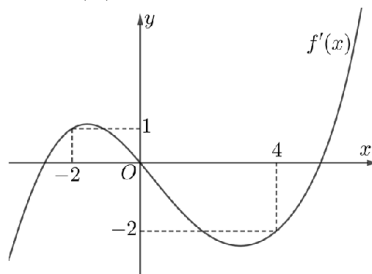


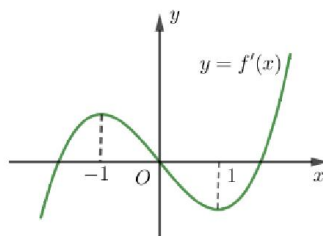
PHẦN 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU

- Câu 1.** (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Cho hàm số đa thức $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0) = 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình sau.



Hàm số $g(x) = |4f(x) + x^2|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(4; +\infty)$. B. $(0; 4)$. C. $(-\infty; -2)$. D. $(-2; 0)$.
- Câu 2.** (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020) Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+6)x + \frac{2}{3}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?
- A. 9. B. 10. C. 6. D. 5.
- Câu 3.** (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f(1) = 1$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên dương a để hàm số $y = |4f(\sin x) + \cos 2x - a|$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?



- A. 2. B. 3. C. Vô số. D. 5.
- Câu 4.** (Chuyên Hưng Yên - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + m}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$ và đồng biến trên khoảng $(4; 6)$.
- A. 6. B. 7. C. 5. D. 4.
- Câu 5.** (Chuyên Hưng Yên - 2020) Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{1-\ln x} + 1}{\sqrt{1-\ln x} + m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-5; 5]$ để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{e^3}; 1\right)$.
- A. 7. B. 6. C. 5. D. 4.
- Câu 6.** (Chuyên KHTN - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau.

x	$-\infty$	-3	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(2 - 3x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(2;3)$. B. $(1;2)$. C. $(0;1)$. D. $(1;3)$.

Câu 7. (Chuyên KHTN - 2020) Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx-4}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$ là

- A. $(-2;1]$. B. $(-2;2)$. C. $(-2;-1]$. D. $(-2;-1)$.

Câu 8. (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - Quảng Nam - 2020) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{mx-1}{m-4x}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; \frac{1}{4})$.

- A. $m > 2$. B. $1 \leq m < 2$. C. $-2 < m < 2$. D. $-2 \leq m \leq 2$.

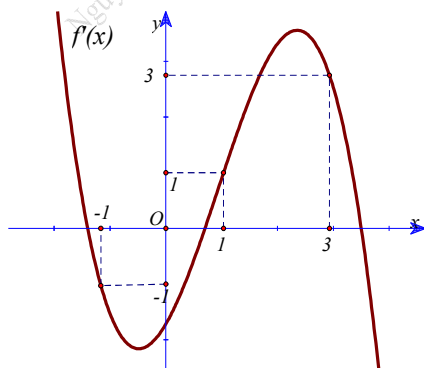
Câu 9. (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - Quảng Nam - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-10		-2		3		8		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = f(x^3 + 4x + m)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$?

- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

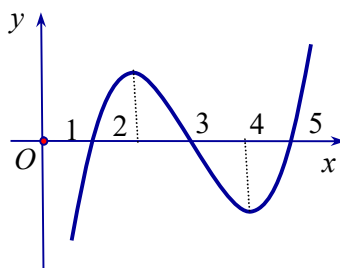
Câu 10. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho như hình vẽ



Hàm số $g(x) = 2f(|x-1|) - x^2 + 2x + 2020$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(0;1)$. B. $(-3;1)$. C. $(1;3)$. D. $(-2;0)$.

Câu 11. (Chuyên Bến Tre - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ biết hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(x+1)$. Kết luận nào sau đây đúng?

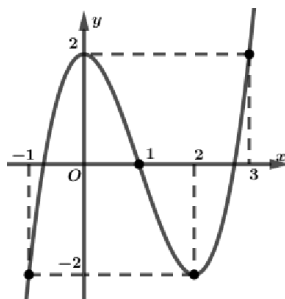


- A.** Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;4)$.
B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.
C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.
D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(4;6)$.

Câu 12. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = \frac{\ln x - 6}{\ln x - 2m}$ đồng biến trên khoảng $(1; e)$?

- A.** 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 13. (Chuyên Lào Cai - 2020) Cho hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x) = f(3x+1) + 9x^3 + \frac{9}{2}x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



- A.** $(-1;1)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 14. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020) Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $f(x) = m(2020 + x - 2\cos x) + \sin x - x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A.** Vô số. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 15. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-5	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

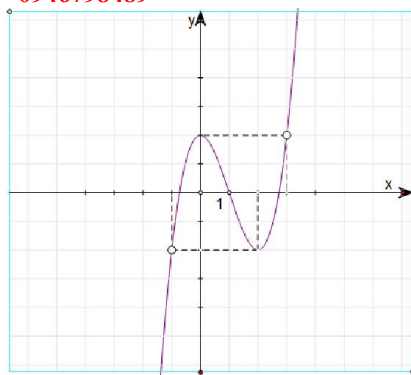
Hàm số $g(x) = f(3 - 2^x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây

- A.** $(3; +\infty)$. **B.** $(-\infty; -5)$. **C.** $(1; 2)$. **D.** $(2; 7)$.

Câu 16. (Chuyên Quang Trung - 2020) Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 + 4) + mx + 12$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

- A.** $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ **C.** $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$. **D.** $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Câu 17. (Chuyên Quang Trung - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(x-m) - \frac{1}{2}(x-m-1)^2 + 2019$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$. Tổng tất cả các phần tử trong S bằng



- A. 4. B. 11. C. 14. D. 20.

Câu 18. (Chuyên Sơn La - 2020) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + (4m - 9)x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ là

- A. $\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right]$. B. $\left[-\frac{3}{4}; +\infty\right)$. C. $[0; +\infty)$. D. $(-\infty; 0]$.

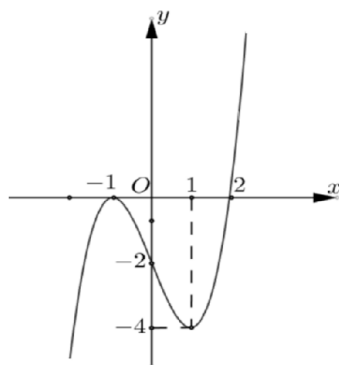
Câu 19. (Chuyên Thái Bình - 2020) Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = |x^3 - mx^2 + 12x + 2m|$ luôn đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

- A. 18. B. 19. C. 21. D. 20.

Câu 20. (Chuyên Thái Nguyên - 2020) Cho hàm số $y = \frac{mx - 2m + 3}{x + m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$. Tìm số phần tử của S .

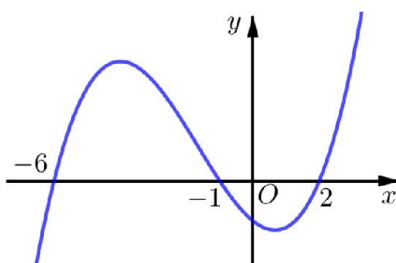
- A. 5. B. 3. C. 4. D. 1.

Câu 21. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?



- A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0; 2)$. B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.
C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1; 0)$. D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$.

Câu 22. (Đại Học Hà Tĩnh - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $y = f(3 - x^2)$ đồng biến trên khoảng

- A. $(0;1)$. B. $(-1;0)$. C. $(2;3)$. D. $(-2;-1)$.

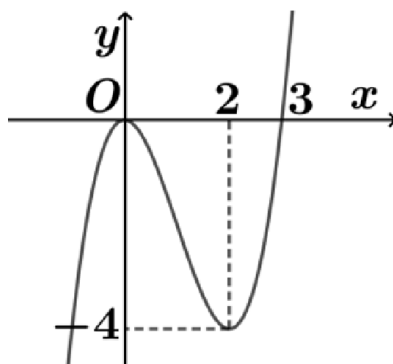
Câu 23. (ĐHQG Hà Nội - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+18}{x+4m}$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

- A. Vô số. B. 0. C. 3. D. 5.

Câu 24. (ĐHQG Hà Nội - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-8;8)$ sao cho hàm số $y = |-2x^3 + 3mx - 2|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

- A. 10. B. 9. C. 8. D. 11.

Câu 25. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $g(x) = f(e^x - 2) - 2020$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$. B. $(-1;2)$. C. $(0; +\infty)$. D. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

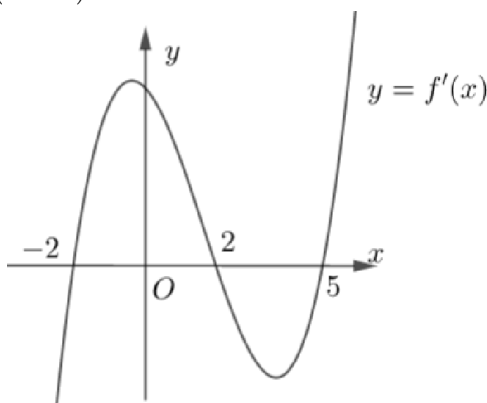
Câu 26. (Sở Hà Tĩnh - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+9}{4x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;4)$?

- A. 5. B. 11. C. 6. D. 7.

Câu 27. (Sở Ninh Bình) Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$. Tổng giá trị các phần tử của T bằng

- A. 9. B. 45. C. 55. D. 36.

Câu 28. (Sở Ninh Bình) Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x^2 + 2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $(2;3)$. B. $(-3;-2)$. C. $(-1;1)$. D. $(-1;0)$.

Câu 29. (Sở Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - (m-1)x^2 + 3(m-1)x + 1$. Số các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ là

- A. 7. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 30. (Sở Yên Bái - 2020) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{-mx + 3m + 4}{x - m}$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$

- A. $-1 < m < 4$. B. $-1 < m \leq 1$. C. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 4 \end{cases}$. D. $1 \leq m < 4$.

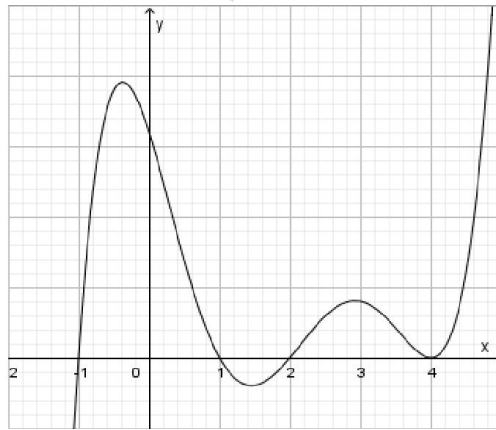
Câu 31. (Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-2020; 2020)$ sao cho hàm số $y = \frac{3x + 18}{x - m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$?

- A. 2020. B. 2026. C. 2018. D. 2023.

Câu 32. (Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020) Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{m - \sin x}{\cos^2 x}$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$.

- A. $m \geq 1$. B. $m \leq 2$. C. $m \leq \frac{5}{4}$. D. $m \leq 0$.

Câu 33. (Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(2019 - 2020x)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



- A. $(-1; 0)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $(0; 1)$. D. $(1; +\infty)$.

Câu 34. (Kim Liên - Hà Nội - 2020) Số giá trị nguyên thuộc khoảng $(-2020; 2020)$ của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2019$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ là

- A. 2018. B. 2019. C. 2020. D. 2017.

Câu 35. (Lê Lai - Thanh Hóa - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $[-2020; 2020]$ để hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

- A. 2004. B. 2017. C. 2020. D. 2009.

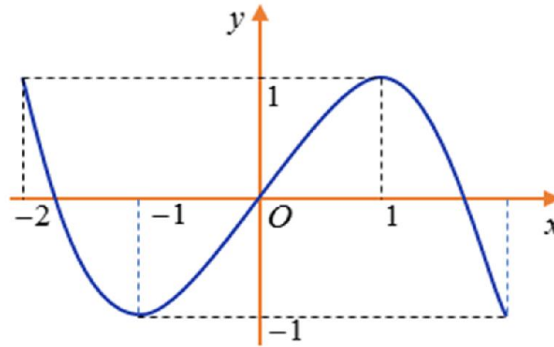
Câu 36. (Liên trường Nghệ An - 2020) Tổng bình phương của tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = (3m^2 - 12)x^3 + 3(m - 2)x^2 - x + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là?

- A. 9. B. 6. C. 5. D. 14.

Câu 37. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020) Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Câu 38. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



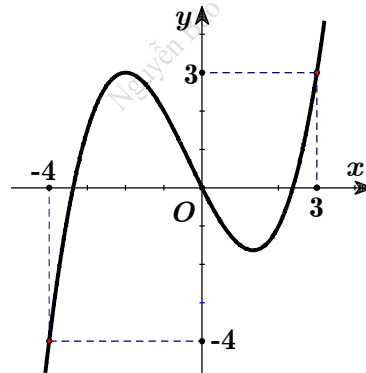
Hàm số $y = f(\cos x) + x^2 - x$ đồng biến trên khoảng

- A. $(-2; 1)$. B. $(0; 1)$. C. $(1; 2)$. D. $(-1; 0)$.

Câu 39. (Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020) Cho hàm số $f(x) = x^3 - (m + 1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 40. (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020) Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = f(3x^2 - 1) - \frac{9}{2}x^4 + 3x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây.

- A. $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$. B. $\left(0; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. C. $(1; 2)$. D. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Câu 41. (Tiên Du - Bắc Ninh - 2020) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2020; 2020)$ sao cho hàm số $y = 2x^3 + mx^2 + 2x$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$. Tính số phần tử của tập hợp S .

- A. 2025. B. 2016. C. 2024. D. 2023.

Câu 42. (Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 + 6x + 4, \forall x \in \mathbb{R}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc $(-2020; 2020)$ của tham số m để hàm số $g(x) = f(x) - (2m + 4)x - 5$ nghịch biến trên $(0; 2)$?

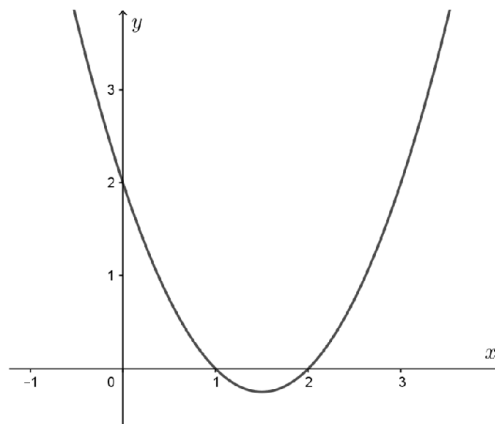
- A. 2008. B. 2007. C. 2018. D. 2019.

Câu 43. (Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số

$$y = \frac{x+4}{2x-m} \text{ nghịch biến trên khoảng } (-3;4).$$

- A. Vô số. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 44. (Trường VINSCHOOL - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$. Biết đồ thị hàm số $y' = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên



Hàm số $g(x) = f(2x - 3x^2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$. B. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. C. $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$. D. $\left(-2; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 45. (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ sao cho hàm số $y = \frac{x^4}{4} - \frac{mx^3}{3} - \frac{x^2}{2} + mx + 2020$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$?

- A. 12. B. 11. C. 9. D. 10.

Câu 46. (Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020) Với mọi giá trị $m \geq a\sqrt{b}$, $(a, b \in \mathbb{Z})$ thì hàm số $y = 2x^3 - mx^2 + 2x + 5$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$. Khi đó $a - b$ bằng

- A. 1. B. -2. C. 3. D. -5.

Câu 47. (Trần Phú - Quảng Ninh - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-4		-1		2		7		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y = f(2x+1) + \frac{2}{3}x^3 - 8x + 5$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

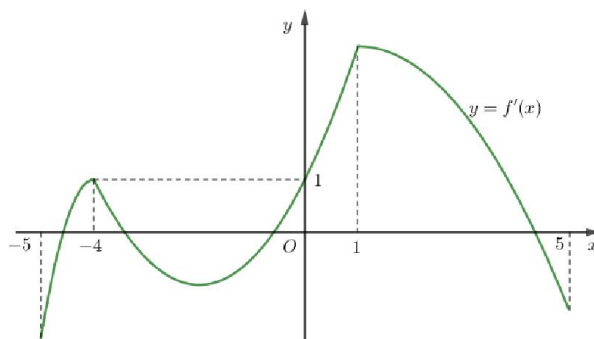
- A. $(-\infty; -2)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-1; 7)$. D. $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

PHẦN 2. CỰC TRỊ

Câu 48. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$.

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Câu 49. (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x^2 + 4x) - x^2 - 4x$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng $(-5; 1)$?



- A. 5. B. 4. C. 6. D. 3.

Câu 50. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của hàm số $y = f'(x)$ như hình sau:

x	$-\infty$	-2	0	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Hỏi hàm số $g(x) = f(1-x) + \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$ đạt cực tiểu tại điểm nào trong các điểm sau?

- A. $x = 3$. B. $x = 0$. C. $x = -3$. D. $x = 1$.

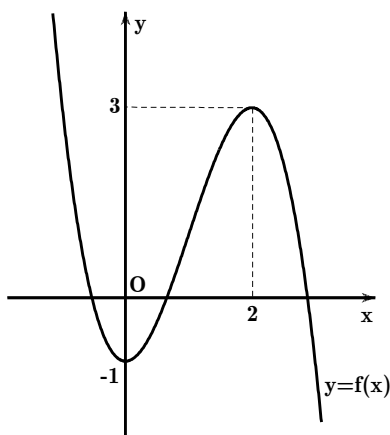
Câu 51. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Cho hàm số $f(x) = x^4 + ax^2 + b$ có giá trị cực đại $y_{CD} = 9$ và giá trị cực tiểu $y_{CT} = 1$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x^2) = m^2$ có 4 nghiệm phân biệt.

- A. 2. B. 7. C. 1. D. 6.

Câu 52. (Chuyên KHTN - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^3 - (2m-1)x^2 + 2mx - m - 1$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành?

- A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.

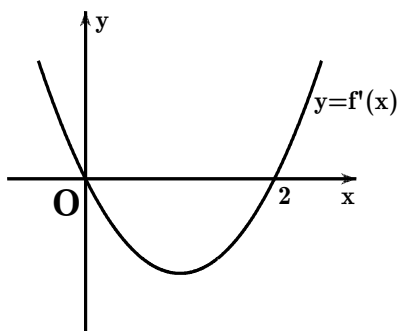
Câu 53. (Chuyên KHTN - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = f(x^3 + x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 . Giá trị x_0 thuộc khoảng nào sau đây

- A. $(1; 3)$. B. $(-1; 1)$. C. $(0; 2)$. D. $(3; +\infty)$.

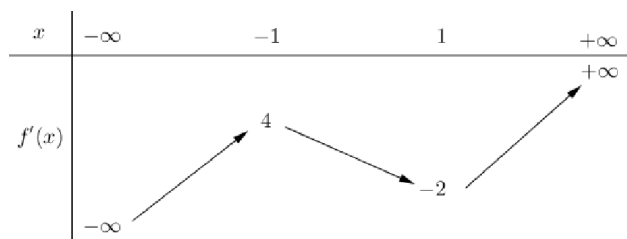
Câu 54. (Chuyên KHTN - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(-x^2 + x)$ là

- A. 1. B. 4. C. 3. D. 2.

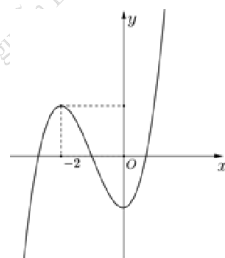
Câu 55. (Chuyên Lam Sơn - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ là

- A. 4. B. 5. C. 1. D. 7.

Câu 56. (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - Quảng Nam - 2020) Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(-2x^2 + 4x)$ là

- A. 5. B. 2. C. 4. D. 3.

Câu 57. (Chuyên Lào Cai - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)^4(x+4)^3[x^2 + 2(m+3)x + 6m + 18]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có **đúng** một điểm cực trị?

- B. 7. B. 5. C. 8. D. 6.

Câu 58. (Chuyên Quang Trung - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như hình vẽ bên

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$		
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2|x|)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

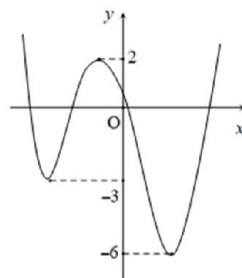
- A. 4 B. 7 C. 9 D. 11

Câu 59. (Chuyên Sơn La - 2020) Gọi S là tập hợp những giá trị của tham số m để hàm số sau không có cực trị trên $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{1}{4}m^2 \cdot e^{4x} + \frac{1}{3}m \cdot e^{3x} - \frac{1}{2}e^{2x} - (m^2 + m - 1)e^x.$$
 Tổng tất cả các phần tử của tập S bằng

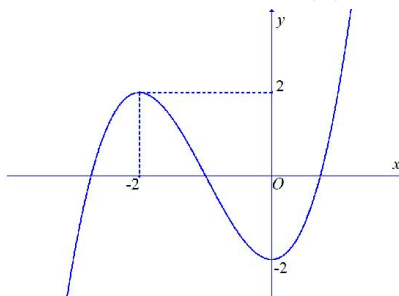
- A. $-\frac{2}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. -1 .

Câu 60. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 4 và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-12; 12]$ để hàm số $g(x) = |2f(x-1) + m|$ có 5 điểm cực trị?



- A. 13. B. 14. C. 15. D. 12.

Câu 61. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020) Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(-2x^2 + 4x)$

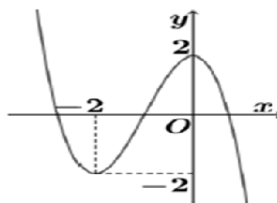


- A. 2. B. 5. C. 4. D. 3.

Câu 62. (ĐHQG Hà Nội - 2020) Điều kiện của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 - mx}{1 - x}$ có cực đại và cực tiểu là

- A. $m < 0$. B. $m > -1$. C. $m < 2$. D. $m > -2$.

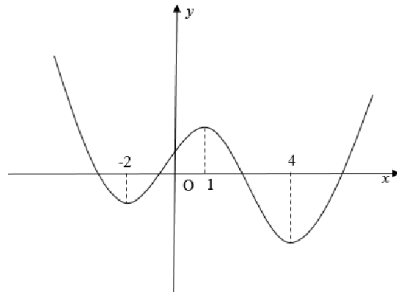
Câu 63. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(-x^2 + x)$ bằng

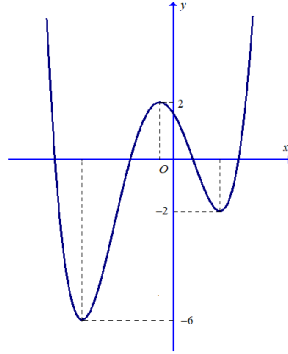
- A. 1. B. 5. C. 2. D. 3.

Câu 64. (Sở Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f\left(e^x - \frac{x^2 + 2x}{2}\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



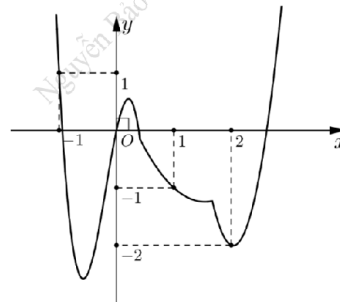
- A. 3. B. 7. C. 6. D. 4.

