

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y		-2	1	$+\infty$	0

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** Đồ thị hàm số không có tiệm cận.
B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(0; +\infty)$.
C. Đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.
D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng 0.

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_2(4^x - m) = x + 1$ có đúng 2 nghiệm thực phân biệt?

- A.** 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 3. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , biết $AB = a$, $AC = 2a$, $CC' = 2a$. Gọi M , I lần lượt là trung điểm $A'B'$ và BC' . Tính góc giữa hai đường thẳng IM và AC' .

- A.** 90° . **B.** 60° . **C.** 45° . **D.** 30° .

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm $y = \frac{\cos x - 3}{\cos x - m}$ nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

- A.** $m \leq 3$. **B.** $m < 3$. **C.** $\begin{cases} 0 < m < 3 \\ m < -1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} 0 \leq m < 3 \\ m \leq -1 \end{cases}$.

Câu 5. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC . Biết khoảng cách giữa đường AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích của lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị (C) . Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $(2; m)$ có phương trình là $y = 4x - 6$. Tiếp tuyến của các đồ thị hàm số $y = f[f(x)]$ và

$y = f(3x^2 - 10)$ tại điểm có hoành độ bằng 2 có phương trình lần lượt là $y = ax + b$ và $y = cx + d$. Tính giá trị của biểu thức $S = 4a + 3c - 2b + d$.

- A. $S = 176$. B. $S = 174$. C. $S = 178$. D. $S = -26$.

Câu 7. Tập xác định của hàm số $y = (4 - 3x - x^2)^{-2021}$ là

- A. $\mathbb{R}$. B. $(-4; 1)$. C. $\mathbb{R} \setminus \{-4; 1\}$. D. $[-4; 1]$.

Câu 8. Tổng số các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{5-x^2}-2}{x^2-1}$ là

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 0.

Câu 9. Hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$ và $f(1) = -3$. Tính $b + 2a$

- A. 3. B. -3. C. 15. D. -15.

Câu 10. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ trên $[1; 2]$ bằng 8 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $8 < m < 10$. B. $4 < m < 8$. C. $0 < m < 4$. D. $m > 10$.

Câu 11. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m+1)x^5 - (m^2-1)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

- A. 2. B. Vô số. C. 4. D. 3.

Câu 12. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 4. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$

- A. $\sqrt{3}$. B. $\sqrt{6}$. C. $2\sqrt{3}$. D. $\sqrt{2}$.

Câu 13. Cho đa thức $f(x)$ có hệ số thực thỏa mãn điều kiện $2f(x) + f(1-x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Số điểm cực trị của hàm số $y = 3xf(x) + x^2 + 4x + 1$ là

- A. 3 B. 0. C. 1. D. 2.

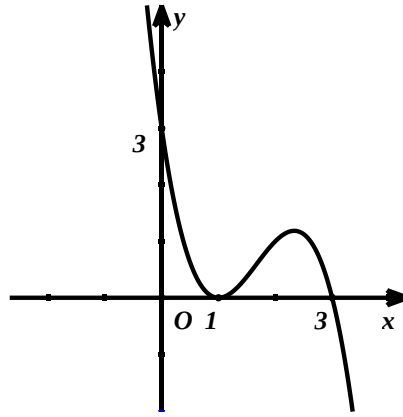
Câu 14. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $ACB'D'$.

- A. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. B. $\frac{a^3}{3}$. C. $\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$. D. $\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

Câu 15. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - mx$ có hai điểm cực trị, đồng thời nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$. Số phần tử của tập S là

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $y = f(4 - 2^x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-1; 0)$. B. $(1; 3)$. C. $(0; +\infty)$. D. $(0; 1)$.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			1		0		$+\infty$
	$-\infty$						

Số nghiệm của phương trình $f(x) = 2$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 18. Gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân (u_n) có công bội q khác 1.

Biết $S_8 = 257S_4$ và $u_3 = 32$. Tính u_1 .

- A. 2. B. 3. C. 8. D. 4.

Câu 19. Có bao nhiêu số nguyên dương n sao cho S là một số có 1000 chữ số. Biết:

$$S = 2 + (C_1^0 + C_2^0 + \dots + C_n^0) + (C_1^1 + C_2^1 + \dots + C_n^1) + \dots + (C_{n-1}^{n-1} + C_n^{n-1}) + C_n^n$$

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 20. Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_6(3.4^x + 2.9^x) = x + 1$ bằng

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 4.

Câu 21. Phương trình $\log_{\sqrt{2}}(mx - 6x^3) + 2\log_{\frac{1}{2}}(-14x^2 + 29x - 2) = 0$ có 3 nghiệm thực phân biệt khi

- A. $m < 19$. B. $19 < m < \frac{39}{2}$. C. $m > 39$. D. $19 < m < 39$.

Câu 22. Cho tam giác ABC cân tại A , góc $BAC = 120^\circ$ và $AB = 4 \text{ cm}$. Tính thể tích khối tròn xoay lớn nhất có thể khi ta quay tam giác ABC quanh đường thẳng chứa một cạnh của nó.

- A. $16\sqrt{3}\pi \text{ (cm}^3\text{)}$. B. $16\pi \text{ (cm}^3\text{)}$. C. $\frac{16\pi}{\sqrt{3}} \text{ (cm}^3\text{)}$. D. $\frac{16\pi}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$.

Câu 23. Để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x - 1) = \log_2(mx - 8)$ có hai nghiệm thực phân biệt là

- A. 3. B. 4. C. 5. D. Vô số.

Câu 24. Cho bất phương trình: $1 + \log_5(x^2 + 1) \geq \log_5(mx^2 + 4x + m)$ (1). Tìm tất cả các giá trị của m để (1) được nghiệm đúng với mọi số thực x .

- A. $2 < m \leq 3$. B. $-3 \leq m \leq 7$. C. $m \in (-\infty; 3] \cup [7; +\infty)$. D. $2 \leq m \leq 3$.

Câu 25. Một khối cầu có thể tích V đi qua đỉnh và đường tròn đáy của một khối nón có thiết diện qua trục là một tam giác đều. Tỉ số thể tích khối cầu và thể tích khối nón là

- A. $\frac{32}{9}$. B. $\frac{9}{32}$. C. $\frac{23}{32}$. D. $\frac{32}{23}$.

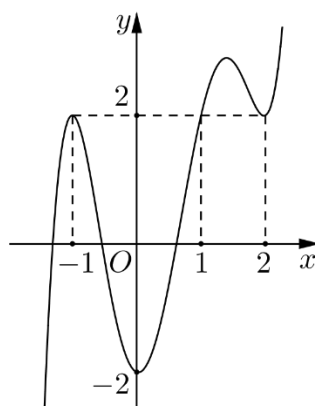
Câu 26. Một hình trụ có bán kính đáy bằng a . Cắt hình trụ bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng $\frac{a}{2}$ ta được thiết diện là một hình vuông. Tính thể tích khối trụ.

- A. $3\pi a^3$. B. $\pi a^3 \sqrt{3}$. C. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{4}$. D. πa^3 .

Câu 27. Cho tập hợp S gồm 20 số tự nhiên từ 1 đến 20. Lấy ngẫu nhiên ba số thuộc S , xác suất để ba số lấy được lập thành một cấp số cộng là

- A. $\frac{5}{38}$. B. $\frac{1}{114}$. C. $\frac{3}{38}$. D. $\frac{7}{38}$.

Câu 28. Cho hàm số $y = f'(x-1)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = \pi^{2f(x)-4x}$ đạt cực tiểu tại điểm nào?

- A. $x=1$. B. $x=2$. C. $x=0$. D. $x=-1$.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$, tam giác SAB đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của AD . Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCM) là

- A. $\frac{3a\sqrt{2}}{8}$. B. $a\sqrt{2}$. C. $3a\sqrt{2}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại đỉnh B . Biết $AB = BC = a\sqrt{3}$, $SAB = SCB = 90^\circ$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

- A. $12\pi a^2$. B. $8\pi a^2$. C. $2\pi a^2$. D. $16\pi a^2$.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
y	$-\infty$	3	0	$+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{7}{f(x^3 + 2x) + 1}$ là

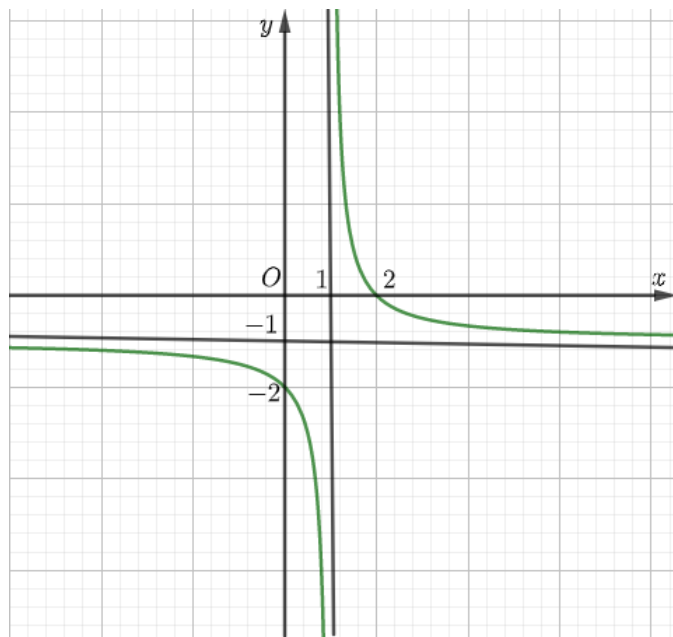
A. 4

B. 1

C. 3

D. 2

Câu 32. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx-1}$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Giá trị của tổng $a + b + c$ bằng

A. 0

B. 4

C. 2

D. -2

Câu 33. Cho ba số thực $a, b, c \in \left(\frac{1}{4}; 1\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức

$$P = \log_a \left(b - \frac{1}{4}\right) + \log_b \left(c - \frac{1}{4}\right) + \log_c \left(a - \frac{1}{4}\right)$$

A. $P_{\min} = 3$.

B. $P_{\min} = 3\sqrt{3}$.

C. $P_{\min} = 6$.

D. $P_{\min} = 1$.

Câu 34. Cho 3 số a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số nhân với công bội khác 1. Biết cũng theo thứ tự đó chúng lần lượt là số thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng công sai là d , ($d \neq 0$). Tính $\frac{a}{d}$.

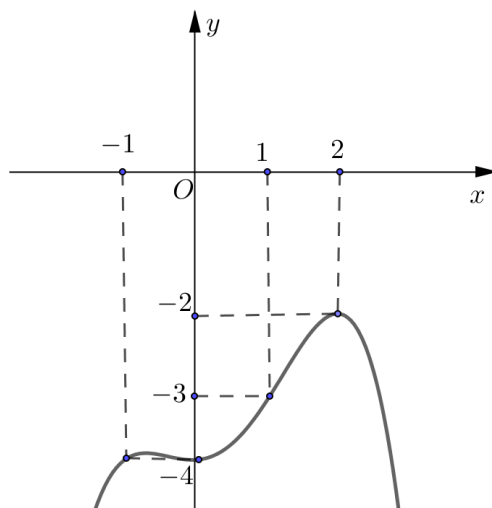
A. 3.

