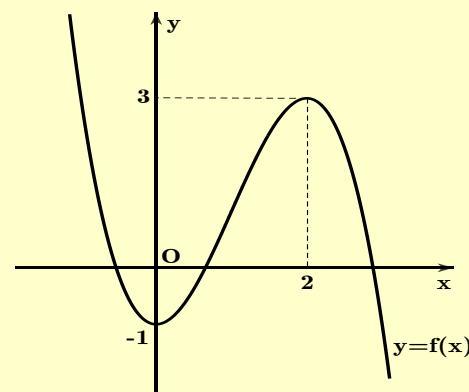
○ **Bước 3.** Từ $f'(x) \rightarrow f'(u)$ bằng cách chỗ nào có x thay bằng u .

○ **Bước 4.** Ta có được $y' = u'(x) \cdot f'(u(x)) \rightarrow$ lập bảng xét dấu của hàm này.

○ **Bước 5.** Từ bảng xét dấu kết luận yêu cầu bài toán.

Ví dụ 01.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = f(x^3 + x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 . Giá trị x_0 thuộc khoảng nào sau đây



- A. $(1;3)$.
- B. $(-1;1)$.
- C. $(0;2)$.
- D. $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g(x) = f(x^3 + x) \Rightarrow g'(x) = (3x^2 + 1)f'(x^3 + x)$.

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow (3x^2 + 1)f'(x^3 + x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^3 + x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + x = 0 \\ x^3 + x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Do đó $g'(x) > 0 \Leftrightarrow (3x^2 + 1)f'(x^3 + x) > 0 \Leftrightarrow f'(x^3 + x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x^3 + x < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

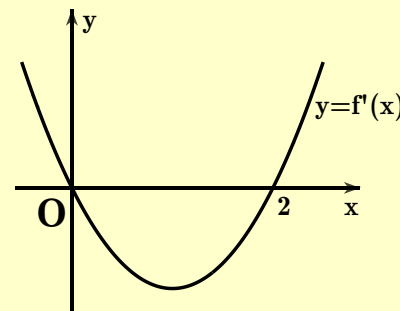
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$+\infty$				$-\infty$

Vậy hàm số $g(x) = f(x^3 + x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x_0 = 0$. Suy ra $x_0 \in (-1;1)$.

Ví dụ 02.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(-x^2 + x)$ là



- A. 1.
- B. 4.
- C. 3.
- D. 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g(x) = f(-x^2 + x) \Rightarrow g'(x) = (-2x + 1)f'(-x^2 + x)$.

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow (-2x+1)f'(-x^2+x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+1=0 \\ f'(-x^2+x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ -x^2+x=0 \\ -x^2+x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x=1 \\ x=0 \end{cases}.$$

Do đó $g'(x) > 0 \Leftrightarrow (-2x+1)f'(-x^2+x) > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+1 > 0 \\ f'(-x^2+x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ -x^2+x > 2 \\ -x^2+x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x > 1 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} -2x+1 < 0 \\ f'(-x^2+x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ 0 < -x^2+x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$			
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$								

Vậy hàm số có 1 điểm cực tiểu.

Ví dụ 03.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ là:

- A. 4. B. 5.
C. 1. D. 7.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$				

Diagram showing the sign of $f'(x)$ and the values of $f'(x)$ at critical points: $-\infty$, -1 , 1 , $+\infty$. The values are 4 and -2 .

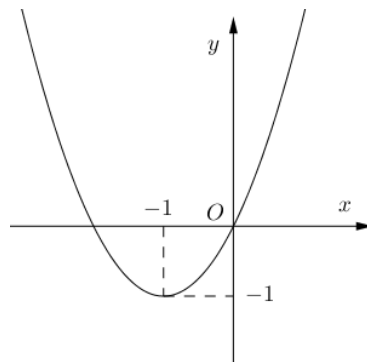
Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = (2x+2)f'(x^2+2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ f'(x^2+2x) = 0 \end{cases} \quad (1).$

Từ BBT ta thấy phương trình (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x = a < -1 & (2) \\ x^2+2x = b \in (-1;1) & (3). \\ x^2+2x = c > 1 & (4) \end{cases}$

Đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x$ có dạng



Từ đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x$ ta thấy phương trình (2) vô nghiệm; phương trình (3); phương trình (4) đều có 2 nghiệm phân biệt.

Do đó $y' = 0$ có 5 nghiệm đơn phân biệt. Vậy hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ có 5 điểm cực trị.

Ví dụ 04.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2; -1; 0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 8.

C. 10.

D. 7.

Lời giải

Chọn A

Vì hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2; -1; 0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f'(x) = 0$ có ba nghiệm là $-2; -1; 0$ (ba nghiệm bội lẻ).

Xét hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có $y' = (2x - 2) \cdot f'(x^2 - 2x)$; $y' = 0 \Leftrightarrow (2x - 2) \cdot f'(x^2 - 2x) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = -1 \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Do $y' = 0$ có một nghiệm bội lẻ ($x = 1$) và hai nghiệm đơn ($x = 0$; $x = 2$) nên hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ chỉ có ba điểm cực trị.

Ví dụ 05.

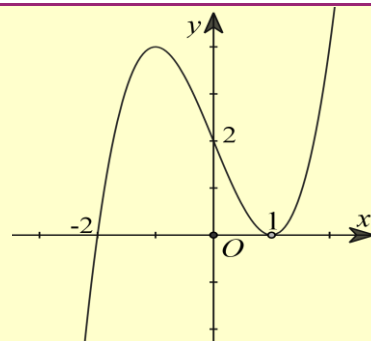
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 3)$.

A. 4

B. 2

C. 5

D. 3



Lời giải

Chọn D

Quan sát đồ thị ta có $y = f' x$ đổi dấu từ âm sang dương qua $x = -2$ nên hàm số $y = f x$ có một điểm cực trị là $x = -2$.

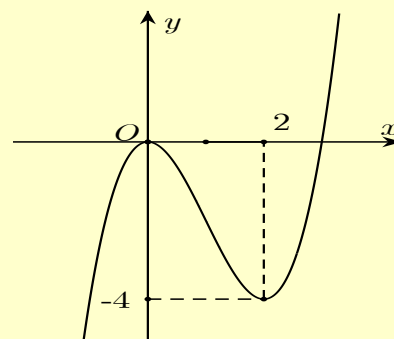
$$\text{Ta có } y' = [f(x^2 - 3)]' = 2x \cdot f'(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = -2 \\ x^2 - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Mà $x = \pm 2$ là nghiệm kép, còn các nghiệm còn lại là nghiệm đơn nên hàm số $y = f(x^2 - 3)$ có ba cực trị.

Ví dụ 06.

Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f[f(x)]$?

- A. 4
- B. 2
- C. 5
- D. 3



Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } y' = [f(f(x))]' = f'(x) \cdot f'(f(x)); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f(x)) = 0 \end{cases}$$

$$+ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \text{ vì hàm số } f(x) \text{ có hai điểm cực trị } x = 0; x = 2$$

$$+ f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases}$$

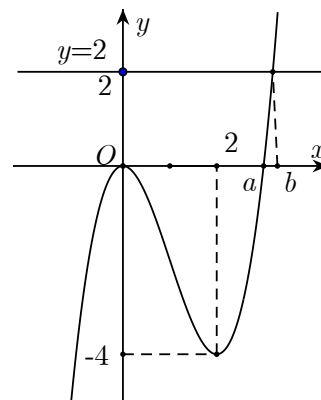
Quan sát đồ thị ta thấy phương trình $f(x) = 0$ có một nghiệm bội chẵn $x = 0$

và một nghiệm đơn hoặc bội lẻ $x = a > 2$.

Kẻ đường thẳng $y = 2$ nhận thấy phương trình $f(x) = 2$ có một nghiệm đơn hoặc bội lẻ $x = b > a$

Do đó y' có các điểm đổi dấu là $x = 0; x = 2, x = a, x = b$.

Vậy hàm số có 4 điểm cực trị.



IV. BÀI TẬP RÈN LUYỆN.

Câu 1. (MĐ 105 – 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y							

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -5$ B. Hàm số có bốn điểm cực trị
C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ D. Hàm số không có cực đại

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên. Hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $y'(2) = 0$; y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x = 2$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Câu 2. (ĐMH – 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y							

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

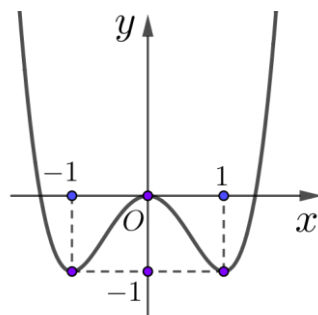
- A. 5 B. 2 C. 0 D. 1

Lời giải

Chọn A

Dựa vào BBT ta có: Giá trị cực đại của hàm số là $y_{CD} = 5$

Câu 3. (MĐ 104 – 2018) Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:



- A. 3 B. 1 C. 2 D. 0

Lời giải

Chọn A

Hàm số có ba điểm cực trị.

Câu 4. (MĐ 110 – 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow 3$	$\searrow 0$	$\nearrow +\infty$			

Tìm giá trị cực đại y_{CD} và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số đã cho.

A. $y_{CD} = 2$ và $y_{CT} = 0$

B. $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = 0$

C. $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = -2$

D. $y_{CD} = -2$ và $y_{CT} = 2$

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số ta có $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = 0$.

Câu 5. (MĐ 103 – 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$							
	$+\infty$		$\nearrow 3$	$\searrow -2$		$\nearrow +\infty$	

Hàm số đạt cực đại tại:

A. $x = -2$.

B. $x = 3$.

C. $x = 1$.

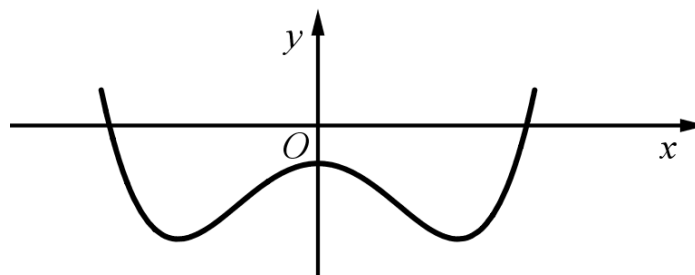
D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f(x)$ xác định tại $x = 1$, $f'(1) = 0$ và đạo hàm đổi dấu từ $(+)$ sang $(-)$

Câu 6. (MĐ 103 – 2018) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3

B. 0

C. 1

D. 2

Lời giải

Chọn A

Câu 7. (MĐ 102 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$		-2		2		$-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại

- A. $x = -2$. B. $x = 3$. C. $x = 1$. D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn B

Câu 8. (MĐ 123 - 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-
y	$+\infty$		3		$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây sai

- A. Hàm số có giá trị cực đại bằng 3 B. Hàm số có hai điểm cực tiểu
C. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0 D. Hàm số có ba điểm cực trị

Lời giải

Chọn C

Câu 9. (MĐ 104 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		2		-2		$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

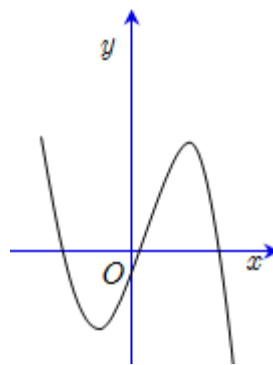
- A. $x = 2$. B. $x = -2$. C. $x = 1$. D. $x = 3$.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên ta có điểm cực tiểu của hàm số là $x = 3$.

Câu 10. (MĐ 102 - 2018) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số này là



A. 3

B. 2

C. 0

D. 1

Lời giải

Chọn B

Dựa vào hình dạng đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.

Câu 11. (MĐ 104 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	0	3	0	$+\infty$

Hỏi hàm số nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(0;1)$.

B. $(1;+\infty)$.

C. $(-1;0)$.

D. $(0;+\infty)$

Lời giải

Chọn A

Vì trên $(0;1)$ hàm số có đạo hàm mang dấu âm.

Câu 12. (MĐ 101 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0
$f(x)$	$+\infty$	-3	1	$-\infty$

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

A. $x = -1$.

B. $x = -3$.

C. $x = 2$.

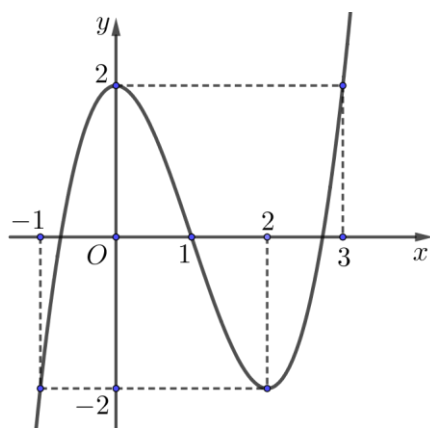
D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn A

Theo bảng biến thiên thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -1$

Câu 13. (MĐ 101 - 2018) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là



A. 2

B. 0

C.3

D. 1

Lời giải

Chọn A

Câu 14. (ĐMH - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$		1		5		$-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm

A. $x=1$

B. $x = 0$

C. $x=5$

D. $x=2$

Lời giải

Chon D

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy y' đổi dấu từ $(+)$ sang $(-)$ tại $x=2$.

Nên hàm số đạt cực đại tại điểm $x=2$.

Câu 15. (ĐMH - 2017) Tìm giá trị cực đại y_{CS} của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

A. $y_{\text{CS}} = -1$

B. $y_{\text{CS}} = 4$

C. $y_{\text{CS}} = 1$

D. $y_{\text{Cs}} = 0$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y(1) = 0 \\ x = -1 \Rightarrow y(-1) = 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) = +\infty$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	0	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên, ta thấy giá trị cực đại của hàm số bằng 4

Câu 16. (MĐ 104 - 2017) Hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1

B. 3

C. 0

D. 2

Lời giải

Chọn C

Có $y' = \frac{-1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1$ nên hàm số không có cực trị.

Câu 17. Cho hàm số $y = \frac{x^2+3}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Cực tiểu của hàm số bằng -3

B. Cực tiểu của hàm số bằng 1

C. Cực tiểu của hàm số bằng -6

D. Cực tiểu của hàm số bằng 2

Lời giải

Chọn D

□ **Cách 1.**

Ta có: $y' = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=1 \end{cases}$

Lập bảng biến thiên. Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và giá trị cực tiểu bằng 2.

□ **Cách 2.**

Ta có $y' = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$; $x=3 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=1 \end{cases}$

$y'' = \frac{8}{(x+1)^3}$. Khi đó: $y''(1) = \frac{1}{2} > 0$; $y''(-3) = -\frac{1}{2} < 0$.

Nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và giá trị cực tiểu bằng 2.

Câu 18. (ĐMH - 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+2)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 1

B. 3

C. 2

D. 5

Lời giải

Chọn B

Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+2)^3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

Do $f'(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt và $f'(x)$ đổi dấu qua ba nghiệm này nên hàm số có ba điểm cực trị.

Câu 19. (MĐ 101 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+2)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$				$+\infty$

f_{CT}

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị đó là điểm cực tiểu $x=0$

Câu 20. (MĐ 103 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2.

B. 0.

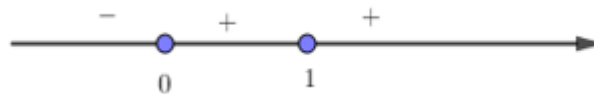
C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Xét dấu của đạo hàm:



Ta thấy đạo hàm đổi dấu đúng 1 lần nên hàm số đã cho có đúng 1 điểm cực trị

Câu 21. (MĐ 104 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+1)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } f'(x)=0 \Leftrightarrow x(x+1)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ (x+1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}.$$

Vì nghiệm $x=0$ là nghiệm bội lẻ và $x=-1$ là nghiệm bội chẵn nên số điểm cực trị của hàm số là 1.

Câu 22. (MĐ 102 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-2)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	+	
y							

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số có 1 điểm cực trị $x = 0$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(1-x)^2(3-x)^3(x-2)^4$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

- A. $x = 2$. B. $x = 3$. C. $x = 0$. D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$f'(x) = x(1-x)^2(3-x)^3(x-2)^4 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Bảng xét dấu đạo hàm.

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	+	0	+	0	-	

Suy ra hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^3(x-1)(x-2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 1. B. 3. C. 5. D. 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3(x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu nhận thấy hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 25. =Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-2019)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 1008

B. 1010

C. 1009

D. 1011

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-2019) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ \dots \\ x = 2019 \end{cases}$

$f'(x) = 0$ có 2019 nghiệm bội lẻ và hệ số a dương nên có 1010 cực tiểu

Câu 26. Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ có tổng hoành độ và tung độ bằng

A. 5.

B. 1.

C. 3.

D. -1.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	4	0	$+\infty$	

Khi đó: $x_{CD} = 1 \Rightarrow y_{CD} = 4 \Rightarrow x_{CD} + y_{CD} = 5$.

Câu 27. Tìm giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y = -x^3 + 3x - 4$.

A. $y_{CT} = -6$

B. $y_{CT} = -1$

C. $y_{CT} = -2$

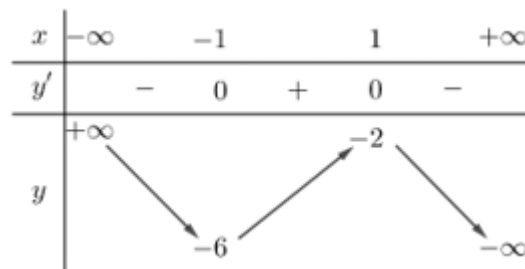
D. $y_{CT} = 1$

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$; $y' = -3x^2 + 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên



Vậy $y_{CD} = y(1) = -2$; $y_{CT} = y(-1) = -6$.

Câu 28. Đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 + 1$ có bao nhiêu điểm cực trị có tung độ là số dương?

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 - 2x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Suy ra đồ thị có hàm số $y = x^4 - x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị có tung độ là số dương.

Câu 29. Hàm số nào dưới đây **không** có cực trị?

A. $y = \frac{x^2 + 1}{x}$

B. $y = \frac{2x - 2}{x + 1}$

C. $y = x^2 - 2x + 1$

D. $y = -x^3 + x + 1$

Lời giải

Chọn B

+ Xét hàm số $y = \frac{2x - 2}{x + 1}$.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $y' = \frac{4}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D$.

Nên hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định.

Do đó hàm số $y = \frac{2x - 2}{x + 1}$ không có cực trị.

Câu 30. Tìm giá trị cực đại của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 2$.

A. -2.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$y'' = 6x - 6 \Rightarrow y''(0) = -6 < 0 \Rightarrow$ Giá trị cực đại của hàm số là: $y(0) = -2$.

Câu 31. Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x^2(x-2)(x^2-x-2)(x+1)^4$ thì tổng các điểm cực trị của hàm số $f(x)$ bằng

A. -1.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Có $f'(x) = x^2(x-2)^2(x+1)^5$. Ta thấy $f'(x)$ chỉ đổi dấu qua nghiệm $x = -1$ nên hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị là $x = -1$.

Vậy tổng các điểm cực trị của hàm số $f(x)$ bằng -1 .

Câu 32. Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ là:

A. $M(-1; -1)$.

B. $N(0; 1)$.

C. $P(2; -1)$.

D. $Q(1; 3)$.

Lời giải

Chọn D

$$y' = -3x^2 + 3; y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$y'' = -6x; y''(1) = -6 < 0; y''(-1) = 6 > 0$$

Do đó hàm số đạt cực đại tại $x = 1; y(1) = 3$. Vậy chọn đáp án $Q(1; 3)$.

Câu 33. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.

A. $m = -1$

B. $m = -7$

C. $m = 5$

D. $m = 1$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y' = x^2 - 2mx + (m^2 - 4); y'' = 2x - 2m.$$

Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} y'(3) = 0 \\ y''(3) < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 6m + m^2 - 4 = 0 \\ 6 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 = 0 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1(L) \\ m = 5(TM) \\ m > 3 \end{cases}$$

Vậy $m = 5$ là giá trị cần tìm.

Câu 34. Tìm m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + mx + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$

A. không tồn tại m .

B. $m = \pm 1$.

C. $m = 1$.

D. $m \in \{1; 2\}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Để } x = 1 \text{ là điểm cực tiểu của hàm số } \Leftrightarrow \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 4m + m = 0 \\ 6 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m < \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Thử lại với $m = 1$, ta có $y = x^3 - 2x^2 + x + 1; y' = 3x^2 - 4x + 1$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y						

Quan sát bảng biến thiên ta thấy $m=1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 35. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.

A. $m = 1, m = 5$.

B. $m = 5$.

C. $m = 1$.

D. $m = -1$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m^2 - 4$, $y'' = 2x - 2m$.

Để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$ thì

$$\begin{cases} y'(3) = 0 \\ y''(3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 = 0 \\ 6 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = 1 \Leftrightarrow m = 5. \end{cases}$$

Câu 36. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

A. $m = 0$.

B. $m > 4$.

C. $0 \leq m < 4$.

D. $0 < m \leq 4$.

Lời giải

Chọn A

$y' = 3x^2 - 6x + m$; $y'' = 6x - 6$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(2) = 0 \\ y''(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$.

Câu 37. Có bao nhiêu số thực m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ đạt cực đại tại $x = 1$.

A. 0

B. 2

C. 1

D. 3

Lời giải

Chọn D

$y' = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1$

$$y'' = 2x - 2m$$

Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ nên ta có

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 = 0 \\ 2 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \vee m = 2 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$$

Thử lại với $m=2$ ta có $y'' = 2x - 4 \Rightarrow y''(1) = -2 < 0$

Do đó Hàm số đạt cực đại tại $x=1$

Câu 38. (MĐ 102 – 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-1)x^5 - (m^2-1)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. 3

B. 2

C. Vô số

D. 1

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 8x^7 + 5(m-1)x^4 - 4(m^2-1)x^3 + 1 = x^3(8x^4 + 5(m-1)x - 4(m^2-1))$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 8x^4 + 5(m-1)x - 4(m^2-1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

*Nếu $m=1$ thì $y' = 8x^7$, suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

*Nếu $m=-1$ thì $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 8x^4 - 10x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{\frac{5}{4}} \end{cases}$, nhưng $x=0$ là nghiệm bội chẵn nên

không phải cực trị.

*Nếu $m \neq \pm 1$: khi đó $x=0$ là nghiệm bội lẻ. Xét $g(x) = 8x^4 + 5(m-1)x - 4(m^2-1)$. Để $x=0$ là điểm cực tiểu thì $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -4(m^2-1) > 0 \Leftrightarrow m^2-1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$. Vì m nguyên nên chỉ có giá trị $m=0$.

Vậy chỉ có hai tham số m nguyên để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ là $m=0$ và $m=1$.

Câu 39. (MĐ 101 – 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-2)x^5 - (m^2-4)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. Vô số

B. 3

C. 5

D. 4

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = x^8 + (m-2)x^5 - (m^2-4)x^4 + 1 \Rightarrow y' = 8x^7 + 5(m-2)x^4 - 4(m^2-4)x^3$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^3(8x^4 + 5(m-2)x - 4(m^2-4)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ g(x) = 8x^4 + 5(m-2)x - 4(m^2-4) = 0 \end{cases}$$

Xét hàm số $g(x) = 8x^4 + 5(m-2)x - 4(m^2-4)$ có $g'(x) = 32x^3 + 5(m-2)$.

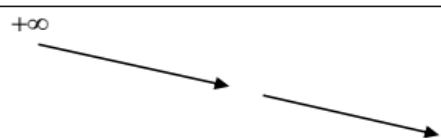
Ta thấy $g'(x) = 0$ có một nghiệm nên $g(x) = 0$ có tối đa hai nghiệm

Trường hợp 1. Nếu $g(x) = 0$ có nghiệm $x = 0 \Rightarrow m = 2$ hoặc $m = -2$

Với $m = 2$ thì $x = 0$ là nghiệm bội 4 của $g(x)$. Khi đó $x = 0$ là nghiệm bội 7 của y' và y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm $x = 0$ nên $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m = 2$ thỏa ycbt.

$$\text{Với } m = -2 \text{ thì } g(x) = 8x^4 - 20x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{\frac{5}{2}} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$		$+\infty$
y'		-	0	-	0	+	
y	$+\infty$						$+\infty$

Dựa vào BBT $x = 0$ không là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m = -2$ không thỏa ycbt.

Trường hợp 2. $g(0) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$.

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0 \Leftrightarrow g(0) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1; 0; 1\}$.

Vậy cả hai trường hợp ta được 4 giá trị nguyên của m thỏa ycbt.

Câu 40. (ĐMH - 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (m-1)x^4 - 2(m-3)x^2 + 1$ không có cực đại?

A. $1 < m \leq 3$

B. $m \leq 1$

C. $m \geq 1$

D. $1 \leq m \leq 3$

Lời giải

Chọn D

TH1: Nếu $m = 1 \Rightarrow y = 4x^2 + 1$. Suy ra hàm số không có cực đại.

TH2: Nếu $m > 1$.

Để hàm số không có cực đại thì $-2(m-3) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 3$. Suy ra $1 < m \leq 3$.

Vậy $1 \leq m \leq 3$.

Câu 41. (MĐ 104 - 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 4 với O là gốc tọa độ.

A. $m \neq 0$

B. $m = -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; m = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

C. $m = -1; m = 1$

D. $m = 1$

Lời giải

Chọn C

$$y' = 3x^2 - 6mx.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 4m^3 \\ x = 2m \Rightarrow y = 0 \end{cases}.$$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $m \neq 0$.

Khi đó, hai điểm cực trị của đồ là $A(0; 4m^3)$ và $B(2m; 0)$, ($m \neq 0$).

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot |4m^3| \cdot |2m| = 4 \Leftrightarrow m^4 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Câu 42. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + mx^2 - 2mx + 1$ có hai điểm cực trị.

A. $0 < m < 2$.

B. $m > 2$.

C. $m > 0$.

D. $\begin{cases} m > 2 \\ m < 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = -x^2 + 2mx - 2m$

Hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + mx^2 - 2mx + 1$ có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 2m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 0 \end{cases}.$$

Câu 43. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2mx + m$ có cực đại và cực tiểu?

A. $m < \frac{3}{2}$.

B. $m < -\frac{3}{2}$.

C. $m \leq \frac{3}{2}$.

D. $m > \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = 3x^2 - 6x + 2m$$

+ Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \Delta = 36 - 24m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}.$$

Câu 44. Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x + 1$ có hai cực trị là:

A. $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$

B. $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

C. $(-1; 2)$

D. $[-1; 2]$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m + 2$. Để hàm số có hai cực trị thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt nên

$$y' > 0 \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases}$$

Câu 45. Cho hàm số $y = mx^4 - x^2 + 1$. Tập hợp các số thực m để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị là

- A. $(0; +\infty)$. B. $(-\infty; 0]$. C. $[0; +\infty)$. D. $(-\infty; 0)$.

Lời giải

Chọn B

TH1: $m = 0$ hàm số đã cho trở thành $y = -x^2 + 1$ là một hàm bậc hai nên luôn có một cực trị.

TH2: $m \neq 0$, ta có $y' = 4mx^3 - 2x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4mx^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(2mx^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2mx^2 - 1 = 0 (*) \end{cases}$$

Để hàm số có đúng một cực trị thì phương trình $y' = 0$ có đúng 1 nghiệm.

Ycbt $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ có một nghiệm $x = 0$ hoặc vô nghiệm suy ra $m < 0$.

Vậy $m \leq 0$.

Câu 46. Cho hàm số $y = mx^4 + (2m+1)x^2 + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có đúng một điểm cực tiểu.

- A. Không tồn tại m . B. $m \geq 0$. C. $m \geq -\frac{1}{2}$. D. $-\frac{1}{2} \leq m \leq 0$.

Lời giải

Chọn B

Với $m = 0$, ta có $y = x^2 + 1 \Rightarrow y' = 2x$. Khi đó hàm số có 1 cực trị và cực trị đó là cực tiểu. Suy ra $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. (1)

Với $m \neq 0$, ta có $y' = 4mx^3 + 2(2m+1)x = 2x(2mx^2 + 2m+1)$

Hàm số có một cực trị là cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 2mx^2 + 2m+1 = 0 \text{ vô nghiệm} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \frac{-2m-1}{2m} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < \frac{-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m > 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra hàm số có một cực trị là cực tiểu khi $m \geq 0$.

Câu 47. Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^4 + 2(m^2 - m - 6)x^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị.

- A. 6. B. 5. C. 4. D. 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 4x^3 + 4(m^2 - m - 6)x = 4x[x^2 + (m^2 - m - 6)]$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + (m^2 - m - 6) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 6 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 3.$$

Ta có: $m \in \mathbb{Z}, -2 < m < 3 \Leftrightarrow m \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m để hàm số có ba điểm cực trị.

Câu 48. Hàm số $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 1 - 2m$ có một điểm cực trị khi

- A. $0 \leq m \leq 1$. B. $m \leq 0 \vee m \geq 1$. C. $m = 0$. D. $m < 0 \vee m > 1$.

Lời giải

Chọn B

Giải nhanh: Với a khác 0 thì hàm số đã cho có 1 cực trị $\Leftrightarrow ab \geq 0 \Rightarrow m(m-1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq 0 \end{cases}$.

Câu 49. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m trên miền $[-10; 10]$ để hàm số $y = x^4 - 2(2m+1)x^2 + 7$ có ba điểm cực trị?

- A. 20 B. 10 C. Vô số D. 11

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 4x[x^2 - (2m+1)] \quad \forall x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 2m+1 \end{cases} \quad (*)$$

Hàm số đã cho có ba cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt, hay $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow 2m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}$.

Do $m \in [-10; 10]$ nên có 11 giá trị thỏa mãn.

Câu 50. Cho hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 6)x^2 + 4$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số có ba điểm cực trị trong đó có đúng hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại?

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 5

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4mx^3 + 2(m^2 - 6)x$.

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị trong đó có đúng hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại

khi và chỉ khi $\begin{cases} 4m > 0 \\ m(m^2 - 6) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \sqrt{6}$.

Do đó có hai giá trị nguyên của tham số m .

Câu 51. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 1 - 2m$ có một cực trị.

A. $m \geq 1$

B. $m \leq 0$

C. $0 \leq m \leq 1$

D. $m \leq 0 \cup m \geq 1$

Lời giải

Chọn D

Hàm số có một điểm cực trị khi và chỉ khi $m(m-1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$.

Câu 52. (MĐ 104 - 2017) Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (2m-1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

A. $m = \frac{3}{2}$

B. $m = \frac{3}{4}$

C. $m = -\frac{1}{2}$

D. $m = \frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$. Từ đó ta có tọa độ hai điểm cực trị $A(0;1)$, $B(2;-3)$. Đường thẳng qua hai điểm cực trị có phương trình $y = -2x + 1$. Đường thẳng này vuông góc với đường thẳng $y = (2m-1)x + 3 + m$ khi và chỉ khi $(2m-1)(-2) = -1 \Leftrightarrow m = \frac{3}{4}$.

Câu 53. (MĐ 123 - 2017) Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai cực trị A và B . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB ?

A. $M(0;-1)$

B. $N(1;-10)$

C. $P(1;0)$

D. $Q(-1;10)$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9$ thực hiện phép chia y cho y' ta được số dư là $y = -8x - 2$.

Như thế điểm $N(1;-10)$ thuộc đường thẳng AB .

Câu 54. (MĐ 105 - 2017) Đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 5$ có hai điểm cực trị A và B . Tính diện tích S của tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

A. $S = 5$

B. $S = \frac{10}{3}$

C. $S = 10$

D. $S = 9$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = -3x^2 + 6x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

Dễ dàng xác định được tọa độ các điểm cực trị là $A(0;5); B(2;9)$

Vậy $OA = 5; OB = \sqrt{85}; AB = 2\sqrt{5}$

Gọi $p = \frac{AB + OA + OB}{2}$

Áp dụng công thức Heron tính diện tích tam giác OAB ta có

$$S_{\Delta OAB} = \sqrt{p(p-OA)(p-OB)(p-AB)} = 5$$

Câu 55. Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB .

- A.** $P(1;0)$. **B.** $M(0;-1)$. **C.** $N(1;-10)$. **D.** $Q(-1;10)$.

Lời giải

Chọn C

$$y' = 3x^2 - 6x - 9.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 6 \\ x = 3 \Rightarrow y = -26 \end{cases}$$

Ta có $A(-1;6), B(3;-26) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (4;-32)$ nên) Chọn -1.

Phương trình đường thẳng 0 là:

$$8(x+1)+1(y-6)=0 \Leftrightarrow 8x+y+2=0.$$

Thay tọa độ các điểm P, M, N, Q vào phương trình đường thẳng AB ta có điểm $N(1;-10)$ thuộc đường thẳng.

Câu 56. Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có hai điểm cực trị A, B . Khi đó phương trình đường thẳng AB là

- A.** $y = 2x - 1$. **B.** $y = -2x + 1$. **C.** $y = -x + 2$. **D.** $y = x - 2$.

Lời giải

Chọn B

Thực hiện phép chia y cho y' ta được: $y = y' \cdot \left(\frac{1}{3}x\right) + (-2x+1)$.

Giả sử hai điểm cực trị của đồ thị hàm số lần lượt là $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} y_1 = y(x_1) = y'(x_1) \cdot \left(\frac{1}{3}x_1\right) + (-2x_1+1) = -2x_1+1 \\ y_2 = y(x_2) = y'(x_2) \cdot \left(\frac{1}{3}x_2\right) + (-2x_2+1) = -2x_2+1 \end{cases}.$$

Ta thấy, tọa độ hai điểm cực trị A và B thỏa mãn phương trình $y = -2x + 1$.

Vậy phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị là: $y = -2x + 1$.

Câu 57. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (3m+1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

- A. $\frac{1}{3}$. B. $-\frac{1}{6}$. C. $m = \frac{1}{6}$. D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$

$$\text{Có: } y' = 3x^2 - 6x, \quad y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)y' - 2x - 1.$$

Do đó, đường thẳng Δ qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số này có phương trình là $y = -2x - 1$.

$$\text{Để } d \text{ vuông góc với } \Delta \text{ thì } (3m+1) \cdot (-2) = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{6}.$$

Vậy giá trị cần tìm của m là $m = -\frac{1}{6}$.

Câu 58. (ĐMH - 2017) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $d: y = 5x - 9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

- A. 3 B. 6 C. -6 D. 0

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Ta có $y' = x^2 - 2mx + (m^2 - 1)$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m-1 \\ x = m+1 \end{cases} \Rightarrow A\left(m-1; \frac{m^3-3m+2}{3}\right) \text{ và } B\left(m+1; \frac{m^3-3m-2}{3}\right)$$

Để thấy phương trình đường thẳng $AB: y = -\frac{2}{3}x + \frac{m(m^2-1)}{3}$ nên AB không thể song song hoặc trùng với $d \Rightarrow A, B$ cách đều đường thẳng $d: y = 5x - 9$ nếu trung điểm I của AB nằm trên d

$$I\left(m; \frac{m^3-3m}{3}\right) \in d \Rightarrow \frac{m^3-3m}{3} = 5m-9 \Leftrightarrow m^3-18m+27=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=3 \\ m=\frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Với $m=3 \Rightarrow A, B$ thỏa điều kiện nằm khác phía so với d .

Với $m = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow A, B$ thỏa điều kiện nằm khác phía so với d .

Tổng các phần tử của S bằng 0.

Câu 59. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + 2018$ với m là tham số. Tổng bình phương tất cả các giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$ bằng

- A. $\frac{40}{9}$ B. $\frac{22}{9}$ C. $\frac{25}{4}$ D. $\frac{8}{3}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt.

$$\Rightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - 3m(m-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -2m^2 + 4m + 1 > 0 \end{cases}$$

Theo định lý Vi-ét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{3(m-2)}{m} \end{cases}$$

Theo bài ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3m-4}{m} \\ x_2 = 1 - \frac{2(m-1)}{m} = \frac{2-m}{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{3m-4}{m} \cdot \frac{2-m}{m} = \frac{3(m-2)}{m} \Rightarrow 3(2-m)m + (3m-4)(2-m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2(t/m) \\ m = \frac{2}{3}(t/m) \end{cases}$$

Vậy $m_1^2 + m_2^2 = \frac{40}{9}$.

Câu 60. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$

- A. $m = -3$ B. $m = 3$ C. $m = -1$ D. $m = 1$

Lời giải

Chọn A

$y' = 3x^2 - 6x + m$. Hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 . Vậy x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $y' = 0$

Theo Viet ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m}{3} \end{cases}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

$$= 4 - \frac{2m}{3} \Rightarrow 4 - \frac{2m}{3} = 6 \Rightarrow m = -3$$

Câu 61. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 8x^2 + (m^2 + 11)x - 2m^2 + 2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Ox .

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Chọn D

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow x^3 - 8x^2 + (m^2 + 11)x - 2m^2 + 2 = 0 \text{ có ba nghiệm phân biệt}$$

$$x^3 - 8x^2 + (m^2 + 11)x - 2m^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 - 6x + m^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - 6x + m^2 - 1 = 0(*) \end{cases}$$

Suy ra phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 10 - m^2 > 0 \\ m^2 - 8 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \neq \pm 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{10} < m < \sqrt{10} \end{cases}$$

Vậy có 7 giá trị nguyên của tham số thỏa mãn đề bài.

Câu 62. Cho hàm số $y = x^3 - (2m + 1)x^2 + (m + 1)x + m - 1$. Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên $m < 20$ để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành?

A. 18.

B. 19.

C. 21.

D. 20.

Lời giải

Chọn B

$$+ \text{Ta có: } y = (x - 1)(x^2 - 2mx + 1 - m).$$

+ Hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành khi và chỉ khi đồ thị y cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt. $\Leftrightarrow y = (x - 1)(x^2 - 2mx + 1 - m) = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + 1 - m = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt khác 1.}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 1 > 0 \\ 2 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ m > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ m \neq \frac{2}{3} \end{cases}$$

+ Do $m \in \mathbb{N}, m < 20$ nên $1 \leq m < 20$. Vậy có 19 số tự nhiên thỏa mãn bài toán.

Câu 63. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 - 2)x - m^2 + 3$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó nằm về hai phía khác nhau đối với trục hoành?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2 = 0$.

Để hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow -2m^2 + 2m + 7 > 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{15}}{2} < m < \frac{1+\sqrt{15}}{2} (*)$.

Ta lần lượt thử bốn giá trị nguyên của m thỏa mãn $(*)$ là $-1; 0; 1; 2$.

Ta được bốn hàm số

$$y = x^3 - x + 2; y = x^3 - x^2 - 2x + 3; y = x^3 - 2x^2 - x + 2; y = x^3 - 3x^2 + x - 1.$$

Khi đó ta nhận thấy chỉ có $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 64. Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2; 3)$.

A. $m \in (-1; 3) \cup (3; 4)$.

B. $m \in (1; 3)$.

C. $m \in (3; 4)$.

D. $m \in (-1; 4)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2)$

Để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2; 3) \Leftrightarrow$ pt $y' = 0$ có 2 nghiệm thuộc khoảng $(-2; 3)$

$$\Leftrightarrow x^2 + (m-1)x + (m-2) = 0 \text{ có 2 nghiệm thuộc khoảng } (-2; 3)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+m-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \in (-2; 3) \\ x = 2 - m \end{cases}$$

$$YCBT \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - m \neq -1 \\ -2 < 2 - m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ -1 < m < 4 \end{cases}$$

Câu 65. Tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số: $y = 3x^3 + 2(m+1)x^2 - 3mx + m - 5$ có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ đồng thời $y(x_1).y(x_2) = 0$ là:

A. -21

B. -39

C. -8

D. $3\sqrt{11} - 13$

Lời giải

Chọn A

+) Để hàm số có hai cực trị thì phương trình $y' = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt:

$$y' = 9x^2 + 4(m+1)x - 3m \text{ có hai nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \Delta' = 4(m+1)^2 + 27m > 0$$

+) Xét $y(x_1) \cdot y(x_2) = 0$ nên ta có $y = 3x^3 + 2(m+1)x^2 - 3mx + m - 5$ phải tiếp xúc với trục hoành $\Rightarrow 3x^3 + 2(m+1)x^2 - 3mx + m - 5 = 0$ phải có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow (x-1)[3x^2 + (2m+5)x - m+5] = 0(1) \text{ phải có nghiệm kép}$$

+) TH1: Phương trình $3x^2 + (2m+5)x - m+5 = 0$ có một nghiệm $x=1 \Rightarrow m_1 = -13$

+) TH2: Phương trình $3x^2 + (2m+5)x - m+5 = 0$ có nghiệm kép khác 1

$$\Rightarrow \Delta = (2m+5)^2 - 12(5-m) = 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 32m - 35 = 0 \Rightarrow m_2 + m_3 = -8$$

$$\Rightarrow m_1 + m_2 + m_3 = -21$$

Câu 66. Gọi S là tập các giá trị dương của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 27x + 3m - 2$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| \leq 5$. Biết $S = (a; b]$. Tính $T = 2b - a$.

A. $T = \sqrt{51} + 6$

B. $T = \sqrt{61} + 3$

C. $T = \sqrt{61} - 3$

D. $T = \sqrt{51} - 6$

Lời giải

Chọn C

+) Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 27, y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 9 = 0$ (1)

+) Theo giả thiết hàm số đạt cực trị tại $x_1, x_2 \Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < -3 \end{cases} (*)$$

+) Với điều kiện (*) thì phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 , theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = 9 \end{cases}$

+) Ta lại có $|x_1 - x_2| \leq 5 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \leq 25 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 - 25 \leq 0$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 61 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{61}}{2} \leq m \leq \frac{\sqrt{61}}{2} (**)$$

+) Kết hợp (*), (**) và điều kiện m dương ta được: $3 < m \leq \frac{\sqrt{61}}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \frac{\sqrt{61}}{2} \end{cases} \Rightarrow T = 2b - a = \sqrt{61} - 3.$$

Câu 67. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + mx + 3$ có hai điểm cực trị $x_1, x_2 \leq 4$. Số phần tử của S bằng

A. 5.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + mx + 3 \Rightarrow y' = x^2 - 4x + m$.

Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 - m > 0 \Leftrightarrow m < 4.$$

$$\text{Khi đó giả sử } x_1 < x_2, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - \sqrt{4 - m} \\ x_2 = 2 + \sqrt{4 - m} \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán trở thành $x_2 \leq 4 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{4 - m} \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4$.

Kết hợp với $m < 4$ ta được $0 \leq m < 4$. Do m nguyên nên $m \in \{0; 1; 2; 3\}$. Vậy có 4 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 68. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + 4(m-2)x^2 - 7x + 1$ có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ ($x_1 < x_2$) thỏa mãn $|x_1| - |x_2| = -4$

A. $m = 5$.

B. $m = \frac{1}{2}$.

C. $m = 3$.

D. $m = \frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = x^3 + 4(m-2)x^2 - 7x + 1$ (1)

$\Rightarrow y' = 3x^2 + 8(m-2)x - 7$. Xét phương trình $3x^2 + 8(m-2)x - 7 = 0$ (2)

$\Delta' = [4(m-2)]^2 + 21 > 0$, với mọi $m \Rightarrow$ hàm số (1) luôn có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ với mọi m .

*Ta thấy $ac = -21 < 0 \Rightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm trái dấu

$$\Rightarrow x_1 < 0; x_2 > 0 \Rightarrow |x_1| = -x_1; |x_2| = x_2$$

$$*Ta \text{ có } |x_1| - |x_2| = -4 \Rightarrow -x_1 - x_2 = -4 \Leftrightarrow -(x_1 + x_2) = -4 \Leftrightarrow \frac{8(m-2)}{3} = -4 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

Câu 69. (ĐMH - 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân

A. $m = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$.

B. $m = 1$.

C. $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$.

D. $m = -1$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ có tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$Ta \text{ có: } y' = 4x^3 + 4mx; y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4mx = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -m \end{cases} (*)$$

Hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow -m > 0 \Leftrightarrow m < 0.$$

Vậy tọa độ 3 điểm lần lượt là: $A(0;1); B(-\sqrt{-m}; 1-m^2); C(\sqrt{-m}; 1-m^2)$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-\sqrt{-m}; -m^2); \overrightarrow{AC} = (\sqrt{-m}; -m^2)$

Vì $\triangle ABC$ vuông cân tại $A \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{m^2} + m^2 \cdot m^2 = 0 \Leftrightarrow -|m| + m^4 = 0 \Leftrightarrow m + m^4 = 0$
 $\Leftrightarrow m = -1$ (vì $m < 0$)

Vậy với $m = -1$ thì hàm số có 3 cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

Câu 70. (MĐ 105 - 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

A. $0 < m < 1$

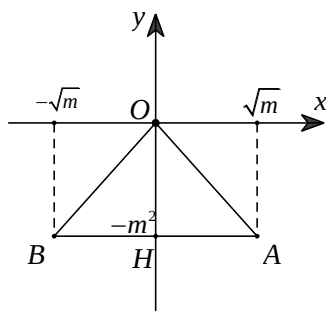
B. $m > 0$

C. $0 < m < \sqrt[3]{4}$

D. $m < 1$

Lời giải

Chọn A



Ta có $y' = 4x^3 - 4mx$. $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$.

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $m > 0$. Khi đó đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $O(0;0)$, $A(\sqrt{m}; -m^2)$, $B(-\sqrt{m}; -m^2)$.

Do đó $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OH \cdot AB = \frac{1}{2} m^2 \cdot 2\sqrt{m} = m^2 \sqrt{m} < 1 \Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Câu 71. (ĐMH - 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị?

A. 5

B. 6

C. 4

D. 3

Lời giải

Chọn C

$$y = |f(x)| = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$$

Ta có: $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -1$ hoặc $x = 2$.

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$				m				$+\infty$
			$m-5$				$m-32$		

Do hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị nên hàm số $y = |f(x)|$ có 7 điểm cực trị khi

$$\begin{cases} m > 0 \\ m-5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 5. \text{ Vậy có 4 giá trị nguyên thỏa đề bài là } m=1; m=2; m=3; m=4.$$

Câu 72. Biết phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ($a \neq 0$) có đúng hai nghiệm thực. Hỏi đồ thị hàm số $y = |ax^3+bx^2+cx+d|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4.

B. 5.

C. 2.

D. 3.

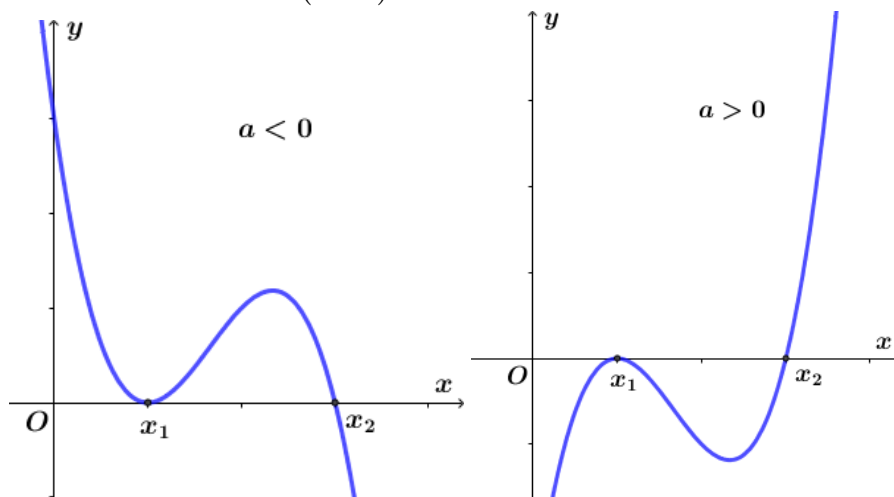
Lời giải

Chọn D

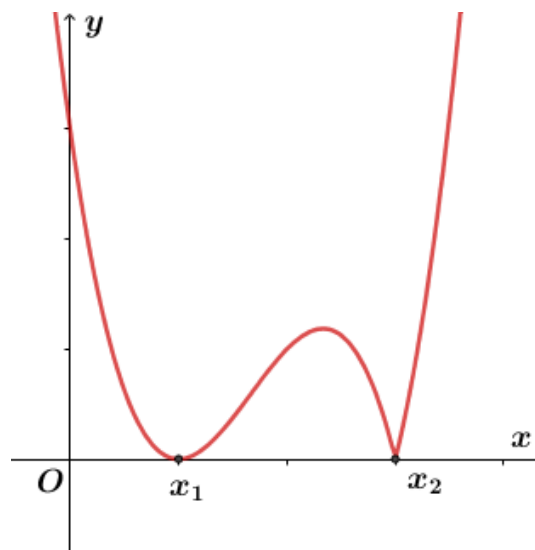
Phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $a \neq 0$ là sự tương giao của đồ thị hàm số $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $a \neq 0$ và trục hoành.

Do phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $a \neq 0$ có đúng hai nghiệm thực nên phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ có thể viết dưới dạng $a(x-x_1)^2(x-x_2)=0$ với x_1, x_2 là hai nghiệm thực của phương trình (giả sử $x_1 < x_2$). Khi đó đồ thị hàm số $y = ax^3+bx^2+cx+d$ ($a \neq 0$) tiếp xúc trục hoành tại điểm có hoành độ x_1 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ x_2 .