Câu 65. (Sở Bình Phước - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để hàm số $g(x) = |f(x+2020) + m^2|$ có 5 điểm cực trị?



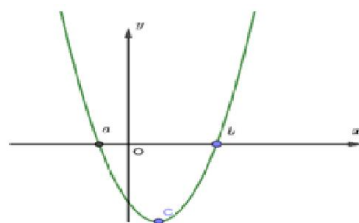
- A. 1. B. 2. C. 4. D. 5.

Câu 66. (Sở Yên Bái - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) + x^2 + 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?



- A. Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
 B. Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.
 C. Hàm số $y = g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.
 D. Hàm số $y = g(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.

Câu 67. (Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị của hàm đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ và $f(b) = 1$. Số giá trị nguyên của $m \in [-5; 5]$ để hàm số $g(x) = |f^2(x) + 4f(x) + m|$ có đúng 5 điểm cực trị là



- A. 8. B. 10. C. 9. D. 7.

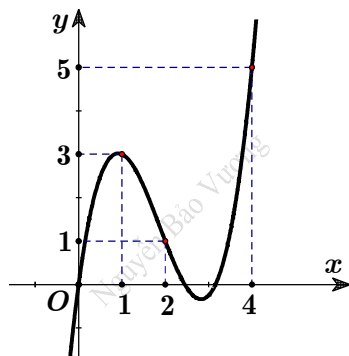
- Câu 68. (Kim Liên - Hà Nội - 2020)** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị?
- A. 16. B. 28. C. 26. D. 27.

- Câu 69. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f(x)$					

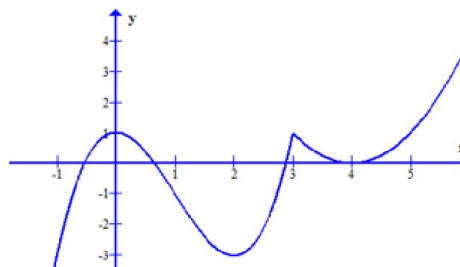
Hàm số $y = f(2x)$ đạt cực đại tại

- A. $x = \frac{1}{2}$. B. $x = -1$. C. $x = 1$. D. $x = -2$.
- Câu 70. (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0) = 0$; $f(4) > 4$. Biết hàm $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

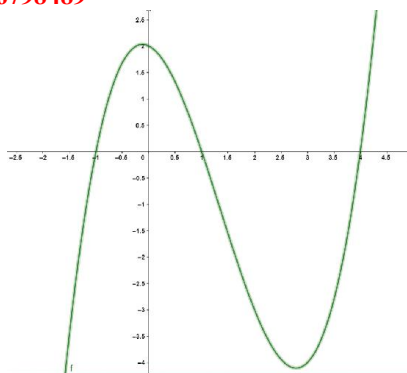


Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x^2) - 2x|$ là

- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.
- Câu 71. (Hải Hậu - Nam Định - 2020)** Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(4; +\infty)$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(2|x| - 2)$ bằng



- A. 7. B. 5. C. 4. D. 9.
- Câu 72. (Hải Hậu - Nam Định - 2020)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Tìm điểm cực đại của hàm số $y = 2019^{-f(x)} - 2020^{f(x)}$.

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

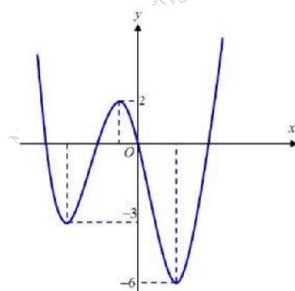
Câu 73. (Kim Thành - Hải Dương - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ là một hàm đa thức có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - |x|)$

- A. 5. B. 3. C. 1. D. 7.

Câu 74. (Trần Phú - Quảng Ninh - 2020) Cho đồ thị $y = f(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \left| f(x+2018) + \frac{1}{3}m^2 \right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng tất cả các giá trị của các phần tử trong tập S bằng

- A. 6. B. 5. C. 7. D. 9.

PHẦN 3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

Câu 75. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Cho hàm số $y = \left| \frac{x^4 + ax + a}{x+1} \right|$, với a là tham số thực. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[1; 2]$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để $M \geq 2m$?

- A. 10. B. 14. C. 5. D. 20.

Câu 76. (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 30. Tổng giá trị các phần tử của tập hợp S bằng bao nhiêu?

- A. 120. B. 210. C. 108. D. 136.

Câu 77. (Chuyên Lương Văn Ty - Ninh Bình - 2020) Cho hàm số $f(x) = |3e^{4x} - 4e^{3x} - 24e^{2x} + 48e^x + m|$. Gọi A, B lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0; \ln 2]$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-23; 10)$ thỏa mãn $A \leq 3B$. Tổng các phần tử của tập S bằng

A. -33. B. 0. C. -111. D. -74.

Câu 78. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 2020$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m sao cho hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. 2. B. 1. C. Vô số. D. 3.

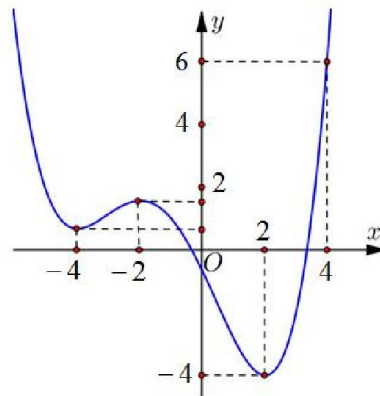
Câu 79. (Chuyên Bến Tre - 2020) Cho hàm số $y = |x^4 - 2x^3 + x^2 + a|$. Có bao nhiêu số thực a để $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = 10$?

A. 3. B. 5. C. 2. D. 1.

Câu 80. (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020) Cho hàm số $f(x) = |x^3 - 3x^2 + m|$. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ không lớn hơn 2020?

A. 4045. B. 4046. C. 4044. D. 4042.

Câu 81. (Chuyên Lào Cai - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| f\left(\frac{8x}{x^2 + 1}\right) + m - 1 \right|$ có giá trị lớn nhất không vượt quá 2020?

A. 4029. B. 4035. C. 4031. D. 4041.

Câu 82. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020) Xét hàm số $f(x) = \left| \frac{mx - 2\sqrt{x+4}}{2x+4} \right|$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu số nguyên m thỏa mãn điều kiện $0 < \min_{[-1;1]} f(x) < 1$?

A. 4. B. 8. C. 2. D. 1.

Câu 83. (Chuyên Sơn La - 2020) Gọi S là tập hợp những giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^3 - 12x + m|$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng 12. Tổng tất cả các phần tử của tập S bằng

A. 25. B. 4. C. 15. D. 21.

Câu 84. (Chuyên Thái Nguyên - 2020) Gọi S_0 là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m \right|$ trên đoạn $[2; 4]$ không vượt quá 30. Số phần tử của S là

A. 50.

B. 49.

C. 66.

D. 73.

Câu 85. (Đại Học Hà Tĩnh - 2020) Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |e^{2x} - 4e^x + m|$ trên đoạn $[0; \ln 4]$ bằng 6?

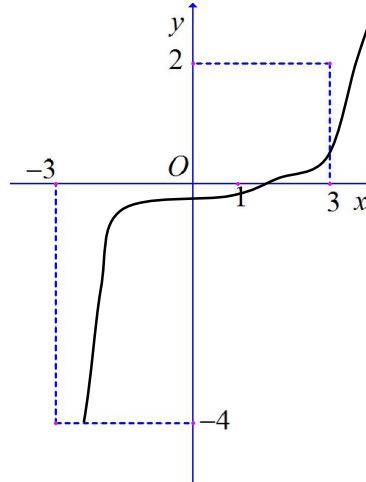
A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Câu 86. (Sở Hưng Yên - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x-1)^2$.



Khi đó $y = g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3; 3]$ tại

A. $x = -3$.

B. $x = 3$.

C. $x = 0$.

D. $x = 1$.

Câu 87. (Sở Bình Phước - 2020) Cho hàm số $f(x) = m\sqrt{x-1}$ (m là tham số thực khác 0). Gọi m_1, m_2 là hai giá trị của m thỏa mãn $\min_{[2;5]} f(x) + \max_{[2;5]} f(x) = m^2 - 10$. Giá trị của $m_1 + m_2$ bằng

A. 3.

B. 5.

C. 10.

D. 2.

Câu 88. (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số $y = \frac{m \sin x + 1}{\cos x + 2}$ có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-5; 5]$

để giá trị nhỏ nhất của y nhỏ hơn -1 .

A. 4.

B. 2.

C. 6.

D. 8.

Câu 89. (Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020) Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{3}x^3 - 9x + m + 10 \right|$ trên đoạn $[0; 3]$ không vượt quá 12. Tổng giá trị các phần tử của S bằng bao nhiêu?

A. -7 .

B. 0.

C. 3.

D. 12.

Câu 90. (Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020) Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 30. Tổng tất cả các giá trị của S là

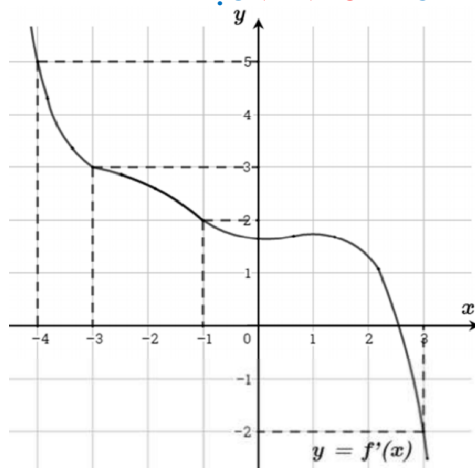
A. 180.

B. 136.

C. 120.

D. 210.

Câu 91. (Kim Liên - Hà Nội - 2020) Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Trên $[-4; 3]$, hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm



- A. $x = -3$. B. $x = -4$. C. $x = 3$. D. $x = -1$.

Câu 92. (Lê Lai - Thanh Hóa - 2020) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{34}{\sqrt{(x^3 - 3x + 2m)^2 + 1}}$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng 2. Tổng tất cả các phần

tử của S bằng

- A. 8. B. -8. C. -6. D. -1.

Câu 93. (Liên trường Nghệ An - 2020) Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = |2x^3 - 15x + m - 5| + 9x$ trên $[0; 3]$ bằng 60. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số thực m .

- A. 48. B. 5. C. 6. D. 62.

Câu 94. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

- A. 2. B. 6. C. 1. D. 0.

Câu 95. (Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020) Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 2x^3 + x^2 + m|$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\min_{[-1; 2]} f(x) + \max_{[-1; 2]} f(x) = 10$. Số phần tử của S là?

- A. 2. B. 3. C. 5. D. 1.

Câu 96. (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020) Cho hàm số $y = (x^3 - 3x + m + 1)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 1 là

- A. -2. B. 4. C. -4. D. 0.

Câu 97. (Tiên Du - Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $f(x) = m + \int_0^x \frac{3t^4 + 4t^3}{(t+1)^2} dt$ với $x \in [1; 2]$ và m là tham

số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $\max_{[1; 2]} |f(x)| \geq 3 \min_{[1; 2]} |f(x)|$?

- A. 9. B. 7. C. 10. D. 8.

Câu 98. (Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0) = 3, f'(2) = f'(-2018) = 0$, và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(|x - 1| - 2018)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(-\infty; -2015)$. B. $(1; 3)$. C. $(-1009; 2)$. D. $(-2015; 1)$.

Câu 99. (Hải Hậu - Nam Định - 2020) Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x) = \left| \frac{2mx - 2\sqrt{4x+8}}{x+2} \right|$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1; 1]$ là a thỏa mãn $0 < a < 1$.

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 2.

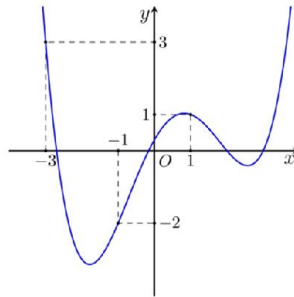
Câu 100. (Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020) Cho hàm số $y = |x^4 - 2x^2 + 3m|$ với m là tham số. Biết rằng có đúng hai giá trị m_1, m_2 của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[-1; 2]$ bằng 2021. Tính giá trị $|m_1 - m_2|$.

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{4052}{3}$. C. $\frac{8}{3}$. D. $\frac{4051}{3}$.

Câu 101. (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020) Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + m + 1$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ sao cho $\max_{x \in [1; 4]} |f(x)| \leq 3 \min_{x \in [1; 4]} |f(x)|$. Số phần tử của S là

- A. 4003. B. 4002. C. 4004. D. 4001.

Câu 102. (Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020) Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2020$.



Trong các mệnh đề dưới đây:

- (I) $g(0) < g(1)$. (III) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-3; 1)$.
(II) $\min_{x \in [-3; 1]} g(x) = g(-1)$. (IV) $\max_{x \in [-3; 1]} g(x) = \max \{g(3), g(1)\}$.

Số mệnh đề đúng là:

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.

PHẦN 4. TIỆM CẬN

Câu 103. (Chuyên KHTN - 2020) Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2 - 6x + 2m}}$ có hai đường tiệm cận đứng. Số phần tử của S là

- A. vô số. B. 12. C. 14. D. 13.

Câu 104. (Chuyên Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ (C). Biết rằng $M_1(x_1; y_1)$ và $M_2(x_2; y_2)$ là hai điểm trên đồ thị (C) có tổng khoảng cách đến hai đường tiệm cận của (C) nhỏ nhất. Tính giá trị $P = x_1 x_2 + y_1 y_2$.

- A. 0. B. -2. C. -1. D. 1.

Câu 105. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số

m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2-8x+m}$ có 3 đường tiệm cận?

A. 14.

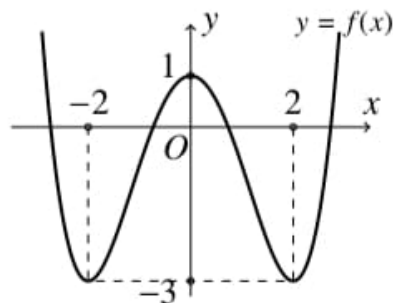
B. 8.

C. 15.

D. 16.

Câu 106. (Chuyên Quang Trung - 2020) Cho hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình

vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{(x^2-4)(x^2+2x)}{[f(x)]^2 + 2f(x) - 3}$ có tổng cộng bao nhiêu tiệm cận đứng?



A. 5.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 107. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		-	-
y	2		$+\infty$

Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận

ngang?

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Câu 108. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m$.

Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{f(x)+2}$ có duy nhất một tiệm cận

ngang.

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. Vô số.

Câu 109. (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020) Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m}$. Có bao nhiêu

giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận?

A. 4039.

B. 4040.

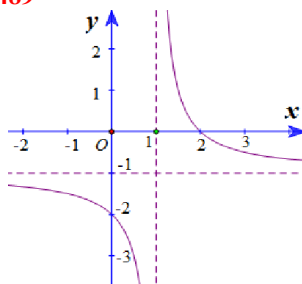
C. 4038.

D. 4037.

PHẦN 5. ĐỀ THI

Câu 110. (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020) Đồ thị trong hình bên dưới là của hàm số

$y = \frac{ax+b}{x+c}$ (với $a, b, c \in \mathbb{R}$).



Khi đó tổng $a + b + c$ bằng

- A. -1. B. 1. C. 2. D. 0.

Câu 111. (Chuyên Lương Văn Tỵ - Ninh Bình - 2020) Cho hàm số $f(x) = \frac{2-ax}{bx-c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, b \neq 0$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'		+	+
y	3	$+\infty$	3

Tổng các số $(a+b+c)^2$ thuộc khoảng nào sau đây

- A. $(1; 2)$. B. $(2; 3)$. C. $\left(0; \frac{4}{9}\right)$. D. $\left(\frac{4}{9}; 1\right)$.

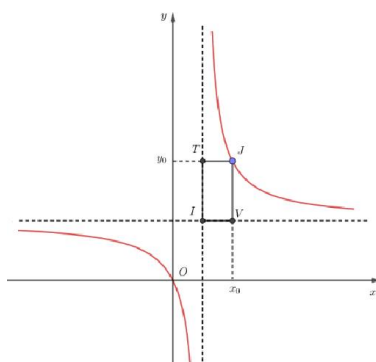
Câu 112. (Chuyên Chu Văn An - 2020) Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = \frac{x-7}{x+1}$, A, B là các điểm thuộc (C) có hoành độ lần lượt là 0 và 3. M là điểm thay đổi trên (C) sao cho $0 < x_M < 3$, tìm giá trị lớn nhất của diện tích $\triangle ABM$.

- A. 5. B. 3. C. 6. D. $3\sqrt{5}$.

Câu 113. (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020) Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$ và $c \neq 0$). Biết rằng đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $(-1; 7)$ và giao điểm hai tiệm cận là $(-2; 3)$. Giá trị biểu thức $\frac{2a+3b+4c+d}{7c}$ bằng

- A. 7. B. 4. C. 6. D. -5.

Câu 114. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020) Cho hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm J thay đổi thuộc (C) như hình vẽ bên.



Hình chữ nhật $ITJV$ có chu vi nhỏ nhất bằng

A. $2\sqrt{2}$.

B. 6.

C. $4\sqrt{2}$.

D. 4.

Câu 115. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020) Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx+c}$ (a, b, c là các tham số) có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	+		+
y	1	$+\infty$	$-\infty$

Xét các phát biểu sau: (1): $c > 1$; (2): $a + b < 0$; (3): $a + b + c = 0$; (4): $a > 0$. Số phát biểu đúng là?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 116. (Đại Học Hà Tĩnh - 2020) Gọi hai điểm M, N lần lượt là hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-1}{x-3}$. Khi đó độ dài đoạn thẳng MN ngắn nhất bằng

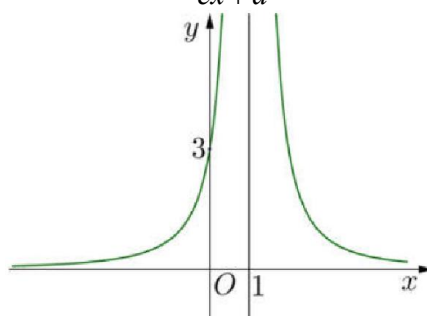
A. $6\sqrt{2}$.

B. $\frac{17}{2}$.

C. 8.

D. 9.

Câu 117. (Sở Hà Tĩnh - 2020) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $(0; 1)$. Giá trị $f(-2)$ bằng

A. -1.

B. 3.

C. 1.

D. -3.

Câu 118. (Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020) Ta xác định được các số a, b, c để đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $(1; 0)$ và có điểm cực trị $(-2; 0)$. Tính giá trị biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2$.

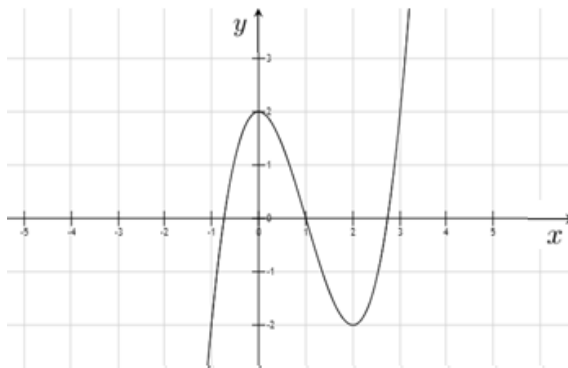
A. 25.

B. -1.

C. 7.

D. 14.

Câu 119. (Lê Lai - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Tính $S = a + b$?



A. $S = -2$.

B. $S = 0$.

C. $S = 1$.

D. $S = -1$.

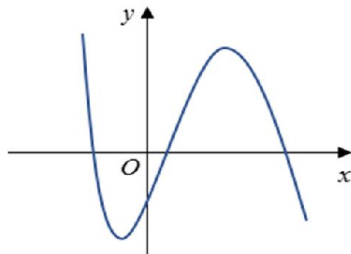
Câu 120. (Liên trường Nghệ An - 2020) Cho hàm số $y = \frac{ax-7}{bx-c}$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
y'	$+$		$+$
y	2	$+\infty$	2

Số nghiệm của phương trình $3^{\log_3(x-9)} \cdot \left[\log_4(bx+a-2)^2 + \log_2(x-2) \right] = c(x-9)$ là

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Câu 121. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



- A. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$. B. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.
C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$. D. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

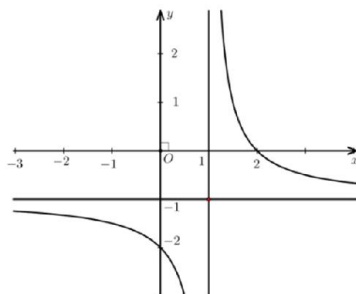
Câu 122. (Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020) Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+1}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	$+$		$+$
y	2	$+\infty$	2

Tập các giá trị b là tập nghiệm của bất phương trình nào dưới đây?

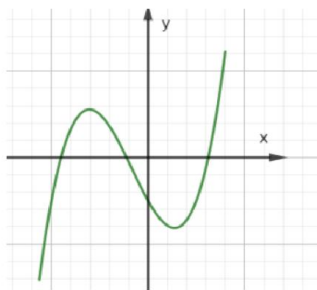
- A. $b^3 - 8 \leq 0$. B. $-b^2 + 4 > 0$. C. $b^2 - 3b + 2 < 0$. D. $b^3 - 8 < 0$.

Câu 123. (Tiên Du - Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (với a, b, c, d là số thực) có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tính giá trị biểu thức $T = \frac{a-2b+3d}{c}$.



- A. $T = 6$. B. $T = 0$. C. $T = -8$. D. $T = 2$.

Câu 124. (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Trong các số a, b, c và d có bao nhiêu số dương?



A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Câu 125. (Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020) Cho hàm số $f(x) = \frac{ax-6}{bx-c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	1	$+\infty$	1

Trong các số a, b, c có bao nhiêu số âm?

A. 0.

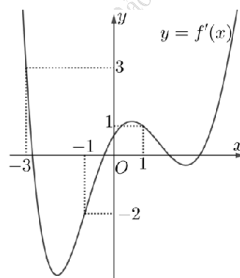
B. 3.

C. 1.

D. 2.

PHẦN 6. TƯƠNG GIAO

Câu 126. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình sau.

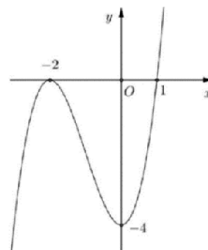


Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình

$$2f(\sin x - 2) - \frac{2\sin^3 x}{3} + \sin x > m + \frac{5\cos 2x}{4} \text{ nghiệm đúng với mọi } x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

A. $m \leq 2f(-3) + \frac{11}{12}$. B. $m < 2f(-1) + \frac{19}{12}$. C. $m \leq 2f(-1) + \frac{19}{12}$. D. $m < 2f(-3) + \frac{11}{12}$.

Câu 127. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình dưới đây



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-5; 5)$ để phương trình

$$f^2(x) - (m+4)|f(x)| + 2m+4 = 0 \text{ có 6 nghiệm phân biệt}$$

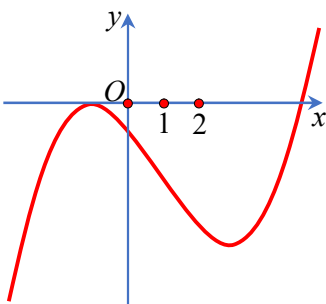
A. 2.

