

SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO NGHỆ AN

ĐỀ THI CHỌN HSG CẤP TỈNH

Môn: Toán 12

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM

Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12.

Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** Cho khối chóp tứ giác đều  $SABCD$  có  $AB = a, SA = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$ . Thể tích của khối chóp  $SABCD$  bằng

- A.  $2a^3$ . B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}a^3$ . C.  $\frac{2a^3}{3}$ . D.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}a^3$ .

**Câu 2.** Giả sử một vật giao động điều hòa xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình  $x(t) = 3 \cos\left(4t - \frac{\pi}{3}\right)$ . Ở đây, thời gian  $t$  tính bằng giây và  $x(t)$  là li độ của vật tại thời điểm  $t$  tính bằng centimet. Hãy cho biết trong khoảng thời gian từ 0 đến 4 giây, vật đạt li độ bằng  $\frac{3}{2}cm$  bao nhiêu lần?

- A. 6. B. 5. C. 3. D. 4.

**Câu 3.** Một lớp có 45 học sinh, trong đó có 31 em học sinh học khá môn Toán, 24 học sinh học khá môn Tiếng Anh, 5 học sinh không học khá cả hai môn Toán và Tiếng Anh. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp. Xác suất để học sinh được chọn học khá cả hai môn Toán và Tiếng Anh là

- A.  $\frac{248}{675}$ . B.  $\frac{173}{675}$ . C.  $\frac{1984}{6075}$ . D.  $\frac{1}{3}$ .

**Câu 4.** Cho hình hộp  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ . Phát biểu nào sau đây sai?

- A.  $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$ . B.  $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1} - \overrightarrow{DA}$ .  
C.  $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$ . D.  $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BA}$ .

**Câu 5.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(2; -1; 1)$  và  $B(1; 2; -3)$ . Toạ độ của vector  $\overrightarrow{AB}$  là

- A.  $(1; -3; 4)$ . B.  $(3; 1; -2)$ . C.  $(-1; 3; -4)$ . D.  $(2; -2; -3)$ .

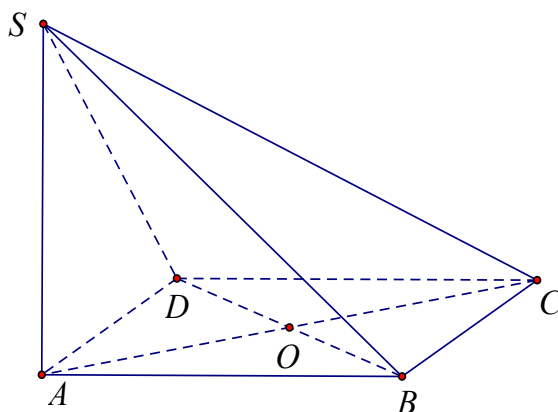
**Câu 6.** Bảng số liệu ghép nhóm sau cho biết chiều cao (cm) của 50 học sinh lớp 10A.

|                  |              |              |              |
|------------------|--------------|--------------|--------------|
| Khoảng chiều cao | $[155; 160)$ | $[160; 165)$ | $[165; 170)$ |
| Số học sinh      | 17           | 25           | 8            |

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

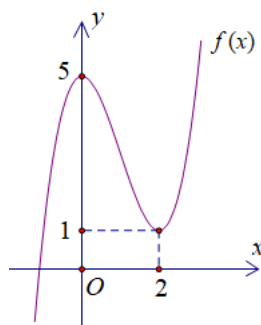
- A. 162,6. B. 161,6. C. 163,4. D. 160.

**Câu 7.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông tâm  $O$ , đường thẳng  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy và  $OC = \sqrt{3}SA$  (tham khảo hình vẽ). Số đo góc phẳng nhị diện  $[S, BD, C]$  bằng



- A.  $120^\circ$ . B.  $150^\circ$ . C.  $30^\circ$ . D.  $60^\circ$ .

**Câu 8.** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho bằng



- A. 0. B. 1. C. 2. D. 5.

**Câu 9.** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{nếu } x > 2 \\ 2 & \text{nếu } x = 2 \\ -x & \text{nếu } x < 2 \end{cases}$ . Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2$ . B.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$ .  
C.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ . D. Hàm số liên tục tại  $x = 2$ .

**Câu 10.** Một cấp số cộng có số hạng đầu bằng 4 và số hạng thứ 3 bằng 12. Số hạng thứ 10 của cấp số cộng đó bằng

- A. 44. B. 36. C. 40. D.  $4^{10}$ .

**Câu 11.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x(x+2)(x+3)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(1) + f(-2) = f(3) + f(0)$ . Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-2; 3]$  lần lượt là

- A.  $f(0)$  và  $f(-2)$ . B.  $f(-2)$  và  $f(0)$ . C.  $f(0)$  và  $f(3)$ . D.  $f(3)$  và  $f(0)$ .

**Câu 12.** Một vật chuyển động theo phương trình  $s(t) = \frac{1}{6}t^3 - t^2 + 4t$ , trong đó  $t > 0$ ,  $t$  tính bằng giây và  $s(t)$  tính bằng mét. Xét trong khoảng thời gian từ 4 giây đến 10 giây vận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất bằng

A.  $\frac{16}{3}$  (m/s).

B.  $\frac{32}{3}$  (m/s).

C. 4 (m/s).

D. 2 (m/s).

## PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Thí sinh trả lời từ câu 01 đến câu 04. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1.** Cho hàm số  $f(x) = \log_5(4x+1)$ .

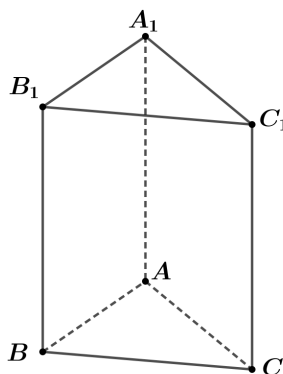
a) Tập xác định của hàm số  $f(x)$  là khoảng  $\left(-\frac{1}{4}; +\infty\right)$ .

b) Bất phương trình  $\frac{f(x)-1}{\sqrt{3^x-1}} \leq 0$  có đúng 2 nghiệm nguyên.

c) Đồ thị hàm số  $f(x)$  đi qua trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ , với  $A(3;4)$  và  $B(9;0)$ .

d) Đạo hàm của hàm số  $f(x)$  là  $f'(x) = \frac{4}{5x+1}$ .

**Câu 2.** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A_1B_1C_1$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $A$ ,  $AB = AC = a$  và cạnh bên  $AA_1 = a\sqrt{2}$  (tham khảo hình vẽ)



a) Thể tích của khối lăng trụ  $ABC.A_1B_1C_1$  bằng  $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ .

b) Góc giữa hai đường thẳng  $BC_1$  và  $AC$  bằng  $60^\circ$ .

c) Khoảng cách từ  $A$  đến mặt phẳng  $(A_1BC_1)$  bằng  $\frac{a\sqrt{6}}{6}$ .

d) Gọi  $M, N$  lần lượt là hai điểm di động trên các đoạn thẳng  $A_1C_1$  và  $BC_1$  sao cho  $MN = \frac{a}{2}$ .

Thể tích của khối chóp  $A.A_1BNM$  có giá trị nhỏ nhất bằng  $\frac{7\sqrt{2}}{48}a^3$ .