Đồ thị hàm số $y = ax^3+bx^2+cx+d$ ($a \neq 0$) ứng với từng trường hợp $a > 0$ và $a < 0$:



Đồ thị hàm số $y = |ax^3+bx^2+cx+d|$ ($a \neq 0$) tương ứng là



Vậy đồ thị hàm số $y = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ ($a \neq 0$) có tất cả 3 điểm cực trị.

Câu 73. Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12|$ có bảy điểm cực trị

A. 1.

B. 4.

C. 0.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12|$ có bảy điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt

$$x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12 = 0 \text{ có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi } \begin{cases} m^2 - (2m^2 + m - 12) > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m^2 + m - 12 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m < 3 \\ m > 0 \\ m < \frac{-1 - \sqrt{97}}{4} \vee m > \frac{-1 + \sqrt{97}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1 + \sqrt{97}}{4} < m < 3$$

Vậy không có giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12|$ có bảy điểm cực trị.

Câu 74. Số điểm cực trị của hàm số $y = |(x-1)(x-2)^2|$ là

A. 2

B. 2

C. 3

D. 4

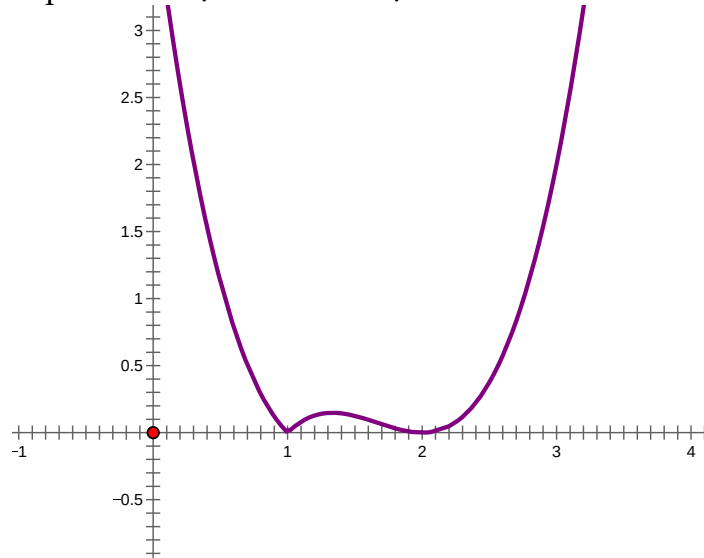
Lời giải

Chọn C

Xét hàm số: $y = (x-1)(x-2)^2 = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$.

$$y' = 3x^2 - 10x + 8. \text{ Lúc đó: } y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Vẽ đồ thị hàm số $y = \left| (x-1)(x-2)^2 \right|$ bằng cách vẽ đồ thị $y = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$, giữ nguyên phần đồ thị nằm phía trên trục hoành, rồi lấy đối xứng qua trục hoành phần đồ thị ở dưới trục hoành, sau đó xóa phần đồ thị nằm dưới trục hoành.



Dựa vào đồ thị hàm số $y = \left| (x-1)(x-2)^2 \right|$ ở trên, hàm số này có 3 điểm cực trị.

Cách 2:

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{4}{27}$	0	$+\infty$	

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ và số nghiệm đơn, nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$.

Hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ có 2 điểm cực trị.

Phương trình $y = (x-1)(x-2)^2$ có hai nghiệm nhưng chỉ có 1 nghiệm đơn $x=1$.

Do đó số điểm cực trị của hàm số $y = \left| (x-1)(x-2)^2 \right|$ là $2+1=3$.

Câu 75. (MĐ 110 - 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$		5		1	$+\infty$

Đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4

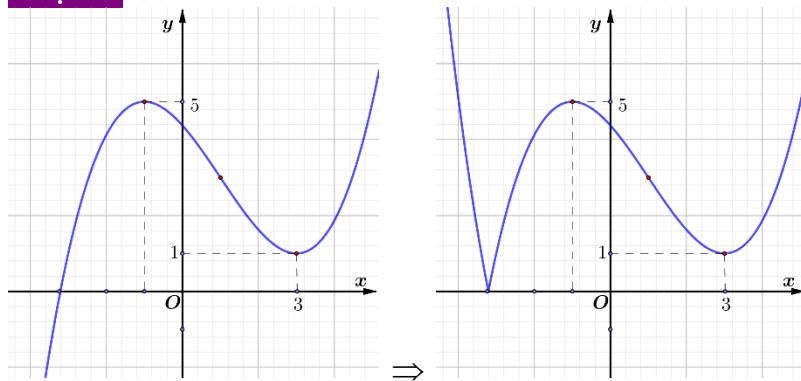
B. 2

C. 5

D. 3

Lời giải

Chọn D



Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị nằm phía trên trục Ox và cắt trục Ox tại 1 điểm duy nhất. Suy ra đồ thị $y = |f(x)|$ sẽ có 3 điểm cực trị (tham khảo hình vẽ)

Câu 76. (MĐ 101 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$		2		$+\infty$
		-3		-1	

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ là

A. 9.

B. 3.

C. 7.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

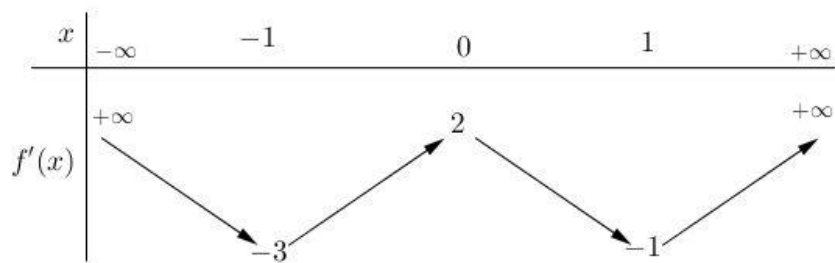
Ta có $y' = 2(x-1) \cdot f'(x^2 - 2x)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = a \in (-\infty; -1) \\ x^2 - 2x = b \in (-1; 0) \\ x^2 - 2x = c \in (0; 1) \\ x^2 - 2x = d \in (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - a = 0, a \in (-\infty; -1) \\ x^2 - 2x - b = 0, b \in (-1; 0) \\ x^2 - 2x - c = 0, c \in (0; 1) \\ x^2 - 2x - d = 0, d \in (1; +\infty) \end{cases} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix}.$$

Phương trình (1) vô nghiệm, các phương trình (2),(3),(4) đều có hai nghiệm phân biệt khác 1 và do b, c, d đôi một khác nhau nên các nghiệm của phương trình (2),(3),(4) cũng đôi một khác nhau. Do đó $f'(x^2 - 2x) = 0$ có 6 nghiệm phân biệt.

Vậy $y' = 0$ có 7 nghiệm phân biệt, do đó số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ là 7.

Câu 77. (MĐ 104 - 2019) Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(4x^2 + 4x)$ là

A. 5.

B. 9.

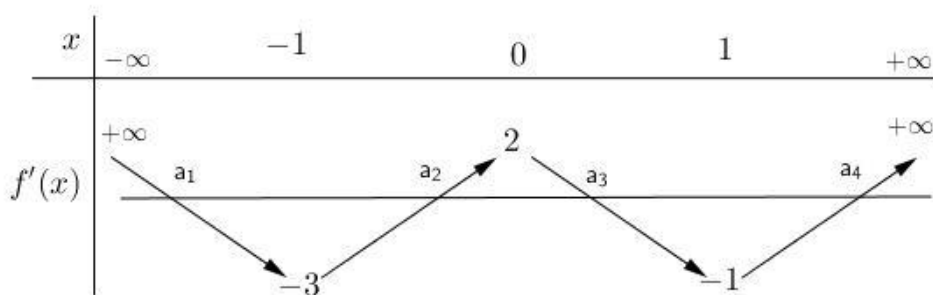
C. 7.

D. 3.

Lời giải

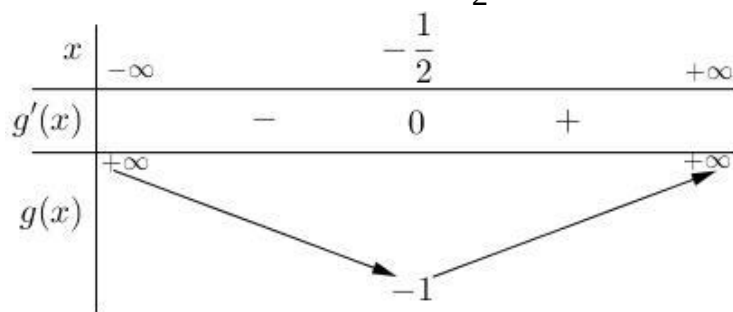
Chọn C

$$\text{Có } (f(4x^2 + 4x))' = (8x + 4)f'(4x^2 + 4x), (f(4x^2 + 4x))' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ f'(4x^2 + 4x) = 0 \end{cases}.$$



$$\text{Từ bảng biến thiên trên ta có } f'(4x^2 + 4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 4x = a_1 \in (-\infty; -1) \\ 4x^2 + 4x = a_2 \in (-1; 0) \\ 4x^2 + 4x = a_3 \in (0; 1) \\ 4x^2 + 4x = a_4 \in (1; +\infty) \end{cases}. \quad (1)$$

Xét $g(x) = 4x^2 + 4x$, $g'(x) = 8x + 4$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ ta có bảng biến thiên



Kết hợp bảng biến thiên của $g(x)$ và hệ (1) ta thấy:

Phương trình $4x^2 + 4x = a_1 \in (-\infty; -1)$ vô nghiệm.

Phương trình $4x^2 + 4x = a_2 \in (-1; 0)$ tìm được hai nghiệm phân biệt khác $-\frac{1}{2}$.

Phương trình $4x^2 + 4x = a_2 \in (0; 1)$ tìm được thêm hai nghiệm mới phân biệt khác $-\frac{1}{2}$.

Phương trình $4x^2 + 4x = a_2 \in (1; +\infty)$ tìm được thêm hai nghiệm phân biệt khác $-\frac{1}{2}$.

Vậy hàm số $y = f(4x^2 + 4x)$ có tất cả 7 điểm cực trị.

Câu 78. (MĐ 103 - 2019) Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	2	-1	$+\infty$

Số cực trị của hàm số $y = f(4x^2 - 4x)$ là

A. 3.

B. 9.

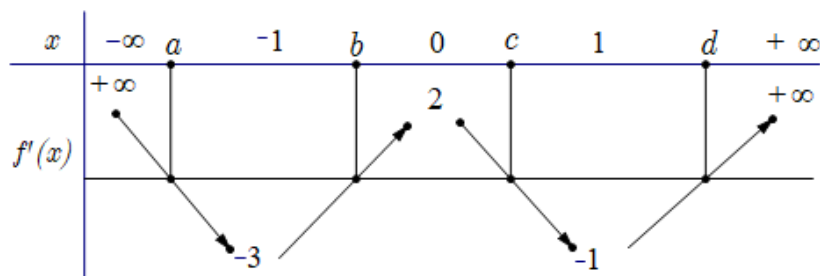
C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên



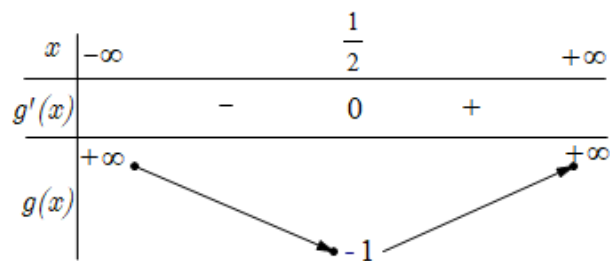
$$\text{Ta thấy } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (-\infty; -1) \\ x = b \in (-1; 0) \\ x = c \in (0; 1) \\ x = d \in (1; +\infty) \end{cases}$$

Với $y = f(4x^2 - 4x)$, ta có $y' = (8x - 4)f'(4x^2 - 4x)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 4 = 0 \\ f'(4x^2 - 4x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 4x = a \in (-\infty; -1) \text{ (1)} \\ 4x^2 - 4x = b \in (-1; 0) \text{ (2)} \\ 4x^2 - 4x = c \in (0; 1) \text{ (3)} \\ 4x^2 - 4x = d \in (1; +\infty) \text{ (4)} \end{cases}$$

Xét hàm số $g(x) = 4x^2 - 4x$, ta có $g'(x) = 8x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên của $g(x)$ ta có:

- ☐ Vì $a \in (-\infty; -1)$ nên (1) vô nghiệm.
- ☐ Vì $b \in (-1; 0)$ nên (2) có 2 nghiệm phân biệt.
- ☐ Vì $c \in (0; 1)$ nên (3) có 2 nghiệm phân biệt.
- ☐ Vì $d \in (1; +\infty)$ nên (4) có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số $y = f(4x^2 - 4x)$ có 7 điểm cực trị

Cách khác:

Ta có: $y' = (8x - 4) \cdot f'(4x^2 - 4x)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow (8x - 4) \cdot f'(4x^2 - 4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 4 = 0 \\ f'(4x^2 - 4x) = 0 \end{cases}$$

$$+ 8x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

$$+ f'(4x^2 - 4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 4x = a (a < -1) & (1) \\ 4x^2 - 4x = b (-1 < b < 0) & (2) \\ 4x^2 - 4x = c (0 < c < 1) & (3) \\ 4x^2 - 4x = d (d > 1) & (4) \end{cases}$$

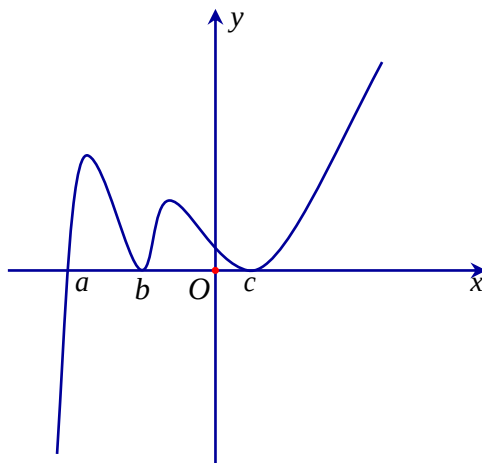
+ Phương trình $4x^2 - 4x = m \Leftrightarrow 4x^2 - 4x - m = 0$ có nghiệm khi $\Delta' = 4 - 4m \geq 0$ hay $m \leq 1$.

Từ đó, ta có phương trình (1); (2); (3) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Phương trình (4) vô nghiệm.

Do đó, hàm số đã cho có 7 cực trị.

Câu 79. Cho hàm số x xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong ở hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 2.

B. 0.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

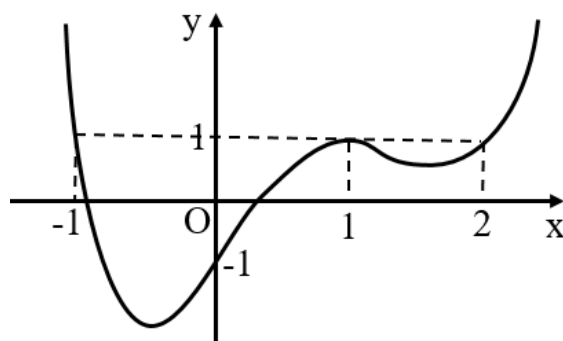
Chọn D

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = b \\ x = c \end{cases}$.

x	$-\infty$	a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	+	0	+
$f(x)$								

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho có 1 điểm cực trị.

Câu 80. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $g(x) = f(x) - x$. Hàm số đạt cực đại tại điểm thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\frac{3}{2}; 3\right)$

B. $(-2; 0)$

C. $(0; 1)$

D. $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = f'(x) - 1; g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

Bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	0	+

Từ bảng xét dấu nhận thấy $g(x)$ đạt cực đại tại $x = -1 \in (-2; 0)$.

----- HẾT -----

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

Định nghĩa 01.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

□ Số M gọi là **giá trị lớn nhất** của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = M \end{cases}$.

Kí hiệu: $M = \max_{x \in D} f(x)$.

□ Số m gọi là **giá trị nhỏ nhất** của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = m \end{cases}$.

Kí hiệu: $m = \min_{x \in D} f(x)$.

A.2. Phương pháp tìm Max – Min:

Phương pháp tìm max – min

Phương pháp 01.	Tìm GTLN, GTNN của hàm số bằng cách khảo sát trực tiếp. ☑ Bước 1: Tính $f'(x) \rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ \vdots \\ x = x_n \end{cases}$. ☑ Bước 2: Lập bảng biến thiên và từ đó suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.
Phương pháp 02.	Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một đoạn. Hàm số đã cho $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$. ☑ Bước 1: Tính $f'(x) \rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ \vdots \\ x = x_n \end{cases}$, nghiệm nào $\in [a; b] \rightarrow$ nhận và tất cả các điểm $\alpha_i \in (a; b)$ làm cho $f'(x)$ không xác định. ☑ Bước 2: Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)$. ☑ Bước 3: Khi đó: $\Rightarrow \max_{[a, b]} f(x) = \max \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)\}.$ $\Rightarrow \min_{[a, b]} f(x) = \min \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)\}.$
Phương pháp 03.	Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một khoảng

☑ **Bước 1:** Tính $f'(x) \rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ \vdots \\ x = x_n \end{cases}$, nghiệm nào $\in [a; b] \rightarrow$ nhận

và tất cả các điểm $\alpha_i \in (a; b)$ làm cho $f'(x)$ không xác định.

☑ **Bước 2:** Tính $A = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, $B = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$, $f(x_i)$, $f(\alpha_i)$.

☑ **Bước 3:** So sánh các giá trị tính được và kết luận $M = \max_{(a; b)} f(x)$,
 $m = \min_{(a; b)} f(x)$.

Nếu giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) là A hoặc B thì ta kết luận không có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).

Chú ý

– Nếu $y = f(x)$ đồng biến trên $[a; b]$ thì $\begin{cases} \min_{[a; b]} f(x) = f(a) \\ \max_{[a; b]} f(x) = f(b) \end{cases}$.

– Nếu $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a; b]$ thì $\begin{cases} \min_{[a; b]} f(x) = f(b) \\ \max_{[a; b]} f(x) = f(a) \end{cases}$.

– Hàm số liên tục trên một khoảng **có thể** không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên khoảng đó.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Dạng toán 1. Max – Min hàm số cho trước đoạn $[a; b]$.

Phương pháp giải

☑ **Bước 1:** Tính $f'(x) \rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ \vdots \\ x = x_n \end{cases}$, nghiệm nào $\in [a; b] \rightarrow$ nhận và tất cả các điểm

$\alpha_i \in (a; b)$ làm cho $f'(x)$ không xác định.

☑ **Bước 2:** Tính $f(a)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$, $f(b)$.

☑ **Bước 3:** Khi đó:

$$\Rightarrow \max_{[a; b]} f(x) = \max \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)\}.$$

$$\Rightarrow \min_{[a; b]} f(x) = \min \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)\}.$$

- Nếu $y = f(x)$ đồng biến trên $[a; b]$ thì $\begin{cases} \min_{[a; b]} f(x) = f(a) \\ \max_{[a; b]} f(x) = f(b) \end{cases}$.
- Nếu $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a; b]$ thì $\begin{cases} \min_{[a; b]} f(x) = f(b) \\ \max_{[a; b]} f(x) = f(a) \end{cases}$.

Ví dụ 01.

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ trên đoạn $[0; 2]$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = 3x^2 - 3; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [0; 2] \\ x = -1 \notin [0; 2] \end{cases}.$$

$$y(0) = 1; y(1) = -1; y(2) = 3.$$

$$\text{Suy ra } \min_{[0; 2]} y = -1.$$

Ví dụ 02.

Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 1$ trên đoạn $[1; \sqrt{3}]$.

Lời giải

$$y' = 4x^3 + 4x.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin [1; \sqrt{3}].$$

$$y(1) = 2; y(\sqrt{3}) = 14$$

$$\max_{[1; \sqrt{3}]} y = 14 \text{ khi } x = \sqrt{3} \text{ và } \min_{[1; \sqrt{3}]} y = 2 \text{ khi } x = 1.$$

Ví dụ 03.

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$ trên đoạn $[-2, 0]$. Tính giá trị của biểu thức $5M + m$.

Lời giải

Hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$ liên tục trên $[-2, 0]$. Ta có $y' = \frac{-3}{(2x-1)^2} < 0, \forall x \in [-2, 0]$, suy ra hàm số

nghịch biến trên $[-2, 0]$, do đó, $M = \max_{[-2, 0]} y = y(-2) = \frac{1}{5}$ và $m = \min_{[-2, 0]} y = y(0) = -1$.

$$\text{Vậy } 5M + m = 5\left(\frac{1}{5}\right) + (-1) = 0.$$

Ví dụ 04.

Gọi giá trị lớn nhất của hàm số, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{-x^2 - 4}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{3}{2}; 4\right]$ lần lượt là M, m . Tìm $M - 3m$.

Lời giải

Ta có $f(x) = \frac{-x^2 - 4}{x} = -x - \frac{4}{x} \Rightarrow f'(x) = -1 + \frac{4}{x^2} = \frac{-x^2 + 4}{x^2}$.

Trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; 4\right)$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 4 = 0 \\ \frac{3}{2} < x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \\ \frac{3}{2} < x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$.

Ta có $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-25}{6}$; $f(2) = -4$; $f(4) = -5$.

Do hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\left[\frac{3}{2}; 4\right]$ nên $\max_{x \in \left[\frac{3}{2}; 4\right]} f(x) = f(2) = -4$.

$\min_{x \in \left[\frac{3}{2}; 4\right]} f(x) = f(4) = -5$. Hay $M = -4$; $m = -5$ suy ra $M - 3m = 11$.

Dạng toán 2. Max - Min hàm số cho trước đồ thị hoặc BBT.

Phương pháp giải

○ **Bước 1.** Xác định chính xác đoạn cần xét:

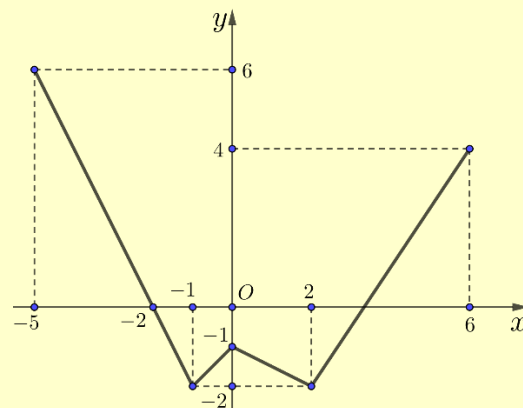
☑ Nếu đề ra đồ thị thì xác định trên trục $Ox \rightarrow$ đoạn không cần xét gạch bỏ.

☑ Nếu đề ra BBT thì xác định trên hàng $x \rightarrow$ đoạn không cần xét gạch bỏ.

○ **Bước 2.** Tra các vị trí cao nhất và thấp nhất $\rightarrow$ kết luận $\max_{[a,b]} f(x)$; $\min_{[a,b]} f(x)$.

Ví dụ 01.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-5; 6]$ và có đồ thị như hình dưới đây. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[-2; 2]$. Giá trị của $M + m$ bằng bao nhiêu?



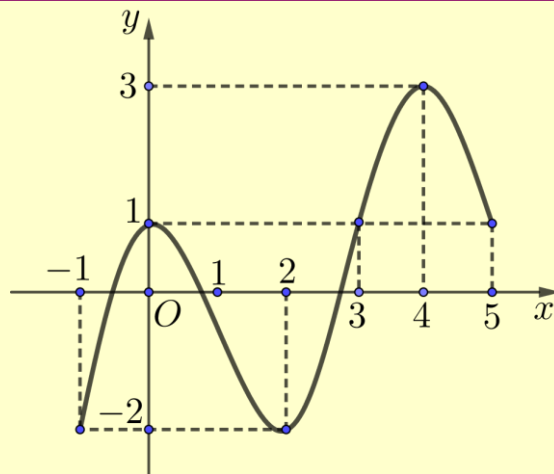
Lời giải

Ta có $M = \max_{[-2;2]} f(x) = f(-2) = 0$ và $m = \min_{[-2;2]} f(x) = f(-1) = f(2) = -2$.

Vậy $M+m=-2$.

Ví dụ 02.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;5]$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0;5]$. Giá trị của $2m-3M$ bằng bao nhiêu?

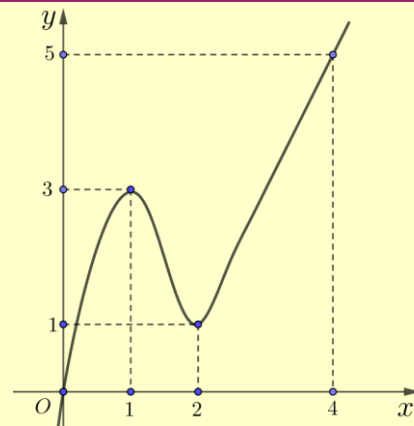


Lời giải

Dựa vào đồ thị ta xác định được $m=-2; M=3$. Ta có $2m-3M=2.(-2)-3.3=-13$.

Ví dụ 03.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0;2]$. Giá trị của $M-m$ bằng bao nhiêu?



Lời giải

Dựa vào hình vẽ, ta có $M=3; m=0 \Rightarrow M-m=3$.

Ví dụ 04.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[3;7]$. Tính $M-m$.

x	$-\infty$	3	5	7	$+\infty$
y'	+	0	-	0	-
y		3	1	5	

Diagram showing the function's behavior: $-\infty \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow -\infty$ with arrows indicating the direction of the curve.

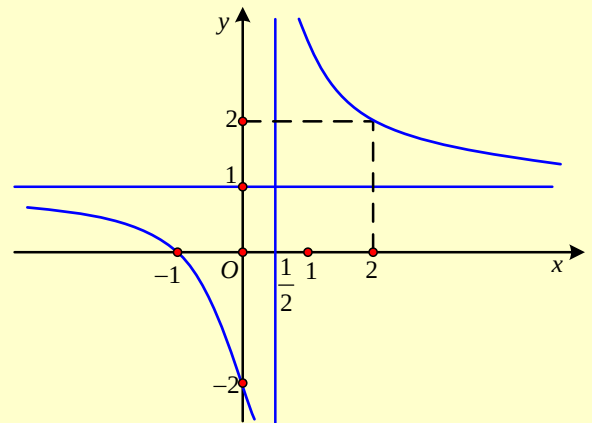
Lời giải

Quan sát đồ thị ta thấy hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[3;7]$ là 1 tại điểm $x=5$ và đạt giá trị lớn nhất trên $[3;7]$ là 5 tại điểm $x=7$.

Do đó $M=5, m=1$. Giá trị $M-m=5-1=4$.

Ví dụ 05.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau



- A. $\max_{[3;4]} f(x) = f(4)$.
 B. $\max_{[1;2]} f(x) = 2$.
 C. $\max_{[-2;1]} f(x) = 0$.
 D. $\max_{[-3;0]} f(x) = f(-3)$.

Lời giải

Chọn D

Quan sát đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy: Đồ thị hàm số đi xuống từ trái qua phải trên $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ nên hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Trên $[1;2]$ hàm số liên tục và $f(1) > f(2) = 2$ nên loại A.

Trên $[-2;1]$ hàm số gián đoạn tại $x = \frac{1}{2}$ nên loại B.

Trên $[3;4]$ hàm số liên tục và $f(3) > f(4)$ nên loại D.

Trên $[-3;0]$ hàm số liên tục và $f(-3) > f(0)$ nên $\max_{[-3;0]} f(x) = f(-3)$.

Dạng toán 3. Max - min trên khoảng (a;b).

Phương pháp giải

- **Bước 1:** Tính $f'(x) \rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ \vdots \\ x = x_n \end{cases}$, nghiệm nào $\in [a;b] \rightarrow$ nhận và tất cả các điểm $\alpha_i \in (a;b)$ làm cho $f'(x)$ không xác định.
- **Bước 2:** Tính $A = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, $B = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$, $f(x_i)$, $f(\alpha_i)$.
- **Bước 3:** So sánh các giá trị tính được và kết luận $M = \max_{(a;b)} f(x)$, $m = \min_{(a;b)} f(x)$.

⇒ Nếu giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) là A hoặc B thì ta kết luận không có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).

Ví dụ 01.

Cho hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $\left(-25; \frac{11}{10}\right)$. Tìm M .

- A. $M=1$. B. $M = \frac{129}{250}$. C. $M=0$. D. $M = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 3x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=0 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	-25	0	1	$\frac{11}{10}$		
y'		+	0	-	0	+
y						
			1		$\frac{1}{2}$	$\frac{129}{250}$
	$-\frac{33123}{2}$					

Từ bảng biến thiên ta có $M=1$.

Ví dụ 02.

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ trên khoảng $(0; +\infty)$ bằng :

- A. 3. B. 1. C. -1. D. 5.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = -3x^2 + 3, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1(l) \end{cases}$.

Từ bảng biến thiên ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ trên khoảng $(0; +\infty)$ bằng 3.

Ví dụ 03.

Trên khoảng $(0; +\infty)$ thì hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$.

- A. Có giá trị lớn nhất là $\text{Max } y = -1$. B. Có giá trị nhỏ nhất là $\text{Min } y = -1$.
C. Có giá trị lớn nhất là $\text{Max } y = 3$. D. Có giá trị nhỏ nhất là $\text{Min } y = 3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = -3x^2 + 3, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên.

$\Rightarrow$ Hàm số có giá trị lớn nhất là $Max y = 3$.

Ví dụ 04.

Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 5$. Khẳng định nào sau đây đúng:

- A.** Hàm số không có giá trị nhỏ nhất, không có giá trị lớn nhất
B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất, có giá trị lớn nhất
C. Hàm số có giá trị nhỏ nhất, không có giá trị lớn nhất
D. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất, có giá trị lớn nhất

Lời giải

Chon C

Ta có: TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 - 4x, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			5				$+\infty$

Diagram showing the behavior of the function y as x approaches the critical points -1 and 1 . Arrows indicate the direction of the function's path between these points and towards the boundaries.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có giá trị nhỏ nhất, không có giá trị lớn nhất.

Dạng toán 4. Max - min hàm vô tỉ.

Phương pháp giải

- **Bước 1:** Tìm tập xác định $D=?$, khi đó sẽ xét max – min trên $D=?$ nếu đề không yêu cầu xét trên đâu.

- **Bước 2:** Tính $f'(x) \rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ \vdots \\ x = x_n \end{cases}$, nghiệm nào $\in [a; b] \rightarrow$ nhận.

- **Bước 3:** So sánh các giá trị tính được và kết luận $M = \max_{(a;b)} f(x)$, $m = \min_{(a;b)} f(x)$.

Ví dụ 01.

Tìm tập giá trị T của hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2}$.

- A.** $T = [-2; 2]$. **B.** $T = [0; 2]$. **C.** $T = [0; 2\sqrt{2}]$. **D.** $T = [-2; 2\sqrt{2}]$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = [-2; 2]$. Hàm số liên tục trên đoạn $[-2; 2]$.

$$y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}; y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}.$$

Ta có: $y(2) = 2; y(-2) = -2; y(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.

Vì hàm số $y = x + \sqrt{4-x^2}$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ nên $\max_{x \in [-2; 2]} y = y(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$,

$\min_{x \in [-2; 2]} y = y(-2) = -2$.

Vậy tập giá trị của hàm số là $T = [-2; 2\sqrt{2}]$.

Ví dụ 02.

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + 1 + \sqrt{2-x^2}$. Tính $M-m$?

A. $M-m = 2\sqrt{2}$. **B.** $M-m = 2-\sqrt{2}$. **C.** $M-m = 4-\sqrt{2}$. **D.** $M-m = 2+\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

$$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2-x^2} - x = 0 \Leftrightarrow 2-x^2 = x^2 (x \geq 0).$$

$\Leftrightarrow x=1$ và đạo hàm không xác định tại $x = \pm\sqrt{2}$. Ta có:

$$m = f(-\sqrt{2}) = 1-\sqrt{2}; f(\sqrt{2}) = 1+\sqrt{2}; f(1) = 3 = M \Rightarrow M-m = 2+\sqrt{2}.$$

Ví dụ 03.

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x(2017 + \sqrt{2019-x^2})$ trên tập xác định của nó. Tính $M-m$.

A. $2019\sqrt{2019} + 2017\sqrt{2017}$. **B.** 4036.
C. $4036\sqrt{2018}$. **D.** $\sqrt{2019} + \sqrt{2017}$.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D = [-\sqrt{2019}; \sqrt{2019}]$

$$\text{Ta có } y' = 2017 + \sqrt{2019-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{2019-x^2}}$$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 2017 + \sqrt{2019-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{2019-x^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{2017\sqrt{2019-x^2} + 2019 - 2x^2}{\sqrt{2019-x^2}} = 0$$

Trên D , đặt $t = \sqrt{2019-x^2}$, $t \geq 0$. Ta được:

$$2t^2 + 2017t - 2019 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{2019}{2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2019 - x^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{2018} \\ x = \sqrt{2018} \end{cases}$$

Khi đó $f(-\sqrt{2018}) = -2018\sqrt{2018}$; $f(\sqrt{2018}) = 2018\sqrt{2018}$

$f(-\sqrt{2019}) = -2017\sqrt{2019}$; $f(\sqrt{2019}) = 2017\sqrt{2019}$

Suy ra $m = \min_D y = -2018\sqrt{2018}$, $M = \max_D y = 2018\sqrt{2018}$

Vậy $M - m = 4036\sqrt{2018}$.

Dạng toán 5. Max - min hàm lượng giác.

Phương pháp giải

○ Lưu ý:

① $\begin{cases} -1 \leq \sin X \leq 1 \\ -1 \leq \cos X \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \sin^2 X \leq 1 \\ 0 \leq \cos^2 X \leq 1 \end{cases}$.

② Đổi biến $\begin{cases} t = \sin X \\ t = \cos X \end{cases} \Rightarrow t \in [-1; 1] \rightarrow f(t)$.

③ Dùng điều kiện để phương trình $a \sin X \pm b \cos X = c$ có nghiệm: $a^2 + b^2 \geq c^2$.

Ví dụ 01.

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin\left(\frac{\pi}{4} \sin(x)\right)$ trên $\mathbb{R}$ bằng.

- A. 1. B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. -1. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} \sin x \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin\left(\frac{\pi}{4} \sin x\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin\left(\frac{\pi}{4} \sin(x)\right)$ là $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ví dụ 02.

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \cos^2 2x - \sin x \cos x + 4$ trên $\mathbb{R}$.

- A. $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{16}{5}$. B. $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{7}{2}$. C. $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 3$. D. $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{10}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f(x) = \cos^2 2x - \sin x \cos x + 4 = -\sin^2 2x - \frac{1}{2} \sin 2x + 5$.

Đặt $t = \sin 2x$. Ta có $x \in \mathbb{R} \Rightarrow t \in [-1; 1]$.

Xét hàm số $g(t) = -t^2 - \frac{1}{2}t + 5$ với $t \in [-1; 1]$.

$$g'(t) = -2t - \frac{1}{2}, \quad g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{4}.$$

$$g(-1) = \frac{9}{2}, \quad g\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{81}{16}, \quad g(1) = \frac{7}{2}.$$

$$\text{Suy ra: } \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \min_{t \in [-1; 1]} g(t) = \frac{7}{2}.$$

Ví dụ 03.

Tập giá trị của hàm $y = \frac{\cos x + 1}{\sin x + 1}$ trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là:

A. $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

B. $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

C. $\left[\frac{1}{2}; 2\right)$.

D. $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Lời giải

Chọn D

$$y = \frac{\cos x + 1}{\sin x + 1}.$$

Vì $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ nên $\sin x \in [0; 1]$. Do đó hàm đã cho xác định trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$y = \frac{\cos x + 1}{\sin x + 1} \Rightarrow y' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{(\sin x + 1)^2} = \frac{-1}{(\sin x + 1)^2} < 0, \quad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Suy ra hàm đã cho luôn nghịch biến trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\text{Do đó: } \max_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} y = y(0) = 2; \quad \min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} y = \frac{1}{2}.$$

Vậy tập giá trị của hàm đã cho là $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Ví dụ 04.

Cho hàm số $y = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Chọn mệnh đề **đúng**.

A. $M = m + \frac{3}{2}$.

B. $M = \frac{3}{2}m$.

C. $M = m + 1$.

D. $M = m + \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } \sin x = t, \quad (-1 \leq t \leq 1) \text{ ta được } y = \frac{t+1}{t^2+t+1}.$$

Xét hàm số $y = \frac{t+1}{t^2+t+1}$ trên đoạn $[-1;1]$ ta có $y' = \frac{-t^2-2t}{(t^2+t+1)^2}$.

Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow -t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \text{ (t/m)} \\ t = -2 \text{ (loại)} \end{cases}$.

Vì $y(-1) = 0$; $y(0) = 1$; $y(1) = \frac{2}{3}$ nên

$\max_{[-1;1]} y = y(0) = 1 \Rightarrow M = 1$; $\min_{[-1;1]} y = y(-1) = 0 \Rightarrow m = 0$.

Vậy $M = m + 1$.

Ví dụ 05.

Giả sử M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3\sin x + 4\cos x + 1$. Khi đó $M + m$ bằng

A. $3 + \sqrt{3}$.

B. 2.

C. $1 + \sqrt{3}$.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y = 3\sin x + 4\cos x + 1 = 5\left(\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x\right) + 1$

$= 5(\cos \alpha \sin x + \sin \alpha \cos x) + 1$ với $\begin{cases} \cos \alpha = \frac{3}{5} \\ \sin \alpha = \frac{4}{5} \end{cases}$

$= 5\sin(x + \alpha) + 1$.

Khi đó: $-1 \leq \sin(x + \alpha) \leq 1 \Leftrightarrow -5 \leq 5\sin(x + \alpha) \leq 5 \Leftrightarrow -4 \leq 5\sin(x + \alpha) + 1 \leq 6$.

Vậy $M = 6$; $m = -4 \rightarrow M + m = 2$.

Dạng toán 6. Max – min hàm trị tuyệt đối.

Phương pháp giải

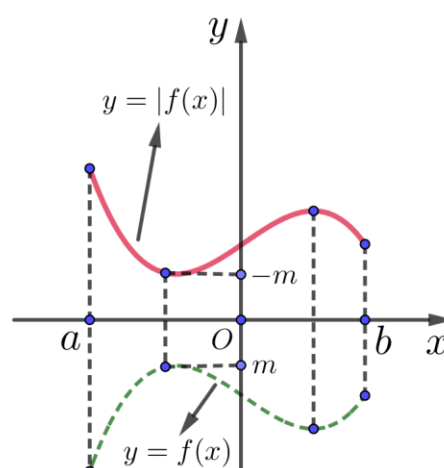
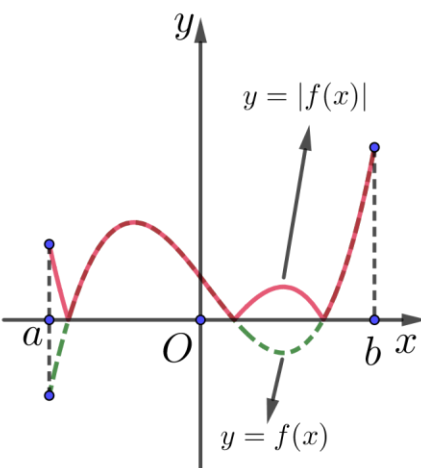
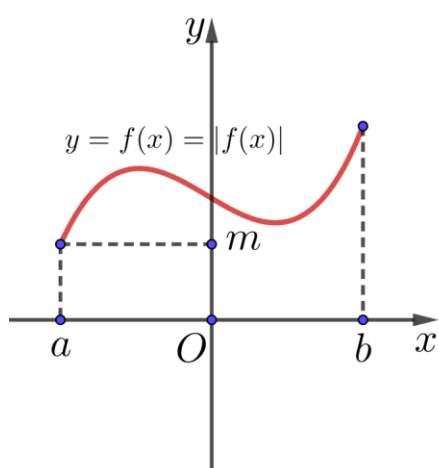
Bài toán: Cho hàm số $y = f(x; m)$ liên tục trên D . Tìm $\max_D |f(x)|$ hoặc $\min_D |f(x)|$.

Các tính chất quan trọng:

① Giả sử $y = f(x; m)$ xác định trên D và tồn tại $\begin{cases} m = \min_D f(x) \\ M = \max_D f(x) \end{cases}$. Khi đó

☑ $\max_D |f(x)| = \max_D \{|m|; |M|\}$.

☑ $\min_D |f(x)| = \begin{cases} m & \text{khi } m > 0 \\ 0 & \text{khi } m \leq 0 \leq M \\ -M & \text{khi } M < 0 \end{cases}$



② Nếu $\begin{cases} \max_D |f(x)| = M \\ \min_D |f(x)| = m \end{cases}$ thì $\begin{cases} M \geq |f(x)|, \forall x \in D \\ m \leq |f(x)|, \forall x \in D \end{cases}$.

③ $|x| + |y| \geq |x + y|$, dấu “=” xảy ra khi $xy \geq 0$ (mục tiêu để khử biến).

Bên cạnh đó ta có các bước làm như sau:

○ **Bước 1:** Tính $f'(x)$ và lập bảng biến thiên trên đoạn $[a; b]$.

○ **Bước 2:** Biện luận $m = \min_{[a; b]} f(x) \geq 0$ và $M = \max_{[a; b]} f(x) \leq 0$, từ đó kết luận $M = \max_{[a; b]} |f(x)|$.

○ **Bước 3:** Kết luận m .

Ví dụ 01.

Cho hàm số $y = |x^2 + 2x + m - 3|$. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 2]$ bằng 10. Tổng tất cả các phần tử của tập S bằng

A. 2.

B. -1.

C. -3.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Ta xét hàm số: $f(x) = x^2 + 2x + m - 3$.

Đặt $g(x) = |f(x)|$.

Ta có: $f'(x) = 2x + 2$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2; 2]$

x	-2	-1	2
$f(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$m-3$	$m-4$	$m+5$

+ **Trường hợp 1:** $m-4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 4$, ta có $\max_{[-2;2]} g(x) = g(2) = |f(2)| = |m+5| = m+5$.

Ta phải có $m+5=10 \Leftrightarrow m=5$ (thỏa mãn).

+ **Trường hợp 2:** $m+5 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -5$, ta có $\max_{[-2;2]} g(x) = g(-1) = |f(-1)| = |m-4|$.

Ta phải có $|m-4|=10 \Leftrightarrow \begin{cases} m-4=10 \\ m-4=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=14(l) \\ m=-6 \end{cases}$.

Vậy, ta có $S = \{-6; 5\}$ nên tổng tất cả các phần tử của S bằng $-6+5=-1$.

Ví dụ 02.

Cho hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + 2m - 1|$. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 6. Tích tất cả các phần tử của tập S bằng

- A. 0. B. -14. C. $-\frac{7}{4}$. D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta xét hàm số: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2m - 1$.

Đặt $g(x) = |f(x)|$.

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 6x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \notin [-1; 1] \end{cases} (l)$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1; 1]$

x	-1	0	1
$f(x)$	+	0	-
$f'(x)$	$2m-5$	$2m-1$	$2m-3$

+ **Trường hợp 1:** $2m-5 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{5}{2}$, ta có $\max_{[-1;1]} g(x) = g(0) = |f(0)| = |2m-1| = 2m-1$.

Ta phải có $2m-1=6 \Leftrightarrow m=\frac{7}{2}$ (thỏa mãn).

+ **Trường hợp 2:** $2m-1 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}$, ta có $\max_{[-1;1]} g(x) = g(-1) = |f(-1)| = |2m-5|$.

Ta phải có $|2m-5|=6 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-5=6 \\ 2m-5=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{11}{2} \\ m=-\frac{1}{2} \end{cases}$.

Vậy, ta có $S = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right\}$ nên tích tất cả các phần tử của S bằng $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{7}{2} = -\frac{7}{4}$.

Ví dụ 03.

Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-2021; 2021]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = |x^5 - 5x + 2m - 1|$ trên đoạn $[-2; 0]$ lớn hơn 5. Số phần tử của tập S là:

A. 2022.

B. 4042.

C. 4021.

D. 4017.

Lời giải

Chọn D

+ Xét hàm trong trị tuyệt đối: $g(x) = x^5 - 5x + 2m - 1$ trên $[-2; 0]$ ta được kết quả:

+ $\min_{x \in [-2; 0]} g(x) = 2m - 23$ và $\max_{x \in [-2; 0]} g(x) = 2m + 3$.

+ Có $\min_{x \in [-2; 0]} |g(x)| > 5$

Suy ra đồ thị hàm $y = g(x)$ không cắt trục hoành, tức luôn nằm trên hoặc nằm dưới.

Khi đó có hai trường hợp ứng với nằm trên và nằm dưới như sau:

$$\begin{cases} \min_{x \in [-2; 0]} g(x) = 2m - 23 > 0 \\ \min_{x \in [-2; 0]} |g(x)| = \min_{x \in [-2; 0]} g(x) = 2m - 23 > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{23}{2} \\ m > 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{23}{2} \\ m < -4 \end{cases} \\ \begin{cases} \max_{x \in [-2; 0]} g(x) = 2m + 3 < 0 \\ \min_{x \in [-2; 0]} |g(x)| = -\max_{x \in [-2; 0]} g(x) = -2m - 3 > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{3}{2} \\ m < -4 \end{cases}$$

Các giá trị nguyên m thỏa mãn điều kiện bài toán là: $\begin{cases} 12 \leq m \leq 2021 \\ -2021 \leq m \leq -5 \end{cases}$.

Vậy có tất cả 4017 giá trị nguyên thỏa mãn.

Ví dụ 04.

Cho hàm số $y = \left| \frac{x^4 + ax + a}{x+1} \right|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[1; 2]$. Có bao nhiêu số nguyên a sao cho $M \geq 2m$.

- A. 15. B. 14. C. 16. D. 13.

Lời giải

Chọn A

Xét $u(x) = \frac{x^4 + ax + a}{x+1}$ trên đoạn $[1; 2]$, ta có $u'(x) = \frac{3x^4 + 4x^3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in [1; 2]$.

Do đó, $\max_{[1; 2]} u = u(2) = a + \frac{16}{3}, \min_{[1; 2]} u = u(1) = a + \frac{1}{2}$.

+Trường hợp 1:

$$\text{Nếu } a + \frac{1}{2} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} M = a + \frac{16}{3} \\ m = a + \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \frac{1}{2} \geq 0 \\ a + \frac{16}{3} \geq 2\left(a + \frac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{13}{3}.$$

+Trường hợp 2:

$$\text{Nếu } a + \frac{16}{3} \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} M = -\left(a + \frac{1}{2}\right) \\ m = -\left(a + \frac{16}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \frac{16}{3} \leq 0 \\ -\left(a + \frac{1}{2}\right) \geq -2\left(a + \frac{16}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{61}{6} \leq a \leq -\frac{16}{3}.$$

+Trường hợp 3:

$$\text{Nếu } \left(a + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(a + \frac{16}{3}\right) \leq 0 \Rightarrow m = 0, M = \max\left\{\left|a + \frac{1}{2}\right|, \left|a + \frac{16}{3}\right|\right\} \Rightarrow M > 2m \text{ (thỏa)}.$$

Vậy $-\frac{61}{6} \leq a \leq \frac{13}{3}, a \in \{-10; \dots; 4\}$. Có 15 số nguyên thỏa mãn.

Ví dụ 05.

Cho hàm số $y = |x^3 - 3x + m - 4|$. Khi $m = m_0$ thì giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0; 3]$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng

- A. 10. B. 8. C. 14. D. 18.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số trong dấu trị tuyệt đối: $y = g(x) = x^3 - 3x + m - 4$

có $g'(x) = 3x^2 - 3; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên:

x	0	1	3
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$m-4$	$m-6$	$m+14$

Ta có: $m-6 < m-4 < m+14$. Từ đó suy ra giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = g(x) = x^3 - 3x + m - 4$ trên đoạn $[0; 3]$ lần lượt là $m+14$ và $m-6$.

Ta có: $\max_{x \in [3; 6]} |g(x)| = \max\{|m+14|; |m-6|\}$

+) Nếu $|m+14| \geq |m-6| \Leftrightarrow m \geq -4$ thì $\max_{x \in [1; 4]} |g(x)| = |m+14| = m+14 \geq 10, \forall m \geq -4$.

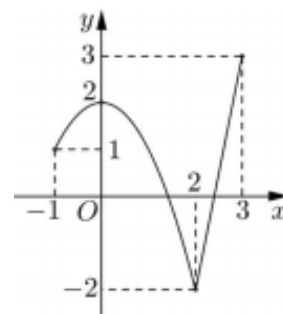
+) Nếu $|m-6| \geq |m+14| \Leftrightarrow m \leq -4$ thì $\max_{x \in [1; 4]} |g(x)| = |m-6| = 6-m \geq 10, \forall m \leq -4$.

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $y = |g(x)|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 10 khi $m = -4$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m - 4|$ trên đoạn $[0; 3]$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 10.

III. BÀI TẬP RÈN LUYỆN.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của $M - m$ bằng



- A. 1
- B. 4
- C. 5
- D. 0

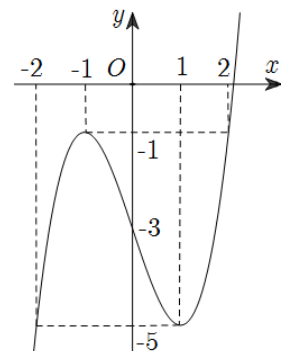
Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị suy ra $M = f(3) = 3; m = f(2) = -2$

Vậy $M - m = 5$

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 2]$.