B. 4.

C. 3.

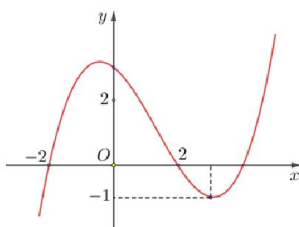
D. 5.

Câu 128. (Chuyên Lam Sơn - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $f(x) > x^2 - 2x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (1; 2)$ khi và chỉ khi



- A. $m \leq f(2) - 2$. B. $m \leq f(1) + 1$. C. $m \leq f(1) - 1$. D. $m \leq f(2)$.

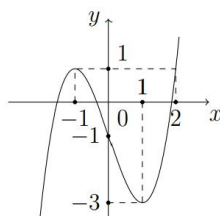
Câu 129. (Chuyên Lam Sơn - 2020) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3 - 3x)| = 1$ là

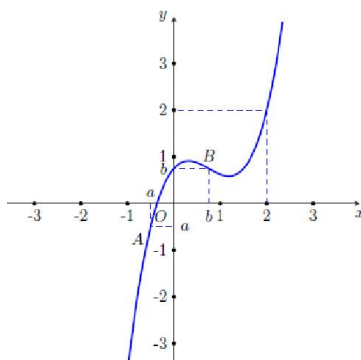
- A. 10. B. 8. C. 9. D. 7.

Câu 130. (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $f[f(\cos x) - 1] = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$?



- A. 2. B. 5. C. 4. D. 6.

Câu 131. (Chuyên Lương Văn Ty - Ninh Bình - 2020) Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ:



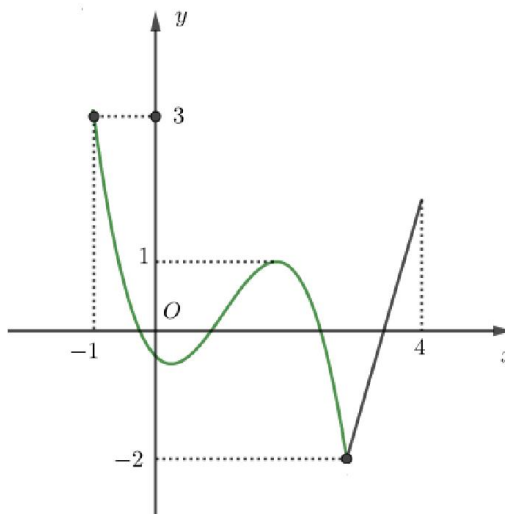
Số nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2}; 3\pi\right)$ của phương trình $f(\cos x + 1) = \cos x + 1$ là

- A. 2. B. 3. C. 5. D. 4.

Câu 132. (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - Quảng Nam - 2020) Tập hợp tất cả các số thực của tham số m để phương trình $x^6 + 6x^4 - m^3x^3 + (15 - 3m^2)x^2 - 6mx + 10 = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ là:

- A. $2 < m \leq \frac{5}{2}$. B. $\frac{7}{5} \leq m < 3$. C. $\frac{11}{5} < m < 4$. D. $0 < m < \frac{9}{4}$.

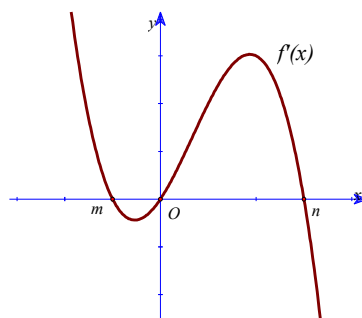
Câu 133. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để bất phương trình $|f(x) + m| < 2m$ đúng với mọi x thuộc đoạn $[-1; 4]$.

- A. 6. B. 5. C. 7. D. 8.

Câu 134. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho hàm số $f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn, có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ

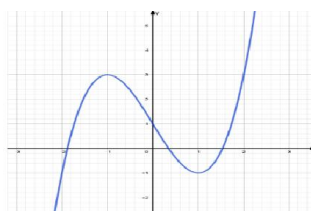


Phương trình $f(x) = 0$ có bốn nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi

- A. $f(0) < 0 < f(m)$. B. $f(0) > 0$. C. $f(m) < 0 < f(n)$. D. $f(0) < 0 < f(n)$.

Câu 135. (Chuyên Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Hỏi phương trình $f(f(\sin x)) - 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$?

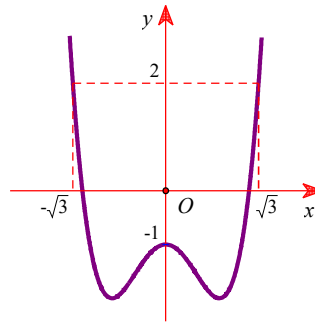


- A. 4. B. 3. C. 5. D. 2.

Câu 136. (Chuyên Bến Tre - 2020) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{-2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB \leq 2\sqrt{2}$. Tổng giá trị các phần tử của S bằng

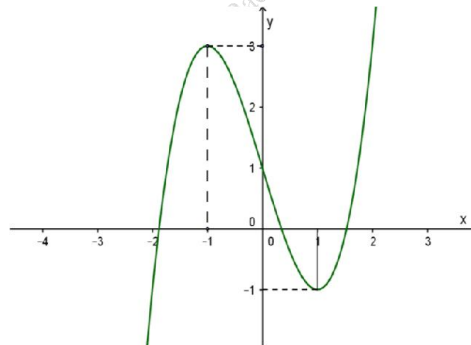
A. -6. B. -27. C. 9. D. 0.

Câu 137. (Chuyên Bến Tre - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Cho bất phương trình $3f(x) \geq x^3 - 3x + m$ (m là tham số thực). Điều kiện cần và đủ để bất phương trình $3f(x) \geq x^3 - 3x + m$ đúng với mọi $x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ là



A. $m \geq 3f(1)$. B. $m \geq 3f(-\sqrt{3})$. C. $m \leq 3f(0)$. D. $m \leq 3f(\sqrt{3})$.

Câu 138. (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x) - m + 2 = 2\sin x$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$. Tổng các phần tử của S bằng



A. 4. B. -1. C. 3. D. 2.

Câu 139. (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020) Cho hàm số $f(x) = x^3 + x + 2$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}) = -x^3 - x + 2$ có nghiệm $x \in [-1; 2]$?

A. 1750. B. 1748. C. 1747. D. 1746.

Câu 140. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020) Có bao nhiêu m nguyên dương để hai đường cong $(C_1): y = \left| 2 + \frac{2}{x-10} \right|$ và $(C_2): y = \sqrt{4x-m}$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương?

A. 35. B. 37. C. 36. D. 34.

Câu 141. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y			2		0		2	
	$-\infty$							$-\infty$

Số nghiệm thuộc khoảng $(-\infty; \ln 2)$ của phương trình $2019f(1-e^x) - 2021 = 0$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 142. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020) Cho hàm số $f(x) = (x-1).(x-2)...(x-2020)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn

$[-2020; 2020]$ để phương trình $f'(x) = m.f(x)$ có 2020 nghiệm phân biệt?

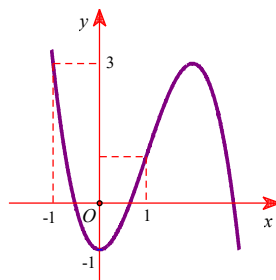
- A. 2020. B. 4040. C. 4041. D. 2020.

Câu 143. (Chuyên Quang Trung - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[2; 4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x + 2\sqrt{x^2 - 2x} = m.f(x)$ có nghiệm thuộc đoạn $[2; 4]$?

x	2	3	$\frac{7}{2}$	4
$f(x)$	4		$\sqrt{11}$	2

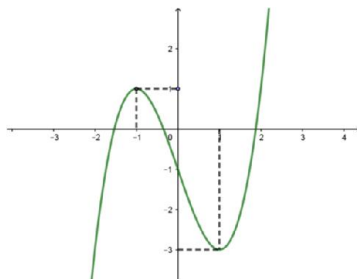
- A. 6. B. 5. C. 4. D. 3.

Câu 144. (Chuyên Sơn La - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x) + (m-2019)f(\cos x) + m-2020 = 0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ là



- A. 1. B. 3. C. 2. D. 5.

Câu 145. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc 3 và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi phương trình $f(f(\cos x) - 1) = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0; 3\pi]$?



- A. 2. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 146. (Chuyên Thái Nguyên - 2020) Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 - m^3 + 3m^2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt. Tổng tất cả các phần tử của T bằng

- A. 1. B. 5. C. 0. D. 3.

Câu 147. (Chuyên Thái Nguyên - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y			5		-3		$+\infty$

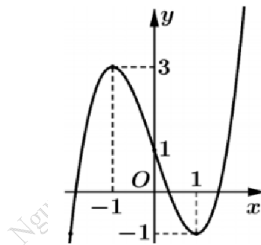
Phương trình $|f(3x+1) - 2| = 5$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 3. B. 5. C. 6. D. 4.

Câu 148. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên.

Biết $f(-1) = 1; f\left(-\frac{1}{e}\right) = 2$. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình

$f(x) < \ln(-x) + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left(-1; -\frac{1}{e}\right)$.



- A. $m \geq 2$. B. $m \geq 3$. C. $m > 2$. D. $m > 3$.

Câu 149. (Đại Học Hà Tĩnh - 2020) Cho đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại 3 điểm

phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 . Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} + \frac{1}{f'(x_3)}$.

- A. $P = 3 + 2b + c$. B. $P = 0$. C. $P = b + c + d$. D. $P = \frac{1}{2b} + \frac{1}{c}$.

Câu 150. (ĐHQG Hà Nội - 2020) Cho phương trình

$4\cos^3 x - 12\cos^2 x - 33\cos x = 4m + 3\sqrt{3}\cos^2 x + 9\cos x + m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm duy nhất thuộc $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.

- A. 15. B. 16. C. 17. D. 18.

Câu 151. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(-1) = 5, f(-3) = 0$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

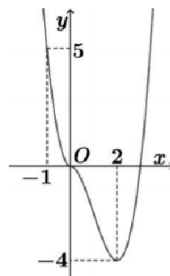
x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	+	0	-	

Số giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $3f(2-x) + \sqrt{x^2 + 4} - x = m$ có nghiệm trong khoảng $(3; 5)$ là

- A. 16. B. 17. C. 0. D. 15.

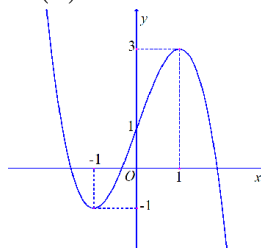
Câu 152. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-1) = 1$, $f\left(-\frac{1}{e}\right) = 2$.

Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Bất phương trình $f(x) < \ln(-x) + x^2 + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left(-1; -\frac{1}{e}\right)$ khi và chỉ khi



- A. $m > 0$. B. $m > 3 - \frac{1}{e^2}$. C. $m \geq 3 - \frac{1}{e^2}$. D. $m \geq 0$.

Câu 153. (Sở Hà Tĩnh - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(\cos x)) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$?

- A. 2. B. 4. C. 5. D. 3.

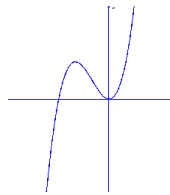
Câu 154. (Sở Hà Tĩnh - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn $|x^3 - 3x^2 + m| \leq 4$ với mọi $x \in [1; 3]$?

- A. 6. B. 3. C. 5. D. 4.

Câu 155. (Sở Ninh Bình) Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ của tham số m để đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt?

- A. 4036. B. 4040. C. 4038. D. 4034.

Câu 156. (Sở Ninh Bình) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(2|\sin x|) = f(m^2 + 6m + 10)$ có nghiệm?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 1.

Câu 157. (Sở Ninh Bình) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2m$. Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 158. (Sở Ninh Bình) Cho hai hàm số $y = \ln \left| \frac{x-2}{x} \right|$ và $y = \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x} + 4m - 2020$, Tổng tất các các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hai hàm số cắt nhau tại một điểm duy nhất là
A. 506. **B.** 1011. **C.** 2020. **D.** 1010.

Câu 159. (Sở Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	1	3	2	$+\infty$

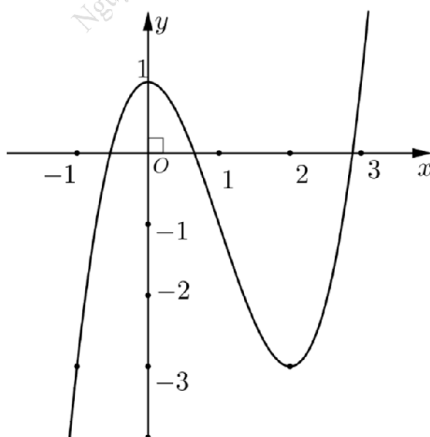
Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ của phương trình $3f\left(\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}}\right) - 7 = 0$ là:

A. 6. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 160. (Sở Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị đi qua điểm $A(1;1), B(2;4), C(3;9)$. Các đường thẳng AB, AC, BC lại cắt đồ thị lần lượt tại các điểm M, N, P (M khác A và B , N khác A và C , P khác B và C). Biết rằng tổng các hoành độ của M, N, P bằng 5, giá trị của $f(0)$ là

A. -6. **B.** -18. **C.** 18. **D.** 6.

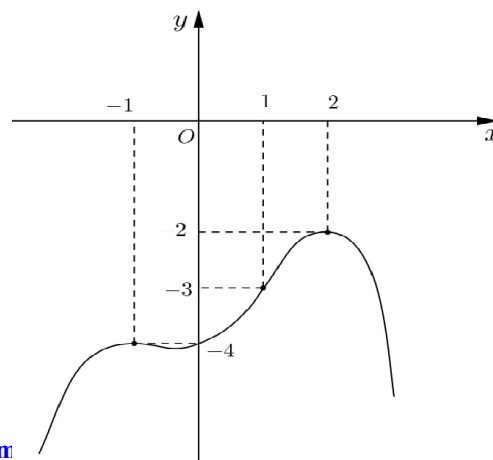
Câu 161. (Sở Yên Bái - 2020) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x^3 - 3x^2 + m) + 3 = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $[-1; 2]$.



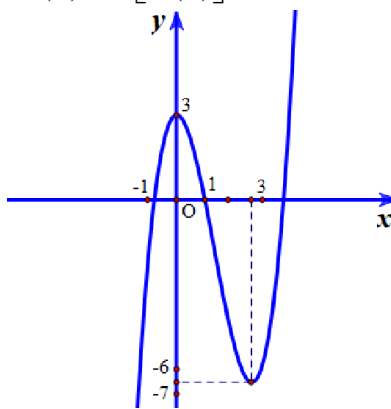
A. 7. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 5.

Câu 162. (Sở Yên Bái - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $16.8^{f(x)} \leq (-m^2 + 5m).4^{f(x)} - ((4 - f^2(x)).16^{f(x)})$ nghiệm đúng với mọi số thực x là

A. 3. **B.** 5.
C. 1. **D.** 4.



Câu 163. (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Đặt $g(x) = f[f(x)]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.



A. 8.

B. 2.

C. 4.

D. 6.

Câu 164. (Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	1	2	-2	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{9\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(2\sin x + 1) = 1$ là

A. 7.

B. 5.

C. 4.

D. 6.

Câu 165. (Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020) Cho hai hàm số $y = (x+1)(2x+1)(3x+1)(m+2|x|)$; $y = -12x^4 - 22x^3 - x^2 + 10x + 3$ có đồ thị lần lượt là (C_1) , (C_2) . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên đoạn $[-2020; 2020]$ để (C_1) cắt (C_2) tại 3 điểm phân biệt?

A. 4040.

B. 2020.

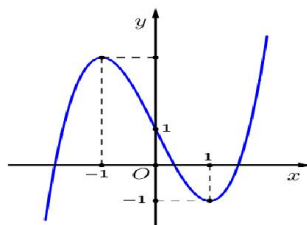
C. 2021.

D. 4041.

Câu 166. (Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020) Tìm giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ cắt đường thẳng $d: y = m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 5$.

A. $m \geq -3$.B. $m \geq -2$ C. $m > -3$.D. $m > -2$.

Câu 167. (Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $m + e^x < f(x)$ có nghiệm với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi.

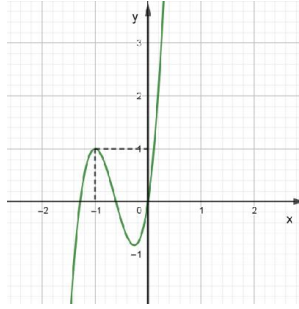


A. $m \leq \min \left\{ f(1) - e; f(-1) - \frac{1}{e} \right\}$.

B. $m < f(0) - 1$.

C. $m < \min \left\{ f(1) - e; f(-1) - \frac{1}{e} \right\}$. D. $m \leq f(0) - 1$.

Câu 168. (Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $f\left(f\left(\sqrt{f(x)}\right) + f(x) + 2\sqrt{f(x)}\right) - f(1) = 0$ là



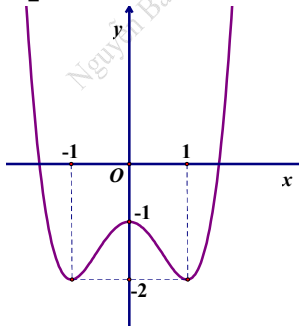
- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Câu 169. (Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số $y = \frac{(x^2 - 2x + m)^2 - 3x - m}{x - 3}$ (C) và đường thẳng (d): $y = 2x$ (m là tham số thực). Số giá trị nguyên của $m \in [-15; 15]$ để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt là

- A. 15. B. 30. C. 16. D. 17.

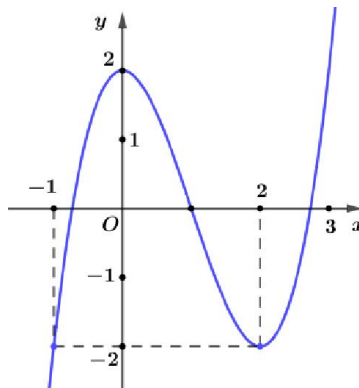
Câu 170. (Lê Lai - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ của phương trình $3f(\cos x) + 5 = 0$ là



- A. 4. B. 7. C. 6. D. 8.

Câu 171. (Liên trường Nghệ An - 2020) Cho hàm số $f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn. Biết $f(0) = 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có hình vẽ bên dưới.



Tập nghiệm của phương trình $f(|2 \sin x - 1| - 1) = m$ (với m là tham số) trên đoạn $[0; 3\pi]$ có tất cả bao nhiêu phần tử?

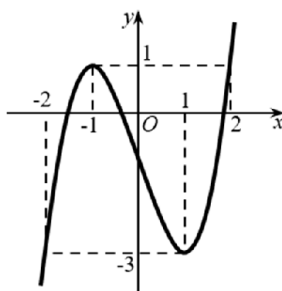
A. 8.

B. 20.

C. 12.

D. 16.

Câu 172. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(f(x) - 1) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 6.

B. 5.

C. 7.

D. 4.

Câu 173. (Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$				2020		$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $|f(x + 2019) - 2020| = 2021$ là

A. 4.

B. 6.

C. 2.

D. 3.

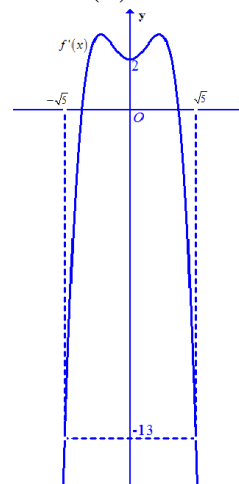
Câu 174. (Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = 2f(x) + 2x^3 - 4x - 3m - 6\sqrt{5}$ với m là số thực. Để $g(x) \leq 0, \forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ thì điều kiện của m là

A. $m \geq \frac{2}{3}f(-\sqrt{5}) - 4\sqrt{5}.$

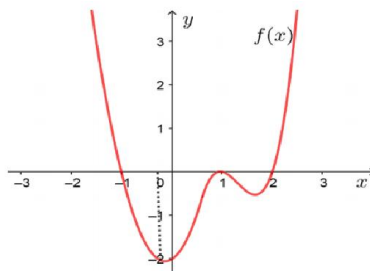
B. $m \leq \frac{2}{3}f(\sqrt{5}).$

C. $m \leq \frac{2}{3}f(0) - 2\sqrt{5}.$

D. $m \geq \frac{2}{3}f(\sqrt{5}).$



Câu 175. (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(f(x) - 1)$. Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là



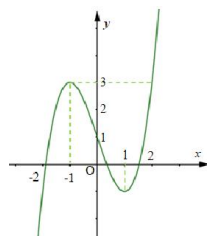
A. 6.

B. 10.

C. 9.

D. 8.

Câu 176. (Tiên Du - Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{7\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(f(\cos x)) = 0$ là

- A.** 7. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 6.

Câu 177. (Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020) Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 2m + 1$ và trục

Ox có đúng hai điểm chung phân biệt. Tính tổng T của các phần tử thuộc tập S

- A.** $T = -10$. **B.** $T = 10$. **C.** $T = -12$. **D.** $T = 12$.

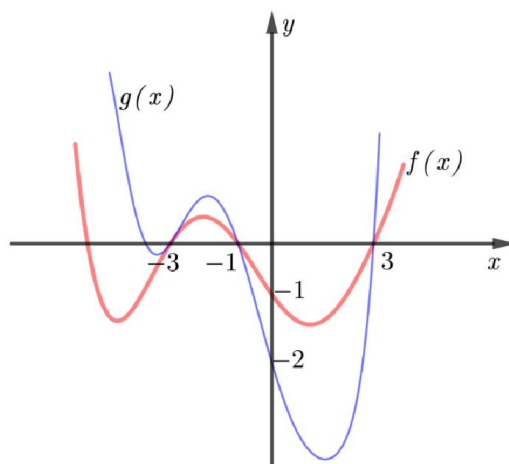
Câu 178. (Kim Thành - Hải Dương - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	3	18	$+\infty$	
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f'(x)$		5		0	$+\infty$
	$-\infty$				

Bất phương trình $e^{\sqrt{x}} \geq m - f(x)$ có nghiệm $x \in [4; 16]$ khi và chỉ khi:

- A.** $m < f(4) + e^2$. **B.** $m \leq f(4) + e^2$. **C.** $m < f(16) + e^2$. **D.** $m \leq f(16) + e^2$.

Câu 179. (Kim Thành - Hải Dương - 2020) Cho hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây đường đậm hơn là đồ thị hàm số $y = f(x)$. Biết rằng hai đồ thị tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ là -3 và cắt nhau tại hai điểm nữa có hoành độ lần lượt là -1 và 3 . Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f(x) \geq g(x) + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-3; 3]$.



- A.** $\left(-\infty; \frac{12-10\sqrt{3}}{9}\right]$. **B.** $\left[\frac{12-8\sqrt{3}}{9}; +\infty\right)$. **C.** $\left[\frac{12-10\sqrt{3}}{9}; +\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty; \frac{12-8\sqrt{3}}{9}\right]$.