B. $\frac{4}{9}$.

C. $\frac{4}{3}$.

D. 9.

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $9.6^{f(x)} + (4 - f^2(x)).9^{f(x)} \leq (-m^2 + 5m).4^{f(x)}$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ là

- A.** 9. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 10.

Câu 36. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 - (m-6)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$ là.

- A.** $(-\infty; 3)$. **B.** $[3; 6]$. **C.** $(-\infty; 6]$. **D.** $(-\infty; 3]$.

Câu 37. Tính tổng các hệ số của các lũy thừa lẻ của x trong khai triển: $P(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{100})(1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^{100})$

- A.** 1. **B.** 2^{100} . **C.** 0. **D.** 2^{99} .

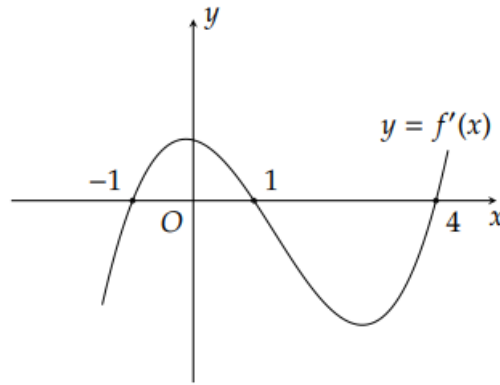
Câu 38. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, $SA \perp (ABC)$. Mặt phẳng (SBC) cách A một khoảng bằng a và hợp với mặt phẳng (ABC) góc 30° . Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

- A.** $\frac{8a^3}{9}$. **B.** $\frac{8a^3}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **D.** $\frac{4a^3}{9}$.

Câu 39. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $\log_9 a = \log_{16} b = \log_{12} \frac{5b-a}{2}$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ bằng

- A.** $\frac{a}{b} = -1 + \sqrt{6}$. **B.** $\frac{a}{b} = 7 - 2\sqrt{6}$. **C.** $\frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{6}}{5}$. **D.** $\frac{a}{b} = \frac{7 + 2\sqrt{6}}{25}$

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số bậc ba $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới



Hàm số $g(x) = e^{f(2x-1)}$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A.** $(-1;1)$. **B.** $(-1;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 41. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $2 \leq x \leq 2021$ và $2^y - \log_2(x + 2^{y-1}) = 2x - y$?

- A.** 9. **B.** 10. **C.** 2022. **D.** 2021.

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(13x-15)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)$

- A.** 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, cạnh SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng 2. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) . Tính $\cos \alpha$ khi thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất.

- A.** $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\cos \alpha = \frac{2}{3}$. **C.** $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 44. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 5$ có hệ số góc nhỏ nhất thì phương trình là

- A.** $y = 3x + 12$. **B.** $y = 3x + 3$. **C.** $y = 3x + 6$. **D.** $y = 3x + 9$.

Câu 45. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy $AB = a$. Trên cạnh BB' lấy điểm M sao cho $B'M = 2BM$. Biết $A'M \perp B'C$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$

- A.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $\frac{3a^3}{8}$. **C.** $\frac{3a^3}{4}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{16}$.

Câu 46. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a . Mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với SC , cắt cạnh SB tại B' với $\frac{SB'}{SB} = \frac{2}{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

- A.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SC = 2, \angle BCS = 45^\circ$; góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng 90° ; góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $V = \frac{\sqrt{2}}{15}$

B. $V = 2\sqrt{3}$

C. $V = 2\sqrt{2}$

D. $V = \frac{2\sqrt{3}}{15}$

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ là hình bình hành. Hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của AB và

SC . Hai đường thẳng AN, MN lần lượt cắt mặt phẳng (SBD) tại I và K . Gọi V là thể tích

khối chóp $S.ABCD$ và V' là thể tích khối tứ diện $CNIK$. Tỉ số $\frac{V'}{V}$ bằng

A. $\frac{1}{24}$.

B. $\frac{1}{48}$.

C. $\frac{1}{36}$.

D. $\frac{1}{18}$.

Câu 49. Cho $a > 0, a \neq 1$ và hai số thực dương b, c thỏa mãn $\log_a b = 3$ và $\log_a c = -2$, Tính

giá trị của biểu thức $P = \log_a \frac{a^2 \sqrt[3]{b}}{c^5}$.

A. $P = 9$.

B. $P = -2$.

C. $P = -7$.

D. $P = 13$.

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = b$ và cạnh bên $SA = c$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M là một điểm trên cạnh SA sao cho

$AM = x, 0 < x < c$. Tìm x để mặt phẳng (MBC) chia khối chóp thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau.

A. $x = \frac{(\sqrt{5} - 1)ab}{2c}$.

B. $x = \frac{(2 - \sqrt{3})ab}{2c}$.

C. $x = \frac{(3 - \sqrt{2})c}{2}$.

D. $x = \frac{(3 - \sqrt{5})c}{2}$.

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ -2 \nearrow & & \searrow \\ & -\infty & \end{array}$			$\begin{array}{ccc} +\infty & & 1 \\ \searrow & & \nearrow \\ & 0 & \end{array}$		

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** Đồ thị hàm số không có tiệm cận.
B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(0; +\infty)$.
C. Đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.
D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty$ nên $x = 0$ là tiệm cận đứng.

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -2$ suy ra $y = -2$ là tiệm cận ngang.

Lại có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1$ suy ra $y = 1$ là tiệm cận ngang.

Vây hàm số đã cho có ba đường tiệm cận.

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_2(4^x - m) = x + 1$ có đúng 2 nghiệm thực phân biệt?

- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Lời giải

Chọn A

Phương trình đã cho tương đương $4^x - m = 2^{x+1} \Leftrightarrow 2^{2x} - 2.2^x - m = 0. \quad (1)$

Đặt $t = 2^x$ với $t > 0$, phương trình (1) trở thành $t^2 - 2t - m = 0$. (2)

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai

$$\text{nghiệm phân biệt dương} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+m > 0 \\ 2 > 0 \\ -m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 0.$$

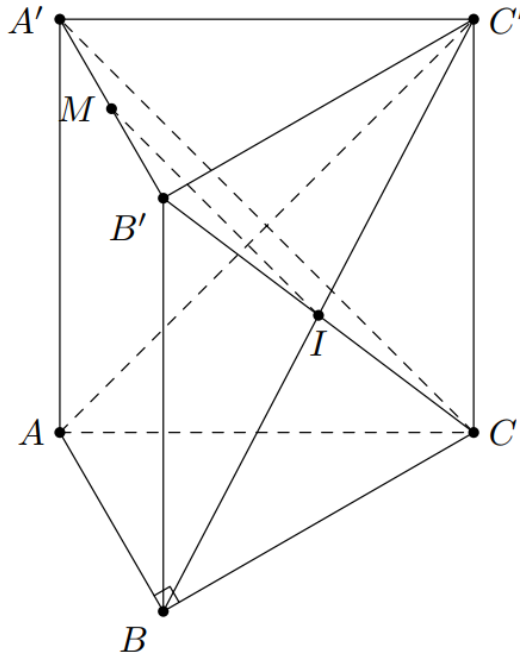
Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên không tồn tại giá trị nguyên m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 3. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , biết $AB = a$, $AC = 2a$, $CC' = 2a$. Gọi M , I lần lượt là trung điểm $A'B'$ và BC' . Tính góc giữa hai đường thẳng IM và AC' .

- A. 90° . B. 60° . C. 45° . D. 30° .

Lời giải

Chọn A



Ta có I là trung điểm BC' nên I cũng là trung điểm của $B'C$.

Do đó MI là đường trung bình của tam giác $B'A'C$ nên $MI \parallel A'C$.

Mặt khác $ACC'A'$ là hình vuông suy ra $AC' \perp A'C$.

Vậy $AC' \perp MI$ hay góc giữa hai đường thẳng IM và AC' bằng 90° .

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm $y = \frac{\cos x - 3}{\cos x - m}$ nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

A. $m \leq 3$.

B. $m < 3$.

C. $\begin{cases} 0 < m < 3 \\ m < -1 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} 0 \leq m < 3 \\ m \leq -1 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \cos x$ với $t \in (-1; 0)$.

$$t' = -\sin x < 0 \quad \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$$

$$\text{Ta có } y = \frac{t-3}{t-m}.$$

$$\text{Khi đó } y' = \frac{3-m}{(t-m)^2}.$$

$$\text{Hàm số } y = \frac{\cos x - 3}{\cos x - m} \text{ nghịch biến trên } \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Leftrightarrow \text{Hàm số } y = \frac{t-3}{t-m} \text{ đồng biến trên } (-1; 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-m > 0 \\ m \notin (-1; 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m \geq 0 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in [0; 3) \\ m \leq -1 \end{cases}.$$

Câu 5. Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC . Biết khoảng cách giữa đường AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích của lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

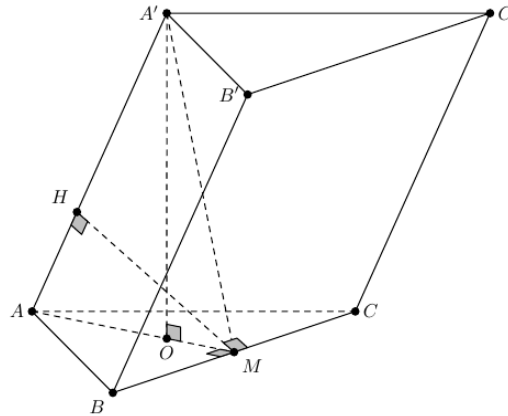
B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



♦ Ta có: $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Gọi O là trọng tâm tam giác ABC , suy ra $A'O \perp (ABC)$, nên chiều cao của khối lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ là $A'O$.

♦ Gọi M là trung điểm của BC ta có: $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp A'O \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'M)$.

♦ Trong $(A'MA)$ kẻ $MH \perp AA'$. Khi đó, $d(AA', BC) = MH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

♦ Trong ΔABC đều cạnh a có: $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $\sin HAM = \frac{HM}{AM} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow HAM = 30^\circ$.

♦ Xét tam giác vuông $A'OA$ có: $\tan 30^\circ = \frac{A'O}{AO} \Rightarrow A'O = AO \cdot \tan 30^\circ = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{3}$.

Vậy $V_{ABC \cdot A'B'C'} = A'O \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{a}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị (C) . Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $(2; m)$ có phương trình là $y = 4x - 6$. Tiếp tuyến của các đồ thị hàm số $y = f[f(x)]$ và $y = f(3x^2 - 10)$ tại điểm có hoành độ bằng 2 có phương trình lần lượt là $y = ax + b$ và $y = cx + d$. Tính giá trị của biểu thức $S = 4a + 3c - 2b + d$.

A. $S = 176$.

B. $S = 174$.

C. $S = 178$.

D. $S = -26$.

Lời giải

Chọn B

♦ Ta có $f(2) = 4.2 - 6 = 2$ nên tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(2; 2)$ có phương trình là $y = f'(2)(x - 2) + 2$.

Theo giả thiết, ta có $f'(2) = 4$.

