

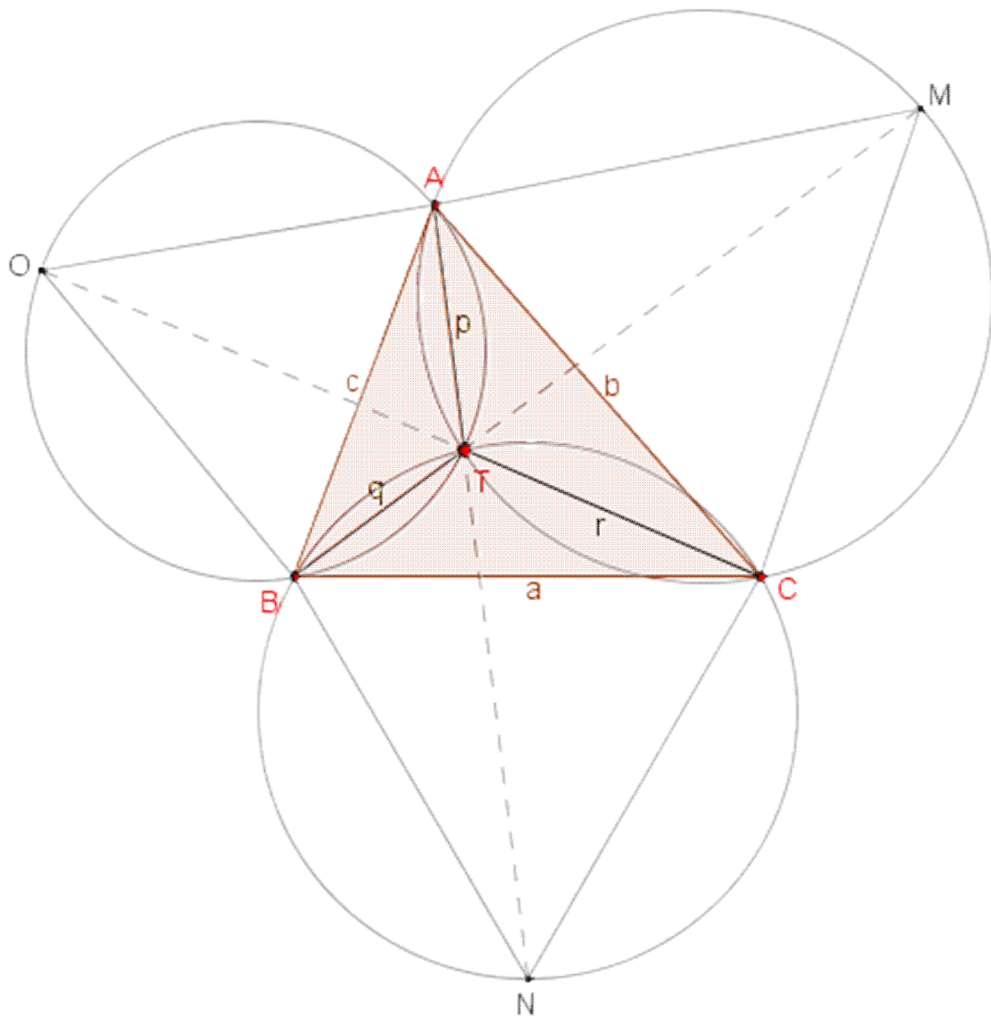
CHUYÊN ĐỀ

SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC

GIẢI BÀI TOÁN TÌM GTLN - GTNN MÔĐUN SỐ PHỨC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Điểm Torricelli:** Cho tam giác ABC có góc lớn nhất không quá 120° . Điểm Torricelli của tam giác ABC là điểm T nằm trong ABC và có tổng 3 cạnh $TA+TB+TC = p+q+r$ nhỏ nhất. Để tìm ra điểm này, ta dựng 3 tam giác đều ACM , BCN , ABO : giao điểm của 3 đường tròn ngoại tiếp của 3 tam giác đều này (hoặc giao điểm của AN , BM , CO) chính là điểm Torricelli mà chúng ta cần tìm.

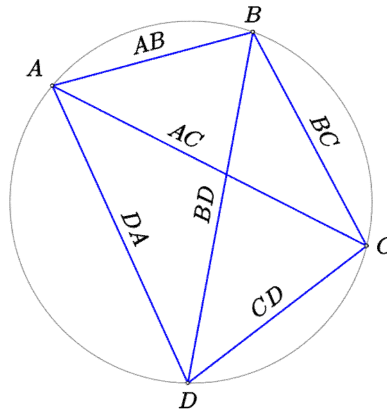


- Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:** Với hai dãy số thực $a_1, a_2, \dots, a_m$ và $b_1, b_2, \dots, b_m$ ta luôn có bất đẳng thức sau

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_m^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_m^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_mb_m)^2$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_m}{b_m}$$

3. **Định lý Ptoleme** hay **đẳng thức Ptoleme** là một đẳng thức trong hình học Euclid miêu tả quan hệ giữa độ dài bốn cạnh và hai đường chéo của một tứ giác nội tiếp. Định lý này mang tên nhà toán học và thiên văn học người Hy Lạp cổ đại Ptolemy (tức Claudius Ptolemaeus).

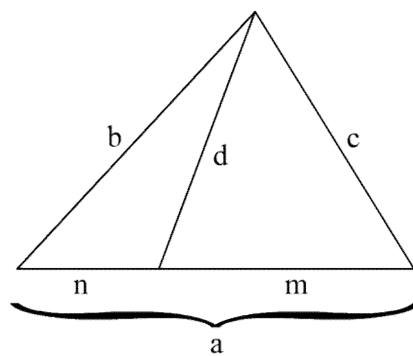


Nếu A, B, C, và D là 4 đỉnh của tứ giác nội tiếp đường tròn thì: $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$

4. **Bất đẳng thức Ptoleme** là trường hợp tổng quát của định lý Ptoleme đối với một tứ giác bất kỳ.

Nếu $ABCD$ là tứ giác bất kỳ thì $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tứ giác nội tiếp trong một đường tròn.

5. **Định lý Stewart:** Gọi a, b, và c là độ dài các cạnh của 1 tam giác. Gọi d là độ dài của đoạn thẳng nối từ 1 đỉnh của tam giác với điểm nằm trên cạnh (ở đây là cạnh có độ dài là a) đối diện với đỉnh đó.



Đoạn thẳng này chia cạnh a thành 2 đoạn có độ dài m và n, định lý Stewart nói rằng:

$$b^2 m + c^2 n = a(d^2 + mn)$$

B. BÀI TẬP

Câu 1: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 3i| = 1$. Giá trị lớn nhất của $|\bar{z} + 1 + i|$ là

A. $\sqrt{13} + 2$.

B. 4.

C. 6.

D. $\sqrt{13} + 1$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $z = x + yi$ ta có $z - 2 - 3i = x + yi - 2 - 3i = (x - 2) + (y - 3)i$.

Theo giả thiết $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ nên điểm M biểu diễn cho số phức z nằm trên đường tròn tâm $I(2; 3)$ bán kính $R = 1$.

Ta có $|\bar{z} + 1 + i| = |x - yi + 1 + i| = |(x + 1) - (y - 1)i| = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2}$.

Gọi $M(x; y)$ và $H(-1; 1)$ thì $HM = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2}$.

Do M chạy trên đường tròn, H cố định nên MH lớn nhất khi M là giao của HI với đường tròn.

Phương trình $HI: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$, giao của HI và đường tròn ứng với t thỏa mãn: $9t^2 + 4t^2 = 1$

$\Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{\sqrt{13}}$ nên $M\left(2 + \frac{3}{\sqrt{13}}; 3 + \frac{2}{\sqrt{13}}\right), M\left(2 - \frac{3}{\sqrt{13}}; 3 - \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$.

Tính độ dài MH ta lấy kết quả $HM = 1 + \sqrt{13}$.

Câu 2: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 4| + |z + 4| = 10$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ lần lượt là.

A. 10 và 4.

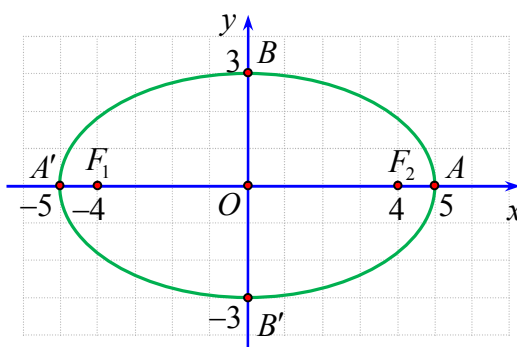
B. 5 và 4.

C. 5 và 3.

D. 4 và 3

Lời giải

Chọn C



Gọi $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$. Theo giả thiết, ta có $|z - 4| + |z + 4| = 10$

$\Leftrightarrow |(x - 4) + yi| + |(x + 4) + yi| = 10 \Leftrightarrow \sqrt{(x - 4)^2 + y^2} + \sqrt{(x + 4)^2 + y^2} = 10$ (*)

Gọi $M(x; y)$, $F_1(-4; 0)$ và $F_2(4; 0)$

Khi đó (*) $\Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 10$ nên tập hợp các

điểm $M(z)$ là đường elip (E) .

Ta có $c = 4$, $2a = 10 \Leftrightarrow a = 5$ và $b^2 = a^2 - c^2 = 9$

Do đó, phương trình chính tắc của (E) là $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Vậy $\max|z| = OA = OA' = 5$ và $\min|z| = OB = OB' = 3$

Câu 3: Xét tập (A) gồm các số phức z thỏa mãn $\frac{z-2i}{z-2}$ là số thuần ảo và các giá trị thực m, n thỏa mãn chỉ có duy nhất một số phức $z \in (A)$ thỏa mãn $|z-m-ni|=\sqrt{2}$. Đặt $M=\max(m+n)$ và $N=\min(m+n)$. Tính $P=M+N$?

