

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

b) $\sqrt{4-x^2} = x$.

c) $x\sqrt{x^2+1} + 1 = 5x^2$.

Bài 2. Cho hàm số $y = x^2 + mx + 1$ (m là tham số).

a) Lập bảng biến thiên của hàm số đã cho khi $m = -4$.

b) Tìm điều kiện của tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt đường thẳng $y = x + 1$ tại hai điểm phân biệt nằm về một phía của trục hoành.

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ bên.

a) Nêu các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số đã cho.

b) Tìm các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(|x|) + (m-2)f(|x|) + m-3 = 0$ có 6 nghiệm phân biệt.

Bài 4. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và M, N là hai điểm lần lượt thuộc hai cạnh AB, CD sao cho $AB = 6BM, DC = 3DN$.

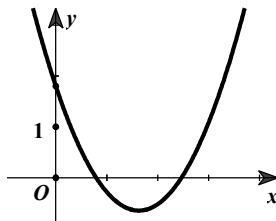
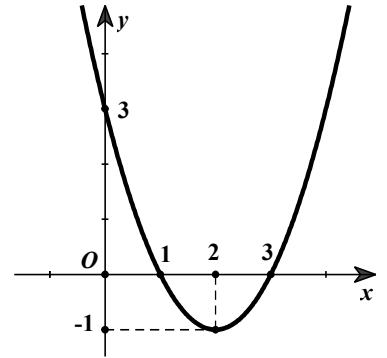
a) Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ theo a .

b) Chứng minh ba điểm M, N, G thẳng hàng.

Bài 5. a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2;1), B(-1;2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục hoành sao cho $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Cho tam giác đều ABC cạnh bằng $\sqrt{3}$ nội tiếp đường tròn (O) . Điểm M thuộc (O) . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$.

Bài 6. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Chứng minh rằng phương trình $(1-c)x^2 + (2-b)x + 1 - a = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt.



Bài 7. Với $x \in (0;1)$, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})}{x} + \frac{5}{\sqrt{1-x}}$.

-----HẾT-----

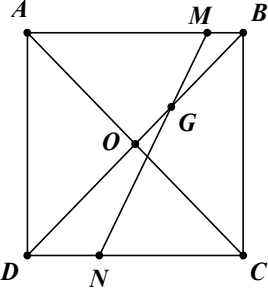
Thí sinh không được sử dụng tài liệu, CBCT không giải thích gì thêm.

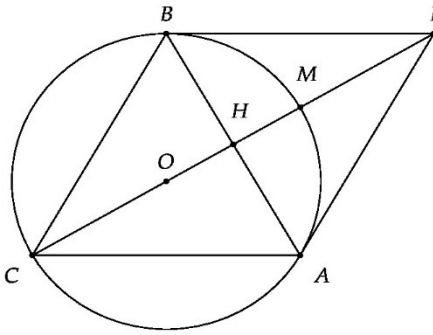
Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

**ĐÁP ÁN, BIỂU ĐIỂM ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TRƯỜNG LỚP 10
NĂM HỌC 2020 – 2021**

Bài	Ý	Nội dung	Điểm
1	a 2.0	Giải các phương trình sau:	
		$x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -1 \\ x^2 = 4 \end{cases}$	1.0đ
		$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$ (<i>Chỉ lấy $x = 2$ hoặc lấy thừa $x = \pm 1$ trừ 0.5</i>)	1.0đ
	b 2.0	$\sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4-x^2 = x^2 \end{cases}$	1.0đ
		$\begin{cases} x \geq 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ (<i>Thiếu đk và không thử lại trừ 0.5</i>)	1.0đ
	c 1.0	$x\sqrt{x^2+1} + 1 = 5x^2$	
+ $x = 0$ không phải là nghiệm. $x\sqrt{x^2+1} + 1 = 5x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x^2} = 5 (x > 0) \\ -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x^2} = 5 (x < 0) \end{cases}$		0.5đ	
Kết luận nghiệm $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x = \frac{-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$ <i>(Chỉ xét 1 t/h cho 0.25. Bình phương không thử lại trừ 0.5)</i>		0.5đ	
2		Cho hàm số $y = x^2 + mx + 1$ (m là tham số).	
	a 1.5	Lập bảng biến thiên của hàm số đã cho khi $m = -4$.	
		Khi $m = -4$ hàm số trở thành $y = x^2 - 4x + 1$, có bảng biến thiên như sau: 	0.25đ 1.25đ
<i>(Sai mỗi chi tiết trừ 0.25)</i>			
b 2.0	Tìm điều kiện của tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt đường thẳng $y = x + 1$ tại hai điểm phân biệt nằm về một phía của trục hoành.		
	Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2 + mx + 1 = x + 1 \Leftrightarrow x(x + m - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 - m \end{cases}$	0.5đ + 0.5đ	