♦ Đặt $g(x) = f[f(x)]$ và $h(x) = f(3x^2 - 10)$.

Khi đó $g'(x) = f'(x) \cdot f'[f(x)]$ và $h'(x) = 6x \cdot f'(3x^2 - 10)$.

Ta có:

$$f[f(2)] = f(2) = 2; h(2) = f(2) = 2;$$

$$g'(2) = f'(2) \cdot f'(2) = 16; h'(2) = 12 \cdot f'(2) = 48.$$

♦ Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = g(x)$ tại điểm $M(2; 2)$ có phương trình $y = 16x - 30$,

tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại điểm $M(2; 2)$ có phương trình $y = 48x - 94$.

♦ Do đó $a = 16$, $b = -30$, $c = 48$, $d = -94$. Suy ra $S = 174$.

Câu 7. Tập xác định của hàm số $y = (4 - 3x - x^2)^{-2021}$ là

A. $\mathbb{R}$.

B. $(-4; 1)$.

C. $\mathbb{R} \setminus \{-4; 1\}$.

D. $[-4; 1]$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định khi $4 - 3x - x^2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -4 \end{cases}$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-4; 1\}$.

Câu 8. Tổng số các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{5-x^2}-2}{x^2-1}$ là

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định khi $\begin{cases} 5-x^2 \geq 0 \\ x^2-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} \\ x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$

Tập xác định $D = [-\sqrt{5}; \sqrt{5}] \setminus \{-1; 1\}$

Từ đó suy ra đồ thị hàm số không có đường tiệm cận ngang.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{5-x^2}-2}{x^2-1} = \frac{-1}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{5-x^2}-2}{x^2-1} = \frac{-1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{5-x^2}-2}{x^2-1} = \frac{-1}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{5-x^2}-2}{x^2-1} = \frac{-1}{4}$$

Từ đó suy ra đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{5-x^2}-2}{x^2-1}$ không có đường tiệm cận.

Câu 9. Hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ đạt cực tiểu tại điểm $x=1$ và $f(1) = -3$. Tính $b+2a$

A. 3.

B. -3.

C. 15.

D. -15.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ suy ra $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 + 2a + b = 0$ (1)

Theo đề $f(1) = -3 \Leftrightarrow 1 + a + b + 2 = -3 \Leftrightarrow a + b = -6$ (2)

Giải hệ (1), (2) ta được $a = 3, b = -9$

Vậy $b + 2a = -9 + 2 \cdot 3 = -3$.

Bản word phát hành trên website Tailieuchuan.vn

Câu 10. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ trên $[1;2]$ bằng 8 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $8 < m < 10$.

B. $4 < m < 8$.

C. $0 < m < 4$.

D. $m > 10$.

Lời giải

Chọn A

Ta có hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ có $y' = \frac{1-m}{(x+1)^2}; \forall x \neq -1$.

Hàm số luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên $[1;2]$ nên để tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[1;2]$ bằng 8 thì $y(1) + y(2) = 8 \Leftrightarrow \frac{1+m}{2} + \frac{2+m}{3} = 8 \Leftrightarrow m = \frac{41}{5}$.

Câu 11. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m+1)x^5 - (m^2-1)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. 2.

B. Vô số.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = x^8 + (m+1)x^5 - (m^2-1)x^4 + 1$. TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$y' = 8x^7 + 5(m+1)x^4 - 4(m^2-1)x^3 = x^3[8x^4 + 5(m+1)x - 4(m^2-1)] = x^3 \cdot g(x)$$

với $g(x) = 8x^4 + 5(m+1)x - 4(m^2-1)$

Ta có $y'(0) = 0, \forall m \in \mathbb{R}$. Ta kiểm tra y' có đổi dấu khi đi qua điểm $x = 0$

Trường Hợp 1: $g(0) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$

+ Với $m = 1 \Rightarrow y' = x^3(8x^4 + 10x) = x^4(8x^3 + 10)$.

Khi đó y' không đổi dấu khi x qua 0 nên $m = 1$ loại

+ Với $m = -1 \Rightarrow y' = 8x^7$. Khi đó y' đổi dấu từ $(-)$ sang $(+)$ khi x qua 0 nên $m = -1$ thỏa mãn.

Trường Hợp 2: $g(0) \neq 0$ để y' đổi dấu từ $(-)$ sang $(+)$ khi x qua 0 thì $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) > 0 \Leftrightarrow -4(m^2-1) > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1; m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 0$.

Vậy có tất cả 2 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 12. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 4. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$

A. $\sqrt{3}$.

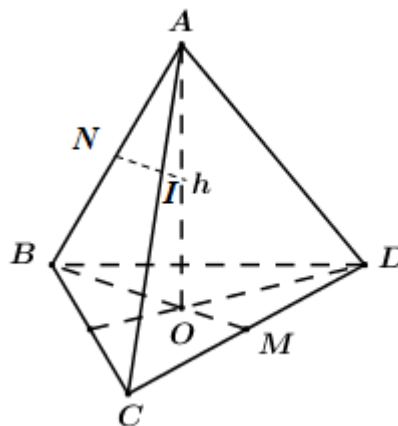
B. $\sqrt{6}$.

C. $2\sqrt{3}$.

D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD . Do tứ diện $ABCD$ đều nên $AO \perp (BCD)$

Kẻ đường trung trực của cạnh AB , cắt AO tại I . Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện, $R = AI$

Ta có $\triangle ANI \sim \triangle AOB$ nên $\frac{AN}{AO} = \frac{AI}{AB}$ hay $AI = \frac{AB^2}{2AO}$

Trong đó $AB = 4$ và AO là đường cao của tứ diện, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác

$$BCD. \text{ Khi đó } AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

Vậy $R = \sqrt{6}$.

Câu 13. Cho đa thức $f(x)$ có hệ số thực thỏa mãn điều kiện $2f(x) + f(1-x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Số điểm cực trị của hàm số $y = 3xf(x) + x^2 + 4x + 1$ là

A. 3

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết $2f(x) + f(1-x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó $2f(1-x) + f(x) = (1-x)^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} 2f(x) + f(1-x) = x^2 \\ 2f(1-x) + f(x) = (1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4f(x) + 2f(1-x) = 2x^2 \\ 2f(1-x) + f(x) = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4f(x) + 2f(1-x) = 2x^2 \\ 2f(1-x) + f(x) = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow 3f(x) = x^2 + 2x - 1.$$

Khi đó $y = 3xf(x) + x^2 + 4x + 1$

$$= x(x^2 + 2x - 1) + x^2 + 4x + 1$$

$$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$y' = 3x^2 + 6x + 3 \Rightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy hàm số $y = 3xf(x) + x^2 + 4x + 1$ không có cực trị.

Câu 14. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $ACB'D'$.

A. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

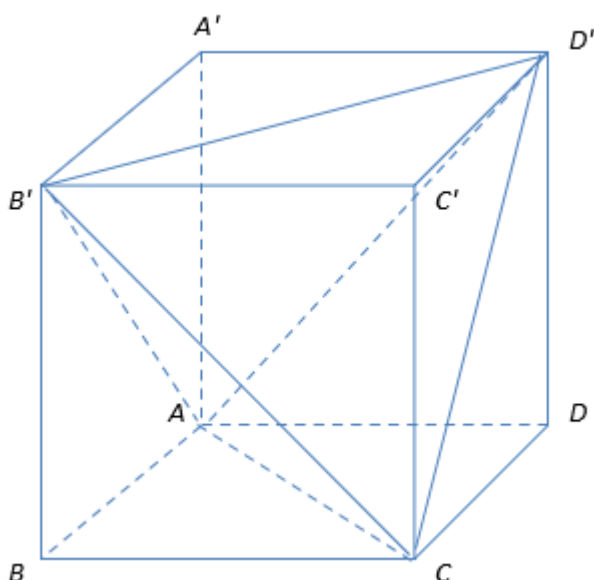
B. $\frac{a^3}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Thể tích khối lập phương $V = 2\sqrt{2}a^3$

$$V_{ACB'D'} = V - V_{B'.ABC} - V_{D'.ACD} - V_{C.C'BD} - V_{A.A'B'D'}$$

$$\text{Ta có } V_{A'.ABC} = \frac{1}{3} BB'.S_{\triangle ABC} = \frac{1}{6} BB'.S_{\triangle ABCD} = \frac{1}{6} V$$

$$\text{Do đó } V_{ACB'D'} = V - \frac{1}{6} V - \frac{1}{6} V - \frac{1}{6} V - \frac{1}{6} V = \frac{1}{3} V = \frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$$

Câu 15. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - mx$ có hai điểm cực trị, đồng thời nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$. Số phần tử của tập S là

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

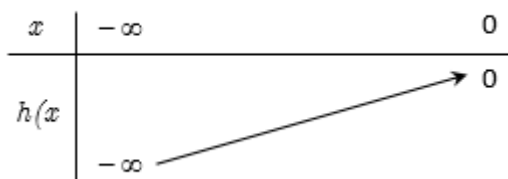
$$\text{Ta có } y' = -3x^2 + 6x - m.$$

Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - mx$ có hai điểm cực trị, đồng thời nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$

Khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $y' \leq 0, \forall x \in (-\infty; 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 3m > 0 \\ y' \leq 0, \forall x \in (-\infty; 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ -3x^2 + 6x - m \leq 0, \forall x \in (-\infty; 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m \geq -3x^2 + 6x, \forall x \in (-\infty; 0) \end{cases}$$

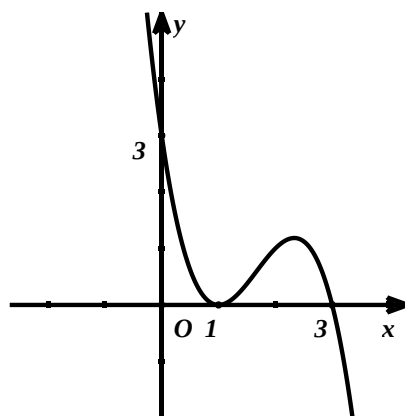
Xét hàm số $h(x) = -3x^2 + 6x$



$$m \geq -3x^2 + 6x, \forall x \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow m \geq 0. \text{ Do đó } 0 \leq m < 3$$

Vậy $S = \{0;1;2\}$

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $y = f(4 - 2^x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-1;0)$.

B. $(1;3)$.

C. $(0;+\infty)$.

D. $(0;1)$.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$; $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$

Xét hàm số $y = f(4 - 2^x)$ ta có $y' = -2^x \ln(2) \cdot f'(4 - 2^x)$.

Giải phương trình

$$y' = 0 \Leftrightarrow -2^x \ln(2) \cdot f'(4 - 2^x) = 0 \Leftrightarrow f'(4 - 2^x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2^x = 1 \text{ (nghiêm kép)} \\ 4 - 2^x = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 3 \\ 2^x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_2 3 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Hàm số $y = f(4 - 2^x)$ đồng biến khi $y' > 0 \Leftrightarrow -2^x \ln(2) \cdot f'(4 - 2^x) > 0 \Leftrightarrow f'(4 - 2^x) < 0$
 $\Leftrightarrow 4 - 2^x > 3 \Leftrightarrow 2^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$\log_2 3$	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$				$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0) \Rightarrow$ Hàm số $y = f(4 - 2^x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		1		0		$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x) = 2$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Số nghiệm của phương trình $f(x) = 2$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 2$.