- A. $P=-2$. B. $P=-4$. **C. $P=4$** . D. $P=2$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử $z=a+bi, (a, b \in \mathbb{R})$ thì $|z-2i|=|\bar{z}+2+4i| \Leftrightarrow a=b-4 \quad (1)$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{z-2i}{z-2} &= \frac{a+(b-2)i}{(a-2)+bi} = \frac{[a+(b-2)i][(a-2)-bi]}{(a-2)^2+b^2} \\ &= \frac{a(a-2)+b(b-2)+[(a-2)(b-2)-ab]i}{(a-2)^2+b^2} \end{aligned}$$

Vì $\frac{z-2i}{z-2}$ là số thuần ảo nên $a(a-2)+b(b-2)=0 \Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2=2$

Ta cũng có $(a-m)^2+(b-n)^2=2$

Vì chỉ có duy nhất một số phức thỏa mãn nên hai đường tròn (C_1) có $I_1(1;1), R_1=\sqrt{2}$ và đường tròn (C_2) có $I_2(m;n), R_2=\sqrt{2}$ tiếp xúc nhau.

$$\text{Vậy } \begin{cases} I_1I_2=R_1+R_2=2\sqrt{2} \\ I_1I_2=|R_1-R_2|=0 \end{cases}$$

Trường hợp $I_1I_2=0$ (không thỏa mãn) vì lúc đó hai đường tròn trùng nhau nên có vô số $(a;b)$ thỏa mãn $(a-1)^2+(b-1)^2=2$. Vậy $I_1I_2=2\sqrt{2} \Leftrightarrow (m-1)^2+(n-1)^2=8$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có :

$$\begin{aligned} |m+n-2| &= |(m-1)+(n-1)| \leq \sqrt{(1^2+1^2)((m-1)^2+(n-1)^2)} = 4 \\ \Rightarrow -4 \leq m+n-2 \leq 4 &\Leftrightarrow -2 \leq m+n \leq 6 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} M=6 \\ N=-2 \end{cases}.$$

Câu 4: Xét các số phức z thỏa $|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z-1+i|$. Tính $P=m+M$.

- A. $P=\sqrt{13}+\sqrt{73}$. **B. $P=\frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$** . C. $P=5\sqrt{2}+\sqrt{73}$. D. $P=\frac{5\sqrt{2}+\sqrt{73}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $w=z-1+i=a+bi; a, b \in \mathbb{R}$

$$|(z-1+i)+3-2i|+|(z-1+i)+(-3-8i)|=6\sqrt{2} \Leftrightarrow |w+3-2i|+|w-3-8i|=6\sqrt{2}$$

Do đó xét các điểm $M(a;b), A(-3;2), B(3;8)$, ta có:

$$6\sqrt{2}=MA+MB \geq AB=6\sqrt{2}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \in [AB]$, do đó $b = a + 5$ và $-3 \leq a \leq 3$.

$$|w| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (a+5)^2} = \sqrt{2a^2 + 10a + 25}$$

$$m = \min_{[-3;3]} \sqrt{2a^2 + 10a + 25} = \frac{5\sqrt{2}}{2}; M = \max_{[-3;3]} \sqrt{2a^2 + 10a + 25} = \sqrt{73}.$$

$$\text{Vậy } P = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}.$$

Cách 2: Cũng tương tự như trên, ta có:

$$|w| = OM \geq d(O; AB) = \frac{5\sqrt{2}}{2}, |w| = OM \leq OB = \sqrt{73}.$$

$$\text{Vậy } P = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}.$$

Câu 5: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 4i| + |z - 2 + 3i| = \sqrt{2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq \sqrt{13}$. B. $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq 5$. C. $1 \leq |z| \leq \sqrt{13}$. D. $\sqrt{13} \leq |z| \leq 5$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $z = a + bi$; $a, b \in \mathbb{R}$.

Xét các điểm $M(a; b)$, $A(3; -4)$, $B(2; -3)$, có: $\sqrt{2} = MA + MB \geq AB = \sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \in [AB]$.

Ta có phương trình $AB: x + y + 1 = 0 \Rightarrow a + b + 1 = 0$ và $2 \leq a \leq 3$.

Do đó $|w| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (a+1)^2} = \sqrt{2a^2 + 2a + 1} \in [\sqrt{13}; 5]$, $\forall a \in [2; 3]$.

Câu 6: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 3i| + |z + 4 + 5i| = 10$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z - 1 + i|$. Tính $P = M.m$.

- A. $P = \frac{8\sqrt{41}}{5}$. B. $P = \sqrt{697}$. C. $P = 5\sqrt{41}$. D. $P = \frac{8\sqrt{41}}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $w = z - 1 + i = a + bi$; $a, b \in \mathbb{R}$

$$|(z - 1 + i) + (-1 - 4i)| + |(z - 1 + i) + (5 + 4i)| = 10 \Leftrightarrow |w - 1 - 4i| + |w + 5 + 4i| = 10$$

Do đó xét các điểm $M(a; b)$, $A(1; 4)$, $B(-5; -4)$, ta có:

$$10 = MA + MB \geq AB = 10.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \in [AB]$, do đó $4a - 3b + 8 = 0$ và $-5 \leq a \leq 1$.

$$|w| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{4a+8}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{25a^2 + 64a + 64}}{3}$$

$$m = \min_{[-5;1]} \frac{\sqrt{25a^2 + 64a + 64}}{3} = y\left(-\frac{32}{25}\right) = \frac{8}{5}; M = \max_{[-5;1]} \frac{\sqrt{25a^2 + 64a + 64}}{3} = y(-5) = \sqrt{41}.$$

Vậy $P = m.M = \frac{8\sqrt{41}}{5}$.

Câu 7: Cho số phức z_1 thỏa mãn $|z_1 - 2|^2 - |z_1 + i|^2 = 1$ và số phức z_2 thỏa mãn $|z_2 - 4 - i| = \sqrt{5}$. Hỏi giá trị nhỏ nhất $|z_1 - z_2|$ là?

A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

B. $\sqrt{5}$.

C. $2\sqrt{5}$.

D. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z_1 = a + bi$; $a, b \in \mathbb{R}$ và $z_2 = m + ni$; $m, n \in \mathbb{R}$.

Ta có: $|z_1 - 2|^2 - |z_1 + i|^2 = 1$

$$\Leftrightarrow [(a-2)^2 + b^2] - [a^2 + (b+1)^2] = 1 \Leftrightarrow 2a + b - 1 = 0.$$

Tương tự ta có $|z_2 - 4 - i| = \sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow (m-2)^2 + (n-1)^2 = 5.$$

Khi đó xét các điểm $M(a; b), N(m; n)$, ta có: $M \in d: 2x + y - 2 = 0$

và $N \in (C)$ có $I(4; 1), R = \sqrt{5}$.

$$|z_1 - z_2| = MN \geq IM - IN \geq d(I; d) - R = \frac{8}{\sqrt{5}} - \sqrt{5} = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 8: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 + 2i| - |z + 1 - 3i| = \sqrt{34}$. Hỏi giá trị nhỏ nhất của $|z + 1 + i|$ là?

A. $\frac{9}{\sqrt{34}}$.

B. 4.

C. $\sqrt{13}$.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $z = a + bi$; $a, b \in \mathbb{R}$.

Do đó xét các điểm $M(a; b), A(2; -2), B(-1; 3)$, ta có:

$$|z - 2 + 2i| - |z + 1 - 3i| = \sqrt{34} \Leftrightarrow \sqrt{34} = MA - MB \leq AB = \sqrt{34}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M$ thuộc tia AB và M nằm ngoài đoạn AB

Phương trình $AB: 5x + 3y - 4 = 0$, do đó $5a + 3b - 4 = 0$ và $a \leq -1$.

$$\text{Khi đó } |z + 1 + i| = \sqrt{(a+1)^2 + (b+1)^2} = \sqrt{(a+1)^2 + \left(\frac{4-5a}{3} + 1\right)^2}$$

$$\min_{(-\infty; -1]} |z + 1 + i| = \min_{(-\infty; -1]} \sqrt{(a+1)^2 + \left(\frac{4-5a}{3} + 1\right)^2} = y(-1) = 4.$$

Câu 9: Cho ba số phức z, z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 6$ và $|z_1 - z_2| = 6\sqrt{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z| + |z - z_1| + |z - z_2|$.

A. $6\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

B. $3\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

C. $6\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

D. $3\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

Chọn C.

Xét tam giác OAB với A, B lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2 và M là điểm biểu diễn số phức z , ta có $OA = OB = 6, AB = 6\sqrt{2} \Rightarrow OAB$ vuông tại O .

Khi đó ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $P = MO + MA + MB$.

Dựng phía ngoài tam giác OAB tam giác đều ABC , đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt OC tại D , theo bất đẳng thức Ptoleme cho bốn điểm M, A, B, C ta có:

$$MA \cdot CB + MB \cdot CA > MC \cdot AB \Rightarrow MA + MB \geq MC \text{ và } MA + MB + MO \geq MC + MO \geq OC = \text{const}.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv D$. Ta đi tính độ dài đoạn OC , bằng định lý hàm số cosin ta có:

$$OA = 6, AC = 6\sqrt{2}, \widehat{OAC} = \widehat{OAB} + \widehat{BAC} = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ.$$

$$\text{Do đó } OC = \sqrt{OA^2 + AC^2 - 2 \cdot OA \cdot AC \cdot \cos 105^\circ} = \sqrt{6^2 + (6\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6\sqrt{2} \cdot \cos 105^\circ} = 6\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của } P_{\min} = 6\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

Câu 10: Cho số phức z . Kí hiệu A, B, C, D lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $z, \bar{z}, z(4+3i)$ và $\overline{z(4+3i)}$. Biết A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình chữ nhật. Hỏi giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z + 4i - 5|$ là?