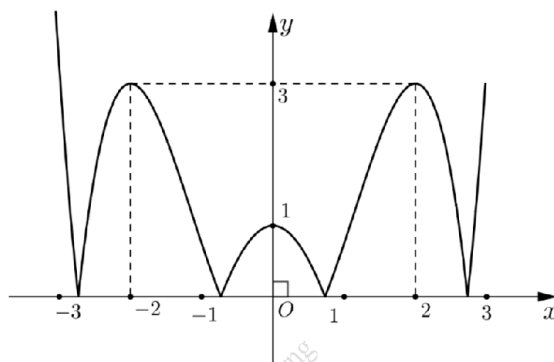
Câu 180. (Kim Thành - Hải Dương - 2020) Cho hàm số $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt[3]{f(x)+m}) = x^3 - m$ có nghiệm thuộc đoạn $[1; 2]$?

- A. 18. B. 17. C. 15. D. 16.

Câu 181. (Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020) Cho hàm số $y = \frac{2x-m^2}{x+1}$ có đồ thị (C_m) , trong đó m là tham số thực. Đường thẳng $d: y = m - x$ cắt (C_m) tại hai điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ với $x_A < x_B$; đường thẳng $d': y = 2 - m - x$ cắt (C_m) tại hai điểm $C(x_C; y_C), D(x_D; y_D)$ với $x_C < x_D$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để $x_A \cdot x_D = -3$. Số phần tử của tập S là

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 182. (Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số nghiệm thuộc đoạn $[2017\pi; 2020\pi]$ của phương trình $3f(2\cos x) = 8$.



- A. 8. B. 3. C. 4. D. 6.

Câu 183. (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020) Cho hai hàm số $y = x^6 + 6x^4 + 6x^2 + 1$ và $y = x^3 \sqrt{m-15x}(m+3-15x)$ có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt. Số phần tử của tập hợp S bằng

- A. 2006. B. 2005. C. 2007. D. 2008.

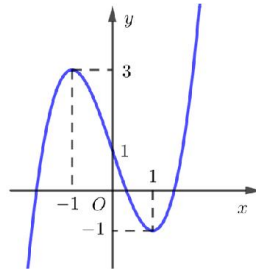
Câu 184. (Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-4	2	4	2	$+\infty$

Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x) + (3-m)f(\cos x) + 2m - 10 = 0$ có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]$ là

- A. 5. B. 6. C. 7. D. 4.

Câu 185. (Trần Phú - Quảng Ninh - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $y = f(\sin x) = 3\sin x + m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$. Tổng các phần tử của S bằng



A. -5.

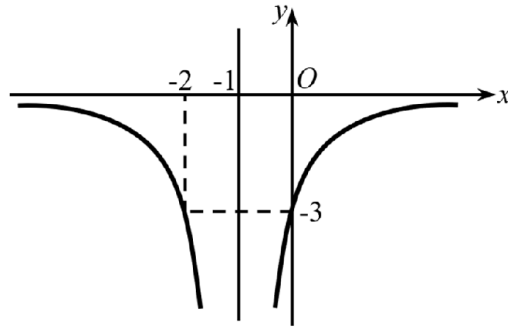
B. -8.

C. -6.

D. -10.

PHẦN 7. TIẾP TUYẾN

Câu 186. (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ (với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $d \neq 0$) có đồ thị là (C). Biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới



Biết đồ thị (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2. Tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành có phương trình là

A. $x - 3y - 2 = 0$.

B. $x - 3y + 2 = 0$.

C. $x + 3y - 2 = 0$.

D. $x + 3y + 2 = 0$.

Câu 187. (Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020) Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{2x-2}$ có đồ thị (C). Gọi $M(x_0; y_0)$ (với $x_0 > 1$) là điểm thuộc (C), biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A và B sao cho $S_{\Delta OIB} = 8S_{\Delta OIA}$ (trong đó O là gốc tọa độ, I là giao điểm hai tiệm cận). Tính $S = x_0 - 4y_0$.

A. $S = \frac{13}{4}$.

B. $S = \frac{7}{4}$.

C. $S = -2$.

D. $S = 2$.

Câu 188. (Chuyên Thái Bình - 2020) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{x-1}$, biết tiếp tuyến đó tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.

A. $y = -x + 6$; $y = -x - 2$.

B. $y = -x - 6$; $y = -x - 2$.

C. $y = x + 1$; $y = x + 6$.

D. $y = x - 1$; $y = x - 6$.

Câu 189. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Gọi d_1, d_2 lần lượt là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = xf(2x-1)$ tại điểm có hoành độ bằng 1. Biết hai đường thẳng d_1, d_2 vuông góc với nhau, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2 \leq |f(1)| < 2\sqrt{2}$.

B. $|f(1)| \geq 2\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{2} < |f(1)| < 2$.

D. $|f(1)| \leq \sqrt{2}$.

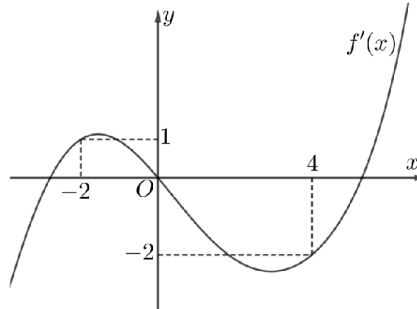
----- HẾT -----

TUYỂN CHỌN CÂU HỎI VẬN DỤNG - VẬN DỤNG CAO TỪ CÁC ĐỀ THI THỬ TRÊN CẢ NƯỚC NĂM 2020

CHƯƠNG 1. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM VÀ KHẢO SÁT HÀM SỐ - LỜI GIẢI CHI TIẾT

PHẦN 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU

Câu 1. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Cho hàm số đa thức $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0) = 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình sau.



Hàm số $g(x) = |4f(x) + x^2|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(4; +\infty)$.

B. $(0; 4)$.

C. $(-\infty; -2)$.

D. $(-2; 0)$.

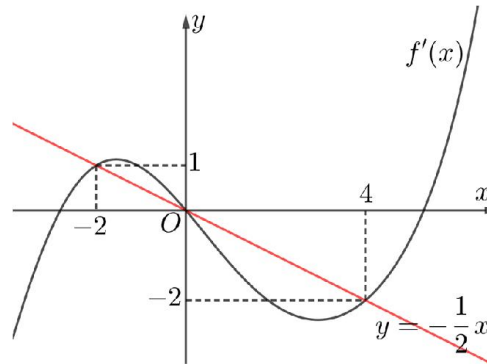
Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $h(x) = 4f(x) + x^2$ trên $\mathbb{R}$.

Vì $f(x)$ là hàm số đa thức nên $h(x)$ cũng là hàm số đa thức và $h(0) = 4f(0) = 0$.

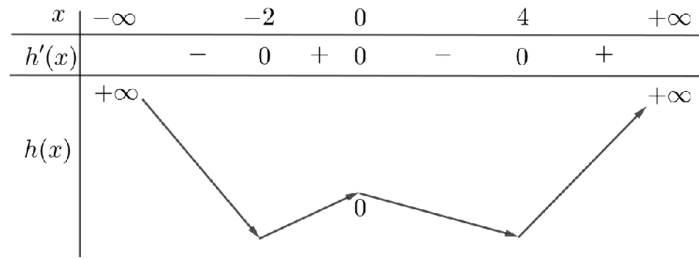
Ta có $h'(x) = 4f'(x) + 2x$. Do đó $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}x$.



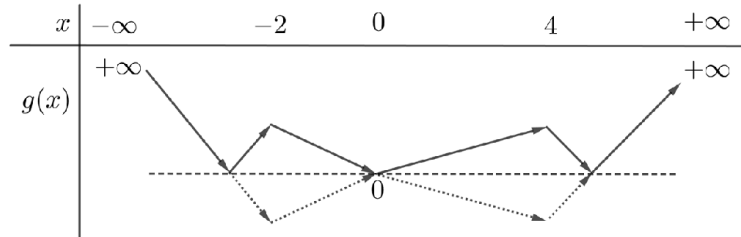
Dựa vào sự tương giao của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x$, ta có

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2; 0; 4\}$$

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau:



Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x) = |h(x)|$ như sau:



Dựa vào bảng biến thiên trên, ta thấy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$.

Câu 2. (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020) Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+6)x + \frac{2}{3}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. 9.

B. 10.

C. 6.

D. 5.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $f'(x) = x^2 - 2mx + (m+6)$

Hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+6)x + \frac{2}{3}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi

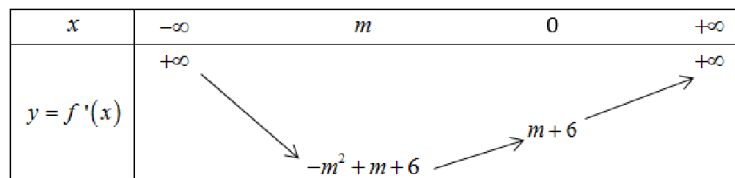
$$f'(x) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty).$$

Xét hàm số $y = f'(x) = x^2 - 2mx + (m+6)$ trong 3 trường hợp:

Trường hợp 1: $m = 0$

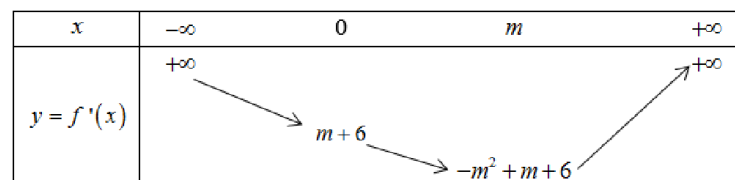
$y = f'(x) = x^2 + 6 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Lúc này hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên cũng đồng biến trên $(0; +\infty)$ (1).

Trường hợp 2: $m < 0$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x) = x^2 - 2mx + (m+6)$ như sau:



$$f'(x) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} m+6 \geq 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -6 \leq m < 0 \quad (2).$$

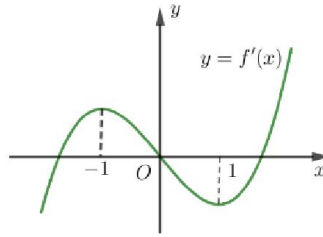
Trường hợp 3: $m > 0$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x) = x^2 - 2mx + (m+6)$ như sau:



$$f'(x) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + m + 6 \geq 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 3 \quad (3).$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra có 10 giá trị nguyên của m để hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+6)x + \frac{2}{3}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 3. (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f(1)=1$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên dương a để hàm số $y=|4f(\sin x) + \cos 2x - a|$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?



A. 2.

B. 3.

C. Vô số.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } g(x) = |4f(\sin x) + \cos 2x - a| \Rightarrow g(x) = \sqrt{[4f(\sin x) + \cos 2x - a]^2}.$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{[4\cos x \cdot f'(\sin x) - 2\sin 2x][4f(\sin x) + \cos 2x - a]}{\sqrt{[4f(\sin x) + \cos 2x - a]^2}}.$$

$$\text{Ta có } 4\cos x \cdot f'(\sin x) - 2\sin 2x = 4\cos x[f'(\sin x) - \sin x].$$

$$\text{Với } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ thì } \cos x > 0, \sin x \in (0; 1) \Rightarrow f'(\sin x) - \sin x < 0.$$

$$\text{Hàm số } g(x) \text{ nghịch biến trên } \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ khi } 4f(\sin x) + \cos 2x - a \geq 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4f(\sin x) + 1 - 2\sin^2 x \geq a, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{Đặt } t = \sin x \text{ được } 4f(t) + 1 - 2t^2 \geq a, \forall t \in (0; 1) \quad (*).$$

$$\text{Xét } h(t) = 4f(t) + 1 - 2t^2 \Rightarrow h'(t) = 4f'(t) - 4t = 4[f'(t) - 1].$$

$$\text{Với } t \in (0; 1) \text{ thì } h'(t) < 0 \Rightarrow h(t) \text{ nghịch biến trên } (0; 1).$$

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow a \leq h(1) = 4f(1) + 1 - 2 \cdot 1^2 = 3. \text{ Vậy có 3 giá trị nguyên dương của } a \text{ thỏa mãn.}$$

Câu 4. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + m}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$ và đồng biến trên khoảng $(4; 6)$.

A. 6.

B. 7.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = \frac{x^2 - 2x - 2 - m}{(x-1)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$ và đồng biến trên khoảng $(4;6)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y' \leq 0, \forall x \in (1; 3) \\ y' \geq 0, \forall x \in (4; 6) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 2 - m \leq 0, \forall x \in (1; 3) \\ x^2 - 2x - 2 - m \geq 0, \forall x \in (4; 6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq x^2 - 2x - 2, \forall x \in (1; 3) \\ m \leq x^2 - 2x - 2, \forall x \in (4; 6) \end{cases} \quad (*)$$

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 2x - 2, g'(x) = 2x - 2$ ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau

x	$-\infty$	1	3	4	6	$+\infty$
$g'(x)$		-	0		+	
$g(x)$	$+\infty$					

Từ bảng biến thiên của $g(x)$ ta có $(*) \Leftrightarrow 3 \leq m \leq 6$, và vì m là số nguyên nên chọn $m \in \{3; 4; 5; 6\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 5. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{1 - \ln x} + 1}{\sqrt{1 - \ln x} + m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số

m thuộc $[-5; 5]$ để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{e^3}; 1\right)$.

A. 7.

B. 6.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có đạo hàm của $y = \frac{\sqrt{1-\ln x} + 1}{\sqrt{1-\ln x} + m}$ là $y' = \frac{1-m}{2x\sqrt{1-\ln x}(\sqrt{1-\ln x} + m)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{e^3}; 1\right)$ khi và chỉ khi $y' > 0, \forall x \in \left(\frac{1}{e^3}; 1\right)$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1-m > 0 \\ \sqrt{1-\ln x} + m \neq 0, \forall x \in \left(\frac{1}{e^3}; 1 \right) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m < 1 \\ \sqrt{1-\ln x} + m \neq 0, \forall x \in \left(\frac{1}{e^3}; 1 \right) \end{array} \right\} (*)$$

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{1 - \ln x}$, $x \in \left(\frac{1}{e^3}; 1\right)$, ta có $g'(x) = \frac{-1}{2x\sqrt{1 - \ln x}} < 0, \forall x \in \left(\frac{1}{e^3}; 1\right)$ do đó ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau

x	$-\infty$	$\frac{1}{e^3}$	1	$+\infty$
$g'(x)$			-	
$g(x)$		2		1

Qua bảng biến thiên ta có (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \notin (-2; -1) \end{cases}$, kết hợp với $m \in [-5; 5]$ ta có 6 giá trị nguyên của m

là $m \in \{-5; -4; -3; -2; -1; 0\}$.

Câu 6. (Chuyên KHTN - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau.

x	$-\infty$	-3	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(2-3x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. (2;3).

B. (1;2).

C. (0;1).

D. (1;3).

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x) = f(2-3x) \Rightarrow g'(x) = -3 \cdot f'(2-3x)$

Ta có $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(2-3x) \leq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-3x \leq -3 \\ 0 \leq 2-3x \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \end{cases}$$

Suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ và $\left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$, do đó hàm số đồng biến trên khoảng (2;3).

Câu 7. (Chuyên KHTN - 2020) Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx-4}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$ là

A. (-2;1].

B. (-2;2).

C. (-2;-1].

D. (-2;-1).

Lời giải

Chọn C

Đạo hàm $y' = \frac{-m^2+4}{(x-m)^2} > 0, \forall x \neq m$.

Do đó hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$ khi

$$y' > 0, \forall x \in (-1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 4 > 0 \\ x - m \neq 0, \forall x \in (-1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 4 > 0 \\ x \neq m, \forall x \in (-1; +\infty) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq -1.$$

Câu 8. (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - Quảng Nam - 2020) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{mx-1}{m-4x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$.

- A.** $m > 2$. **B.** $1 \leq m < 2$. **C.** $-2 < m < 2$. **D.** $-2 \leq m \leq 2$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{m}{4}\right\}$.

Ta có $y' = \frac{m^2 - 4}{(m - 4x)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ \frac{m}{4} \notin \left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ \frac{m}{4} \geq \frac{1}{4} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \geq 1 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq m < 2.$$

Vậy $1 \leq m < 2$.

Câu 9. (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - Quảng Nam - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-10		-2		3		8		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	0	-	0	-	0	+	

Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = f(x^3 + 4x + m)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$?

- A.** 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

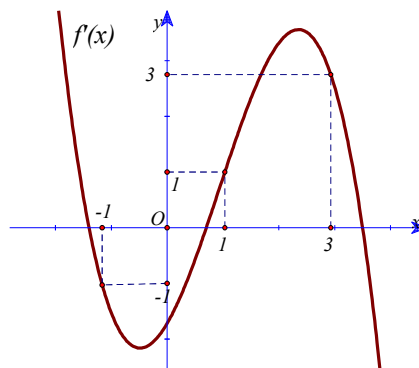
Chọn C

Đặt $t = x^3 + 4x + m \Rightarrow t' = 3x^2 + 4$ nên t đồng biến trên $(-1; 1)$ và $t \in (m-5; m+5)$

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để hàm số $f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(m-5; m+5)$.

Dựa vào bảng biến thiên ta được $\begin{cases} m-5 \geq -2 \\ m+5 \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$

Câu 10. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho như hình vẽ



Hàm số $g(x) = 2f(|x-1|) - x^2 + 2x + 2020$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(0;1)$.

B. $(-3;1)$.

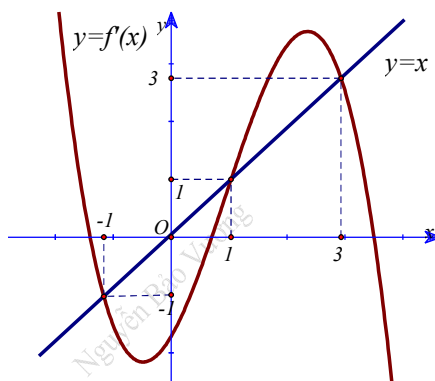
C. $(1;3)$.

D. $(-2;0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có đường thẳng $y = x$ cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tại các điểm $x = -1$; $x = 1$; $x = 3$ như hình vẽ sau:



Dựa vào đồ thị của hai hàm số trên ta có $f'(x) > x \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 1 < x < 3 \end{cases}$ và $f'(x) < x \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x > 3 \end{cases}$.

+ Trường hợp 1: $x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$, khi đó ta có $g(x) = 2f(1-x) - x^2 + 2x + 2020$.

Ta có $g'(x) = -2f'(1-x) + 2(1-x)$.

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow -2f'(1-x) + 2(1-x) > 0 \Leftrightarrow f'(1-x) < 1-x \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 1-x < 1 \\ 1-x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ x < -2 \end{cases}.$$

Kết hợp điều kiện ta có $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x < -2 \end{cases}$.

+ Trường hợp 2: $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$, khi đó ta có $g(x) = 2f(x-1) - x^2 + 2x + 2020$.

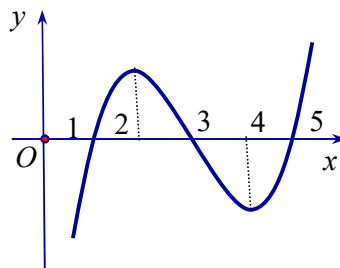
$$g'(x) = 2f'(x-1) - 2(x-1)$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2f'(x-1) - 2(x-1) > 0 \Leftrightarrow f'(x-1) > x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 < -1 \\ 1 < x-1 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 2 < x < 4 \end{cases}.$$

Kết hợp điều kiện ta có $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2 < x < 4$.

Vậy hàm số $g(x) = 2f(|x-1|) - x^2 + 2x + 2020$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 11. (Chuyên Bến Tre - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ biết hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(x+1)$. Kết luận nào sau đây đúng?



- A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;4)$.
B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.
 C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.
 D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(4;6)$.

Lời giải

Chọn B

$$g(x) = f(x+1).$$

$$\text{Ta có: } g'(x) = f'(x+1)$$

$$\text{Hàm số } g(x) \text{ đồng biến} \Leftrightarrow g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x+1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 5 \\ 1 < x+1 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ 0 < x < 2 \end{cases}.$$

$$\text{Hàm số } g(x) \text{ nghịch biến} \Leftrightarrow g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x+1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x+1 < 5 \\ x+1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 4 \\ x < 0 \end{cases}.$$

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$; $(4;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(2;4)$; $(-\infty;0)$.

Câu 12. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số

$$y = \frac{\ln x - 6}{\ln x - 2m} \text{ đồng biến trên khoảng } (1;e)?$$

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \ln x$ thì $t = \ln x$ đồng biến trên khoảng $(1;e)$ và $t \in (0;1)$

$$\text{Ta được hàm số } f(t) = \frac{t-6}{t-2m}. \text{ Điều kiện } t \neq 2m \text{ và } f'(t) = \frac{6-2m}{(t-2m)^2}.$$

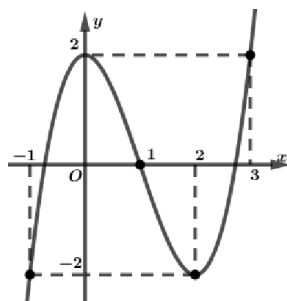
$$\text{Hàm số } y = \frac{\ln x - 6}{\ln x - 2m} \text{ đồng biến trên khoảng } (1;e) \text{ khi và chỉ khi hàm số } f(t) = \frac{t-6}{t-2m} \text{ đồng biến}$$

$$\text{trên khoảng } (0;1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m \notin (0;1) \\ f'(t) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m \geq 1 \\ 2m \leq 0 \\ 6-2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{1}{2} \\ m \leq 0 \\ m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq m < 3 \\ m \leq 0 \end{cases}.$$

Vì m nguyên dương nên $m \in \{1;2\}$.

Vậy có 2 giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = \frac{\ln x - 6}{\ln x - 2m}$ đồng biến trên khoảng $(1;e)$.

Câu 13. (Chuyên Lào Cai - 2020) Cho hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x) = f(3x+1) + 9x^3 + \frac{9}{2}x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1; 1)$.B. $(-2; 0)$.C. $(-\infty; 0)$.D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

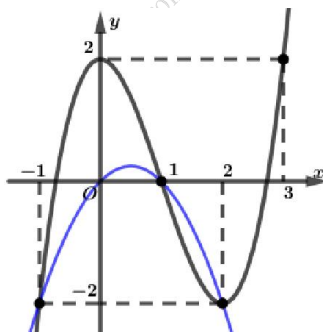
$$\text{Xét hàm số } g(x) = f(3x+1) + 9x^3 + \frac{9}{2}x^2 \Rightarrow g'(x) = 3f'(3x+1) + 27x^2 + 9x$$

$$\text{Hàm số đồng biến tương đương } g'(x) > 0 \Leftrightarrow 3f'(3x+1) + 27x^2 + 9x > 0$$

$$\Leftrightarrow f'(3x+1) + 3x(3x+1) > 0 (*).$$

$$\text{Đặt } t = 3x+1 (*) \Leftrightarrow f'(t) + (t-1)t > 0 \Leftrightarrow f'(t) > -t^2 + t$$

Vẽ parabol $y = -x^2 + x$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ trên cùng một hệ trục



$$\text{Dựa vào đồ thị ta thấy } f'(t) > -t^2 + t \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < t < 1 \\ t > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 3x+1 < 1 \\ 3x+1 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{3} < x < 0 \\ x > \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Câu 14. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020) Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $f(x) = m(2020 + x - 2\cos x) + \sin x - x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. Vô số.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

Hàm số $f(x) = m(2020 + x - 2\cos x) + \sin x - x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m(2\sin x + 1) + \cos x - 1 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 2m\sin x + \cos x \leq 1 - m \quad (1); \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ta lại có:

$$2m \sin x + \cos x \leq \sqrt{(4m^2 + 1)(\sin^2 x + \cos^2 x)} = \sqrt{4m^2 + 1}$$

$$\Rightarrow 2m \sin x + \cos x \leq \sqrt{4m^2 + 1}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } 2m \cos x = \sin x$$

Do đó

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{4m^2 + 1} \leq 1 - m \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m \geq 0 \\ 4m^2 + 1 \leq 1 - 2m + m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ 3m^2 + 2m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-2}{3} \leq m \leq 0$$

Câu 15. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x) = f(3 - 2^x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây

A. $(3; +\infty)$.

B. $(-\infty; -5)$.

C. $(1; 2)$.

D. $(2; 7)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } g'(x) = -2^x \ln 2 \cdot f'(3 - 2^x).$$

Để $g(x) = f(3 - 2^x)$ đồng biến thì

$$g'(x) = -2^x \ln 2 \cdot f'(3 - 2^x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(3 - 2^x) \leq 0 \Leftrightarrow -5 \leq 3 - 2^x \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 3.$$

Vậy hàm số đồng biến trên $(1; 2)$.