Kẻ đường thẳng $y = 2$, ta có đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại một điểm nên phương trình $f(x) = 2$ có đúng 1 nghiệm.

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$							

Câu 18. Gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân (u_n) có công bội q khác 1.

Biết $S_8 = 257S_4$ và $u_3 = 32$. Tính u_1 .

A. 2.

B. 3.

C. 8.

D. 4.

Lời giải.

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Theo đề bài ta có } \begin{cases} S_8 = 257S_4 \\ u_3 = 32 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \frac{1-q^8}{1-q} = 257u_1 \frac{1-q^4}{1-q} \\ u_1 q^2 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-q^8 = 257(1-q^4) \\ u_1 q^2 = 32 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} q^8 - 257q^4 + 256 = 0 \\ u_1 q^2 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^4 = 256 \\ q^4 = 1 \\ u_1 q^2 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^2 = 16 \\ q^2 = 1 \\ u_1 q^2 = 32 \end{cases} . \end{aligned}$$

Mặt khác theo đề bài cấp số nhân (u_n) có công bội q khác 1 nên $q^2 = 16$. Với $q^2 = 16$ ta có $u_1 q^2 = 32 \Rightarrow 16u_1 = 32 \Leftrightarrow u_1 = 2$.

Câu 19. Có bao nhiêu số nguyên dương n sao cho S là một số có 1000 chữ số. Biết:
 $S = 2 + (C_1^0 + C_2^0 + \dots + C_n^0) + (C_1^1 + C_2^1 + \dots + C_n^1) + \dots + (C_{n-1}^{n-1} + C_n^{n-1}) + C_n^n$

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $S = 2 + (C_1^0 + C_1^1) + (C_2^0 + C_2^1 + C_2^2) + \dots + (C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n)$

Xét khai triển $(1+n)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$

Từ đó ta có: $S = 2 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2 + \frac{2(1-2^n)}{1-2} = 2 + 2(2^n - 1) = 2^{n+1}$

Để S là số có 1000 chữ số thì $10^{999} \leq 2^{n+1} < 10^{1000} \Leftrightarrow \log_2 10^{999} - 1 \leq n < \log_2 10^{1000} - 1 \Leftrightarrow 3317,6 \leq n < 3320,9$.

Do n là số nguyên dương $\Rightarrow n \in \{3318; 3319; 3320\}$.

Câu 20. Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_6(3.4^x + 2.9^x) = x + 1$ bằng

A. 1. B. 0. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_6(3.4^x + 2.9^x) = x + 1$

$\Leftrightarrow 3.4^x + 2.9^x = 6^{x+1} \Leftrightarrow 3.\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 6.\left(\frac{2}{3}\right)^x + 2 = 0 \quad (1)$

Đặt $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t, (t > 0)$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow 3t^2 - 6t + 2 = 0$

Hiển nhiên phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn

$t_1.t_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x_1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x_2} = \frac{2}{3} \Rightarrow x_1 + x_2 = 1$.

Câu 21. Phương trình $\log_{\sqrt{2}}(mx - 6x^3) + 2\log_{\frac{1}{2}}(-14x^2 + 29x - 2) = 0$ có 3 nghiệm thực phân biệt khi

A. $m < 19$. B. $19 < m < \frac{39}{2}$. C. $m > 39$. D. $19 < m < 39$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình tương đương

$$\log_2(mx - 6x^3) = \log_2(-14x^2 + 29x - 2) \Leftrightarrow \begin{cases} mx - 6x^3 = -14x^2 + 29x - 2 \\ -14x^2 + 29x - 2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 6x^2 - 14x + 29 - \frac{2}{x} \\ \frac{1}{14} < x < 2 \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = 6x^2 - 14x + 29 - \frac{2}{x}$ trên $\left(\frac{1}{14}; 2\right)$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{12x^3 - 14x^2 + 2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{3} (\text{loại}) \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{2}$	1	2	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	$\frac{3}{98}$	$\frac{39}{2}$	19	24	

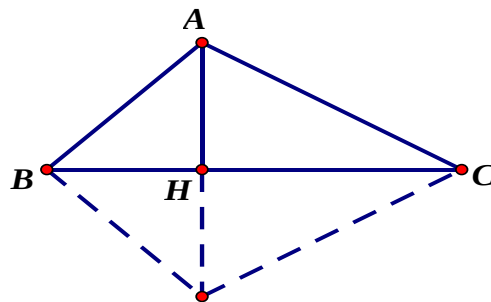
Phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(\frac{1}{14}; 2\right) \xrightarrow{BBT} 19 < m < \frac{39}{2}$

Câu 22. Cho tam giác ABC cân tại A , góc $BAC = 120^\circ$ và $AB = 4 \text{ cm}$. Tính thể tích khối tròn xoay lớn nhất có thể khi ta quay tam giác ABC quanh đường thẳng chứa một cạnh của nó.

- A. $16\sqrt{3}\pi \text{ (cm}^3\text{)}$. B. $16\pi \text{ (cm}^3\text{)}$. C. $\frac{16\pi}{\sqrt{3}} \text{ (cm}^3\text{)}$. D. $\frac{16\pi}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BC .

Quay đường gấp khúc BAC quanh trục BC thu được khối tròn xoay có hình dạng là hai khối nón đỉnh B và đỉnh C , chung đáy là đường tròn $(H; HA)$.

Xét khối nón (N_1) có đỉnh là B , đáy là đường tròn $(H; HA)$ có $V_{N_1} = \frac{1}{3}\pi.BH.AH^2$

Xét khối nón (N_2) có đỉnh là C , đáy là đường tròn $(H; HA)$ có $V_{N_2} = \frac{1}{3}\pi.CH.AH^2$

Vậy thể tích khối tròn xoay nhận được bằng: $V_{BC} = V_{N_1} + V_{N_2} = \frac{1}{3}\pi.AH^2.BC = \frac{4\pi S_{\triangle ABC}^2}{3.BC}$.

Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB^2 \sin 120^\circ = 4\sqrt{3}$.

Ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 120^\circ} = 4\sqrt{3}$.

Vậy $V_{BC} = \frac{4\pi S_{\triangle ABC}^2}{3.BC} = \frac{4\pi(4\sqrt{3})^2}{3.4\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}\pi}{3}$.

Tương tự $V_{AB} = V_{AC} = \frac{4\pi S_{\triangle ABC}^2}{3.AB} = \frac{4\pi(4\sqrt{3})^2}{3.4} = 16\pi$.

Vậy $V_{\max} = 16\pi$.

Câu 23. để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8)$ có hai nghiệm thực phân biệt là

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn A

Ta thấy $\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ (x-1)^2 = mx-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ f(x) = x^2 - (m+2)x + 9 = 0(*) \end{cases}$$

YCBT $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 + 4m - 32 > 0 \\ f(1) = -m + 8 > 0 \\ \frac{S}{2} = \frac{m+2}{2} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < -8 \\ m < 8 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < m < 8.$$

Vậy: $m \in \{5, 6, 7\}$.

Câu 24. Cho bất phương trình: $1 + \log_5(x^2 + 1) \geq \log_5(mx^2 + 4x + m)$ (1). Tìm tất cả các giá trị của m để (1) được nghiệm đúng với mọi số thực x .

A. $2 < m \leq 3$.

B. $-3 \leq m \leq 7$.

C. $m \in (-\infty; 3] \cup [7; +\infty)$.

D. $2 \leq m \leq 3$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $mx^2 + 4x + m > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $1 + \log_5(x^2 + 1) \geq \log_5(mx^2 + 4x + m) \Leftrightarrow \log_5(5x^2 + 5) \geq \log_5(mx^2 + 4x + m)$

$$\Leftrightarrow 5x^2 + 5 \geq mx^2 + 4x + m \Leftrightarrow (m-5)x^2 + 4x + m - 5 \leq 0$$

$$\text{Điều kiện bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 + 4x + m > 0, \forall x \in \mathbb{R} & (2) \\ (m-5)x^2 + 4x + m - 5 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} & (3) \end{cases}$$

$$\blacklozenge \text{ Giải (2); Do } m=0 \text{ không thỏa (2) nên } (2) \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 4 - m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2.$$

$$\blacklozenge \text{ Giải (3); Do } m=5 \text{ không thỏa (3) nên}$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} m-5 < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ 4 - (m-5)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ m \leq 3 \Leftrightarrow m \leq 3. \\ m \geq 7 \end{cases}$$

Suy ra $2 < m \leq 3$.

Câu 25. Một khối cầu có thể tích V đi qua đỉnh và đường tròn đáy của một khối nón có thiết diện qua trục là một tam giác đều. Tỉ số thể tích khối cầu và thể tích khối nón là

A. $\frac{32}{9}$.

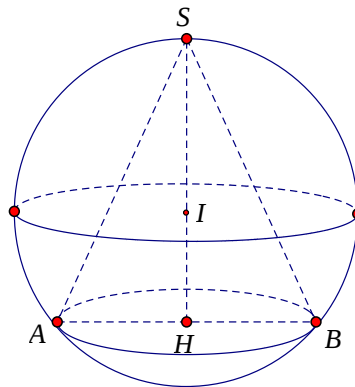
B. $\frac{9}{32}$.

C. $\frac{23}{32}$.

D. $\frac{32}{23}$.

Lời giải

Chọn A



Xét khối cầu và khối nón như hình vẽ

$$\text{Gọi độ dài cạnh } SA = x, \text{ ta có } SH = \frac{x\sqrt{3}}{2}, SI = \frac{x\sqrt{3}}{3}, AH = \frac{x}{2}$$

$$\text{Ta có } V_C = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{x\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{4\sqrt{3}\pi x^3}{27}; V_N = \frac{1}{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\pi \cdot x^3 \cdot \sqrt{3}}{24}.$$

$$\text{Vậy } \frac{V_C}{V_N} = \frac{32}{9}.$$

Câu 26. Một hình trụ có bán kính đáy bằng a . Cắt hình trụ bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng $\frac{a}{2}$ ta được thiết diện là một hình vuông. Tính thể tích khối trụ.

A. $3\pi a^3$.

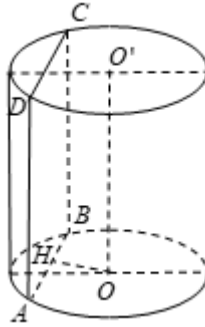
B. $\pi a^3 \sqrt{3}$.

C. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{4}$.

D. πa^3 .

Lời giải

Chọn B



Ta có $ABCD$ là hình vuông, H là trung điểm cạnh AB , khi đó ta có $OH = \frac{a}{2}; AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = a\sqrt{3} = BC$.

Vậy thể tích khối trụ bằng $V = a\sqrt{3} \cdot \pi \cdot a^2 = \pi a^3 \sqrt{3}$.