A. $\frac{5}{\sqrt{34}}.$

B. $\frac{2}{\sqrt{5}}.$

C. $\frac{1}{\sqrt{2}}.$

D. $\frac{4}{\sqrt{13}}.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Với $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$.

Ta có: $A(a; b), B(a; -b), C(4a - 3b; 3a + 4b), D(4a - 3b; -3a - 4b)$.

Do đó A, B đối xứng qua trục hoành; C, D đối xứng qua trục hoành và $AB \parallel CD$.

Theo giả thiết A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình chữ nhật khi và chỉ khi có $a \neq 0$ và $b \neq 0$ và

$$\begin{cases} AB = CD \\ \overline{AB} \perp \overline{AC} \\ \overline{AB} \perp \overline{AD} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b \\ a = -b \\ -2b(3a + 3b) = 0 \\ -2b(-3a - 5b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b \\ a = -b \\ b = 0(l) \Leftrightarrow a = -b \\ a = -b \\ b = -\frac{3}{5}a \end{cases}$$

$$\text{Với } z = a - ai, \text{ ta có: } |z + 4i - 5| = \sqrt{(a-5)^2 + (4-a)^2} = \sqrt{2\left(a - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2}.$$

Câu 11: Gọi z là số phức thỏa mãn $P = |z - 1 - i| + |z - 1 - 4i| + |z - 2 + i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $|z|$.

A. $\sqrt{2}.$

B. 1.

C. 2.

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Lời giải

Chọn A

Đặt $z = a + bi$, xét các điểm $M(a; b), A(1; 1), B(1; 4), C(2; -1)$.

$$\text{Ta có } \cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = -\frac{2}{\sqrt{5}} < -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} > 120^\circ.$$

$$\text{Do đó } \left| \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right| < 1 \text{ và}$$

$$\begin{aligned} P &= MA + MB + MC = MA + \frac{MB \cdot AB}{AB} + \frac{MC \cdot AC}{AC} \\ &\geq MA + \frac{\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AC}}{AC} = MA + \overrightarrow{MA} \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right) + \frac{\overrightarrow{AB}^2}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}^2}{AC} \\ &= MA + \overrightarrow{MA} \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right) + AB + AC \geq MA - \left| \overrightarrow{MA} \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right) \right| + AB + AC \geq AB + AC \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv A \Rightarrow z = 1 + i \Rightarrow |z| = \sqrt{2}$.

Câu 12: Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

$$\text{tìm } Q = |z - 1| + \left| z - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right|. \text{ Tính } P = M + m$$

A. $4 + 2\sqrt{3}$.

B. $2 + 2\sqrt{3}$.

C. $2\sqrt{6}$.

D. $2 + \sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C

Vì $|z| = 1 \Rightarrow z = \cos x + i \sin x$ và

$$\begin{aligned} Q &= \left| \cos x + i \sin x - 1 \right| + \left| \cos x + i \sin x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| \\ &= \sqrt{(\cos x - 1)^2 + \sin^2 x} + \sqrt{\left(\cos x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} \\ &= \sqrt{2 - 2\cos x} + \sqrt{2 - \cos x + \sqrt{3} \sin x} \in \left[2\sqrt{2 - \sqrt{3}}; 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} \right] \end{aligned}$$

Do đó $P = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}} + 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} = 2\sqrt{6}$. Chọn đáp án. **C.**

Cách 2: Khi biết $|z| = 1$, xét ba điểm $M(a; b), A(1; 0), B\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ta có $Q = MA + MB$ và M, A, B cùng thuộc đường tròn $(O, 1)$ suy ra $(MA + MB)_{\max} \Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa cung lớn $\widehat{AB}$. $(MA + MB)_{\min} \Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa cung nhỏ $\widehat{AB}$.

Câu 13: Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 + 16| + |z(z + 4i)| = 4|z + 4i|$. Gọi M, m lần lượt là các giá trị lớn nhất, và giá trị nhỏ nhất của $|z + 1 - i|$. Tính $P = M + m$.

A. $P = \sqrt{26} + \sqrt{10}$.

B. $P = 1 + \sqrt{10}$.

C. $P = \sqrt{2} + \sqrt{26}$.

D. $P = 1 + \sqrt{26}$.

Lời giải

Chọn D

$$|z^2 + 16| + |z(z + 4i)| = 4|z + 4i|$$

$$|z^2 + 16| + |z(z + 4i)| = 4|z + 4i| \Leftrightarrow |(z + 4i)(z - 4i)| + |z(z + 4i)| = 4|z + 4i|$$

$$\Leftrightarrow |z+4i|(|z-4i|+|z|-4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} |z+4i|=0 \\ |z-4i|+|z|-4=0 \end{cases}$$

Ta có: $|z-4i|+|z| \geq |z-4i-z|=4$,

dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ điểm biểu diễn của $4i$, 0 , z thẳng hàng.

Vậy tập hợp các số phức là đoạn thẳng $x=0$ thỏa $0 \leq y \leq 4$.

Ta có: $|z+1-i|=AX$ với $A(-1;1)$, X là điểm biểu diễn số phức z

Ta có: $|z+1-i|_{\max} = \sqrt{26}$, $|z+1-i|_{\min} = 1$.

Câu 14: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=m^2+2m+5$ với m là số thực. Biết rằng tập hợp điểm của số phức $w=(3+4i)z-2i$ là đường tròn. Tìm bán kính R nhỏ nhất của đường tròn đó.

A. $R=5$.

B. $R=10$.

C. $R=15$.

D. $R=20$

Lời giải

Chọn D

$$w+2i=(3+4i)z \Rightarrow |w+2i|=|(3+4i)z|=|(3+4i)||z|=5[(m+1)^2+4] \geq 20.$$

$\Rightarrow |w+2i| \geq 20$. Vậy đường tròn có bán kính $R_{\min}=20$ với tâm $I(0;2)$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m=-1$.

Câu 15: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1+z_2=8+6i$ và $|z_1-z_2|=2$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=|z_1|+|z_2|$.

A. $P=4\sqrt{6}$.

B. $P=2\sqrt{26}$.

C. $P=5+3\sqrt{5}$.

D. $P=32+3\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Gọi: } \begin{cases} z_1=a+bi \\ z_2=c+di \end{cases} (a,b,c,d \in \mathbb{R}) \Rightarrow \begin{cases} a+c+(b+d)i=8+6i \\ (a-c)^2+(b-d)^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+c)^2+(b+d)^2=100 \\ (a-c)^2+(b-d)^2=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a+c)^2+(b+d)^2+(a-c)^2+(b-d)^2=104 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2=52.$$

$$\text{Mặt khác: } P=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \stackrel{B.C.S}{\leq} \sqrt{(1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2+d^2)}=2\sqrt{26}.$$

Cách 2:

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 trên mặt phẳng phức và D là điểm thứ tư của hình bình hành $AOBD \Rightarrow D$ là điểm biểu diễn số phức $(z_1+z_2) \Rightarrow OD=|z_1+z_2|=10$.

$|z_1-z_2|$ chính là độ dài đoạn AB .

$$\Delta OAB \text{ có } \begin{cases} AB^2=OA^2+OB^2-2OA.OB.\cos \widehat{AOB}=4 \\ OD^2=OA^2+OB^2+2OA.OB.\cos \widehat{AOB}=100 \end{cases} \Rightarrow 104=2(OA^2+OB^2) \geq (OA+OB)^2$$

$$\Rightarrow (OA+OB)_{\max}=\sqrt{104}=2\sqrt{26} \Leftrightarrow (|z_1|+|z_2|)_{\max}=2\sqrt{26}.$$

Câu 16: Cho số phức z_1 thỏa mãn $|(1+i)z+1-5i|=2\sqrt{2}$ và số phức z_2 thỏa mãn $|z+1+2i|=|z+i|$.

Tính giá trị nhỏ nhất của $|z_1-z_2|$.

A. $\frac{7\sqrt{2}-2}{2}$.

B. $\frac{7\sqrt{2}+4}{2}$.

C. $\frac{7\sqrt{2}+4}{4}$.

D. $\frac{7\sqrt{2}-4}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 trên mặt phẳng.

$$\text{Từ } |(1+i)z+1-5i|=2\sqrt{2} \Leftrightarrow |1+i| \cdot \left| z + \frac{1-5i}{1+i} \right| = 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |z-2-3i|=2 \Rightarrow M \in (C) \text{ có tâm } I(2;3), \text{ bán}$$

kính $R=2$.