Câu 16. (Chuyên Quang Trung - 2020) Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 + 4) + mx + 12$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

B. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

C. $(-\infty; -\frac{1}{2}]$.

D. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Lời giải

Chọn A

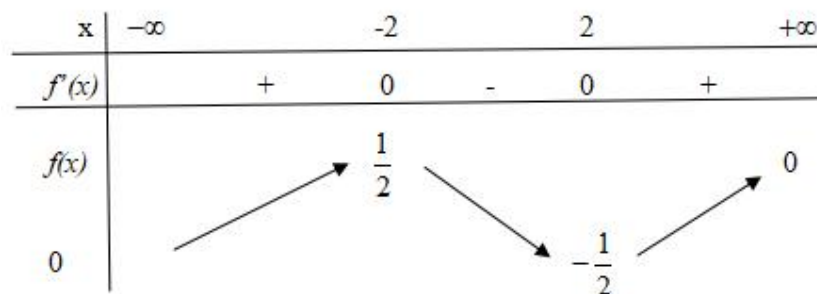
+ TXĐ: $\mathbb{R}$

$$+ \text{Ta có } y' = \frac{2x}{x^2 + 4} + m. \text{ Hàm số đồng biến trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2 + 4} + m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow m \geq \frac{-2x}{x^2 + 4}, \forall x \in \mathbb{R}$$

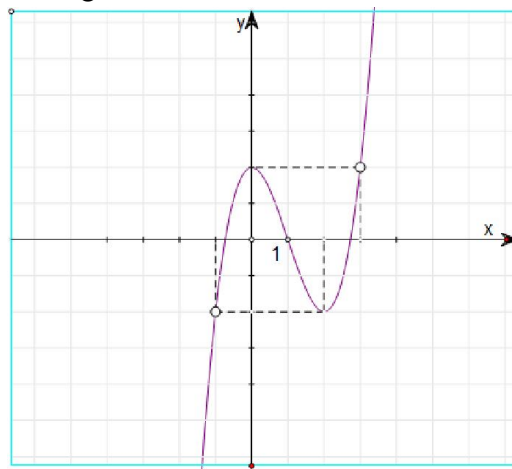
$$\text{Xét } f(x) = \frac{-2x}{x^2 + 4}. \text{ Ta có: } f'(x) = \frac{2(x^2 - 4)}{(x^2 + 4)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Bảng biến thiên



Vậy giá trị m cần tìm là $m \geq \frac{1}{2}$

- Câu 17. (Chuyên Quang Trung - 2020)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(x-m) - \frac{1}{2}(x-m-1)^2 + 2019$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$. Tổng tất cả các phần tử trong S bằng



A. 4.

B. 11.

C. 14.

D. 20.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x) = f(x-m) - \frac{1}{2}(x-m-1)^2 + 2019$

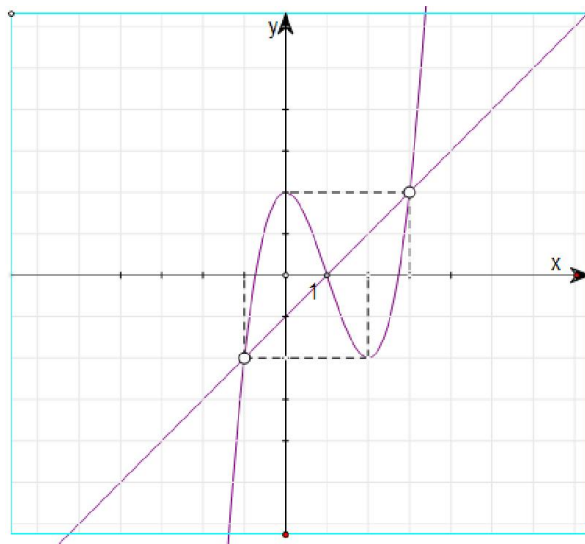
$$g'(x) = f'(x-m) - (x-m-1)$$

Xét phương trình $g'(x) = 0$ (1)

Đặt $x-m=t$, phương trình (1) trở thành $f'(t) - (t-1) = 0 \Leftrightarrow f'(t) = t-1$ (2)

Nghiệm của phương trình (2) là hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = t-1$

Ta có đồ thị các hàm số $y = f'(t)$ và $y = t-1$ như sau:



Căn cứ đồ thị các hàm số ta có phương trình (2) có nghiệm là:
$$\begin{cases} t = -1 \\ t = 1 \\ t = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = m - 1 \\ x = m + 1 \\ x = m + 3 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên của $y = g(x)$

x	$-\infty$	$m - 1$	$m + 1$	$m + 3$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$				$+\infty$

Để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5; 6)$ cần
$$\begin{cases} m - 1 \leq 5 \\ m + 1 \geq 6 \\ m + 3 \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \leq m \leq 6 \\ m \leq 2 \end{cases}$$

Vì $m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m$ nhận các giá trị 1; 2; 5; 6 $\Rightarrow S = 14$.

Câu 18. (Chuyên Sơn La - 2020) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + (4m - 9)x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ là

- A.** $\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right]$. **B.** $\left[-\frac{3}{4}; +\infty\right)$. **C.** $[0; +\infty)$. **D.** $(-\infty; 0]$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = -3x^2 - 12x + 4m - 9$.

Ycbt $\Leftrightarrow -3x^2 - 12x + 4m - 9 \leq 0, \forall x \in (-\infty; -1)$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{3}{4}(x^2 + 4x + 3), \forall x \in (-\infty; -1)$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{3}{4}[(x + 2)^2 - 1], \forall x \in (-\infty; -1)$$

$$\Leftrightarrow m \leq \min_{x \in (-\infty; -1)} \left\{ \frac{3}{4}[(x + 2)^2 - 1] \right\} = -\frac{3}{4}.$$

Câu 19. (Chuyên Thái Bình - 2020) Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = |x^3 - mx^2 + 12x + 2m|$ luôn đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. 18.

B. 19.

C. 21.

D. 20.

Lời giải

Chọn D

Xét $f(x) = x^3 - mx^2 + 12x + 2m$. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 2mx + 12$ và $f(1) = 13 + m$.

Để hàm số $y = |x^3 - mx^2 + 12x + 2m|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ thì có hai trường hợp sau

Trường hợp 1: Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$ và $f(1) \leq 0$.

Điều này không xảy ra vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - mx^2 + 12x + 2m) = +\infty$.

Trường hợp 2: Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$ và $f(1) \geq 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2mx + 12 \geq 0, \forall x > 1 \\ 13 + m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{3}{2}x + \frac{6}{x}, \forall x > 1 \\ m \geq -13 \end{cases} \quad (*)$$

Xét $g(x) = \frac{3}{2}x + \frac{6}{x}$ trên khoảng $(1; +\infty)$: $g'(x) = \frac{3}{2} - \frac{6}{x^2}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} - \frac{6}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	1		2		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$\frac{15}{2}$				

Từ bảng biến thiên suy ra $m \leq \frac{3}{2}x + \frac{6}{x}, \forall x > 1 \Leftrightarrow m \leq 6$.

Kết hợp (*) suy ra $-13 \leq m \leq 6$. Vì m nguyên nên $m \in \{-13; -12; -11; \dots; 5; 6\}$. Vậy có 20 giá trị nguyên của m .

Câu 20. (Chuyên Thái Nguyên - 2020) Cho hàm số $y = \frac{mx - 2m + 3}{x + m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất

cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$. Tìm số phần tử của S .

A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định: $x \neq -m$.

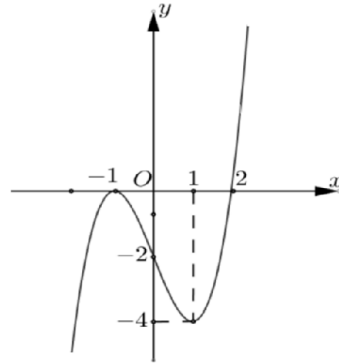
Ta có: $y' = \frac{m^2 + 2m - 3}{(x + m)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$ thì:

$$\begin{cases} y' < 0; \forall x \in (2; +\infty) \\ x \neq -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 3 < 0 \\ -m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 1 \\ m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m < 1.$$

Vậy giá trị nguyên của m là $S = \{-2; -1; 0\}$.

Câu 21. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?



- A.** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0; 2)$. **B.** Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.
C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1; 0)$. **D.** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = (x^2 - 2)' \cdot f'(x^2 - 2) = 2x \cdot f'(x^2 - 2)$.

$$\text{Hàm số nghịch biến khi } g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \cdot f'(x^2 - 2) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ f'(x^2 - 2) \geq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x \geq 0 \\ f'(x^2 - 2) \leq 0 \end{cases}$$

Từ đồ thị hình của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ, ta thấy

$$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2 \text{ và } f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2.$$

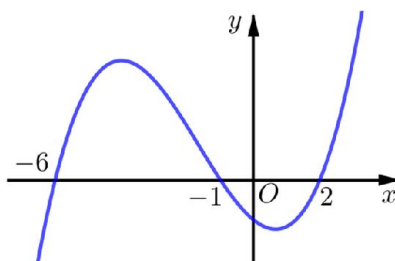
$$+ \text{ Với } \begin{cases} x \leq 0 \\ f'(x^2 - 2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 - 2 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 2 \text{ hoặc } x \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -2.$$

$$+ \text{ Với } \begin{cases} x \geq 0 \\ f'(x^2 - 2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2.$$

Như vậy hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -2)$, $(0; 2)$; suy ra hàm số đồng biến trên $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Do $(-1; 0) \subset (-2; 0)$ nên hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$. Vậy C sai.

Câu 22. (Đại Học Hà Tĩnh - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $y = f(3 - x^2)$ đồng biến trên khoảng

A. $(0;1)$.

B. $(-1;0)$.

C. $(2;3)$.

D. $(-2;-1)$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Đặt $y = g(x) = f(3 - x^2)$.

Ta có: $g'(x) = -2x \cdot f'(3 - x^2)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x \cdot f'(3 - x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(3 - x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3 - x^2 = -6 \\ 3 - x^2 = -1 \\ 3 - x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 3 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm 1 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$			
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Suy ra hàm số $y = f(3 - x^2)$ đồng biến trên mỗi khoảng: $(-3;-2)$, $(-1;0)$, $(1;2)$, $(3;+\infty)$.

Vậy hàm số $y = f(3 - x^2)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Cách 2:

Dựa vào đồ thị của $y = f'(x)$ ta chọn $y = f'(x) = (x+6)(x+1)(x-2)$.

Đặt $y = g(x) = f(3 - x^2)$.

Ta có: $g'(x) = -2x \cdot f'(3 - x^2) = -2x(9 - x^2)(4 - x^2)(1 - x^2)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 3 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm 1 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$			
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Suy ra hàm số $y = f(3 - x^2)$ đồng biến trên mỗi khoảng: $(-3;-2)$, $(-1;0)$, $(1;2)$, $(3;+\infty)$.

Vậy hàm số $y = f(3 - x^2)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Câu 23. (ĐHQG Hà Nội - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+18}{x+4m}$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

A. Vô số.

B. 0.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x \neq -4m$.

$$\text{Ta có } y = \frac{x+18}{x+4m} \Rightarrow y' = \frac{4m-18}{(x+4m)^2}.$$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' < 0 \\ -4m \notin (2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m-18 < 0 \\ -4m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{2} \\ m \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m < \frac{9}{2}.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$. Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+18}{x+4m}$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Câu 24. (ĐHQG Hà Nội - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-8; 8)$ sao cho hàm số $y = |-2x^3 + 3mx - 2|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. 10.

B. 9.

C. 8.

D. 11.

Lời giải

Chọn B

$$f(x) = -2x^3 + 3mx - 2$$

$$f'(x) = -6x^2 + 3m$$

Nếu $m \leq 0$: $f'(x) \leq 0, \forall x \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên $(1; +\infty) \Leftrightarrow f(1) \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{4}{3} \Rightarrow m \leq 0$.

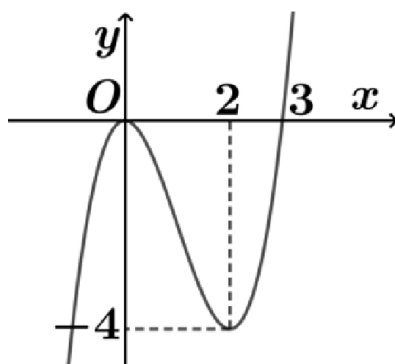
$$\text{Nếu } m > 0: f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{m}{2}}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{m}{2}}$	$\sqrt{\frac{m}{2}}$	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	$-2m\sqrt{\frac{m}{2}}-2$	$2m\sqrt{\frac{m}{2}}-2$	$-\infty$		

$$\text{Hàm số } y = |f(x)| \text{ đồng biến trên } (1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{m}{2}} > 1 \\ f\left(\sqrt{\frac{m}{2}}\right) = 0 \\ \sqrt{\frac{m}{2}} = 1 \\ f\left(\sqrt{\frac{m}{2}}\right) \leq 0 \\ \sqrt{\frac{m}{2}} < 1 \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{m}{2}} > 1 \\ m = \sqrt[3]{2} \quad (L) \\ m = 2 \quad (L) \\ 2m\sqrt{\frac{m}{2}} - 2 \leq 0 \Rightarrow 0 < m \leq \frac{4}{3} \\ m < 2 \\ m \leq \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$m \in \mathbb{Z}, m \in (-8; 8) \Rightarrow m \in \{-7; -6; \dots; -1; 0; 1\}.$$

Câu 25. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $g(x) = f(e^x - 2) - 2020$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-1; \frac{3}{2}\right).$

B. $(-1; 2).$

C. $(0; +\infty).$

D. $\left(\frac{3}{2}; 2\right).$

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ suy ra $f'(x) \leq 0 \forall x < 3$ và $f'(x) > 0 \forall x > 3$.

$$g'(x) = e^x f'(e^x - 2).$$

Hàm số $g(x) = f(e^x - 2) - 2020$ nghịch biến nếu

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x f'(e^x - 2) < 0 \Leftrightarrow f'(e^x - 2) < 0 \Leftrightarrow e^x - 2 < 3 \Leftrightarrow e^x < 5 \Leftrightarrow x < \ln 5.$$

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(-1; \frac{3}{2}\right).$

Câu 26. (Sở Hà Tĩnh - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+9}{4x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; 4)$?

A. 5.

B. 11.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x \neq -\frac{m}{4}$.

Ta có: $y' = \frac{m^2 - 36}{(4x + m)^2}$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; 4) \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (0; 4)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 36 < 0 \\ -\frac{m}{4} \notin (0; 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < m < 6 \\ \begin{cases} -\frac{m}{4} \leq 0 \\ -\frac{m}{4} \geq 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < m < 6 \\ \begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq -16 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < 6.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Vậy có 6 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 27. (Sở Ninh Bình) Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$. Tổng giá trị các phần tử của T bằng

A. 9.

B. 45.

C. 55.

D. 36.

Lời giải

Chọn B

+ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

+ Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$

Theo đề $m > 0$ nên $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $x = -\sqrt{m}, x = 0, x = \sqrt{m}$.

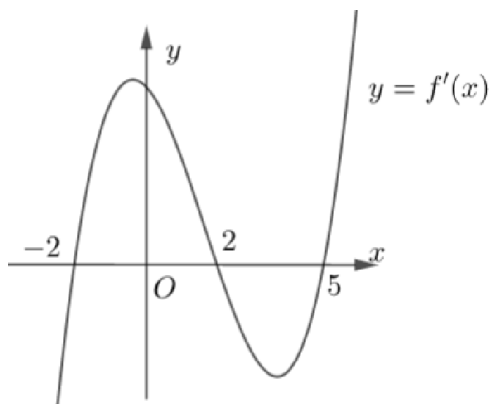
x	$-\infty$	$-\sqrt{m}$	0	$\sqrt{m}$	$+\infty$		
y'	-	0	+	0	-	0	+

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$ thì $y' \geq 0, \forall x \in (3; +\infty) \Leftrightarrow \sqrt{m} \leq 3 \Leftrightarrow m \leq 9$

Vì m nguyên dương nên $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ (là cấp số cộng)

Vậy Tổng giá trị các phần tử của T bằng $\frac{9}{2}(1+9) = 45$.

Câu 28. (Sở Ninh Bình) Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x^2 + 2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. (2;3).

B. (-3;-2).

C. (-1;1).

D. (-1;0).

Lời giải

Chọn B

Đặt $g(x) = f(x^2 + 2)$, hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

$g'(x) = 2xf'(x^2 + 2)$, kết hợp với đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta được:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 2 = -2 \\ x^2 + 2 = 2 \\ x^2 + 2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}.$$

Từ đồ thị đã cho ta có $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2 \\ x > 5 \end{cases}$

Suy ra $f'(x^2 + 2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x^2 + 2 < 2 \\ x^2 + 2 > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x^2 < 0 \\ x^2 > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{3} \\ x < -\sqrt{3} \end{cases}.$

Và lập luận tương tự $f'(x^2 + 2) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x^2 + 2 < 5 \\ x^2 + 2 < -2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x^2 < 3 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}.$

Bảng biến thiên (Dấu của $g'(x)$ phụ thuộc vào dấu của $2x$ và $f'(x^2 + 2)$ trên từng khoảng)

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$							

Dựa vào bảng biến thiên hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -\sqrt{3})$ và $(0; \sqrt{3})$ chọn đáp án.

Câu 29. (Sở Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - (m-1)x^2 + 3(m-1)x + 1$. Số các giá trị nguyên của m

để hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ là

A. 7.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = x^2 - 2(m-1)x + 3(m-1)$.

$$Y_{cbt} \Leftrightarrow x^2 - 2(m-1)x + 3(m-1) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$$

$$\Delta' = [- (m-1)]^2 - 3(m-1) = m^2 - 5m + 4.$$

Trường hợp 1: $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 \leq 0 \Leftrightarrow m \in [1; 4]$. Ta được 4 giá trị nguyên của m .

Trường hợp 2:

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 4 \end{cases}. \text{ Khi đó phương trình } x^2 - 2(m-1)x + 3(m-1) = 0 \text{ có hai}$$

ng nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 \leq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - 1) + (x_2 - 1) < 0 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 + x_2) - 2 < 0 \\ x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(m-1) - 2 < 0 \\ 3(m-1) - 2(m-1) + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq m < 2.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $0 \leq m < 1$. Khi đó có 1 giá trị nguyên của m .

Vậy có 5 giá trị nguyên của m .

Câu 30. (Sở Yên Bái - 2020) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{-mx + 3m + 4}{x - m}$

ng nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$

A. $-1 < m < 4$.

B. $-1 < m \leq 1$.

C. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 4 \end{cases}$.

D. $1 \leq m < 4$.

Lời giải

Chọn B

$$y' = \frac{m^2 - 3m - 4}{(x - m)^2}$$

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$ thì $y' < 0, \forall x \in (1; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m - 4 < 0 \\ m \notin (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-1; 4) \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq 1.$$

Câu 31. (Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-2020; 2020)$

sao cho hàm số $y = \frac{3x + 18}{x - m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$?

A. 2020.

B. 2026.

C. 2018.

D. 2023.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x \neq m$ nên $m \notin (-\infty; -3)$

$$y = \frac{3x + 18}{x - m} \Rightarrow y' = \frac{-3m - 18}{(x - m)^2}$$

Để hàm số $y = \frac{3x + 18}{x - m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$ thì $-3m - 18 < 0 \Leftrightarrow m > -6$

Vì $m \in (-2020; 2020)$ và $m \notin (-\infty; -3)$ nên $m \in [-2; 2020]$

Vậy có 2023 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Câu 32. (Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020) Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{m - \sin x}{\cos^2 x}$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$.

A. $m \geq 1$.

B. $m \leq 2$.

C. $m \leq \frac{5}{4}$.

D. $m \leq 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = \frac{-\cos^2 x + 2m \sin x - 2\sin^2 x}{\cos^3 x} = \frac{-1 + 2m \sin x - \sin^2 x}{\cos^3 x}$

Để hàm số nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$ thì

$$y' \leq 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow -\sin^2 x + 2m \sin x - 1 \leq 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right), \text{ vì } \cos^3 x > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right) \quad (1)$$

Đặt $\sin x = t, t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow -t^2 + 2mt - 1 \leq 0, \forall t \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow m \leq \frac{t^2 + 1}{2t}, \forall t \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \quad (2)$

Ta xét hàm $f(t) = \frac{t^2 + 1}{2t}, \forall t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$

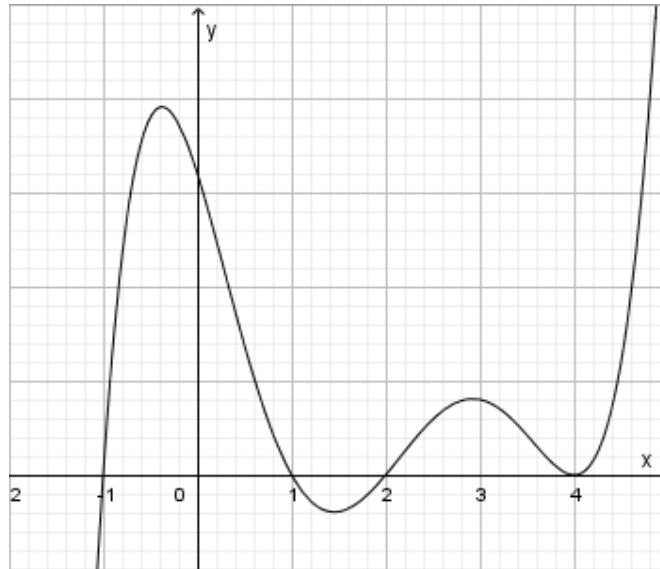
Ta có $f'(t) = \frac{2(t^2 - 1)}{4t^2} < 0, \forall t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Bảng biến thiên

t	0	$\frac{1}{2}$
$f'(t)$		-
$f(t)$	$+\infty$	$\frac{5}{4}$

Từ bảng biến thiên suy ra $(2) \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{4}$.