**Câu 3.** Các học sinh lớp 12T làm thí nghiệm gieo ba loại hạt giống  $X, Y$  và  $Z$ . Xác suất để ba loại hạt giống  $X, Y$  và  $Z$  nảy mầm tương ứng là  $x, y$  và  $0,8$  ( $x > y$ ). Biết rằng xác suất để ít nhất một trong ba hạt giống này nảy mầm là  $0,964$  và xác suất để cả ba hạt giống đều nảy mầm là  $0,224$ . Giả sử việc nảy mầm của các hạt giống  $X, Y$  và  $Z$  là độc lập với nhau. Gọi  $A$  là biến cố: “Có ít nhất một trong ba hạt giống nảy mầm” và  $B$  là biến cố: “Cả ba hạt giống đều nảy”.

a) Biến cố đối của biến cố  $A$  là  $\bar{A}$ : “Cả ba hạt giống đều không nảy mầm”.

b) Xác suất để xảy ra biến cố  $B$  là  $P(B) = 0,8xy$ .

- c) Xác suất để hạt giống  $X$  nảy mầm là  $0,7$ .
- d) Xác suất để có đúng hai hạt nảy mầm là  $0,488$ .

**Câu 4.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$ .

- a) Hàm số có giá trị cực đại lớn hơn giá trị cực tiểu.
- b) Gọi  $A, B$  là các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số. Diện tích của tam giác  $OAB$  bằng  $8$  (đơn vị diện tích), trong đó  $O$  là gốc tọa độ.
- c) Đường thẳng đi qua hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số là  $y = 2x + 2$ .
- d) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-4; 0)$ .

### PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

*Thí sinh trả lời câu 1 và câu 2*

- Câu 1.** Một doanh nghiệp tư nhân  $X$  chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay, doanh nghiệp đang tập trung chiến lược kinh doanh một loại xe máy với chi phí mua vào là  $38$  triệu đồng/ chiếc với giá bán ra là  $43$  triệu đồng/ chiếc. Với giá bán này thì số lượng xe bán ra mỗi năm là  $600$  chiếc. Nhằm tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán. Ước tính cứ giảm  $1$  triệu đồng/ chiếc thì số lượng xe bán ra trong năm tăng thêm  $200$  chiếc. Vậy doanh nghiệp phải giảm giá bán là bao nhiêu triệu đồng để thu được lợi nhuận cao nhất trong một năm?
- Câu 2.** Trong ngày hội STEM, bạn An nhận được nhiệm vụ thiết kế một chiếc hộp giấy có dạng hình hộp chữ nhật  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$  với độ dài các cạnh  $AB = a, AD = b, AA_1 = c$  và khoảng cách giữa  $AC$  và  $BC_1$  bằng  $d$  (tham khảo hình vẽ). Biết rằng  $a, b, c, d$  là các số nguyên dương có đơn vị đo bằng decimet. Hỏi diện tích của chiếc hộp bằng bao nhiêu  $dm^2$  để thể tích của chiếc hộp bạn An sẽ làm là nhỏ nhất.

☞ HẾT ☞



## HƯỚNG DẪN GIẢI

SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO TỈNH NGHỆ AN

ĐỀ THI CHỌN HSG CẤP TỈNH

Môn: Toán 12

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

## HƯỚNG DẪN GIẢI

### PHẦN I. TRẮC NGHIỆM

Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12.

Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

| Mã đề | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
|       | C | D | D | C | C | B | B | C | B | C  | C  | C  |

**Câu 1.** Cho khối chóp tứ giác đều  $SABCD$  có  $AB = a, SA = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$ . Thể tích của khối chóp  $SABCD$  bằng

A.  $2a^3$ .

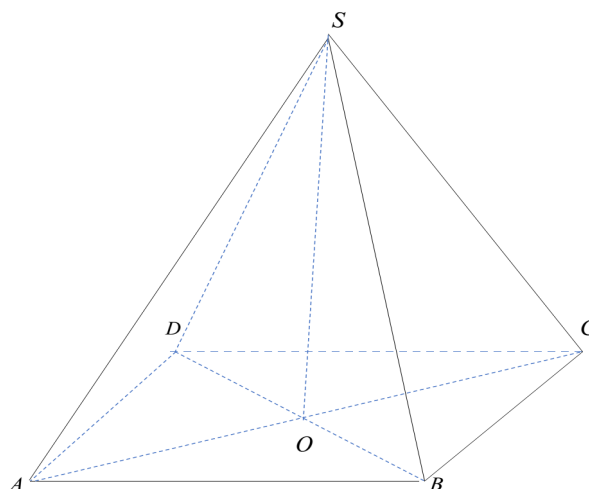
B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}a^3$ .

**C.  $\frac{2a^3}{3}$ .**

D.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}a^3$ .

Lời giải

**Chọn C**



$$SO = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}a\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2a \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot 2a = \frac{2}{3}a^3$$

**Câu 2.** Giả sử một vật giao động điều hòa xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình  $x(t) = 3 \cos\left(4t - \frac{\pi}{3}\right)$ . Ở đây, thời gian  $t$  tính bằng giây và  $x(t)$  là li độ của vật tại thời điểm  $t$  tính bằng centimet. Hãy cho biết trong khoảng thời gian từ 0 đến 4 giây, vật đạt li độ bằng  $\frac{3}{2}cm$  bao nhiêu lần?

A. 6.

B. 5.

C. 3.

**D. 4.**

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } x(t) = 3 \cos\left(4t - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \cos\left(4t - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 4t - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}k\pi \\ t = \frac{1}{2}k\pi \end{cases}$$

$$\text{Do } t \in [0; 4] \Rightarrow t \in \left\{0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}; \pi; \frac{7\pi}{6}\right\}$$

**Câu 3.** Một lớp có 45 học sinh, trong đó có 31 em học sinh học khá môn Toán, 24 học sinh học khá môn Tiếng Anh, 5 học sinh không học khá cả hai môn Toán và Tiếng Anh. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp. Xác suất để học sinh được chọn học khá cả hai môn Toán và Tiếng Anh là

- A.  $\frac{248}{675}$ . B.  $\frac{173}{675}$ . C.  $\frac{1984}{6075}$ . **D.  $\frac{1}{3}$ .**

Lời giải

Chọn D

Số học sinh học khá Tiếng Anh hoặc Toán là  $45 - 5 = 40$ .

Số học sinh học khá cả 2 môn Tiếng Anh và Toán là  $31 + 24 - 40 = 15$

$$\text{Xác suất cần tìm là } \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

**Câu 4.** Cho hình hộp  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ . Phát biểu nào sau đây sai?

- A.  $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$ . B.  $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1} - \overrightarrow{DA}$ .  
**C.  $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$ .** D.  $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BA}$ .

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$  theo quy tắc hình hộp.

**Câu 5.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(2; -1; 1)$  và  $B(1; 2; -3)$ . Toạ độ của vector  $\overrightarrow{AB}$  là

- A.  $(1; -3; 4)$ . B.  $(3; 1; -2)$ . **C.  $(-1; 3; -4)$ .** D.  $(2; -2; -3)$ .

Lời giải

Chọn C

$A(2; -1; 1)$  và  $B(1; 2; -3) \Rightarrow$  toạ độ của vector  $\overrightarrow{AB} = (-1; 3; -4)$ .

**Câu 6.** Bảng số liệu ghép nhóm sau cho biết chiều cao (cm) của 50 học sinh lớp 10A.

|                  |           |           |           |
|------------------|-----------|-----------|-----------|
| Khoảng chiều cao | [155;160) | [160;165) | [165;170) |
| Số học sinh      | 17        | 25        | 8         |

Một của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

- A. 162,6. **B. 161,6.** C. 163,4. D. 160.