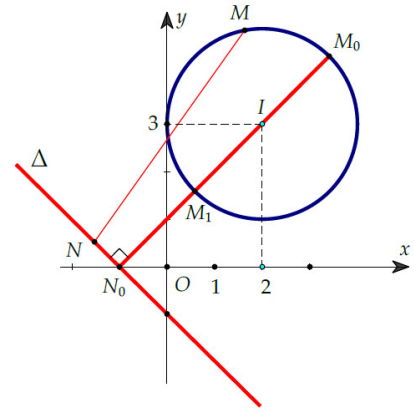
Gọi $z_2 = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$

$$|z+1+2i|=|z+i|$$

$$\Leftrightarrow x+y+2=0 \Rightarrow N \in \Delta: x+y+2=0$$

$$\text{Ta có: } |z_1 - z_2| = MN \Rightarrow |z_1 - z_2|_{\min} \Leftrightarrow MN_{\min}$$

Ta có:



$$d(I, \Delta) = \frac{7\sqrt{2}}{2} \Rightarrow MN_{\min} = d(I, \Delta) - R = \frac{7\sqrt{2}}{2} - 2 = \frac{7\sqrt{2} - 4}{2}$$

Câu 17: Cho số phức z_1 thỏa mãn $|(1+i)z+1-5i|=2\sqrt{2}$ và số phức z_2 thỏa mãn $|z+1+2i|=|z+i|$.

Tính giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2 - 3 + i|$

A. $\frac{5\sqrt{2}-4}{2}$

B. $\frac{5\sqrt{2}+4}{2}$

C. $\frac{7\sqrt{2}-4}{2}$

D. $\frac{7\sqrt{2}+4}{2}$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } |z_1 - z_2 - 3 + i| = |(z_1 - 3 + i) - z_2| = MN \Rightarrow |z_1 - z_2|_{\max} \Leftrightarrow MN_{\max}$$

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_3, z_2 trên mặt phẳng.

$$\text{Từ } |(1+i)z+1-5i|=2\sqrt{2} \Leftrightarrow |1+i| \cdot \left| z + \frac{1-5i}{1+i} \right| = 2\sqrt{2}$$

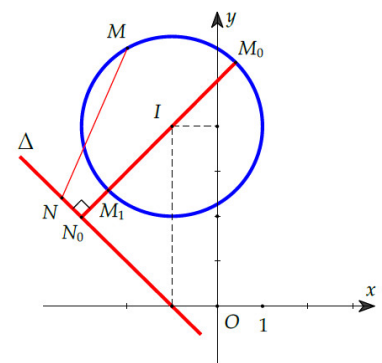
$$\Leftrightarrow |z-2-3i|=2 \Leftrightarrow \left| \underbrace{(z-3+i)}_{z_3} + 1 - 4i \right| = 2$$

$$\Rightarrow M \in (C) \text{ có tâm } I(-1;4), \text{ bán kính } R=2.$$

Gọi $z_2 = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$

$$\text{từ } |z+1+2i|=|z+i| \quad (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow N \in \Delta: x+y+2=0$$

$$\text{Ta có: } d(I, \Delta) = \frac{5\sqrt{2}}{2} \Rightarrow MN_{\min} = d(I, \Delta) - R = \frac{5\sqrt{2}}{2} - 2 = \frac{5\sqrt{2} - 4}{2}.$$



Câu 18: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1-i|+|z-3-2i|=\sqrt{5}$. Gọi $M; m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của môđun của z , tính $M+m$.

A. $\frac{\sqrt{5}+5\sqrt{13}}{5}$.

B. $\sqrt{5}+5\sqrt{13}$.

C. $\sqrt{2}+\sqrt{13}$.

D. $\sqrt{2}+2\sqrt{13}$

Lời giải

Chọn C

Gọi $z = x + yi; (x, y \in \mathbb{R})$ có điểm $M(x, y)$ biểu diễn z trên mặt phẳng tọa độ.

Ta có: $|z-1-i|+|z-3-2i|=\sqrt{5}$

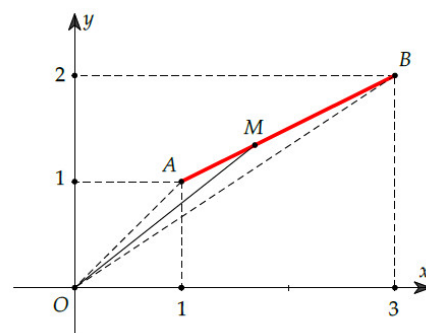
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=\sqrt{5} \quad (1)$$

Đặt $A(1;1), B(3;2)$ thì từ (1) ta có: $AM+BM=\sqrt{5}$ (2)

Mặt khác $\overrightarrow{AB}=(2;1) \Rightarrow AB=\sqrt{5}$ (3)

Nên từ (2) và (3) suy ra M thuộc đoạn thẳng AB .

Nhận xét rằng $\widehat{OAB}$ là góc tù (hoặc quan sát hình vẽ) ta có $M=|z|_{\max}=OB=\sqrt{13}$ và $m=|z|_{\min}=OA=\sqrt{2}$. Vậy $M+m=\sqrt{2}+\sqrt{13}$. (Chứng minh max min dựa vào các tam giác $OAM; OBM$ lần lượt tù tại $A; M$).



Câu 19: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+2-i|+|z-2-3i|=2\sqrt{5}$. Gọi $M; m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của môđun của z , tính $M+m$.

A. $\frac{4\sqrt{5}+5\sqrt{13}}{5}$.

B. $\sqrt{5}+\sqrt{13}$.

C. $\sqrt{2}+\sqrt{13}$.

D. $\sqrt{2}+2\sqrt{13}$

Lời giải

Chọn A

Gọi $z = x + yi; (x, y \in \mathbb{R})$ có điểm $M(x, y)$ biểu diễn z trên mặt phẳng tọa độ.

Ta có: $|z+2-i|+|z-2-3i|=2\sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}=2\sqrt{5} \quad (1)$$

Đặt $A(-2;1), B(2;3)$ từ (1) có: $AM+BM=2\sqrt{5}$ (2)

Mặt khác $\overrightarrow{AB}=(4;2) \Rightarrow AB=2\sqrt{5}$ (3)

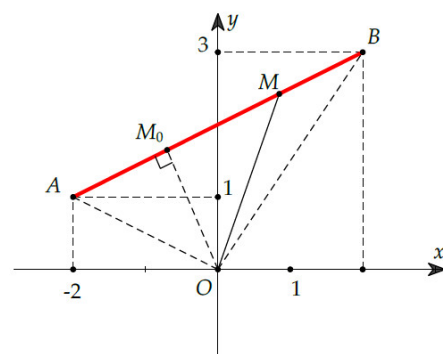
nên từ (2) và (3) suy ra M thuộc đoạn thẳng AB . Ta

có $OA=\sqrt{5}, OB=\sqrt{13}$ và $AB: x-2y+4=0$.

Nhận xét rằng $\widehat{OAB}$ và $\widehat{OBM}$ là góc nhọn (hoặc quan sát hình vẽ) ta có

$$M=|z|_{\max}=\max\{OB, OA\}=\sqrt{13} \text{ và } m=|z|_{\min}=d(O, AB)=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Vậy } M+m=\sqrt{13}+\frac{4\sqrt{5}}{5}=\frac{4\sqrt{5}+5\sqrt{13}}{5}$$



Câu 20: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=|z+1|+2|z-1|$.

A. $\max T=2\sqrt{5}$.

B. $\max T=2\sqrt{10}$.

C. $\max T=3\sqrt{5}$.

D. $\max T=3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1. Gọi $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow M(x; y)$

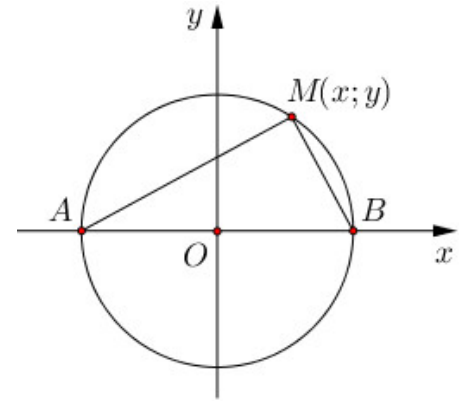
Và $A(-1; 0)$, $B(1; 0)$. Ta có $|z| = 1 \Rightarrow |x + yi| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

$\Rightarrow M$ thuộc đường tròn đường kính AB .

$\Rightarrow MA^2 + MB^2 = AB^2 = 4$. Khi đó, theo Bunhiacopxki, ta có

$$T = MA + 2MB \leq \sqrt{(1^2 + 2^2)(MA^2 + MB^2)} = \sqrt{5 \cdot 4} = 2\sqrt{5}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $\max T = 2\sqrt{5}$.

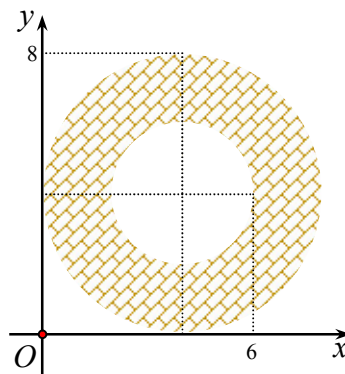


Cách 2. Đặt $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow |z+1| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ và $|z-1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$

Mặt khác $|z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$, khi đó $T = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$

$$\leq \sqrt{(1^2 + 2^2)[(x+1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2]} = \sqrt{10(x^2 + y^2 + 1)} = \sqrt{10 \cdot 2} = 2\sqrt{5} \Rightarrow \max T = 2\sqrt{5}.$$

Câu 21: Phần gạch sọc trong hình vẽ bên là hình biểu diễn của tập các số phức thỏa mãn điều kiện nào sau đây:



A. $6 \leq |z| \leq 8$.

B. $2 \leq |z + 4 + 4i| \leq 4$.

C. $2 \leq |z - 4 - 4i| \leq 4$.

D. $4 \leq |z - 4 - 4i| \leq 16$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$

Vì hình vẽ biểu diễn số phức z là hình vành khăn nằm ở góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ nên tâm của hai đường đồng tâm có tọa độ dương $\Rightarrow$ loại A, B.