- A. $m = -5; M = -1$.
- B. $m = -2; M = 2$.
- C. $m = -1; M = 0$.
- D. $m = -5; M = 0$.

Lời giải

Chọn A

Nhìn vào đồ thị ta thấy:

$$M = \max_{[-2;2]} f(x) = -1 \text{ khi } x = -1 \text{ hoặc } x = 2.$$

$$m = \min_{[-2;2]} f(x) = -5 \text{ khi } x = -2 \text{ hoặc } x = 1.$$

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	+		- 0 +	
y	$-\infty$	0	-1	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.
- B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.
- C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.
- D. Hàm số có đúng một cực trị.

Lời giải

Chọn C

Đáp án A sai vì hàm số có 2 điểm cực trị.

Đáp án B sai vì hàm số có giá trị cực tiểu $y = -1$ khi $x = 0$.

Đáp án C sai vì hàm số không có GTLN và GTNN trên $\mathbb{R}$.

Đáp án D đúng vì hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3;2]$ và có bảng biến thiên như sau. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$. Tính $M+m$.

x	-3	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	3	0	2	1

- A. 3.
- B. 2.
- C. 1.
- D. 4.

Lời giải

Chọn A

Trên đoạn $[-1;2]$ ta có giá trị lớn nhất $M=3$ khi $x = -1$ và giá trị nhỏ nhất $m=0$ khi $x = 0$.

Khi đó $M+m=3+0=3$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
y'	-		+ 0 +		-
y	$+\infty$	-3	2	-4	

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào *sai*?

- A. Hàm số có hai điểm cực trị.
- B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -3 .
- C. Đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận.
- D. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$, $(2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào BBT ta thấy hàm số không có GTLN, GTNN.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	4	0	4	$-\infty$

- A. Phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$
- C. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 0
- D. Hàm số có 3 điểm cực trị

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1; 3]$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây *đúng*?

x	-1	0	2	3	
y'	+	0	-	0	+
y	0	5	1	4	

- A. $\max_{[-1;3]} f(x) = f(0)$
- B. $\max_{[-1;3]} f(x) = f(3)$
- C. $\max_{[-1;3]} f(x) = f(2)$
- D. $\max_{[-1;3]} f(x) = f(-1)$

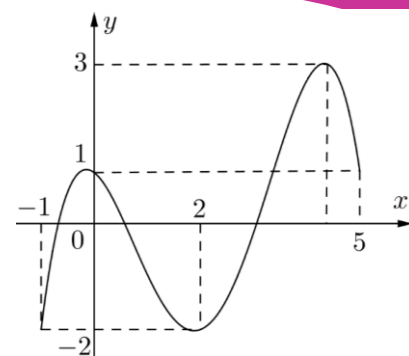
Lời giải

Chọn A

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $\max_{[-1;3]} f(x) = f(0)$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;5]$ và có đồ thị trên đoạn $[-1;5]$ như hình vẽ bên dưới. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;5]$ bằng

- A. -1
- B. 4
- C. 1
- D. 2



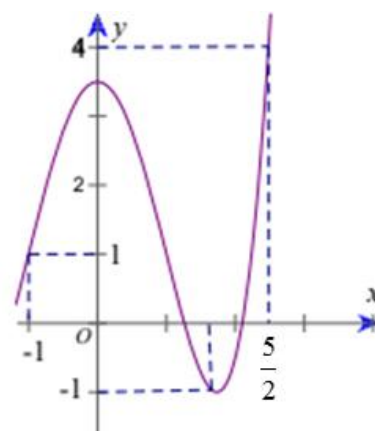
Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị ta thấy:
$$\begin{cases} M = \max_{[-1;5]} f(x) = 3 \\ n = \min_{[-1;5]} f(x) = -2 \end{cases} \Rightarrow M + n = 1.$$

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\left[-1, \frac{5}{2}\right]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1, \frac{5}{2}\right]$ là:

- A. $M = 4, m = 1$
- B. $M = 4, m = -1$
- C. $M = \frac{7}{2}, m = -1$
- D. $M = \frac{7}{2}, m = 1$



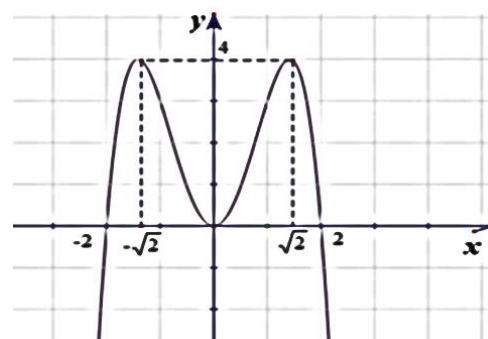
Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị $M = 4, m = -1$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;2]$ là:

- A. $\max_{[0;2]} f(x) = 2$.
- B. $\max_{[0;2]} f(x) = \sqrt{2}$.
- C. $\max_{[0;2]} f(x) = 4$.
- D. $\max_{[0;2]} f(x) = 0$.



Lời giải

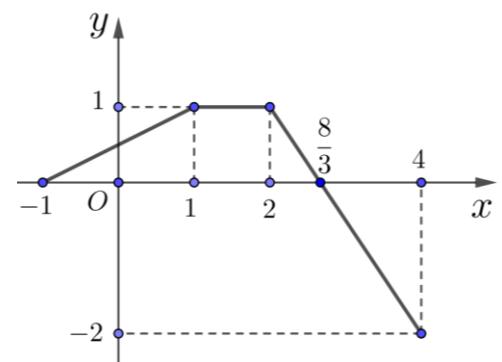
Chọn C

Dựa vào đồ thị ta thấy trên đoạn $[0;2]$ hàm số $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng 4 khi $x = \sqrt{2}$

Suy ra $\max_{[0;2]} f(x) = 4$

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;4]$. Giá trị của $M+m$ là

- A. 2
- B. -6
- C. -5
- D. -1



Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta thấy GTLN của hàm số trên đoạn $[-1;4]$ là $M=1$ đạt được tại $x=2; x=1$ và GTNN của hàm số trên đoạn $[-1;4]$ là $m=-2$ đạt được tại $x=4$

$$\Rightarrow M+m=1+(-2)=-1$$

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên $[-5;7)$ như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\min_{[-5;7)} f(x) = 6$.
- B. $\min_{[-5;7)} f(x) = 2$.
- C. $\max_{[-5;7)} f(x) = 9$.
- D. $\max_{[-5;7)} f(x) = 6$.

x	-5	1	7
y'	-	0	+
y	6	2	9

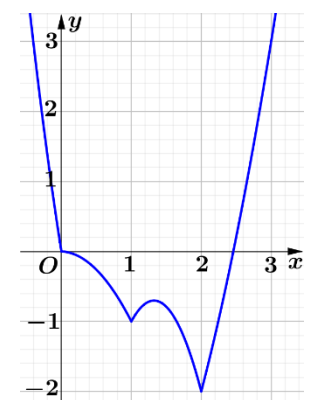
Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên trên $[-5;7)$, ta có: $\min_{[-5;7)} f(x) = f(1) = 2$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0;3]$. Giá trị của $M+m$ bằng?

- A. 5.
- B. 3.
- C. 2.
- D. 1.



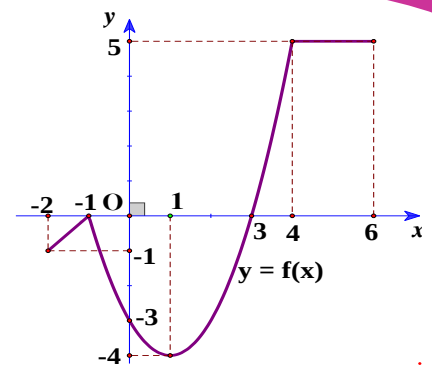
Lời giải

Chọn D

Dựa vào hình vẽ ta có: $M=3, m=-2$ nên $M+m=1$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 6]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2; 6]$. Giá trị của $M - m$ bằng

- A. 9.
- B. -8.
- C. -9.
- D. 8.



Lời giải

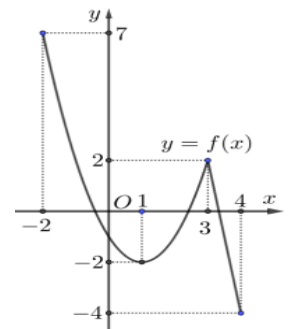
Chọn A

Từ đồ thị suy ra $-4 \leq f(x) \leq 5 \quad \forall x \in [-2; 6]; f(1) = -4; f(4) = 5$

$$\Rightarrow \begin{cases} M = 5 \\ m = -4 \end{cases} \Rightarrow M - m = 9.$$

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị trên đoạn $[-2; 4]$ như hình vẽ bên. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 4]$ bằng

- A. 5
- B. 3
- C. 0
- D. -2



Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số ta có

$$m = \min_{x \in [-2; 4]} f(x) = -4, \quad M = \max_{x \in [-2; 4]} f(x) = 7$$

Khi đó $M + m = 3$

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$ $	$-$	0	$+$
			0	$+$	0
			$-$		$-$

Mệnh đề nào sau đây đúng

- A. $\max_{(-1; 1]} f(x) = f(0)$
- B. $\max_{(0; +\infty)} f(x) = f(1)$
- C. $\min_{(-\infty; -1)} f(x) = f(-1)$
- D. $\min_{(-1; +\infty)} f(x) = f(0)$

Lời giải

Chọn B

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'		$-$	$-$	0	$+$	0	$-$
y							

$f(-1)$ $f(0)$ $f(1)$

- Câu 17. (MĐ 102 – 2019)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng
- A. 0. B. -16. C. 20. D. 4.

Lời giải

Chọn B

$f'(x) = 3x^2 - 3 \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \in [-3; 3]$.
 $f(-3) = -16$; $f(-1) = 4$; $f(1) = 0$; $f(3) = 20$.
 $\Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất là -16.

- Câu 18. (MĐ 110 – 2017)** Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[0; \sqrt{3}]$.
- A. $M = 6$ B. $M = 1$ C. $M = 9$ D. $M = 8\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$
 $y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1(l) \end{cases}$
 Ta có: $y(0) = 3$; $y(1) = 2$; $y(\sqrt{3}) = 6$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[0; \sqrt{3}]$ là $M = y(\sqrt{3}) = 6$

- Câu 19. (MĐ 103 – 2019)** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng
- A. -2. B. 18. C. 2. D. -18.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$
 $f(-3) = -18$; $f(-1) = 2$; $f(1) = -2$; $f(3) = 18$.

- Câu 20. (ĐMH – 2017)** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 4]$.

- A. $\min_{[2; 4]} y = -3$ B. $\min_{[2; 4]} y = \frac{19}{3}$ C. $\min_{[2; 4]} y = 6$ D. $\min_{[2; 4]} y = -2$

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ xác định và liên tục trên đoạn $[2; 4]$

Ta có $y' = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = -1 \text{ (loại)}$

Suy ra $y(2) = 7; y(3) = 6; y(4) = \frac{19}{3}$. Vậy $\min_{[2; 4]} y = 6$ tại $x = 3$.

Câu 21. (MĐ 104 – 2018) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

- A. 85 B. $\frac{51}{4}$ C. 13 D. 25

Lời giải

Chọn D

$$y = f(x) = x^4 - x^2 + 13$$

$$y' = 4x^3 - 2x$$

$$4x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1; 2] \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \in [-1; 2] \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \in [-1; 2] \end{cases}$$

$$f(-1) = 13; f(2) = 25; f(0) = 13; f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{51}{4}; f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{51}{4}$$

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 25.

Câu 22. (MĐ 104 – 2017) Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

- A. $m = 5$ B. $m = 3$ C. $m = \frac{17}{4}$ D. $m = 10$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } y = f(x) = x^2 + \frac{2}{x}.$$

$$\text{Ta có } y' = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2}, y' = 0 \Rightarrow x = 1 \in \left[\frac{1}{2}; 2\right].$$

$$\text{Khi đó } f(1) = 3, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{4}, f(2) = 5.$$

$$\text{Vậy } m = \min_{\left[\frac{1}{2}; 2\right]} f(x) = f(1) = 3.$$

Câu 23. (MĐ 123 – 2017) Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$ trên đoạn $[0; 2]$.

- A. $m = 3$ B. $m = 0$ C. $m = -2$ D. $m = 11$

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số trên đoạn $[0; 2]$. Ta có $y' = 3x^2 - 14x + 11$ suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Tính $f(0) = -2; f(1) = 3, f(2) = 0$. Suy ra $\min_{[0;2]} f(x) = f(0) = -2 = m$.

Câu 24. (MĐ 101 – 2018) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 9$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng

A. 201

B. 2

C. 9

D. 54

Lời giải

Chọn D

$$y' = 4x^3 - 8x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Ta có $y(-2) = 9; y(3) = 54; y(0) = 9; y(\pm\sqrt{2}) = 5$.

Vậy $\max_{[-2;3]} y = 54$.

Câu 25. (ĐMH – 2018) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng

A. 122

B. 50

C. 5

D. 1

Lời giải

Chọn B

$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \in [-2; 3] \end{cases};$$

$$f(0) = 5; f(\pm\sqrt{2}) = 1; f(-2) = 5; f(3) = 50$$

Vậy $\max_{[-2;3]} y = 50$

Câu 26. (MĐ 105 – 2017) Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-2; 3]$.

A. $m = 13$

B. $m = \frac{51}{4}$

C. $m = \frac{51}{2}$

D. $m = \frac{49}{4}$

Lời giải

Chọn B

$$y' = 4x^3 - 2x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-2; 3] \\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \in [-2; 3] \end{cases};$$

$$\text{Tính } y(-2) = 25, y(3) = 85, y(0) = 13, y\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{51}{4} = 12,75;$$

Kết luận: giá trị nhỏ nhất m của hàm số là $m = \frac{51}{4}$.

Câu 27. (MĐ 104 – 2019) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng

A. -18.

B. -2.

C. 2.

D. 18.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

$$\text{Mà } f(-3) = -18; f(-1) = 2; f(1) = -2; f(3) = 18.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng -18 .

Câu 28. (MĐ 103 – 2018) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2$ trên đoạn $[-4; -1]$ bằng

- A. -16 B. 0 C. 4 D. -4

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 + 6x; y' = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [-4; -1] \\ x = -2 \in [-4; -1] \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } y(-4) = -16; y(-2) = 4; y(-1) = 2.$$

$$\text{Nên } \min_{[-4; -1]} y = -16.$$

Câu 29. (MĐ 102 – 2018) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 7x$ trên đoạn $[0; 4]$ bằng

- A. -259 B. 68 C. 0 D. -4

Lời giải

Chọn D

TXĐ $D = \mathbb{R}$.

Hàm số liên tục trên đoạn $[0; 4]$.

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 + 4x - 7$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [0; 4] \\ x = -\frac{7}{3} \notin [0; 4] \end{cases}$$

$$y(0) = 0; y(1) = -4; y(4) = 68.$$

$$\text{Vậy } \min_{[0; 4]} y = -4.$$

Câu 30. (MĐ 101 – 2019) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[-3; 3]$ là

- A. 4 . B. -16 . C. 20 . D. 0 .

Lời giải

Chọn C

$$f(x) = x^3 - 3x + 2 \text{ tập xác định } \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \in [-3; 3].$$

$$f(1) = 0; f(-1) = 4; f(3) = 20; f(-3) = -16.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \max_{[-3; 3]} f(x) = f(3) = 20.$$

Câu 31. Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. $\min_{(0;+\infty)} y = \frac{33}{5}$

B. $\min_{(0;+\infty)} y = 2\sqrt[3]{9}$

C. $\min_{(0;+\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$

D. $\min_{(0;+\infty)} y = 7$

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$

Ta có $y = 3x + \frac{4}{x^2} \Rightarrow y' = 3 - \frac{8}{x^3}$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{x^3} = 3 \Leftrightarrow x^3 = \frac{8}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{8}{3}}$

x		0	$\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$	$+\infty$	
y'			-	0	+
y				$3\sqrt[3]{9}$	

$\Rightarrow \min_{(0;+\infty)} y = y\left(\sqrt[3]{\frac{8}{3}}\right) = 3\sqrt[3]{9}$

Câu 32. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Tìm m

A. $m = 4$.

B. $m = 2$.

C. $m = 1$.

D. $m = 3$.

Lời giải

Chọn A

$y' = 1 - \frac{4}{x^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2; \quad x = 2 \in (0; +\infty)$.

Bảng biến thiên:

x	0	2	$+\infty$	
y'		-	0	+
y	$+\infty$		4	$+\infty$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $y(2) = 4 \Rightarrow m = 4$.

Câu 33. Gọi a là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \frac{4}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Tìm a .

A. $3\sqrt[3]{4}$.

B. 5.

C. 6.

D. $2\sqrt[3]{16}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y = x^2 + \frac{4}{x} \Rightarrow y' = 2x - \frac{4}{x^2} = \frac{2x^3 - 4}{x^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$.

Ta thấy y' đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x = \sqrt[3]{2}$ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số là $y(\sqrt[3]{2}) = 3\sqrt[3]{4}$.

Câu 34. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 5 + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ bằng bao nhiêu?

A. 0

B. -1

C. -3

D. -2

Lời giải

Chọn C

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si ta có:

$$y = x + \frac{1}{x} - 5 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} - 5 = -3$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (vì $x > 0$).

Vậy $\min_{(0; +\infty)} y = -3$.

Câu 35. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x}$ trên nửa khoảng $[2; +\infty)$ là:

A. 2

B. $\frac{5}{2}$

C. 0

D. $\frac{7}{2}$

Lời giải

Chọn B

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta được: $f(x) = x + \frac{1}{x} = \frac{3x}{4} + \frac{x}{4} + \frac{1}{x} \geq \frac{3 \cdot 2}{4} + 2\sqrt{\frac{x}{4} \cdot \frac{1}{x}} = \frac{5}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = 2$.

Câu 36. Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[2;4]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $m > 4$

B. $3 < m \leq 4$

C. $m < -1$

D. $1 \leq m < 3$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = \frac{-1-m}{(x-1)^2}$

Trường hợp 1: $-1-m > 0 \Leftrightarrow m < -1$ suy ra y đồng biến trên $[2;4]$ suy ra

$$\min_{[2;4]} f(x) = f(2) = \frac{2+m}{1} = 3 \Leftrightarrow m = 1 \text{ (loại)}$$

Trường hợp 2: $-1-m < 0 \Leftrightarrow m > -1$ suy ra y nghịch biến trên $[2;4]$ suy ra

$$\min_{[2;4]} f(x) = f(4) = \frac{4+m}{3} = 3 \Leftrightarrow m = 5 \text{ suy ra } m > 4.$$

Câu 37. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 0

B. 6

C. 1

D. 2

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$, ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$. Ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

x	0	1	2
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	m	$-2+m$	$2+m$

Trường hợp 1: $2 + m < 0 \Leftrightarrow m < -2$. Khi đó $\max_{[0;2]} |f(x)| = -(-2 + m) = 2 - m$

$2 - m = 3 \Leftrightarrow m = -1$ (loại).

Trường hợp 2: $\begin{cases} 2 + m > 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 0$. Khi đó: $|m - 2| = 2 - m > 2 > 2 + m$

$\Rightarrow \max_{[0;2]} |f(x)| = -(-2 + m) = 2 - m$

$2 - m = 3 \Leftrightarrow m = -1$ (thỏa mãn).

Trường hợp 3: $\begin{cases} m > 0 \\ -2 + m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 2$. Khi đó: $|m - 2| = 2 - m < 2 < 2 + m \Rightarrow \max_{[0;2]} |f(x)| = 2 + m$

$2 + m = 3 \Leftrightarrow m = 1$ (thỏa mãn).

Trường hợp 4: $-2 + m > 0 \Leftrightarrow m > 2$. Khi đó $\max_{[0;2]} |f(x)| = 2 + m$

$2 + m = 3 \Leftrightarrow m = 1$ (loại).

Câu 38. Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m > 4$

B. $2 < m \leq 4$

C. $m \leq 0$

D. $0 < m \leq 2$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = \frac{1-m}{(x+1)^2}$.

☑ Nếu $m = 1 \Rightarrow y = 1, \forall x \neq -1$. Không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

☑ Nếu $m < 1 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[1; 2]$.

Khi đó: $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3} \Leftrightarrow y(1) + y(2) = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \frac{m+1}{2} + \frac{m+2}{3} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow m = 5$ (loại).

☑ Nếu $m > 1 \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên đoạn $[1; 2]$.

$$\text{Khi đó: } \min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3} \Leftrightarrow y(2) + y(1) = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \frac{2+m}{3} + \frac{1+m}{2} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow m = 5 \text{ (t/m)}$$

Câu 39. Có một giá trị m_0 của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m^2 + 1)x + m + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 trên đoạn $[0;1]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $2018m_0 - m_0^2 \geq 0$.

B. $2m_0 - 1 < 0$.

C. $6m_0 - m_0^2 < 0$.

D. $2m_0 + 1 < 0$.

Lời giải

Chọn A

+ Đặt $f(x) = x^3 + (m^2 + 1)x + m + 1$.

+ Ta có: $y' = 3x^2 + m^2 + 1$. Dễ thấy rằng $y' > 0$ với mọi x, m thuộc $\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số đồng biến trên $[0;1]$. Vì thế $\min_{[0;1]} y = \min_{[0;1]} f(x) = f(0) = m + 1$.

+ Theo bài ra ta có: $m + 1 = 5$, suy ra $m = 4$.

+ Như vậy $m_0 = 4$ và mệnh đề đúng là $2018m_0 - m_0^2 \geq 0$.

Câu 40. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 - 2x + m|$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng 5.

A. -1.

B. 2.

C. -2.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = \frac{2x-2}{x^2-2x+m}$, $y' = 0 \Rightarrow x = 1$.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương $\max\{y(-1), y(2), y(1)\} = 5$.

$\Leftrightarrow \max\{|3+m|, |m|, |m-1|\} = 5$.

+ **Trường hợp** $m \geq -1$, ta có $\max\{|3+m|, |m|, |m-1|\} = 5 \Leftrightarrow |3+m| = 5 \Rightarrow m = 2$.

+ **Trường hợp** $m < -1$ ta có $\max\{|3+m|, |m|, |m-1|\} = 5 \Leftrightarrow |m-1| = 5 \Rightarrow m = -4$.

Vậy tổng các giá trị m bằng -2.

Câu 41. Nếu hàm số $y = x + m + \sqrt{1-x^2}$ có giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{2}$ thì giá trị của m là

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $-\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{2}$.

D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y = x + m + \sqrt{1-x^2}$

Tập xác định: $D = [-1;1]$.

Ta có: $y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x^2} = x \\ 1-x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > x \geq 0 \\ \sqrt{1-x^2} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > x \geq 0 \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > x \geq 0 \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ta có: $y(-1) = -1 + m$, $y(1) = 1 + m$, $y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} + m$.

Do hàm số $y = x + m + \sqrt{1-x^2}$ liên tục trên $[-1; 1]$ nên $\text{Max}_{[-1;1]} y = m + \sqrt{2}$.

Theo bài ra thì $\text{Max}_{[-1;1]} y = 2\sqrt{2}$, suy ra $m + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow m = \sqrt{2}$.

Câu 42. Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[0;1]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $1 \leq m < 3$ B. $m > 6$ C. $m < 1$ D. $3 < m \leq 6$

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Với $m = 1 \Rightarrow y = 1, \forall x \in [0; 1]$ thì $\min_{[0;1]} y \neq 3$.

Suy ra $m \neq 1$. Khi đó $y' = \frac{1-m}{(x+1)^2}$ không đổi dấu trên từng khoảng xác định.

Trường hợp 1: $y' > 0 \Leftrightarrow m < 1$ thì $\min_{[0;1]} y = y(0) \Rightarrow m = 3$ (loại).

Trường hợp 2: $y' < 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì $\min_{[0;1]} y = y(1) \Rightarrow m = 5$ (thỏa mãn).

Câu 43. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ trên $[1; 2]$ bằng 8 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $m > 10$. B. $8 < m < 10$. C. $0 < m < 4$. D. $4 < m < 8$.

Lời giải

Chọn B

Nếu $m = 1$ thì $y = 1$ (không thỏa mãn tổng của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất bằng 8)

Nếu $m \neq 1$ thì hàm số đã cho liên tục trên $[1; 2]$ và $y' = \frac{1-m}{(x+1)^2}$.

Khi đó đạo hàm của hàm số không đổi dấu trên đoạn $[1; 2]$.

Do vậy $\min_{x \in [1;2]} y + \max_{x \in [1;2]} y = y(1) + y(2) = \frac{m+1}{2} + \frac{m+2}{3} = 8 \Leftrightarrow m = \frac{41}{5}$.

Câu 44. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - m$. Trên $[-1; 1]$ hàm số có giá trị nhỏ nhất là -1 . Tính m ?

- A. $m = -6$. B. $m = -3$. C. $m = -4$. D. $m = -5$.

Lời giải

Chọn C

Xét $[-1;1]$ có $y' = 6x^2 - 6x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1;1] \\ x = 1 \in [-1;1] \end{cases}.$$

Khi đó

$$y(-1) = -5 - m; y(0) = -m; y(1) = -1 - m$$

Ta thấy $-5 - m < -1 - m < -m$ nên $\min_{[-1;1]} y = -5 - m$.

Theo bài ra ta có $\min_{[-1;1]} y = -1$ nên $-5 - m = -1 \Leftrightarrow m = -4$.

Câu 45. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + 2m - 1|$ trên đoạn $[0;2]$ là nhỏ nhất. Giá trị của m thuộc khoảng nào?

- A. $\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$. B. $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$. C. $[-1; 0]$. D. $(0; 1)$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + 2m - 1$ trên đoạn $[0;2]$.

$$\text{Ta có } f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin [0;2] \\ x = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } f(0) = 2m - 1, f(1) = 2m - 3 \text{ và } f(2) = 2m + 1$$

$$\text{Suy ra } \max_{[0;2]} |f(x)| = \max\{|2m - 1|; |2m - 3|; |2m + 1|\} = \max\{|2m - 3|; |2m + 1|\} = P.$$

Trường hợp 1: Xét $|2m - 3| \geq |2m + 1| \Leftrightarrow -4(4m - 2) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}$.

Khi đó $P = |2m - 3| \geq 2, \forall m \leq \frac{1}{2}$. Suy ra $P_{\min} = 2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Trường hợp 2: Xét $|2m - 3| < |2m + 1| \Leftrightarrow -4(4m - 2) < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$.

Khi đó $P = |2m + 1| > 2, \forall m > \frac{1}{2}$. Suy ra $P_{\min}$ không tồn tại.

$$\text{Vậy } m = \frac{1}{2}.$$

Câu 46. Biết S là tập giá trị của m để tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - m^2x^3 - 2x^2 - m$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -16 . Tính tích các phần tử của S .

- A. 2. B. -2. C. -15. D. -17.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 4x^3 - 3m^2x^2 - 4x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 3m^2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4x^2 - 3m^2x - 4 = 0 \quad (\Delta = 9m^2 + 64) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3m^2 + \sqrt{9m^2 + 64}}{8} > 1 \\ x = \frac{3m^2 - \sqrt{9m^2 + 64}}{8} < 0 \end{cases}$$

Nên hàm số đơn điệu trên $(0;1)$.

Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;1]$ bằng -16 nên

$$y(0) + y(1) = -16 \Leftrightarrow -m + (-m^2 - m - 1) = -16 \Leftrightarrow -m^2 - 2m + 15 = 0.$$

Vậy $m_1 \cdot m_2 = -15$.

Câu 47. Gọi A, B lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x+m^2+m}{x-1}$ trên đoạn $[2;3]$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $A+B = \frac{13}{2}$.

A. $m=1; m=-2$.

B. $m=-2$.

C. $m=\pm 2$.

D. $m=-1; m=2$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y = \frac{x+m^2+m}{x-1}$ trên đoạn $[2;3]$.

$$y' = \frac{-m^2-m-1}{(x-1)^2} < 0 \quad \forall x \in [2;3] \Rightarrow A = f(3) = \frac{m^2+m+3}{2}, B = f(2) = \frac{m^2+m+2}{1}.$$

$$A+B = \frac{13}{2} \Leftrightarrow \frac{m^2+m+3}{2} + \frac{m^2+m+2}{1} = \frac{13}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-2 \end{cases}.$$

Câu 48. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2+mx+1}{x+m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ tại một điểm $x_0 \in (0;2)$.

A. $0 < m < 1$

B. $m > 1$

C. $m > 2$

D. $-1 < m < 1$

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$. Hàm số liên tục trên $[0;2] \Leftrightarrow \begin{cases} -m < 0 \\ -m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -2 \end{cases}$

$$\text{Ta có } y' = \frac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2} = \frac{(x+m)^2-1}{(x+m)^2}. \text{ Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -m-1 \\ x_2 = -m+1 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_1	$-m$	0	x_2	2	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y			$\mathcal{CD}$		$+\infty$		CT	$+\infty$
	$-\infty$			$-\infty$				

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 \in (0; 2)$ nên $0 < -m+1 < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 1$

So với điều kiện hàm số liên tục trên đoạn $[0; 2]$. Ta có $0 < m < 1$.

Câu 49. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{x^2 + mx + m}{x+1} \right|$ trên $[1; 2]$ bằng 2. Số phần tử của tập S

A. 3.

B. 1.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Xét $y = \frac{x^2 + mx + m}{x+1}$. Ta có: $f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [1; 2] \\ x = -2 \notin [1; 2] \end{cases}$.

Mà $f(1) = \frac{2m+1}{2}$, $f(2) = \frac{3m+4}{3} \Rightarrow \max_{x \in [1; 2]} y = \left\{ \left| \frac{2m+1}{2} \right|, \left| \frac{3m+4}{3} \right| \right\}$.

Trường hợp 1: $\max_{x \in [1; 2]} y = \left| \frac{2m+1}{2} \right| = 2 \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ m = -\frac{5}{2} \end{cases}$.

• Với $m = \frac{3}{2} \Rightarrow \left| \frac{3m+4}{3} \right| = \frac{17}{6} > 2$ (loại)

• Với $m = -\frac{5}{2} \Rightarrow \left| \frac{3m+4}{3} \right| = \frac{7}{6} < 2$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: $\max_{x \in [1; 2]} y = \left| \frac{3m+4}{3} \right| = 2 \Rightarrow \begin{cases} 3m+4 = 6 \\ 3m+4 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ m = -\frac{10}{3} \end{cases}$.

• Với $m = \frac{2}{3} \Rightarrow \left| \frac{2m+1}{2} \right| = \frac{7}{6} < 2$ (thỏa mãn)

• Với $m = -\frac{10}{3} \Rightarrow \left| \frac{2m+1}{2} \right| = \frac{17}{6} > 2$ (loại)

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 50. Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x-m^2+m}{x+1}$ trên đoạn $(0; 1)$ bằng -2

A. $\begin{cases} m=1 \\ m=2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} m=1 \\ m=-2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} m=-1 \\ m=2 \end{cases}$

D. $m = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = \frac{-m^2 + m + 1}{(x+1)^2} < 0, \forall m \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Hs luôn nghịch biến trên $[0;1]$

$\Rightarrow \underset{[0;1]}{\text{Max}} f(x) = f(0) \Leftrightarrow -m^2 + m = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=-1 \end{cases}$

Câu 51. Cho hàm số $y = \frac{1-m\sin x}{\cos x + 2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0;10]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số nhỏ hơn -2 ?

A. 1.

B. 9.

C. 3.

D. 6.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y = \frac{1-m\sin x}{\cos x + 2} \Leftrightarrow y \cos x + m \sin x = 1 - 2y$.

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi: $y^2 + m^2 \geq 1 - 4y + 4y^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 4y + 1 - m^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{1+3m^2}}{3} \leq y \leq \frac{2 + \sqrt{1+3m^2}}{3}$.

Theo đề bài, ta có: $\begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}} y = \frac{2 - \sqrt{1+3m^2}}{3} < -2 \\ m \in [0;10] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+3m^2} > 8 \\ m \in [0;10] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 > 63 \\ m \in [0;10] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 21 \\ m \in [0;10] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow m \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Vậy có 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 52. Xét hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$, với a, b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a+2b$.

A. 2.

B. 4.

C. -4.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$. Theo đề bài, M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;3]$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} M \geq f(-1) \\ M \geq f(3) \\ M \geq f(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \geq |1-a+b| \\ M \geq |9+3a+b| \\ M \geq |1+a+b| \end{cases} \Rightarrow 4M \geq |1-a+b| + |9+3a+b| + 2|-1-a-b|$$

$$\geq |1-a+b+9+3a+b+2(-1-a-b)| \Rightarrow 4M \geq 8 \Rightarrow M \geq 2.$$

Nếu $M = 2$ thì điều kiện cần là $|1-a+b| = |9+3a+b| = |-1-a-b| = 2$ và $1-a+b$, $9+3a+b$,

$$-1-a-b \text{ cùng dấu} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-a+b=9+3a+b=-1-a-b=2 \\ 1-a+b=9+3a+b=-1-a-b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \end{cases}.$$

Ngược lại, khi $\begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \end{cases}$ ta có, hàm số $f(x) = |x^2 - 2x - 1|$ trên $[-1; 3]$.

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 2x - 1$ xác định và liên tục trên $[-1; 3]$.

$$g'(x) = 2x - 2; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [-1; 3]$$

M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $[-1; 3] \Rightarrow M = \max\{|g(-1)|; |g(3)|; |g(1)|\} = 2$.

Vậy $\begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \end{cases}$. Ta có: $a+2b = -4$.

Câu 53. Cho hàm số $y = ax^3 + cx + d$, $a \neq 0$ có $\min_{x \in (-\infty; 0)} f(x) = f(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$

trên đoạn $[1; 3]$ bằng

A. $d - 11a$.

B. $d - 16a$.

C. $d + 2a$.

D. $d + 8a$.

Lời giải

Chọn B

Vì $y = ax^3 + cx + d$, $a \neq 0$ là hàm số bậc ba và có $\min_{x \in (-\infty; 0)} f(x) = f(-2)$ nên $a < 0$ và $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Ta có $y' = 3ax^2 + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow ac < 0$.

Vậy với $a < 0$, $c > 0$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm đối nhau $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{3a}}$

Từ đó suy ra $\min_{x \in (-\infty; 0)} f(x) = f\left(-\sqrt{-\frac{c}{3a}}\right) \Leftrightarrow -\sqrt{-\frac{c}{3a}} = -2 \Leftrightarrow \sqrt{-\frac{c}{3a}} = 2 \Leftrightarrow c = -12a$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	1	2	3	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$				$f(2)$		$-\infty$
		$f(-2)$					

Ta suy ra $\max_{x \in [1; 3]} f(x) = f(2) = 8a + 2c + d = -16a + d$.

Câu 54. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{x^2 - mx + 2m}{x - 2} \right|$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 3. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

A. $-\frac{8}{3}$.

B. 5.

C. $\frac{5}{3}$.

D. -1.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - mx + 2m}{x - 2}$ trên $[-1; 1]$ có $f'(x) = 1 - \frac{4}{(x - 2)^2}$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \notin [-1; 1] \end{cases}; f(-1) = \frac{3m+1}{-3}; f(0) = -m; f(1) = \frac{m+1}{-1}.$$

Bảng biến thiên

x	-1	0	1
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(1)$

Trường hợp 1. $f(0) \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$. Khi đó

$$3 = \max_{[-1; 1]} |f(x)| = \max \{ |f(-1)|; |f(1)| \} \Leftrightarrow 3 = \max \left\{ \frac{3m+1}{3}; m+1 \right\} \Leftrightarrow m+1 = 3 \Leftrightarrow m = 2.$$

Trường hợp 2. $f(0) > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Khả năng 1. $\begin{cases} f(-1) \geq 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1$. Khi đó $3 = \max_{[-1; 1]} |f(x)| = f(0) \Leftrightarrow m = -3$.

Khả năng 2. $-1 < m \leq -\frac{1}{3}$. Khi đó $\begin{cases} f(-1) \geq 0 \\ f(1) < 0 \end{cases}$. $3 = \max_{[-1; 1]} |f(x)| = \max \{ f(0); |f(1)| \}$

$$\Leftrightarrow 3 = \max \{ -m; m+1 \}: \text{Trường hợp này vô nghiệm.}$$

Khả năng 3. $-\frac{1}{3} < m < 0$. Khi đó $3 = \max_{[-1; 1]} |f(x)| = \max \{ f(0); |f(1)|; |f(-1)| \}$: Vô nghiệm.

Vậy có hai giá trị thỏa mãn là $m_1 = -3$, $m_2 = 2$.

Do đó tổng tất cả các phần tử của S là -1.

Câu 55. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x+m}{x^2+x+1}$ có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$ nhỏ hơn hoặc bằng 1.

A. $m \leq 1$.

B. $m \geq 1$.

C. $m \geq -1$.

D. $m \leq -1$.

Lời giải

Chọn A

+ TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

+ $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$

$$+ y' = \frac{-x^2 - 2mx + 1 - m}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 2mx + 1 - m = 0 \quad (*)$$

$\Delta'_{(*)} = m^2 - m + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1 < x_2, \forall m \in \mathbb{R}$

+ BBT:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y						

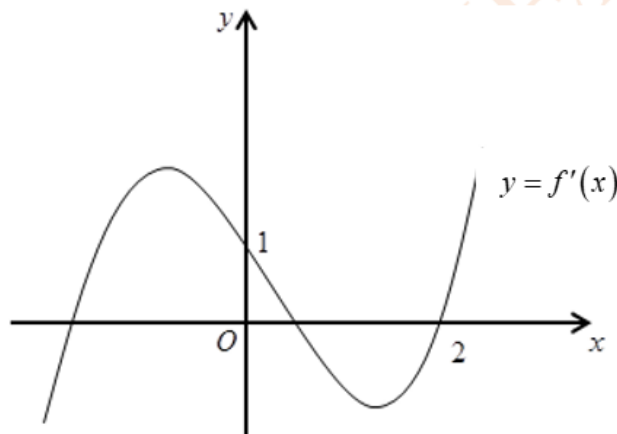
$0 \rightarrow f(x_1) \rightarrow f(x_2) \rightarrow 0$

Vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất là $f(x_2) = \frac{1}{2x_2 + 1}$ với $x_2 = -m + \sqrt{m^2 - m + 1}$

$$YCBT \Leftrightarrow \frac{1}{-2m + 2\sqrt{m^2 - m + 1} + 1} \leq 1 \Leftrightarrow 1 - 2m + 2\sqrt{m^2 - m + 1} \geq 1 \quad (\text{vì } f(x_2) > 0 \Rightarrow 2x_2 + 1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m^2 - m + 1} \geq m \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \geq 0 \\ m^2 - m + 1 \geq m^2 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 1$$

Câu 56. Cho hàm số $f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Bất phương trình $f(x) > x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi

A. $m \leq f(0)$.

B. $m < f(0)$.

C. $m \leq f(2) - 2$.

D. $m < f(2) - 2$.

Lời giải

Chọn C

Xét bất phương trình $f(x) > x + m \Leftrightarrow m < f(x) - x$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - x$ với $x \in (0; 2)$. Ta có $g'(x) = f'(x) - 1$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1$. Từ đồ thị ta thấy đường thẳng $y = 1$ không cắt đồ thị $y = f'(x)$ tại bất kỳ điểm nào có hoành độ thuộc khoảng $(0; 2)$ nên phương trình $f'(x) = 1$ vô nghiệm với $x \in (0; 2)$. Ta có bảng biến thiên như sau:

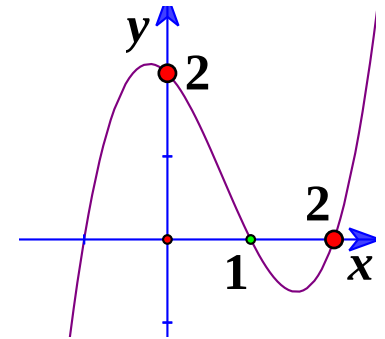
x	0	2
$g'(x)$	-	
$g(x)$	$g(0)$	$g(2)$

(do $f'(x) < 1$ với $x \in (0; 2)$).

Từ bảng biến thiên ta thấy để $m < g(x)$ với $x \in (0; 2) \Leftrightarrow m \leq g(2) \Leftrightarrow m \leq f(2) - 2$.

Câu 57. Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $f(x) < 2x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi

- A. $m \geq f(0)$.
- B. $m \geq f(2) - 4$.
- C. $m > f(0)$.
- D. $m > f(2) - 4$.



Lời giải

Chọn A

$$f(x) < 2x + m \Leftrightarrow m > f(x) - 2x \Leftrightarrow m \geq \max_{(0,2)} [f(x) - 2x]$$

$$\text{Ta tìm } \max_{[0,2]} [f(x) - 2x]$$

$$\text{Đặt } g(x) = f(x) - 2x$$

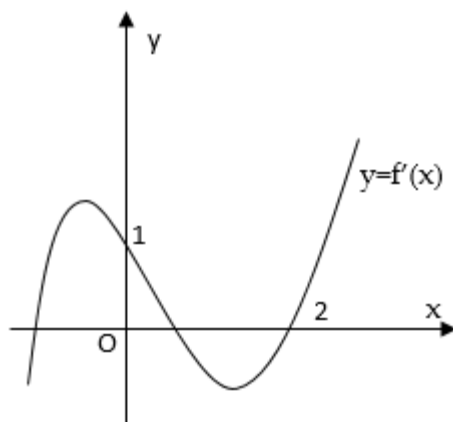
$$g'(x) = f'(x) - 2$$

$$\forall x \in [0; 2], f'(x) - 2 < 0$$

$$\Rightarrow \max_{[0,2]} g(x) = g(0) = f(0)$$

$$\text{Vậy } m \geq f(0)$$

Câu 58. Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Bất phương trình $f(x) < x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi

- A.** $m > f(2) - 2$. **B.** $m > f(0)$. **C.** $m \geq f(2) - 2$. **D.** $m \geq f(0)$.

Lời giải

Chọn D

$$f(x) < x + m \Leftrightarrow f(x) - x < m.$$

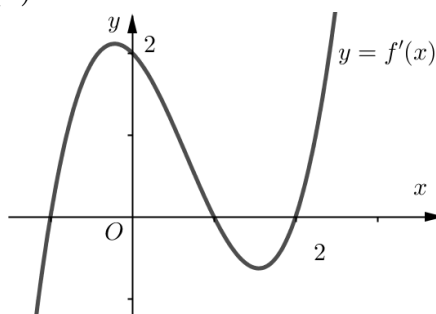
Đặt $g(x) = f(x) - x$ xét trên khoảng $(0; 2)$.

$$g'(x) = f'(x) - 1.$$

Từ đồ thị ta thấy $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ với mọi $x \in (0; 2)$. Suy ra hàm số $g(x) = f(x) - x$ luôn nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Bất phương trình $f(x) < x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi $m \geq \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = f(0)$.

Câu 59. Cho hàm số $f(x)$, hàm số $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



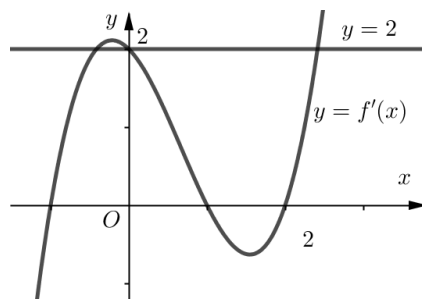
Bất phương trình $f(x) > 2x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi

- A.** $m < f(2) - 4$. **B.** $m \leq f(2) - 4$. **C.** $m \leq f(0)$. **D.** $m < f(0)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $g(x) = f(x) - 2x$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ vì $g'(x) = f'(x) - 2 < 0, \forall x \in (0; 2)$ (quan sát trên khoảng $(0; 2)$, đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm dưới đường thẳng $y = 2$).



Suy ra $g(2) < g(x) < g(0), \forall x \in (0; 2)$.

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi

$$m < g(x), \forall x \in (0; 2) \Leftrightarrow m \leq g(2) \Leftrightarrow m \leq f(2) - 4.$$

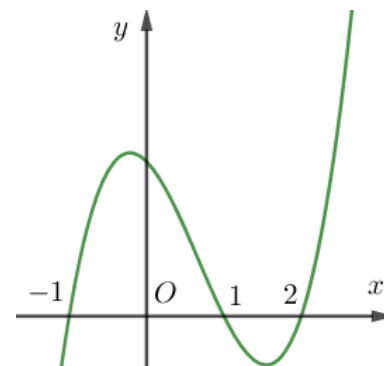
Câu 60. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ là

A. $f(1)$.

B. $f(-1)$.

C. $f(2)$.

D. $f(0)$.



Lời giải

Chọn A

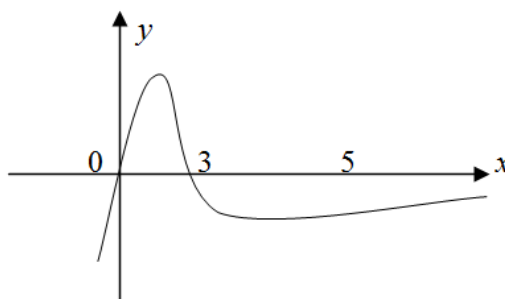
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Từ đồ thị hàm $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$		$f(-1)$	$f(1)$	$f(2)$	$+\infty$

Từ đó suy ra giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1; 2]$ là $f(1)$.

Câu 61. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) + f(1) - 2f(3) = f(5) - f(4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$.



A. $m = f(5), M = f(3)$

B. $m = f(5), M = f(1)$

C. $m = f(0), M = f(3)$

D. $m = f(1), M = f(3)$

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$

x	0	3	5	
$f'(x)$	0	+	0	-
$f(x)$	$f(0)$	$f(3)$	$f(5)$	

$\Rightarrow M = f(3)$ và $f(1) < f(3), f(4) < f(3)$

$f(5) - f(0) = f(1) - f(3) + f(4) - f(3) < 0 \Rightarrow f(5) < f(0) \Rightarrow m = f(5).$

Câu 62. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

Bất phương trình $f(e^x) < e^x + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	1	$-\infty$

A. $m \geq f\left(\frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e}$

B. $m > f(-1) - \frac{1}{e}$

C. $m \geq f(-1) - \frac{1}{e}$

D. $m > f\left(\frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(e^x) < e^x + m \Leftrightarrow f(e^x) - e^x < m, x \in (-1; 1).$

Đặt $g(x) = f(e^x) - e^x$ khi đó $m > g(x) \forall x \in (-1; 1) \Leftrightarrow m \geq \max_{[-1; 1]} g(x).$

Xét $g(x) = f(e^x) - e^x$ trên $[-1; 1].$

Có $g'(x) = e^x f'(e^x) - e^x = e^x (f'(e^x) - 1) < 0, \forall x \in [-1; 1]$ (Suy ra từ bảng biến thiên).

Do đó $\max_{[-1; 1]} g(x) = g(-1) = f\left(\frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e}$.

Vậy $m \geq \max_{[-1; 1]} g(x) = g(-1) = f\left(\frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e}$ là giá trị cần tìm.

Câu 63. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$ trên đoạn $[1; 3]$.

x	$-\infty$	0		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
		-3		5		$-\infty$

A. 15.

B. $\frac{25}{3}$.

C. $\frac{19}{3}$.

D. 12.

Lời giải

Chọn D

$$g'(x) = (4 - 2x)f'(4x - x^2) + x^2 - 6x + 8 = (2 - x)[2f'(4x - x^2) + 4 - x].$$

Với $x \in [1; 3]$ thì $4 - x > 0$; $3 \leq 4x - x^2 \leq 4$ nên $f'(4x - x^2) > 0$.

Suy ra $2f'(4x - x^2) + 4 - x > 0, \forall x \in [1; 3]$.

Bảng biến thiên

x	1	2	3	
g'		+	0	-
g				

$g(1)$

$g(2)$

$g(3)$

Suy ra $\max_{[1; 3]} g(x) = g(2) = f(4) + 7 = 12$.

Câu 64. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$		1	
		-3		$-\infty$

Bất phương trình $f(e^x) < e^x + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi

A. $m \geq f\left(\frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e}$ B. $m > f(-1) - \frac{1}{e}$ C. $m \geq f(-1) - \frac{1}{e}$ D. $m > f\left(\frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(e^x) < e^x + m \Leftrightarrow f(e^x) - e^x < m, x \in (-1; 1)$.

Đặt $g(x) = f(e^x) - e^x$ khi đó $m > g(x) \forall x \in (-1; 1) \Leftrightarrow m \geq \max_{[-1; 1]} g(x)$.

Xét $g(x) = f(e^x) - e^x$ trên $[-1; 1]$.

Có $g'(x) = e^x f'(e^x) - e^x = e^x (f'(e^x) - 1) < 0, \forall x \in [-1; 1]$ (Suy ra từ bảng biến thiên).

Do đó $\max_{[-1; 1]} g(x) = g(-1) = f\left(\frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e}$.

Vậy $m \geq \max_{[-1; 1]} g(x) = g(-1) = f\left(\frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e}$ là giá trị cần tìm.