Câu 27. Cho tập hợp S gồm 20 số tự nhiên từ 1 đến 20. Lấy ngẫu nhiên ba số thuộc S , xác suất để ba số lấy được lập thành một cấp số cộng là

A. $\frac{5}{38}$.

B. $\frac{1}{114}$.

C. $\frac{3}{38}$.

D. $\frac{7}{38}$.

Lời giải

Chọn C

Số cách chọn 3 số trong 20 số là: $n(\Omega) = C_{20}^3$,

Gọi A là biến cố “ba số lấy được lập thành một cấp số cộng”

Giả sử ba số a, b, c số lập thành cấp số cộng $\Rightarrow a + c = 2b$

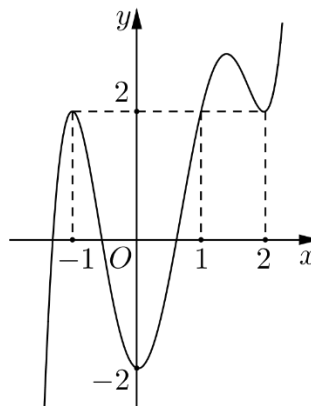
Do đó nếu ta chọn được 2 số bất kì a và c có tổng chẵn thì ta tìm được b .

TH1: Chọn được 2 số lẻ $\Rightarrow$ Số cách chọn là C_{10}^2

TH2: Chọn được 2 số chẵn $\Rightarrow$ Số cách chọn là C_{10}^2

$$\Rightarrow n(A) = 2 \cdot C_{10}^2. \text{ Vậy } P(A) = \frac{2 \cdot C_{10}^2}{C_{20}^3} = \frac{3}{38}.$$

Câu 28. Cho hàm số $y = f'(x-1)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = \pi^{2f(x)-4x}$ đạt cực tiểu tại điểm nào?

A. $x=1$.

B. $x=2$.

C. $x=0$.

D. $x=-1$.

Bản word phát hành trên website Tailieuchuan.vn

Lời giải

Chọn C.

Ta có $y' = [2f'(x) - 4] \cdot \pi^{2f(x)-4} \cdot \ln \pi$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2f'(x) - 4 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2.$$

Mặt khác ta có $f'(x-1) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (nghiệm bị chẵn)} \\ x = 1 \\ x = 2 \text{ (nghiệm bị chẵn)} \end{cases} \Rightarrow x-1 = 0 \text{ (ta chỉ lấy nghiệm bị lẻ)}.$

Do đó $f'(x) = 2 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$, tam giác SAB đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của AD .

Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCM) là

A. $\frac{3a\sqrt{2}}{8}$.

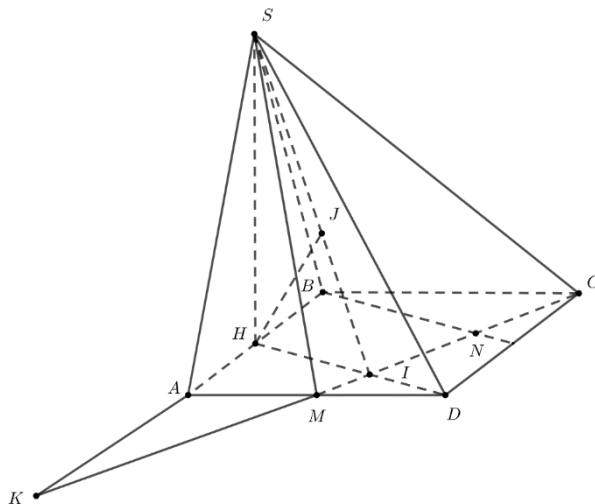
B. $a\sqrt{2}$.

C. $3a\sqrt{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A.



Kẻ $SH \perp AB$. Suy ra $SH = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ (đường cao của tam giác SAB đều).

Mặt khác $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \end{cases}$.

Do đó $SH \perp (ABCD)$.

Trong $(ABCD)$, $K = AB \cap CM$.

Kẻ $BN \perp KC$, $HI \perp KC$ do đó $BN \parallel HI$.

Kẻ $HJ \perp AI$.

Khi đó $HJ \perp (SCM) \Rightarrow d(H; (SCM)) = HJ$.

Xét tam giác KBC , ta có:

$$AM \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{BC} = \frac{KA}{KB} \Rightarrow \frac{KA}{KB} = \frac{1}{2} \Rightarrow KB = 2KA = 4a.$$

Xét tam giác KBC vuông tại B , đường cao BN , ta có:

$$\frac{1}{BN^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{BK^2} \Rightarrow BN = \frac{BC \cdot BK}{\sqrt{BC^2 + BK^2}} = \frac{2a \cdot 4a}{\sqrt{4a^2 + 16a^2}} = \frac{4a\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Ta lại có } BN \parallel HI \Rightarrow \frac{HI}{BN} = \frac{KH}{KB} \Rightarrow \frac{HI}{BN} = \frac{3}{4} \Rightarrow HI = \frac{3a\sqrt{5}}{5}.$$

Xét tam giác SHI vuông tại H , đường cao HJ , ta có:

$$\frac{1}{HJ^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HI^2} \Rightarrow HJ = \frac{HS \cdot HI}{\sqrt{HS^2 + HI^2}} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Mà } \frac{BK}{HK} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{d(B; (SCM))}{d(H; (SCM))} = \frac{4}{3} \Rightarrow d(B; (SCM)) = \frac{4}{3} \cdot d(H; (SCM)) = a\sqrt{2}.$$

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại đỉnh B . Biết $AB = BC = a\sqrt{3}$, $SAB = SCB = 90^\circ$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $12\pi a^2$.

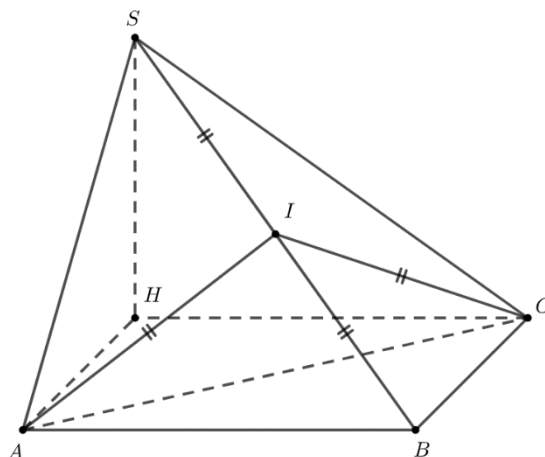
B. $8\pi a^2$.

C. $2\pi a^2$.

D. $16\pi a^2$.

Lời giải

Chọn A.



Kẻ $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp AB$.

Mà $SA \perp AB$. Do đó $AB \perp (SAH) \Rightarrow AB \perp AH \Rightarrow \angle BAH = 90^\circ$.

Chứng minh tương tự ta có $CB \perp CH \Rightarrow \angle BCH = 90^\circ$.

Mà $\angle ABC = 90^\circ$.

Suy ra $ABCH$ là hình chữ nhật.

Do đó $AH \parallel BC \Rightarrow AH \parallel (SBC) \Rightarrow d(A; (SBC)) = d(H; (SBC)) = a\sqrt{2}$.

Kẻ $HK \perp SC \Rightarrow HK \perp (SBC) \Rightarrow d(H; (SBC)) = HK \Rightarrow HK = a\sqrt{2}$.

Ta có $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HC^2} \Rightarrow \frac{1}{HS^2} = \frac{1}{HK^2} - \frac{1}{HC^2} = \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{3a^2}$.

Do đó $HK = a\sqrt{6}$.

Áp dụng định lí Pytago cho tam giác SHC , ta có:

$$SC^2 = SH^2 + HC^2 = 6a^2 + 3a^2 = 9a^2.$$

Suy ra $SC = 3a$.

Áp dụng định lí Pytago cho tam giác SCB , ta có:

$$SB^2 = SC^2 + BC^2 = 9a^2 + 3a^2 = 12a^2.$$

Suy ra $SB = 2a\sqrt{3}$.

Gọi I là trung điểm của SB , khi đó ta có $IS = IB = IA = IC = \frac{SB}{2} = a\sqrt{3}$.

Do đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Suy ra diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $S = 4\pi(a\sqrt{3})^2 = 12\pi a^2$.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
y	$-\infty$	3	0	$+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{7}{f(x^3 + 2x) + 1}$ là

A. 4

B. 1

C. 3

D. 2

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x^3 + x) + 1) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x^3 + x) + 1) = -\infty$

Do đó $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{7}{f(x^3 + 2x) + 1} = 0$. Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{7}{f(x^3 + 2x) + 1}$ có một đường tiệm cận

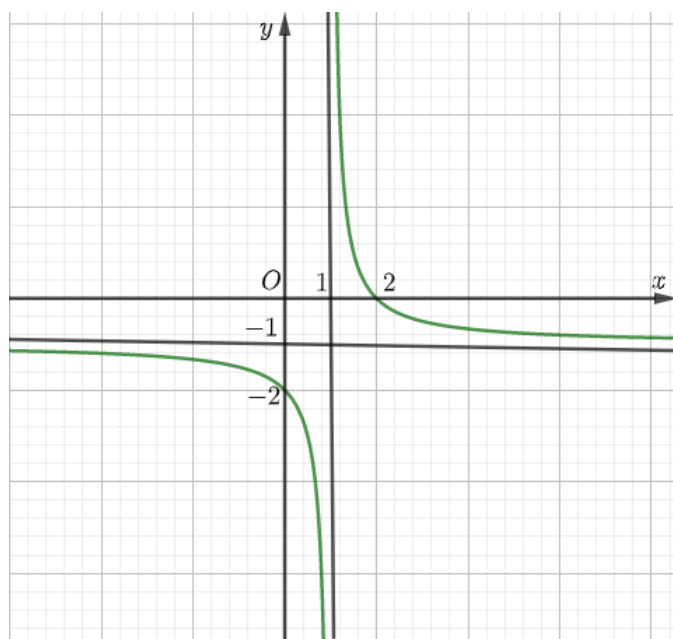
ngang là đường thẳng $y = 0$.

Xét phương trình $f(x^3 + x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x^3 + x) = -1 \Leftrightarrow x^3 + x = a, (a < -1) (*)$

Xét hàm số $g(x) = x^3 + x, g' = 3x^2 + 1 > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ mà $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ nên phương trình $x^3 + x = a$ có nghiệm duy nhất do đó đồ thị hàm số $y = \frac{7}{f(x^3 + 2x) + 1}$ có một đường tiệm cận đứng.

Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{7}{f(x^3 + 2x) + 1}$ là 2.

Câu 32. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx-1}$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Giá trị của tổng $a + b + c$ bằng

- A. 0 B. 4 C. 2 D. -2

Lời giải

Chọn C

Theo đồ thị của hàm số ta có:

Đồ thị có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1 \Rightarrow \frac{1}{c} = 1 \Rightarrow c = 1$.

Đồ thị có đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -1 \Rightarrow \frac{a}{c} = -1 \Rightarrow a = -c \Rightarrow a = -1$.

Đồ thị cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 2 nên $2a + b = 0 \Rightarrow b = 2$.