Câu 33. (Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(2019 - 2020x)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



A. $(-1; 0)$.

B. $(-\infty; -1)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = (2019 - 2020x)' f'(2019 - 2020x) = -2020 f'(2019 - 2020x)$,

$$f'(2019 - 2020x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2019 - 2020x = -1 \\ 2019 - 2020x = 1 \\ 2019 - 2020x = 2 \\ 2019 - 2020x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1009}{1010} \\ x = \frac{2017}{2020} \\ x = \frac{403}{404} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\frac{403}{404}$	$\frac{2017}{2020}$	$\frac{1009}{1010}$	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	0	-	0	+
$g(x)$						

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $g(x)$ đồng biến trên từng khoảng $\left(\frac{2017}{2020}; \frac{1009}{1010}\right)$, $(1; +\infty)$.

Câu 34. (Kim Liên - Hà Nội - 2020) Số giá trị nguyên thuộc khoảng $(-2020; 2020)$ của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2019$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ là

A. 2018.

B. 2019.

C. 2020.

D. 2017.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3x^2 - 6x - m$.

Hàm số đồng biến trên khi $y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - m \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x \geq m, \forall x \in (0; +\infty) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 - 6x$ trên $(0; +\infty)$

Ta có $f'(x) = 6x - 6, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Do đó $\min_{(0; +\infty)} f(x) = f(1) = -3$

(1) $\Leftrightarrow m \leq -3$. Kết hợp với giả thiết ta được $m \in (-2020; -3]$. Nên có 2017 số nguyên thỏa mãn

Vậy chọn **D**.

Câu 35. (Lê Lai - Thanh Hóa - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $[-2020; 2020]$ để hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

A. 2004.

B. 2017.

C. 2020.

D. 2009.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 3x^2 - 12x + m$.

Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + m \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$.

Do đó $m \geq -3x^2 + 12x, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m \geq \max_{(0; +\infty)} g(x)$ với $g(x) = -3x^2 + 12x$.

Ta có: $g(x) = -3(x-2)^2 + 12 \leq 12, \forall x \in (0; +\infty)$ nên $\max_{(0; +\infty)} g(x) = 12 = g(2)$.

Vậy $m \geq 12$.

Số các số nguyên m cần tìm là: $2020 - 12 + 1 = 2009$.

Câu 36. (Liên trường Nghệ An - 2020) Tổng bình phương của tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = (3m^2 - 12)x^3 + 3(m-2)x^2 - x + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là?

A. 9.

B. 6.

C. 5.

D. 14.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 9(m^2 - 4)x^2 + 6(m-2)x - 1$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ (dấu "=" xảy ra tại hữu hạn $x \in \mathbb{R}$)

TH1: $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

+ Với $m = 2$ ta có $y' = -1 \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên $m = 2$ thỏa mãn.

+ Với $m = -2$ ta có $y' = -24x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{24}$ (không thỏa với mọi $x \in \mathbb{R}$) nên loại $m = -2$.

TH2: $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$. Ta có

$$y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9(m^2 - 4) < 0 \\ \Delta' = 9(m-2)^2 + 9(m^2 - 4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ 0 \leq m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < 2 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{0; 1\} \text{ Vậy}$$

$$m \in \{0; 1; 2\} \Rightarrow 0^2 + 1^2 + 2^2 = 5.$$

Câu 37. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020) Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 3(m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1)x - 1$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 3(m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1)x - 1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

* Trường hợp 1: $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1.$

+ Với $m = 1$, ta được $-1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (luôn đúng), suy ra $m = 1$ (nhận).

+ Với $m = -1$, ta được $-4x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}$, suy ra $m = -1$ (loại).

* Trường hợp 2: $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1.$

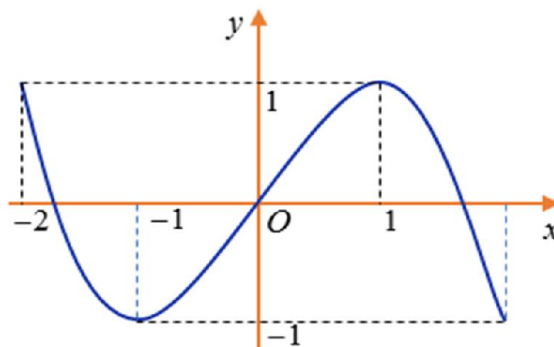
Ta có $\Delta' = (m - 1)^2 + 3(m^2 - 1) = m^2 - 2m + 1 + 3m^2 - 3 = 4m^2 - 2m - 2.$

Để $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ 4m^2 - 2m - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ -\frac{1}{2} \leq m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m < 1.$

Tổng hợp lại, ta có tất cả giá trị m cần tìm là $-\frac{1}{2} \leq m \leq 1.$

Vì $m \in \mathbb{Z}$, suy ra $m \in \{0; 1\}$, nên có 2 giá trị nguyên của tham số m .

Câu 38. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $y = f(\cos x) + x^2 - x$ đồng biến trên khoảng

A. $(-2;1)$.B. $(0;1)$.C. $(1;2)$.D. $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn C

Đặt hàm $g(x) = f(\cos x) + x^2 - x$.Ta có: $g'(x) = -\sin x \cdot f'(\cos x) + 2x - 1$.Vì $\cos x \in [-1;1]$ nên từ đồ thị $f'(x)$ ta suy ra $f'(\cos x) \in [-1;1]$.Do đó $|\sin x \cdot f'(\cos x)| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.Ta suy ra $g'(x) = -\sin x \cdot f'(\cos x) + 2x - 1 \geq -1 + 2x - 1 = 2x - 2$ $\Rightarrow g'(x) > 0, \forall x > 1$. Vậy hàm số đồng biến trên $(1;2)$.

Câu 39. (Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020) Cho hàm số $f(x) = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

$$f(x) = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2(m+1)x - (2m^2 - 3m + 2)$$

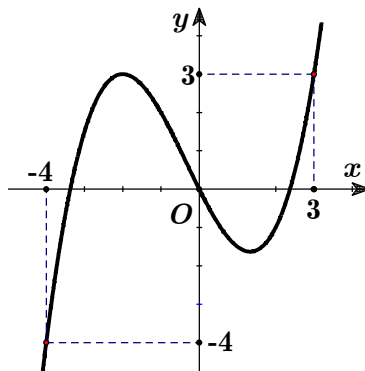
Nhận xét $2m^2 - 3m + 2 > 0 \forall m \in \mathbb{R}$ nên $f'(x) = 3x^2 - 2(m+1)x - (2m^2 - 3m + 2) = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m Do đó hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in (2;+\infty)$

$$\text{Điều này xảy ra khi } \begin{cases} 3 \cdot f'(2) \geq 0 \\ x_1 < x_2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot [3 \cdot 4 - 4(m+1) - (2m^2 - 3m + 2)] \geq 0 \\ \frac{S}{2} < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m^2 - m + 6 \geq 0 \\ \frac{(m+1)}{3} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq m \leq \frac{3}{2} \\ m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m \leq \frac{3}{2}$$

Do m nguyên nên $m \in \{-2; -1; 0; 1\}$.

Câu 40. (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020) Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = f(3x^2 - 1) - \frac{9}{2}x^4 + 3x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây.

A. $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

B. $\left(0; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

C. $(1; 2)$.

D. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $g'(x) = 6xf'(3x^2 - 1) - 18x^3 + 6x = 6x[f'(3x^2 - 1) - 3x^2 + 1]$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(3x^2 - 1) = 3x^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x^2 - 1 = -4 \text{ (VN)} \\ 3x^2 - 1 = 0 \\ 3x^2 - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy hàm số đồng biến trong khoảng $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Câu 41. (Tiên Du - Bắc Ninh - 2020) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2020; 2020)$ sao cho hàm số $y = 2x^3 + mx^2 + 2x$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$. Tính số phần tử của tập hợp S .

A. 2025.

B. 2016.

C. 2024.

D. 2023.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = 2x^3 + mx^2 + 2x \Rightarrow y' = 6x^2 + 2mx + 2$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-2; 0) \Leftrightarrow y' = 6x^2 + 2mx + 2 \geq 0, \forall x \in (-2; 0)$

$$\Leftrightarrow m \leq -3x - \frac{1}{x}, \forall x \in (-2; 0).$$

Xét hàm số $g(x) = -3x - \frac{1}{x}, \forall x \in (-2; 0)$

$$\Rightarrow g'(x) = -3 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow -3 + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Bảng biến thiên

x	-2	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\frac{13}{2}$	$-2\sqrt{3}$	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên suy ra $m \leq -2\sqrt{3}$. Mà $m \in \mathbb{Z}, m \in (-2020; 2020)$ nên $m \in \{-2019; -2018; \dots; -4\}$.

Vậy có 2016 giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2020; 2020)$ sao cho hàm số $y = 2x^3 + mx^2 + 2x$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.

Câu 42. (Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 + 6x + 4, \forall x \in \mathbb{R}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc $(-2020; 2020)$ của tham số m để hàm số $g(x) = f(x) - (2m+4)x - 5$ nghịch biến trên $(0; 2)$?

A. 2008.

B. 2007.

C. 2018.

D. 2019.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = f'(x) - (2m+4)$.

Hàm số $g(x) = f(x) - (2m+4)x - 5$ nghịch biến trên $(0; 2)$ khi $g'(x) \leq 0, \forall x \in (0; 2)$

$$\Leftrightarrow f'(x) - (2m+4) \leq 0, \forall x \in (0; 2) \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 4 \leq 2m+4, \forall x \in (0; 2).$$

Xét hàm số $h(x) = 3x^2 + 6x + 4 \Rightarrow h'(x) = 6x + 6$. Ta có BBT:

x	0	2
$h'(x)$	$+$	
$h(x)$	4	28

Vậy $2m+4 \geq 28 \Leftrightarrow m \geq 12$. Vì m nguyên thuộc $(-2020; 2020)$ nên có 2008 giá trị thỏa mãn.

Câu 43. (Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = \frac{x+4}{2x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-3; 4)$.

A. Vô số.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Tập xác định } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{m}{2} \right\}.$$

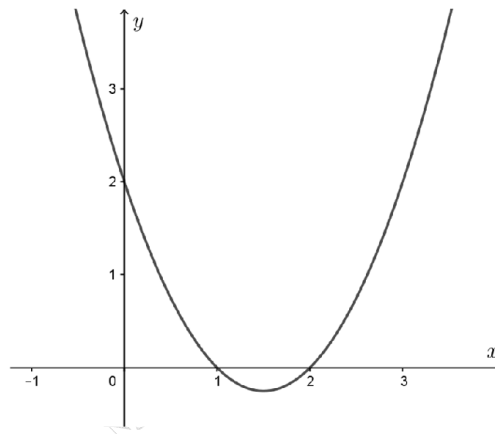
$$\text{Có } y' = -\frac{m+8}{(2x-m)^2}$$

$$\text{Hàm số nghịch biến trên } (-3;4) \Leftrightarrow y' < 0 \forall x \in (-3;4) \Leftrightarrow -\frac{m+8}{(2x-m)^2} < 0 \forall x \in (-3;4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(m+8) < 0 \\ \frac{m}{2} \notin (-3;4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -8 \\ \frac{m}{2} \leq -3 \text{ hoặc } \frac{m}{2} \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 < m \leq -6 \\ m \geq 8 \end{cases}$$

Do m nguyên âm nên $m \in \{-7; -6\}$, gồm 2 giá trị thỏa mãn.

Câu 44. (**Trường VINSCHOOL - 2020**) Cho hàm số $y = f(x)$. Biết đồ thị hàm số $y' = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên



Hàm số $g(x) = f(2x - 3x^2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

B. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

C. $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$.

D. $\left(-2; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1. Ta có $g'(x) = (2 - 6x) \cdot f'(2x - 3x^2)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (2 - 6x) \cdot f'(2x - 3x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 6x = 0 \\ 2x - 3x^2 = 1 \\ 2x - 3x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Bảng xét dấu của $g'(x)$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$2 - 6x$	+	0	-
$f'(2x - 3x^2)$	+		+
$g'(x)$	+	0	-

Từ bảng trên ta có hàm số $g(x) = f(2x - 3x^2)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$

Cách 2: $g'(x) = (2 - 6x) \cdot f'(2x - 3x^2)$

Để hàm số $g(x) = f(2x - 3x^2)$ đồng biến thì

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow (2 - 6x) \cdot f'(2x - 3x^2) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 6x \geq 0 \\ f'(2x - 3x^2) \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 2 - 6x \leq 0 \\ f'(2x - 3x^2) \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 1. } \begin{cases} 2 - 6x \geq 0 \\ f'(2x - 3x^2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{3} \\ \begin{cases} 2x - 3x^2 \leq 1 \\ 2x - 3x^2 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 2. } \begin{cases} 2 - 6x \leq 0 \\ f'(2x - 3x^2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 1 \leq 2x - 3x^2 \leq 2 \end{cases} \text{ hệ vô nghiệm}$$

Vậy hàm số $g(x) = f(2x - 3x^2)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$

Câu 45. (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ sao cho hàm số $y = \frac{x^4}{4} - \frac{mx^3}{3} - \frac{x^2}{2} + mx + 2020$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$?

A. 12.

B. 11.

C. 9.

D. 10.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $y' = x^3 - mx^2 - x + m$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$ khi và chỉ khi $y' \leq 0, \forall x \in (0; 1)$ hay $x^3 - x \leq m(x^2 - 1), \forall x \in (0; 1)$.

Vì $\forall x \in (0; 1): x^2 - 1 < 0$ nên $x^3 - x \leq m(x^2 - 1), \forall x \in (0; 1) \Leftrightarrow m \leq x, \forall x \in (0; 1) \Leftrightarrow m \leq 0$.

Mặt khác $m \in [-10; 10] \cap \mathbb{Z}$ nên có $0 - (-10) = 11$ giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 46. (Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020) Với mọi giá trị $m \geq a\sqrt{b}$, $(a, b \in \mathbb{Z})$ thì hàm số $y = 2x^3 - mx^2 + 2x + 5$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$. Khi đó $a - b$ bằng

A. 1.

B. -2.

C. 3.

D. -5.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 6x^2 - 2mx + 2$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$ khi $y' \geq 0, \forall x \in (-2; 0)$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - mx + 1 \geq 0, \forall x \in (-2; 0)$$

$$3x^2 + 1 \geq mx \Leftrightarrow 3x + \frac{1}{x} \leq m.$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = 3x + \frac{1}{x}; f'(x) = 3 - \frac{1}{x^2} = \frac{3x^2 - 1}{x^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2 - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$.

x	-2	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$		$-2\sqrt{3}$	

Từ bảng biến thiên để $f(x) \leq m, \forall x \in (-2; 0)$

$$\text{thì } \max_{(-2;0)} f(x) \leq m \Rightarrow m \geq -2\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow a - b = -5.$$

Câu 47. (Trần Phú - Quảng Ninh - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-4	-1	2	7	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = f(2x+1) + \frac{2}{3}x^3 - 8x + 5$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; -2)$.

B. $(1; +\infty)$.

C. $(-1; 7)$.

D. $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 2f'(2x+1) + 2x^2 - 8$.

$$\text{Xét } y' \leq 0 \Leftrightarrow 2f'(2x+1) + 2x^2 - 8 \leq 0 \Leftrightarrow f'(2x+1) \leq 4 - x^2$$

$$\text{Đặt } t = 2x+1, \text{ ta có } f'(t) \leq \frac{-t^2 + 2t + 15}{4}$$

$$\text{Vì } \frac{-t^2 + 2t + 15}{4} \geq 0, \forall t \in [-3; 5]. \text{ Mà } f'(t) \leq 0, \forall t \in [-3; 2].$$

$$\text{Nên } f'(t) \leq \frac{-t^2 + 2t + 15}{4} \Rightarrow t \in [-3; 2].$$

$$\text{Suy ra } -3 \leq 2x+1 \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq \frac{1}{2}. \text{ Vậy chọn phương án } \mathbf{D}.$$

PHẦN 2. CỰC TRỊ

Câu 48. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$.

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } y' = 2x^2 - 2mx - 2(3m^2 - 1) = 2(x^2 - mx - 3m^2 + 1),$$

$$g(x) = x^2 - mx - 3m^2 + 1; \Delta = 13m^2 - 4.$$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi y' có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow g(x)$ có hai nghiệm phân biệt

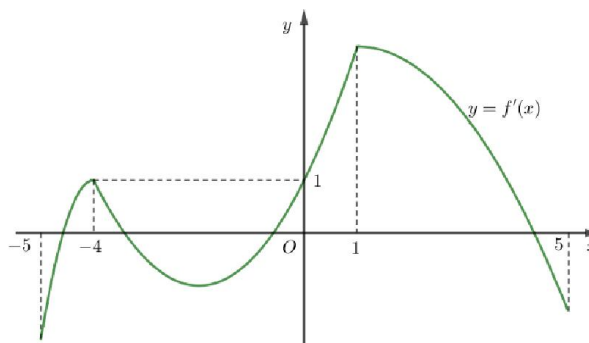
$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2\sqrt{13}}{13} \\ m < -\frac{2\sqrt{13}}{13} \end{cases} (*)$$

x_1, x_2 là các nghiệm của $g(x)$ nên theo định lý Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -3m^2 + 1 \end{cases}$.

$$\text{Do đó } x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 2m + 1 = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện (*), ta thấy chỉ $m = \frac{2}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 49. (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x^2 + 4x) - x^2 - 4x$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng $(-5; 1)$?



A. 5.

B. 4.

C. 6.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x) = f(x^2 + 4x) - x^2 - 4x$

$$\Rightarrow g'(x) = (2x + 4)f'(x^2 + 4x) - (2x + 4) = (2x + 4)[f'(x^2 + 4x) - 1]$$

$$\text{Ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4 = 0 \\ x^2 + 4x = -4 & (1) \\ x^2 + 4x = 0 & (2) \\ x^2 + 4x = a \in (1; 5) & (3) \end{cases}$$

Xét phương trình $x^2 + 4x = a \in (1; 5)$, ta có BBT của hàm số $y = x^2 + 4x$ trên $(-5; 1)$ như sau:

x	-5	-4	-2	0	1
y'		-	0	+	
y	5		0		5
			-4		

Suy ra (1) có nghiệm kép $x = -2$, (2) có 2 nghiệm phân biệt $x = -4; x = 0$, (3) có 2 nghiệm phân biệt $x = x_1; x = x_2$ khác $-2; 0; -4$. Do đó phương trình $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm trong đó có $x = -2$ là nghiệm bội ba, các nghiệm $x = -4; x = 0; x = x_1; x = x_2$ là các nghiệm đơn.
 Vậy $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 50. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của hàm số $y = f'(x)$ như hình sau:

x	$-\infty$	-2	0	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Hỏi hàm số $g(x) = f(1-x) + \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$ đạt cực tiểu tại điểm nào trong các điểm sau?

- A.** $x = 3$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = -3$. **D.** $x = 1$.

Lời giải

Chọn A

$$g'(x) = -f'(1-x) + x^2 - 4x + 3.$$

$$-f'(1-x) > 0 \Leftrightarrow f'(1-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x < -2 \\ 0 < 1-x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -3 < x < 1 \end{cases}$$

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$	
$-f'(1-x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	
x^2-4x+3	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g'(x)$	không xác định	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu $g'(x)$ ta suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$.

Câu 51. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Cho hàm số $f(x) = x^4 + ax^2 + b$ có giá trị cực đại $y_{CD} = 9$ và giá trị cực tiểu $y_{CT} = 1$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x^2) = m^2$ có 4 nghiệm phân biệt.

- A.** 2. **B.** 7. **C.** 1. **D.** 6.

Lời giải.

Chọn C

Hàm số $f(x) = x^4 + ax^2 + b$ là hàm số trùng phương có giá trị cực đại $y_{CD} = 9$ và giá trị cực tiểu $y_{CT} = 1$, suy ra bảng biến thiên của $f(x)$ như sau

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$						$+\infty$

Đặt $t = x^2, (t \geq 0)$ phương trình $f(x^2) = m^2$ trở thành $f(t) = m^2$. Phương trình $f(x^2) = m^2$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m^2$ có 2 nghiệm $t > 0$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên nửa khoảng $[0; +\infty)$, phương trình $f(t) = m^2$ có 2 nghiệm $t > 0$ khi và chỉ khi $1 < m^2 < 9 \Leftrightarrow 1 < m < 3$.

Vậy có 1 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 52. (Chuyên KHTN - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^3 - (2m-1)x^2 + 2mx - m - 1$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành?

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục hoành khi và chỉ khi phương trình $mx^3 - (2m-1)x^2 + 2mx - m - 1 = 0$ (1) có 3 nghiệm phân biệt.

Ta có (1) $\Leftrightarrow (x-1)[mx^2 - (m-1)x + m+1] = 0$

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi pt $mx^2 - (m-1)x + m+1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1

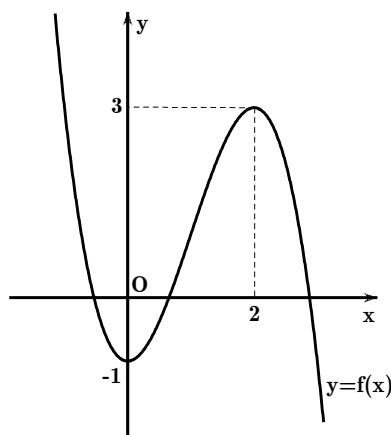
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m - (m-1) + m + 1 \neq 0 \\ (m-1)^2 - 4m(m+1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m + 2 \neq 0 \\ -3m^2 - 6m + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -2 \\ \frac{-3-2\sqrt{3}}{3} < m < \frac{-3+2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = -1$.

Câu 53. (Chuyên KHTN - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = f(x^3 + x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 . Giá trị x_0 thuộc khoảng nào sau đây

A. $(1;3)$.

B. $(-1;1)$.

C. $(0;2)$.

D. $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g(x) = f(x^3 + x) \Rightarrow g'(x) = (3x^2 + 1)f'(x^3 + x)$.

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow (3x^2 + 1)f'(x^3 + x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^3 + x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + x = 0 \\ x^3 + x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

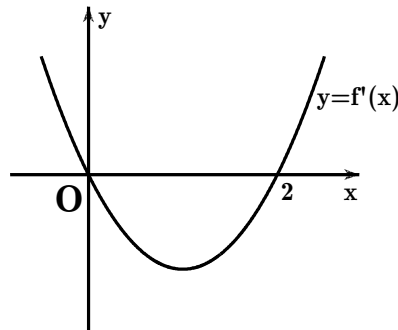
$$\text{Do đó } g'(x) > 0 \Leftrightarrow (3x^2 + 1)f'(x^3 + x) > 0 \Leftrightarrow f'(x^3 + x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x^3 + x < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$			
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$		
$g(x)$	$+\infty$						$-\infty$

Vậy hàm số $g(x) = f(x^3 + x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x_0 = 0$. Suy ra $x_0 \in (-1;1)$.

Câu 54. (Chuyên KHTN - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(-x^2 + x)$ là

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g(x) = f(-x^2 + x) \Rightarrow g'(x) = (-2x + 1)f'(-x^2 + x)$.