Quan sát hình vẽ ta thấy đường tròn lớn có đường kính bằng 8 $\Rightarrow$ bán kính $R = 4$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 22: Xét các số phức $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $|z| = 2$. Tính $P = x + y$ khi $|z - 4| + 2|z + 1 + 4i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $P = 4\sqrt{5}$.

B. $P = 2$.

C. $P = -2$.

D. $P = 4\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C.

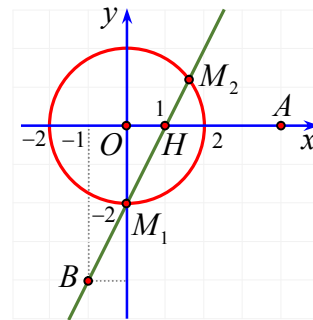
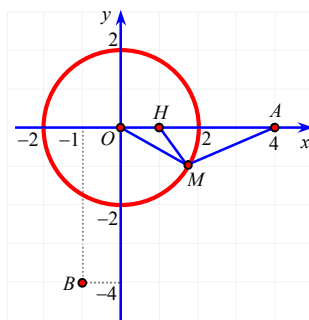
Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có

$$|z| = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \text{tập hợp điểm } M \text{ là đường tròn tâm } O, \text{ bán kính } R = 2.$$

$$\begin{aligned} P' &= |z - 4| + 2|z + 1 + 4i| = |(x - 4) + yi| + 2|(x + 1) + (y + 4)i| \\ &= \sqrt{(x - 4)^2 + y^2} + 2\sqrt{(x + 1)^2 + (y + 4)^2} \quad (*) \end{aligned}$$

Gọi $A(4; 0)$, $B(-1; -4)$ thì $P' = AM + 2BM$ (1).



Gọi $H(1; 0)$ thì $OH \cdot OA = 4 = OM^2 \Rightarrow$ tam giác OHM và tam giác OMA đồng dạng.

$$\Rightarrow \frac{HM}{MA} = \frac{OM}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow AM = 2HM \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $P' = AM + 2BM = 2(HM + BM) \geq 2BH \Rightarrow P'_{\min} = 2BH$ khi B, H, M thẳng hàng và M nằm giữa điểm B và H .

Khi đó M là giao điểm của đường thẳng $BH: y = 2x - 2$ và đường tròn $x^2 + y^2 = 4$

$$\Rightarrow \text{tọa độ điểm } M \text{ là nghiệm của hệ phương trình } \begin{cases} y = 2x - 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ y = \frac{6}{5} \end{cases}.$$

$$\text{Vì } M \text{ nằm giữa điểm } B \text{ và } H \text{ nên chọn } \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}.$$

Khi đó $P = -2$.

Câu 23: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + i| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = |z + 2 - i|^2 + |z - 2 - 3i|^2.$$

A. $18 + 8\sqrt{10}$.

B. $38 - 8\sqrt{10}$.

C. $38 + 8\sqrt{10}$.

D. $8\sqrt{10} - 18$

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có } |z - 1 + i| = 2 \Leftrightarrow |(x-1) + (y+1)i| = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$$

$\Rightarrow$ tập hợp điểm M là đường tròn (C_1) tâm $I(1; -1)$, bán kính $R_1 = 2$.

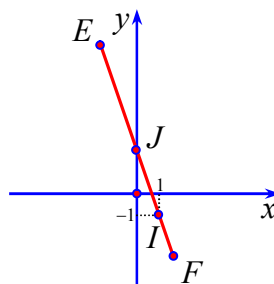
$$\text{Xét biểu thức } P = |z + 2 - i|^2 + |z - 2 - 3i|^2$$

$$\Leftrightarrow P = (x+2)^2 + (y-1)^2 + (x-2)^2 + (y-3)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y + 9 - \frac{P}{2} = 0$$

$\Rightarrow$ tập hợp điểm M là đường tròn (C_2) tâm $J(0; 2)$, bán kính $R_2 = \sqrt{\frac{P}{2} - 5}$, $P > 10$.

Khi đó $P_{\max}$ khi (C_1) và (C_2) tiếp xúc

$$\text{trong } \Leftrightarrow R_2 = IJ + R_1 \Leftrightarrow R_2^2 = (IJ + R_1)^2 \Leftrightarrow \frac{P}{2} - 5 = (2 + \sqrt{10})^2 \Leftrightarrow P = 38 + 8\sqrt{10}.$$



Cách 2 :

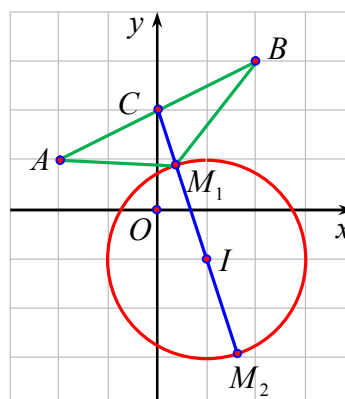
Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } |z - 1 + i| = 2 \Leftrightarrow |(x-1) + (y+1)i| = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$$

$\Rightarrow$ tập hợp điểm M là đường tròn (C_1) tâm $I(1; -1)$, bán kính $R_1 = 2$.

$$\text{Xét biểu thức } P = |z + 2 - i|^2 + |z - 2 - 3i|^2, \text{ với } A(-2; 1) \text{ và } B(2; 3) \text{ thì } P = MA^2 + MB^2$$

$$\Leftrightarrow P = 2MC^2 + \frac{AB^2}{2} \Leftrightarrow P = 2MC^2 + 10, \text{ với } C(0; 2) \text{ là trung điểm của } AB.$$



$$\text{Mặt khác } IC = \sqrt{10} \Rightarrow \begin{cases} M_1C = \sqrt{10} - 2 \\ M_2C = \sqrt{10} + 2 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } P_{\max} = 2(\sqrt{10} + 2)^2 + 10 = 38 + 8\sqrt{10}.$$

Câu 24: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|2z - i| = |2 + iz|$, biết $|z_1 - z_2| = 1$. Tính $P = |z_1 + z_2|$.

A. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $P = \sqrt{2}$.

C. $P = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $P = \sqrt{3}$

Lời giải

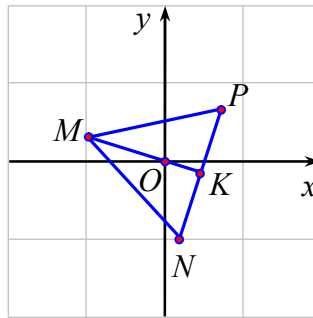
Chọn D

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$

Ta có $|2z - i| = |2 + iz| \Leftrightarrow |2z - i| = |z - 2i| \Leftrightarrow |2\overrightarrow{OM} - \vec{j}| = |\overrightarrow{OM} - 2\vec{j}|$, với $\vec{j} = (0; 1)$

$$\Leftrightarrow 4OM^2 - 4\overrightarrow{OM} \cdot \vec{j} + \vec{j}^2 = OM^2 - 4\overrightarrow{OM} \cdot \vec{j} + 4\vec{j}^2 \Leftrightarrow OM^2 = 1 \Leftrightarrow OM = 1$$

$\Rightarrow$ tập hợp điểm M là đường tròn (C) tâm O , bán kính $R = 1$.



Mặt khác gọi N, P là điểm biểu diễn z_1, z_2 thì

$$\begin{cases} N \in (C) \\ P \in (C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ON = OP = 1 \\ |\overrightarrow{NP}| = |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON}| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ON = OP = 1 \\ NP = |z_2 - z_1| = 1 \end{cases} \Rightarrow \Delta MNP \text{ là tam giác đều}$$

$$\Rightarrow |z_1 + z_2| = 2OK = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

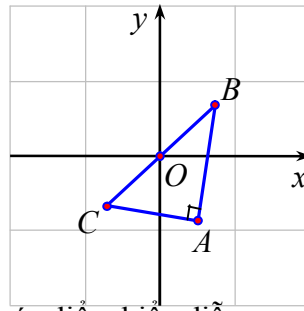
Cách 2:

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$

Ta có $|2z - i| = |2 + iz| \Leftrightarrow |2z - i| = |z - 2i| \Leftrightarrow |2x + (2y - 1)i| = |x + (y - 2)i|$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + (2y - 1)^2 = x^2 + (y - 2)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$\Rightarrow$ tập hợp điểm M là đường tròn (C) tâm O , bán kính $R = 1$.



Mặt khác gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn z_1, z_2 và $-z_2$ thì A, B, C nằm trên đường tròn (C) , BC là đường kính

$$\text{Mà } |z_1 - z_2| = 1 \Leftrightarrow |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 1 \Leftrightarrow |\overrightarrow{BA}| = 1 \Leftrightarrow AB = 1$$

$$\text{Khi đó: } |z_1 + z_2| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CO}| = CA \Leftrightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{3}.$$

Câu 25: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$. Tính môđun của số phức $w = M + mi$.