Vậy $a + b + c = -1 + 1 + 2 = 2$

Câu 33. Cho ba số thực $a, b, c \in \left(\frac{1}{4}; 1\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức

$$P = \log_a \left(b - \frac{1}{4}\right) + \log_b \left(c - \frac{1}{4}\right) + \log_c \left(a - \frac{1}{4}\right)$$

- A. $P_{\min} = 3$. B. $P_{\min} = 3\sqrt{3}$. C. $P_{\min} = 6$. D. $P_{\min} = 1$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \forall a \in \left(\frac{1}{4}; 1\right)$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{1}{2}$.

Nên $a^2 \geq a - \frac{1}{4}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{1}{2}$.

Tương tự $b^2 \geq b - \frac{1}{4}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $b = \frac{1}{2}$

$c^2 \geq c - \frac{1}{4}$ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $c = \frac{1}{2}$.

Vì $a, b, c \in (0; 1)$ nên $\log_a b > 0, \log_b c > 0, \log_c a > 0$

Do đó với cơ số thuộc $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$ thì $P \geq \log_a b^2 + \log_b c^2 + \log_c a^2 = 2(\log_a b + \log_b c + \log_c a)$

Suy ra $P \geq 2.3\sqrt[3]{\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a} = 6$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = b = c = \frac{1}{2} \\ \log_a b = \log_b c = \log_c a \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{2}$.

Vậy $P_{\min} = 6$ khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Câu 34. Cho 3 số a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số nhân với công bội khác 1. Biết cũng theo thứ tự đó chúng lần lượt là số thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng công sai là d , ($d \neq 0$). Tính $\frac{a}{d}$.

- A. 3. B. $\frac{4}{9}$. C. $\frac{4}{3}$. D. 9.

Lời giải

Chọn A.

Do a, b, c theo thứ tự lần lượt là số thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng công sai là d , ($d \neq 0$) nên $\begin{cases} b = a + 3d \\ c = a + 7d \end{cases}$.

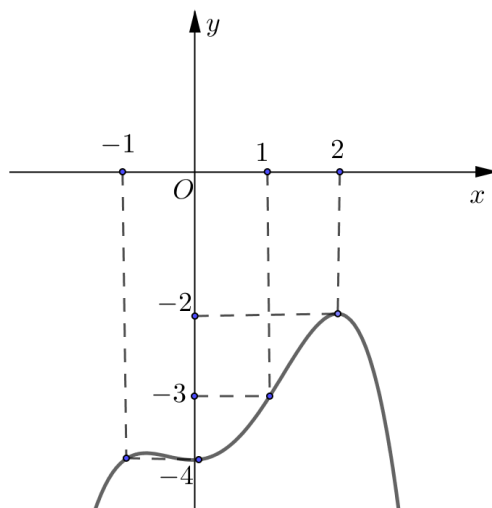
Hơn nữa a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số nhân với công bội khác 1 nên $ac = b^2$.

Khi đó $a(a + 7d) = (a + 3d)^2 \Leftrightarrow a^2 + 7ad = a^2 + 6ad + 9d^2$

$\Leftrightarrow 9d^2 - ad = 0 \Leftrightarrow 9d = a \Leftrightarrow \frac{a}{d} = 9$ (Do $d \neq 0$).

Vậy $\frac{a}{d} = 9$.

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $9.6^{f(x)} + (4 - f^2(x)).9^{f(x)} \leq (-m^2 + 5m).4^{f(x)}$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ là

- A. 9. B. 4. C. 5. D. 10.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $9.6^{f(x)} + (4 - f^2(x)).9^{f(x)} \leq (-m^2 + 5m).4^{f(x)}$

$$\Leftrightarrow (4 - f^2(x)).\left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)} + 9.\left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)} \leq -m^2 + 5m \quad (1)$$

Từ đồ thị hàm số suy ra $f(x) \leq -2, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Do đó } (4 - f^2(x)).\left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)} \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } 9.\left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)} \leq 9.\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = 4, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Suy ra } (4 - f^2(x)).\left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)} + 9.\left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)} \leq 4, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = -2$ (khi đó $f(2) = -2$) nên giá trị lớn nhất của hàm số

$$g(x) = (4 - f^2(x)).\left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)} + 9.\left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)} \text{ là } 4.$$

Vậy (1) có nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $4 \leq -m^2 + 5m \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 4$.

Do m là số nguyên nên $m \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Suy ra tổng các giá trị m là $S = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

Câu 36. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 - (m-6)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$ là.

- A. $(-\infty; 3)$. B. $[3; 6]$. C. $(-\infty; 6]$. D. $(-\infty; 3]$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $y' = 3x^2 - 2mx - (m-6)$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 4)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (0; 4)$.

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2mx - (m-6) \geq 0 \quad \forall x \in (0; 4) \Leftrightarrow \frac{3x^2 + 6}{2x+1} \geq m \quad \forall x \in (0; 4)$$

Xét hàm số $g(x) = \frac{3x^2 + 6}{2x+1}$ trên $(0; 4)$.

$$g'(x) = \frac{6x^2 + 6x - 12}{(2x+1)^2}, \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in (0; 4) \\ x = -2 \notin (0; 4) \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	0	1	4
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	6	3	$\frac{54}{13}$

Vậy để $g(x) = \frac{3x^2 + 6}{2x+1} \geq m \quad \forall x \in (0; 4)$ thì $m \leq 3$.

Vậy $m \in (-\infty; 3]$.

Câu 37. Tính tổng các hệ số của các lũy thừa lẻ của x trong khai triển:

$$P(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{100})(1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^{100})$$

A. 1.

B. 2^{100} .

C. 0.

D. 2^{99} .

Lời giải

Chọn C

$$\text{Giả sử } P(x) = a_{200}x^{200} + a_{199}x^{199} + \dots + a_1x + a_0.$$

$$\text{Ta có: } P(1) = a_{200} + a_{199} + \dots + a_1 + a_0 = 101.$$

$$P(-1) = a_{200} - a_{199} + a_{198} - a_{197} + \dots + a_2 - a_1 + a_0 = 101.$$

$$\text{Suy ra: } a_{199} + a_{197} + \dots + a_1 = \frac{1}{2}[P(1) - P(-1)] = 0.$$

Vậy tổng các hệ số của các lũy thừa lẻ của x bằng 0.

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, $SA \perp (ABC)$. Mặt phẳng (SBC) cách A một khoảng bằng a và hợp với mặt phẳng (ABC) góc 30° . Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{8a^3}{9}$.

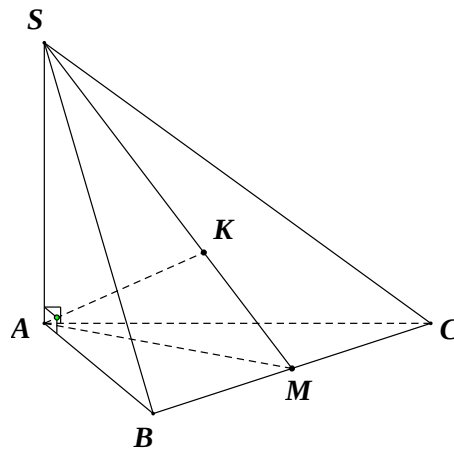
B. $\frac{8a^3}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

D. $\frac{4a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của BC , trong (SAM) kẻ $AK \perp SM$ tại K .

Suy ra $AK \perp (SBC) \Rightarrow AK = d(A; (SBC)) = a$.

Lại có $(SBC), (ABC) = SMA = 30^\circ$. Suy ra $AM = \frac{AK}{\sin \angle AMK} = 2a$; $SA = \frac{AK}{\sin \angle ASK} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Suy ra $BC = AM \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4a}{\sqrt{3}}$.

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\left(\frac{4a}{\sqrt{3}}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{8a^3}{9}.$$

Câu 39. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $\log_9 a = \log_{16} b = \log_{12} \frac{5b-a}{2}$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ bằng

A. $\frac{a}{b} = -1 + \sqrt{6}$.

B. $\frac{a}{b} = 7 - 2\sqrt{6}$.

C. $\frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{6}}{5}$.

D. $\frac{a}{b} = \frac{7 + 2\sqrt{6}}{25}$.

Lời giải

Chọn B

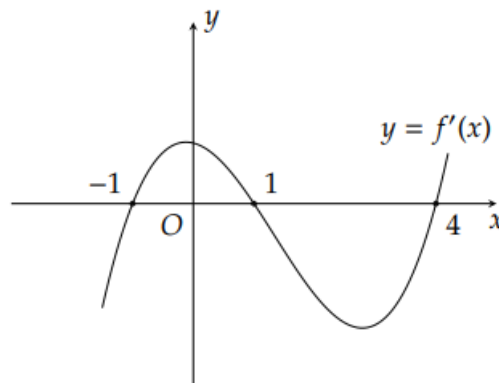
$$\text{Đặt } \log_9 a = \log_{16} b = \log_{12} \frac{5b-a}{2} = t \Rightarrow \begin{cases} a = 9^t \\ b = 16^t \\ \frac{5b-a}{2} = 12^t \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } 5 \cdot 16^t - 9^t = 2 \cdot 12^t \Leftrightarrow 5 - \left(\frac{9}{16}\right)^t = 2 \cdot \left(\frac{12}{16}\right)^t$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{2t} + 2\left(\frac{3}{4}\right)^t - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^t = -1 + \sqrt{6} \\ \left(\frac{3}{4}\right)^t = -1 - \sqrt{6} \end{cases} \quad (L)$$

$$\text{Mà } \frac{a}{b} = \left(\frac{9}{16}\right)^t = \left(\frac{3}{4}\right)^{2t} = (-1 + \sqrt{6})^2 = 7 - 2\sqrt{6}.$$

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số bậc ba $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới



Hàm số $g(x) = e^{f(2x-1)}$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-1; 1)$.

B. $(-1; +\infty)$.

C. $(0; 2)$.

D. $(0; 1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = 2f'(2x-1)e^{f(2x-1)}$.

$$\text{Suy ra } g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(2x-1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 > 4 \\ -1 < 2x-1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ 0 < x < 1 \end{cases}.$$

Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(0; 1)$ và $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

Câu 41. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $2 \leq x \leq 2021$ và $2^y - \log_2(x + 2^{y-1}) = 2x - y$?

A. 9.

B. 10.

C. 2022.

D. 2021.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$2^y - \log_2(x + 2^{y-1}) = 2x - y \Leftrightarrow 2^{y+1} - \log_2\left(\frac{2x + 2^y}{2}\right) = 2x + 2^y - y$$

$$\Leftrightarrow 2^{y+1} + (y+1) = \log_2(2x + 2^y) + 2x + 2^y \quad (*)$$

Xét hàm số $f(u) = 2^u + u$, ta có $f'(u) = 2^u \ln 2 + 1 > 0, \forall u \Rightarrow$ Hàm số $f(u) = 2^u + u$ đồng biến do đó từ $(*)$ ta có $y+1 = \log_2(2x + 2^y) \Leftrightarrow 2^{y+1} = 2x + 2^y \Leftrightarrow 2^y = 2x$.

Mặt khác theo giả thiết $2 \leq x \leq 2021 \Leftrightarrow 4 \leq 2x \leq 4042 \Rightarrow 4 \leq 2^y \leq 4042 \Leftrightarrow 2 \leq y \leq \log_2 4042$.