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow (-2x+1)f'(-x^2+x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+1=0 \\ f'(-x^2+x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ -x^2+x=0 \\ -x^2+x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x=1 \\ x=0 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } g'(x) > 0 \Leftrightarrow (-2x+1)f'(-x^2+x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+1 > 0 \\ f'(-x^2+x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+1 < 0 \\ f'(-x^2+x) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ -x^2+x > 2 \\ -x^2+x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x > 1 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ 0 < -x^2+x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

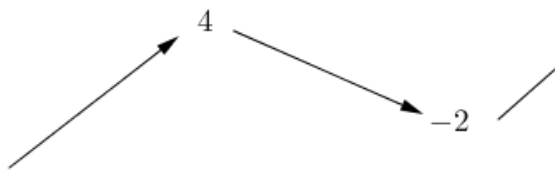
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$					

Vậy hàm số có 1 điểm cực tiểu.

Câu 55. (Chuyên Lam Sơn - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	4	-2	$+\infty$



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ là

A. 4.

B. 5.

C. 1.

D. 7.

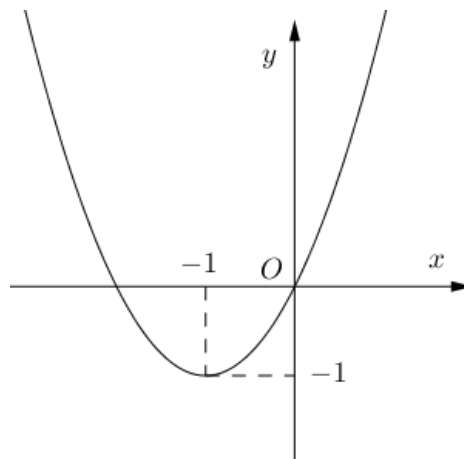
Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = (2x+2)f'(x^2+2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ f'(x^2+2x) = 0 \end{cases} \quad (1)$

Từ BBT ta thấy phương trình (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x = a < -1 & (2) \\ x^2+2x = b \in (-1;1) & (3) \\ x^2+2x = c > 1 & (4) \end{cases}$

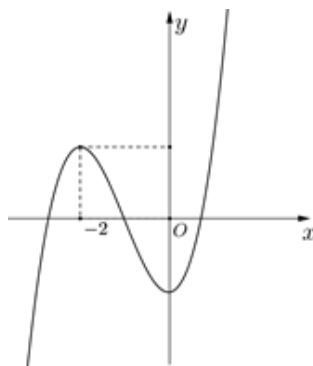
Đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x$ có dạng



Từ đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x$ ta thấy phương trình (2) vô nghiệm; phương trình (3); phương trình (4) đều có 2 nghiệm phân biệt.

Do đó $y' = 0$ có 5 nghiệm đơn phân biệt. Vậy hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 56. (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - Quảng Nam - 2020) Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(-2x^2 + 4x)$ là

A. 5.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = (-2x^2 + 4x)' f'(-2x^2 + 4x) = (-4x + 4) f'(-2x^2 + 4x)$

Mặt khác:

$+) -4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

$$+) -2x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

$$+) -2x^2 + 4x = -2 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{2} \end{cases}.$$

+) Đặt $t = -2x^2 + 4x \Rightarrow t' = -4x + 4$. Ta có bảng biến thiên của $t = -2x^2 + 4x$

x	$-\infty$	$1-\sqrt{2}$	0	1	2	$1+\sqrt{2}$	$+\infty$
t	$-\infty$	-2	0	2	0	-2	$-\infty$

Dựa vào đồ thị của hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ta suy ra bảng xét dấu của

$$y' = (-4x + 4)f'(-2x^2 + 4x):$$

x	$-\infty$	$1-\sqrt{2}$	0	1	2	$1+\sqrt{2}$	$+\infty$
$4x-4$	-	0	-	0	+	0	+
$f'(t)$	+	0	-	0	+	0	+
y'	-	0	+	0	+	0	+

Từ bảng xét dấu trên ta suy ra: Hàm số đã cho có 5 cực trị.

Câu 49. Cho hàm số $y = x^6 + (4+m)x^5 + (16-m^2)x^4 + 2$. Gọi S là tập hợp các giá trị m nguyên dương để hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 0$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 10.

B. 9.

C. 6.

D. 3.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $y' = 6x^5 + 5(4+m)x^4 + 4(16-m^2)x^3 = x^3(6x^2 + 5(4+m)x + 16-m^2)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 0 \\ 6x^2 + 5(4+m)x + 16-m^2 = 0(*) \end{cases}$$

$$(*) \text{ có } \Delta = (4+m)(49m+4).$$

Với mọi m nguyên dương thì $\begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{-5(4+m)}{6} < 0 \end{cases}$ do đó ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $16-m^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$: (*) có hai nghiệm âm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), ta có bảng xét dấu y' như sau:

x	$-\infty$	x_1	x_2	0	$+\infty$
y'	-	0	+	0	+

Lúc này $x = 0$ là điểm cực tiểu.

Trường hợp 2: $16-m^2 < 0 \Leftrightarrow m > 4$: (*) có hai nghiệm trái dấu x_1, x_2 ($x_1 < 0 < x_2$), ta có bảng xét dấu y' như sau:

x	$-\infty$	x_1			0	x_2			$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	

Từ đây suy ra $x = 0$ là điểm cực đại (không thỏa mãn).

Trường hợp 3: (*) có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm âm, lúc này $x = 0$ là nghiệm bội 4 của đạo hàm nên không phải là điểm cực trị.

Vậy có ba giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là 1, 2, 3. Tổng các phần tử của S bằng 6.

Câu 57. (Chuyên Lào Cai - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)^4(x+4)^3[x^2 + 2(m+3)x + 6m + 18]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có **đúng** một điểm cực trị?

B. 7.

B. 5.

C. 8.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ (x+2)^4 = 0 \\ (x+4)^3 = 0 \\ x^2 + 2(m+3)x + 6m + 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = -4 \\ x^2 + 2(m+3)x + 6m + 18 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) vô nghiệm, có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có nghiệm là -4 .

Trường hợp 1. Phương trình (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = 4m^2 + 24m + 36 - 24m - 72 = 4m^2 - 36 < 0$
 $\Leftrightarrow -3 < m < 3 \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$

Trường hợp 2. Phương trình (*) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 4m^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -3 \end{cases}$.

Trường hợp 3. Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Trong đó $x_1 = -4$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta = 4m^2 - 36 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > 3 \end{cases}$.

Theo định lý Viète ta có $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -4 + x_2 = -2m - 6 \\ P = x_1 \cdot x_2 = -4 \cdot x_2 = 6m + 18 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2m - 2 \\ x_2 = -\frac{3}{2}m - \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -2m - 2 = -\frac{3}{2}m - \frac{9}{2} \Leftrightarrow m = 5.$$

Vậy $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 5\}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 58. (Chuyên Quang Trung - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như hình vẽ bên

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$		
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2|x|)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4

B. 7

C. 9

D. 11

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R}$.

$$* y = h(x) = f(|x|^2 - 2|x|)$$

$$y' = h'(x) = f'(|x|^2 - 2|x|) \cdot \frac{x}{|x|} \cdot (2|x| - 2).$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ |x|^2 - 2|x| = 0 \\ |x|^2 - 2|x| = 1 \\ |x|^2 - 2|x| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 2 \\ x = -2 \\ x = 1 + \sqrt{2} \\ x = -1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{3} \\ x = -1 - \sqrt{3} \end{cases}.$$

Ta thấy phương trình $h'(x) = 0$ có 8 nghiệm đơn (1).

$h'(x)$ không tồn tại tại $x = 0$ mà $x = 0$ thuộc tập xác định đồng thời qua đó $h'(x)$ đổi dấu (2).

Từ (1) và (2) suy ra hàm số đã cho có 9 điểm cực trị.

Câu 59. (Chuyên Sơn La - 2020) Gọi S là tập hợp những giá trị của tham số m để hàm số sau không có cực trị trên $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{1}{4}m^2 \cdot e^{4x} + \frac{1}{3}m \cdot e^{3x} - \frac{1}{2}e^{2x} - (m^2 + m - 1)e^x. \text{ Tổng tất cả các phần tử của tập } S \text{ bằng}$$

A. $-\frac{2}{3}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{3}$

D. -1.

Lời giải

Chọn A

$$f'(x) = m^2 \cdot e^{4x} + m \cdot e^{3x} - e^{2x} - (m^2 + m - 1)e^x = e^x(m^2 \cdot e^{3x} + m \cdot e^{2x} - e^x - m^2 - m + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 \cdot e^{3x} + m \cdot e^{2x} - e^x - m^2 - m + 1 = 0.$$

Đặt $t = e^x > 0$ ta có

$$\text{Ta có: } m^2 t^3 + m t^2 - t - m^2 - m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2(t^3 - 1) + m(t^2 - 1) + 1 - t = 0 \Leftrightarrow (t - 1)[m^2(t^2 + t + 1) + m(t + 1) - 1] = 0$$

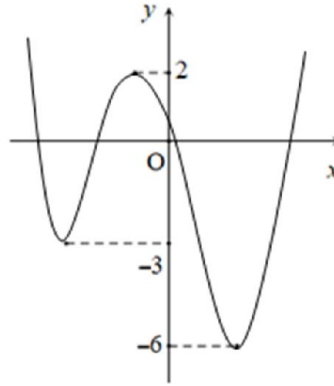
$$\Leftrightarrow (t - 1)[m^2 t^2 + (m^2 + m)t + m^2 + m - 1] = 0$$

Điều kiện cần để hàm số không có cực trị thì phương trình $m^2t^2 + (m^2 + m)t + m^2 + m - 1$ có nghiệm $t = 1 \Leftrightarrow 3m^2 + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1, m = \frac{1}{3}$.

Thử lại ta thấy với hai giá trị m trên ta đều có nghiệm đơn $t = 1$.

Vậy hai giá trị $m = -1, m = \frac{1}{3}$ thỏa mãn.

Câu 60. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 4 và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-12; 12]$ để hàm số $g(x) = |2f(x-1) + m|$ có 5 điểm cực trị?



A. 13.

B. 14.

C. 15.

D. 12.

Lời giải

Chọn C

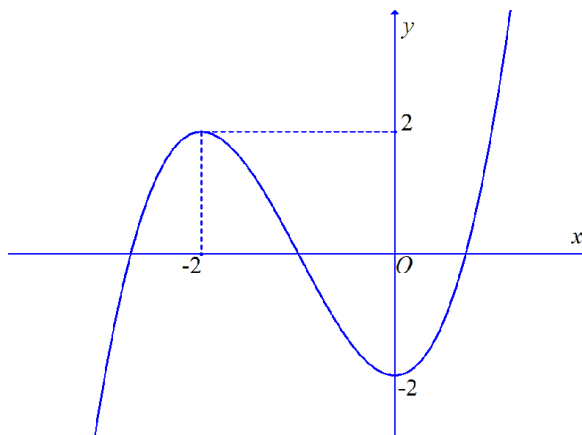
Đặt $h(x) = 2f(x-1) + m \Rightarrow g(x) = |h(x)|$.

- ☐ Số điểm cực trị của $g(x)$ = số điểm cực trị của $y = h(x)$ + số giao điểm của $y = h(x)$ với trục Ox khác với điểm cực trị của $y = h(x)$.
- ☐ Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị. Suy ra hàm số $y = h(x)$ cũng có 3 điểm cực trị.
- ☐ Hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x-1) = -\frac{m}{2}$ có 2 nghiệm phân biệt khác điểm cực trị của $h(x)$.
- ☐ Đồ thị hàm số $y = f(x-1)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ sang bên phải 1 đơn vị.

Dựa vào đồ thị, ta được: $-\frac{m}{2} \geq 2$ hoặc $-6 < -\frac{m}{2} \leq -3$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -4 \\ 6 \leq m < 12 \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}; m \in [-12; 12]} \text{có 15 giá trị } m \text{ nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.}$

Câu 61. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020) Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(-2x^2 + 4x)$



A. 2.

B. 5.

C. 4.

D. 3.

Lời giải.

Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị là $x = -2; x = 0$.

$$g(x) = f(-2x^2 + 4x) \text{ liên tục trên } \mathbb{R}. \quad g'(x) = (-4x + 4)f'(-2x^2 + 4x).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 4 = 0 \\ -2x^2 + 4x = 0 \\ -2x^2 + 4x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases}$$

Như vậy $g'(x)$ có 3 nghiệm, trong đó 1 là nghiệm bội 3, 0 và 2 là nghiệm đơn nên $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 62. (ĐHQG Hà Nội - 2020) Điều kiện của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 - mx}{1 - x}$ có cực đại và cực tiểu là

A. $m < 0$.B. $m > -1$.C. $m < 2$.D. $m > -2$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x \neq 1$.

$$\text{Ta có } y = \frac{x^2 - mx}{1 - x} \Rightarrow y' = \frac{-x^2 + 2x - m}{(1 - x)^2}.$$

Hàm số $y = \frac{x^2 - mx}{1 - x}$ có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và đổi dấu khi đi qua

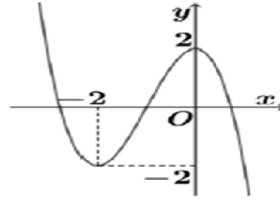
hai điểm đó $\Leftrightarrow -x^2 + 2x - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ -1 + 2 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m > 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < 1.$$

Vậy $m < 1$ thì hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu.

Không có đáp án hoặc chọn A.

Câu 63. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(-x^2 + x)$ bằng

A. 1.

B. 5.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Khi đó $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Theo đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta có

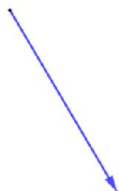
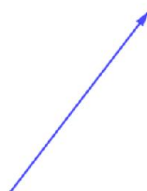
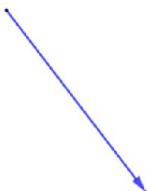
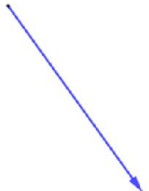
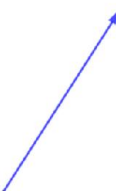
$$\begin{cases} f'(-2) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ f(-2) = -2 \\ f(0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a - 4b + c = 0 \\ c = 0 \\ -8a + 4b - 2c + d = -2 \\ d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a - 4b = 0 \\ -8a + 4b = -4 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases}.$$

Vậy $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 2$.

Khi đó, ta có $g(x) = f(-x^2 + x) = x^6 - 3x^5 + 5x^3 - 3x^2 + 2$.

$$g'(x) = 3x(2x^4 - 5x^3 + 5x - 2) \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

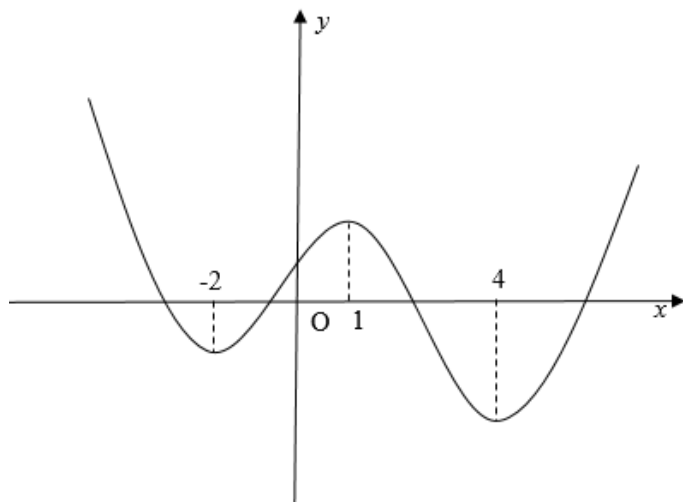
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	0.5	1	2	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$							

Suy ra, hàm số $g(x) = f(-x^2 + x)$ có ba điểm cực tiểu.

Câu 64. (Sở Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hàm số

$$g(x) = f\left(e^x - \frac{x^2 + 2x}{2}\right) \text{ có bao nhiêu điểm cực trị?}$$



A. 3.

B. 7.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = (e^x - x - 1)f'\left(e^x - \frac{x^2 + 2x}{2}\right)$

$$\text{Xét } g'(x) = 0 \Leftrightarrow (e^x - x - 1)f'\left(e^x - \frac{x^2 + 2x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x - x - 1 = 0 \\ f'\left(e^x - \frac{x^2 + 2x}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x - x - 1 = 0 & (1) \\ e^x - \frac{x^2 + 2x}{2} = -2 & (2) \\ e^x - \frac{x^2 + 2x}{2} = 1 & (3) \\ e^x - \frac{x^2 + 2x}{2} = 4 & (4) \end{cases}$$

Ta xét $u(x) = e^x - x - 1; v(x) = e^x - \frac{x^2 + 2x}{2}$

Ta có $u'(x) = e^x - 1; u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $u'(x) = e^x - 1; v'(x) = e^x - x - 1$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$u'(x)$	$-$	0	$+$
$u(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Vậy $u(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

Xét hàm số $v(x) = e^x - \frac{x^2 + 2x}{2}$

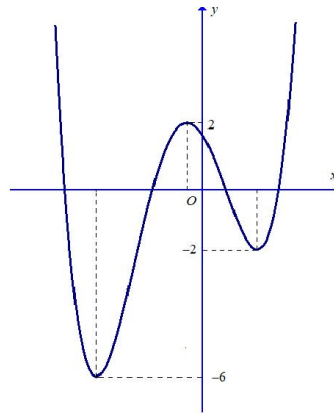
Ta có $v'(x) = e^x - x - 1 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$v'(x)$	$+$	0	$+$
$v(x)$	$-\infty$		$+\infty$

Khi đó các phương trình (2),(3),(4) có nghiệm duy nhất và $g'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm đó. Vậy hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 65. (Sở Bình Phước - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để hàm số $g(x) = |f(x+2020) + m^2|$ có 5 điểm cực trị?



A. 1.

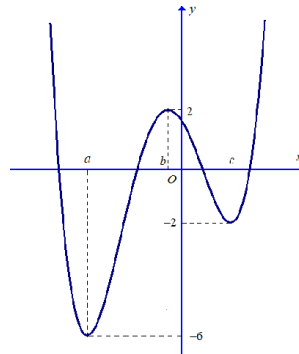
B. 2.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn B



Gọi a, b, c ($a < b < c$) là ba điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

Khi đó: $f(a) = -6; f(b) = 2; f(c) = -2$.

Xét hàm $h(x) = f(x+2020)$ với $x \in \mathbb{R}$.

Khi đó: $h'(x) = f'(x+2020) \cdot (x+2020)' = f'(x+2020)$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - 2020 \\ x = b - 2020 \\ x = c - 2020 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm $h(x)$

x	$-\infty$	$a-2020$	$b-2020$	$c-2020$	$+\infty$				
$h'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$h(x)$									

$\swarrow$ $\searrow$ $\swarrow$ $\searrow$
 -6 2 -2

Hàm số $g(x) = |f(x+2020) + m^2|$ có 5 điểm cực trị

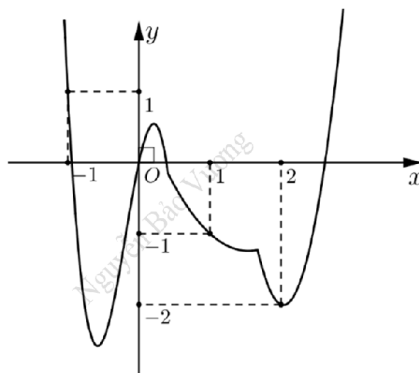
$\Leftrightarrow$ Phương trình $f(x+2020) + m^2 = 0$ có đúng 2 nghiệm không thuộc

$\{a-2020; b-2020; c-2020\}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 2 \\ m^2 = -2 \\ 2 < m^2 < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm\sqrt{2} \\ -\sqrt{6} < m < -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} < m < \sqrt{6} \end{cases}$$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m là $m = 2$ và $m = -2$ thì hàm số $g(x) = |f(x+2020) + m^2|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 66. (Sở Yên Bái - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) + x^2 + 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

B. Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

C. Hàm số $y = g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

D. Hàm số $y = g(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.

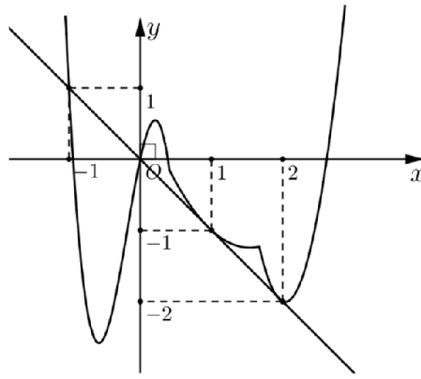
Lời giải

Chọn C

$$g'(x) = 2f'(x) + 2x.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x.$$

Ta vẽ thêm đường thẳng $y = -x$ và đồ thị.



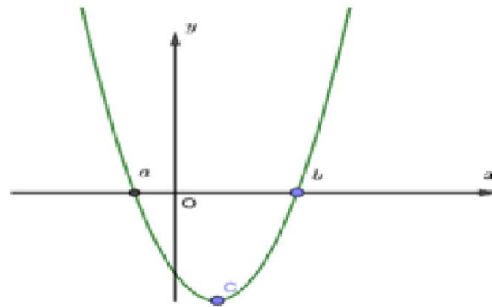
Khi đó phương trình $g'(x) = 0$ có các nghiệm $x = -1, x = 1, x = 2$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$							

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Câu 67. (Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị của hàm đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ và $f(b) = 1$. Số giá trị nguyên của $m \in [-5; 5]$ để hàm số $g(x) = |f^2(x) + 4f(x) + m|$ có đúng 5 điểm cực trị là



A. 8.

B. 10.

C. 9.

D. 7.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

x	$-\infty$	a	b	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

Xét hàm số $h(x) = f^2(x) + 4f(x) + m$

$$\Rightarrow h'(x) = 2f'(x)f(x) + 4f'(x)$$

$$\Rightarrow h'(x) = 2f'(x)[f(x) + 2]$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow 2f'(x)[f(x) + 2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a; x = b \\ x = c(c < a) \end{cases}$$

Pt có 3 nghiệm phân biệt $\Rightarrow$ có 3 điểm cực trị

Xét $h(x) = 0$

$$\Leftrightarrow f^2(x) + 4f(x) = -m(2)$$

Đề $g(x) = |h(x)|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi PT (2) có 2 nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ phân biệt

Xét hàm số $t(x) = f^2(x) + 4f(x)$

Ta có Bảng biến thiên của $t(x)$:

x	$-\infty$	c	a	b	$+\infty$		
$t'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$t(x)$	$+\infty$	-4	$t(a)$	5	$+\infty$		

$y = -m$

Từ YCBT $\Leftrightarrow t(x) = -m$ có hai nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ pb

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m \geq t(a) > 5 \\ -4 < -m \leq 5 \\ -5 \leq m \leq 5; m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -t(a) < -5 \\ -4 < -m \leq 5 \\ -5 \leq m \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq m < 4 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \in \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}.$$

Cách 2:

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$:

x	$-\infty$	a	b	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$			$f(a)$		$f(b) = 1$	$+\infty$

Xét hàm số $h(x) = f^2(x) + 4f(x) + m$

$$\Rightarrow h'(x) = 2f'(x)f(x) + 4f'(x)$$

$$\Rightarrow h'(x) = 2f'(x)[f(x) + 2]$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow 2f'(x)[f(x) + 2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a; x = b \\ x = c(c < a) \end{cases}$$

x	$-\infty$	c	a	b	$+\infty$		
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$			$h(a)$			$+\infty$
			$-4+m$			$5+m$	

Từ YCBT $g(x) = |h(x)| = |f^2(x) + 4f(x) + m|$ có 5 điểm cực trị khi:

$$\begin{cases} h(a) \leq 0 \\ -4 + m < 0 \leq 5 + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq f^2(a) + 4f(a) < -5 \\ -5 \leq m < 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \in \mathbb{Z}; m \in [-5; 5]$$

$$\Leftrightarrow m \in \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$$

Câu 68. (Kim Liên - Hà Nội - 2020) Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$

có 5 điểm cực trị?