Câu 65. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	-1	0	2	3
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	2	3	1

Gọi S là tập hợp các số nguyên dương m để bất phương trình $f(x) \geq m(x^3 - 3x^2 + 5)$ có nghiệm thuộc đoạn $[-1; 3]$. Số phần tử của S là

A. 3 B. Vô số C. 2 D. 0

Lời giải

Chọn B

Gọi $g(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ trên đoạn $[-1; 3]$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$g(-1) = 1; g(0) = 5; g(2) = 1; g(3) = 5 \Rightarrow 1 \leq g(x) \leq 5, \forall x \in [-1; 3]$$

$$f(x) \geq m(x^3 - 3x^2 + 5), \forall x \in [-1; 3] \Leftrightarrow m \leq \frac{f(x)}{g(x)}, \forall x \in [-1; 3] \Leftrightarrow m \leq \min_{[-1; 3]} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Vì hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ suy ra tồn tại giá trị nhỏ nhất của hàm số $\frac{f(x)}{g(x)}$ trên đoạn $[-1;3]$

Suy ra $m \in \left(-\infty; \min_{[-1;3]} \frac{f(x)}{g(x)}\right] \Rightarrow$ Số phần tử của tập hợp S là vô số

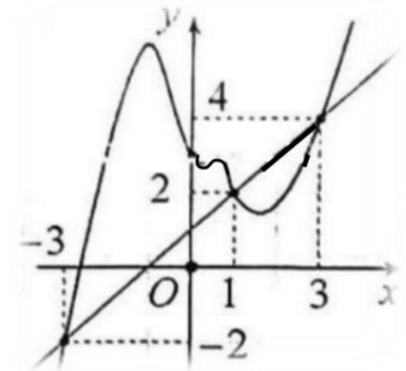
Câu 66. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Mệnh đề dưới đây đúng.

A. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(3)$.

B. $\min_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

C. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(0)$.

D. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.



Lời giải

Chọn D

$$g(x) = 2f(x) - (x+1)^2 \Rightarrow g'(x) = 2f'(x) - 2(x+1)$$

Dựa vào đồ thị ta thấy

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Và

với $x \in (-\infty; -3): f'(x) < x+1 \Rightarrow g'(x) < 0$

với $x \in (-3; 1): f'(x) > x+1 \Rightarrow g'(x) > 0$,

với $x \in (1; 3): f'(x) < x+1 \Rightarrow g'(x) < 0$

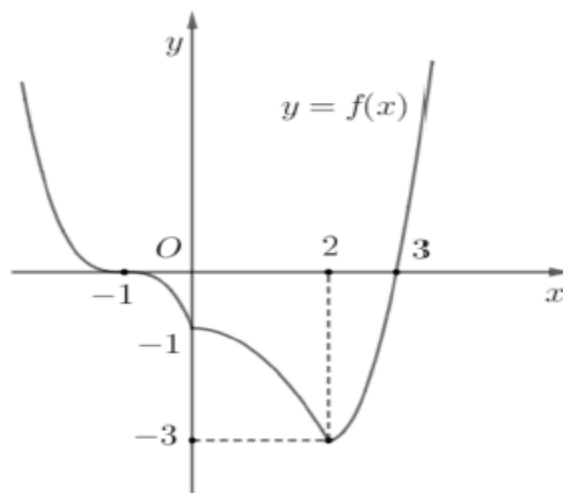
với $x \in (3; +\infty): f'(x) > x+1 \Rightarrow g'(x) > 0$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $\max_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

Câu 67. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $2f(x) + x^3 > 2m + 3x^2$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1;3)$ khi và chỉ khi



A. $m < -10$.

B. $m < -5$.

C. $m < -3$.

D. $m < -2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2f(x) + x^3 > 2m + 3x^2 \Leftrightarrow 2f(x) > -x^3 + 3x^2 + 2m$

Nhận xét $\min_{(-1;3)} f(x) = f(2) = -3$

Đặt $g(x) = -x^3 + 3x^2 + 2m, \forall x \in (-1;3)$

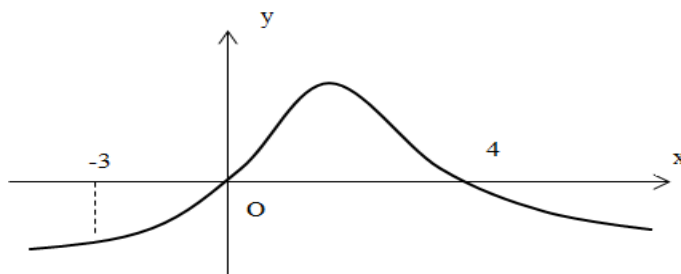
$$g'(x) = -3x^2 + 6x, g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$g(0) = 2m; g(-1) = 4 + 2m; g(3) = 2m \text{ và } g(2) = 4 + 2m$$

$$\Rightarrow \max_{(-1;3)} g(x) = g(2) = 4 + 2m$$

$$\text{ycbt} \Leftrightarrow 2 \min_{(-1;3)} f(x) > \max_{(-1;3)} g(x) \Leftrightarrow -6 > 2m + 4 \Leftrightarrow m < -5$$

Câu 68. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ.



Biết rằng $f(-3) + f(0) = f(4) + f(-1)$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[-3;4]$ lần lượt là:

A. $f(4)$ và $f(-3)$.

B. $f(-3)$ và $f(0)$.

C. $f(4)$ và $f(0)$.

D. $f(2)$ và $f(-3)$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$:

x	$-\infty$	-3	0	4	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$		$f(-3)$	$f(0)$	$f(4)$	

$f'(0) = f'(4) = 0$ nên $x = 0$ và $x = 4$ là hai điểm cực trị của $y = f(x)$.

Từ bảng biến thiên ta có $\min_{[-3;4]} f(x) = f(0)$, đồng thời $f(-3) > f(0)$.

Do đó: $f(-3) + f(0) = f(4) + f(-1) \Leftrightarrow f(-3) - f(4) = f(-1) - f(0) > 0 \Rightarrow f(-3) > f(4)$.

$\Rightarrow \max_{[-3;4]} f(x) = f(-3)$. Chọn **B**

----- HẾT -----

TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

Định nghĩa tiệm cận ngang

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn $(a; +\infty); (-\infty; b)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$.

Đường thẳng $y = y_0$ là đường **tiệm cận ngang** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0.$

② $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0.$

Định nghĩa tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ là đường **tiệm cận đứng** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

① $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty.$

② $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty.$

③ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty.$

④ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty.$

Nhận xét

– Với đồ thị hàm phân thức dạng $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0; ad-bc \neq 0$) luôn có tiệm cận ngang là $y = \frac{a}{c}$ và tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$.

Chú ý

① Hàm $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $ac \neq 0$ có tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$; tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$.

② Hàm $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ với $f(x), g(x)$ là những hàm đa thức, gọi bậc của $f(x), g(x)$ lần lượt là $p; q$.

Khi đó:

- ☐ Nếu $p < q$ thì có tiệm cận ngang duy nhất $y = 0$.
- ☐ Nếu $p = q$ thì có tiệm cận ngang $y = \frac{a}{b}$ với $a; b$ là hệ số của lũy thừa cao nhất trên tử và dưới mẫu.
- ☐ Nếu $p > q$ thì không có tiệm cận ngang.

$$\textcircled{3} \quad x = x_0 \text{ là tiệm cận đứng} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x_0) = 0; f(x_0) \neq 0 \\ g(x_0) = f(x_0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty \end{cases}.$$

④ Dùng CASIO để tìm tiệm cận đứng hoặc tiệm cận ngang của một hàm số qua CASIO, ta sử dụng phím CALC trên máy.

Một số lưu ý về kết quả và cách bấm:

Giới hạn	Trên máy tính
$x \rightarrow x_0^+$	CALC $x_0 + 10^{-10}$
$x \rightarrow x_0^-$	CALC $x_0 - 10^{-10}$
$x \rightarrow +\infty$	CALC 10^{10}
$x \rightarrow -\infty$	CALC -10^{10}

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Dạng toán 1. LÝ THUYẾT VỀ ĐƯỜNG TIỆM CẬN.

Phương pháp giải

○ Đường thẳng $y = y_0$ là đường **tiệm cận ngang** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0.$

② $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0.$

○ Đường thẳng $y = y_0$ là đường **tiệm cận đứng** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

① $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty.$

② $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty.$

③ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty.$

④ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty.$

Ví dụ 01.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) và các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của (C).

B. Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của (C).

C. Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của (C).

D. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận ngang của (C).

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \end{cases} \Rightarrow$ đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của (C) .

Ví dụ 02.

Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.
- B. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 1$ và $y = x + 1$.
- C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
- D. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

Lời giải

Chọn A

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ nên đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ nên đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -1$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.

Ví dụ 04.

Trong các phát biểu sau đây, đâu là phát biểu **đúng**?

- A. Các đường tiệm cận không bao giờ cắt đồ thị của nó.
- B. Nếu hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ thì đồ thị của nó không có tiệm cận đứng.
- C. Đồ thị của hàm số dạng phân thức luôn có tiệm cận đứng.
- D. Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $c \neq 0, ad - cb \neq 0$ luôn có hai đường tiệm cận.

Lời giải

Chọn D

Vì điều kiện $ad - bc \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ nên hàm không suy biến nên đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

với $c \neq 0, ad - cb \neq 0$ luôn có hai đường tiệm cận.

Ví dụ 05.

Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận.
- B. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$.
- C. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.
- D. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.

Lời giải

Chọn D

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.

Dạng toán 2. TÌM ĐƯỜNG TIỆM CẬN TỪ ĐỒ THỊ HOẶC BBT.

Phương pháp giải

- Đề cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ → nhìn đường thẳng mà đồ thị không cắt.
- Đề cho BBT → nhìn theo những vị trí sau:
 - ☑ Hai vị trí $-\infty$ và $+\infty$ (trên hàng x) giống xuống hàng y nếu hữu hạn thì đó là TCN.
 - ☑ Vị trí x_0 mà y có “2 gạch” → ta xem thử tại x_0^+ ; x_0^- thì y có chứa ∞ thì đó là TCD. (chỉ cần một trong hai vị trí hoặc cả hai vị trí x_0^+ ; x_0^- làm cho y có chứa ∞ thì đó là TCD).

Ví dụ 01.

Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên

$\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.
- B. Đồ thị hàm số có ít nhất một tiệm cận ngang.
- C. Hàm số không có đạo hàm tại $x = -1$.
- D. Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 1$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+	+	+
$f(x)$	2	$+\infty$	-1	$+\infty$	-2

Lời giải

Chọn A

Vì $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$ và $\lim_{x \rightarrow (1)^+} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.

Ví dụ 02.

Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới. Đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1.
- B. 2.
- C. 0.
- D. 3.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
y'	-	0	-	+
y	-3	$+\infty$	-5	2

Lời giải

Chọn D

Ta thấy

$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -3$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $y = -3$.

Ví dụ 03.

Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới. Khẳng định nào sau đây đúng ?

- A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.
- B. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.
- C. Đồ thị hàm số nhận $x=0$ làm tiệm cận đứng.
- D. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng.

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y		2		$+\infty$		4	$+\infty$

Lời giải

Chọn C

Ta thấy từ BBT duy nhất $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty \end{cases}$ nên ĐTHS có tiệm cận đứng $x=0$.

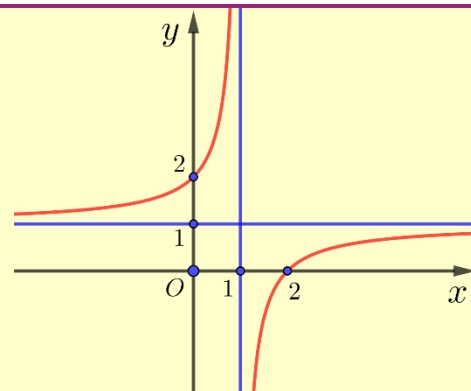
Và ĐTHS có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty \end{cases}$ nên ĐTHS không có TCN.

Ví dụ 04.

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên.

Khẳng định nào sau đây sai ?

- A. Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng.
- B. Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang.
- C. Đồ thị hàm số nhận $x=0$ làm tiệm cận đứng.
- D. Đồ thị hàm số không có điểm cực trị.



Lời giải

Chọn C

Ta thấy từ đồ thị ta thấy $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} y = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty \end{cases}$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$.

Dạng toán 3. TÌM ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ TƯỜNG MINH.

Phương pháp giải

1. Các bước tìm Tiệm cận ngang:

○ **Bước 1.** Tìm tập xác định của $y = f(x)$. Giả sử $x \in (a; b)$.

① Nếu $a; b$ hữu hạn $\rightarrow$ ĐTHS không có Tiệm cận ngang.

② Nếu a/b là vô cùng $\rightarrow$ Bước 2.

○ **Bước 2.** Tính $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_2 \end{cases} (*)$.

○ **Bước 3.** Kết luận:

Trường hợp 1. Nếu $y_1 = y_2$ (hữu hạn) $\rightarrow$ Có 1 tiệm cận ngang.

Trường hợp 2. Nếu $y_1 \neq y_2$ (hữu hạn) $\rightarrow$ Có 2 tiệm cận ngang.

Trường hợp 3. Nếu

① y_1 hữu hạn và $\begin{cases} y_2 = \pm\infty \\ y_2 \neq \end{cases} \rightarrow$ Có 1 tiệm cận ngang.

② y_2 hữu hạn và $\begin{cases} y_1 = \pm\infty \\ y_1 \neq \end{cases} \rightarrow$ Có 1 tiệm cận ngang.

Cách xác định nhanh tiệm cận ngang:

Hàm $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ gọi bậc của $f(x), g(x)$ lần lượt là $p; q$. Khi đó:

□ Nếu $p < q$ thì có tiệm cận ngang duy nhất $y = 0$.

□ Nếu $p = q$ thì có tiệm cận ngang $y = \frac{a}{b}$ với $a; b$ là hệ số của lũy thừa cao nhất trên tử và dưới mẫu.

□ Nếu $p > q$ thì không có tiệm cận ngang.

2. Các bước tìm Tiệm cận đứng:

Xét hàm $y = f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$ có $D; E; F$ lần lượt là tập xác định của $f(x); h(x); g(x)$.

○ **Bước 1.** Giải $g(x) = 0 \rightarrow x_0$. Nếu $\begin{cases} x_0 \in E \\ x_0 \in F \\ x_0 \notin D \end{cases} \rightarrow$ bước 2, ngược lại không thỏa thì loại.

○ **Bước 2.** Thay x_0 vào $h(x)$ ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1. Nếu x_0 không là nghiệm của tử $\rightarrow x = x_0$ là tiệm cận đứng.

Trường hợp 2. Nếu x_0 là nghiệm tử (bội m) và là nghiệm mẫu (bội n) với $m < n \rightarrow x = x_0$ là tiệm cận đứng.

Ví dụ 01.

Đồ thị hàm số nào sau đây nhận đường thẳng $x=2$ làm đường tiệm cận:

- A. $y = x - 2 - \frac{2}{x}$. B. $y = 2$. C. $y = \frac{2x}{x+2}$. D. $y = \frac{2x}{x-2}$.

Lời giải

Chọn D

Chỉ có đáp án C hàm số không xác định tại $x=2$ nên đáp án C đúng.

Ví dụ 02.

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-5x+6}$ là ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ x^2-5x+6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \neq 2, x \neq 3 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

Tuy nhiên $x=3$ không thỏa mãn $4-x^2 \geq 0$.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-5x+6} = +\infty \Rightarrow (C) \text{ có một tiệm cận đứng } x=2.$$

Lại có $\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \neq 2, x \neq 3 \end{cases}$ nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y \Rightarrow (C)$ không có tiệm cận ngang.

Tóm lại (C) có 1 tiệm cận đứng duy nhất là $x=2$.

Ví dụ 03.

Đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-3}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng nào sau đây ?

- A. $x = -\frac{1}{2}$. B. $x = 3$. C. $y = -\frac{1}{3}$. D. $y = 2$.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm phân thức $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$.

Đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-3}$ có tiệm cận đứng là $x=3$.

Ví dụ 04.

Đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nào dưới đây??

A. $y = \frac{2}{x+1}$.

B. $y = \frac{-2x+3}{x-2}$.

C. $y = \frac{2x-2}{x+2}$.

D. $y = \frac{1+x}{1-2x}$.

Lời giải

Chọn C

Tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c} = 2$.

Ví dụ 05.

Cho hàm số $y = \frac{x(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+2x+1}$ có đồ thị (C). Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. Đồ thị (C) không có tiệm cận đứng và hai tiệm cận ngang.

B. Đồ thị (C) không có tiệm cận đứng và có một tiệm cận ngang.

C. Đồ thị (C) có một tiệm cận đứng và hai tiệm cận ngang.

D. Đồ thị (C) có một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}} - \frac{2}{x} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+2x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 \left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}} - \frac{2}{x} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+2x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x(x^2-1)}{(x^2+2x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x(x-1)}{(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+2x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x(x^2-1)}{(x^2+2x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x(x-1)}{(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = -\infty$$

Vậy đồ thị (C) có một tiệm cận đứng và hai tiệm cận ngang.

Dạng toán 4. BIỆN LUẬN TIỆM CẬN CHỨA THAM SỐ m .

Phương pháp giải

Bài toán 1. Tiệm cận đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (C).

- Để đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ thì $\begin{cases} c \neq 0 \\ ad-bc \neq 0 \end{cases}$.

Bài toán 2. Tiệm cận đồ thị hàm số $y = \frac{a}{f(x)}$ (C') với a là hằng số và $f(x)$ là đa thức bậc $n > 0$.

- Ta có a là hằng số và $f(x)$ là đa thức bậc $n > 0$ nên đồ thị hàm số (C') luôn có **tiệm cận ngang** duy nhất là $y = 0$ (bậc tử < bậc mẫu).
- Tìm tiệm cận đứng bằng cách giải $f(x) = 0 \rightarrow x = x_0$.

Bài toán 3. Tiệm cận đồ thị hàm số $y = \frac{g(x)}{f(x)}$ (C'') với $f(x); g(x)$ là đa thức bậc $n > 0$.

- Tìm **tiệm cận ngang** ta có các trường hợp sau:
- Bậc tử > bậc mẫu $\rightarrow$ ĐTHS không có tiệm cận ngang.
 - Bậc tử < bậc mẫu $\rightarrow$ ĐTHS có một tiệm cận ngang duy nhất $y = 0$.
 - Bậc tử = bậc mẫu $\rightarrow$ ĐTHS có tiệm cận ngang $y = \frac{a}{b}$ với $a; b$ là hệ số của bậc cao nhất trên tử và dưới mẫu.
- Tìm **tiệm cận đứng** ta có các trường hợp sau:
- **Bước 1.** Tìm điều kiện $f(x) = 0$ có nghiệm (1).
 - **Bước 2.** Giả sử $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$, khi đó $f(x_0) \neq 0$ (2).
 - **Bước 3.** Từ (1) & (2) $\rightarrow$ kết luận.

Bài toán 4. Tiệm cận đồ thị hàm số $y = f(x)$ (C'''), với $f(x)$ là hàm vô tỉ.

- **Bước 1.** Tìm tập xác định D của hàm số.
- **Bước 2.** Để tồn tại tiệm cận ngang của ĐTHS (C''') thì tập D phải chứa ký hiệu ∞ hoặc tồn tại ít nhất $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$ với y_0 hữu hạn.

Ví dụ 01.

Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+m}{mx+1}$ không có tiệm cận đứng là

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

Lời giải

Chọn B

☑ **Trường hợp 1:** $m=0 \Rightarrow y=x$: Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

☑ **Trường hợp 2:** $x=-\frac{1}{m}$ là nghiệm của tử số $\Leftrightarrow -\frac{1}{m}+m=0 \Leftrightarrow m=\pm 1$.

Ví dụ 02.

Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\frac{2}{x^2+mx+1}$ có 2 đường tiệm cận.

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy $y=\frac{2}{x^2+mx+1}$ có bậc tử < bậc mẫu nên ĐTHS luôn có TCN $y=0$.

Do đó chỉ cần 1 TCD nữa là thỏa yêu cầu bài toán.

Để ĐTHS có TCD $\Leftrightarrow x^2+mx-3=0$ có một nghiệm $\Leftrightarrow \Delta=0 \Leftrightarrow m^2-4.1.1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=-2 \end{cases}$.

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 03.

Cho hàm số $y=\frac{x^2-2x+m^2+1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để (C) có tiệm cận đứng.

A. $m \in \mathbb{R}$.

B. $m \neq 0$.

C. $m=0$.

D. $m \in \emptyset$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Đồ thị (C) có tiệm cận đứng $\Leftrightarrow x=1$ không là nghiệm của $g(x)=x^2-2x+m^2+1$

$\Leftrightarrow g(1) \neq 0 \Leftrightarrow m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Ví dụ 04.

Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x^2-2mx+4}$ có đồ thị là (C). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C) có đúng 3 đường tiệm cận?

A. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$.

B. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$.

D. $m > 2$.

Lời giải

Chọn A

$y=\frac{x+1}{x^2-2mx+4}$; Xét $x^2-2mx+4=0$ có $\Delta'=m^2-4$.

+ Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$ thì đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận ngang $y = 0$ (do $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$).

+ Nếu $m = 2$ hoặc $m = -2$ hoặc $m = -\frac{5}{2}$ thì đồ thị hàm số chỉ có hai đường tiệm cận.

+ Nếu $m \in (-\infty; -2) \setminus \left\{-\frac{5}{2}\right\}$ hoặc $m \in (2; +\infty)$ thì đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

Ví dụ 05.

Tìm các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2 + mx - 1}}{2x + 1}$ có hai tiệm cận ngang.

A. $m > 0$.

B. $m = 0$.

C. Không có giá trị m .

D. $m < 0$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $\begin{cases} mx^2 + mx - 1 \geq 0 \quad (1) \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Để hàm số có hai tiệm cận ngang thì tập xác định của hàm số phải có dạng $(-\infty; a) \cup (b; +\infty)$.

Với $m = 0$ thì không tồn tại hàm số.

Với $m < 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình (1) sẽ có dạng $[a; b]$ nên không có tiệm cận ngang.

Với $m > 0$ thì tập nghiệm của BPT sẽ có nghiệm thỏa mãn yêu cầu.

Khi đó ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\frac{\sqrt{m}}{2}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{\sqrt{m}}{2}$ nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y = \pm \frac{\sqrt{m}}{2}$.

Ví dụ 06.

Để đồ thị hàm số $y = \frac{2x + 1}{\sqrt{(1 - m)x^2 + 3x - 1}}$ có tiệm cận ngang thì điều kiện của m là:

A. $m < 1$.

B. $m \neq 1$.

C. $m > 1$.

D. $0 < m < 1$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = y_0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = y_0 \Leftrightarrow 1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1$.

Dạng toán 5. TÌM ĐƯỜNG TIỆM CẬN HÀM ẨN.

Phương pháp giải

Bài toán 1. Cho đồ thị/ bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$ tìm tiệm cận đồ thị hàm số

$$y = \frac{a}{g(x)} \text{ với } a \text{ là hằng số khác } 0 \text{ và } g(x) \text{ xác định theo } f(x).$$

- Tìm tiệm cận ngang: nhìn vào vị trí $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = y_1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = y_2$ để xác định $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{a}{g(x)} \right)$.
- Tìm tiệm cận đứng: giải $g(x) = 0$ (dựa vào đồ thị/ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ để xác định số nghiệm).

Bài toán 2. Cho đồ thị/ bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$ tìm tiệm cận đồ thị hàm số

$$y = \frac{h(x)}{g(x)} \text{ với } h(x) \text{ là một biểu thức theo } x \text{ và } g(x) \text{ là biểu thức theo } f(x).$$

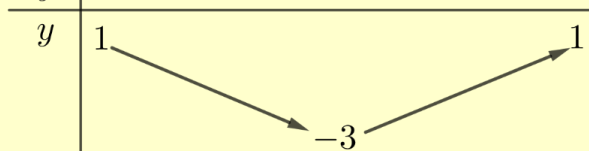
- Từ đồ thị/BBT tìm nghiệm $g(x) = 0 \rightarrow$ biểu thức $g(x)$.
- Rút gọn biểu thức $\frac{h(x)}{g(x)}$ rồi các đường tiệm cận.

 **Lưu ý:** điều kiện tồn tại của $h(x)$.

Ví dụ 01.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'		$-$	$+$
y	1		1



Tìm số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$.

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

$$\text{Phương trình } 2f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \\ x = x_2 \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \end{cases}$$

Do $\lim_{x \rightarrow x_1^+} y = \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{1}{2f(x)-1} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow x_1^-} y = \lim_{x \rightarrow x_1^-} \frac{1}{2f(x)-1} = +\infty$ nên $x = x_1$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$.

Do $\lim_{x \rightarrow x_2^+} y = \lim_{x \rightarrow x_2^+} \frac{1}{2f(x)-1} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow x_2^-} y = \lim_{x \rightarrow x_2^-} \frac{1}{2f(x)-1} = -\infty$ nên $x = x_2$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$.

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2f(x)-1} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2f(x)-1} = 1$ nên $y = 1$ là một tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$.

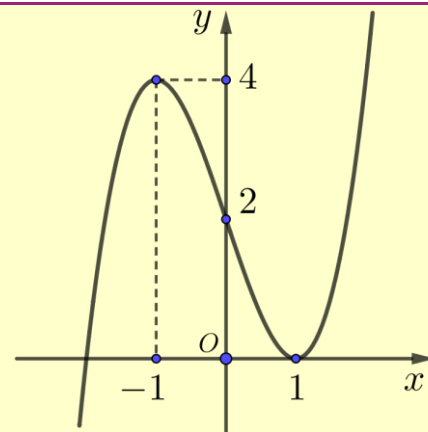
Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ có 2 đường tiệm cận đứng là $x = x_1; x = x_2$ và 1 tiệm cận ngang là $y = 1$.

Ví dụ 02.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Tìm số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị

hàm số $y = g(x) = \frac{(x+1)(x^2-1)}{f^2(x)-2f(x)}$.

- A. 6.
- B. 4.
- C. 5.
- D. 3.



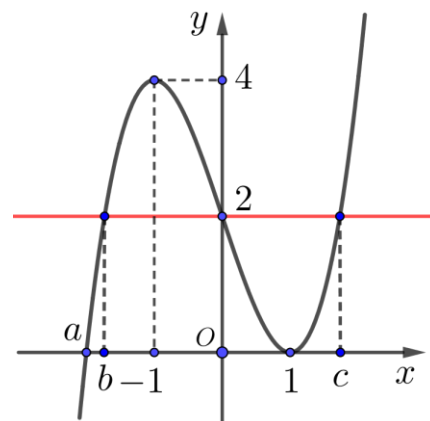
Lời giải

Chọn A

Ta có: $f^2(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 2 & (2) \end{cases}$

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy:

- (1) có nghiệm $x_1 = a < -1$ (nghiệm đơn) và $x_2 = 1$ (nghiệm kép) $\Rightarrow f(x) = k(x-a)(x-1)^2$ ($k \neq 0$)



(2) có nghiệm ba nghiệm đơn x_1, x_2, x_3 với $x_1 = b < -1 < x_2 = 0 < 1 < x_3 = c$

$$\Rightarrow f(x) - 2 = k(x-b)x(x-c) \quad (k \neq 0).$$

$\Rightarrow$ Hàm số $y = g(x)$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{a; b; 0; 1; c\}$

+) Tìm tiệm cận ngang:

$$\text{Vì } g(x) = \frac{(x+1)(x^2-1)}{f^2(x)-2f(x)} = \frac{(x+1)(x^2-1)}{f(x)[f(x)-2]} = \frac{(x+1)^2}{k^2(x-1)(x-b)x(x-c)(x-a)} \text{ nên } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0,$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y = g(x)$ nhận đường thẳng $y = 0$ làm tiệm cận ngang.

+) Tìm tiệm cận đứng:

Tại các điểm $x = a, x = b, x = 0, x = 1, x = c$ mẫu của $g(x)$ nhận giá trị bằng 0 còn tử nhận các giá trị dương.

Và do hàm số xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{a; b; 0; 1; c\}$ nên giới hạn một bên của hàm số

$y = g(x)$ tại các điểm $x = a, x = b, x = 0, x = 1, x = c$ là các giới hạn vô cực.

Do đó, đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 5 tiệm cận đứng, đó là các đường thẳng $x = a, x = b, x = 0, x = 1$ và $x = c$.

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 6 đường tiệm cận: 1 tiệm cận ngang $y = 0$ và 5 tiệm cận đứng $x = a, x = b, x = 0, x = 1, x = c$.

III. BÀI TẬP RÈN LUYỆN.

Câu 1. (MĐ 103 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
y'	-	-	0	+
y	1	2	-3	3

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Nhìn bảng biến thiên ta thấy $x=0$ hàm số không xác định nên $x=0$ là TCD của đồ thị hàm số

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 \Rightarrow y = 3 \text{ là TCN của đồ thị hàm số}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ là TCN của đồ thị hàm số}$$

Vậy hàm số có 3 tiệm cận

Câu 2. (MĐ 102 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'		$-$	0	
y	0	2	-2	$+\infty$

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên đã cho ta có :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ nên đường thẳng $y = 0$ là một tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ nên đường thẳng $x = 0$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận.

Câu 3. (MĐ 101 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	$-$		$-$ 0 $+$	
y	2	$+\infty$	-2	$+\infty$

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ Không tồn tại tiệm cận ngang khi $x \rightarrow +\infty$.

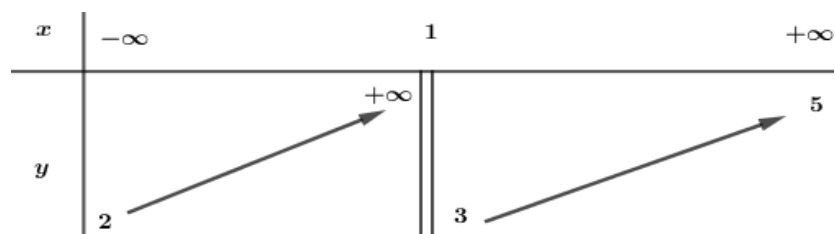
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ vậy hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận ngang $y = 2$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -4$.

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng $x = 0$.

Vậy tổng số tiệm cận đứng và ngang là 2.

Câu 4. (ĐMH - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 3

B. 2

C. 4

D. 1

Lời giải

Chọn A

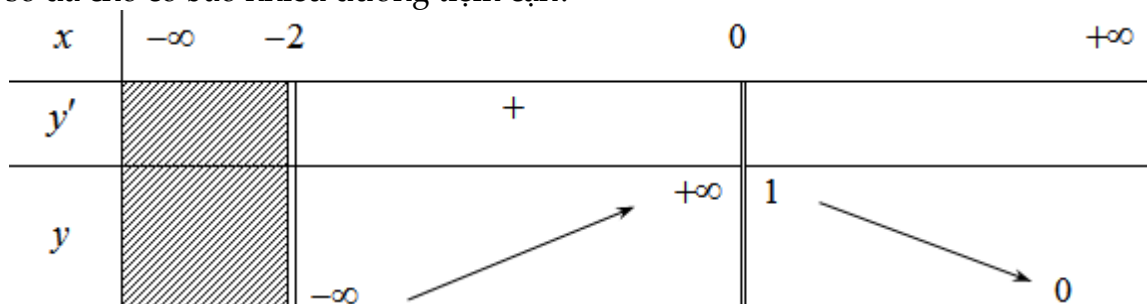
Từ bảng biến thiên ta có:

$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 5$ nên đường thẳng $y=2$ và $y=5$ là các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là 3

Câu 5. (ĐMH - 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?



A. 3

B. 2

C. 4

D. 1

Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên ta có :

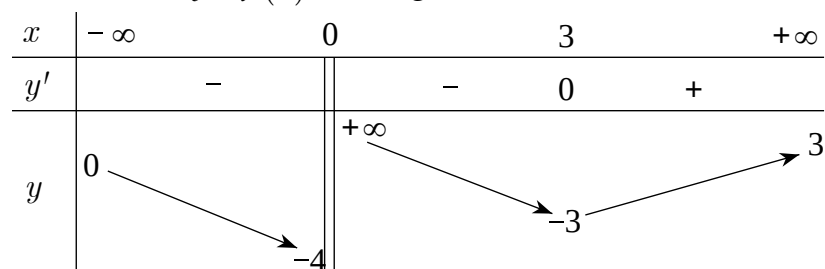
$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$, suy ra đường thẳng $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$, suy ra đường thẳng $x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, suy ra đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

Câu 6. (MĐ 104 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ nên đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang là các đường thẳng có phương trình $y = 3$ và $y = 0$.

Và $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ nên hàm số có 1 tiệm cận đứng là đường thẳng có phương trình $x = 0$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f(x)	$-\infty$	$+\infty$	3
		1	

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ ta được tiệm cận ngang $y = 3$

$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = +\infty$ ta được tiệm cận đứng $x = -2$

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4

B. 2

C. 3

D. 1

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f(x)	-5	$-\infty$	-5
		1	

Lời giải

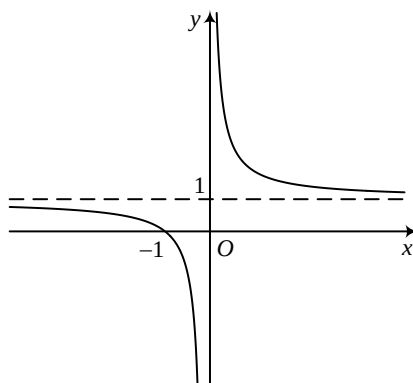
Chọn B

Từ bảng biến thiên ta có:

+ Tiệm cận ngang $y = -5$

+ Tiệm cận đứng $x = 2$.

Câu 9. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=0$, tiệm cận ngang $y=1$.
 B. Hàm số có hai cực trị.
 C. Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận.
 D. Hàm số đồng biến trong khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'		+	0	-	+
y	0	2	$-\infty$	3	5

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số ta có:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ là một tiệm cận ngang

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5 \Rightarrow y = 5$ là một tiệm cận ngang

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 1$ là một tiệm cận đứng

Vậy đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận là 3.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+		+
y	2	$+\infty$	2

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số ta có:

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2 \Rightarrow y = 2$ là một tiệm cận ngang

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 1$ là một tiệm cận đứng

Vậy đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận là 2.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2		0		$+\infty$
y'		$-$		$+$		$-$
y	$+\infty$			$+\infty$		0

$\nearrow$ (từ $+\infty$ ở $x=-\infty$ đến 1 ở $x=-2$)
 $\nwarrow$ (từ $+\infty$ ở $x=0$ đến $-\infty$ ở $x=-2$)
 $\searrow$ (từ 1 ở $x=0$ đến 0 ở $x=+\infty$)

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho bằng

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$\lim_{x \rightarrow -2^+} y = -\infty \Rightarrow x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} y = +\infty \Rightarrow x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có tổng đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là 3.

Câu 13. Cho hàm số có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$	-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$		$+$		$-$		$+$
y		$+\infty$		2		$-\infty$		-1

$\nearrow$ (từ -4 ở $x=-\infty$ đến $+\infty$ ở $x=-1$)
 $\nwarrow$ (từ 2 ở $x=0$ đến $-\infty$ ở $x=-1$)
 $\searrow$ (từ 2 ở $x=0$ đến $-\infty$ ở $x=1$)
 $\nearrow$ (từ $-\infty$ ở $x=1$ đến -1 ở $x=+\infty$)

Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số 0 là

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.

Lời giải

Chọn C

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 4, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = -1 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y = -1$ và $y = 4$.

$\lim_{x \rightarrow -1^-} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -1^+} y = -\infty \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.

Nên đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$+$
y	1	$-\sqrt{2}$	$+\infty$	-1

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Do $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty \Rightarrow$ TCD: $x = 1$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1 \Rightarrow$ đồ thị có 2 tiệm cận ngang là $y = \pm 1$

Vậy, đồ thị hàm số đã cho có tổng số TCD và TCN là 3.

Câu 15. Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$?

A. $x = -1$

B. $y = -1$

C. $y = 2$

D. $x = 1$

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ và $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = +\infty$ nên $x = -1$ là tiệm cận đứng.

Câu 16. (ĐMH - 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$.

B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào định nghĩa đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số ta chọn đáp án D.

Câu 17. (ĐMH - 2018) Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

A. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$

B. $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

C. $y = \sqrt{x^2 - 1}$

D. $y = \frac{x}{x + 1}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x+1} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x+1} = -\infty$ nên đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 18. (MĐ 110 - 2017) Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}$.

A. 2

B. 3

C. 0

D. 1

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1 \Rightarrow y = 1$ là đường tiệm cận ngang.

Mặt khác:

$$\lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-4)}{(x+1)} = -\frac{3}{2}$$

$\Rightarrow x = 1$ không là đường tiệm cận đứng.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{(x-4)}{(x+1)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{(x-4)}{(x+1)} = +\infty$$

$\Rightarrow x = -1$ là đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận

- Câu 19. (MĐ 102 - 2018)** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là
- A. 2 B. 1 C. 3 D. 0

Lời giải

Chọn B

Tập xác định của hàm số: $D = [-4; +\infty) \setminus \{0; -1\}$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0} y = \frac{1}{4}$.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = -\infty$$

$\Rightarrow$ TCD: $x = -1$.

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.

- Câu 20. (MĐ 123 - 2017)** Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số: $y = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16}$
- A. 2 B. 3 C. 1 D. 0

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16} = \frac{x+1}{x+4}$ (với điều kiện xác định), do đó đồ thị hàm có 1 tiệm cận đứng.

- Câu 21. (MĐ 101 - 2018)** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là
- A. 1 B. 2 C. 0 D. 3

Lời giải

Chọn A

Tập xác định của hàm số: $D = [-9; +\infty) \setminus \{0; -1\}$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = -\infty$.

$\Rightarrow$ TCD: $x = -1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{(x^2+x)(\sqrt{x+9}+3)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+9}+3)} = \frac{1}{6}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{(x^2+x)(\sqrt{x+9}+3)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+9}+3)} = \frac{1}{6}.$$

$\Rightarrow x=0$ không là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.

Câu 22. (MĐ 104 - 2017) Đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-4}$ có mấy tiệm cận.

A. 3

B. 1

C. 2

D. 0

Lời giải

Chọn C

Ta có $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-2}{x^2-4} \right) = \frac{1}{4}$ nên đường thẳng $x=2$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{x-2}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x+2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \left(\frac{x-2}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{1}{x+2} = -\infty$, nên đường thẳng $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x-2}{x^2-4} \right) = 0$ nên đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy có đồ thị có hai đường tiệm cận.

Câu 23. Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$.

A. $x=3$ và $x=2$.

B. $x=3$.

C. $x=-3$ và $x=-2$.

D. $x=-3$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2x-1)^2 - (x^2+x+3)}{(x^2-5x+6)(2x-1+\sqrt{x^2+x+3})} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2x-1)^2 - (x^2+x+3)}{(x^2-5x+6)(2x-1+\sqrt{x^2+x+3})} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(3x+1)}{(x-3)(2x-1+\sqrt{x^2+x+3})} = -\frac{7}{6}$$

Tương tự $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6} = -\frac{7}{6}$. Suy ra đường thẳng $x=2$ **không** là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6} = -\infty$. Suy ra đường thẳng $x=3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

- Câu 24. (MĐ 103 - 2018)** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+25}-5}{x^2+x}$ là
- A. 3 B. 2 C. 0 D. 1

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = [-25; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$. Biến đổi $f(x) = \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+25}+5)}$.

Vì $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+25}+5)} = +\infty$ nên đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận đứng

$x = -1$.

- Câu 25. (MĐ 104 - 2018)** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x}$ là
- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

Lời giải

Chọn C

Tập xác định hàm số $D = [-16; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+16}-4}{(x+1)x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(x+1)(\sqrt{x+16}+4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+16}+4)} = \frac{1}{8}.$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+16}-4}{(x+1)x} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+16}+4)} = +\infty.$$

vì $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (\sqrt{x+16}+4) = \sqrt{15}+4 > 0$, $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x+1) = 0$ và $x \rightarrow (-1)^+$ thì $x > -1 \Rightarrow x+1 > 0$.

$$\text{Tương tự } \lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+16}+4)} = -\infty.$$

Vậy đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là $x = -1$.

- Câu 26.** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D = [-4; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = -\infty$

Nên đường thẳng $x = -1$ là một đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(x+1)(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{4}$$

Nên đường thẳng $x = 0$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng $x = -1$.

Câu 27. Đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định của hàm số $D = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

Trường hợp 1: $x < -1 \Rightarrow x+1 < 0$. Khi đó $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{-\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} = -\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

Suy ra hàm số TCN $y = -1$, không có TCD.

Trường hợp 2: $x > 1 \Rightarrow x+1 > 0$. Khi đó $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

Suy ra hàm số TCN $y = 1$, TCD $x = 1$.

Vậy hàm số có 2 TCN và 1 TCD

Câu 28. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2}$ là?

A. 1

B. 3

C. 2

D. 4

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4+\frac{6}{x}}-\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{x}} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x(4x+6)} - 2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4 + \frac{6}{x}} - \frac{2}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\sqrt{x(4x+6)} - 2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x+2)(4x-2)}{(x+2)(\sqrt{x(4x+6)} + 2)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{4x-2}{\sqrt{x(4x+6)} + 2} = \frac{-5}{2}$$

Vậy hàm số có hai tiệm cận ngang $y = \pm 2$.

Câu 29. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 2}}$. Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-1; 1) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

$$\text{Do } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{\sqrt{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^4}}} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ là đường tiệm cận ngang}$$

của đồ thị hàm số.

Có $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là đường tiệm cận đứng.

$$\text{Có } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{(x+1)(x+2)}{\sqrt{(x+1)(x+\sqrt{2})(x-1)(x-\sqrt{2})}} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{(x+1)}(x+2)}{\sqrt{(x+\sqrt{2})(x-1)(x-\sqrt{2})}} = 0 \text{ nên}$$

đường thẳng $x = -1$ không là đường tiệm cận đứng.

Có $\lim_{x \rightarrow (\sqrt{2})^+} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = \sqrt{2}$ là đường tiệm cận đứng.

Có $\lim_{x \rightarrow (-\sqrt{2})^-} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = -\sqrt{2}$ là đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận (1 tiệm cận ngang, 3 tiệm cận đứng).

Câu 30. Hàm số $y = \frac{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x^3 + x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1

B. 3

C. 2

D. 4

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right)}{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right)}{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = 0$$

$\Rightarrow$ TCN: $y = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty \Rightarrow$ TCD: $x = 0$.

- Câu 31.** Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}$ là
- A. 4 B. 1 C. 3 D. 2

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đkxđ: } \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x^2-3x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq 2, x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2} \right) = +\infty$ nên đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2} \right) = 0$ nên đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

- Câu 32.** Cho hàm số $y = \frac{5\sqrt{x^2+6}+x-12}{4x^3-3x-1}$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- A. Đồ thị (C) của hàm số không có tiệm cận.
 B. Đồ thị (C) của hàm số chỉ có một tiệm cận ngang $y = 0$.
 C. Đồ thị (C) của hàm số có một tiệm cận ngang $y = 0$ và hai tiệm cận đứng $x = 1; x = -\frac{1}{2}$.
 D. Đồ thị (C) của hàm số chỉ có một tiệm cận ngang $y = 0$ và một tiệm cận đứng $x = 1$

Lời giải

Chọn D

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ 1; -\frac{1}{2} \right\}$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một TCD là $x = 1$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một TCN là $y = 0$

- Câu 33.** Đồ thị hàm số $y = \frac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3

B. 0

C. 2

D. 1

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = [-1; +\infty) \setminus \{0\}$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} - \sqrt{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}}}{1 + \frac{2}{x}} = 0 \Rightarrow y=0 \text{ là đường tiệm cận ngang của}$$

đồ thị hàm số.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(5x+1)^2 - x - 1}{(x^2+2x)(5x+1+\sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{25x^2+9x}{(x^2+2x)(5x+1+\sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{25x+9}{(x-2)(5x+1+\sqrt{x+1})} = \frac{-9}{4}$$

$\Rightarrow x=0$ **không** là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 1 đường tiệm cận.

Câu 34. (ĐMH 103 - 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số

$$y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} \text{ có hai tiệm cận ngang}$$

A. $m < 0$

B. $m = 0$

C. $m > 0$

D. Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài

Lời giải

Chọn C

Xét các trường hợp sau:

Với $m=0$: hàm số trở thành $y=x+1$ nên không có tiệm cận ngang.

Với $m < 0$:

$$\text{hàm số } y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \frac{x+1}{\sqrt{1-|m|x^2}} \text{ có tập xác định là } D = \left(-\frac{1}{\sqrt{|m|}}; \frac{1}{\sqrt{|m|}} \right) \text{ suy ra không tồn tại}$$

giới hạn $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y$ hay hàm số không có tiệm cận ngang.

Với $m > 0$:

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{|x|\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{-x\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{m}}.$$

$$\text{và } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{|x|\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Vậy hàm số có hai tiệm cận ngang là : $y = \frac{1}{\sqrt{m}}; y = -\frac{1}{\sqrt{m}}$ khi $m > 0$.

Câu 35. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+m}{x^2-3x+2}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. $m = -1$

B. $m \in \{1; 4\}$

C. $m = 4$

D. $m \in \{-1; -4\}$

Lời giải

Chọn D

$$y = \frac{x^2+m}{x^2-3x+2} = \frac{x^2+m}{(x-1)(x-2)}.$$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1 \Rightarrow y = 1$ là đường tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+m}{x^2-3x+2}$ có đúng hai đường tiệm cận $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số có đúng một

tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ pt $x^2+m=0$ nhận nghiệm $x=1$ hoặc $x=2$.

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} m = -1 \\ m = -4 \end{cases}.$$

Với $m = -1$ có một tiệm cận đứng $x = 2$.

Với $m = -4$ có một tiệm cận đứng $x = 1$.

Vậy $m \in \{-1; -4\}$.

Câu 36. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = \frac{6x-3}{(mx^2-6x+3)(9x^2+6mx+1)}$ có đúng một đường tiệm cận?

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Kí hiệu (C) là đồ thị hàm số } y = \frac{6x-3}{(mx^2-6x+3)(9x^2+6mx+1)}.$$

* Trường hợp 1: $m = 0$.

Khi đó $y = \frac{6x-3}{(-6x+3)(9x^2+1)}$. Đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận ngang $y = 0$.

Do đó chọn $m = 0$.

* Trường hợp 2: $m \neq 0$.

$$\text{Xét phương trình } (mx^2-6x+3)(9x^2+6mx+1) = 0 \quad (1)$$

Nhận thấy: (C) luôn có một đường tiệm cận ngang $y=0$ và phương trình (1) không thể có duy nhất một nghiệm đơn với mọi m .

Do đó (C) có đúng một đường tiệm cận khi và chỉ khi (C) không có tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ (1)

$$\text{vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} 9-3m < 0 \\ 9m^2-9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ -1 < m < 1 \end{cases}, \text{ (không tồn tại } m \text{)}.$$

Kết hợp các trường hợp ta được $m=0$.

Câu 37. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2017; 2017]$ để hàm số

$$y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2-4x+m}}$$
 có hai tiệm cận đứng:

A. 2021.

B. 2018.

C. 2019.

D. 2020.

Lời giải

Chọn D

Hàm số có hai tiệm cận đứng khi $x^2-4x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -12 \\ m < 4 \end{cases} \Rightarrow m \in [-2017; 4) \setminus \{-12\}$$

Câu 38. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{5x-3}{x^2-2mx+1}$ không có tiệm cận đứng.

A. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}$

B. $-1 < m < 1$

C. $m = -1$

D. $m = 1$

Lời giải

Chọn B

Để hàm số không có tiệm cận đứng thì $x^2-2mx+1=0$ vô nghiệm

$$\text{suy ra } m^2-1 < 0 \Rightarrow -1 < m < 1$$

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{x^2-2mx+4}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị có ba đường tiệm cận

A. $m > 2$

B. $\begin{cases} m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$

C. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$

D. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

Để đồ thị có ba đường tiệm cận thì $x^2-2mx+4=0$ có hai nghiệm phân biệt $\neq -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (-1)^2 - 2m(-1) + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$$

- Câu 40.** Biết rằng đồ thị của hàm số $y = \frac{(n-3)x+n-2017}{x+m+3}$ (m, n là các số thực) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung là tiệm cận đứng. Tính tổng $m+n$.
- A. 0 B. -3 C. 3 D. 6

Lời giải

Chọn A

Theo công thức tìm nhanh tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ta có

Đồ thị hàm số nhận $x = -\frac{d}{c} = -m-3 = 0$ làm TCĐ $\Rightarrow m = -3$

Đồ thị hàm số nhận $y = \frac{a}{c} = n-3 = 0$ làm TCN $\Rightarrow n = 3$.

Vậy $m+n = 0$.

- Câu 41.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{mx^2-8x+2}}$ có đúng bốn đường tiệm cận?
- A. 8 B. 6 C. 7 D. Vô số

Lời giải

Chọn B

Trường hợp 1: $m < 0$ suy ra tập xác định của hàm số là $D = (x_1; x_2)$, ($x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $mx^2 - 8x + 2 = 0$). Do đó $m < 0$ không thỏa yêu cầu của bài toán.

Trường hợp 2: $m = 0 \Rightarrow y = \frac{x-1}{\sqrt{-8x+2}}$ suy ra tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; 4)$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow 4^-} y = -\infty$.