Do y là số nguyên nên $y \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\} \Rightarrow$ có 10 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(13x-15)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)$

A. 2.

B. 4.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$y' = \left(\frac{5x}{x^2+4}\right)' \cdot f'\left(\frac{5x}{x^2+4}\right) = \frac{5(x^2+4) - 5x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} \left(\frac{5x}{x^2+4}\right)^2 \left(\frac{5x}{x^2+4} - 1\right) \left(13 \cdot \frac{5x}{x^2+4} - 15\right)^3$$

$$= \frac{-5x^2 + 20}{(x^2+4)^2} \left(\frac{5x}{x^2+4}\right)^2 \left(\frac{5x - x^2 - 4}{x^2+4}\right) \left(\frac{65x - 15x^2 - 60}{x^2+4}\right)^3$$

$$= \frac{5(2-x)(2+x)}{(x^2+4)^2} \cdot \frac{(5x)^2}{(x^2+4)^2} \cdot \frac{(x-1)(4-x)}{x^2+4} \cdot \frac{(3-x)^3(15x-20)^3}{(x^2+4)^3}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 4 \\ x = 3 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Do phương trình $y' = 0$ có 6 nghiệm đơn và 1 nghiệm kép nên hàm số $y = f\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)$ có 6 điểm cực trị.

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, cạnh SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng 2. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) . Tính $\cos \alpha$ khi thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất.

A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

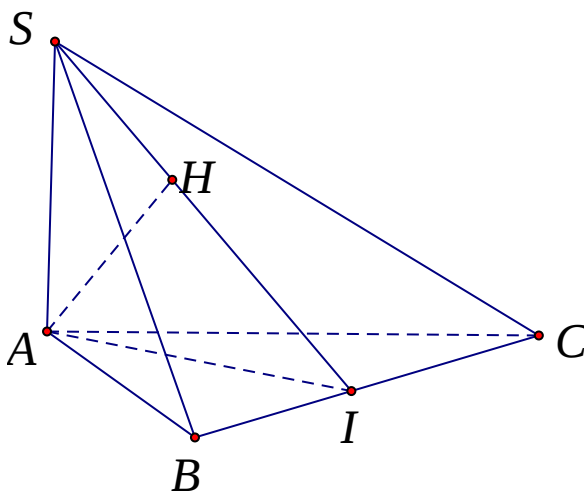
B. $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm BC . Ta có $BC \perp (SAI)$ nên mp (SBC) vuông góc mp (SAI) theo giao tuyến SI . Kẻ $AH \perp SI$ tại H thì $AH \perp (SBC)$ hay $AH = d(A, (SBC))$. Ta cũng có góc tạo bởi (SBC) và (ABC) là SIA . Theo giả thiết $AH = 2$ và $\alpha = SIA$.

Lại có $AI = \frac{AH}{\sin SIA} = \frac{2}{\sin \alpha}$, mặt khác $\frac{AB\sqrt{3}}{2} = AI$ hay $AB = \frac{2AI}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3} \sin \alpha}$

$SA = AI \cdot \tan \alpha = \frac{2}{\cos \alpha}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} \cdot SA = \frac{1}{12} \cdot \frac{16\sqrt{3}}{3 \sin^2 \alpha} \cdot \frac{2}{\cos \alpha} = \frac{8\sqrt{3}}{9 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha}.$$

V nhỏ nhất khi $P = \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha$ lớn nhất.

Ta có $P = (1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha = -\cos^3 \alpha + \cos \alpha$. Đặt $t = \cos \alpha$. Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $t \in (0; 1)$.

Xét hàm số $f(t) = -t^3 + t$, $t \in (0; 1)$ ta có $f'(t) = -3t^2 + 1$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$			$\frac{3\sqrt{3}-1}{3\sqrt{3}}$	

Vậy V nhỏ nhất khi $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 44. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 5$ có hệ số góc nhỏ nhất thì phương trình là

A. $y = 3x + 12$.

B. $y = 3x + 3$.

C. $y = 3x + 6$.

D. $y = 3x + 9$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 5$ có $y' = 3x^2 - 6x + 6$.

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ x_0 là $k = 3x_0^2 - 6x_0 + 6 = 3(x_0 - 1)^2 + 3 \geq 3$.

Đẳng thức xảy ra khi $x_0 = 1$, khi đó $k = 3$, tiếp điểm là $(1; 9)$.

Vậy phương trình tiếp tuyến là $y = 3(x - 1) + 9$ hay $y = 3x + 6$.

Câu 45. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy $AB = a$. Trên cạnh BB' lấy điểm M sao cho $B'M = 2BM$. Biết $A'M \perp B'C$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$

A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

B. $\frac{3a^3}{8}$.

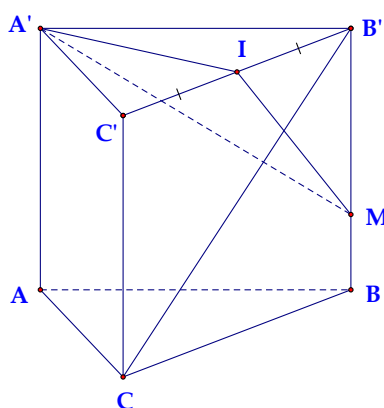
C. $\frac{3a^3}{4}$.

D. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{16}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Gọi I là trung điểm của $B'C'$.



Ta có $\begin{cases} A'I \perp B'C' \\ A'I \perp BB' \end{cases} \Rightarrow A'I \perp (BCC'B') \Rightarrow A'I \perp B'C.$

Lại có $B'C \perp A'M$ nên $B'C \perp (A'MI)$ suy ra $B'C \perp MI.$

Khi đó $\overrightarrow{B'C} \cdot \overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'B}) \cdot (\overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'I}) = 0$

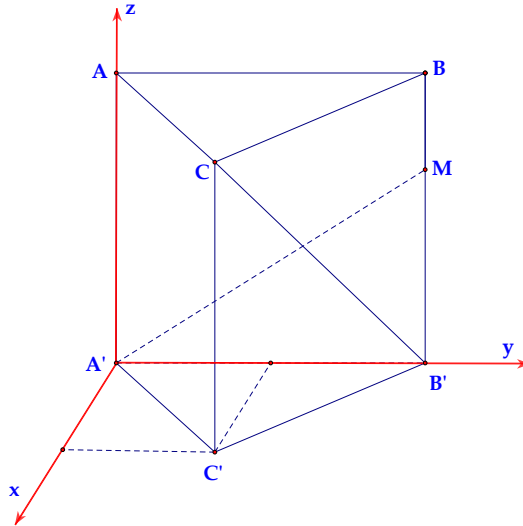
$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'B}) \cdot \left(-\frac{2}{3} \overrightarrow{B'B} + \frac{1}{2} \overrightarrow{B'C'} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} B'C'^2 - \frac{2}{3} B'B^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} a^2 - \frac{2}{3} B'B^2 = 0 \Leftrightarrow B'B^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow B'B = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Thể tích khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'} = BB' \cdot S_{ABC} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3}{8}.$

Cách 2: Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Chọn $a = 2$ và đặt $AA' = 3x$, với $x > 0$.



Ta có $A'(0;0;0), B'(2;0;0), C'(\sqrt{3};1;0), C(\sqrt{3};1;3x); M(2;1;2x).$

Suy ra $\overrightarrow{A'M} = (2;1;2x); \overrightarrow{B'C} = (\sqrt{3};-1;3x).$

Theo đề bài $A'M \perp B'C \Leftrightarrow \overrightarrow{A'M} \cdot \overrightarrow{B'C} = 0 \Leftrightarrow -2 + 6x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

Do vậy $AA' = 3x = \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$

Thể tích khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{ABC} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3}{8}.$

Câu 46. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a . Mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với SC , cắt cạnh SB tại B' với $\frac{SB'}{SB} = \frac{2}{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}.$

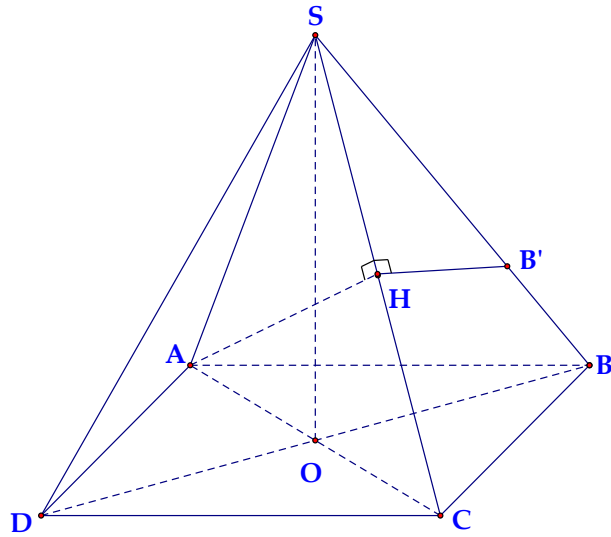
B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}.$

C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}.$

D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}.$

Lời giải

Chọn D



Trong mặt phẳng (SAC) vẽ $AH \perp SC$ tại H .

Trong mặt phẳng (SBC) , qua H dựng $HB' \perp SC$ với $B' \in SB$.

Cách 1: Đặt $SA = SB = SC = SD = x, x > 0$ suy ra $SB' = \frac{2}{3}x$.

$$\text{Ta có } \cos BSC = \frac{BS^2 + CS^2 - BC^2}{2BS \cdot CS} = \frac{2x^2 - a^2}{2x^2} \text{ suy ra } SH = SB' \cdot \cos BSC = \frac{(2x^2 - a^2) \cdot x}{3x}.$$

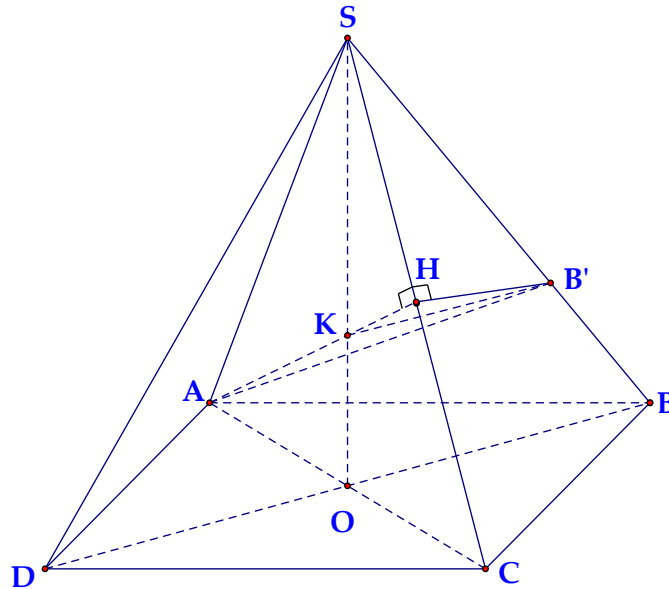
$$\text{Lại có } \cos ASH = \frac{SH}{SA} = \frac{AS^2 + CS^2 - AC^2}{2AS \cdot CS} \Leftrightarrow \frac{2x^2 - a^2}{3x^2} = \frac{x^2 - a^2}{x^2}.$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - a^2 = 3(x^2 - a^2) \Leftrightarrow x^2 = 2a^2 \Rightarrow x = a\sqrt{2}$$

$$\text{Khi đó } SO = \sqrt{SC^2 - CO^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Thể tích khối chóp là } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}.$$