A. $|w| = \sqrt{2315}$.

B. $|w| = \sqrt{1258}$.

C. $|w| = 3\sqrt{137}$.

D. $|w| = 2\sqrt{309}$

Lời giải

Chọn B

Gọi $K(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } |z - 3 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |(x-3) + (y-4)i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$$

$$\Rightarrow \text{tập hợp điểm } K \text{ là đường tròn } (C) \text{ có tâm } I(3; 4), \text{ bán kính } R = \sqrt{5}.$$

$$\text{Mặt khác } P = |z + 2|^2 - |z - i|^2 \Leftrightarrow P = (x+2)^2 + y^2 - [x^2 + (y-1)^2] = 4x + 2y + 3$$

$$\Rightarrow \text{tập hợp điểm } K \text{ là đường thẳng } \Delta: 4x + 2y + 3 - P = 0$$

$$\text{Khi đó } \Delta \text{ và } (C) \text{ có điểm chung khi } d(I, \Delta) \leq R \Leftrightarrow \frac{|4x + 2y + 3 - P|}{2\sqrt{5}} \leq \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow |23 - P| \leq 10 \Leftrightarrow 13 \leq P \leq 33 \Rightarrow M = 33 \text{ và } m = 13$$

$$\text{Vậy } w = 33 + 13i \Rightarrow |w| = \sqrt{1258}.$$

Câu 26: Trong mặt phẳng xOy , gọi M là điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $|z + 3 - \sqrt{3}i| = \sqrt{3}$. Tìm phần ảo của z trong trường hợp góc $\angle xOM$ nhỏ nhất.

A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. 0 .

D. $2\sqrt{3}$

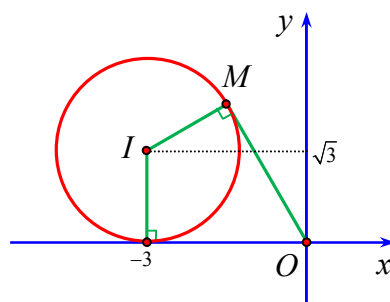
Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$

Ta có $|z + 3 - \sqrt{3}i| = \sqrt{3} \Leftrightarrow |(x+3) + (y-\sqrt{3})i| = \sqrt{3} \Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 3$.

$\Rightarrow$ tập hợp điểm M là đường tròn tâm $(-3; \sqrt{3})$, bán kính $R = \sqrt{3}$.



Gọi $\Delta: Ax + By$ là tiếp tuyến của (C) đi qua điểm O

Ta có $d(I, \Delta) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|-3A + \sqrt{3}B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow |\sqrt{3}A - B| = \sqrt{A^2 + B^2} \Leftrightarrow 2A^2 - 2\sqrt{3}AB = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ A = \sqrt{3}B \end{cases}$$

○ Với $A = 0$ chọn $B = 1 \Rightarrow \Delta: y = 0$ không thỏa mãn vì khi đó $\angle xOM = 180^\circ$.

○ Với $A = \sqrt{3}B$ chọn $B = 1$ thì $A = \sqrt{3} \Rightarrow \Delta: \sqrt{3}x + y = 0 \Rightarrow \angle xOM = 120^\circ \Rightarrow \widehat{HOM} = 30^\circ$

Khi đó M là giao điểm của đường thẳng d đi qua tâm I của đường tròn và đường thẳng Δ

$$\Rightarrow d: x - \sqrt{3}y + 6 = 0; \text{ tọa độ điểm } M \text{ là nghiệm của hệ phương trình } \begin{cases} \sqrt{3}x + y = 0 \\ x - \sqrt{3}y = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$

Vậy phần ảo của z là $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Câu 27: Gọi M, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z - 2 + i|^2 - |\bar{z} + 1 - 4i|^2$, biết rằng số phức z thỏa mãn điều kiện $|z(i+1) + 1 + i| = \sqrt{2}$. Tính $M^2 + n^2$.

A. 216.

B. 162.

C. 186.

D. 240

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có

$$|z(i+1) + 1 + i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |(i+1)(z+1)| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |i+1| \cdot |z+1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}|z+1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z+1| = 1$$

$$\Leftrightarrow |(x+1) + yi| = 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 1$$

$\Rightarrow$ tập hợp điểm M là đường tròn (C) có tâm $I(-1;0)$, bán kính $R=1$.

$$\text{Mặt khác } P = |z-2+i|^2 - |\bar{z}+1-4i|^2 \Leftrightarrow P = |(x-2)+(y+1)i|^2 - |(x+1)-(y+4)i|^2$$

$$\Leftrightarrow P = (x-2)^2 + (y+1)^2 - [(x+1)^2 + (y+4)^2]$$

$$\Leftrightarrow P = -6x - 6y - 12 \Leftrightarrow 6x + 6y + 12 + P = 0 (*)$$

$\Rightarrow$ tập hợp các điểm thỏa phương trình $(*)$ là đường thẳng Δ

$$\text{Khi đó để } \Delta \text{ cắt } (C) \text{ thì } d(I, \Delta) \leq R \Leftrightarrow \frac{|6x_I + 6y_I + 12 + P|}{6\sqrt{2}} \leq 1 \Leftrightarrow |6 + P| \leq 6\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow -6 - 6\sqrt{2} \leq P \leq -6 + 6\sqrt{2} \Rightarrow M = -6 + 6\sqrt{2}; n = -6 - 6\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } M^2 + n^2 = 216.$$

Câu 28: Cho số phức z thỏa mãn $|z-2+3i| + |z+2+i| = 4\sqrt{5}$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z-4+4i|$.

A. $\max P = 4\sqrt{5}$.

B. $\max P = 7\sqrt{5}$.

C. $\max P = 5\sqrt{5}$.

D. $\max P = 6\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } |z-2+3i| + |z+2+i| = 4\sqrt{5} \Leftrightarrow AM + BM = 4\sqrt{5}, \text{ với } F_1(-2; -1); F_2(2; -3).$$

$\Rightarrow$ tập hợp điểm M là elip (E) với hai tiêu điểm $F_1(-2; -1); F_2(2; -3)$, tâm $H(0; -2)$ và $2a = 4\sqrt{5} \Leftrightarrow a = 2\sqrt{5}$;

$$\text{Mặt khác } P = |z-4+4i| = IM, \text{ với } I(4; -4)$$

$$\bigcirc \overrightarrow{IF_1} = (-6; 3), \overrightarrow{IF_2} = (-2; 1) \Rightarrow \overrightarrow{IF_1} = 3\overrightarrow{IF_2} \Rightarrow I, F_1, F_2 \text{ thẳng hàng, } F_2 \text{ nằm giữa } I \text{ và } F_1.$$

$$\bigcirc I \text{ nằm ngoài } (E)$$

$$\Rightarrow IM_{\max} = IF + a, F(0; -2) \text{ là trung điểm } F_1F_2.$$

$$\Leftrightarrow IM_{\max} = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

Câu 29: Xét số phức $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-4-3i| = \sqrt{5}$ và $A = |z+1-3i| + |z-1+i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P = a + b$.

A. $P = 2$.

B. $P = 4$.

C. $P = 8$.

D. $P = 6$.

Lời giải

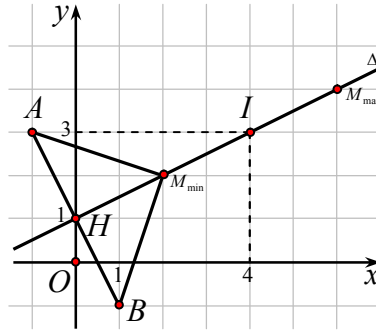
Chọn B.

Gọi $M(a; b)$ là điểm biểu diễn số phức $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$

Ta có $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |(a-4) + (b-3)i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a-4)^2 + (b-3)^2 = 5$

$\Rightarrow$ tập hợp điểm M là đường tròn (C) có tâm $I(4;3)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

Xét $A = |z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$; đặt $A(-1;3)$, $B(1;-1)$ thì $A = AM + BM$



Gọi Δ là trung trực của đoạn thẳng $AB \Rightarrow \Delta$ đi qua trung điểm $H(0;1)$ của AB

$\Rightarrow \Delta: a - 2b + 2 = 0$.

Khi đó để $A = |z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì M là giao điểm của Δ và (C) .

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} (a-4)^2 + (b-3)^2 = 5 \\ a - 2b + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ b = 4 \end{cases}$$

Với $b = 2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow z = 2 + 2i \Rightarrow A = \sqrt{17} + \sqrt{10}$

Với $b = 4 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow z = 6 + 4i \Rightarrow A = \sqrt{65} + \sqrt{50}$

Vì $A_{\min}$ nên chọn $z = 2 + 2i$.

Khi đó $P = 4$.

Câu 30: Cho số phức z thỏa mãn $|2z + 1 - 3i| = \sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z - 1| + 3|z + 1 - 2i|$.

Lời giải

Gọi $M(x; y)$, với $x, y \in \mathbb{R}$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$.

Ta có $|2z + 1 - 3i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left| \left(x + \frac{1}{2}\right) + \left(y - \frac{3}{2}\right)i \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ tập hợp điểm M là đường tròn tâm $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Xét $T = |z - 1| + 3|z + 1 - 2i| \Leftrightarrow T = |(x-1) + yi| + 3|(x+1) + (y-2)i|$

$\Leftrightarrow T = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + 3\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} \Leftrightarrow T = AM + 3BM$, với $A(1;0)$, $B(-1;2)$.

Bài toán quy về đi tìm tọa độ điểm M trên (C) sao cho $AM + 3BM$ đạt giá trị lớn nhất.

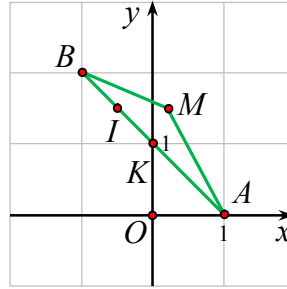
$$\overrightarrow{BI} = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \overrightarrow{AI} = \left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow B, I, A \text{ thẳng hàng và } AI = 3BI$$

Khi đó theo định lý Stewart, ta có $IB.MA^2 + IA.MB^2 = AB(MI^2 + IB.IA)$, với $AB = 2\sqrt{2}$,

$$MI = \frac{1}{\sqrt{2}}, IB = \frac{1}{\sqrt{2}}, IA = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}MA^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}MB^2 = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \Leftrightarrow MA^2 + 3MB^2 = 8$$

$$\text{Do đó } MA + 3MB = MA + \sqrt{3}(\sqrt{3}MB) \leq \sqrt{(1+3)(MA^2 + 3MB^2)} \Leftrightarrow MA + 3MB \leq 4\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } T_{\min} = 4\sqrt{2}.$$



Câu 31: Với hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z_1| + |z_2|$.