Lời giải

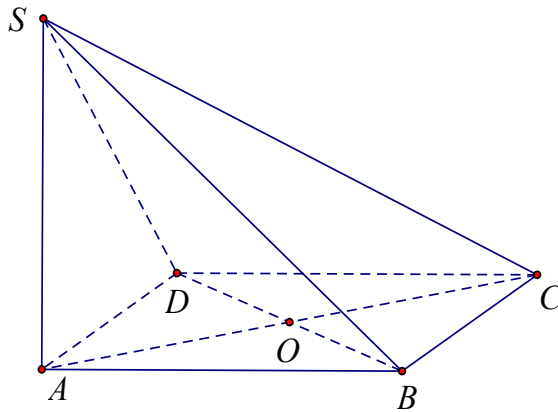
Chọn B

Vì nhóm  $[160;165)$  có số học sinh nhiều nhất (tần số lớn nhất) nên Một của mẫu số liệu đã cho thuộc nhóm này.

Ta có  $j = 2, a_2 = 160, m_2 = 25, m_1 = 17, m_3 = 8, h = 5$ . Do đó

$$M_0 = 160 + \frac{25 - 17}{(25 - 17) + (25 - 8)} \cdot 5 = 161,6 \text{ (cm)}.$$

**Câu 7.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông tâm  $O$ , đường thẳng  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy và  $OC = \sqrt{3}SA$  (tham khảo hình vẽ). Số đo góc phẳng nhị diện  $[S, BD, C]$  bằng



A.  $120^\circ$ .

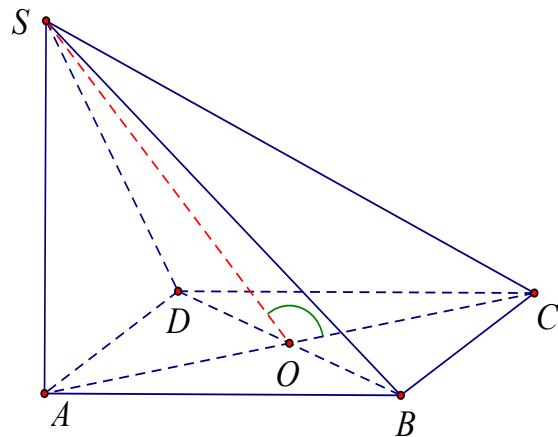
**B.  $150^\circ$ .**

C.  $30^\circ$ .

D.  $60^\circ$ .

Lời giải

**Chọn B**

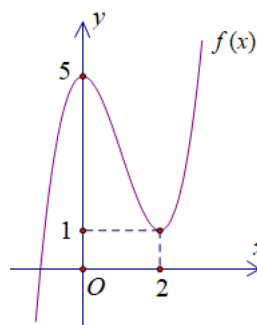


Ta có  $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$  mà  $BD \perp AC$  nên  $BD \perp (SAC)$ . Do đó,  $BD \perp SO$ . Mặt khác,  $CO \perp BD$ . Vậy góc phẳng nhị diện  $[S, BD, C]$  chính là góc  $\widehat{SOC}$ .

$$\text{Ta có } \tan \widehat{SOA} = \frac{SA}{OA} = \frac{SA}{OC} = \frac{SA}{\sqrt{3}SA} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SOA} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{SOC} = 150^\circ.$$

Số đo góc phẳng nhị diện  $[S, BD, C]$  bằng  $150^\circ$ .

**Câu 8.** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho bằng



A. 0.

B. 1.

**C. 2.**

D. 5.

Lời giải

Chon C

Dựa vào đồ thị, ta thấy điểm cực tiểu của hàm số đã cho bằng 2.

**Câu 9.** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{nếu } x > 2 \\ 2 & \text{nếu } x = 2 \\ -x & \text{nếu } x < 2 \end{cases}$ . Phát biểu nào sau đây là đúng?

**A.**  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2.$

**B.**  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2).$

**C.**  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x).$

**D.** Hàm số liên tục tại  $x = 2$ .

## Lời giải

**Chọn B**

Ta có:  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x - 2) = 2 = f(2)$ .

**Câu 10.** Một cấp số cộng có số hạng đầu bằng 4 và số hạng thứ 3 bằng 12. Số hạng thứ 10 của cấp số cộng đó bằng

A. 44.

**B. 36.**

**C. 40.**

#### D. $4^{10}$

## Lời giải

Chon C

Gọi  $d$  là công sai của cấp số cộng đã cho.

Ta có  $u_1 = 4$ ,  $u_3 = u_1 + 2d = 12$ , suy ra  $d = 4$ .

$$\text{Vậy } u_{10} = u_1 + 9d = 4 + 9.4 = 40.$$

**Câu 11.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x(x+2)(x+3)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(1) + f(-2) = f(3) + f(0)$ . Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-2; 3]$  lần lượt là

**A.**  $f(0)$  và  $f(-2)$ .      **B.**  $f(-2)$  và  $f(0)$ .      **C.**  $f(0)$  và  $f(3)$ .      **D.**  $f(3)$  và  $f(0)$ .

## Lời giải

## Chon C

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \\ x = -2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

|      |           |         |         |        |           |           |
|------|-----------|---------|---------|--------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-3$    | $-2$    | $0$    | $3$       | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $-$     | $0$     | $+$    | $0$       | $+$       |
| $y$  | $+\infty$ | $f(-3)$ | $f(-2)$ | $f(0)$ | $+\infty$ |           |

Từ bảng biến thiên ta thấy: Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-2; 3]$  là  $f(0)$ .

Ta có:  $f(1) + f(-2) = f(3) + f(0) \Leftrightarrow f(1) - f(0) = f(3) - f(-2)$

Do  $f(1) > f(0)$  nên  $f(3) > f(-2)$ . Vậy giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-2; 3]$  là  $f(3)$ .



**Câu 12.** Một vật chuyển động theo phương trình  $s(t) = \frac{1}{6}t^3 - t^2 + 4t$ , trong đó  $t > 0$ ,  $t$  tính bằng giây và  $s(t)$  tính bằng mét. Xét trong khoảng thời gian từ 4 giây đến 10 giây vận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất bằng

- A.  $\frac{16}{3}$  (m/s).      B.  $\frac{32}{3}$  (m/s).      **C. 4 (m/s).**      D. 2 (m/s).

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có  $v(t) = s'(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2t + 4$ .

$$v'(t) = t - 2, \quad v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Bảng biến thiên:

|         |   |   |   |   |   |    |
|---------|---|---|---|---|---|----|
| $t$     | 0 |   | 2 | 4 |   | 10 |
| $v'(t)$ |   | - | 0 |   | + |    |
| $v(t)$  |   | ↘ |   |   | ↗ |    |
|         |   |   |   |   |   |    |

Từ bảng biến thiên ta thấy: trên đoạn  $[4; 10]$ ,  $v(t)$  đạt giá trị nhỏ nhất khi  $t = 4$ .

Vậy trong khoảng thời gian từ 4 giây đến 10 giây vận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất bằng  $v(4) = 4$  (m/s).

## PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1.** Cho hàm số  $f(x) = \log_5(4x+1)$ .

- a) Tập xác định của hàm số  $f(x)$  là khoảng  $\left(-\frac{1}{4}; +\infty\right)$ .
- b) Bất phương trình  $\frac{f(x)-1}{\sqrt{3^x-1}} \leq 0$  có đúng 2 nghiệm nguyên.
- c) Đồ thị hàm số  $f(x)$  đi qua trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ , với  $A(3;4)$  và  $B(9;0)$ .
- d) Đạo hàm của hàm số  $f(x)$  là  $f'(x) = \frac{4}{5x+1}$ .

**Lời giải**

**(a) Đúng.**

Điều kiện xác định:  $4x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{4}$ . Vậy tập xác định của hàm số là  $\left(-\frac{1}{4}; +\infty\right)$ .

**(b) Sai.**

Điều kiện:  $3^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$ . Khi đó bất phương trình  $\frac{f(x)-1}{\sqrt{3^x-1}} \leq 0$

$$\Leftrightarrow f(x) - 1 \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 1 \Leftrightarrow \log_5(4x+1) \leq 1 \Leftrightarrow 4x+1 \leq 5 \Leftrightarrow x \leq 1.$$

Kết hợp điều kiện ta được tập nghiệm là  $0 < x \leq 1$ . Vậy bất phương trình đã cho có 1 nghiệm nguyên.

(c) Đúng.

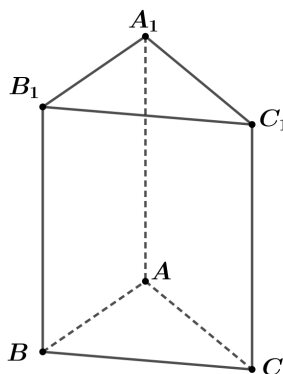
Toạ độ trung điểm  $M$  của đoạn  $AB$  là  $M(6;2)$ .

Toạ độ điểm  $M(6;2)$  thuộc đồ thị hàm số  $y = f(x) = \log_5(4x+1)$ .

(d) Sai.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{(4x+1)'}{(4x+1)\ln 5} = \frac{4}{(4x+1)\ln 5}.$$

**Câu 2.** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A_1B_1C_1$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $A$ ,  $AB = AC = a$  và cạnh bên  $AA_1 = a\sqrt{2}$  (tham khảo hình vẽ)



a) Thể tích của khối lăng trụ  $ABC.A_1B_1C_1$  bằng  $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ .

b) Góc giữa hai đường thẳng  $BC_1$  và  $AC$  bằng  $60^\circ$ .

c) Khoảng cách từ  $A$  đến mặt phẳng  $(A_1BC_1)$  bằng  $\frac{a\sqrt{6}}{6}$ .

d) Gọi  $M, N$  lần lượt là hai điểm di động trên các đoạn thẳng  $A_1C_1$  và  $BC_1$  sao cho  $MN = \frac{a}{2}$ .

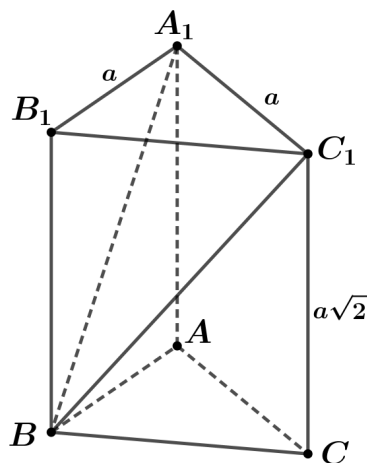
Thể tích của khối chóp  $A.A_1BNM$  có giá trị nhỏ nhất bằng  $\frac{7\sqrt{2}}{48}a^3$ .

**Lời giải**

(a) Đúng.

Thể tích của khối lăng trụ  $ABC.A_1B_1C_1$  bằng  $V = S_{\Delta ABC} \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ .

(b) Đúng.



Vì  $AC \parallel A_1C_1$  nên  $(BC_1, AC) = (BC_1, A_1C_1) = \widehat{BC_1A_1}$ .

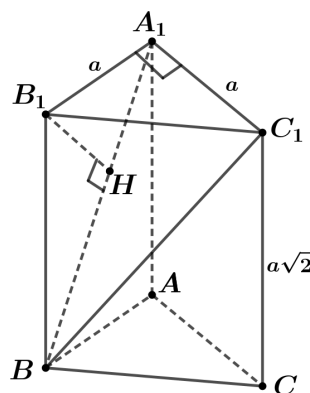
Ta có  $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$ ;  $BC_1 = \sqrt{BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{2a^2 + 2a^2} = 2a$ ;

$BA_1 = \sqrt{AB^2 + AA_1^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$ . Ta thấy  $BC_1^2 = A_1C_1^2 + A_1B^2 \Rightarrow \Delta A_1C_1B$  vuông tại  $A_1$ .

Ta có  $\sin \widehat{BC_1A_1} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{BC_1A_1} = 60^\circ$ .

Vậy góc giữa hai đường thẳng  $BC_1$  và  $AC$  bằng  $60^\circ$ .

(c) Sai.



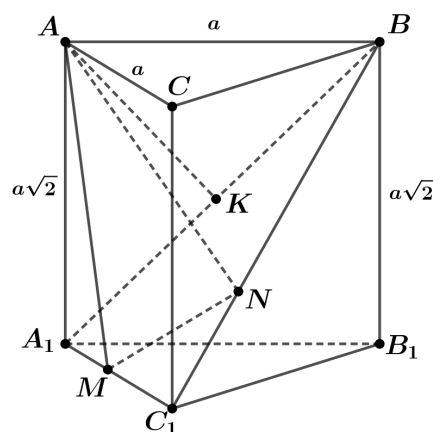
Kẻ  $B_1H \perp A_1B$ .

Ta có  $d(A, (A_1BC_1)) = d(B_1, (A_1BC_1)) = B_1H$ .

Xét tam giác vuông  $A_1B_1B$ , ta có  $B_1H = \frac{B_1A_1 \cdot B_1B}{A_1B} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$ .

Vậy khoảng cách từ  $A$  đến mặt phẳng  $(A_1BC_1)$  bằng  $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ .

(d) Đúng.



Kẻ  $AK \perp A_1B \Rightarrow AK \perp (BA_1MN)$ . Ta có  $AK = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ .

Thể tích khối chóp  $A.A_1BNM$  là  $V = \frac{1}{3} AK \cdot S_{BA_1MN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot S_{BA_1MN}$ .

Thể tích khối chóp  $A.A_1BNM$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow S_{BA_1MN}$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow S_{\Delta C_1MN}$  lớn nhất.

Ta có  $S_{\Delta C_1MN} = \frac{1}{2} C_1M \cdot C_1N \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} C_1M \cdot C_1N \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{C_1M^2 + C_1N^2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8} (C_1M^2 + C_1N^2)$ .