Khi đó ta có $x = -4$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Do đó $m = 0$ không thỏa yêu cầu của bài toán

Trường hợp 3: $m > 0$ suy ra tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ ($x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $mx^2 - 8x + 2 = 0$).

Do đó đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận khi phương trình $mx^2 - 8x + 2 = 0$ có hai

nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} 16-2m > 0 \\ m > 0; m \in \mathbb{Z} \\ m-8+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 8 \\ m > 0; m \in \mathbb{Z} \\ m \neq 6 \end{cases} \Rightarrow m = \{1; 2; 3; 4; 5; 7\}$.

Suy ra có tất cả 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

- Câu 42.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = \frac{6x-3}{(mx^2-6x+3)(9x^2+6mx+1)}$ có đúng một đường tiệm cận?
- A. 0. B. 2. C. 1. D. Vô số.

Lời giải

Chọn C

Nhận thấy với mọi giá trị của m đồ thị luôn có 1 tiệm cận ngang.

Để đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận thì đồ thị không có tiệm cận đứng.

Phương trình $mx^2 - 6x + 3 = 0$ (1) có $\Delta' = 9 - 3m$.

Phương trình $9x^2 + 6mx + 1 = 0$ (2) có $\Delta' = 9m^2 - 9$.

Để đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Cả hai phương trình (1) và (2) đều vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 3m < 0 \\ 9m^2 - 9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < m \\ -1 < m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

Trường hợp 2: Phương trình (1) có nghiệm đơn $x = \frac{1}{2}$ và phương trình (2) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 9m^2 - 9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ -1 < m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$$

Vậy với $m = 0$ thì đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận.

Câu 43. Có tất cả bao nhiêu số nguyên m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2mx + 2m^2 - 25}$ có ba đường tiệm cận?

A. 9.

B. 11.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x^2 + 2mx + 2m^2 - 25 \neq 0$.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2mx + 2m^2 - 25} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2m}{x} + \frac{2m^2 - 25}{x^2}} = 1 \text{ và}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2mx + 2m^2 - 25} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2m}{x} + \frac{2m^2 - 25}{x^2}} = 1.$$

Suy ra $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số (khi $x \rightarrow -\infty$ và $x \rightarrow +\infty$).

Đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên.

Yêu cầu bài toán trở thành tìm điều kiện của $m \in \mathbb{Z}$ để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2mx + 2m^2 - 25}$

có 2 tiệm cận đứng $\Leftrightarrow x^2 + 2mx + 2m^2 - 25 = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác ± 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - (2m^2 - 25) > 0 \\ 1 + 2m + 2m^2 - 25 \neq 0 \\ 1 - 2m + 2m^2 - 25 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 < m < 5 \\ m \neq 3, m \neq -4 \\ m \neq -3, m \neq 4 \end{cases}$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy có 5 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

- Câu 44.** Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-10;10)$ để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2}$ có đúng ba đường tiệm cận?
A. 12. **B.** 11. **C.** 0. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{1 - \frac{m}{x}}}{x \cdot \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \sqrt{1 - \frac{m}{x}}}{x \cdot \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{m}{x}}}{\left(1 + \frac{2}{x}\right)} = 1 \Rightarrow \text{Tiệm cận ngang } y = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{1 - \frac{m}{x}}}{x \cdot \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \cdot \sqrt{1 - \frac{m}{x}}}{x \cdot \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 - \frac{m}{x}}}{\left(1 + \frac{2}{x}\right)} = -1 \Rightarrow \text{Tiệm cận ngang } y = -1$$

Vậy ta luôn có 2 đường tiệm cận ngang với giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-10;10)$.
 Đồ thị hàm số đúng ba đường tiệm cận

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{-2 \cdot (-2 - m)} - 1 \neq 0 \\ -2 \cdot (-2 - m) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -\frac{3}{2} \\ m \geq -2 \end{cases}$$

Vậy $m \in [-2;10)$; $m \in \mathbb{Z}$ nên có 12 giá trị nguyên m .

- Câu 45.** Với giá trị nào của hàm số m để đồ thị hàm số $y = x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}$ có tiệm cận ngang.
A. $m = 1$ **B.** $m = -1$ **C.** $m = \pm 1$ **D.** Không có m

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang

$\Rightarrow$ Hàm số xác định trên một trong các miền $(-\infty; a)$, $(-\infty; a]$, $(a; +\infty)$ hoặc $[a; +\infty)$

$m \geq 0$

Trường hợp 1: $m = 0 \Rightarrow y = x - \sqrt{-3x + 7}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$ đồ thị không có tiệm cận ngang

Trường hợp 2: $m > 0$, $y = x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}$

Khi $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - x \sqrt{m - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}} \right) = \frac{3}{2}$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi và chỉ khi $m = 1$

Vậy $m = 1$

Cách trắc nghiệm:

Thay $m = 1 \Rightarrow y = x - \sqrt{x^2 - 3x + 7} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 3x + 7}) = \frac{3}{2}$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 - 3x + 7}) = -\infty$ không có tiệm cận ngang.

Thay $m = -1 \Rightarrow y = x - \sqrt{-x^2 - 3x + 7} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{-x^2 - 3x + 7})$ không xác định.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{-x^2 - 3x + 7})$ không xác định.

Vậy $m = 1$

Câu 46. Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = \frac{x^2}{x - m}$ có tiệm cận đứng là:

A. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

B. $\{0\}$

C. $\emptyset$

D. $\mathbb{R}$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x \neq m$.

Để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = m$ thì $x = m$ không là nghiệm của phương trình $x^2 = 0$

$\Rightarrow m^2 \neq 0 \Rightarrow m \neq 0$

Câu 47. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{mx^2-2x+3}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận.

A. 2

B. 3

C. 0

D. 1

Lời giải

Chọn B

Nhận xét:

+ $f(x) = mx^2 - 2x + 3$ có bậc ≥ 1 nên đồ thị hàm số luôn có 1 tiệm cận ngang.

+ Do đó: Yêu cầu bài toán 9 đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng.

+ $m = 0$, đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng là đường thẳng $x = \frac{3}{2} \Rightarrow m = 0$ thỏa bài toán.

+ $m \neq 0$, đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình

$$mx^2 - 2x + 3 = 0 \text{ có nghiệm kép hoặc nhận } x = 1 \text{ làm nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_f = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{3} \\ m = -1 \end{cases}$$

+ KL: $m \in \left\{0; \frac{1}{3}; -1\right\}$.

Câu 48. Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-6;6]$ của tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận?

A. 8.

B. 9.

C. 12.

D. 11.

Lời giải

Chọn B

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m} = 0$ nên đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận

ngang là $y=0$.

Do đó (C) có 4 đường tiệm cận khi và chỉ khi (C) có 3 đường tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m=0(1)$ có 3 nghiệm phân biệt khác 3.

Ta có (1) $\Leftrightarrow (x-m)(x^2-2mx+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=m \\ x^2-2mx+1=0 \end{cases}$

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khác 3 $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m^2-1 > 0 \\ m^2-2m^2+1 \neq 0 \\ 3^2-6m+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m < -1 \\ m > 1 \\ m \neq \frac{5}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow m \in (-\infty; -1) \cup \left(1; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; 3\right) \cup (3; +\infty)$.

Do $m \in [-6; 6]$, m nguyên nên $m \in \{-6; -5; -4; -3; -2; 2; 4; 5; 6\}$.

Vậy có 9 giá trị m thỏa mãn.

Câu 49. Có bao nhiêu giá trị nguyên của hàm số thực m thuộc đoạn $[-2017; 2017]$ để hàm số

$y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2-4x+m}}$ có hai tiệm cận đứng.

A. 2019

B. 2021

C. 2018

D. 2020

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x^2-4x+m > 0$

Đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2-4x+m}}$ có hai tiệm cận đứng khi

$x^2-4x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác -2

$\begin{cases} (-2)^2-m > 0 \\ (-2)^2-4(-2)+m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-m > 0 \\ 12+m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m \neq -12 \end{cases}$

Vì m là số nguyên và thuộc đoạn $[-2017; 2017]$ nên có 2021 giá trị của m

Câu 50. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2-mx-m+5}$ không có đường tiệm cận đứng?

A. 8.

B. 10.

C. 11.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

Nhận xét: $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Đặt $f(x) = x^2 - mx - m + 5$.

Hàm số đã cho không có đường tiệm cận đứng khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta_f < 0 \\ \Delta_f > 0 \\ f(1) = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4m - 20 < 0 \\ m^2 + 4m - 20 > 0 \\ 1 - m - m + 5 = 0 \\ 4 - 2m - m + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 - 2\sqrt{6} < m < -2 + 2\sqrt{6} \\ m = 3 \end{cases}.$$

Vì m là số nguyên nên $m \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

Câu 51. Xác định m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 2}$ có đúng hai đường tiệm cận đứng?

A. $m < \frac{3}{2}$. B. $m > -\frac{3}{2}; m \neq 1$. C. $m < \frac{3}{2}; m \neq 1; m \neq -3$. D. $m > -\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $g(x) = x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 2 = 0$ (1)

Để đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận đứng thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân

biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m + 3 > 0 \\ m^2 + 2m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{3}{2} \\ m \neq 1; m \neq -3 \end{cases}.$

Câu 52. Cho hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x^3 - 3x^2 + m - 1}}$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có 4 đường thẳng tiệm cận.

A. $1 < m < 5$. B. $-1 < m < 2$.
C. $m < 1$ hoặc $m > 5$. D. $m > 2$ hoặc $m < -1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3 - 3x^2 + m - 1}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3 - 3x^2 + m - 1}}$ không tồn tại. Suy ra

$y = 0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Do đó, để đồ thị hàm số đã cho có 4 đường thẳng tiệm cận thì phương trình $x^3 - 3x^2 + m - 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x^2 + m - 1$. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$g'(x) = 3x^2 - 6x$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$			$m-1$		$m-5$		$+\infty$
	$-\infty$						

Từ bảng biến thiên, ta thấy phương trình $x^3 - 3x^2 + m - 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m - 5 < 0 < m - 1 \Leftrightarrow 1 < m < 5$.

Câu 53. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	1	-3	1

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ đúng bằng số nghiệm thực của phương trình $2f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}$.

Mà số nghiệm thực của phương trình $f(x) = \frac{1}{2}$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với đường thẳng $y = \frac{1}{2}$.

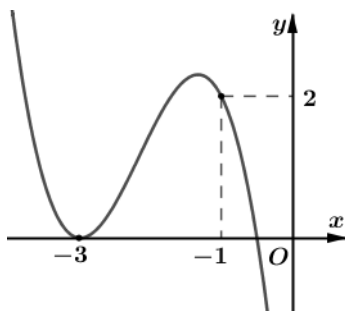
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 2 điểm phân biệt. Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ có 2 tiệm cận đứng.

Lại có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2f(x)-1} = 1 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y = 1$.

Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ là 3.

Câu 54. Cho hàm bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số

$$y = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]}$$
 có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 2.

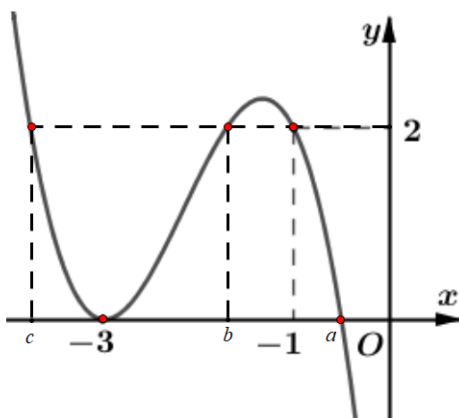
B. 3.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn C



$$y = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]} = \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x) - 2]}$$

Điều kiện tồn tại căn $\sqrt{x^2 + x}$: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -1 \end{cases}$.

Xét phương trình $x[f^2(x) - 2f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases}$.

Với $x=0$ ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x) - 2]} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x+1}}{\sqrt{x} \cdot f(x) \cdot [f(x) - 2]} = +\infty$. Suy ra $x=0$ là tiệm cận đứng.

Với $f(x)=0 \Rightarrow x=-3$ (nghiệm bội 2) hoặc $x=a$ (loại vì $-1 < a < 0$).

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x) - 2]} = -\infty$ nên $x=-3$ là tiệm cận đứng.

Với $f(x) = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = b \ (-3 < b < -1) \text{ (nghiệm bội 1). Ta có:} \\ x = c \ (c < -3) \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow b^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x)-2]} = 0 \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x)-2]} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x)-2]} = 0 \end{cases} \quad \text{nên } x = -1 \text{ không là tiệm cận}$$

đúng.

$$\lim_{x \rightarrow b^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x)-2]} = +\infty \text{ (do } x \rightarrow b^+ \text{ thì } f(x) \rightarrow 2^+) \text{ nên } x = b \text{ là tiệm cận đúng.}$$

$$\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x)-2]} = +\infty \text{ (do } x \rightarrow c^+ \text{ thì } f(x) \rightarrow 2^-) \text{ nên } x = c \text{ là tiệm cận đúng.}$$

Vậy đồ thị hàm số có 4 tiệm cận đúng.

Câu 55. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	3	0	$+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ là:

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } h(x) = \frac{1}{2f(x)-1}.$$

*) Tiệm cận ngang:

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2f(x)-1} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2f(x)-1} = 0.$$

Suy ra đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y = 0$.

*) Tiệm cận đứng:

$$\text{Xét phương trình: } 2f(x)-1=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}.$$

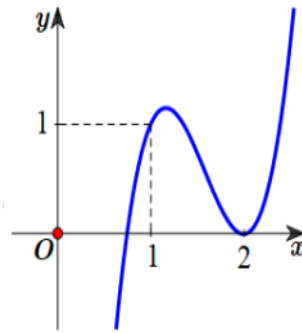
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x) = \frac{1}{2}$ có ba nghiệm phân biệt a, b, c thỏa mãn $a < 1 < b < 2 < c$.

Đồng thời $\lim_{x \rightarrow a^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} h(x) = +\infty$ nên đồ thị hàm số $y = h(x)$ có ba đường tiệm cận đứng là $x = a, x = b$ và $x = c$.

Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = h(x)$ là bốn.

Câu 56. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số

$$g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{(x+1)[f^2(x) - f(x)]}$$
 có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 5.

B. 4.

C. 6.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $x \geq 1$

Số tiệm cận đứng của $y = g(x)$ tương ứng số nghiệm của phương trình

$$(x+1)[f^2(x) - f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1(l) \\ f^2(x) - f(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1(l) \\ f(x) = 1(1) \\ f(x) = 0(2) \end{cases}$$

+) Xét phương trình (1) $f(x) = 1$, theo hình vẽ ta thấy phương trình sẽ có 3 nghiệm:

$$\begin{cases} x_1 = 1(l) \\ 1 < x_2 < 2(tm) \Rightarrow \text{có 2 tiệm cận đứng} \\ 2 < x_3 < 2(tm) \end{cases}$$

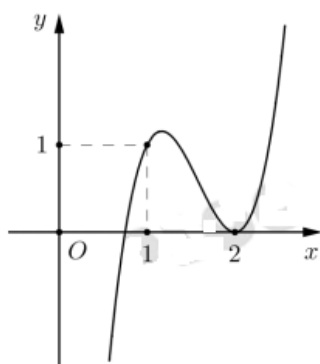
+) Xét phương trình (2) $f(x) = 0$, theo hình vẽ ta thấy phương trình sẽ có 2 nghiệm:

$$\begin{cases} x_4 < 1(l) \\ x_5 = 2(tm) \end{cases} \text{ Do nghiệm } x_5 = 2 \text{ là nghiệm kép và trên tử là nghiệm đơn nên } x_5 = 2 \text{ vẫn là một}$$

tiệm cận đứng $\Rightarrow$ có 1 tiệm cận đứng

Vậy tổng cộng $g(x)$ có tất cả 3 tiệm cận đứng

Câu 57. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{2x-1}}{x[f^2(x) - f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 5

B. 4

C. 6

D. 3

Lời giải

Chọn B

ĐK $x \geq \frac{1}{2}; f(x) \neq 0; f(x) \neq 1$.

$$\text{Xét phương trình } x[f^2(x) - f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 1 \\ x = a \left(a \in \left(\frac{1}{2}; 1 \right) \right) \\ x = b \left(b \in (1; 2) \right) \\ x = c \left(c \in (2; 3) \right) \end{cases}$$

Đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận đứng $x = a; x = b; x = c; x = 2$

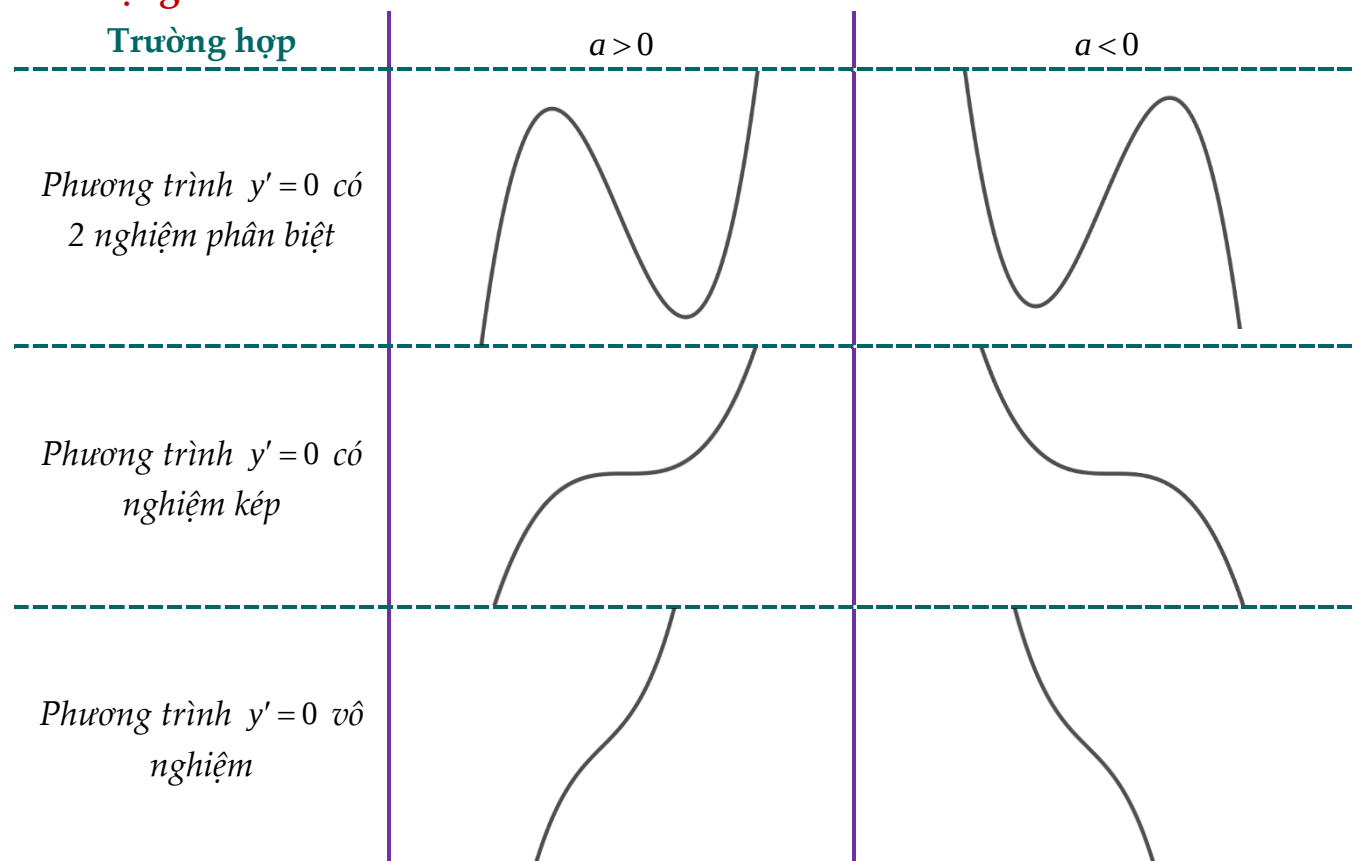
----- **HẾT** -----

ĐỒ THỊ HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

Đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

1. Hình dạng cơ bản:



2. Từ đồ thị xác định hàm số.

Xét hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).

Từ đồ thị đã cho để xác định được dấu của các hệ số trong hàm ta thực hiện các bước sau:

- **Bước 1.** Xác định bậc.
- **Bước 2.** Xác định nhánh cuối của đồ thị.
- **Bước 3.** Xác định giao điểm của đồ thị với trục tung.
- **Bước 4.** Xác định số cực trị.
- **Bước 5.** Điểm thuộc đồ thị hàm số.

Trên là các bước tổng quát, giờ ta sẽ xét từng hệ số cụ thể như sau:

Xác định	Nhìn vào	Trường hợp xảy ra
□ Dấu của a	Nhánh cuối của đồ thị	① Đi lên $\rightarrow a > 0$. ② Đi xuống $\rightarrow a < 0$.

❑ Dấu của d	Vị trí đồ thị cắt Oy	① Cắt trên gốc $O \rightarrow d > 0$. ② Cắt dưới gốc $O \rightarrow d < 0$. ③ Cắt ngay gốc $O \rightarrow d = 0$.
	Cách 1: Đồ thị đã cho có ? cực trị	① Có 2 cực trị $\rightarrow ac \leq 0$ kết hợp dấu của $a \rightarrow c$. ② Có 0 cực trị $\rightarrow ac > 0$ kết hợp dấu của $a \rightarrow c$.
❑ Dấu của c	Cách 2: Sử dụng Vi-ét.	+ Từ đồ thị xác định hai điểm cực trị của hàm số. + Tính tích hai điểm cực trị đó, giả sử là P : ① $P > 0 \rightarrow \frac{c}{a} > 0$ kết hợp dấu của $a \rightarrow c$. ② $P < 0 \rightarrow \frac{c}{a} < 0$ kết hợp dấu của $a \rightarrow c$.
	Cách 1: Sử dụng điểm uốn Với $x_{uon} = -\frac{b}{3a}$.	+ Kẻ đường thẳng nối 2 điểm cực trị $\rightarrow$ cắt đồ thị tại 1 điểm. + Chiếu điểm đó xuống Ox : ① Bên phải gốc $O \rightarrow -\frac{b}{a} > 0$ kết hợp dấu của $a \rightarrow b$. ② Bên trái gốc $O \rightarrow -\frac{b}{a} < 0$ kết hợp dấu của $a \rightarrow b$.
❑ Dấu của b	Cách 2: Sử dụng Vi-ét (dùng khi xác định được tổng hai điểm cực trị âm hoặc dương)	+ Từ đồ thị xác định hai điểm cực trị của hàm số. + Tính tổng hai điểm cực trị đó, giả sử là S : ① $S > 0 \rightarrow -\frac{2b}{3a} > 0$ kết hợp dấu của $a \rightarrow b$. ② $S < 0 \rightarrow -\frac{2b}{3a} < 0$ kết hợp dấu của $a \rightarrow b$.

❑ Lưu ý:

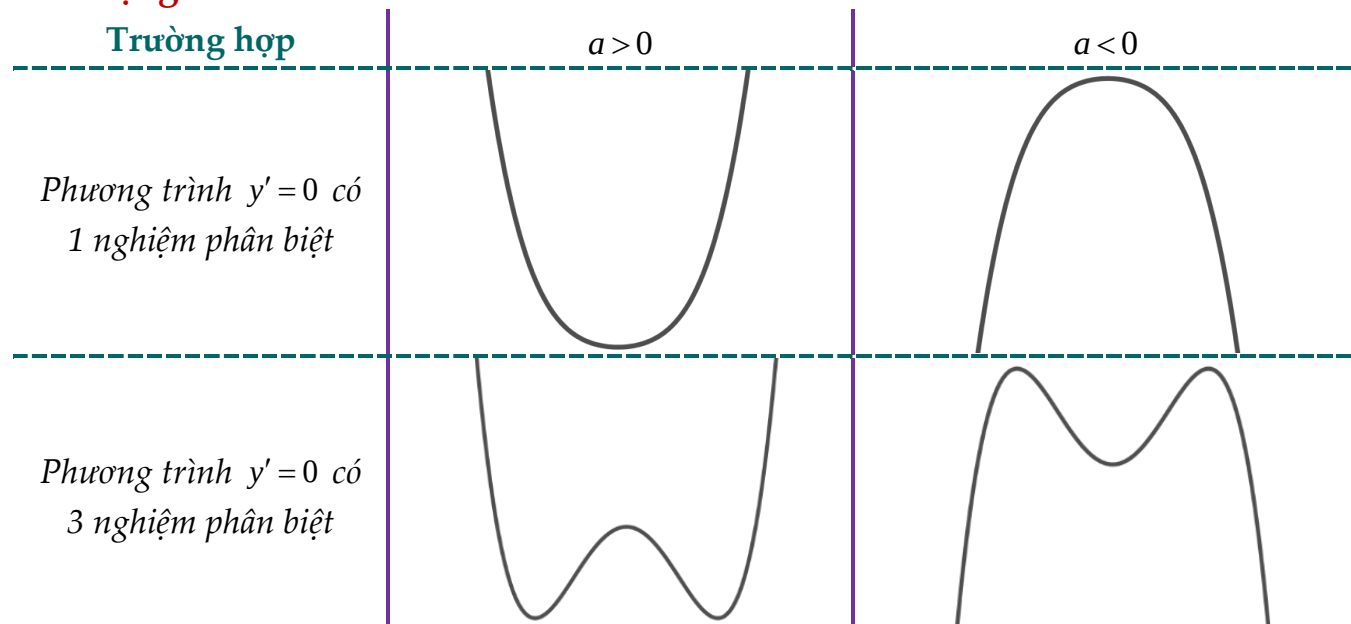
↪ Đồ thị hàm số bậc ba có TÂM ĐỐI XỨNG là điểm uốn.

Cách tìm tâm đối xứng như sau:

- Với đồ thị hàm số: kẻ đường thẳng nối 2 điểm cực trị $\rightarrow$ cắt đồ thị tại 1 điểm thì điểm này là điểm uốn.
- Với hàm số: ta tìm nghiệm của $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$ thì đây là hoành độ của điểm uốn.

Đồ thị hàm số bậc bốn $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)

1. Hình dạng cơ bản:



2. Từ đồ thị xác định hàm số.

Xét hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$).

Từ đồ thị đã cho để xác định được dấu của các hệ số trong hàm ta thực hiện các bước sau:

- **Bước 1.** Xác định bậc.
- **Bước 2.** Xác định nhánh cuối của đồ thị.
- **Bước 3.** Xác định giao điểm của đồ thị với trục tung.
- **Bước 4.** Xác định số cực trị.
- **Bước 5.** Điểm thuộc đồ thị hàm số.

Trên là các bước tổng quát, giờ ta sẽ xét từng hệ số cụ thể như sau:

Xác định	Nhìn vào	Trường hợp xảy ra
□ Dấu của a	Nhánh cuối của đồ thị	① Đi lên $\rightarrow a > 0$. ② Đi xuống $\rightarrow a < 0$.
□ Dấu của c	Vị trí đồ thị cắt Oy	① Cắt trên gốc $O \rightarrow c > 0$. ② Cắt dưới gốc $O \rightarrow c < 0$. ③ Cắt ngay gốc $O \rightarrow c = 0$.
□ Dấu của b	Đồ thị đã cho có ? điểm cực trị	① Có 3 điểm cực trị $\rightarrow ab \leq 0$ kết hợp dấu $a \rightarrow b$. ② Có 1 điểm cực trị $\rightarrow ab > 0$ kết hợp dấu $a \rightarrow b$.

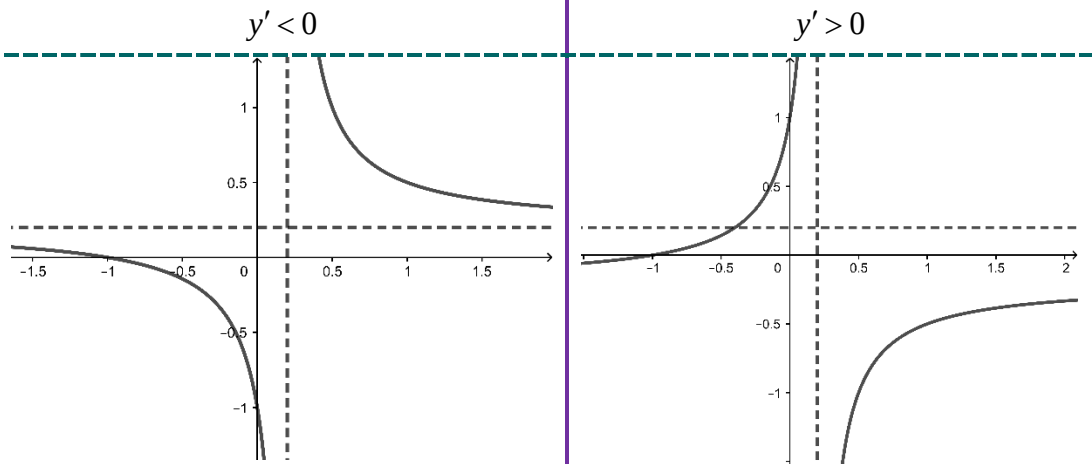
□ Lưu ý:

- ↪ Đồ thị hàm số bậc bốn (trùng phương) có TRỤC ĐỐI XỨNG là trục tung (Oy).
- ↪ Đồ thị hàm số bậc bốn (trùng phương) không có tâm đối xứng.
- ↪ Đồ thị hàm số bậc bốn (trùng phương) là hàm số chẵn.

Đồ thị hàm số hữu tỉ $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ad - cb \neq 0$)

1. Hình dạng cơ bản:

Trường hợp



2. Từ đồ thị xác định hàm số.

Xét hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ad - cb \neq 0$).

Từ đồ thị đã cho để xác định được dấu của các hệ số trong hàm ta thực hiện các bước sau:

- **Bước 1.** Xác định hai đường tiệm cận.
- **Bước 2.** Xác định giao điểm của đồ thị với trục tung.
- **Bước 3.** Chiều biến thiên.

Trên là các bước tổng quát, giờ ta sẽ xét từng hệ số cụ thể như sau:

Nhìn vào	Trường hợp xảy ra
□ Tiệm cận đứng	① TCD nằm bên phải Oy $\rightarrow -\frac{d}{c} > 0$.
	② TCD nằm bên trái Oy $\rightarrow -\frac{d}{c} < 0$.
	③ TCD là Oy $\rightarrow \begin{cases} c \neq 0 \\ d = 0 \end{cases}$.
	Một trong các điều trên ta sẽ kết luận d & c cùng hoặc trái dấu.
□ Tiệm cận ngang	① TCN nằm trên Ox $\rightarrow \frac{a}{c} > 0$.
	② TCN nằm dưới Ox $\rightarrow \frac{a}{c} < 0$.
	③ TCD là Ox $\rightarrow \begin{cases} c \neq 0 \\ a = 0 \end{cases}$.
	Một trong các điều trên ta sẽ kết luận a & c cùng hoặc trái dấu.

□ Điểm giao với trục Oy

- ① Điểm nằm trên Ox $\rightarrow \frac{b}{d} > 0$.
- ② Điểm nằm dưới Ox $\rightarrow \frac{b}{d} < 0$.
- ③ Điểm là O $\rightarrow \begin{cases} d \neq 0 \\ b = 0 \end{cases}$.

Một trong các điều trên ta sẽ kết luận a & c cùng hoặc trái dấu.

□ Lưu ý:

↪ Đồ thị hàm số hữu tỉ $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có TÂM ĐỐI XỨNG là giao điểm hai đường tiệm cận.

↪ Đồ thị hàm số bậc bốn $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ luôn có 1 TCĐ và 1 TCN.

Các phép biến đổi đồ thị

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) với số $a > 0$ ta có:

Hàm số	Cách biến đổi
□ $y = f(x) + a$ có đồ thị (C') .	Tịnh tiến (C) theo phương của Oy lên trên a đơn vị.
□ $y = f(x) - a$ có đồ thị (C') .	Tịnh tiến (C) theo phương của Oy xuống dưới a đơn vị.
□ $y = f(x + a)$ có đồ thị (C') .	Tịnh tiến (C) theo phương của Ox qua trái a đơn vị.
□ $y = f(x - a)$ có đồ thị (C') .	Tịnh tiến (C) theo phương của Ox qua phải a đơn vị.
□ $y = -f(x)$ có đồ thị (C') .	Đối xứng của (C) qua trục Ox .
□ $y = f(-x)$ có đồ thị (C') .	Đối xứng của (C) qua trục Oy .

❖ **Biến đổi đồ thị hàm số chứa trị tuyệt đối.**

Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ suy ra:

Đồ thị $y = f(|x|)$ (C')

Nhận xét:

$$\text{Ta có: } y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

Và $y = f(|x|)$ là hàm chẵn nên đồ thị (C') nhận Oy làm trục đối xứng.

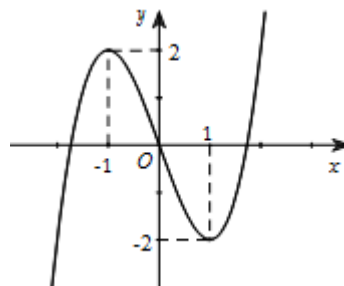
Cách vẽ:

- Giữ nguyên phần đồ thị bên phải Oy của đồ thị $(C): y = f(x)$.
- Bỏ phần đồ thị bên trái Oy của (C) , lấy đối xứng phần đồ thị được giữ qua Oy .

Ví dụ 1. Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $(C'): y = |x|^3 - 3|x|$.

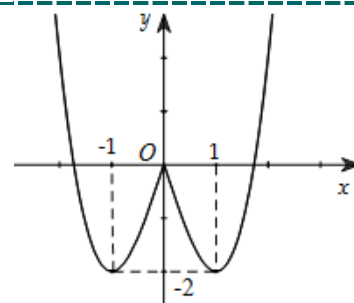
Khảo sát và vẽ (C)

Ta có đồ thị (C): $y = f(x) = x^3 - 3x$:



Biến đổi (C):

- Bỏ phần đồ thị của (C) bên trái Oy, giữ nguyên (C) bên phải Oy.
- Lấy đối xứng phần đồ thị được giữ qua Oy.



Đồ thị $y = |f(x)|$ (C').

Nhận xét:

Ta có: $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) < 0 \end{cases}$

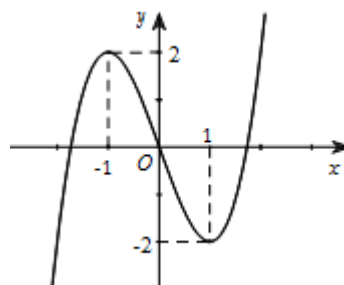
Cách vẽ:

- Giữ nguyên phần đồ thị phía trên Ox của đồ thị (C): $y = f(x)$.
- Bỏ phần đồ thị phía dưới Ox của (C), lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua qua Ox.

Ví dụ 2. Từ đồ thị (C): $y = f(x) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $y = |x^3 - 3x|$.

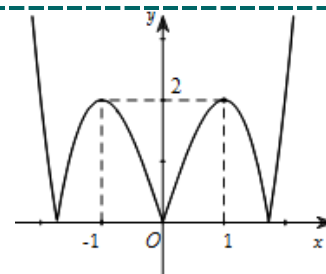
Khảo sát và vẽ (C)

Ta có đồ thị (C): $y = f(x) = x^3 - 3x$:

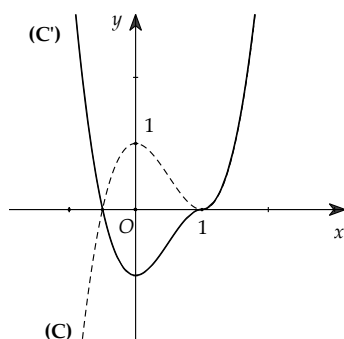
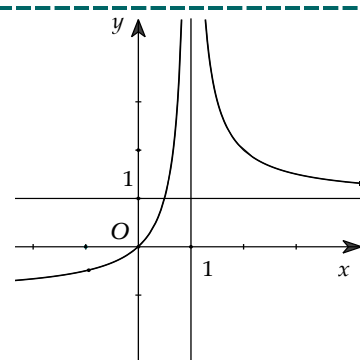


Biến đổi (C):

- Bỏ phần đồ thị của (C) dưới Ox, giữ nguyên (C) phía trên Ox.
- Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua qua Ox.



Đồ thị $y = |u(x)| \cdot v(x)$ (C').

Nhận xét:	Ta có: $y = u(x) \cdot v(x) = \begin{cases} u(x) \cdot v(x) = f(x) & \text{khi } u(x) \geq 0 \\ -u(x) \cdot v(x) = f(x) & \text{khi } u(x) < 0 \end{cases}$	
Cách vẽ:	○ Giữ nguyên phần đồ thị trên miền $u(x) \geq 0$ của đồ thị $(C): y = f(x)$. ○ Bỏ phần đồ thị trên miền $u(x) < 0$ của (C), lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua qua Ox.	
Ví dụ 3. Từ đồ thị $(C): y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ suy ra đồ thị $(C'): y = x-1 (2x^2 - x - 1)$.		
Nhận xét	$y = x-1 (2x^2 - x - 1) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \geq 1 \\ -f(x) & \text{khi } x < 1 \end{cases}$	
Biến đổi (C) :	○ Giữ nguyên (C) với $x \geq 1$. ○ Bỏ (C) với $x < 1$. Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua qua Ox. Chú ý: Trong quá trình thực hiện phép suy đồ thị nên lấy đối xứng các điểm đặc biệt của (C): giao điểm với Ox, Oy, CD, CT...	
Ví dụ 4. Từ đồ thị $(C): y = f(x) = \frac{x}{x-1}$ suy ra đồ thị $(C'): y = \frac{x}{ x-1 }$.		
Nhận xét	$y = \frac{x}{ x-1 } = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & \text{khi } x \in (1; +\infty) \\ -\frac{x}{x-1} & \text{khi } x \in (-\infty; 1) \end{cases}$	
Biến đổi (C) :	○ Bỏ phần đồ thị của (C) với $x < 1$, giữ nguyên (C) với $x > 1$. ○ Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua qua Ox. Chú ý: Đối với hàm phân thức thì nên lấy đối xứng các đường tiệm cận để thực hiện phép suy đồ thị một cách tương đối chính xác.	
Chú ý: với dạng: $y = f(x) $ ta lần lượt biến đổi 2 đồ thị $y = f(x)$ và $y = f(x) $		

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Dạng toán 1. TỪ ĐỒ THỊ/BBT ĐÃ CHO XÁC ĐỊNH HÀM SỐ.

Phương pháp giải

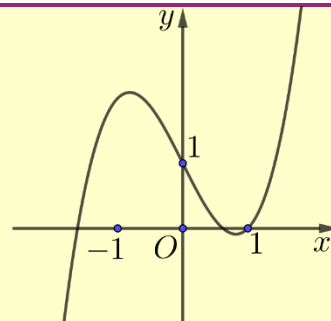
Từ đồ thị đã cho để xác định được dấu của các hệ số trong hàm ta thực hiện các bước sau:

- **Bước 1.** Xác định bậc.
- **Bước 2.** Xác định nhánh cuối của đồ thị.
- **Bước 3.** Xác định giao điểm của đồ thị với trục tung.
- **Bước 4.** Xác định số cực trị.
- **Bước 5.** Điểm thuộc đồ thị hàm số.

Ví dụ 01.

Hình vẽ sau đây là đồ thị của một trong bốn hàm số cho ở các đáp án A, B, C, D . Hỏi đó là hàm số nào?

- A. $y = x^3 + 2x + 1$.
- B. $y = x^3 - 2x^2 + 1$.
- C. $y = x^3 - 2x + 1$.
- D. $y = -x^3 + 2x + 1$.



Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị, ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$, loại phương án D.

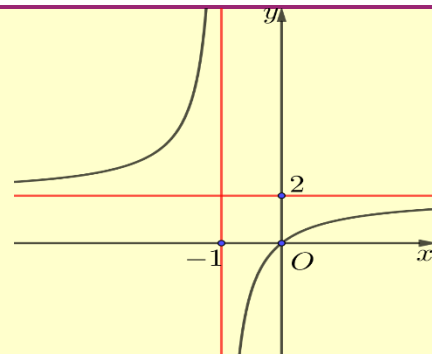
Xét phương án A có $y' = 3x^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, hàm số không có cực trị, loại A.

Xét phương án B có $y' = 3x^2 - 6x$ và y' đổi dấu khi đi qua các điểm $x = 0, x = 2$ nên hàm số đạt cực trị tại $x = 0$ và $x = 2$, loại phương án B.

Ví dụ 02.

Hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số nào

- A. $y = \frac{x-1}{x+1}$.
- B. $y = \frac{2x+1}{x+1}$.
- C. $y = \frac{2x-3}{x+1}$.
- D. $y = \frac{2x+5}{x+1}$.



Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có tọa độ $(0;1)$ nên chọn phương án B.

Ví dụ 03.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

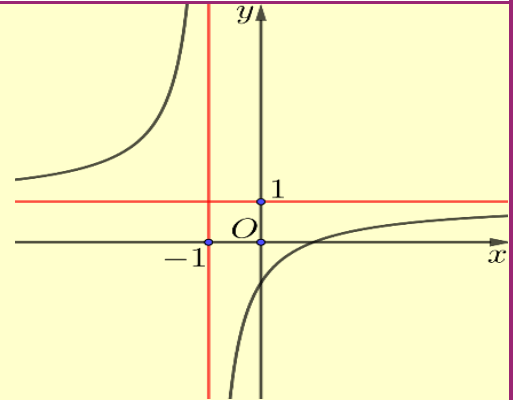
Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

B. $y = \frac{-2x+1}{2x+2}$.

C. $y = x^4 - 3x^2$.

D. $y = x^3 - 3x^2$.



Lời giải

Chọn A

Hình vẽ trên là đồ thị của hàm số dạng $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0; ad-bc \neq 0$) $\Rightarrow$ Loại C, D

Ta thấy: Đồ thị có đường tiệm cận đứng là $x = -1$ và đường tiệm cận ngang là $y = 1$

Phương án B: Đồ thị có đường tiệm cận đứng là $x = -2 \Rightarrow$ loại B

$\Rightarrow$ A đúng.

Ví dụ 04.

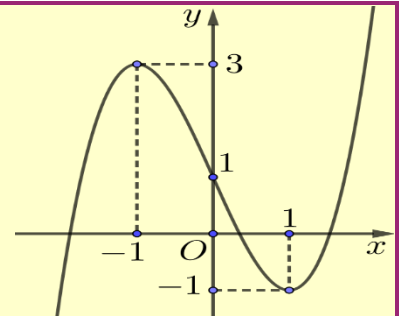
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

A. $y = -x^3 + 3x + 1$.

B. $y = x^4 - x^2 + 1$.

C. $y = -x^2 + x - 1$.

D. $y = x^3 - 3x + 1$.



Lời giải

Chọn D

Đồ thị đã cho có hình dạng của đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ nên loại phương án B và C

Dựa vào đồ thị, ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \Rightarrow a > 0$ nên loại phương án A

Ví dụ 05.

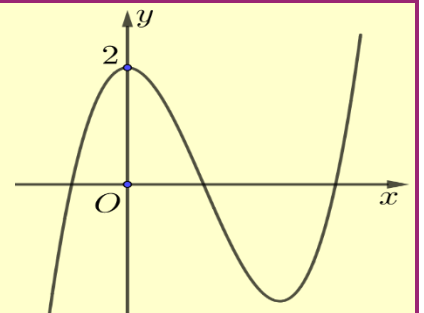
Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

B. $y = \frac{x+2}{x+1}$.

C. $y = -x^3 + 3x^2 + 2$.

D. $y = x^4 - 2x^3 + 2$.



Lời giải

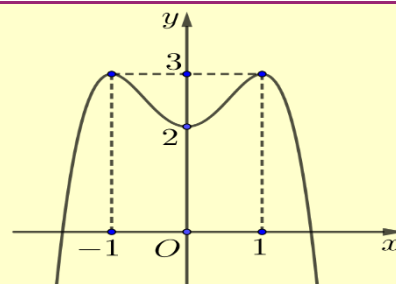
Chọn A

Quan sát đồ thị trên ta thấy đây là đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a > 0$

Ví dụ 06.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào?

- A. $y = x^4 - 2x^2 + 2$.
 B. $y = x^4 + 2x^2 - 2$.
 C. $y = -x^4 - 2x^2 + 2$.
 D. $y = -x^4 + 2x^2 + 2$.



Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số ta thấy $a < 0$.

Đồ thị đi qua điểm $A(1;3)$ nên chỉ có hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 2$ có đồ thị như hình.

Ví dụ 07.

Hàm số nào trong bốn hàm số sau có bảng biến thiên như hình vẽ sau?

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$			

- A. $y = x^3 + 3x^2 - 1$. B. $y = x^3 - 3x + 2$. C. $y = x^3 - 3x^2 + 2$. D. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

Lời giải

Chọn C

Xét $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$. Khi $x = 0 \Rightarrow y = 2$; $x = 2 \Rightarrow y = -2$

Hàm số này thỏa mãn các tính chất trên bảng biến thiên.

Dạng toán 2. XÁC ĐỊNH DẤU CÁC HỆ SỐ.

Phương pháp giải

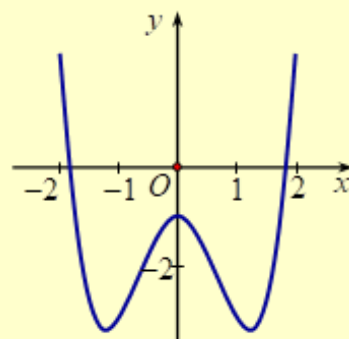
Xem lại các mục “2. Từ đồ thị xác định hàm số.”

Ví dụ 01.

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình bên.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a > 0, b < 0, c < 0$.
- B. $a > 0, b > 0, c < 0$.
- C. $a < 0, b > 0, c < 0$.
- D. $a > 0, b < 0, c > 0$.



Lời giải

Chọn A

Do đồ thị cắt Oy tại $M(0;c)$ nằm dưới trục Ox nên $c < 0$.

Vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = +\infty$ nên $a > 0$.

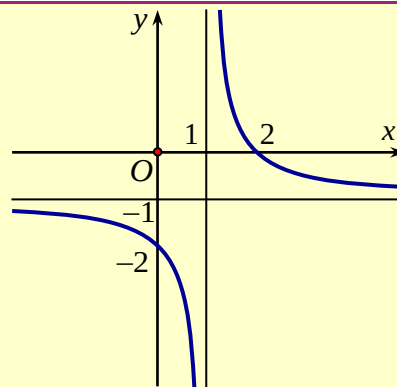
Hàm số có ba điểm cực trị nên $ab < 0 \Rightarrow b < 0$

Ví dụ 02.

Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình bên.

Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $b < 0 < a$.
- B. $0 < b < a$.
- C. $b < a < 0$.
- D. $0 < a < b$.



Lời giải

Chọn C

Nhìn vào đồ thị ta thấy : Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = a$ và tiệm cận đứng $x = 1$.

Đồ thị cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = \frac{b}{a} > 1$.

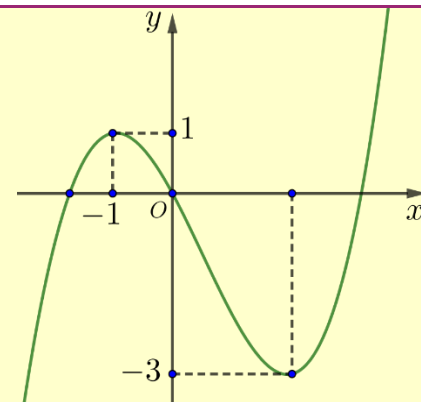
$$\text{Ta có : } \begin{cases} \frac{a}{-1} = 1 \\ \frac{b}{a} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow b < a = -1 < 0.$$

Ví dụ 03.

Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.

Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

- A. 0.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 3.



Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

-Dựa vào hình dạng đồ thị ta có $a > 0$.

-Đồ thị hàm số qua gốc tọa độ nên $d = 0$.

-Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 với $|x_1| < |x_2|$ nên

$$x_1 + x_2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{2b}{3a} > 0 \Rightarrow b < 0$$

$$x_1 x_2 < 0 \Leftrightarrow \frac{c}{3a} < 0 \Rightarrow c < 0$$

Dạng toán 3. ĐỒ THỊ HÀM SỐ CHỨA TRỊ TUYỆT ĐỐI.

Phương pháp giải

1. Cách vẽ ĐTHS $y = f(|x|)$

- Giữ nguyên phần đồ thị bên phải Oy của đồ thị (C): $y = f(x)$.
- Bỏ phần đồ thị bên trái Oy của (C), lấy đối xứng phần đồ thị được giữ qua Oy.

2. Cách vẽ ĐTHS $y = |f(x)|$

- Giữ nguyên phần đồ thị phía trên Ox của đồ thị (C): $y = f(x)$.
- Bỏ phần đồ thị phía dưới Ox của (C), lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox.

3. Cách vẽ ĐTHS $y = |u(x)|v(x)$

- Giữ nguyên phần đồ thị trên miền $u(x) \geq 0$ của đồ thị (C): $y = f(x)$.
- Bỏ phần đồ thị trên miền $u(x) < 0$ của (C), lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox.

Ví dụ 01.