A. $P = 5 + 3\sqrt{5}$.

B. $P = 2\sqrt{26}$.

C. $P = 4\sqrt{6}$.

D. $P = 34 + 3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu các số phức z_1 và z_2 .

$$\text{Ta có } z_1 + z_2 = 8 + 6i \Rightarrow |z_1 + z_2| = |8 + 6i| = 10 = OP.$$

$$MN = |\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}| \Leftrightarrow MN = |z_1 - z_2| = 2.$$

$$\text{Áp dụng công thức trung tuyến ta có } OI^2 = \frac{OM^2 + ON^2}{2} - \frac{MN^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow OI^2 = \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{2} - \frac{|z_1 - z_2|^2}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4}OP^2 = \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{2} - 1 \Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 = 52$$

$$\text{Khi đó } P = |z_1| + |z_2| \Rightarrow P = |z_1| + |z_2| \leq \sqrt{(1^2 + 1^2)(|z_1|^2 + |z_2|^2)} \Rightarrow P \leq 2\sqrt{26}.$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = 2\sqrt{26}.$$

Câu 32: Cho số phức z thỏa mãn $|z + 3| \leq 8$. Khi đó tất cả các giá trị của $P = |z - 2|$ tạo thành miền nào sau đây?

A. $[-2; 13]$.

B. $[0; 13]$.

C. $[2; 13]$.

D. $[-13; 2]$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } |z+3| \leq 8 \Leftrightarrow |(x+3)+yi| \leq 8 \Leftrightarrow (x+3)^2 + y^2 \leq 64 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } w = z - 2 \Rightarrow \begin{cases} x_w = x - 2 \\ y_w = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_w + 2 \\ y = y_w \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \Leftrightarrow (x_w + 5)^2 + y_w^2 \leq 64$$

$\Rightarrow$ tập hợp điểm M biểu diễn số phức $w = z - 2$ là hình tròn (C) tâm $I(-3;0)$, bán kính $R = 8$.

$$\text{Do } O \in (C) \text{ nên } \begin{cases} \min w = 0 \\ \max w = OI = R = 13 \end{cases}$$

Câu 13. Xét số phức $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5}$. Tính $P = a + b$ khi $|z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P = 10$.

B. $P = 4$.

C. $P = 6$.

D. $P = 8$.

Lời giải

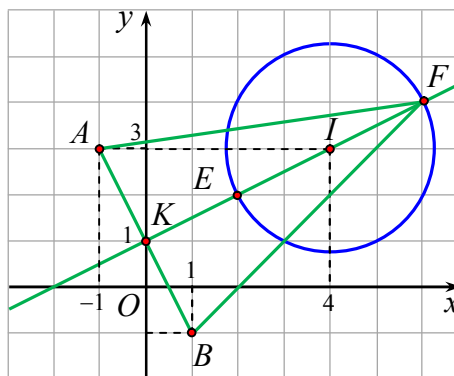
Chọn A.

Gọi $M(a; b)$ là điểm biểu diễn số phức $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$

$$\text{Ta có } |z - 4 - 3i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |(a-4) + (b-3)i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a-4)^2 + (b-3)^2 = 5$$

$\Rightarrow$ tập hợp điểm M là đường tròn (C) tâm $I(4;3)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

Xét $A = |z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$; đặt $A(-1;3)$, $B(1;-1)$ thì $A = AM + BM$



Gọi Δ là trung trực của đoạn thẳng $AB \Rightarrow \Delta$ đi qua trung điểm $K(0;1)$ của AB

$$\Rightarrow \Delta: a - 2b + 2 = 0.$$

Khi đó để $A = |z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$ đạt giá trị lớn nhất thì M là giao điểm của Δ và (C) .

$$\text{Tọa độ điểm } M \text{ là nghiệm của hệ phương trình } \begin{cases} (a-4)^2 + (b-3)^2 = 5 \\ a = 2b - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ b = 4 \end{cases}$$

Với $b = 2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow z = 2 + 2i \Rightarrow A = \sqrt{17} + \sqrt{10}$

Với $b = 4 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow z = 6 + 4i \Rightarrow A = \sqrt{65} + \sqrt{50}$

Vì $A_{\max}$ nên chọn $z = 6 + 4i$.

Khi đó $P = 10$.

Câu 14. Cho số phức z thỏa mãn $5|z-i| = |z+1-3i| + 3|z-1+i|$. Tìm giá trị lớn nhất M của biểu thức $P = |z-2+3i|$?

A. $M = \frac{10}{3}$.

B. $M = 1 + \sqrt{13}$.

C. $M = 4\sqrt{5}$.

D. $M = 9$.

Lời giải

Chọn C.

Đặt $z = w + 2 - 3i$ thì $5|z-i| = |z+1-3i| + 3|z-1+i| \Leftrightarrow 5|w+2-4i| = |w+3-6i| + 3|w+1-2i|$

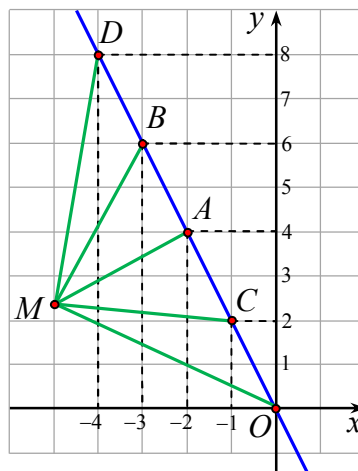
Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức w , $A(-2; 4)$, $B(-3; 6)$, $C(-1; 2)$

Ta có:

○ $\overrightarrow{AB} = (-1; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (1; -2) = -\overrightarrow{AB} \Rightarrow A, B, C$ cùng nằm trên đường thẳng $\Delta: 2x + y = 0$

○ $5|w+2-4i| = |w+3-6i| + 3|w+1-2i| \Leftrightarrow 5MA = MB + 3MC$

Xét hai trường hợp:



↪ Trường hợp 1: $M \in \Delta \Rightarrow M(x; -2x)$

Ta có $5MA = MB + 3MC \Rightarrow M \equiv D(-4; 8)$

Khi đó $w = -4 + 8i \Rightarrow P = |w| = 4\sqrt{5}$

↪ Trường hợp 2: $M \notin \Delta$

Ta có: $5MA = MB + 3MC \Leftrightarrow 25MA^2 = (MB + 3MC)^2 \leq (1+9)(MB^2 + MC^2)$

Mà A là trung điểm của BC nên $MA^2 = \frac{2(MB^2 + MC^2) - BC^2}{4} \Rightarrow MB^2 + MC^2 = MA^2 + AB^2$

Khi đó $25MA^2 \leq 20(MA^2 + AB^2) \Leftrightarrow 25MA^2 \leq 20(MA^2 + 5) \Leftrightarrow MA^2 \leq 20$

Lại có $MA^2 = \frac{2(MD^2 + MO^2) - OD^2}{4} \Rightarrow OM^2 = 2MA^2 + \frac{1}{2}OD^2 - MD^2$

$\Rightarrow OM^2 \leq 2.20 + \frac{1}{2}.80 \Rightarrow OM \leq 4\sqrt{5}$

Vậy $M = 4\sqrt{5}$.

Cách 2:

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có

$5|z - i| = |z + 1 - 3i| + 3|z - 1 + i| \Leftrightarrow 5MI = MA + 3MB$, với $I(0; 1)$, $A(-1; 3)$, $B(1; -1)$, $C(2; -3)$

I là trung điểm $AB \Rightarrow MI^2 = \frac{2(MA^2 + MB^2) - AB^2}{4} \Rightarrow MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2AI^2$

$25MI^2 = (MA + 3MB)^2 \leq 10(MA^2 + MB^2) \Leftrightarrow 25MI^2 \leq 20(MI^2 + AI^2)$

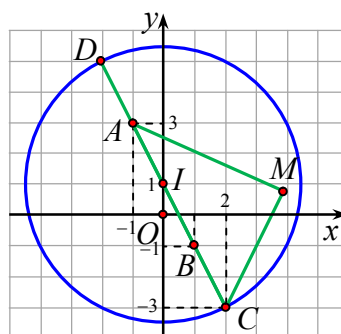
$\Leftrightarrow MI^2 \leq 20 \Leftrightarrow MI \leq 2\sqrt{5} \Rightarrow M$ thuộc hình tròn tâm $I(0; 1)$, bán kính $R = 2\sqrt{5}$

Lại có $IC = 2\sqrt{5} \Rightarrow C$ nằm trên đường tròn tâm I , bán kính $R = 2\sqrt{5}$

Khi đó $P = |z - 2 + 3i| = MC$ lớn nhất khi $M \equiv D$, với $D(-2; 5)$ là điểm đối xứng của C qua I

Hay $z = -2 + 5i \Rightarrow P = |-4 + 8i|$.

Vậy $P_{\max} = 4\sqrt{5}$.



Câu 33: Cho hai số phức z và w biết chúng thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $\left| \frac{(1+i)z}{1-i} + 2 \right| = 1$ và $w = iz$. Tìm giá trị lớn nhất của $M = |z - w|$.