Theo định lý cô sin ta có

$$MN^2 = C_1M^2 + C_1N^2 - 2C_1M \cdot C_1N \cdot \cos 60^\circ \Leftrightarrow C_1M^2 + C_1N^2 = \frac{a^2}{4} + C_1M \cdot C_1N.$$

$$\Rightarrow S_{\Delta C_1MN} = \frac{\sqrt{3}}{4} C_1M \cdot C_1N \leq \frac{\sqrt{3}}{8} \left( \frac{a^2}{4} + C_1M \cdot C_1N \right) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{8} C_1M \cdot C_1N \leq \frac{a^2 \sqrt{3}}{32}.$$

$$\Rightarrow S_{\Delta C_1MN} = \frac{\sqrt{3}}{4} C_1M \cdot C_1N \leq \frac{a^2 \sqrt{3}}{16}. \text{ Do đó diện tích } S_{\Delta C_1MN} \text{ lớn nhất bằng } \frac{a^2 \sqrt{3}}{16}.$$

$$\Rightarrow S_{BA_1MN} \text{ nhỏ nhất bằng } S_{\Delta BA_1C_1} - S_{\Delta C_1MN} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} - \frac{a^2 \sqrt{3}}{16} = \frac{7a^2 \sqrt{3}}{16}.$$

Khi đó thể tích khối chóp  $A.A_1BNM$  nhỏ nhất bằng  $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{7a^2 \sqrt{3}}{16} = \frac{7\sqrt{2}}{48} a^3$ .

**Câu 3.** Các học sinh lớp 12T làm thí nghiệm gieo ba loại hạt giống  $X$ ,  $Y$  và  $Z$ . Xác suất để ba loại hạt giống  $X$ ,  $Y$  và  $Z$  nảy mầm tương ứng là  $x$ ,  $y$  và  $0,8$  ( $x > y$ ). Biết rằng xác suất để ít nhất một trong ba hạt giống này mầm là  $0,964$  và xác suất để cả ba hạt giống đều nảy mầm là  $0,224$ . Giả sử việc nảy mầm của các hạt giống  $X$ ,  $Y$  và  $Z$  là độc lập với nhau. Gọi  $A$  là biến cố: “Có ít nhất một trong ba hạt giống nảy mầm” và  $B$  là biến cố: “Cả ba hạt giống đều nảy”.

a) Biến cố đối của biến cố  $A$  là  $\bar{A}$ : “Cả ba hạt giống đều không nảy mầm”. mầm

b) Xác suất để xảy ra biến cố  $B$  là  $P(B) = 0,8xy$ .

c) Xác suất để hạt giống  $X$  nảy mầm là  $0,7$ .

d) Xác suất để có đúng hai hạt nảy mầm là 0,488.

Lời giải

**Chọn A**

(a) Đúng.

Biến cố đối của biến cố  $A$  là  $\bar{A}$ : “Cả ba hạt giống đều không nảy mầm”.

(b) Đúng.

$B$  là biến cố: “Cả ba hạt giống đều nảy mầm”  $\Rightarrow B = X \cap Y \cap Z$

Xác suất để xảy ra biến cố  $B$  là  $P(B) = P(X \cap Y \cap Z) = 0,8xy$ .

(c) Đúng.

Xác suất để ít nhất một trong ba hạt giống nảy mầm là  $0,964 \Rightarrow P(X \cup Y \cup Z) = 0,964$ .

$$\Rightarrow P(X) + P(Y) + P(Z) - P(X \cap Y) - P(X \cap Z) - P(Y \cap Z) + P(X \cap Y \cap Z) = 0,964$$

$$\Rightarrow x + y + 0,8 - xy - 0,8x - 0,8y + 0,224 = 0,964 \Rightarrow 0,2x + 0,2y - xy = -0,06.$$

Xác suất để cả ba hạt giống đều nảy mầm là:

$$0,224 \Rightarrow P(X \cap Y \cap Z) = 0,224 \Rightarrow 0,8xy = 0,224 \Rightarrow xy = 0,28.$$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 0,2x + 0,2y - xy = -0,06 \\ xy = 0,28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1,1 \\ xy = 0,28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0,7 \\ y = 0,4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0,4 \\ y = 0,7 \end{cases}$$

$$\text{Vì } x > y \Rightarrow \begin{cases} x = 0,7 \\ y = 0,4 \end{cases}.$$

Xác suất để hạt giống  $X$  nảy mầm là 0,7.

(d) Đúng.

Xác suất để có đúng hai hạt nảy mầm là:

$$\begin{aligned} &P(X \cap Y \cap \bar{Z}) + P(X \cap \bar{Y} \cap Z) + P(\bar{X} \cap Y \cap Z) \\ &= 0,7 \cdot 0,4 \cdot 0,2 + 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,8 = 0,488. \end{aligned}$$

**Câu 4.**

Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$ .

a) Hàm số có giá trị cực đại lớn hơn giá trị cực tiểu.

b) Gọi  $A, B$  là các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số. Diện tích của tam giác  $OAB$  bằng 8 (đơn vị diện tích), trong đó  $O$  là gốc tọa độ.

c) Đường thẳng đi qua hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số là  $y = 2x + 2$ .

d) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-4;0)$ .

Lời giải

Chọn A

a) Sai.

$$\text{Ta có } y = \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} \Rightarrow y' = \frac{(2x + 2)(x + 2) - x^2 - 2x - 4}{(x + 2)^2} = \frac{x^2 + 4x}{(x + 2)^2}.$$

$$y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

|      |           |      |      |           |           |     |     |  |           |
|------|-----------|------|------|-----------|-----------|-----|-----|--|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-4$ | $-2$ | $0$       | $+\infty$ |     |     |  |           |
| $y'$ |           | $+$  | $0$  | $-$       | $0$       | $+$ |     |  |           |
| $y$  |           |      | $-6$ |           | $+\infty$ |     | $2$ |  | $+\infty$ |
|      | $-\infty$ |      |      | $-\infty$ |           |     |     |  |           |

Vậy hàm số có giá trị cực đại nhỏ hơn giá trị cực tiểu.

b) Sai.

Gọi  $A, B$  là các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số  $A(-4; -6), B(0; 2)$

$$\Rightarrow S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4 \text{ (đơn vị diện tích)}.$$

c) Đúng.

$$AB: \begin{cases} \text{qua } B(0; 2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(4; 8) \Rightarrow \text{vtpt } \vec{n}(2; -1) \end{cases} \Rightarrow AB: 2x - y + 2 = 0 \Rightarrow y = 2x + 2.$$

Vậy đường thẳng đi qua hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số là  $y = 2x + 2$ .

d) Sai.

Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-4; -2)$  và  $(-2; 0)$ .

### PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Thí sinh trả lời câu 1 và câu 2

**Câu 1.** Một doanh nghiệp tư nhân  $X$  chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay, doanh nghiệp đang tập trung chiến lược kinh doanh một loại xe máy với chi phí mua vào là 38 triệu đồng/ chiếc với giá bán ra là 43 triệu đồng/ chiếc. Với giá bán này thì số lượng xe bán ra mỗi năm là 600 chiếc. Nhằm tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán. Ước tính cứ giảm 1 triệu đồng/ chiếc thì số lượng xe bán ra trong năm tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải giảm giá bán là bao nhiêu triệu đồng để thu được lợi nhuận cao

nhất trong một năm?

**Lời giải:**

**ĐA: 1**

Gọi giá bán mới của một chiếc xe là  $x$  triệu đồng ( $38 < x < 43$ ).

Tiền lời sau khi giảm giá bán của một chiếc xe là:  $x - 38$  triệu đồng

Số tiền giảm giá so với ban đầu là  $43 - x$  triệu đồng.

Số xe bán được sau khi giảm là  $600 + \left(\frac{43 - x}{1}\right) \cdot 200$  chiếc xe.

Lợi nhuận doanh nghiệp thu được trong một năm sau khi giảm giá xe là:  
 $(x - 38) \cdot \left[600 + (43 - x) \cdot 200\right]$ .