Bảng biến thiên sau là của hàm số nào dưới đây.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$				$+\infty$

$\swarrow$ -4 $\nearrow$ -3 $\searrow$ -4 $\nearrow$

A. $y = 2|x^3| - 3x^2 - 3.$

B. $y = 2x^4 - 4x^2 - 3.$

C. $y = 2|x|^3 - 3|x| - 3.$

D. $y = \frac{1}{2}x^4 - x^2 - 3.$

Lời giải

Chọn A

Xét $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3$; $f'(x) = 6x^2 - 6x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3$:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-3	-4	$+\infty$	

Từ đó suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = 2|x^3| - 3x^2 - 3$ là:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			-3				$+\infty$

$\searrow$ -4 $\nearrow$ $\searrow$ -4 $\nearrow$

Ví dụ 02.

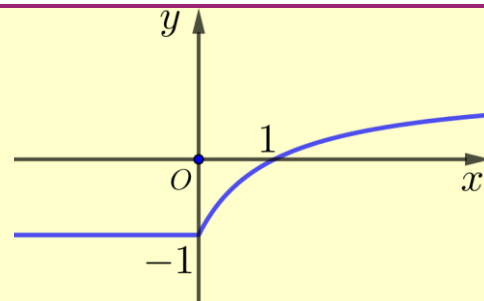
Hình vẽ bên là một phần của đồ thị hàm số nào?

A. $y = \frac{-x-1}{|x|+1}.$

B. $y = \frac{x-1}{|x|+1}.$

C. $y = \frac{x-1}{|x+1|}.$

D. $y = \frac{x}{|x|+1}.$



Lời giải

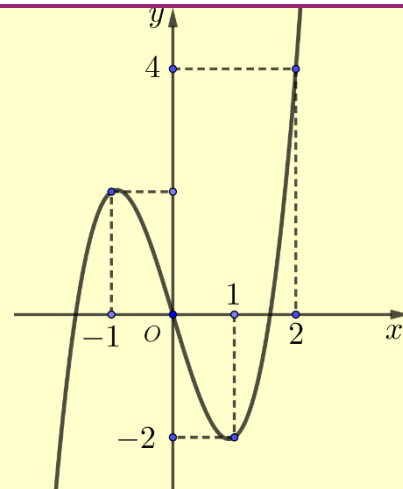
Chọn B

- +) Từ đồ thị, ta có tập xác định hàm số $D = \mathbb{R}$ nên loại phương án B.
 +) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1;0)$ nên loại phương án C, D.

Ví dụ 03.

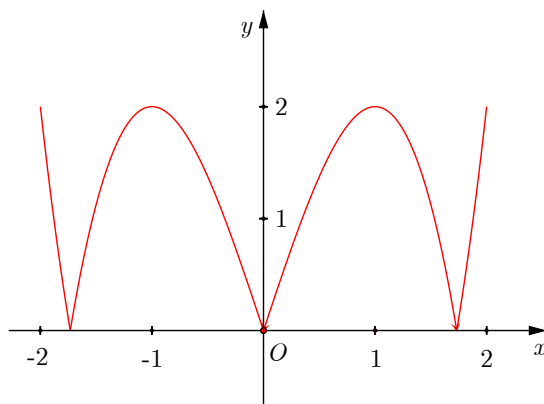
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 5.
 B. 3.
 C. 4.
 D. 6.



Lời giải

Chọn A

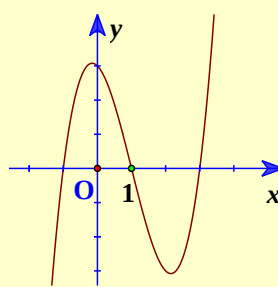


Từ đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ ta có hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị

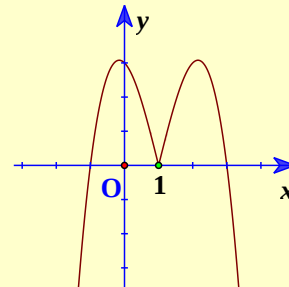
Ví dụ 04.

Cho hàm số $y = (x-1)(x^2-2x-3)$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?

- A. $y = |(x-1)(x^2-2x-3)|$.
 B. $y = -|x-1|(x^2-2x-3)$.
 C. $y = (x-1)|x^2-2x-3|$.
 D. $y = |x-1|(x^2-2x-3)$.



Hình 1



Hình 2

Lời giải

Chọn B

Nhận thấy đồ thị hàm số ở hình 2 giữ nguyên phần đồ thị trên khoảng $(-\infty; 1)$ và lấy đối xứng phần đồ thị trên khoảng $(1; +\infty)$.

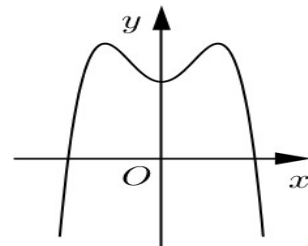
Xét đáp án B : Ta có $y = -|(x-1)|(x^2 - 2x - 3) = \begin{cases} -(x-1)(x^2 - 2x - 3), & x \in (1; +\infty) \\ (x-1)(x^2 - 2x - 3), & x \in (-\infty; 1) \end{cases}$.

Đồ thị của $y = -|(x-1)|(x^2 - 2x - 3)$ giữ nguyên trong khoảng $(-\infty; 1)$ và lấy đối xứng phần đồ thị trong khoảng $(1; +\infty)$.

III. BÀI TẬP RÈN LUYỆN.

Câu 1. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- A. $y = -x^4 + 2x^2 + 2$.
- B. $y = x^4 - 2x^2 + 2$.
- C. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.
- D. $y = -x^3 + 3x^2 + 2$.



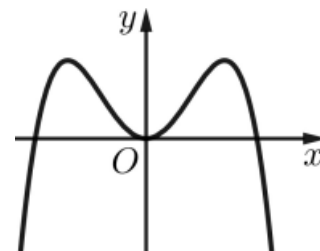
Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị đã cho, ta thấy đồ thị này là đồ thị hàm số bậc 4 có hệ số $a < 0$ nên chọn A.

Câu 2. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- A. $y = -x^4 + 2x^2$.
- B. $y = x^4 - 2x^2$.
- C. $y = x^3 - 3x^2$.
- D. $y = -x^3 + 3x^2$.



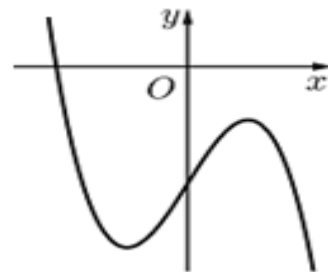
Lời giải

Chọn A

Đồ thị là hàm bậc 4 với $a < 0$ và $a.b < 0$.

Câu 3. Hàm số nào dưới đây có đồ thị như hình vẽ bên ?

- A. $y = -x^3 + 2x - 2$.
- B. $y = -x^3 + 2x + 2$.
- C. $y = -x^4 + 2x^2 - 2$.
- D. $y = x^4 + 2x^2 - 2$.



Lời giải

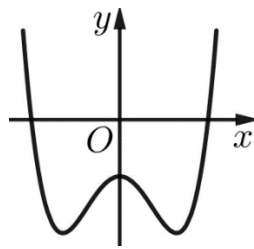
Chọn A

+) Nhận thấy đây là dáng đồ thị của hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) nên loại C,

D.

+) Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên Chọn A

Câu 4. Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình



- A. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$. B. $y = x^4 - 2x^2 - 1$. C. $y = x^3 - 3x^2 - 1$. D. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm bậc 4 có hệ số $a > 0$, cắt trục tung tại điểm có tung độ lớn hơn 0.

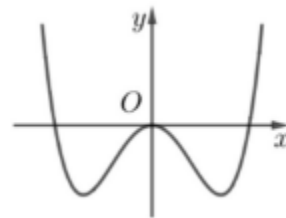
Câu 5. Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A. $y = x^3 - 3x^2$.

B. $y = -x^4 + 2x^2$.

C. $y = -x^3 + 3x^2$.

D. $y = x^4 - 2x^2$.



Lời giải

Chọn D

Đây là dáng điệu của hàm trùng phương với hệ số $a > 0$ và hàm số có 3 điểm cực trị.

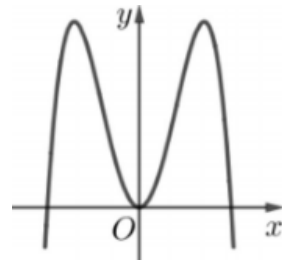
Câu 6. Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như hình bên?

A. $y = -x^4 - 4x^2$.

B. $y = -x^4 + 4x^2$.

C. $y = -x^3 + 2x$.

D. $y = x^3 - 2x$.



Lời giải

Chọn B

Ta thấy đồ thị hàm số cắt Ox tại 3 điểm phân biệt nên chọn $y = -x^4 + 4x^2$.

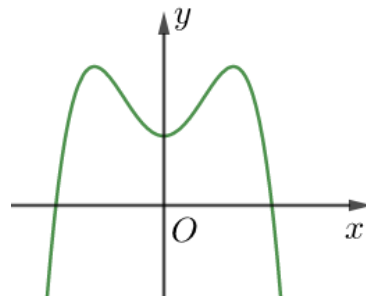
Câu 7. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên dưới?

A. $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

B. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

C. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

D. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.



Lời giải

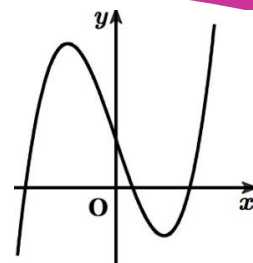
Chọn C

Đồ thị đã cho không phải là đồ thị của hàm số bậc ba nên loại đáp án A, B

Mặt khác từ đồ thị ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = -\infty$ nên loại đáp án D.

Câu 8. Đường cong ở hình dưới đây là đồ thị của hàm số nào?

- A. $y = x^3 - 3x + 1$.
- B. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.
- C. $y = -x^3 + 3x + 1$.
- D. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.



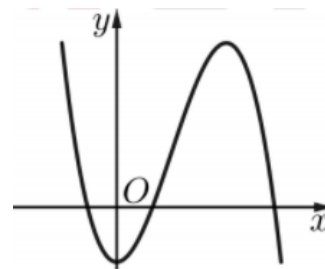
Lời giải

Chọn A

Dựa vào hình dạng đồ thị ta thấy đây là hàm số bậc ba dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a > 0$

Câu 9. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như hình bên?

- A. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$.
- B. $y = x^4 - 2x^2 - 1$.
- C. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.
- D. $y = x^3 - 3x^2 - 1$.



Lời giải

Chọn C

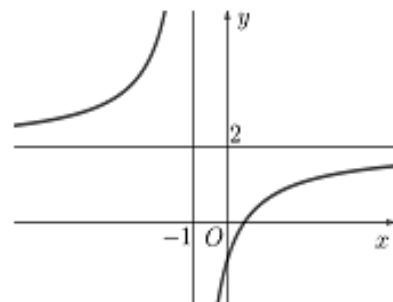
Từ hình dáng đồ thị ta nhận ra đây là đồ thị của hàm số bậc ba.

Đồ thị hàm số bậc ba có phần ngoài cùng bên phải đi xuống nên hệ số của hạng tử bậc ba phải âm.

Câu 10. Đường cong ở hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số

$y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào đúng?

- A. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- B. $y' > 0, \forall x \neq -1$.
- C. $y' < 0, \forall x \neq -1$.
- D. $y' > 0, \forall x \neq 2$.



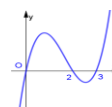
Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta thấy hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$, suy ra $y' > 0, \forall x \neq -1$.

Câu 11. Biết rằng đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong các hàm số dưới đây, đó là hàm số nào?

- A. $y = -x^3 + 3x^2 - 6x$.
- B. $y = x^3 - 2x^2$.
- C. $y = -x^3 + 2x^2$.
- D. $y = x^3 - 5x^2 + 6x$.



Lời giải

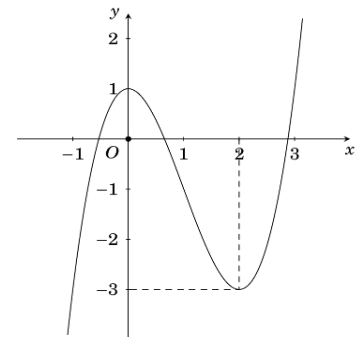
Chọn D

Đây là đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, với hệ số $a > 0 \Rightarrow$ Loại đáp án A, C.

Đồ thị cắt trục hoành tại điểm $(3; 0) \Rightarrow$ Chọn đáp án D.

Câu 12. Đồ thị được cho bên dưới là đồ thị của hàm số nào?

- A. $y = -x^3 + 3x + 1$.
- B. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.
- C. $y = x^3 - 3x^2 + 1$.
- D. $y = x^3 - 3x + 1$.



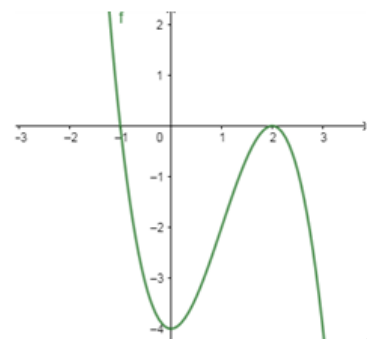
Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta thấy đây là đồ thị của hàm số bậc ba với hệ số $a > 0$ nên loại phương án A và B. Mặt khác ta lại thấy hàm số có hai điểm cực trị là $x = 0$ và $x = 2$, do đó trong bốn phương án chỉ có phương án C thỏa mãn.

Câu 13. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số sau

- A. $y = x^3 - 3x^2 + 4$.
- B. $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.
- C. $y = -x^3 - 3x^2 - 4$.
- D. $y = x^3 - 3x^2 - 2$.



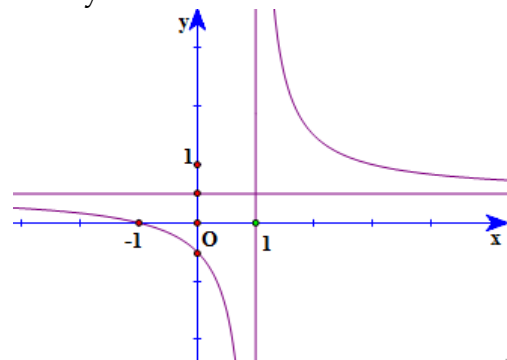
Lời giải

Chọn B

Từ hình dáng đồ thị ta có $a < 0$ và đồ thị giao với trục tung tại điểm có tung độ -4 nên $d = -4$. Hàm số có hai điểm cực trị là $x = 0; x = 2$ nên ta chọn $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.

Câu 14. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

- A. $y = \frac{2x-4}{x-1}$.
- B. $y = \frac{x+2}{2x-1}$.
- C. $y = \frac{2x}{3x-3}$.
- D. $y = \frac{x+1}{2x-2}$.



Lời giải

Chọn D

Đường tiệm cận ngang: $y = \frac{1}{2}$

Đường tiệm cận đứng: $x=1$

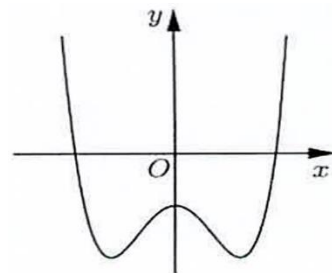
Câu 15. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

A. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$.

B. $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

C. $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

D. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.



Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị có ba điểm cực trị, nhận thấy đây là đồ thị của hàm đa thức bậc bốn nên loại phương án **C** và **D**

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ nên hệ số $a > 0$

Câu 16. Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như hình vẽ sau?

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f			1		-3		$+\infty$
	$-\infty$						

A. $y = x^4 - 2x^2 + 1$. **B.** $y = -x^3 + 3x^2 + 1$. **C.** $y = x^3 - 3x^2 + 1$. **D.** $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow$ Hàm số bậc ba nên loại câu A và **D**.

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow a > 0$, nên loại câu **B**.

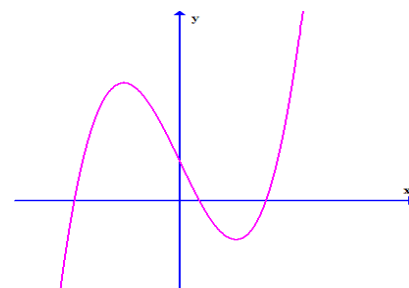
Câu 17. Đường cong trong hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số nào sau đây?

A. $y = x^4 - x^2 + 1$.

B. $y = x^3 - 3x + 1$.

C. $y = -x^3 + 3x + 1$.

D. $y = -x^2 + x - 1$.

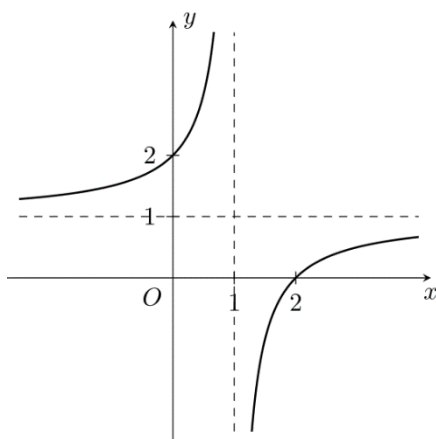


Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị ta nhận thấy đồ thị là của hàm số bậc 3 có hệ số $a > 0$.

Câu 18. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng đường cong trong hình vẽ bên dưới?



- A. $y = x^3 - 3x + 2$. B. $y = \frac{x+2}{x-1}$. C. $y = \frac{x-2}{x-1}$. D. $y = -x^4 + 5x^2 - 4$.

Lời giải

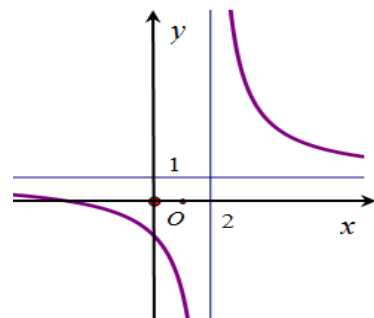
Chọn C

Hàm số trên có dạng $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ nên loại A, D.

Ta có $y(0) = 2$ nên loại B.

Câu 19. Đường cong trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào sau đây?

- A. $y = \frac{x+3}{x-2}$.
B. $y = x^3 - 3x$.
C. $y = x^4 - 4x^2 + 2$.
D. $y = \frac{x-3}{x+1}$.



Lời giải

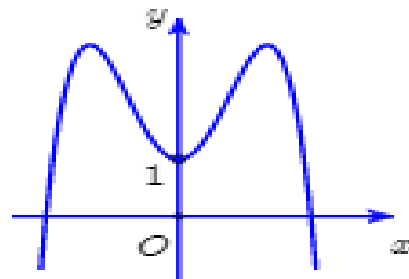
Chọn A

Đồ thị trong hình vẽ là của hàm số có dạng $y = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow$ Loại B, C.

Đồ thị trong hàm vẽ nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$

Câu 20. Biết rằng hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số cho ở các đáp án A, B, C, D. Hỏi đó là hàm số nào?

- A. $y = -x^4 + 2x^2$.
B. $y = -2x^4 + 4x^2 + 1$.
C. $y = -\frac{1}{2}x^4 - x^2 + 1$.
D. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.



Lời giải

Chọn B

Dựa vào hình dáng của đồ thị, ta biết đây là đồ thị hàm bậc 4 trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ với $a < 0$.

Cắt trục tung tại điểm $M(0;1) \Rightarrow c = 1$

Hàm số có 3 cực trị nên $ab < 0 \Rightarrow b > 0$. Suy ra chọn đáp án **B**

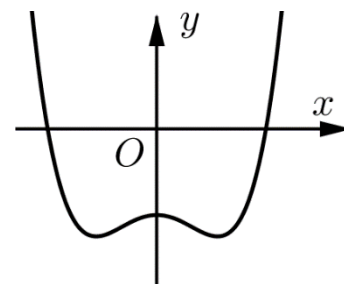
Câu 21. Hàm số nào dưới đây có dạng đồ thị như đường cong trong hình vẽ bên?

A. $y = -x^3 + x^2 - 1$.

B. $y = x^4 - x^2 - 1$.

C. $y = x^3 - x^2 - 1$.

D. $y = -x^4 + x^2 - 1$.



Lời giải

Chọn B

Dựa vào hình dáng đồ thị suy ra đồ thị là đồ thị của hàm số bậc bốn có hệ số $a > 0$.

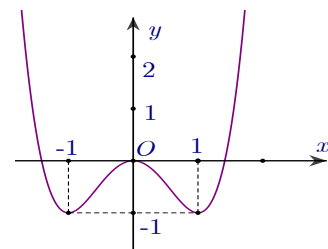
Câu 22. Đồ thị hình bên dưới là đồ thị của hàm số nào sau đây?

A. $y = -x^4 + 2x^2$.

B. $y = x^3 - 2x^2$.

C. $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

D. $y = x^4 - 2x^2$.



Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy nhánh cuối của đồ thị đi lên nên hệ số $a > 0$ và cắt trục Oy tại điểm O suy ra $c = 0$.

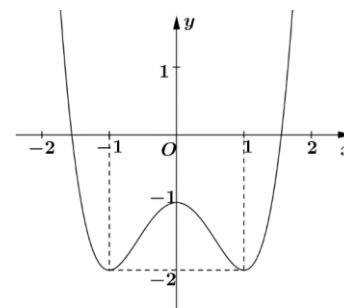
Câu 23. Đồ thị được cho ở hình dưới là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

A. $y = x^4 - 2x^2$.

B. $y = 2x^4 - 2x^2 - 1$.

C. $y = 2x^4 - 2x^2 - 2$.

D. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.



Lời giải

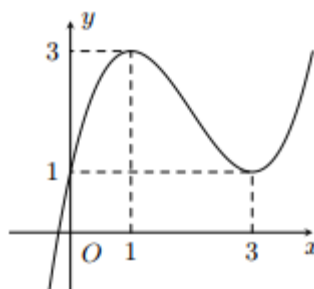
Chọn B

Từ đồ thị ta thấy đây là đồ thị của hàm số trùng phương với hệ số $a > 0$, nên loại đáp án D.

Mặt khác hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $x = -1$ và giá trị cực tiểu $y(1) = y(-1) = -2$, nên ta

Chọn B

Câu 24. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?



A. $y = x^3 - 3x^2 + 1.$

B. $y = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x + 1.$

C. $y = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + \frac{9}{2}x + 1.$

D. $y = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + 1.$

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1;3)$ nên chỉ có hàm số $y = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x + 1$ thỏa mãn.

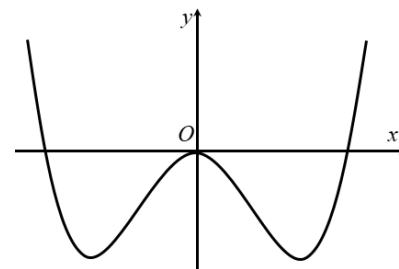
Câu 25. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên dưới

A. $y = -x^3 + 3x^2.$

B. $y = x^3 - 3x^2.$

C. $y = -x^4 + 2x^2.$

D. $y = x^4 - 2x^2.$



Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị và các phương án trả lời ta có đồ thị đã cho là đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ với hệ số $a > 0$ nên chọn D.

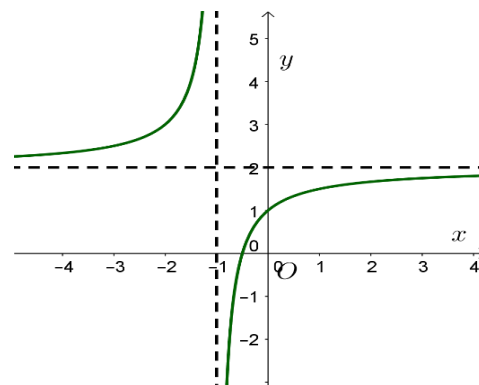
Câu 26. Đồ thị sau đây là của hàm số nào?

A. $y = \frac{2x+1}{x+1}.$

B. $y = \frac{2x+3}{x+1}.$

C. $y = \frac{2x-1}{x-1}.$

D. $y = \frac{x-1}{x+1}.$



Lời giải

Chọn A

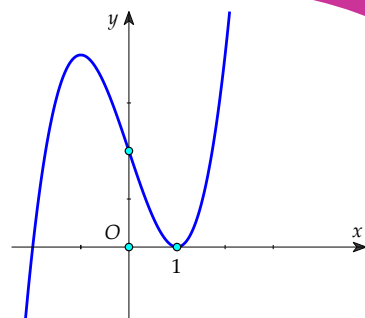
Tiệm cận đứng: $x = -1$

Tiệm cận ngang: $y = 1$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại $A(0;1).$

Câu 27. Đường cong ở hình bên dưới là đồ thị của một hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây.
Hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = x^4 + x^2 + 1$.
B. $y = x^4 - x^2 + 1$.
C. $y = -x^3 + 3x^2 + 2$.
D. $y = x^3 - 3x + 2$.



Lời giải

Chọn D

Câu 28. Bảng biến thiên dưới đây là của một trong bốn hàm số được cho ở các phương án A, B, C, D. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		-		-	
y	2		$+\infty$		2

- A. $y = \frac{2x-1}{x-2}$.
B. $y = \frac{2x-3}{x+2}$.
C. $y = \frac{x+3}{x-2}$.
D. $y = \frac{2x-5}{x-2}$.

Lời giải

Chọn A

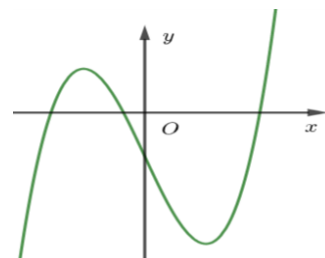
Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$; tiệm cận đứng $x = 2$.

Ta loại đáp án B và C

Hàm số nghịch biến trên hai khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$ nên loại đáp án D

Câu 29. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng đường cong như hình bên?

- A. $y = -x^4 + x^2 - 1$.
B. $y = -x^3 + 3x - 1$.
C. $y = x^3 - 3x - 1$.
D. $y = x^4 - 2x^2 - 1$.



Lời giải

Chọn C

Ta thấy hình vẽ là đồ thị của hàm bậc 3, loại A, D.

Lại có nhánh cuối cùng của đồ thị đi lên nên $a > 0 \Rightarrow$ Chọn C

Câu 30. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, ($a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3		0		3	$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	-
y			$\frac{77}{4}$		$\frac{77}{4}$		

Bảng biến thiên đã cho là của hàm số nào dưới đây?

A. $y = -x^4 + 18x^2 - 1$.

B. $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2 - 1$.

C. $y = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2 - 1$.

D. $y = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{9}{2}x^2 - 1$.

Lời giải

Chọn D

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$ nên $a < 0$: loại B.

Hàm số có ba điểm cực trị nên $ab < 0$: loại C.

Vì $y(3) = \frac{77}{4}$ nên loại A.

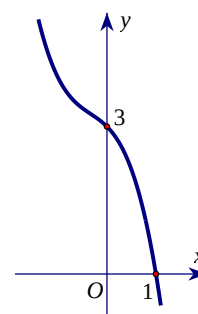
Câu 31. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.

B. $y = x^3 + x^2 - x + 3$.

C. $y = -x^3 - x^2 - x + 3$.

D. $y = -x^3 - 2x^2 - x + 3$.



Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số bậc ba có hệ số $a < 0 \Rightarrow$ loại. B.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3 $\Rightarrow$ loại. A.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ loại. D.

Câu 32. Hàm số nào trong bốn hàm số sau có bảng biến thiên như hình vẽ sau?

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y			2			$+\infty$
	$-\infty$				-2	

A. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

B. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

C. $y = x^3 + 3x^2 - 1$.

D. $y = x^3 - 3x + 2$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có $y' = 3x^2 - 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ và có $y(0) = 2, y(2) = -2$ nên phù

hợp với bảng biến thiên trên.

Câu 33. Bảng biến thiên dưới đây là một trong bốn hàm số được cho ở các phương án A, B, C, D. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'		$-$	$-$
y	2	$-\infty$	2

A. $y = \frac{2x-1}{x-2}$.

B. $y = \frac{2x-3}{x+2}$.

C. $y = \frac{x+3}{x-2}$.

D. $y = \frac{2x-5}{x-2}$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương án A : $y = \frac{2x-1}{x-2}$

Txđ : $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$y' = \frac{-3}{(x-2)^2} < 0, \forall x \in D.$$

Vậy hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Câu 34. Bảng biến thiên hình bên của hàm số nào dưới đây?

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y'		$+$	$+$
y	3	$+\infty$	3

A. $y = x^4 - 4x^2 + 3$.

B. $y = -x^3 + 3x - 2$.

C. $y = \frac{4x-3}{x+1}$.

D. $y = \frac{3x+4}{x+2}$.

Lời giải

Chọn D

Quan sát bảng biến thiên $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 3$ nên tiệm cận ngang là $y = 3$, $\lim_{x \rightarrow -2^{\pm}} y = \pm\infty$ nên tiệm cận đứng là $x = -2$.

Nên loại A, B.

Hàm số $y = \frac{3x+4}{x+2}$ có tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c} = 3$, tiệm cận đứng $x = \frac{-d}{c} = -2$.

Câu 35. Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào ?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	-4	-3	-4	$+\infty$

A. $y = x^4 + 2x^2 - 3$.

B. $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

C. $y = -x^4 + 2x^2 - 3$.

D. $y = x^4 + 2x^2 + 3$.

Lời giải

Chọn B

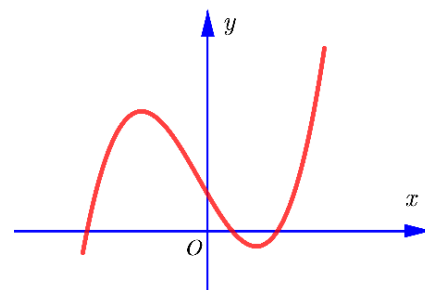
Căn cứ vào bảng biến thiên ta có :

- Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(0; -3)$ nên loại đáp án **D.**
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = +\infty$ nên loại đáp án **C.**
- Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(-1; -4)$ nên loại đáp án **A.**

Đáp án B được chọn.

Câu 36. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $a > 0; b < 0; c < 0; d > 0$.
- B.** $a > 0; b > 0; c > 0; d > 0$.
- C.** $a > 0; b > 0; c < 0; d > 0$.
- D.** $a < 0; b > 0; c < 0; d > 0$.



Lời giải

Chọn C

- ♦ Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$
- ♦ Dựa vào hình vẽ ta thấy
- + Nhánh ngoài cùng bên phải đồ thị đi lên từ trái qua phải nên $a > 0$.
- + Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.
- + Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 .

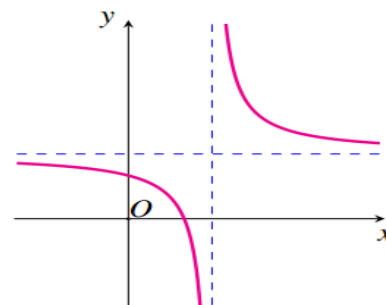
$$x_1 x_2 < 0 \Leftrightarrow \frac{c}{3a} < 0 \xrightarrow{a > 0} c < 0$$

$$x_1 + x_2 < 0 \Leftrightarrow -\frac{2b}{3a} < 0 \xrightarrow{a > 0} b > 0$$

Vậy $a > 0; b > 0; c < 0; d > 0$.

Câu 37. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $ab > 0$.
- B.** $ac > 0$.
- C.** $ad > bc$.
- D.** $cd > 0$.



Lời giải

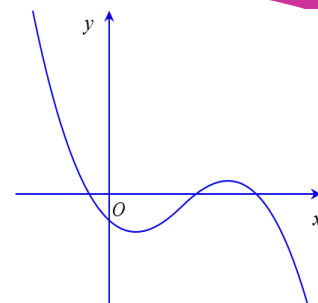
Chọn B

Hàm số có một đường tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$. Từ đồ thị có $\frac{a}{c} > 0$ suy ra $ac > 0$.

Câu 38. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ.

Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d

- A. 4.
B. 1.
C. 2.
D. 3.



Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $a < 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; d)$ nên ta có $d < 0$.

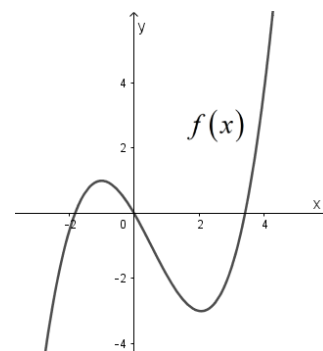
Hàm số có 2 điểm cực trị $x_1, x_2 > 0$ nên $\begin{cases} \frac{-b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ c < 0 \end{cases}$.

Vậy có 1 số dương là b .

Câu 39. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ sau.

Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d

- A. 0.
B. 1.
C. 2.
D. 3.



Lời giải

Chọn B

Phần ngoài cùng bên tay phải đồ thị đi lên nên $a > 0$

Tổng hai hoành độ của hai điểm cực trị dương $-\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow b < 0$

Hai điểm cực trị nằm về 2 phía với trục Oy nên $\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow c < 0$

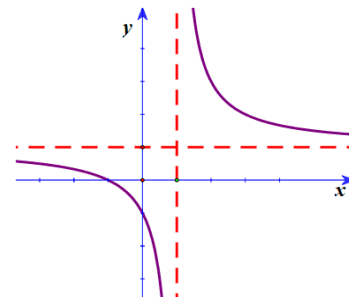
Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ nên $d = 0$.

Vậy có 2 số dương.

Câu 40. Cho hàm số $y = \frac{bx-c}{x-a}$ ($a \neq 0; a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình bên.

Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $a < 0, b > 0, c - ab < 0$.
B. $a > 0, b > 0, c - ab < 0$.
C. $a > 0, b < 0, c - ab < 0$.
D. $a < 0, b < 0, c - ab > 0$.



Lời giải

Chọn B

♦ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = a > 0$; tiệm cận ngang $y = b > 0$.

♦ Mặt khác, ta thấy dạng đồ thị là đường cong đi xuống từ trái sang phải trên các khoảng xác

định của nó nên $y' = \frac{c-ab}{(x-a)^2} < 0, \forall x \neq a \Rightarrow c-ab < 0$.

Vậy $a > 0, b > 0, c-ab < 0$.

Câu 41. Cho hàm số $f(x) = \frac{2-ax}{bx-c} (a, b, c \in \mathbb{R}, b \neq 0)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+		+	
y			$+\infty$		3
		3		$-\infty$	

Trong các số a, b, c có bao nhiêu số âm?

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

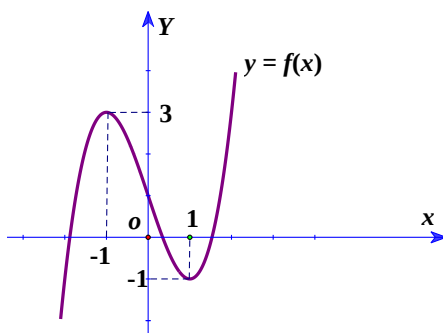
Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên ta có

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{ac-2b}{(bx-c)^2} > 0 \Rightarrow ac-2b > 0 \\ \frac{-a}{b} = 3 \Rightarrow a = -3b \\ \frac{c}{b} = 1 \Rightarrow c = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ c < 0 \end{cases}$$

Câu 42. Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.



Tính tổng: $T = a - b + c + d$.

A. 1.

B. 3.

C. -1.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

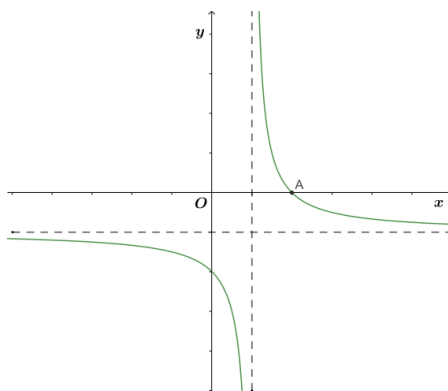
Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Dựa vào đồ thị, ta có:
$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y'(-1) = 0 \\ y(1) = -1 \\ y(-1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ a + b + c + d = -1 \\ -a + b - c + d = 3 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được
$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \\ d = 1 \end{cases}$$

Do đó: $T = a + b + c + d = 1 + 0 + (-3) + 1 = -1$.

Câu 43. Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $b < 0 < a$.

B. $b < a < 0$.

C. $a < b < 0$.

D. $0 < b < a$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = a$.

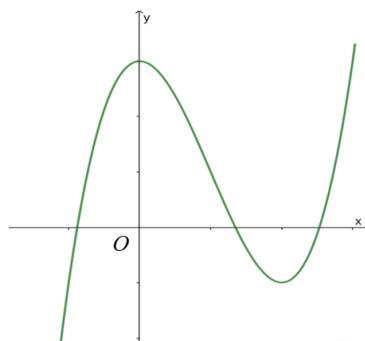
Theo đồ thị suy ra $a < 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $\left(\frac{b}{a}; 0\right)$. Dựa vào đồ thị, ta thấy $\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow b < 0$.

Mặt khác, ta cũng có $\frac{b}{a} > 1 \Rightarrow b < a$.

Vậy $b < a < 0$.

Câu 44. Cho hàm số $y = x^3 + bx^2 + d$ ($b, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A.** $b > 0; d > 0$. **B.** $b > 0; d < 0$. **C.** $b < 0; d > 0$. **D.** $b < 0; d < 0$.

Lời giải

Chọn C

$$y' = 3x^2 + 2bx$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2bx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{2}{3}b \end{cases}$$

Đồ thị có $x_{CD} = 0$; $x_{CT} > 0$ nên suy ra $b < 0$. Khi $x = 0 \Rightarrow y = d > 0$

Câu 45. Cho hàm số $y = \frac{ax+3}{x+b}$ với $a, b \in \mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	-1	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	-1

Giá trị của $a+b$ là

- A.** 1. **B.** 3. **C.** -1. **D.** -3

Lời giải

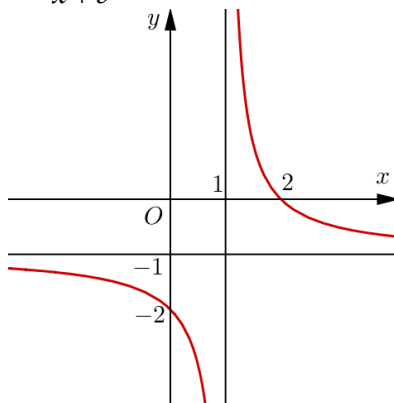
Chọn D

Tiệm cận đứng $x = -b = 2 \Rightarrow b = -2$

Tiệm cận ngang $y = a = -1$

Vậy $a+b = -3$.

Câu 46. Đồ thị hình bên là của hàm số $y = \frac{ax+2}{x+b}$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Khi đó tổng $a+b$ bằng



- A.** -2. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

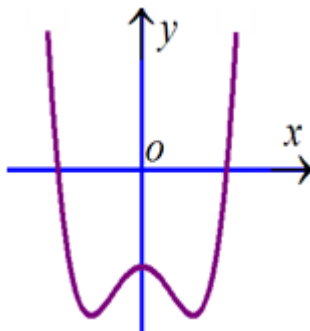
Chọn A

* Đồ thị có đường tiệm cận đứng $x=1$. Suy ra $b = -1$.

* Đồ thị có đường tiệm cận ngang $y = -1$. Suy ra $a = -1$.

Vậy $a + b = -2$.

Câu 47. Đường cong hình bên là đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ với a, b, c là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a > 0, b < 0, c > 0$.

B. $a < 0, b > 0, c < 0$.

C. $a < 0, b < 0, c < 0$.

D. $a > 0, b < 0, c < 0$.

Lời giải

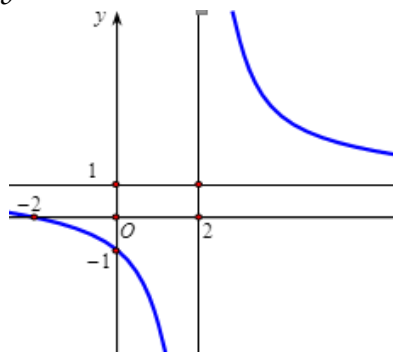
Chọn D

Đồ thị hàm số có nhánh cuối cùng hướng lên nên $a > 0$.

Đồ thị hàm số có 3 cực trị nên $ab < 0$ mà $a > 0$ nên $b < 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $c < 0$.

Câu 48. Tìm a, b, c để hàm số $y = \frac{ax+2}{cx+b}$ có đồ thị như hình vẽ sau:



A. $a = 1; b = 1; c = -1$.

B. $a = 1; b = -2; c = 1$.

C. $a = 1; b = 2; c = 1$.

D. $a = 2; b = -2; c = -1$.

Lời giải

Chọn B

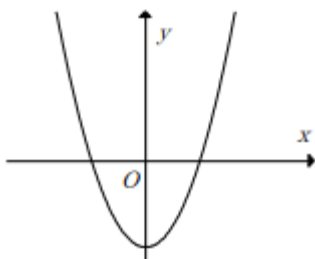
Để đường tiệm cận đứng là $x = 2$ thì $-\frac{b}{c} = 2 \Leftrightarrow b = -2c$.

Để đường tiệm cận ngang là $y = 1$ thì $\frac{a}{c} = 1 \Leftrightarrow a = c$.

Khi đó $y = \frac{cx+2}{cx-2c}$. Để đồ thị hàm số đi qua điểm $(-2; 0)$ thì $c = 1$. Vậy ta có

$a = 1; b = -2; c = 1$.

Câu 49. Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $a > 0, b < 0, c \leq 0$.

C. $a > 0, b \geq 0, c > 0$.

B. $a < 0, b < 0, c < 0$.

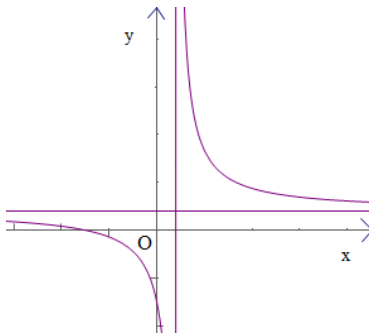
D. $a > 0, b \geq 0, c < 0$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta có $\begin{cases} a > 0 \\ a.b \geq 0 \\ c < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \\ c < 0 \end{cases}$.

Câu 50. Cho hàm số $y = \frac{(a-1)x+b}{(c-1)x+d}$, $d < 0$ có đồ thị như hình trên. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



A. $a > 1, b > 0, c < 1$.

B. $a > 1, b < 0, c > 1$.

C. $a < 1, b > 0, c < 1$.

D. $a > 1, b > 0, c > 1$.

Lời giải

Chọn D

Theo bài ra, đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = -\frac{d}{c-1}$.

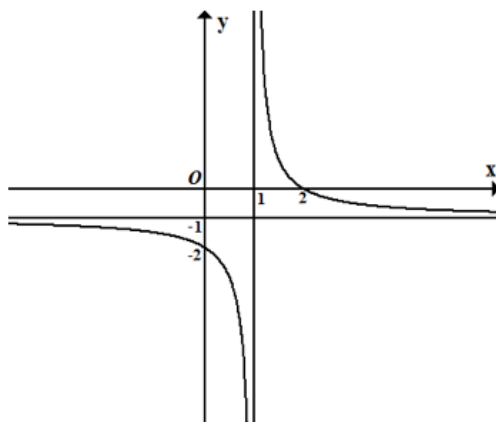
Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là: $y = \frac{a-1}{c-1}$.

Nhìn đồ thị ta thấy: $x = -\frac{d}{c-1} > 0$ mà $d < 0 \Rightarrow c-1 > 0 \Rightarrow c > 1$.

$$y = \frac{a-1}{c-1} > 0 \Rightarrow a-1 > 0 \Rightarrow a > 1.$$

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $\frac{b}{d} < 0 \Rightarrow b > 0$.

Câu 51. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình bên dưới, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $T = a + 2b + 3c$?



A. $T = -8$.

B. $T = 2$.

C. $T = 6$.

D. $T = 0$.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số, ta suy ra

◉ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=-1$.

◉ Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(2;0)$, $B(0;-2)$.

Từ biểu thức hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ (vì đồ thị hàm số là đồ thị hàm nhất biến nên $ac-b \neq 0$), ta suy ra

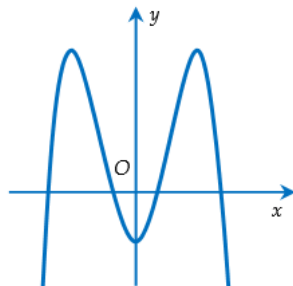
◉ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-c$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=a$.

◉ Đồ thị hàm số đi qua $A\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$, $B\left(0; \frac{b}{c}\right)$.

Đối chiếu lại, ta suy ra $c=-1$, $a=-1$, $b=2$.

Vậy $T = a + 2b + 3c = (-1) + 2 \cdot 2 + 3(-1) = 0$.

Câu 52. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$.

B. $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$.

C. $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$.

D. $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$.

Lời giải

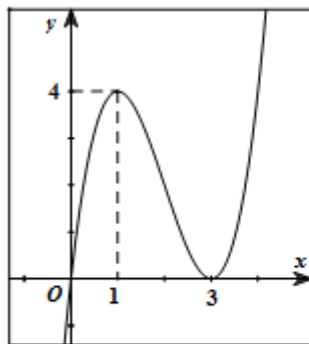
Chọn A

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0;c)$, từ đồ thị suy ra $c < 0$

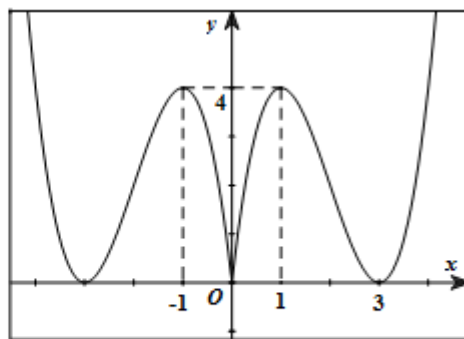
Mặt khác đồ thị hàm số có ba điểm cực trị nên $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt, hay $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b) = 0$ có ba nghiệm phân biệt. Suy ra a, b trái dấu.

Mà $a < 0 \Rightarrow b > 0$

Câu 53. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ có đồ thị như Hình 1. Khi đó đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y = |x^3 - 6x^2 + 9x|$.

B. $y = |x|^3 - 6x^2 + 9|x|$.

C. $y = -x^3 + 6x^2 - 9x$.

D. $y = |x|^3 + 6|x|^2 + 9|x|$.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số ở hình 2 nhận làm trục đối xứng nên là hàm số chẵn. Loại đi 2 phương án $y = -x^3 + 6x^2 - 9x$ và $y = |x^3 - 6x^2 + 9x|$.

Mặt khác, với $x = 1$, ta có $y(1) = 4$ (nhìn vào đồ thị) nên chọn phương án $y = |x|^3 - 6x^2 + 9|x|$.

Câu 54. (MĐ 101 - 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	3	-5	$+\infty$	

Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên, ta có

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f(4) = -5 \\ f'(0) = 0 \\ f'(4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 3 \\ 64a + 16b + 4c + d = -5 \\ c = 0 \\ 48a + 8b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{3}{2} \\ c = 0 \\ d = 3 \end{cases}$$

Vậy trong các số a, b, c, d có 2 số dương.

Câu 55. (MĐ 104 - 2020 Lần 2) Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		-1		-5		$+\infty$

Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

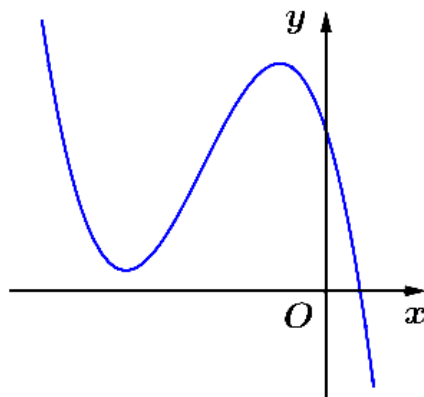
Ta có: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$)

$$\Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị $A(0; -1), B(4; -5)$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} f(0) = -1 \\ f(4) = -5 \\ f'(0) = 0 \\ f'(4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -1 \\ 64a + 16b + 4c + d = -5 \\ c = 0 \\ 48a + 8b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{8} \\ b = -\frac{3}{4} \\ c = 0 \\ d = -1 \end{cases}. \text{ Trong các số } a, b, c, d \text{ có 1 số dương.}$$

Câu 56. (MĐ 104 - 2020 Lần 1) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?



A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Dựa vào đồ thị ta thấy $a < 0$

$$\text{Hàm số có 2 cực trị âm nên } \begin{cases} \Delta'_{y'} > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 9ac > 0 \\ -\frac{2b}{3a} < 0 \\ \frac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < 0 \\ c < 0 \end{cases}$$

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $(0; d)$ nên $d > 0$

Vậy có đúng 1 số dương trong các số a, b, c, d .

Câu 57. (MĐ 102 - 2020 Lần 2) Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$			$\nearrow 2$	$\searrow 1$	$\nearrow$	
	$-\infty$					$+\infty$

Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Từ dấu hiệu sự biến thiên hàm số ta có $a > 0$.

Khi $x = 0$ thì $y = d = 1 > 0$.

Mặt khác $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Từ bảng biến thiên ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}$.

Từ đó suy ra $c = 0; \frac{-2b}{3a} = -2 \Rightarrow b = 3a > 0$.

Vậy có 3 số dương là a, b, d .

Câu 58. (ĐMH - 2020) Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+1}{bx+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	
$f(x)$			$\nearrow +\infty$	$\searrow 1$	
	1				$-\infty$

Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f(x) = \frac{ax+1}{bx+c}$ có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -\frac{c}{b}$ và đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{a}{b}$.