A. $M = 3\sqrt{3}$.

B. $M = 3$.

C. $M = 3\sqrt{2}$.

D. $M = 2\sqrt{3}$.

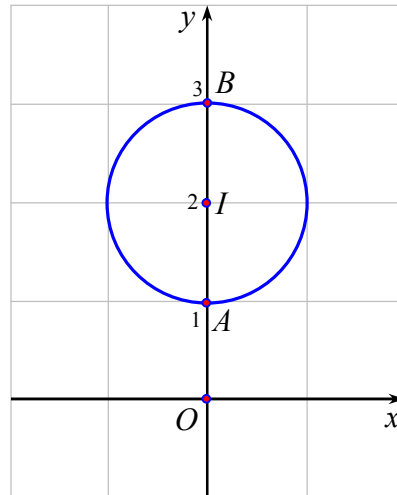
Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $\left| \frac{(1+i)z}{1-i} + 2 \right| = 1 \Leftrightarrow |iz + 2| = 1 \Leftrightarrow |z - 2i| = 1 \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = 1$

$\Rightarrow$ tập hợp điểm biểu diễn điểm M là đường tròn tâm $I(0;2)$, bán kính $R=1$.



Khi đó $M = |z - w| = |z(1-i)| \Leftrightarrow M = \sqrt{2}|z| \leq 3\sqrt{2}$

Vậy $M_{\max} = 3\sqrt{2}$.

Câu 34: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 3, |z_2| = 4, |z_1 - z_2| = \sqrt{37}$. Gọi M, m lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $w = \frac{z_1}{z_2}$. Tính $P = M^2 - m^2$.

A. $P = -\frac{9}{32}$.

B. $P = \frac{9}{32}$.

C. $P = -\frac{3}{8}$.

D. $P = -\frac{9}{64}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(a; b), N(c; d)$ là điểm biểu diễn các số phức $z_1 = a + bi$ và $z_2 = c + di, a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Gọi $N'(d; -c)$ thì $ON = ON'; \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{ON'} = 0 \Rightarrow ON \perp ON'$

Ta có

$$\Rightarrow z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} \Leftrightarrow z = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} \Leftrightarrow z = \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{16}$$

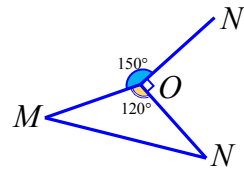
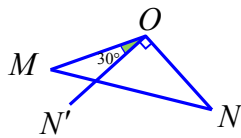
$$\Leftrightarrow z = \frac{ac+bd}{16} + \frac{bc-ad}{16}i \Leftrightarrow z = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}}{16} - \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON'}}{16}i$$

$$\Rightarrow |z_2 - z_1| = |\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{37}$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{MON} = \frac{OM^2 + ON^2 - MN^2}{2 \cdot OM \cdot ON} \Rightarrow \cos \widehat{MON} = \frac{9 + 16 - 37}{2 \cdot 3 \cdot 4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MON} = 120^\circ$$

Với $\widehat{MON} = 120^\circ$, ta có:

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = OM \cdot ON \cdot \cos \widehat{MON} = -6$$



$$\Rightarrow \widehat{MON} = 120^\circ \Rightarrow \begin{cases} \widehat{MON'} = 30^\circ \\ \widehat{MON'} = 150^\circ \end{cases}$$

○ Với $\widehat{MON'} = 30^\circ$, có $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON'} = OM \cdot ON' \cdot \cos \widehat{MON} = 6\sqrt{3}$

$$\text{Khi đó } z = -\frac{3}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8}i$$

○ Với $\widehat{MON'} = 150^\circ$, có $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON'} = OM \cdot ON' \cdot \cos \widehat{MON} = -6\sqrt{3}$

$$\text{Khi đó } z = -\frac{3}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}i.$$

$$\text{Vậy } z = \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{8} \text{ và } P = M^2 - m^2 = \frac{-9}{32}.$$

Cách 2. Chuẩn hóa sao cho thỏa mãn đề bài $|z_1| = 3$, $|z_2| = 4$, $|z_1 - z_2| = \sqrt{37}$. Ta được

$$z_1 = 3; z_2 = a + bi \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 16 \\ (a-3)^2 + b^2 = 37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{-2 + 2i\sqrt{3}} = \frac{-3}{8} - \frac{-3\sqrt{3}}{8}i \Rightarrow M^2 - m^2 = \frac{-9}{32}$$

Câu 35: Gọi z là số phức sao cho $P = |z - 1 - i| + |z - 1 - 4i| + |z - 2 + i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $|z|$.

A. $\sqrt{2}$.

B. 1.

C. 2.

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có: $P = |z - 1 - i| + |z - 1 - 4i| + |z - 2 + i|$, với $A(1; 4)$, $B(1; 1)$, $C(2; -1)$ thì

$$P = MA + MB + MC; \quad \overrightarrow{BA} = (0; 3), \quad \overrightarrow{BC} = (1; -2)$$

Vì $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$ không cùng phương nên ba điểm A , B , C lập thành một tam giác có

$$\cos B = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{BA \cdot BC} = -\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \hat{B} \approx 153^\circ > 120^\circ$$

Khi đó để $P_{\min}$ thì $M \equiv B$ (vì M là điểm *Torricelli*) $\Rightarrow z = -1 - i$

$$\text{Vậy } |z| = \sqrt{2}.$$

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Câu 36. Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-1-i|=5$. Hỏi giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-7-9i|+\sqrt{2}|(1+i)z+8-8i|$ là?

- A. $3\sqrt{5}$. B. $5\sqrt{5}$. C. $2\sqrt{5}$. D. $4\sqrt{5}$.

Câu 37. Cho số phức z thỏa mãn $|z-i|=2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z+2|+|z+2-2i|$. Tính $P=M+m$.

- A. $P=2+\sqrt{17}$. B. $P=2+2\sqrt{17}$. C. $P=\sqrt{2+2\sqrt{17}}$. D. $P=\sqrt{2+\sqrt{17}}$.

Câu 40. Cho số phức z thỏa mãn $|z^2+4|=|z|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính $P=M+m$.

- A. $P=\frac{2\sqrt{17}+1}{2}$. B. $P=\sqrt{17}$. C. $P=\frac{\sqrt{17}+1}{2}$. D. $P=\frac{2\sqrt{17}-1}{2}$.

Câu 41. Cho số phức $z=a+bi$, ($a \geq 0, b \geq 0$) thỏa mãn $a-b-2 \leq 0$; $a+4b-12 \leq 0$. Hỏi giá trị lớn nhất của $|z|$ là bao nhiêu?

- A. $2\sqrt{5}$. B. $3\sqrt{2}$. C. 5. D. $2\sqrt{6}$.

Câu 42. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1-z_2=3+4i$ và $|z_1+z_2|=5$. Hỏi giá trị lớn nhất của biểu thức $|z_1|+|z_2|$ là bao nhiêu?

- A. 5. B. $5\sqrt{3}$. C. $12\sqrt{5}$. D. $5\sqrt{2}$.

Câu 43. Cho số phức z . Kí hiệu A, B, C, D lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $z, \bar{z}, z(4+3i)$ và $\overline{z(4+3i)}$. Biết A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình chữ nhật. Hỏi giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z+4i-5|$ là bao nhiêu?

- A. $\frac{5}{\sqrt{34}}$. B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. D. $\frac{4}{\sqrt{13}}$.

Câu 44. Cho số phức $z=\frac{i-m}{1-m(m-2i)}$, trong đó m là số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho $|z-i| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Hỏi trong S có tất cả bao nhiêu phần tử nguyên?

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 5.

Câu 45. Cho số phức z khác 0. Tính diện tích của tam giác có ba đỉnh là ba điểm biểu các số phức z, iz và $z+iz$.

- A. $|z|^2$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}|z|^2$. C. $\frac{1}{2}|z|^2$. D. $\frac{3}{2}|z|^2$.

Câu 46. Xét số phức z thỏa mãn $|z+2-3i|+|z-6-i|=2\sqrt{17}$. Gọi M , m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=||z+1-2i|-|z-2+i||$.

A. $M=3\sqrt{2}$, $m=0$.

B. $M=3\sqrt{2}$, $m=\sqrt{2}$.

C. $M=3\sqrt{2}$, $m=5\sqrt{2}-2\sqrt{5}$.

D. $M=\sqrt{2}$, $m=5\sqrt{2}-2\sqrt{5}$.

Câu 47. Xét số phức z thỏa mãn $|z-2+2i|-|z+1-3i|=\sqrt{34}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1+i|$.

A. $P_{\min}=\frac{9}{\sqrt{34}}$.

B. $P_{\min}=3$.

C. $P_{\min}=\sqrt{13}$.

D. $P_{\min}=4$.

Câu 48. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2|+|z+2|=6$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=|z-1+3i|$.

Câu 49. Cho số phức z thỏa mãn $z.\bar{z}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|z^3+z+\frac{7}{\bar{z}^2}\right|-3\left|1+\frac{1}{z}\right|$.

A. $\frac{5}{2}$.

B. $\frac{11}{4}$.

C. 2 .

D. 3 .

Câu 50. Cho z_1, z_2 là hai số phức liên hợp của nhau thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3$ là số thực và $|z_1^2-z_2^2|=4\sqrt{3}$. Đặt $T=|z_1^2+z_2^2|$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\frac{3}{2}<T<\frac{5}{2}$.

B. $0<T<\frac{3}{2}$.

C. $\frac{1}{2}<|z_1|<\frac{19}{5}$.

D. $3<T<\frac{9}{2}$.