Xét hàm  $f(x) = (x - 38) \cdot \left[600 + (43 - x) \cdot 200\right] = -200x^2 + 16800x - 349600$ .

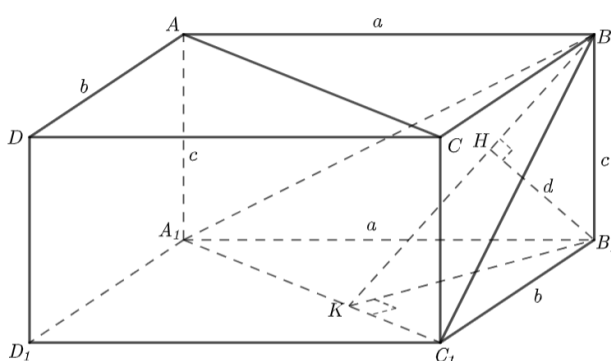
ta thấy  $f(x)$  đạt giá trị lớn nhất 3200 tại  $x = 42$ .

Vậy doanh nghiệp phải giảm giá bán 1 triệu đồng để thu được lợi nhuận cao nhất.

**Câu 2.** Trong ngày hội STEM, bạn An nhận được nhiệm vụ thiết kế một chiếc hộp giấy có dạng hình hộp chữ nhật  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$  với độ dài các cạnh  $AB = a, AD = b, AA_1 = c$  và khoảng cách giữa  $AC$  và  $BC_1$  bằng  $d$  (tham khảo hình vẽ). Biết rằng  $a, b, c, d$  là các số nguyên dương có đơn vị đo bằng decimet. Hỏi diện tích của chiếc hộp bằng bao nhiêu  $dm^2$  để thể tích của chiếc hộp bạn An sẽ làm là nhỏ nhất.

**Lời giải:**

**ĐA: 90.**



Ta

có:

$$AC \parallel A_1C_1 \Rightarrow AC \parallel (BA_1C_1) \Rightarrow d(AC, C_1B) = d(AC, (BA_1C_1)) = d(C, (BA_1C_1))$$

$$\text{Mà } d(C, (BA_1C_1)) = d(B_1, (BA_1C_1)), \text{ nên } d(AC, C_1B) = d(B_1, (BA_1C_1)) = d(d \in \mathbb{Z}^+)$$

Ta có  $B_1BA_1C_1$  là tứ diện vuông tại  $B_1$  nên  $\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$ )

Dễ thấy:  $d < \min\{a, b, c\}$ .

Không mất tính tổng quát giả sử:  $0 < d \leq a \leq b \leq c$ .

**TH1:**  $d = 1$  thì  $c \geq b \geq a \geq 2$  (vì  $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ ), suy ra  $1 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq \frac{3}{4}$  (vô lý).

**TH2:**  $d = 2$  thì  $a \geq 3$  và  $\frac{1}{4} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ . Lúc này ta thấy:

Với  $a \geq 4$  thì  $c \geq b \geq a \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq \frac{3}{16}$  (Vô lý)

Với  $a = 3$  thay vào ta có:  $\frac{1}{4} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \Leftrightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{5}{36}$

Với  $b \geq 5$  thì  $c \geq b \geq 5$  nên  $\frac{5}{36} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^2} = \frac{2}{25} < \frac{5}{36}$  (Vô lý)

Với  $b = 4$  thay vào ta thấy không tồn tại  $c \in \mathbb{Z}^+$

Với  $b = 3$  ta tìm được  $c = 6$  khi đó  $V_H = abc = 3.3.6 = 54$

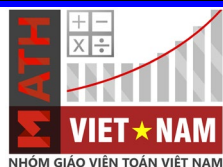
**TH3:**  $d \geq 3$  thì  $a \geq b \geq c \geq 4$  nên  $V_H = abc \geq 4.4.4 = 64 > 54$

Khi đó thể tích chiếc hộp nhỏ nhất bằng 54 khi  $(a; b; c) = (3; 3; 6)$

Do đó diện tích chiếc hộp bằng:  $S = 2(ab + ac + cb) = 90(dm^2)$ .

∞ HẾT ∞





SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO NGHỆ AN

ĐỀ THI CHỌN HSG CẤP TỈNH

Môn: Toán 12

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

**Câu I. (3,5 điểm)**

1) Tìm các điểm cực đại và cực tiểu của hàm số  $y = \frac{x^3}{3} - 3x - 6\ln(2-x) + 1$ .

2) Một công ty bất động sản đưa ra hai phương án ký hợp đồng cho thuê căn hộ theo năm (tiền hợp đồng thuê nhà khách hàng phải trả từ đầu năm) để làm văn phòng đại diện như sau:

Hợp đồng loại 1: Trả 220 triệu cho năm đầu tiên và sau mỗi năm tăng thêm 11 triệu đồng so với năm kề trước.

Hợp đồng loại 2: Trả 194 triệu cho năm đầu tiên và sau mỗi năm tăng thêm 6% so với năm kề trước.

Vào đầu năm 2024, bác Hoàng và bác Anh cùng đến thuê một căn hộ để làm văn phòng đại diện cho công ty của mình và thuê dài hạn. Biết rằng bác Hoàng lựa chọn hợp đồng loại 1 và bác Anh lựa chọn hợp đồng loại 2 để thuê. Hỏi từ đầu năm bao nhiêu trở đi bác Hoàng sẽ chỉ trả tiền thuê nhà hàng năm ít hơn bác Anh?

**Câu II. (2,0 điểm).** Nuôi cấy nấm men thu sinh khối (protein, amino acid...), ứng dụng làm tế bào nhận trong công nghệ gen để sản xuất một số chất có hoạt tính sinh học mạnh (kháng sinh...). Giả sử số lượng tế bào của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hóa bằng

hàm số  $P(t) = \frac{m}{n + e^{-0,75t}}$ , trong đó thời gian  $t$  được tính bằng giờ. Đạo hàm của hàm số  $y = P(t)$  biểu thị tốc độ sinh trưởng của quần thể nấm men (tính bằng tế bào/ giờ) tại thời điểm  $t$ . Tại thời điểm ban đầu  $t = 0$ , quần thể có 30 tế bào và tốc độ sinh trưởng là 15 tế bào/ giờ. Tìm số lượng tế bào của quần thể nấm men tại thời điểm tốc độ sinh trưởng của quần thể nấm men đạt mức tối đa.

**Câu III. (3,5 điểm)** Các học sinh lớp 12T làm thí nghiệm gieo ba loại hạt giống  $X$ ,  $Y$  và  $Z$ . Xác suất để ba loại hạt giống  $X$ ,  $Y$  và  $Z$  nảy mầm tương ứng là  $x$ ,  $y$  và  $0,8$  ( $x > y$ ). Biết rằng xác suất để ít nhất một trong ba hạt giống này nảy mầm là  $0,964$  và xác suất để cả ba hạt giống đều nảy mầm là  $0,224$ . Giả sử việc nảy mầm của các hạt giống  $X$ ,  $Y$  và  $Z$  là độc lập với nhau. Gọi  $A$  là biến cố: “Có ít nhất một trong ba hạt giống nảy mầm” và  $B$  là biến cố: “Cả ba hạt giống đều nảy”.

a) Biến cố đối của biến cố  $A$  là  $\bar{A}$ : “Cả ba hạt giống đều không nảy mầm”. mầm

b) Xác suất để xảy ra biến cố  $B$  là  $P(B) = 0,8xy$ .

c) Xác suất để hạt giống  $X$  nảy mầm là  $0,7$ .

d) Xác suất để có đúng hai hạt nảy mầm là  $0,488$ .