	<p>Đồ thị cắt đường thẳng tại hai điểm phân biệt $m \neq 1$. Tọa độ các giao điểm là $A(0;1)$, $B(1-m;2-m)$. Để hai điểm nằm về một phía trục hoành thì $1(2-m) > 0 \Leftrightarrow m < 2$. Vậy $m < 2$ và $m \neq 1$ thỏa mãn. (Thiếu $m \neq 1$ trừ 0.25)</p>	<p>0.5đ</p> <p>0.5đ</p>
3	<p>Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ bên.</p>	
a.1.0đ	Nêu các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số đã cho.	
	Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$, đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.	0.5đ+0.5đ
b 1.5đ	<p>Tìm các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(x) + (m-2)f(x) + m-3 = 0$ có 6 nghiệm phân biệt.</p>	
	<p>Ta có:</p> $f^2(x) + (m-2)f(x) + m-3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -1 \\ f(x) = 3-m \end{cases}$ <p>Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy ra đồ thị hàm số $y = f(x)$ như sau:</p>	0.25đ
	+ Phương trình $f(x) = -1$ có hai nghiệm phân biệt.	0.25đ
	Để phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt thì phương trình $f(x) = 3-m$ phải có 4 nghiệm phân biệt	0.25đ
	$\Leftrightarrow -1 < 3-m < 3 \Leftrightarrow 0 < m < 4$.	0.25đ
	Vậy $m \in \{1; 2; 3\}$.	0.25đ

4		Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và M, N là hai điểm lần lượt thuộc hai cạnh AB, CD sao cho $AB = 6BM, DC = 3DN$.	
	a	Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ theo a .	
	1.5	 <p>Vậy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} = \sqrt{2}a$.</p>	<p>0.75đ + 0.75đ</p>
	b	Chứng minh ba điểm M, N, G thẳng hàng.	
	2.0	<p>Ta có:</p> $+ \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BG} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}.$ $+ \overrightarrow{GN} = \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} = 2\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\right)$ $\overrightarrow{GN} = 2\overrightarrow{MG} \Rightarrow \text{ba điểm } M, N, G \text{ thẳng hàng.}$	<p>0.75đ 0.75đ 0.5đ</p>
5	a	Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2;1), B(-1;2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục hoành sao cho $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.	
	1.5	<p>Gọi $M(x;0)$. Điểm A' là điểm đối xứng với A qua trục hoành thì $A' = (2;-1)$.</p> <p>Khi đó $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$. Dấu “=” xảy ra khi A', M, B thẳng hàng.</p> <p>Tim được $M(1;0)$.</p>	<p>0.5đ 0.5đ 0.5đ</p>
	b	Cho tam giác đều ABC cạnh bằng $\sqrt{3}$ nội tiếp đường tròn (O) . Điểm M thuộc (O) . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} $.	
	1.5	<p>Gọi I là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ACBI$.</p> <p>Ta có $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Với mọi điểm M ta có</p> $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})$ $= \overrightarrow{MI}.$ <p>Khi đó $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MI} = MI$.</p>	<p>0.5đ 0.25đ</p>



Như vậy MI lớn nhất khi M trùng với điểm C .

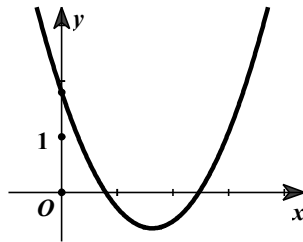
Gọi H là tâm hình thoi $ACBI$, suy ra $CI = 2CH = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{2} = 3$.

Vậy giá trị lớn nhất của $|\overline{MA} + \overline{MB} - \overline{MC}|$ bằng 3.

0.25đ

0.5đ

6
1.5 Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Chứng minh rằng phương trình $(1-c)x^2 + (2-b)x + 1 - a = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt.



Từ đồ thị suy ra $a > 0, b < 0, c > 0, \Delta = b^2 - 4ac > 0, c \neq 1$.

Phương trình $(1-c)x^2 + (2-b)x + 1 - a = 0$ có

$$\Delta = (2-b)^2 - 4(1-c)(1-a) = b^2 - 4ac + 4(a-b+c) > 0.$$

(Tính đúng Δ mà không chứng minh được trừ 0.5)

0.5đ

1.0đ

7
1.0 Với $x \in (0;1)$, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})}{x} + \frac{5}{\sqrt{1-x}}.$$

Đặt $t = \sqrt{1-x}, 0 < t < 1$ ta được $P = \frac{t}{1-t} + \frac{5}{t} = \frac{t}{1-t} + \frac{5(1-t)}{t} + 5$.

Áp dụng BĐT Cô si ta có

$$P = \frac{t}{1-t} + \frac{5(1-t)}{t} + 5 \geq 2\sqrt{5} + 5.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $t = \frac{5-\sqrt{5}}{4}$.

Vậy $\underset{(0,1)}{\text{Min}} P = 2\sqrt{5} + 5$.

0.25đ
+ 0.25đ

0.25đ

0.25đ