Cách 2: Gọi $K = AH \cap SO$.



$$\left. \begin{array}{l} (P) \perp SC \\ BO \perp SC \\ BO \not\subset (P) \end{array} \right\} \Rightarrow BO \parallel (P) \text{ mà } (SBO) \cap (P) = KB' \Rightarrow KB' \parallel BO \Rightarrow \frac{SK}{SO} = \frac{SB'}{SB} = \frac{2}{3}.$$

Suy ra K là trọng tâm tam giác SAC nên AH vừa là trung tuyến vừa là đường cao.

$$\text{Từ đó ta được } \triangle ASC \text{ cân tại } A \text{ do vậy } \triangle SAC \text{ đều} \Rightarrow SO = \frac{AC\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Thể tích khối chóp là } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}.$$

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SC = 2, \angle BCS = 45^\circ$; góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng 90° ; góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $V = \frac{\sqrt{2}}{15}$

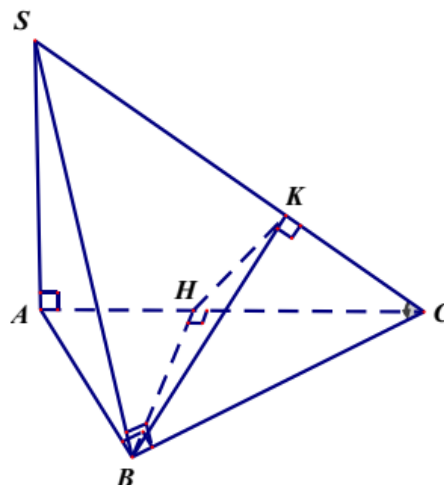
B. $V = 2\sqrt{3}$

C. $V = 2\sqrt{2}$

D. $V = \frac{2\sqrt{3}}{15}$

Lời giải

Chọn D



$$\text{Giả sử } CE \perp SB \text{ mà } (SAB) \perp (SBC) \Rightarrow CE \perp (SAB) \Rightarrow \begin{cases} CE \perp SA \\ CE \perp AB \end{cases}$$

Ta lại có: $SA \perp (ABC)$ nên $CE \equiv CB$.

Kẻ $BH \perp AC, HK \perp SC$

Ta có $BH \perp AC, BH \perp SA \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC \Rightarrow SC \perp (BHK) \Rightarrow SC \perp BK$

Từ đó ta có $[(SAC), (SBC)] = (KH, KB) = BKH = 60^\circ$

Ta có ΔSBC vuông cân tại $B \Rightarrow SB = BC = \sqrt{2}$.

Ta có ΔKBC vuông cân tại $K \Rightarrow KB = KC = 1$.

Từ đó ta suy ra $HK = \frac{1}{2}; BH = \frac{\sqrt{3}}{2}; HC = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Xét ΔABC ta có $HC.AC = BC^2 \Rightarrow AC = \frac{BC^2}{HC} = \frac{4}{\sqrt{5}}$

Ta có: $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot \frac{1}{2} BH \cdot AC = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{3}}{15}$

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ là hình bình hành. Hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của AB và

SC . Hai đường thẳng AN, MN lần lượt cắt mặt phẳng (SBD) tại I và K . Gọi V là thể tích

khối chóp $S.ABCD$ và V' là thể tích khối tứ diện $CNIK$. Tỉ số $\frac{V'}{V}$ bằng

A. $\frac{1}{24}$.

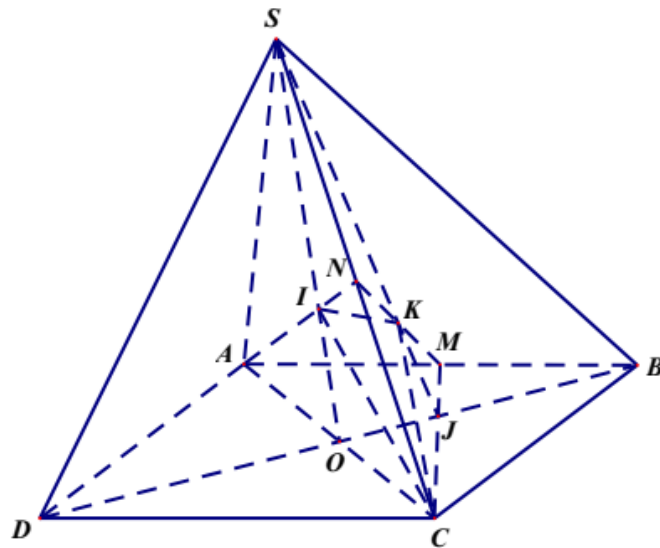
B. $\frac{1}{48}$.

C. $\frac{1}{36}$.

D. $\frac{1}{18}$.

Lời giải

Chọn B



Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $O = AC \cap BD; J = CM \cap BD$.

Trong mặt phẳng (SAC) gọi $I = SO \cap AN, SO \subset (SBD) \Rightarrow I = AN \cap (SBD)$.

Trong mặt phẳng (SCM) gọi $K = MN \cap SJ, SJ \subset (SBD) \Rightarrow K = MN \cap (SBD)$.

$$\text{Ta có } \frac{V_{C.NIK}}{V_{S.NIK}} = \frac{CN}{SN} = 1 \Rightarrow V_{C.NIK} = V_{S.NIK}.$$

$$\text{Ta lại có: } \frac{V_{S.NIK}}{V_{S.COJ}} = \frac{SI}{SO} \cdot \frac{SN}{SC} \cdot \frac{SK}{SJ}$$

$$\text{Ta có } I \text{ là trọng tâm tam giác } SAC \Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Ta có } N \text{ là trung điểm } SC \Rightarrow \frac{SN}{SC} = \frac{1}{2}.$$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác SCJ với 3 điểm N, K, M thẳng hàng nằm trên 3 cạnh

$$\text{của cho tam giác } SCJ, \text{ ta có: } \frac{KS}{KJ} \cdot \frac{MJ}{MC} \cdot \frac{NC}{NS} = 1 \Rightarrow \frac{KS}{KJ} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = 1 \Rightarrow \frac{KS}{KJ} = 3 \Rightarrow \frac{SK}{SJ} = \frac{3}{4}$$

$$(\text{Ta có } J \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \Rightarrow \frac{MJ}{MC} = \frac{1}{3}.)$$

$$\text{Ta suy ra } \frac{V_{S.NIK}}{V_{S.COJ}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{S.NIK} = \frac{1}{4} V_{S.COJ} \Rightarrow V_{C.NIK} = \frac{1}{4} V_{S.COJ}.$$

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.COJ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{S_{COJ}}{S_{ABCD}}$$

$$\text{Ta có: } S_{COJ} = \frac{1}{2} d(J; AC) \cdot CO = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} d(B; AC) \cdot \frac{1}{2} AC = \frac{1}{6} S_{ABC} = \frac{1}{12} S_{ABCD}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{S.COJ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{12} \Rightarrow V_{S.COJ} = \frac{1}{12} V_{S.ABCD} \Rightarrow V_{C.NIK} = \frac{1}{48} V_{S.ABCD}$$

$$\text{Vậy } \frac{V'}{V} = \frac{1}{48}$$

Câu 49. Cho $a > 0, a \neq 1$ và hai số thực dương b, c thỏa mãn $\log_a b = 3$ và $\log_a c = -2$, Tính

giá trị của biểu thức $P = \log_a \frac{a^2 \sqrt[3]{b}}{c^5}$.

A. $P = 9$.

B. $P = -2$.

C. $P = -7$.

D. $P = 13$.

Lời giải

Chọn D

$$P = \log_a \frac{a^2 \sqrt[3]{b}}{c^5} = \log_a a^2 + \log_a \sqrt[3]{b} - \log_a c^5 = 2 + \frac{1}{3} \log_a b - 5 \log_a c = 2 + \frac{1}{3} \cdot 3 - 5(-2) = 13.$$

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = b$ và cạnh bên $SA = c$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M là một điểm trên cạnh SA sao cho

$AM = x$, $0 < x < c$. Tìm x để mặt phẳng (MBC) chia khối chóp thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau.

A. $x = \frac{(\sqrt{5}-1)ab}{2c}$.

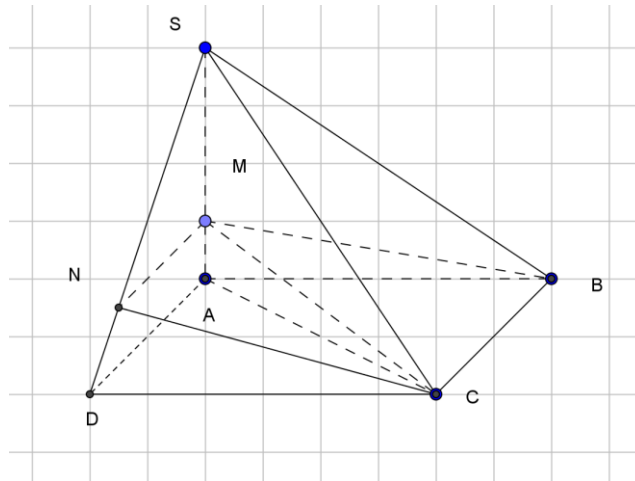
B. $x = \frac{(2-\sqrt{3})ab}{2c}$.

C. $x = \frac{(3-\sqrt{2})c}{2}$.

D. $x = \frac{(3-\sqrt{5})c}{2}$.

Lời giải

Chọn D



$$\begin{cases} M \in (MBC) \cap (SAD) \\ AD // BC \end{cases} \Rightarrow (MBC) \cap (SAD) = MN, MN // AD, MN \cap SD = N.$$

Mặt phẳng (MBC) chia khối chóp thành hai khối đa diện là khối chóp $S.MNBC$ và khối $MNBCAD$.

$$V_{S.MNBC} = V_{S.MBC} + V_{S.MCN}.$$

$$\frac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{MA}{SA} \Rightarrow V_{S.MBC} = \frac{(c-x)}{c} \cdot V_{S.ABC};$$

$$\frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ADC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SD} \Rightarrow V_{S.MNC} = \left(\frac{c-x}{c}\right)^2 \cdot V_{S.ADC} = \left(\frac{c-x}{c}\right)^2 \cdot V_{S.ABC}$$

$$V_{S.MNBC} = \frac{c-x}{c} \left[1 + \frac{c-x}{c} \right] \cdot V_{S.ABC}.$$

Theo bài ra ta có

$$V_{S.MNBC} = V_{S.ABC} = \left(\frac{c-x}{c}\right) \left[1 + \frac{c-x}{c} \right] \cdot V_{S.ABC} = V_{S.ABC} \Leftrightarrow (c-x)(2c-x) = c^2 \Leftrightarrow x^2 - 3cx + c^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}c \\ x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}c \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}c \left(\text{do } \frac{x}{c} < 1 \right)$$