**Câu IV. (1,5 điểm)** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$ .

- a) Hàm số có giá trị cực đại lớn hơn giá trị cực tiểu.
- b) Gọi  $A, B$  là các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số. Diện tích của tam giác  $OAB$  bằng 8 (đơn vị diện tích), trong đó  $O$  là gốc tọa độ.
- c) Đường thẳng đi qua hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số là  $y = 2x + 2$ .
- d) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-4; 0)$ .

**Câu V. (1,5 điểm)** Cho tập  $A$  gồm  $n$  phần tử ( $n$  là số nguyên dương). Lấy ngẫu nhiên một bộ thứ tự  $(X, Y)$  với  $X, Y$  là các tập con của tập hợp  $A$ . Biết xác suất để lấy được một bộ thứ tự  $(X, Y)$  sao cho  $X \cup Y = A$  là  $\frac{81}{448}$ . Tìm số  $k$  lớn nhất ( $k \in \mathbb{N}$ ) sao cho có thể chọn ra  $k$  tập hợp con khác nhau của tập hợp  $A$  mà hai tập con bất kì trong  $k$  tập đó giao nhau khác rỗng (với  $X \neq Y$  thì các bộ thứ tự  $(X, Y)$  và  $(Y, X)$  là khác nhau).

☞ HẾT ☞



## HƯỚNG DẪN GIẢI

SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO TỈNH NGHỆ AN

ĐỀ THI CHỌN HSG CẤP TỈNH

Môn: Toán 12

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

### Câu I.

1) Tìm các điểm cực đại và cực tiểu của hàm số  $y = \frac{x^3}{3} - 3x - 6\ln(2-x) + 1$ .

2) Một công ty bất động sản đưa ra hai phương án ký hợp đồng cho thuê căn hộ theo năm (tiền hợp đồng thuê nhà khách hàng phải trả từ đầu năm) để làm văn phòng đại diện như sau:

Hợp đồng loại 1: Trả 220 triệu cho năm đầu tiên và sau mỗi năm tăng thêm 11 triệu đồng so với năm kế trước.

Hợp đồng loại 2: Trả 194 triệu cho năm đầu tiên và sau mỗi năm tăng thêm 6% so với năm kế trước.

Vào đầu năm 2024, bác Hoàng và bác Anh cùng đến thuê một căn hộ để làm văn phòng đại diện cho công ty của mình và thuê dài hạn. Biết rằng bác Hoàng lựa chọn hợp đồng loại 1 và bác Anh lựa chọn hợp đồng loại 2 để thuê. Hỏi từ đầu năm bao nhiêu trở đi bác Hoàng sẽ chỉ trả tiền thuê nhà hàng năm ít hơn bác Anh?

### Lời giải

1) TXĐ:  $D = (-\infty; 2)$ .

Ta có:  $y' = x^2 - 3 + \frac{6}{2-x} = \frac{-x^3 + 2x^2 + 3x}{2-x}$ .

$$y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 3 \notin D \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $0$                     | $2$ |              |           |
|------|-----------|------|-------------------------|-----|--------------|-----------|
| $y'$ |           | $+$  | $0$                     | $-$ | $0$          | $+$       |
| $y$  |           |      | $\frac{11}{3} - 6\ln 3$ |     | $1 - 6\ln 2$ | $+\infty$ |

Theo bảng biến thiên suy ra:

- Điểm cực đại của hàm số là:  $x = -1$

- Điểm cực tiểu của hàm số là:  $x = 0$ .

2) - Theo hợp đồng loại 1, số tiền thuê căn hộ mà bác Hoàng phải trả trong các năm là một cấp số cộng với số hạng đầu  $u_1 = 220$ , công sai  $d = 11$  nên số tiền bác Hoàng phải trả trong năm thứ  $n$  là:  $A_n = 220 + (n-1) \cdot 11 = 11n + 209$  (triệu đồng).

- Theo hợp đồng loại 2, số tiền thuê căn hộ mà bác Anh phải trả trong các năm là một cấp số nhân với số hạng đầu  $u_1 = 194$ , công bội  $q = 1 + 6\% = 1,06$  nên số tiền bác Anh phải trả trong năm thứ  $n$  là:  $B_n = 194 \cdot 1,06^{n-1}$  (triệu đồng).

Xét:  $A_n < B_n \Leftrightarrow 11n + 209 < 194 \cdot 1,06^{n-1} \Leftrightarrow 194 \cdot 1,06^{n-1} - 11n - 209 > 0 \Leftrightarrow n > 8,8$ .

Vậy từ đầu năm thứ 9 trở đi thì số tiền bác Hoàng phải trả hàng năm sẽ ít hơn số tiền bác Anh phải trả.

**Câu II.** Nuôi cấy nấm men thu sinh khối (protein, amino acid...), ứng dụng làm tế bào nhận trong công nghệ gen để sản xuất một số chất có hoạt tính sinh học mạnh (kháng sinh...). Giả sử số lượng tế bào của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hóa bằng hàm số  $P(t) = \frac{m}{n + e^{-0,75t}}$ , trong đó thời gian  $t$  được tính bằng giờ. Đạo hàm của hàm số  $y = P(t)$  biểu thị tốc độ sinh trưởng của quần thể nấm men (tính bằng tế bào/ giờ) tại thời điểm  $t$ . Tại thời điểm ban đầu  $t = 0$ , quần thể có 30 tế bào và tốc độ sinh trưởng là 15 tế bào/ giờ. Tìm số lượng tế bào của quần thể nấm men tại thời điểm tốc độ sinh trưởng của quần thể nấm men đạt mức tối đa.

**Lời giải**

$$D = R$$

$$P'(t) = \frac{0,75m.e^{-0,75t}}{(n + e^{-0,75t})^2} > 0 \quad \forall t \in D$$

$$\text{Tại thời điểm } t = 0 : P(0) = 30 \Leftrightarrow \frac{m}{n+1} = 30.$$

$$\text{Khi đó tốc độ sinh trưởng tại thời điểm } t = 0 \text{ là : } P'(0) = \frac{0,75.m}{(n+1)^2}.$$

$$\text{Theo bài ra, ta có hệ: } \begin{cases} \frac{m}{n+1} = 30 \\ \frac{0,75.m}{(n+1)^2} = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 30(n+1) \\ \frac{0,75.30.(n+1)}{(n+1)^2} = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 45 \\ n = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } P'(t) = \frac{0,75.45.e^{-0,75t}}{\left(\frac{1}{2} + e^{-0,75t}\right)^2} = \frac{135}{4} \cdot \frac{e^{-0,75t}}{\left(\frac{1}{2} + e^{-0,75t}\right)^2} \leq \frac{135}{4} \cdot \frac{e^{-0,75t}}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-0,75t}} = \frac{135}{8}$$

$$\text{Do đó: } \max_{t \geq 0} P'(t) = \frac{135}{8} \text{ khi } e^{-0,75t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = t_0 = \frac{\ln 2}{0,75} \text{ nên } P(t_0) = \frac{45}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 45$$

**Câu III.** Các học sinh lớp 12T làm thí nghiệm gieo ba loại hạt giống  $X$ ,  $Y$  và  $Z$ . Xác suất để ba loại hạt giống  $X$ ,  $Y$  và  $Z$  nảy mầm tương ứng là  $x$ ,  $y$  và  $0,8$  ( $x > y$ ). Biết rằng xác suất để ít nhất một trong ba hạt giống này mầm là  $0,964$  và xác suất để cả ba hạt giống đều nảy mầm là  $0,224$ . Giả sử việc nảy mầm của các hạt giống  $X$ ,  $Y$  và  $Z$  là độc lập với nhau. Gọi  $A$  là biến cố: “Có ít nhất một trong ba hạt giống nảy mầm” và  $B$  là biến cố: “Cả ba hạt giống đều nảy”.

a) Biến cố đối của biến cố  $A$  là  $\bar{A}$ : “Cả ba hạt giống đều không nảy mầm”. mầm

b) Xác suất để xảy ra biến cố  $B$  là  $P(B) = 0,8xy$ .

c) Xác suất để hạt giống  $X$  nảy mầm là  $0,7$ .

d) Xác suất để có đúng hai hạt nảy mầm là  $0,488$ .