Từ bảng biến thiên ta có:
$$\begin{cases} -\frac{c}{b} = 2 \\ \frac{a}{b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = -\frac{c}{2} \quad (1)$$

Mặt khác: $f'(x) = \frac{ac-b}{(bx+c)^2}$.

Vì hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$ nên

$$f'(x) = \frac{ac-b}{(bx+c)^2} > 0 \Leftrightarrow ac-b > 0 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2), ta được: $-\frac{c^2}{2} + \frac{c}{2} > 0 \Leftrightarrow -c^2 + c > 0 \Leftrightarrow 0 < c < 1$.

Suy ra c là số dương và a, b là số âm.

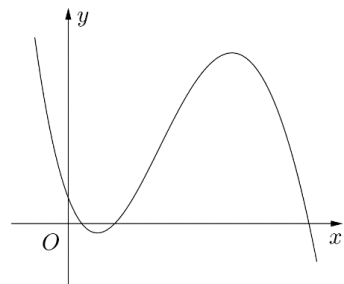
Câu 59. (MĐ 101 - 2020 Lần 1) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.



Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \Rightarrow a < 0$.

Gọi x_1, x_2 là hoành độ hai điểm cực trị của hàm số suy ra x_1, x_2 nghiệm phương trình $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ nên theo định lý Viet:

+) Tổng hai nghiệm $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < 0 \Rightarrow b > 0$.

+) Tích hai nghiệm $x_1 x_2 = \frac{c}{3a} > 0 \Rightarrow c < 0$.

Lại có đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

Vậy có 2 số dương trong các số a, b, c, d .

----- HẾT -----

SỰ TƯƠNG GIAO

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

Phương pháp tổng quát

Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đồ thị lần lượt là $(C_1);(C_2)$. Khi đó số giao điểm (điểm chung) của hai đồ thị $(C_1);(C_2)$ chính là số nghiệm $f(x)=g(x)$.

Với $g(x)=0$ thì phương trình $f(x)=g(x)$ là phương trình hoành độ giao điểm với trục hoành.

Phương pháp giải tương giao đồ thị của hàm số bậc ba

□ Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đồ thị lần lượt là $(C_1);(C_2)$. Khi đó số giao điểm (điểm chung) của hai đồ thị $(C_1);(C_2)$ đưa về dạng:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (*)$$

□ Với bài phương trình $(*)$ có chứa tham số thì ta có các phương pháp sau:

01

– Nhẩm được $(*)$ có nghiệm nghiệm $x = x_0$, khi đó:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \Leftrightarrow (x - x_0)(a_1x^2 + b_1x + c_1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0 \end{cases}$$

Để tách ra được như thế ta chia hookne.

– Tùy theo yêu cầu bài toán mà có điều kiện cho $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$.

02

– Cô lập được tham số m về một vế (vế phải) và biến số ở vế còn lại (vế trái) có dạng:

$$h(x) = k(m)$$

Khi đó thực hiện các bước sau:

○ **Bước 1.** Tính $h'(x) \rightarrow$ lập BBT của hàm số $h(x)$.

○ **Bước 2.** Từ BBT của hàm số $h(x)$ ta thực hiện yêu cầu bài toán.

03

– Hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có các điểm cực trị là “số đẹp”, khi đó:

○ $(*)$ có một nghiệm $\Leftrightarrow f(x)$ không có cực trị hoặc có cực trị thỏa $f_{CD} \cdot f_{CT} > 0$.

○ $(*)$ có hai nghiệm pb $\Leftrightarrow f(x)$ có cực trị thỏa $f_{CD} \cdot f_{CT} = 0$.

○ $(*)$ có ba nghiệm pb $\Leftrightarrow f(x)$ có cực trị thỏa $f_{CD} \cdot f_{CT} < 0$.

04

– Hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có các điểm cực trị là “số không đẹp”, khi đó ta dùng phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị kết hợp định lý Vi-ét để tính $f_{CD} \cdot f_{CT}$.

□ Mở rộng:

1. Định lý Vi-ét:

○ Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thì ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

○ Cho phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 thì ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = \frac{c}{a} \\ x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

2. Tính chất cấp số cộng:

○ Cho 3 số a, b, c theo thứ tự đó lập thành 1 cấp số cộng thì: $a + c = 2b$.

Khi đó ta có bài toán sau:

Tìm m để đồ thị hàm bậc ba cắt trục hoành tại 3 điểm lập thành 1 cấp số cộng.

○ Điều kiện cần: $x_0 = -\frac{b}{3a}$ là 1 nghiệm của phương trình.

Từ đó thay vào phương trình để tìm m .

○ Điều kiện đủ: Thay m tìm được vào phương trình và kiểm tra.

Phương pháp giải tương giao đồ thị của hàm số bậc bốn

□ Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đồ thị lần lượt là $(C_1); (C_2)$. Khi đó số giao điểm (điểm chung) của hai đồ thị $(C_1); (C_2)$ đưa về dạng trùng phương:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (*)$$

□ Với bài phương trình $(*)$ có chứa tham số thì ta có các phương pháp sau:

01

Phương pháp nhẩm nghiệm:

– Giả sử $x = x_0$ là một nghiệm của phương trình.

– Khi đó ta phân tích: $f(x, m) = (x^2 - x_0^2)g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm x_0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$

– Dựa vào giả thiết xử lý phương trình bậc 2 $g(x) = 0$

02

Phương pháp đặt ẩn phụ:

– Đặt $t = x^2, (t \geq 0)$. Phương trình: $at^2 + bt + c = 0 \quad (2)$.

① Để (1) có đúng 1 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn:
$$\begin{cases} t_1 < 0 = t_2 \\ t_1 = t_2 = 0 \end{cases}$$

- ② Để (1) có đúng 2 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $\begin{cases} t_1 < 0 < t_2 \\ 0 < t_1 = t_2 \end{cases}$
- ③ Để (1) có đúng 3 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 = t_1 < t_2$
- ④ Để (1) có đúng 4 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 < t_1 < t_2$

□ Tính chất cấp số cộng:

○ Cho 3 số a, b, c theo thứ tự đó lập thành 1 cấp số cộng thì: $a + c = 2b$.

Khi đó ta có bài toán sau:

Tìm m để đồ thị hàm bậc bốn cắt trục hoành tại 4 điểm lập thành 1 cấp số cộng.

- Đặt $t = x^2, (t \geq 0)$. Phương trình: $at^2 + bt + c = 0$ (2).
- Để (1) cắt (Ox) tại 4 điểm phân biệt thì (2) phải có 2 nghiệm dương t_1, t_2 ($t_1 < t_2$) thỏa mãn $t_2 = 9t_1$.
- Kết hợp $t_2 = 9t_1$ với định lý Vi – ét tìm được m .

Phương pháp giải tương giao đồ thị của hàm số phân thức

□ Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (C) và đường thẳng $d: y = px + q$. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d :

$$\frac{ax+b}{cx+d} = px + q \Leftrightarrow F(x, m) = 0 \text{ (phương trình bậc 2 ẩn } x \text{ tham số } m).$$

□ Một số câu hỏi thường gặp:

- | | |
|-----------|---|
| 01 | Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác $-\frac{d}{c}$. |
| 02 | Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh phải của (C) $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn: $-\frac{d}{c} < x_1 < x_2$. |
| 03 | Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh trái của (C) $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn $x_1 < x_2 < -\frac{d}{c}$. |
| 04 | Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt thuộc 2 nhánh của (C) $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn $x_1 < -\frac{d}{c} < x_2$. |
| 05 | Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A và B thỏa mãn điều kiện hình học cho trước: <ul style="list-style-type: none"> ① Đoạn thẳng $AB = k$ ② Tam giác ABC vuông. ③ Tam giác ABC có diện tích S_0 |

☑ **Quy tắc:**

- Tìm điều kiện tồn tại $A; B \Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt.
- Xác định tọa độ của A và B (chú ý Vi ét)
- Dựa vào giả thiết xác lập phương trình ẩn m . Từ đó suy ra m .

☑ **Chú ý:** Công thức khoảng cách:

$$+) A(x_A; y_A), B(x_B; y_B): AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$+) \begin{cases} M(x_0; y_0) \\ \Delta: Ax_0 + By_0 + C = 0 \end{cases} \Rightarrow d(M, \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Dạng toán 1. ĐẾM SỐ GIAO ĐIỂM (ĐIỂM CHUNG) BIẾT HÀM TƯƠNG MINH.

Phương pháp giải

- Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đồ thị lần lượt là $(C_1); (C_2)$. Khi đó số giao điểm (điểm chung) của hai đồ thị $(C_1); (C_2)$ chính là số nghiệm $f(x) = g(x)$.

Ví dụ 01.

Đồ thị hàm số $y = 15x^4 - 3x^2 - 2018$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

- A. 2 điểm. B. 3 điểm. C. 1 điểm. D. 4 điểm.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm đồ thị hàm số và trục hoành:

$$15x^4 - 3x^2 - 2018 = 0 (*)$$

Đặt $x^2 = t, t \geq 0$. Phương trình tương đương

$$15t^2 - 3t - 2018 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3 + \sqrt{121089}}{30} > 0 \\ t = \frac{3 - \sqrt{121089}}{30} < 0 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow t = \frac{3 + \sqrt{121089}}{30} \text{ nên } (*) \text{ có 2 nghiệm phân biệt.}$$

Vậy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 2 điểm.

Ví dụ 02.

Đường thẳng $y = 2x - 1$ có bao nhiêu điểm chung với đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$.

- A. 3. B. 1. C. 0. D. 2.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $d: y = 2x - 1$ và đồ thị

$$(C): y = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$$

$$\frac{x^2 - x - 1}{x + 1} = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 - x - 1 = (2x - 1)(x + 1) \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Ta có } (2) \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Suy ra d và (C) có hai điểm chung.

Ví dụ 03.

Đồ thị hàm số $y = 2x^4 - 3x^2$ và đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2$ có bao nhiêu điểm chung?

A. 4

B. 2

C. 1

D. 3

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$2x^4 - 3x^2 = -x^2 + 2 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ x^2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}.$$

Phương trình trên có hai nghiệm phân biệt.

Do đó số giao điểm của hai đồ thị hàm số là 2.

Ví dụ 04.

Cho đồ thị $(C): y = 2x^4 - 3x^2 + 2x + 2$ và đường thẳng $d: y = 2x + 1$. Hỏi d và (C) có bao nhiêu giao điểm nằm bên trái trục tung.

A. 2.

B. 4.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $2x^4 - 3x^2 + 2x + 2 = 2x + 1$

$$\Leftrightarrow 2x^4 - 3x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Ta có giao điểm nằm bên trái trục tung thì ứng với hoành độ là số âm nên nhận $x = -1$

$$, x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy có 2 điểm thỏa đề bài.

Ví dụ 05.

Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ có đồ thị (C). Giả sử a, b, c thay đổi nhưng luôn thỏa mãn điều kiện $b+1 < a+c < -(b+1)$. Khi đó (C) cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm phân biệt?

A. 1

B. 2

C. 3

D. 0

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } b+1 < a+c < -(b+1) \Leftrightarrow \begin{cases} a-b+c-1 > 0 \\ a+b+c+1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) > 0 \\ f(1) < 0 \end{cases}.$$

Mặt khác hàm số đã cho liên tục đồng thời $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$.

Do đó theo nguyên lý của hàm số liên tục, tồn tại các giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ với trục hoành trong các khoảng: $(-\infty; -1)$; $(-1; 1)$; $(1; +\infty)$.

Vậy có 3 giao điểm.

Dạng toán 2. ĐẾM SỐ GIAO ĐIỂM (ĐIỂM CHUNG) BIẾT ĐỒ THỊ/BBT.

Phương pháp giải

- Giải phương trình $f(x) = a$ với a là hằng số ta kẻ đường thẳng $y = a$ song song với Ox cắt đồ thị $f(x)$ tại bao nhiêu điểm thì có bấy nhiêu điểm chung.
- Áp dụng các phép biến đổi đồ thị ở “**Chuyên đề 05. Đồ thị hàm số**”

Ví dụ 01.

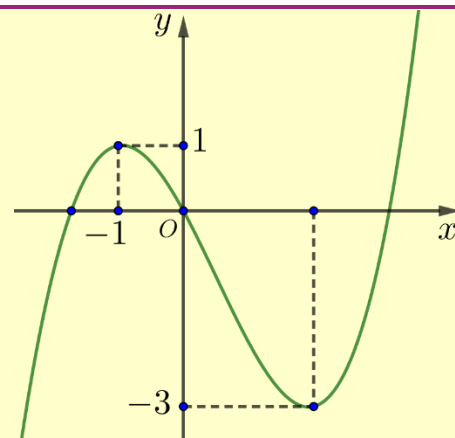
Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số nghiệm của phương trình $f(x) + 1 = 0$ là

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.



Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } f(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -1.$$

Kẻ đường thẳng $y = -1$ cắt đồ thị hàm số $f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Ví dụ 02.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	5	1	$+\infty$	

Số nghiệm của phương trình $|f(x)| - 2 = 0$ là

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)|$ như sau:

x	$-\infty$	x_0	-1	3	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			5			$+\infty$
		0			1		

Gọi x_0 là giá trị thỏa mãn $f(x_0) = 0$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)|$ ta đưa ra kết luận về số nghiệm của phương trình $|f(x)| - 2 = 0$ là 4 nghiệm.

Ví dụ 03.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$		$-$	0	$+$
y		2	$+\infty$	-4	$+\infty$

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x) = m$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt

A. $(-4; 2)$.

B. $[-4; 2)$.

C. $(-4; 2]$.

D. $(-\infty; 2]$.

Lời giải

Chọn A

Số nghiệm phương trình $f(x) = m$ là số giao điểm của hai đường $y = f(x)$ và $y = m$: là đường thẳng song song với trục Ox cắt Oy tại điểm có tung độ m .

Phương trình có 3 nghiệm thực phân biệt khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt.

Dựa vào bảng biến thiên có $m \in (-4; 2)$.

Ví dụ 04.

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên.

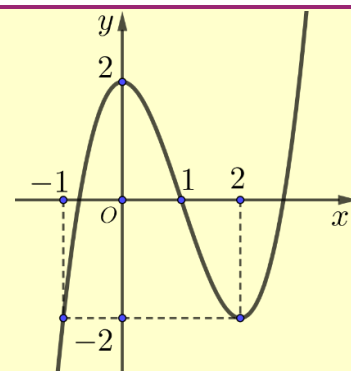
Phương trình $(x^3 - 3x^2 + 2)^3 - 3(x^3 - 3x^2 + 2) + 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt ?

A. 9.

B. 6.

C. 5.

D. 7.



Lời giải

Chọn D

Gọi $a, 1, b$ với $-1 < a < 0$ và $2 < b < 3$ là hoành độ của ba giao điểm của đồ thị và trục Ox .

$$\text{Ta có } (x^3 - 3x^2 + 2)^3 - 3(x^3 - 3x^2 + 2) + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = a \\ x^3 - 3x^2 + 2 = 1 \\ x^3 - 3x^2 + 2 = b \end{cases}$$

$x^3 - 3x^2 + 2 = a$ có ba nghiệm phân biệt.

$x^3 - 3x^2 + 2 = 1$ có ba nghiệm thực phân biệt.

$x^3 - 3x^2 + 2 = b$ có một nghiệm thực.

Vậy phương trình (1) có 7 nghiệm.

Ví dụ 05.

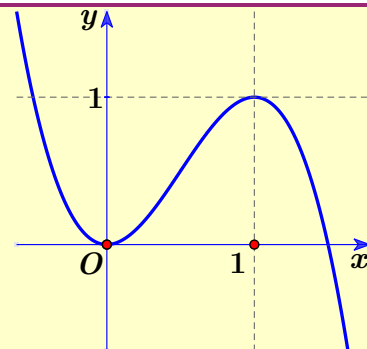
Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số nghiệm của phương trình $f(x) = x$.

A. 2

B. 3

C. 0

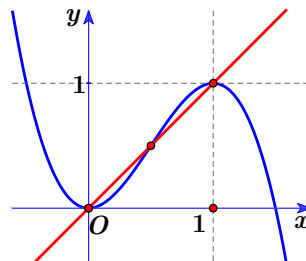
D. 1



Lời giải

Chọn B

Số nghiệm của phương trình $f(x) = x$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = x$.



Dựa vào hình vẽ suy ra phương trình $f(x) = x$ có 3 nghiệm.

Dạng toán 3. TÌM m ĐỂ ĐTHS GIAO VỚI (C') TẠI n NGHIỆM.

Phương pháp giải

○ Với đồ thị hàm số bậc ba:

01

– Nhắm được (*) có nghiệm nghiệm $x = x_0$, khi đó:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \Leftrightarrow (x - x_0)(a_1x^2 + b_1x + c_1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0 \end{cases}$$

Để tách ra được như thế ta chia hookne.

– Tùy theo yêu cầu bài toán mà có điều kiện cho $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$.

02

– Cô lập được tham số m về một vế (vế phải) và biến số ở vế còn lại (vế trái) có dạng: $h(x) = k(m)$

Khi đó thực hiện các bước sau:

○ **Bước 1.** Tính $h'(x) \rightarrow$ lập BBT của hàm số $h(x)$.

○ **Bước 2.** Từ BBT của hàm số $h(x)$ ta thực hiện yêu cầu bài toán.

03

– Hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có các điểm cực trị là “số đẹp”, khi đó:

○ (*) có một nghiệm $\Leftrightarrow f(x)$ không có cực trị hoặc có cực trị thỏa $f_{CD} \cdot f_{CT} > 0$.

○ (*) có hai nghiệm pb $\Leftrightarrow f(x)$ có cực trị thỏa $f_{CD} \cdot f_{CT} = 0$.

○ (*) có ba nghiệm pb $\Leftrightarrow f(x)$ có cực trị thỏa $f_{CD} \cdot f_{CT} < 0$.

04

– Hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có các điểm cực trị là “số không đẹp”, khi đó ta dùng phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị kết hợp định lý Vi-ét để tính $f_{CD} \cdot f_{CT}$.

○ Với đồ thị hàm số bậc bốn (trùng phương):

01

Phương pháp nhẩm nghiệm:

– Giả sử $x = x_0$ là một nghiệm của phương trình.

– Khi đó ta phân tích: $f(x, m) = (x^2 - x_0^2)g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm x_0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$

– Dựa vào giả thiết xử lý phương trình bậc 2 $g(x) = 0$

02

Phương pháp đặt ẩn phụ:

– Đặt $t = x^2, (t \geq 0)$. Phương trình: $at^2 + bt + c = 0 \quad (2)$.

① Để (1) có đúng 1 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $\begin{cases} t_1 < 0 = t_2 \\ t_1 = t_2 = 0 \end{cases}$

② Để (1) có đúng 2 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $\begin{cases} t_1 < 0 < t_2 \\ 0 < t_1 = t_2 \end{cases}$

③ Để (1) có đúng 3 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 = t_1 < t_2$

④ Để (1) có đúng 4 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 < t_1 < t_2$

○ Với đồ thị hàm số phân thức:

□ Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (C)$ và đường thẳng $d: y = px + q$. Phương trình hoành độ giao điểm

của (C) và $d: \frac{ax+b}{cx+d} = px + q \Leftrightarrow F(x, m) = 0$ (phương trình bậc 2 ẩn x tham số m).

□ Một số câu hỏi thường gặp:

01

Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt khác $-\frac{d}{c}$.

02

Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh phải của $(C) \Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn: $-\frac{d}{c} < x_1 < x_2$.

03

Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh trái của $(C) \Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn $x_1 < x_2 < -\frac{d}{c}$.

04

Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt thuộc 2 nhánh của $(C) \Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn $x_1 < -\frac{d}{c} < x_2$.

05

Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A và B thỏa mãn điều kiện hình học cho trước:

① Đoạn thẳng $AB = k$

② Tam giác ABC vuông.

③ Tam giác ABC có diện tích S_0

Ví dụ 01.

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = 2x^3 - (2+m)x + m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

A. $m > \frac{1}{2}$.

B. $m \leq \frac{1}{2}$.

C. $m > -\frac{1}{2}; m \neq 4$.

D. $m > -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành ta có.

$$2x^3 - (2+m)x + m = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 - 1) - m(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2 + 2x - m) = 0.$$

Vậy phương trình luôn có một nghiệm $x=1$.

Để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt thì phương trình:

$$2x^2 + 2x - m = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt khác } 1.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 + 2m > 0 \\ 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} < m \\ m \neq 4 \end{cases}.$$

Ví dụ 02.

Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2x^2 + m$ cắt trục hoành tại 4 điểm là

A. $-1 \leq m < 0$.

B. $0 \leq m < 1$.

C. $-1 < m < 0$.

D. $0 < m < 1$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4 - 2x^2 + m = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 = -m$.

Vẽ đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2$, ta thấy để phương trình trên có 4 điểm phân biệt thì $-1 < m < 0$.

Suy ra $0 < m < 1$.

Ví dụ 03.

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $|2x^4 - 4x^2 + 1| = m$ có 8 nghiệm phân biệt. Tìm S ?

A. $S = (1; 2)$

B. $S = (0; 2)$

C. $S = (0; 1)$

D. $S = (-1; 1)$

Lời giải

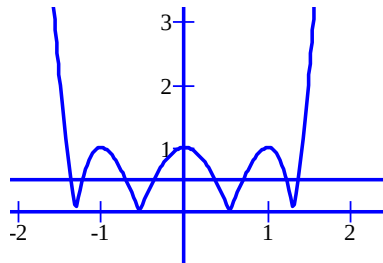
Chọn C

$$\text{Xét hàm số: } y = 2x^4 - 4x^2 + 1. \quad y' = 8x^3 - 8x, \quad y' = 0 \Leftrightarrow 8x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$				1				$+\infty$

Suy ra đồ thị hàm số $y = |2x^4 - 4x^2 + 1|$

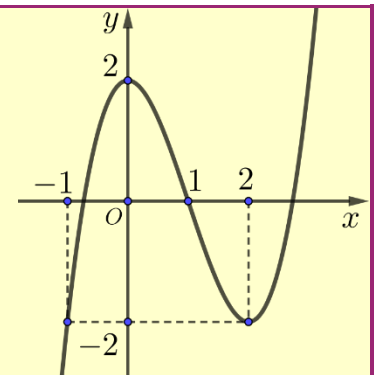


Nghiệm của phương trình $|2x^4 - 4x^2 + 1| = m$ chính là số giao điểm của đường thẳng $y = m$ và đồ thị hàm số $y = |2x^4 - 4x^2 + 1|$. Dựa vào đồ thị ta có khi $0 < m < 1$ thì phương trình đã cho có 8 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 04.

Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $|x|^3 - 3x^2 + 2 = m$ có nhiều nghiệm thực nhất.

- A. $-2 \leq m \leq 2$.
- B. $-2 < m < 2$.
- C. $0 \leq m \leq 2$.
- D. $0 < m < 2$.



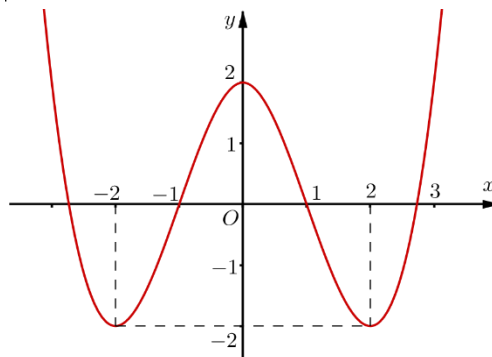
Lời giải

Chọn B

Ta có hàm số $g(x) = |x|^3 - 3x^2 + 2$ là hàm số chẵn nên đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Khi $x \geq 0$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $g(x) = |x|^3 - 3x^2 + 2$ có dạng như hình vẽ.



Dựa vào đồ thị suy ra phương trình $|x|^3 - 3x^2 + 2 = m$ có nhiều nghiệm thực nhất khi và chỉ khi $-2 < m < 2$.

Ví dụ 05.

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 + mx + 2$ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

- A. $-3 < m < 0$. B. $m > -3$. C. $m < -3$. D. $m \geq 0$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và trục hoành là $x^3 + mx + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow m = -\frac{2}{x} - x^2 \text{ (do } x=0 \text{ không là nghiệm của phương trình)}.$$

Xét hàm số $g(x) = -\frac{2}{x} - x^2$; $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$g'(x) = \frac{2}{x^2} - 2x; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'			0	
		+	-	
y	$-\infty$	$+\infty$	-3	$-\infty$

Dựa vào đồ thị ta có, để đồ thị hàm số $y = x^3 + mx + 2$ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất thì $m > -3$.

Ví dụ 06.

Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{1-x}$ (C) và đường thẳng $d: y = x + m$. Với giá trị nào của tham số m thì đường thẳng cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt.

- A. $m < -5$. B. $m \in (-\infty; -5) \cup (-1; +\infty)$.
C. $-5 < m < -1$. D. $m > -1$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{2x-1}{1-x} = x + m$.

Đường thẳng cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt khi $\frac{2x-1}{1-x} = x + m$ có hai nghiệm phân biệt.

$$\text{Ta có } \frac{2x-1}{1-x} = x+m \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = (x+m)(1-x) \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (m+1)x - m - 1 = 0 \\ x \neq 1 \end{cases}.$$

Do đó đường thẳng cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt khi phương trình có hai nghiệm phân biệt khác 1 tức là

$$\begin{cases} (m+1)^2 + 4(m+1) > 0 \\ 1 + (m+1) - m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + 6m + 5 > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -5) \cup (-1; +\infty).$$

Dạng toán 4. TÌM m ĐỂ ĐTHS PHÂN THỨC GIAO VỚI (C') THỎA ĐIỀU KIỆN.

Phương pháp giải

○ Với đồ thị hàm số phân thức:

□ Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (C) và đường thẳng $d: y = px+q$. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d: $\frac{ax+b}{cx+d} = px+q \Leftrightarrow F(x, m) = 0$ (phương trình bậc 2 ẩn x tham số m).

□ Một số câu hỏi thường gặp:

- | | |
|----|--|
| 01 | Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt khác $-\frac{d}{c}$. |
| 02 | Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh phải của (C) $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn: $-\frac{d}{c} < x_1 < x_2$. |
| 03 | Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh trái của (C) $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn $x_1 < x_2 < -\frac{d}{c}$. |
| 04 | Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt thuộc 2 nhánh của (C) $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn $x_1 < -\frac{d}{c} < x_2$. |
| 05 | Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A và B thỏa mãn điều kiện hình học cho trước:
① Đoạn thẳng $AB = k$
② Tam giác ABC vuông.
③ Tam giác ABC có diện tích S_0 |

Ví dụ 01.

Cho hàm số (C): $y = \frac{x-2}{x+1}$. Đường thẳng d: $y = x+m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm A, B phân biệt và $AB = 2\sqrt{2}$ khi m nhận giá trị nào trong các giá trị sau đây?

A. $m = -2$.

B. $m = 1$.

C. $m = 8$.

D. $m = 5$.

Lời giải

Chọn A

☑ Phương trình hoành độ giao điểm.

$$\frac{x-2}{x+1} = x+m \Rightarrow x-2 = x^2 + (m+1)x + m \Rightarrow x^2 + mx + m+2 = 0, x \neq -1.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 x_2 = m+2 \end{cases} \text{ mà } AB = |x_1 - x_2| \sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow AB^2 = (S^2 - 4P) \cdot 2 \Rightarrow m^2 - 4(m+2) = 4 \Rightarrow m^2 - 4m - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = -2 \end{cases} \text{ (nhận hết)}.$$

Do điều kiện $\Delta = m^2 - 4m - 8 > 0$.

Ví dụ 02.

Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ (C). Tìm giá trị m để đường thẳng $d: y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt sao cho tam giác OAB vuông tại A hoặc B .

A. $m = 1 \pm \sqrt{5}$.

B. $m = 1 \pm \sqrt{2}$.

C. $m = 1 \pm \sqrt{6}$.

D. $m = 1 \pm \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{2x-1}{x-1} = x+m \Leftrightarrow x^2 + (m-3)x + 1-m = 0$ (*).

Ta có d cắt (C) tại hai điểm phân biệt khi chỉ khi $\begin{cases} \Delta = m^2 - 2m + 5 > 0 \\ (1)^2 + (m-3) \cdot 1 + 1 - m \neq 0 \end{cases}$ (luôn đúng với mọi m).

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phương trình (*), ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3-m \\ x_1 x_2 = 1-m \end{cases}$ và (C) cắt d tại

$A(x_1; x_1 + m), B(x_2; x_2 + m)$.

Vector $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; x_2 - x_1)$ cùng phương với vector $\vec{u} = (1; 1)$.

Tam giác OAB vuông tại A khi chỉ khi $\overrightarrow{OA} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2x_1 + m = 0$.

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} x_1 + x_2 = 3-m \\ x_1 x_2 = 1-m \\ 2x_1 = -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = -m \\ 2x_2 = 6-m \\ -m(6-m) = 4-4m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 + \sqrt{5} \\ m = 1 - \sqrt{5} \end{cases}.$$

Ví dụ 03.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ biết tiếp tuyến đó cắt trục tung và cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB cân là

A. $y = x - 2$.

B. $y = -x + 2$.

C. $y = -x - 2$.

D. $y = x + 2$.

Lời giải

Chọn C

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$.

Gọi $M\left(m; \frac{m+2}{2m+3}\right) \in (C), m \neq -\frac{3}{2}$.

Ta có $y' = -\frac{1}{(2x+3)^2} \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến d của (C) tại M là:

$$y = -\frac{1}{(2m+3)^2}(x-m) + \frac{m+2}{2m+3} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{(2m+3)^2}x + \frac{2m^2+8m+6}{(2m+3)^2}.$$

$$d \cap Oy = A\left(0; \frac{2m^2+8m+6}{(2m+3)^2}\right)$$

$$d \cap Ox = B(2m^2+8m+6; 0).$$

Ba điểm O, A, B tạo thành tam giác $\Rightarrow \begin{cases} A \neq O \\ B \neq O \end{cases} \Rightarrow 2m^2+8m+6 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq -3 \end{cases}$.

Ta thấy $\triangle OAB$ vuông tại O nên theo giả thiết $\triangle OAB$ cân tại O

$$\Leftrightarrow OA = OB$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2m^2+8m+6|}{(2m+3)^2} = |2m^2+8m+6|.$$

Vì $2m^2+8m+6 \neq 0$ nên phương trình tương đương với

$$(2m+3)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 (L) \\ m = -2 (TM) \end{cases}.$$

Khi đó, $d: y = -x - 2$.

Ví dụ 04.

Tìm m để đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ tại hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị.

A. $m \in \left(-\frac{1}{4}; +\infty\right) \setminus \{0\}$.

B. $m \in (0; +\infty)$.

C. $m \in (-\infty; 0)$.

D. $m = 0$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm

$$mx+1 = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ (mx+1)(x-1) = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ mx^2 - mx - 2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

YCBT $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1 thỏa mãn $(x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = m^2 + 8m > 0 \\ m \cdot 1^2 - m \cdot 1 - 2 \neq 0 \\ x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > 0 \\ m < -8 \\ m \in \mathbb{R} \\ -\frac{2}{m} - 1 + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -8 \\ \frac{2}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$

Ví dụ 05.

Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $(d): y = -x + m$ cắt đồ thị $(C): y = \frac{x-1}{2x}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho độ dài đoạn thẳng AB là ngắn nhất.

A. $m = \frac{1}{2}.$

B. $m = \frac{5}{9}.$

C. $m = -\frac{1}{2}.$

D. $m = 5.$

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C) là:

$$-x + m = \frac{x-1}{2x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 2x(-x + m) = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ g(x) = 2x^2 + (1 - 2m)x - 1 = 0 \end{cases}$$

Đường thẳng (d) cắt (C) tại hai điểm A, B phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(0) \neq 0 \\ \Delta_g = (1 - 2m)^2 + 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \neq 0 \\ (1 - 2m)^2 + 8 > 0 \end{cases} \text{ luôn đúng với } \forall m \in \mathbb{R}.$$

Khi đó tọa độ hai giao điểm là:

$A(x_1; -x_1 + m), B(x_2; -x_2 + m)$ với $x_1; x_2$ là hai nghiệm của $g(x)$.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2} = \sqrt{2(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} \\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{-1}{2}\right)} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{(2m-1)^2 + 8}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(2m-1)^2 + 8} \geq \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}}{2} = 2. \end{aligned}$$

Suy ra AB nhỏ nhất khi dấu bằng ở trên xảy ra nghĩa là $m = \frac{1}{2}.$

III. BÀI TẬP RÈN LUYỆN.

Câu 1. (ĐMH - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$						

$-\infty \nearrow 1 \searrow 0 \nearrow +\infty$

Số nghiệm của phương trình $3f(x) - 2 = 0$ là

A. 2.

B. 0.

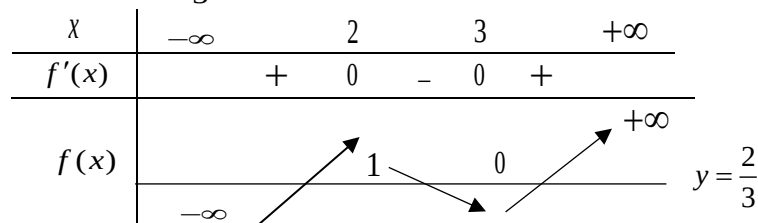
C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

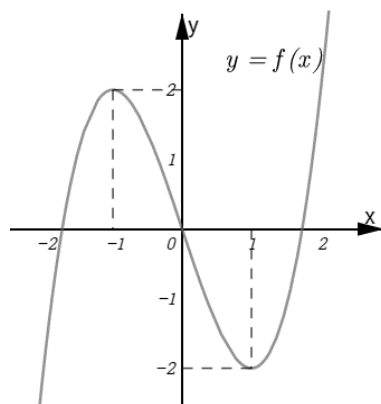
Ta có $3f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{3}$



Căn cứ vào bảng biến thiên thì phương trình $3f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{3}$ có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 2. (MĐ 101 - 2020 Lần 1) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.

Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = -1$ là:



A. 3.

B. 1.

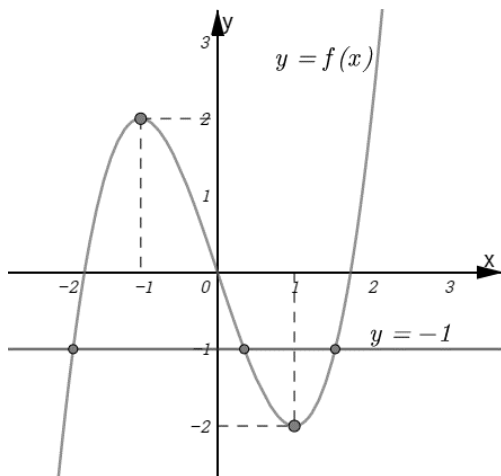
C. 0.

D. 2.

Lời giải

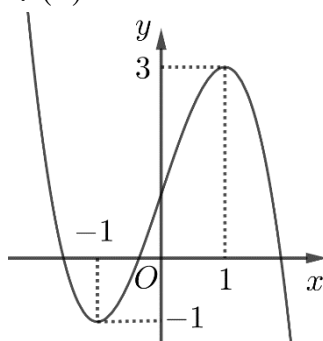
Chọn A

Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = -1$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -1$.



Từ hình vẽ suy ra 3 nghiệm.

Câu 3. (MĐ 102 - 2020 Lần 1) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ là



A. 0.

B. 3.

C. 1.

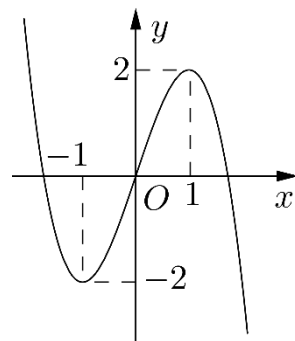
D. 2.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình $f(x) = 1$ có 3 nghiệm.

Câu 4. (MĐ 103 - 2020 Lần 1) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ là



A. 1.

B. 0.

C. 2.

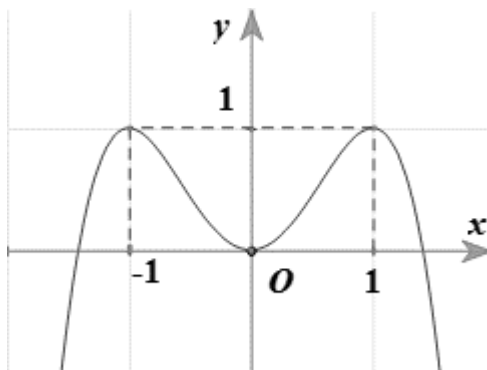
D. 3.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số ta có số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ là 3.

Câu 5. (MĐ 102 - 2018) Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c (a, b, c \in \mathbb{R})$. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên.



Số nghiệm của phương trình $4f(x) - 3 = 0$ là

A. 2

B. 0

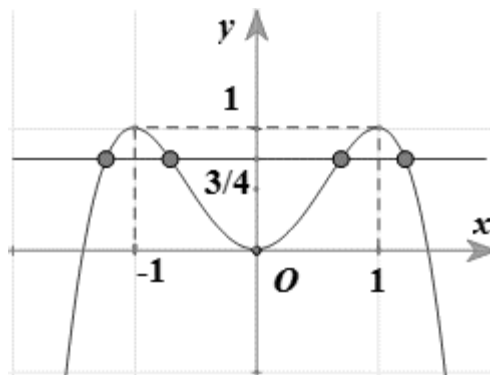
C. 4

D. 3

Lời giải

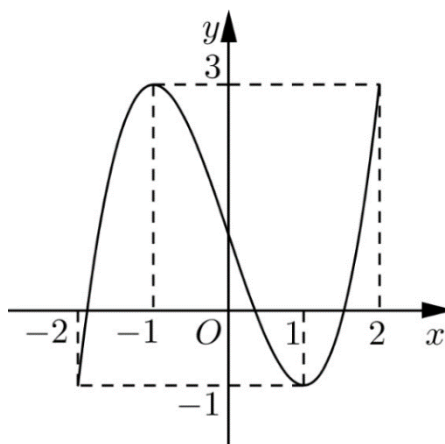
Chọn C

Ta có $4f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{4}$



Đường thẳng $y = \frac{3}{4}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 4 điểm phân biệt nên phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 6. (MĐ 103 - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2; 2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 4 = 0$ trên đoạn $[-2; 2]$ là



A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $3f(x) - 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{4}{3}$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy đường thẳng $y = \frac{4}{3}$ cắt $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 7. (MĐ 102 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-1	2	-1	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 5 = 0$ là

A. 3.

B. 4.

C. 0.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-1	2	-1	$+\infty$

$y=3/2$

Xét phương trình $3f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{5}{3}$.

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ và đường thẳng $d: y = \frac{3}{2}$. Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt.

Câu 8. (MĐ 104 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

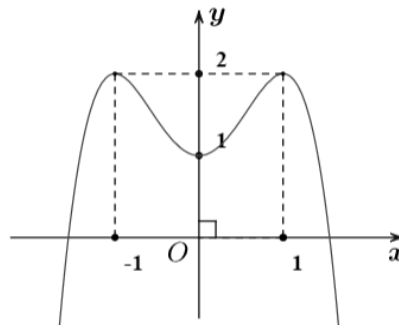
x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

$y = -\frac{3}{2}$

Ta có $2f(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{3}{2}$.

Nhìn bảng biến thiên ta thấy phương trình này có 3 nghiệm.

Câu 9. (MĐ 103 - 2019) Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = \frac{1}{2}$ là



A. 2.

B. 4.

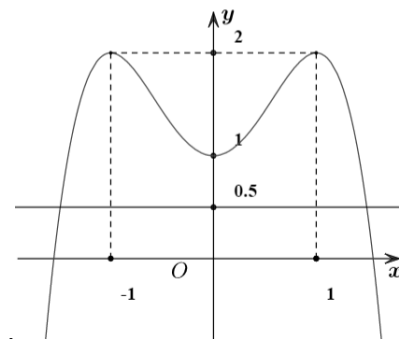
C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

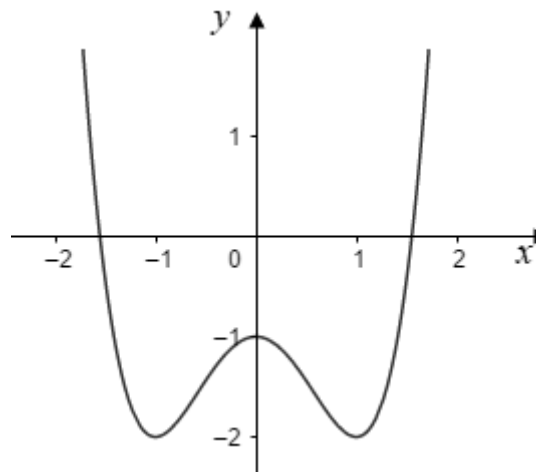
Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = \frac{1}{2}$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)$ với đường thẳng $y = \frac{1}{2}$



Dựa vào hình trên ta thấy đồ thị hàm số $f(x)$ với đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ có 2 giao điểm.

Vậy phương trình $f(x) = \frac{1}{2}$ có hai nghiệm.

Câu 10. (MĐ 101 - 2020) Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm của phương trình $f(x) = -\frac{1}{2}$ là

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

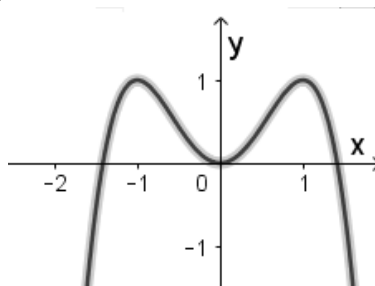
Chọn C

Số nghiệm của phương trình $f(x) = -\frac{1}{2}$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -\frac{1}{2}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy: đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -\frac{1}{2}$ cắt nhau tại 2 điểm.

Nên phương trình $f(x) = -\frac{1}{2}$ có 2 nghiệm.

Câu 11. (MĐ 104 - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = \frac{1}{2}$ là



A. 4.

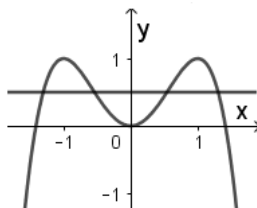
B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn A



Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = \frac{1}{2}$ bằng số giao điểm của đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ và đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Ta thấy đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số tại 4 điểm nên phương trình $f(x) = \frac{1}{2}$ có 4 nghiệm.

Câu 12. (ĐMH - 2020) Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ và trục hoành là

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$y'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$y(x)$	$-\infty$	3	-1	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

- Câu 13. (MĐ 101 - 2020)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2$ và đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 3x$ là
- A. 3. B. 1. C. 2. D. 0.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là:

$$x^3 + 3x^2 = 3x^2 + 3x \Leftrightarrow x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}.$$

Hai đồ thị đã cho cắt nhau tại 3 điểm.

- Câu 14. (MĐ 102 - 2020)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2$ và đồ thị hàm số $y = -x^2 + 5x$ là
- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Lời giải

Chọn B

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2$ và đồ thị hàm số $y = -x^2 + 5x$ chính là số nghiệm

thực của phương trình $x^3 - x^2 = -x^2 + 5x \Leftrightarrow x^3 - 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{5} \end{cases}.$

- Câu 15. (MĐ 103 - 2020)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2$ và đồ thị hàm số $y = x^2 + 5x$
- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 + x^2 = x^2 + 5x \Leftrightarrow x^3 - 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{5} \end{cases}.$

Vậy số giao điểm của 2 đồ thị là 3.

- Câu 16. (MĐ 104 - 2020)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^2 + 3x$ và đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2$ là
- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm là $x^3 - x^2 = -x^2 + 3x \Leftrightarrow x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}.$

- Câu 17. (MĐ 102 - 2020)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 7x$ với trục hoành là

A. 0.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và trục hoành là: $-x^3 + 7x = 0$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{7} \end{cases}.$$

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 7x$ với trục hoành bằng 3.

Câu 18. (MĐ 103 - 2020) Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x$ với trục hoành là

A. 2.

B. 0.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm $-x^3 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(-x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}.$

Vậy có 3 giao điểm.

Câu 19. (MĐ 101 - 2020) Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 6x$ với trục hoành là

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 6x$ với trục hoành là nghiệm của

phương trình $-x^3 + 6x = 0$ (*) $\Leftrightarrow -x(x^2 - 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{6} \end{cases}.$

Phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt, do đó đồ thị hàm số $y = -x^3 + 6x$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

Câu 20. (MĐ 104 - 2020) Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 5x$ với trục hoành là:

A. 3

B. 2

C. 0

D. 1

Lời giải

Chọn A

Ta có $-x^3 + 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5} \\ x = 0 \end{cases}$

Vậy số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 5x$ với trục hoành là 3

Câu 21. (MĐ 105 - 2020) Cho hàm số $y = (x - 2)(x^2 + 1)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. (C) cắt trục hoành tại một điểm.

B. (C) cắt trục hoành tại ba điểm.

C. (C) cắt trục hoành tại hai điểm.

D. (C) không cắt trục hoành.

Lời giải

Chọn A

Để thấy phương trình $(x-2)(x^2+1)=0$ có 1 nghiệm $x=2 \Rightarrow (C)$ cắt trục hoành tại một điểm.

Câu 22. (ĐMH - 2017) Biết rằng đường thẳng $y=-2x+2$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+x+2$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0

- A. $y_0 = 4$ B. $y_0 = 0$ C. $y_0 = 2$ D. $y_0 = -1$

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $-2x+2=x^3+x+2 \Leftrightarrow x^3+3x=0 \Leftrightarrow x=0$

Với $x_0=0 \Rightarrow y_0=2$.

Câu 23. (ĐMH - 2017) Cho hàm số $y=x^3-3x$ có đồ thị (C) . Tìm số giao điểm của (C) và trục hoành.

- A. 2 B. 3 C. 1 D. 0

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành: $x^3-3x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$

Vậy số giao điểm của (C) và trục hoành là 3.

Câu 24. Cho đồ thị $(C): y=2x^4-3x^2+2x+2$ và đường thẳng $d: y=2x+1$. Hỏi d và (C) có bao nhiêu giao điểm nằm bên trái trục tung.

- A. 2. B. 4. C. 0. D. 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $2x^4-3x^2+2x+2=2x+1$

$$\Leftrightarrow 2x^4-3x^2+1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ x^2=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ x=\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Ta có giao điểm nằm bên trái trục tung thì ứng với hoành độ là số âm nên nhận $x=-1$, $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy có 2 điểm thỏa đề bài.

Câu 25. Gọi M, N là các giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=x-2$ và $y=\frac{7x-14}{x+2}$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng MN . Tìm hoành độ điểm I .

- A. 7. B. $\frac{7}{2}$. C. 3. D. $-\frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$x-2=\frac{7x-14}{x+2} \Rightarrow x^2-4=7x-14 \Leftrightarrow x^2-7x+10=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow M(2;0); N(5;3).$$

Do I là trung điểm của đoạn thẳng MN nên ta có $x_I = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2}$.

Câu 26. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+2}$ có đồ thị (C) . Tìm tọa độ giao điểm I của hai đường tiệm cận của đồ thị (C) .

- A. $I(2; -2)$. B. $I(-2; -2)$. C. $I(-2; 2)$. D. $I(2; 2)$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Tiệm cận đứng $x = -2$ vì $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{2x-1}{x+2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{2x-1}{x+2} = -\infty$

Tiệm cận ngang $y = 2$ vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x+2} = 2$.

Vậy $I(-2; 2)$.

Câu 27. Biết đường thẳng $y = x + 1$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{7x-17}{2x-5}$ tại 2 điểm phân biệt, gọi A là giao điểm thuộc nhánh bên phải đường tiệm cận đứng của (C) , kí hiệu $(x_A; y_A)$ là tọa độ của điểm A . Tìm $x_A + y_A$?

- A. $x_A + y_A = 3$. B. $x_A + y_A = 5$. C. $x_A + y_A = 7$. D. $x_A + y_A = 13$.

Lời giải

Chọn C

Ta có hoành độ giao điểm là nghiệm của : $x + 1 = \frac{7x-17}{2x-5} \Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$.

Mặt khác tiệm cận đứng của (C) là $x = \frac{5}{2}$, A là giao điểm thuộc nhánh bên phải đường tiệm cận đứng của (C) nên $x_A = 3 \Rightarrow y_A = 4 \Rightarrow x_A + y_A = 7$.

Câu 28. Cho hàm số $y = \frac{2x+3}{x+3}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = 2x - 3$. Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm A và B . Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .

- A. $I\left(-\frac{1}{4}; -\frac{11}{4}\right)$. B. $I\left(-\frac{1}{4}; -\frac{7}{2}\right)$. C. $I\left(-\frac{1}{4}; -\frac{13}{4}\right)$. D. $I\left(-\frac{1}{8}; -\frac{13}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm là $\frac{2x+3}{x+3} = 2x - 3 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 12 = 0 (1) (x \neq -3)$.

Gọi x_1, x_2 là hoành độ của A và B . Theo định lí Viet suy ra:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = -6 \end{cases}$$

Ta có: $x_I = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{1}{4}$. Suy ra $y_I = 2x_I - 3 = -\frac{7}{2}$.

Vậy $I\left(-\frac{1}{4}; -\frac{7}{2}\right)$.