### Lời giải

#### Chọn A

(a) Đúng.

Biến cố đối của biến cố  $A$  là  $\bar{A}$ : “Cả ba hạt giống đều không nảy mầm”.

(b) Đúng.

$B$  là biến cố: “Cả ba hạt giống đều nảy mầm”  $\Rightarrow B = X \cap Y \cap Z$

Xác suất để xảy ra biến cố  $B$  là  $P(B) = P(X \cap Y \cap Z) = 0,8xy$ .

(c) Đúng.

Xác suất để ít nhất một trong ba hạt giống này mầm là  $0,964 \Rightarrow P(X \cup Y \cup Z) = 0,964$ .

$$\Rightarrow P(X) + P(Y) + P(Z) - P(X \cap Y) - P(X \cap Z) - P(Y \cap Z) + P(X \cap Y \cap Z) = 0,964$$

$$\Rightarrow x + y + 0,8 - xy - 0,8x - 0,8y + 0,224 = 0,964 \Rightarrow 0,2x + 0,2y - xy = -0,06.$$

Xác suất để cả ba hạt giống đều nảy mầm là:

$$0,224 \Rightarrow P(X \cap Y \cap Z) = 0,224 \Rightarrow 0,8xy = 0,224 \Rightarrow xy = 0,28.$$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 0,2x + 0,2y - xy = -0,06 \\ xy = 0,28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1,1 \\ xy = 0,28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0,7 \\ y = 0,4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0,4 \\ y = 0,7 \end{cases}$$

$$\text{Vì } x > y \Rightarrow \begin{cases} x = 0,7 \\ y = 0,4 \end{cases}.$$

Xác suất để hạt giống  $X$  nảy mầm là  $0,7$ .

(d) Đúng.

Xác suất để có đúng hai hạt nảy mầm là:

$$P(X \cap Y \cap \bar{Z}) + P(X \cap \bar{Y} \cap Z) + P(\bar{X} \cap Y \cap Z)$$

$$= 0,7 \cdot 0,4 \cdot 0,2 + 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,8 = 0,488.$$

#### Câu IV.

Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$ .

a) Hàm số có giá trị cực đại lớn hơn giá trị cực tiểu.

b) Gọi  $A, B$  là các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số. Diện tích của tam giác  $OAB$  bằng 8 (đơn vị diện tích), trong đó  $O$  là gốc tọa độ.

c) Đường thẳng đi qua hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số là  $y = 2x + 2$ .

d) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-4; 0)$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

a) Sai.

$$\text{Ta có } y = \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} \Rightarrow y' = \frac{(2x + 2)(x + 2) - x^2 - 2x - 4}{(x + 2)^2} = \frac{x^2 + 4x}{(x + 2)^2}.$$

$$y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

|      |           |      |           |     |           |     |
|------|-----------|------|-----------|-----|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-4$ | $-2$      | $0$ | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$       | $-$ | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $-6$ | $+\infty$ | $2$ | $+\infty$ |     |

Vậy hàm số có giá trị cực đại nhỏ hơn giá trị cực tiểu.

b) Sai.

Gọi  $A, B$  là các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số  $A(-4; -6), B(0; 2)$

$$\Rightarrow S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4 \text{ (đơn vị diện tích)}.$$

c) Đúng.

$$AB: \begin{cases} \text{qua } B(0; 2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(4; 8) \Rightarrow \text{vtpt } \vec{n}(2; -1) \end{cases} \Rightarrow AB: 2x - y + 2 = 0 \Rightarrow y = 2x + 2.$$

Vậy đường thẳng đi qua hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số là  $y = 2x + 2$ .

d) Sai.

Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-4; -2)$  và  $(-2; 0)$ .

**Câu V.** Cho tập  $A$  gồm  $n$  phần tử ( $n$  là số nguyên dương). Lấy ngẫu nhiên một bộ thứ tự  $(X, Y)$  với  $X, Y$  là các tập con của tập hợp  $A$ . Biết xác suất để lấy được một bộ thứ tự  $(X, Y)$  sao cho  $X \cup Y = A$  là  $\frac{81}{448}$ . Tìm số  $k$  lớn nhất ( $k \in \mathbb{N}$ ) sao cho có thể chọn ra  $k$  tập hợp con khác nhau của tập hợp  $A$  mà hai tập con bất kì trong  $k$  tập đó giao nhau khác rỗng (với  $X \neq Y$  thì các bộ thứ tự  $(X, Y)$  và  $(Y, X)$  là khác nhau).

**Lời giải**

Đầu tiên ta đi tìm số nguyên dương  $n$

Gọi  $M$  là biến cố: “lấy được một bộ thứ tự  $(X, Y)$  sao cho  $X \cup Y = A$ ”

Tập  $A$  có  $2^n$  tập con nên ta có  $|\Omega| = 2^n \cdot 2^n - 2^n = 2^n (2^n - 1)$

Xét biến cố  $M$

Giả sử  $X \cup Y = A$ , ta chọn  $X$  trước, sau đó chọn  $Y$  theo  $X$

Gọi  $|X| = m$  với  $0 \leq m \leq n$ , ta có  $C_n^m$  cách chọn  $X$

Ta thấy,  $Y = B \cup C$  với  $B = A \setminus X$  và  $C \subset X$

Suy ra số cách chọn  $Y$  là  $2^{|X|} = 2^m$

Từ đó suy ra số cách chọn cặp  $(X, Y)$  bằng  $\sum_{m=0}^n C_n^m \cdot 2^m = (1+2)^n = 3^n$

$$\text{Do đó } P(M) = \frac{|M|}{|\Omega|} = \frac{3^n}{2^n (2^n - 1)} = \frac{81}{448} = \frac{3^4}{2^6 \cdot 7} \Rightarrow n = 6$$

Tiếp theo ta tìm  $k$

Ghép các tập con của  $A$  thành các cặp  $(X, A \setminus X)$  với  $X \subset A$ , có  $2^{n-1}$  cặp như vậy

Suy ra  $k \leq 2^{n-1}$

Ta chỉ ra dấu đẳng thức xảy ra

Xét  $a \in A$ , đặt  $T = A \setminus \{a\}$

Với  $G \subset T$ , ta lấy  $k = 2^{n-1}$  tập con của  $A$  có dạng  $\{a\} \cup G$  thì giao của hai tập bất kì trong  $k$  tập trên luôn khác rỗng

Vậy số  $k$  lớn nhất là  $2^{n-1} = 2^5 = 32$  là số cần tìm.

☞ HẾT ☞