Câu 29. Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $(d): y = x - 1$ và đường cong $(C): y = \frac{2x-1}{x+5}$. Hoành độ trung điểm I của đoạn thẳng MN bằng:

- A. -2. B. 2. C. -1. D. 1.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm: $x - 1 = \frac{2x-1}{x+5} \Leftrightarrow x^2 + 5x - x - 5 = 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + \sqrt{5} \\ x_2 = 1 - \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow x_I = \frac{1 + \sqrt{5} + 1 - \sqrt{5}}{2} = 1.$$

Câu 30. Gọi A, B là các giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ và đường thẳng $y = -x - 1$. Tính AB .

- A. $AB = 4$. B. $AB = \sqrt{2}$. C. $AB = 2\sqrt{2}$. D. $AB = 4\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Tọa độ các điểm A, B là nghiệm của hệ phương trình:

$$f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x - 1 \\ x^2 + 4x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x - 1 \\ x = -2 \pm \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-2 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}) \\ B(-2 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}) \Rightarrow AB = 4.$$

Câu 31. Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $(d): y = x + 1$ và đường cong $(C): y = \frac{2x+4}{x-1}$. Hoành độ trung điểm I của đoạn thẳng MN bằng:

- A. $\frac{5}{2}$. B. 1. C. $-\frac{5}{2}$. D. 2.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và $(C): x + 1 = \frac{2x+4}{x-1}$, với $x \neq 1$.

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 5 = 0 \quad (*)$$

Vì $(*)$ có $\Delta < 0$ nên $(*)$ luôn có hai nghiệm trái dấu

$\Rightarrow (d)$ luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N .

Khi đó hoành độ trung điểm I của đoạn thẳng MN là $x_I = -\frac{b}{2a} = 1$.

Câu 32. Tìm tọa độ giao điểm M của đồ thị $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$ và đường thẳng $d: y = 3$.

- A. $M(4;3)$. B. $M(3;4)$. C. $M(-4;3)$. D. $M(3;-4)$.

Lời giải

Chọn A

PTHĐGD: $\frac{2x+1}{x-1} = 3 \ (x \neq 1) \Leftrightarrow x = 4$. Vậy giao điểm là $M(4;3)$.

Câu 33. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ cắt trục hoành tại 2 điểm có hoành độ $x_1; x_2$. Khi đó $x_1 + x_2$ bằng

- A. -2 . B. -1 . C. 2 . D. 0 .

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$.

Khi đó $x_1 + x_2 = -1$.

Câu 34. Gọi A là giao điểm của đồ thị các hàm số $y = x^4 - 7x^2 - 6$ và $y = x^3 - 13x$ có hoành độ nhỏ nhất khi đó tung độ của A là.

- A. 12 . B. -12 . C. -18 . D. 18 .

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị hàm số:

$$x^4 - 7x^2 - 6 = x^3 - 13x \Leftrightarrow x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6 = 0.$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^3 - 7x + 6) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-2)(x+3) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = -3 = x_A \end{cases}.$$

$$y_A = x_A^3 - 13x_A = -27 + 39 = 12.$$

Câu 35. Đồ thị các hàm số $y = \frac{4x+4}{x-1}$ và $y = x^2 - 1$ cắt nhau tại bao nhiêu điểm?

- A. 1 . B. 2 . C. 3 . D. 0 .

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{4x+4}{x-1} = x^2 - 1 \ (x \neq 1)$

$$\Leftrightarrow 4x+4=(x-1)(x^2-1) \Leftrightarrow x^3-x^2-5x-3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=3 \end{cases}.$$

Vậy đồ thị hai hàm số trên cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

Câu 36. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$ và đường thẳng $y = 2$.

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 2 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 4x - 1 = 0.$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 1 \text{ ta có: } f'(x) = 3x^2 + 4x - 4, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Mà $f(-2) \cdot f\left(\frac{2}{3}\right) = 7 \cdot \left(-\frac{67}{27}\right) < 0$ suy ra đồ thị $f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Câu 37. (MĐ 123 - 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = mx - m + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$ tại ba điểm A, B, C phân biệt sao $AB = BC$

A. $m \in \left(-\frac{5}{4}; +\infty\right)$

B. $m \in (-2; +\infty)$

C. $m \in \mathbb{R}$

D. $m \in (-\infty; 0) \cup [4; +\infty)$

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình hoành độ giao điểm là:

$$x^3 - 3x^2 + x + 2 = mx - m + 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + x - mx + m + 1 = 0 \quad (1) \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - m - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - m - 1 = 0 \end{cases}.$$

Để đường thẳng cắt đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt thì phương trình $x^2 - 2x - m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\text{Hay } \begin{cases} 1 + m + 1 > 0 \\ 1 - 2 - m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2.$$

Với $m > -2$ thì phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt là $1, x_1, x_2$ (x_1, x_2 là nghiệm của $x^2 - 2x - m - 1 = 0$).

Mà $\frac{x_1 + x_2}{2} = 1$ suy ra điểm có hoành độ $x=1$ luôn là trung điểm của hai điểm còn lại. Nên

luôn có 3 điểm A, B, C thỏa mãn $AB = BC$ Vậy $m > -2$.

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$			2			3		$+\infty$

Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) - m = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.

A. $m > -3$

B. $-3 < m < 2$.

C. $-3 \leq m \leq 2$.

D. $m < -2$.

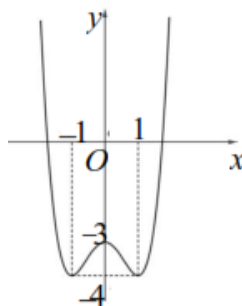
Lời giải

Chọn B

Phương trình $f(x) - m = 0$ có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $d: y = m$ cắt đồ thị $(C): y = f(x)$ tại bốn điểm phân biệt.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy, $-3 < m < 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như đường cong trong hình vẽ dưới đây. Tìm giá trị của tham số m để phương trình $|f(x)| + 1 = m$ có 6 nghiệm phân biệt?



A. $0 < m < 4$

B. $-4 < m < -3$

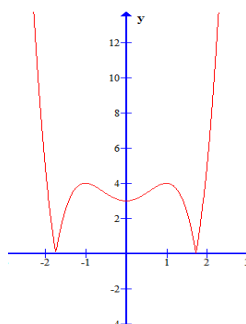
C. $4 < m < 5$

D. $m > 5$

Lời giải

Chọn C

Sử dụng phép suy đồ thị ta vẽ được đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ như sau:



Phương trình $|f(x)| + 1 = m$ có 6 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = m - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ tại 6 điểm phân biệt $\Leftrightarrow 3 < m - 1 < 4 \Leftrightarrow 4 < m < 5$.

Câu 40. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x + m}{x - 1}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

A. $-2 < m < -1$.

B. $m < -1$.

C. $-2 < m < 1$.

D. $m < 1$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định khi $x \neq 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm là $x+1 = \frac{2x+m}{x-1} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 - m = 0 \quad (1) \quad (x \neq 1)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt và khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2+m > 0 \\ 1 > 0 \\ -1-m > 0 \\ -2-m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m < -1 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < -1.$$

Câu 41. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị của hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt.

A. $(-\infty; 0)$.

B. $(-\infty; 0) \cup (16; +\infty)$.

C. $(-\infty; 0] \cup [16; +\infty)$.

D. $(16; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm: $mx + 1 = \frac{x-3}{x+1} \Leftrightarrow (mx+1)(x+1) = x-3 \quad (1) \quad (x \neq -1)$.

$\Leftrightarrow mx^2 + mx + 4 = 0$ (vì $x = -1$ không là nghiệm của (1)).

YCBT $\Leftrightarrow mx^2 + mx + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 - 16m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0 \vee m > 16..$$

Câu 42. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 3$ cắt đường thẳng $d: y = 2m - 7$ tại bốn điểm phân biệt.

A. $-3 < m < 5$.

B. $m > -3$.

C. $m = 5$.

D. $-6 < m < 10$.

Lời giải

Chọn A

$y' = 4x^3 - 16x, y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$ và $x = 0$.

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$				3				$+\infty$
			-13			-13			

Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số và đường thẳng d là nghiệm của phương trình.

$$x^4 - 8x^2 + 3 = 2m - 7 \quad (1).$$

Để phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt ta có $-13 < 2m - 7 < 3 \Leftrightarrow -3 < m < 5$.

Câu 43. Tìm tất cả số thực của tham số m để phương trình $2x - 1 = m(x - 1)$ có nghiệm thuộc đoạn $[-1; 0]$.

A. $1 \leq m \leq \frac{3}{2}$.

B. $1 \leq m \leq 2$.

C. $m \leq \frac{3}{2}$.

D. $m \geq 1$.

Lời giải

Chọn A

Với $x \in [-1; 0]$, ta có $2x - 1 = m(x - 1) \Leftrightarrow \frac{2x - 1}{x - 1} = m$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{2x - 1}{x - 1}$ trên $[-1; 0]$, ta có hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1; 0]$ và

$$f'(x) = \frac{-1}{(x - 1)^2} < 0, \forall x \in [-1; 0] \Rightarrow \text{Hàm số nghịch biến trên } [-1; 0]. \text{ Suy ra phương trình}$$

$$f(x) = m \text{ có nghiệm trên } [-1; 0] \Leftrightarrow f(0) \leq m \leq f(-1) \Leftrightarrow 1 \leq m \leq \frac{3}{2}.$$

Câu 44. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 - m^3 + 3m^2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt?

A. $\begin{cases} -1 < m < 3 \\ m \neq 0 \wedge m \neq 2 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} -1 < m < 3 \\ m \neq 0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} -3 < m < 1 \\ m \neq -2 \end{cases}$.

D. $-3 < m < 1$.

Lời giải

Chọn A

$$x^3 - 3x^2 = m^3 - 3m^2 \quad (1).$$

Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2$.

$$y' = 3x^2 - 6x.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 2 \Rightarrow y = -4 \end{cases}.$$

Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt khi $-4 < m^3 - 3m^2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 3 \\ m \neq 0 \wedge m \neq 2 \end{cases}$.

Cách 2:

$$x^3 - 3x^2 - m^3 + 3m^2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow (x - m)(x^2 + xm + m^2) - 3(x - m)(x + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x^2 + (m - 3)x + m^2 - 3m = 0 \end{cases}$$

Thỏa mãn yêu cầu bài toán khi $\begin{cases} \Delta = -3m^2 + 6m + 9 > 0 \\ g(m) = 3m^2 - 6m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-1; 3) \setminus \{0; 2\}.$

Câu 45. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-3		-1		0		2		$+\infty$
y'		$-$		0	$+$		0	$-$		0	$-$
y	$+\infty$						0			3	

Tìm m để đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = m$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt, đồng thời hai điểm này nằm ở hai nửa mặt phẳng có bờ là trục tung.

A. $m = -5$ và $m = 3$.

B. $m = -2$ và $m = 0$.

C. $m = -2$ và $m = 3$.

D. $m = -5$ và $m = 0$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên ta có đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = m$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt, đồng thời hai điểm này nằm ở hai nửa mặt phẳng có bờ là trục tung khi và chỉ khi $m = -5$ và $m = 3$.

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$+$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$\frac{27}{4}$	$+\infty$

Tìm điều kiện của m để phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt.

A. $m < 0$.

B. $m > 0$.

C. $0 < m < \frac{27}{4}$.

D. $m > \frac{27}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Để phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt thì đường thẳng $y = m$ phải cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt.

Qua bảng biến thiên ta thấy, đường thẳng $y = m$ phải cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt khi $m > \frac{27}{4}$.

Câu 47. Xác định m để đường thẳng $y = mx - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2-x}{2+x}$ tại hai điểm phân biệt.

A. $m < -1$ hoặc $m > 6$.

B. $m < 1$ hoặc $m > 2$.

C. $m < 0$ hoặc $m > 2$.

D. $m < -4$ hoặc $m > 0$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và đồ thị hàm số là:

$$\frac{2-x}{2+x} = mx - 1 \Leftrightarrow mx^2 + 2mx - 4 = 0(*) \quad (\text{vì } x = -2 \text{ không phải là nghiệm}).$$

Đường thẳng $y = mx - 1$ cắt đồ thị hàm số đã cho tại hai điểm phân biệt.

$\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = m^2 + 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ m > 0 \end{cases}.$$

Câu 48. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có đồ thị (C) và đường thẳng (d): $y = m + 1$ (m là tham số).

Đường thẳng (d) cắt (C) tại 4 điểm phân biệt khi các giá trị của m là:

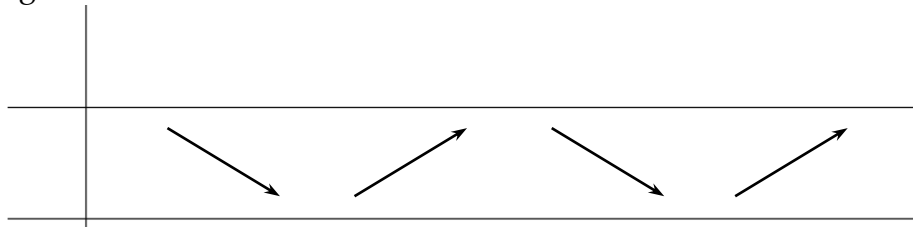
- A. $1 < m < 2$. B. $-1 < m < 0$. C. $-5 < m < -3$. D. $3 < m < 5$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có $y' = 4x^3 - 4x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên ta có đường thẳng (d) cắt (C) tại 4 điểm phân biệt khi

$$0 < m + 1 < 1 \Leftrightarrow -1 < m < 0.$$

Câu 49. Gọi S là tập các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = x + 1$ cắt đồ thị hàm số

$$y = \frac{4x - m^2}{x - 1}$$

tại đúng một điểm. Tìm tích các phần tử của S .

- A. $\sqrt{5}$. B. 4. C. 5. D. 20.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{4x - m^2}{x - 1} = x + 1, (x \neq 1) \Leftrightarrow x^2 - 4x + m^2 - 1 = 0 (*)$

Để đường thẳng cắt đồ thị tại đúng một điểm thì pt (*) có nghiệm kép $x \neq 1$ hoặc pt (*) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x = 1$.

Trường hợp 1: Pt (*) có nghiệm kép $x \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ -\frac{b}{2a} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - m^2 = 0 \\ 2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{5}.$

Trường hợp 2: Pt (*) có 2 nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1^2 - 4 \cdot 1 + m^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - m^2 > 0 \\ 1^2 - 4 \cdot 1 + m^2 - 1 = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{5} < m < \sqrt{5} \\ m = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm 2.$$

$$\Rightarrow S = \{\sqrt{5}; -\sqrt{5}; 2; -2\}.$$

Vậy tích các phần tử của S là: $\sqrt{5} \cdot (-\sqrt{5}) \cdot 2 \cdot (-2) = 20$.

Câu 50. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = 2x^3 - (2+m)x + m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

A. $m > \frac{1}{2}$.

B. $m \leq \frac{1}{2}$.

C. $m > -\frac{1}{2}; m \neq 4$.

D. $m > -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành ta có.

$$2x^3 - (2+m)x + m = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 - 1) - m(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2 + 2x - m) = 0.$$

Vậy phương trình luôn có một nghiệm $x = 1$.

Để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt thì phương trình: $2x^2 + 2x - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 + 2m > 0 \\ 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} < m \\ m \neq 4 \end{cases}.$$

Câu 51. Với giá trị nào của m thì đường cong $(C): y = x^3 + 3x^2 + 1$ cắt đường thẳng $(d): y = 5^m$ tại ba điểm phân biệt?

A. Không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

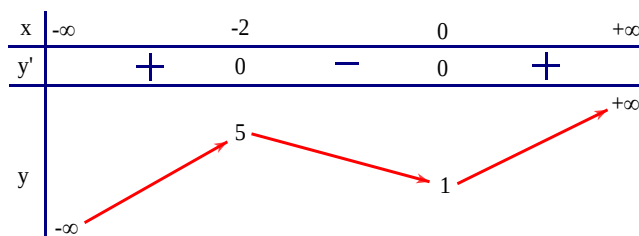
B. $0 < m < 5$.

C. $1 < m < 5$.

D. $0 < m < 1$.

Lời giải

Chọn D



$$(C): y = x^3 + 3x^2 + 1.$$

$$D = \mathbb{R}.$$

$$y' = 3x^2 + 6x; y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Để (C) cắt $(d): y = 5^m$ tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow 1 < 5^m < 5 \Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Câu 52. Tìm tất cả giá trị thực của m để phương trình: $x^4 - 2x^2 = m$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

A. $0 < m < 1$.

B. $-2 < m < 2$.

C. $-1 < m < 0$.

D. $-1 < m < 1$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 - 4x.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \pm 1.$$

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		-1		0		-1		$+\infty$

Phương trình: $x^4 - 2x^2 = m$ có 4 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $-1 < m < 0$.

Câu 53. Tất cả giá trị của m sao cho phương trình $x^3 - 3x = 2m$ có ba nghiệm phân biệt là

- A. $-1 < m < 1$. B. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}$. C. $-2 < m < 2$. D. $m < 1$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x$ với $x \in \mathbb{R}$ có $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		2		-2		$+\infty$

YCBT $\Leftrightarrow$ đường $y = 2m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow -2 < 2m < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 1.$$

Câu 54. Tìm các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $-x^3 - 3x^2 + 2 = m$ có ba nghiệm thực phân biệt?

- A. $m \in (-2; 1)$ B. $m \in [-2; 2]$ C. $m \in (-2; 2)$ D. $m \in \emptyset$

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 2$ trên $\mathbb{R}$, ta có $y' = -3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$		-2		2		$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $-x^3 - 3x^2 + 2 = m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 2$ và đường thẳng $y = m$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Câu 55. Tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 - 12x + m - 2 = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt.

A. $-14 < m < 18$

B. $-4 < m < 4$

C. $-16 < m < 16$

D. $-18 < m < 14$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $x^3 - 12x + m - 2 = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 12x + 2 = m$.

Xét hàm số $f(x) = -x^3 + 12x + 2$ trên $\mathbb{R}$

có $f'(x) = -3x^2 + 12$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$			18		$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $x^3 - 12x + m - 2 = 0$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 12x + 2$ và đường thẳng $y = m$. Dựa vào BBT, ta thấy phương trình có ba nghiệm khi $-14 < m < 18$.

Câu 56. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 - 3x + 2m = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt.

A. $m \in (-1; 1)$.

B. $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

C. $m \in (-2; +\infty)$.

D. $m \in (-2; 2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $x^3 - 3x + 2m = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x = -2m$ (*)

Xét hàm số $y = -x^3 + 3x$ có đồ thị là (C) và đường thẳng $d: y = -2m$.

Số nghiệm của phương trình (*) phụ thuộc vào số giao điểm của đồ thị hàm số (C) và đường thẳng d

Ta có: $y' = -3x^2 + 3$, cho $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$		-2		2		$-\infty$

Nhìn bảng biến thiên suy ra:

Phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt khi $-2 < 2m < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 1$.

Câu 57. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên các khoảng $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	-4				$+\infty$		0		-7

Tìm tất cả các giá trị thực của m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt.

A. $-4 < m < 0$.

B. $-4 < m \leq 0$.

C. $-7 < m < 0$.

D. $-4 \leq m < 0$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên, đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt khi $-4 < m < 0$.

Câu 58. (ĐMH 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-2		-1		-2		$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$ của phương trình $2f(\sin x) + 3 = 0$ là

A. 4.

B. 6.

C. 3.

D. 8.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \sin x$. Do $x \in [-\pi; 2\pi]$ nên $t \in [-1; 1]$.

Khi đó ta có phương trình $2f(t) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(t) = -\frac{3}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(t) = -\frac{3}{2}$ có 2 nghiệm $t = a \in (-1; 0)$ và $t = b \in (0; 1)$.

Trường hợp 1: $t = a \in (-1; 0)$

Ứng với mỗi giá trị $t \in (-1; 0)$ thì phương trình có 4 nghiệm $-\pi < x_1 < x_2 < 0 < \pi < x_3 < x_4 < 2\pi$.

Trường hợp 2: $t = b \in (0; 1)$

Ứng với mỗi giá trị $t \in (0; 1)$ thì phương trình có 4 nghiệm $0 < x_5 < x_6 < \pi$.

Hiển nhiên cả 6 nghiệm trong 2 trường hợp trên đều khác nhau.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$

Câu 59. (ĐMH - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			2		2		0	
	$-\infty$							$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\sin x) = 1$ là

A. 7.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sin x$, $x \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [-1; 1]$

Khi đó phương trình $f(\sin x) = 1$ trở thành $f(t) = 1, \forall t \in [-1; 1]$

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của hàm số $y = f(t)$ và đường thẳng $y = 1$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f(t) = 1 \Rightarrow \begin{cases} t = a \in (-1; 0) \\ t = b \in (0; 1) \end{cases}$.

Trường hợp 1: $t = a \in (-1; 0)$

Ứng với mỗi giá trị $t \in (-1; 0)$ thì phương trình $\sin x = t$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\pi < x_1 < x_2 < 2\pi$.

Trường hợp 2: $t = b \in (0; 1)$

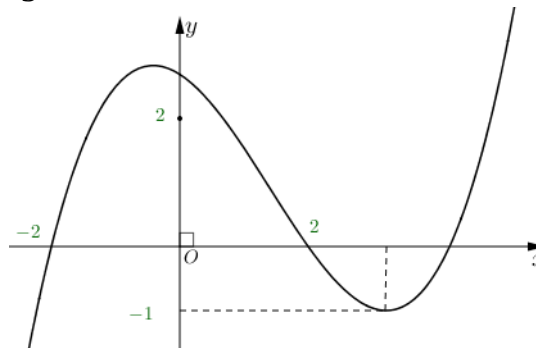
Ứng với mỗi giá trị $t \in (0; 1)$ thì phương trình có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn

$0 < x_3 < x_4 < \pi; 2\pi < x_5 < \frac{5\pi}{2}$;

Hiển nhiên cả 5 nghiệm trong 2 trường hợp trên đều khác nhau.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Câu 60. (MĐ 101 - 2019) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f(x^3 - 3x)\right| = \frac{4}{3}$ là



A. 7.

B. 4.

C. 3.

D. 8.

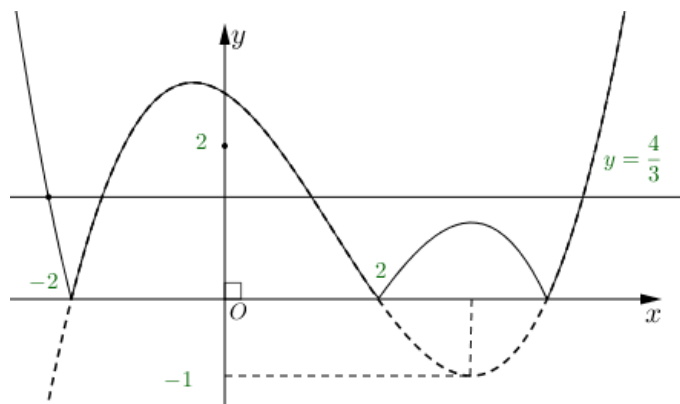
Lời giải

Chọn D

Đặt $t = x^3 - 3x \Rightarrow t' = 3x^2 - 3$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
t'		+	0	-	0	+	
t			2		-2		

Khi đó $\left|f(t)\right| = \frac{4}{3}$ (1)



Dựa vào đồ thị hàm số $|f(t)|$ ta thấy phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $t_1 < -2$, $-2 < t_2 < 0$, $0 < t_3 < 2$, $t_4 > 2$.

Mỗi nghiệm t của phương trình (1), ta thay vào $t = x^3 - 3x$ để tìm nghiệm x .

Khi đó

+ $t_1 < -2 \Rightarrow$ phương trình $t = x^3 - 3x$ có 1 nghiệm.

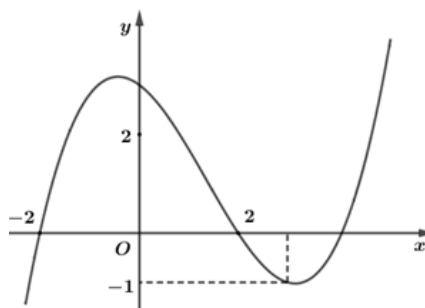
+ $-2 < t_2 < 0 \Rightarrow$ phương trình $t = x^3 - 3x$ có 3 nghiệm.

+ $0 < t_3 < 2 \Rightarrow$ phương trình $t = x^3 - 3x$ có 3 nghiệm.

+ $t_4 > 2 \Rightarrow$ phương trình $t = x^3 - 3x$ có 1 nghiệm.

Vậy phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \frac{4}{3}$ có 8 nghiệm.

Câu 61. (MĐ 102 - 2019) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \frac{1}{2}$



A. 6.

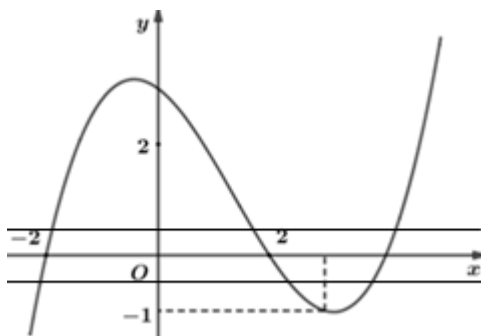
B. 10.

C. 12.

D. 3.

Lời giải

Chọn B



$$\text{Ta có } |f(x^3 - 3x)| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x^3 - 3x) = \frac{1}{2} & (1) \\ f(x^3 - 3x) = -\frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

$$+) (1) \Leftrightarrow f(x^3 - 3x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x = \alpha_1 (-2 < \alpha_1 < 0) \\ x^3 - 3x = \alpha_2 (0 < \alpha_2 < 2) \\ x^3 - 3x = \alpha_3 (\alpha_3 > 2) \end{cases}$$

$$+) (2) \Leftrightarrow f(x^3 - 3x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x = \alpha_4 (x_4 < -2) \\ x^3 - 3x = \alpha_5 (\alpha_5 > 2) \\ x^3 - 3x = \alpha_6 (\alpha_6 > 2) \end{cases}$$

Xét hàm số $y = x^3 - 3x$, $D = \mathbb{R}$

Ta có $y' = 3x^2 - 3$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			2		-2		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

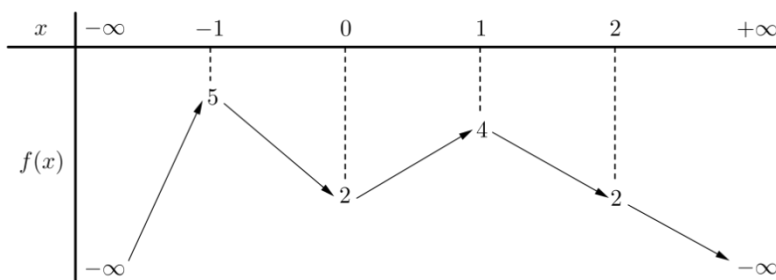
Phương trình: $x^3 - 3x = \alpha_1$ có 3 nghiệm.

Phương trình: $x^3 - 3x = \alpha_2$ có 3 nghiệm.

Mỗi phương trình $x^3 - 3x = \alpha_3, x^3 - 3x = \alpha_4, x^3 - 3x = \alpha_5, x^3 - 3x = \alpha_6$ đều có một nghiệm

Từ đó suy ra phương trình $|f(x^2 - 3x)| = \frac{1}{2}$ có 10 nghiệm.

Câu 62. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên



Phương trình $f(\sqrt{2x - x^2}) = 3$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

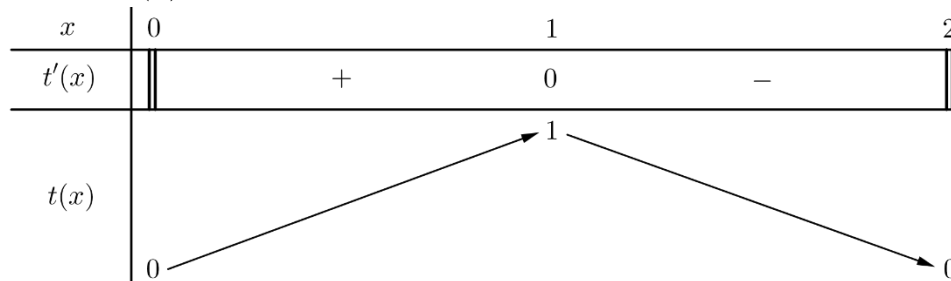
Lời giải

Chọn B

Trước hết, xét hàm số $t = t(x) = \sqrt{2x - x^2}, x \in [0; 2]$.

Ta có $t'(x) = \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}}, x \in (0; 2)$. $t'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in (0; 2)$.

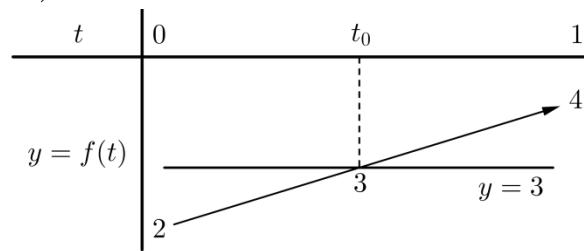
Bảng biến thiên của $t(x)$:



$\Rightarrow 0 \leq t \leq 1, \forall x \in [0; 2]$.

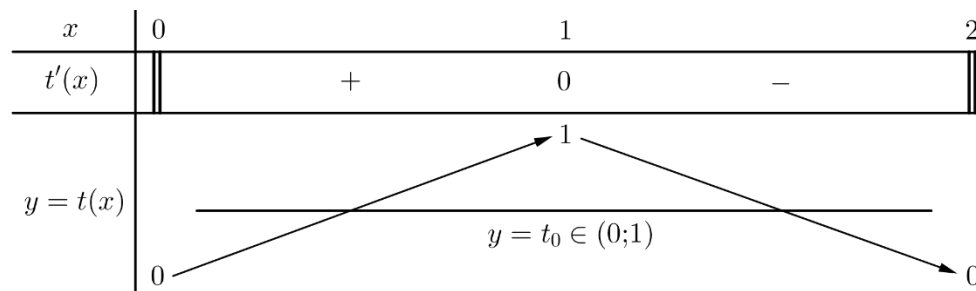
Lúc này, phương trình $f(\sqrt{2x - x^2}) = 3$ trở thành $f(t) = 3$ (1) với $t \in [0; 1]$.

Theo bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ trên đoạn $[0;1]$ thì đường thẳng $y=3$ cắt đồ thị hàm số $y=f(t)$ tại đúng 1 điểm có hoành độ thuộc khoảng $(0;1)$ nên phương trình (2) có đúng 1 nghiệm $t=t_0$ với $t_0 \in (0;1)$.



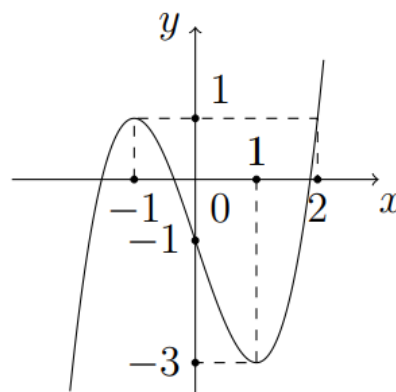
Khi đó, phương trình (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2x-x^2}=t_0$ (2), $t_0 \in (0;1)$.

Mặt khác, theo bảng biến thiên của hàm số $t(x)$, với mỗi $t_0 \in (0;1)$ thì đường thẳng $y=t_0$ cắt đồ thị hàm số $y=t(x)$ tại đúng 2 điểm phân biệt nên phương trình (2) có đúng 2 nghiệm phân biệt.



Vậy phương trình $f(\sqrt{2x-x^2})=3$ có đúng 2 nghiệm.

Câu 63. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $f[f(\cos x)-1]=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$?



A. 2.

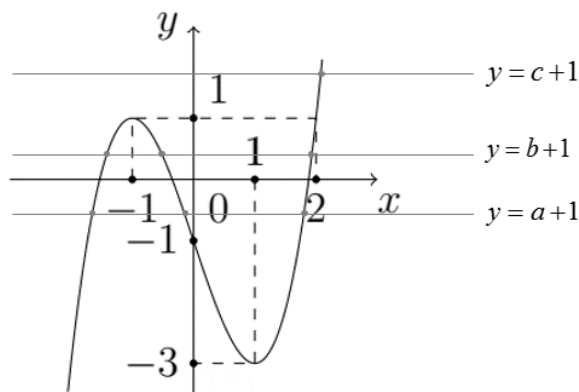
B. 5.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn C



Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy:

$$f[f(\cos x) - 1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\cos x) - 1 = a \in (-2; -1) \\ f(\cos x) - 1 = b \in (-1; 0) \\ f(\cos x) - 1 = c \in (1; 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(\cos x) = a + 1 \in (-1; 0) \\ f(\cos x) = b + 1 \in (0; 1) \\ f(\cos x) = c + 1 \in (2; 3) \end{cases}$$

• Xét phương trình $f(\cos x) = a + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \alpha_1 < -1 & (1) \\ \cos x = \alpha_2 \in (-1; 0) & (2) \\ \cos x = \alpha_3 > 1 & (3) \end{cases}$

Vì $\cos x \in [-1; 1]$ nên phương trình (1), (3) vô nghiệm và phương trình (2) có 2 nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$.

• Xét phương trình $f(\cos x) = b + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \beta_1 < -1 & (4) \\ \cos x = \beta_2 \in (-1; 0) & (5) \\ \cos x = \beta_3 > 1 & (6) \end{cases}$

Vì $\cos x \in [-1; 1]$ nên phương trình (4), (6) vô nghiệm và phương trình (5) có 2 nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$.

• Xét phương trình $f(\cos x) = c + 1 \Leftrightarrow \cos x = t > 2$ (vô nghiệm)

Nhận xét hai nghiệm của phương trình (5) không trùng với nghiệm nào của phương trình (2) nên phương trình $f[f(\cos x) - 1] = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 64. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	2	0	2	$-\infty$		

Số nghiệm thuộc khoảng $(-\infty; \ln 2)$ của phương trình $2019f(1-e^x) - 2021 = 0$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 1 - e^x$; $x \in (-\infty; \ln 2) \Rightarrow t \in (-1; 1)$.

Nhận xét: $x = \ln(1-t) \Rightarrow$ với mỗi giá trị của $t \in (-1; 1)$ ta được một giá trị của $x \in (-\infty; \ln 2)$.

Phương trình tương đương: $f(t) = \frac{2021}{2019}$.

Sử dụng bảng biến thiên của $f(x)$ cho $f(t)$ như sau:

t	$-\infty$	-1	t_1	0	t_2	1	$+\infty$
$f'(t)$	$+$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	$-\infty$	2	0	2	$-\infty$		

$y = \frac{2021}{2019}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(t) = \frac{2021}{2019}$ có 2 nghiệm $t_1, t_2 \in (-1; 1)$.

Vậy phương trình $2019f(1-e^x) - 2021 = 0$ có 2 nghiệm $x \in (-\infty; \ln 2)$.

Câu 65. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y		5	-3	$+\infty$	

A diagram showing a path on a coordinate plane. The horizontal axis is x and the vertical axis is y . The path starts at $(-\infty, -\infty)$, goes up and right to $(5, 0)$, then down and right to $(-3, 0)$, and finally up and right to $(+\infty, +\infty)$.

Phương trình $|f(3x+1) - 2| = 5$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 3. B. 5. C. 6. D. 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $|f(3x+1) - 2| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} f(3x+1) - 2 = 5 \\ f(3x+1) - 2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(3x+1) = 7 \quad (1) \\ f(3x+1) = -3 \quad (2) \end{cases}$

Dựa vào bảng biến thiên,

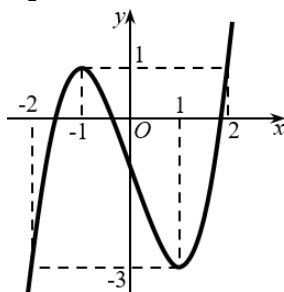
+ Phương trình (1) có nghiệm duy nhất thỏa mãn $3x+1=a>3 \Leftrightarrow x=\frac{a-1}{3}>\frac{2}{3}$.

+ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$\begin{cases} 3x_1+1=3 \\ 3x_2+1=b<-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\frac{2}{3} \\ x_2=\frac{b-1}{3}<-\frac{2}{3} \end{cases}.$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Câu 66. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(f(x)-1)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 6.

B. 5.

C. 7.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

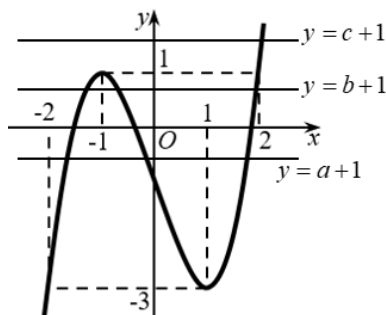
Từ đồ thị của hàm số $y=f(x)$ suy ra $f(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=a \in (-2; -1) \\ x=b \in (-1; 0) \\ x=c \in (1; 2) \end{cases}$

Suy ra $f(f(x)-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)-1=a \\ f(x)-1=b \\ f(x)-1=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=a+1 \\ f(x)=b+1 \\ f(x)=c+1 \end{cases}$

+ Do $a \in (-2; -1) \Rightarrow a+1 \in (-1; 0) \Rightarrow$ Phương trình $f(x)=a+1$ có 3 nghiệm phân biệt.

+ Do $b \in (-1; 0) \Rightarrow b+1 \in (0; 1) \Rightarrow$ Phương trình $f(x)=b+1$ có 3 nghiệm phân biệt.

+ Do $c \in (1; 2) \Rightarrow c+1 \in (2; 3) \Rightarrow$ Phương trình $f(x)=c+1$ có 1 nghiệm.



Vậy phương trình $f(f(x)-1)=0$ có $3+3+1=7$ nghiệm.

Câu 67. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$						$-\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 -2020 2020

Số nghiệm của phương trình $|f(x+2019) - 2020| = 2021$ là

A. 4.

B. 6.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có :

$$|f(x+2019) - 2020| = 2021 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x+2019) - 2020 = -2021 \\ f(x+2019) - 2020 = 2021 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x+2019) = -1 \\ f(x+2019) = 4041 \end{cases}$$

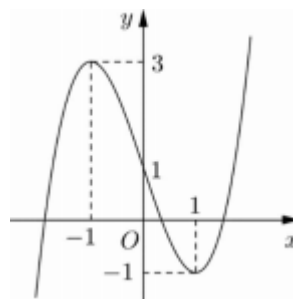
Từ bảng biến thiên suy ra:

+) Phương trình: $f(x+2019) = -1$ có 3 nghiệm.

+) Phương trình: $f(x+2019) = 4041$ có 1 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Câu 68. (ĐMH - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sin x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ là



A. $(-1; 3)$

B. $[-1; 1)$

C. $[-1; 3)$

D. $(-1; 1)$

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \sin x \Rightarrow \forall x \in (0; \pi) \Rightarrow t \in (0; 1]$

Vậy phương trình trở thành $f(t) = m$. Dựa vào đồ thị hàm số suy ra $m \in [-1; 1)$.

Câu 69. (MĐ 101 - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-4	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-2	2	-3	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $5f(x^2 - 4x) = m$ có ít nhất 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0; +\infty)$

A. 24.

B. 21.

C. 25.

D. 20.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = x^2 - 4x$. Ta có $t' = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Bảng biến thiên

x	0	2	$+\infty$
t'	$-$	0	$+$
t	0	-4	$+\infty$

Với $t = x^2 - 4x$.

x	0	2	$+\infty$
t	0	-4	$+\infty$
$f(t)$	-3	2	-3

Dựa vào bảng biến thiên ta có $-3 < \frac{m}{5} \leq 2 \Leftrightarrow -15 < m \leq 10$. Vì m nguyên nên $m \in \{-14; -13; \dots; 10\}$. Do đó có 25 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Câu 70. (MĐ 104 - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-4	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-2	2	-3	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4f(x^2 - 4x) = m$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0; +\infty)$?

A. 16.

B. 19.

C. 20.

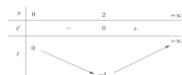
D. 17.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 4f(x^2 - 4x) = m \Leftrightarrow f(x^2 - 4x) = \frac{m}{4}$$

$$\text{Đặt } t = x^2 - 4x \Rightarrow t' = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$



$$\text{Vì } x \in (0; +\infty) \Rightarrow t \geq -4$$

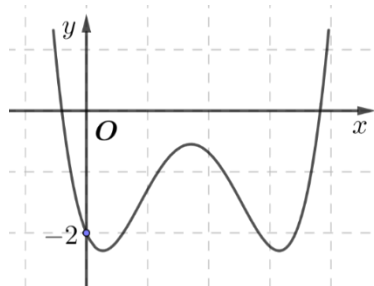
$$\text{Ta có } f(t) = \frac{m}{4}$$

Phương trình đã cho có ít nhất 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0; +\infty)$

$$\Rightarrow -3 < \frac{m}{4} \leq 2 \Leftrightarrow -12 < m \leq 8 \text{ mà } m \text{ nguyên nên } m \in \{-11; -10; \dots; 0; 1; \dots; 8\}$$

Vậy có 20 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 71. (MĐ 103 - 2019) Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(x^2 f(x)) + 2 = 0$ là

A. 8.

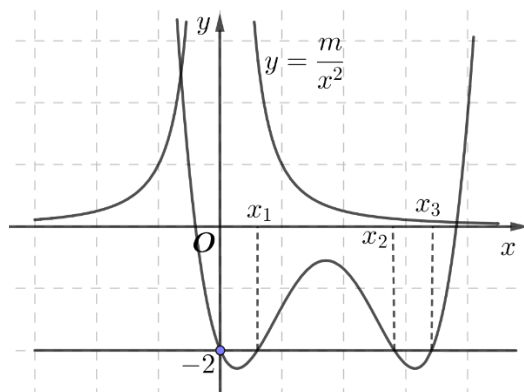
B. 12.

C. 6.

D. 9.

Lời giải

Chọn D



$$f(x^2 f(x)) + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 f(x) = 0 \\ x^2 f(x) = a(1) \\ x^2 f(x) = b(2) \\ x^2 f(x) = c(3) \end{cases} \text{ với } 0 < a < b < c.$$

Xét phương trình $f(x) = \frac{m}{x^2} (1) \quad (m > 0).$

Gọi α, β là hoành độ giao điểm của $(C): y = f(x)$ và $Ox; \alpha < 0 < \beta$.

$$(1) \Leftrightarrow f(x) - \frac{m}{x^2} = 0. \text{ Đặt } g(x) = f(x) - \frac{m}{x^2}$$

$$\text{Đạo hàm } g'(x) = f'(x) + \frac{2m}{x^3}.$$

$$\text{Trường hợp 1: } x < \alpha; f'(x) < 0; \frac{2m}{x^3} < 0 \Rightarrow g'(x) < 0$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty, g(\alpha) = -\frac{m}{\alpha^2} < 0$. Phương trình $g(x) = 0$ có một nghiệm thuộc $(-\infty; \alpha)$.

Trường hợp 2: $\alpha < x < \beta$

$$f(x) < 0, \frac{m}{x^2} > 0 \text{ suy ra } g(x) < 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta).$$

$$\text{Trường hợp 3: } x > \beta; f'(x) > 0; \frac{2m}{x^3} > 0 \Rightarrow g'(x) > 0$$

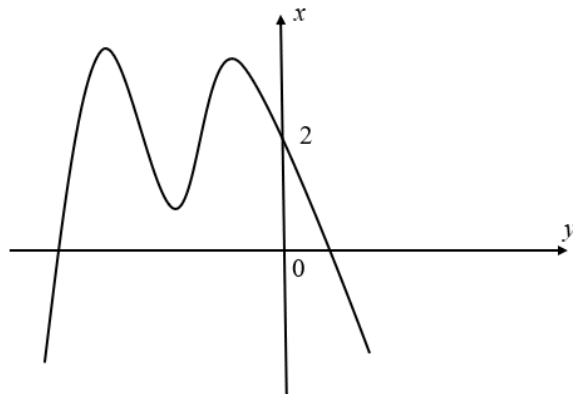
Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty, g(\beta) = -\frac{m}{\beta^2} < 0$. Phương trình $g(x) = 0$ có một nghiệm thuộc $(\beta; +\infty)$.

Vậy phương trình $f(x) = \frac{m}{x^2}$ có hai nghiệm $\forall m > 0$.

Ta có: $x^2 f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee f(x) = 0$: có ba nghiệm.

Vậy phương trình (1) có 9 nghiệm.

Câu 72. (MĐ 104 - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $f(x^2 f(x)) = 2$ là:

A. 6.

B. 12.

C. 8.

D. 9.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } f(x^2 f(x)) = 2 \Rightarrow \begin{cases} x^2 f(x) = 0 \\ x^2 f(x) = a < 0 \\ x^2 f(x) = b < 0 \\ x^2 f(x) = c < 0 \end{cases}.$$

Xét phương trình: $x^2 f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}$ mà $f(x) = 0$ có hai nghiệm $\Rightarrow x^2 \cdot f(x) = 0$ có ba nghiệm.

Xét phương trình: $x^2 f(x) = a < 0$

Do $x^2 \geq 0$; $x = 0$ không là nghiệm của phương trình $\Rightarrow f(x) = \frac{a}{x^2} < 0$

$$\text{Xét } g(x) = \frac{a}{x^2} \Rightarrow g'(x) = \frac{-2a}{x^3}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
$g(x)$	0		0

Từ bảng biến thiên với $f(x) < 0 \Rightarrow f(x) = \frac{a}{x^2}$ có 2 nghiệm.

Tương tự: $x^2 f(x) = b$ và $x^2 f(x) = c$ ($b, c < 0$) mỗi phương trình cũng có hai nghiệm.

Vậy số nghiệm của phương trình $f(x^2 f(x)) = 2$ là 9 nghiệm.

- Câu 73. (MĐ 103 - 2019)** Cho hai hàm số $y = \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3}$ và $y = |x+2| - x - m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là $(C_1), (C_2)$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là
- A.** $(-2; +\infty)$. **B.** $(-\infty; -2]$. **C.** $[-2; +\infty)$. **D.** $(-\infty; -2)$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} = |x+2| - x - m \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} - |x+2| + x = -m \quad (1)$$

$$\text{Xét } f(x) = \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} - |x+2| + x, x \in D = \mathbb{R} \setminus \{-3; -2; -1; 0\}$$

Ta có $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} - 2, x \in (-2; +\infty) \cup D = D_1 \\ \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} + 2x + 2, x \in (-\infty; -2) \cup D = D_2 \end{cases}$

Có $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2}, \forall x \in D_1 \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + 2, \forall x \in D_2 \end{cases}$

Để thấy $f'(x) > 0, \forall x \in D_1 \cup D_2$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	-2	1	0	$+\infty$
f'(x)	+	+	+	+	+	+
f(x)	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	2

Hai đồ thị cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 4 nghiệm phân biệt, từ bảng biến thiên ta có: $-m \geq 2 \Leftrightarrow m \leq -2$.

Câu 74. (MĐ 104 - 2019) Cho hai hàm số $y = \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2}$ và $y = |x+1| - x - m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

- A. $(-\infty; -3)$. B. $[-3; +\infty)$. C. $(-\infty; -3]$. D. $(-3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ

$$\frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} = |x+1| - x - m \Leftrightarrow \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} - |x+1| + x = -m \quad (1)$$

Số nghiệm của (1) là số giao điểm của

$$F(x) = \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} - |x+1| + x = \begin{cases} \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} - 1, & x > -1 \\ \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + 2x + 1, & x < -1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2}, & x \in (-1; +\infty) \setminus \{0; 1\} \\ \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + 2, & x \in (-\infty; -1) \setminus \{-2\} \end{cases}$$

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 3$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} F(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -2^-} F(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow -1^+} F(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow -1^-} F(x) = +\infty$$

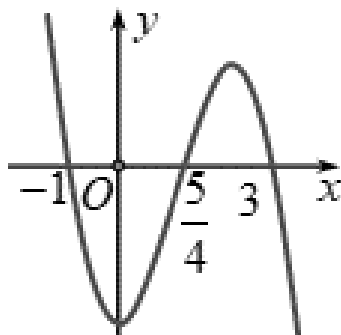
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = +\infty$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+\infty$
$F'(x)$	+	+	+	+	+	
$F(x)$	3	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
		$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	

Để phương trình có 4 nghiệm thì $-m \leq 3 \Leftrightarrow m \geq -3$.

Câu 75. Cho hàm số $f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tập nghiệm của phương trình $f(x) = r$ có số phần tử là

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x) = 4mx^3 + 3nx^2 + 2px + q$ (1)

Dựa vào đồ thị $y = f'(x)$ ta thấy phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm đơn là $-1, \frac{5}{4}, 3$

Do đó $f'(x) = m(x+1)(4x-5)(x-3)$ và $m \neq 0$. Hay $f'(x) = 4mx^3 - 13mx^2 - 2mx + 15m$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $n = -\frac{13}{3}m$, $p = -m$ và $q = 15m$.

Khi đó phương trình $f(x) = r \Leftrightarrow mx^4 + nx^3 + px^2 + qx = 0 \Leftrightarrow m \left(x^4 - \frac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x \right) = 0$

$\Leftrightarrow 3x^4 - 13x^3 - 3x^2 + 45x = 0 \Leftrightarrow x(3x+5)(x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{5}{3} \vee x = 3$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x) = r$ là $S = \left\{ -\frac{5}{3}; 0; 3 \right\}$.

----- HẾT -----