A. 16.

B. 28.

C. 26.

D. 27.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét hàm số } f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m. \text{ Ta có } f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$		
$f(x)$	$+\infty$		$m-5$		m		$m-32$	$+\infty$

Vậy với mọi m hàm số $f(x)$ luôn có ba điểm cực trị.

Do đó để hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $f(x) = 0$ có đúng hai

$$\text{nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m-5 \geq 0 \\ m-32 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ 5 \leq m < 32 \end{cases}.$$

Vì m là số nguyên dương cho nên có 27 số m thỏa đề bài.

Câu 69. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f(x)$		1		1	
			-2		

Hàm số $y = f(2x)$ đạt cực đại tại

A. $x = \frac{1}{2}$.

B. $x = -1$.

C. $x = 1$.

D. $x = -2$.

Lời giải

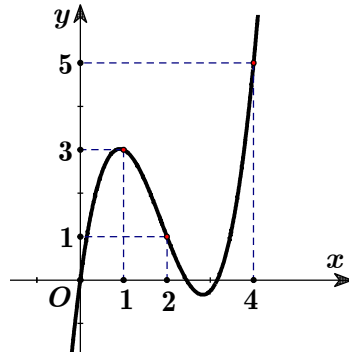
Chọn C

Đặt $t = 2x \Rightarrow y = f(t)$.

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(t)$ đạt cực đại tại $\begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = -1 \\ 2x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}.$

Vậy hàm số $y = f(2x)$ đạt cực đại tại điểm $x = 1$ và $x = -\frac{1}{2}$.

Câu 70. (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0) = 0; f(4) > 4$. Biết hàm $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x^2) - 2x|$ là

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $h(x) = f(x^2) - 2x$.

Ta có: $h'(x) = 2xf'(x^2) - 2$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^2) = \frac{1}{x}$ (vô nghiệm $\forall x \leq 0$).

Đặt $t = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{t}, \forall t > 0$.

Khi đó: $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ (*). Nhận thấy trên khoảng $(0;1)$ thì $w(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ nghịch biến và $f'(t)$ đồng

biến, do đó (*) nếu có nghiệm là duy nhất.

Mặt khác: $h'(0).h'(1) = -2(2f'(1) - 2) = -8 < 0$ và $h'(x)$ liên tục trên $[0;1]$ nên

$\exists x_0 \in (0;1): h'(x_0) = 0$.

Vậy $h'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x_0 \in (0;1)$ và $h(x)$ có một điểm cực tiểu (vẽ bảng biến thiên). (1)

Xét phương trình: $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x^2) - 2x = 0$ (**).

Ta có: $h(0) = f(0) = 0 \Rightarrow x = 0$ là một nghiệm của (**).

Mặt khác: $h(\sqrt{x_0}).h(2) = (f(x_0) - 2\sqrt{x_0})(f(4) - 4) < 0 \Rightarrow \exists x_1 \in (\sqrt{x_0}; 2): h(x_1) = 0$.

Nên (**) có nghiệm $x_1 \in (\sqrt{x_0}; 2)$.

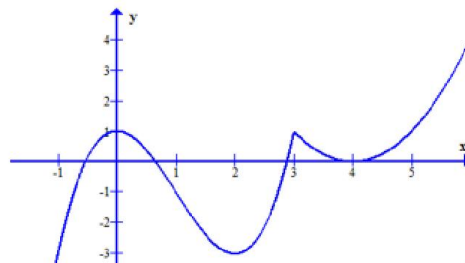
Vì $h(x)$ có một điểm cực trị, nên (**) có không quá 2 nghiệm.

Vậy $h(x) = f(x^2) - 2x = 0$ có hai nghiệm phân biệt. (2)

Từ (1) và (2) ta được: hàm số $g(x) = |f(x^2) - 2x|$ có 3 điểm cực trị.

Câu 71. (Hải Hậu - Nam Định - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(4; +\infty)$ có đồ thị như hình vẽ.

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(2|x| - 2)$ bằng



A. 7.

B. 5.

C. 4.

D. 9.

Lời giải

Chọn D

$$g(x) = f(2|x| - 2) \Rightarrow g'(x) = (2|x| - 2)' f'(2|x| - 2) = (2\sqrt{x^2} - 2)' f'(2|x| - 2) = \frac{x}{|x|} f'(2|x| - 2)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{|x|} f'(2|x| - 2) = 0 \Leftrightarrow f'(2|x| - 2) = 0 (x \neq 0)$$

$$\text{Dựa vào đồ thị ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 3 \\ x = 4 \end{cases}$$

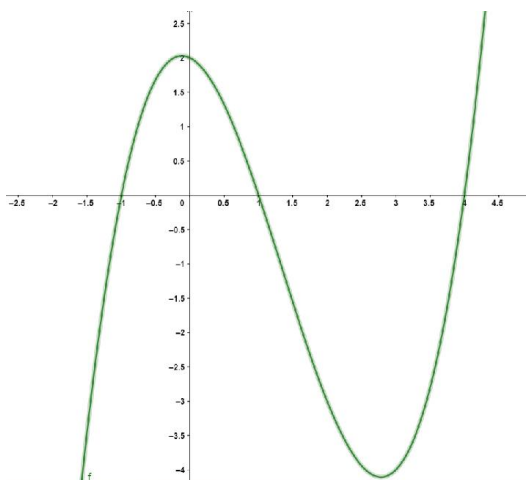
$$\rightarrow f'(2|x| - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2|x| - 2 = 0 \\ 2|x| - 2 = 2 \\ 2|x| - 2 = 3 \\ 2|x| - 2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = 1 \\ |x| = 2 \\ |x| = \frac{5}{2} \\ |x| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm \frac{5}{2} \\ x = \pm 3 \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	-1	0	1	2	$\frac{5}{2}$	3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Suy ra hàm số $y = f(2|x| - 2)$ có 9 điểm cực trị

Câu 72. (Hải Hậu - Nam Định - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây:

Tìm điểm cực đại của hàm số $y = 2019^{-f(x)} - 2020^{f(x)}$.

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng xét dấu của $y = f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	1	4	$+\infty$
y'	-	0	+	0	+

Xét hàm số $y = 2019^{-f(x)} - 2020^{f(x)} \Rightarrow y' = -f'(x)(2019^{-f(x)} \ln 2019 + 2020^{f(x)} \ln 2020)$

Vì $2019^{-f(x)} \ln 2019 + 2020^{f(x)} \ln 2020 > 0$

Nên $y' = -f'(x)(2019^{-f(x)} \ln 2019 + 2020^{f(x)} \ln 2020)$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	-1	1	4	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$

Vậy hàm số $y = 2019^{-f(x)} - 2020^{f(x)}$ có hai điểm cực đại.

Câu 73. (Kim Thành - Hải Dương - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ là một hàm đa thức có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - |x|)$

A. 5.

B. 3.

C. 1.

D. 7.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g(x) = f(x^2 - |x|) = f(|x|^2 - |x|)$. Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ bằng hai lần số điểm cực trị dương của hàm số $f(x)$ cộng thêm 1.

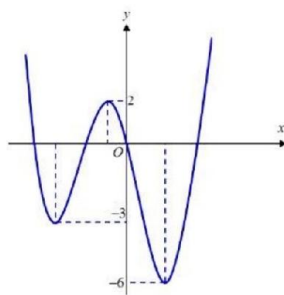
$$\text{Xét hàm số } h(x) = f(x^2 - x) \Rightarrow h'(x) = (2x - 1)f'(x^2 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x^2 - x = -1 \\ x^2 - x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Bảng xét dấu hàm số $h(x) = f(x^2 - x)$

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $h(x) = f(x^2 - x)$ có 2 điểm cực trị dương, vậy hàm số $g(x) = f(x^2 - |x|) = f(|x|^2 - |x|)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 74. (Trần Phú - Quảng Ninh - 2020) Cho đồ thị $y = f(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \left| f(x+2018) + \frac{1}{3}m^2 \right|$

có 5 điểm cực trị. Tổng tất cả các giá trị của các phần tử trong tập S bằng

A. 6.

B. 5.

C. 7.

D. 9.

Lời giải

Chon C

$$\text{Đặt } g(x) = \left| f(x+2018) + \frac{1}{3}m^2 \right| \Rightarrow g'(x) = \frac{f'(x+2018) \left[f(x+2018) + \frac{1}{3}m^2 \right]}{\left| f(x+2018) + \frac{1}{3}m^2 \right|}$$

$$\text{Phương trình } g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x+2018)=0 & (1) \\ f(x+2018)=-\frac{m^2}{3} & (2) \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình (1) luôn có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy để đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 5 điểm cực trị thì phương trình (2) phải có 2 nghiệm đơn phân

$$\text{biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{m^2}{3} > 2 \\ -6 < -\frac{m^2}{3} \leq -3 \end{cases} \quad (m \in \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow m \in \{3; 4\}.$$

Vậy tổng các phần tử là 7.

PHẦN 3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

Câu 75. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Cho hàm số $y = \frac{x^4 + ax + a}{x + 1}$, với a là tham số thực. Gọi M, m lần

lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[1; 2]$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để $M \geq 2m$?

A. 10.

B. 14.

C. 5.

D. 20 .

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y = \frac{x^4 + ax + a}{x + 1} = \frac{x^4}{x + 1} + a$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{3x^4 + 4x^3}{(x+1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ x = 0 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	-1	0	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$+$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $M = \max \left\{ \left| a + \frac{1}{2} \right|; \left| a + \frac{16}{3} \right| \right\}$ và $m = \min \left\{ \left| a + \frac{1}{2} \right|; \left| a + \frac{16}{3} \right| \right\}$.

$$\text{Trường hợp 1. } a + \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow a \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} M = \left| a + \frac{16}{3} \right| = a + \frac{16}{3} \\ m = \left| a + \frac{1}{2} \right| = a + \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } M \geq 2m \Leftrightarrow a + \frac{16}{3} \geq 2 \left(a + \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow a \leq \frac{13}{3}.$$

Kết hợp điều kiện, ta có $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{13}{3} \Rightarrow$ có 5 giá trị nguyên thỏa mãn điều kiện.

$$\text{Trường hợp 2. } a + \frac{16}{3} \leq 0 \Leftrightarrow a \leq -\frac{16}{3} \Rightarrow \begin{cases} M = \left| a + \frac{1}{2} \right| = -a - \frac{1}{2} \\ m = \left| a + \frac{16}{3} \right| = -a - \frac{16}{3} \end{cases}.$$

$$M \geq 2m \Leftrightarrow -a - \frac{1}{2} \geq 2 \left(-a - \frac{16}{3} \right) \Leftrightarrow a \geq -\frac{61}{6}.$$

Kết hợp điều kiện ta có $-\frac{61}{6} \leq a \leq -\frac{16}{3}$. Suy ra có 5 giá trị nguyên của a thỏa mãn.

$$\text{Trường hợp 3. } \begin{cases} a + \frac{1}{2} < 0 \\ a + \frac{16}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{16}{3} < a < -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Nếu } \left| a + \frac{1}{2} \right| > \left| a + \frac{16}{3} \right| \Leftrightarrow -a - \frac{1}{2} > a + \frac{16}{3} \Leftrightarrow a < -\frac{35}{12} \text{ thì}$$

$$\begin{cases} M = -a - \frac{1}{2} \\ m = a + \frac{16}{3} \end{cases} \Rightarrow M \geq 2m \Leftrightarrow -a - \frac{1}{2} \geq 2 \left(a + \frac{16}{3} \right) \Leftrightarrow a \leq -\frac{67}{18}.$$

Kết hợp điều kiện, ta có $-\frac{16}{3} < a \leq -\frac{67}{18}$. Suy ra có 2 giá trị nguyên của a thỏa mãn điều kiện.

$$\text{Nếu } \left| a + \frac{1}{2} \right| \leq \left| a + \frac{16}{3} \right| \Leftrightarrow -a - \frac{1}{2} \leq a + \frac{16}{3} \Leftrightarrow a \geq -\frac{35}{12} \text{ thì}$$

$$\begin{cases} M = a + \frac{16}{3} \\ m = -a - \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M \geq 2m \Leftrightarrow a + \frac{16}{3} \geq 2\left(-a - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow a \geq -\frac{19}{9}.$$

Kết hợp điều kiện, ta có $-\frac{19}{9} \leq a < -\frac{1}{2}$. Suy ra có 2 giá trị nguyên của a thỏa mãn điều kiện.

Vậy có 14 giá trị nguyên của a thỏa mãn điều kiện.

- Câu 76. (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 30. Tổng giá trị các phần tử của tập hợp S bằng bao nhiêu?
- A. 120. B. 210. C. 108. D. 136.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30$ là hàm số xác định và liên tục trên $[0; 2]$.

Với mọi $x \in [0; 2]$ ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 28x + 48 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Suy ra $\max_{[0; 2]} |f(x)| = \max \{|f(0)|; |f(2)|\}$.

$$\text{Theo đề } \max_{[0; 2]} |f(x)| \leq 30 \Leftrightarrow \begin{cases} |m - 30| \leq 30 \\ |m + 14| \leq |m - 30| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m - 30| \leq 30 \\ |m + 14| \leq 30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -30 \leq m - 30 \leq 30 \\ -30 \leq m + 14 \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq m \leq 60 \\ -44 \leq m \leq 16 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 16.$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in S = \{0; 1; 2; \dots; 16\}$. Vậy tổng tất cả 17 giá trị trong tập S là 136.

- Câu 77. (Chuyên Lương Văn Ty - Ninh Bình - 2020)** Cho hàm số $f(x) = |3e^{4x} - 4e^{3x} - 24e^{2x} + 48e^x + m|$. Gọi A, B lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0; \ln 2]$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-23; 10)$ thỏa mãn $A \leq 3B$. Tổng các phần tử của tập S bằng

- A. -33. B. 0. C. -111. D. -74.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = e^x, x \in [0; \ln 2] \Rightarrow t \in [1; 2]$

Xét hàm số $h(t) = |3t^4 - 4t^3 - 24t^2 + 48t + m|$ trên $[1; 2]$.

Đặt $g(t) = 3t^4 - 4t^3 - 24t^2 + 48t + m$

$$g'(t) = 12t^3 - 12t^2 - 48t + 48; g'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \notin [1; 2] \\ t = 2 \\ t = 1 \end{cases};$$

$$g(1) = m + 23, g(2) = m + 16.$$

$$\text{TH1: } -16 \leq m < 10 \Rightarrow m + 23 \geq m + 16 \geq 0 \Rightarrow A = \max_{[1;2]} h(t) = m + 23; B = \min_{[1;2]} h(t) = m + 16.$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} -16 \leq m < 10 \\ m + 23 \leq 3m + 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -16 \leq m < 10 \\ m \geq \frac{-25}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{-25}{2} \leq m < 10.$$

Do đó: có 22 giá trị

$$\text{TH2: } -23 \leq m < -16 \Rightarrow |m + 23| = m + 23, |m + 16| = -m - 16.$$

$$\text{Để thấy } B = 0. \text{ Suy ra } \begin{cases} m + 23 < -m - 16 \\ -m - 16 \leq 0 \\ m + 23 \geq -m - 16 \\ m + 23 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -16 \leq m < -19.5 \\ -19.5 \leq m \leq -23 \end{cases} (VL)$$

Vậy $S = \{-12; -11; \dots; 0; 1; \dots 9\}$ và tổng các phần tử của tập S bằng $-12 + (-11) + (-10) = -33$.

Câu 78. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 2020$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m sao cho hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. 2.

B. 1.

C. Vô số.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = m - 1 \\ x_2 = m + 1 \end{cases}.$$

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0; +\infty)$ thì $x_1 \leq 0 < x_2$ hoặc $0 < x_1 < x_2$.

$$\text{TH1: } x_1 \leq 0 < x_2 \Leftrightarrow m - 1 \leq 0 < m + 1 \Leftrightarrow -1 < m \leq 1. \text{ Do } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1\}.$$

BBT của hàm số:

x	0	$m + 1$	$+\infty$
y'		- 0 +	
y			

$$\text{TH2: } 0 < x_1 < x_2.$$

BBT của hàm số

x	0	$m - 1$	$m + 1$	$+\infty$
y'		+ 0 - 0 +		
y				

Hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m-1 > 0 \\ y(m+1) \leq y(0) \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ (m+1)^3 - 3m(m+1)^2 + 3(m^2-1)(m+1) + 2020 \leq 2020 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ (m+1)^2(m-2) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ \begin{cases} m \leq 2 \\ m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m \leq 2. \end{cases}$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 2$.

Vậy $m \in \{0; 1; 2\}$.

Câu 79. (Chuyên Bến Tre - 2020) Cho hàm số $y = |x^4 - 2x^3 + x^2 + a|$. Có bao nhiêu số thực a để $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = 10$?

A. 3.

B. 5.

C. 2.

D. 1.

Lời giải.

Chọn C.

Đặt $y = |x^4 - 2x^3 + x^2 + a| = |f(x)|$.

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + a$

Khi đó $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x = 2x(2x^2 - 3x + 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}$.

$\Rightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in [1; 2]$ và $f(1) = a; f(2) = a + 4$

Ta có $\forall x \in [1; 2]$ thì $\begin{cases} \max y \in \{|a|, |a+4|\} \\ \min y \in \{|a|, 0, |a+4|\} \end{cases}$.

Xét các trường hợp

+ $a \geq 0 \Rightarrow \max y = a + 4; \min y = a \Rightarrow 2a + 4 = 10 \Rightarrow a = 3$, nhận.

+ $a \leq -4 \Rightarrow \max y = -a; \min y = -a - 4 \Rightarrow -a - 4 - a = 10 \Rightarrow a = -7$, nhận.

+ $\begin{cases} a < 0 \\ a + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < a < 0 \Rightarrow \min y = 0; \max y \in \{a + 4; -a\}$

$\Rightarrow \begin{cases} a + 4 = 10 \\ -a = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ a = -10 \end{cases}$ (Loại).

Vậy tồn tại hai giá trị a thỏa mãn.

Câu 80. (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020) Cho hàm số $f(x) = |x^3 - 3x^2 + m|$. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ không lớn hơn 2020?

A. 4045.

B. 4046.

C. 4044.

D. 4042.

Lời giải

Chọn A

Với $u = x^3 - 3x^2 + m$ có $u' = 3x^2 - 6x$; $u' = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 2$

$$\text{Do đó } \begin{cases} \min_{[1;3]} u = \min \{u(1); u(3); u(2)\} = \min \{m-2; m; m-4\} = m-4 \\ \max_{[1;3]} u = \max \{u(1); u(3); u(2)\} = \max \{m-2; m; m-4\} = m \end{cases}$$

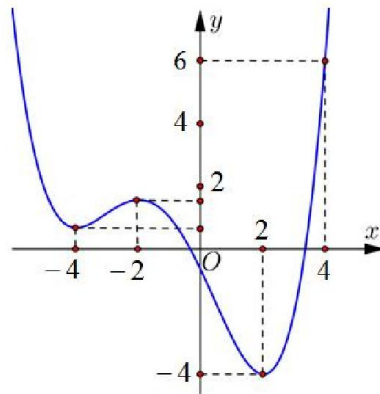
* Nếu $m-4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 4 \Rightarrow \min_{[1;3]} f(x) = m-4 \leq 2020 \Leftrightarrow m \leq 2024 \Rightarrow m \in \{4, \dots, 2024\}$.

* Nếu $m \leq 0 \Rightarrow \min_{[1;3]} f(x) = -m \leq 2020 \Leftrightarrow -2020 \leq m \Rightarrow m \in \{-2020; \dots; 0\}$.

* Nếu $0 < m < 4$ khi đó $\min_{[1;3]} u < 0$; $\max_{[1;3]} u > 0 \Rightarrow \min_{[1;3]} f(x) = 0$ (thỏa mãn).

Vậy $m \in \{-2020, \dots, 2024\}$ có tất cả 4045 số nguyên thỏa mãn.

Câu 81. (Chuyên Lào Cai - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| f\left(\frac{8x}{x^2+1}\right) + m - 1 \right|$ có giá trị lớn nhất không vượt quá 2020?

A. 4029.

B. 4035.

C. 4031.

D. 4041.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \frac{8x}{x^2+1}$. Ta có: $t' = \frac{-8x^2+8}{(x^2+1)^2}$; $t' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

BBT:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
t'		$-$	0	$+$	0	$-$
t		0	-4	4	0	

$$\Rightarrow t \in [-4; 4].$$

Hàm số $y = \left| f\left(\frac{8x}{x^2+1}\right) + m - 1 \right|$ trở thành $g(t) = |f(t) + m - 1|, t \in [-4; 4]$.

Đặt $h(t) = f(t) + m - 1, t \in [-4; 4]$, ta có: $h'(t) = f'(t)$.

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \in [-4; 4] \\ t = -2 \in [-4; 4] \\ t = 2 \in [-4; 4] \end{cases}$$

Ta có: $h(-4) \approx 0,8 + m - 1 = m - 0,2$;

$$h(4) = 6 + m - 1 = m + 5;$$

$$h(-2) \approx 1,6 + m - 1 = m + 0,6;$$

$$h(2) = -4 + m - 1 = m - 5.$$

$$\text{Max}_{\mathbb{R}} y = \text{Max}_{[-4;4]} |h(t)| = \text{Max} \{|m+5|; |m-5|\}.$$

Yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |m+5| \leq 2020 \\ |m-5| \leq 2020 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2020 \leq m+5 \leq 2020 \\ -2020 \leq m-5 \leq 2020 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2025 \leq m \leq 2015 \\ -2015 \leq m \leq 2025 \end{cases} \Leftrightarrow -2015 \leq m \leq 2015.$$

Vậy có tất cả 4031 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 82. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020) Xét hàm số $f(x) = \left| \frac{mx - 2\sqrt{x+4}}{2x+4} \right|$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu số nguyên m thỏa mãn điều kiện $0 < \min_{[-1;1]} f(x) < 1$?

A. 4.

B. 8.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Xét hàm số $g(x) = \frac{mx - 2\sqrt{x+4}}{2x+4}$ liên tục trên $[-1;1]$ và $f(x) = |g(x)|$.

$$\text{Ta có } g(0) = -1; g(1) = \frac{m - 2\sqrt{5}}{6}; g(-1) = \frac{-m - 2\sqrt{3}}{2}.$$

- Nếu $\begin{cases} g(-1) \geq 0 \\ g(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2\sqrt{5} \\ m \leq -2\sqrt{3} \end{cases}$ thì $\min_{[-1;1]} f(x) = 0$, không thỏa mãn bài toán.

- Nếu $\begin{cases} g(-1) < 0 \\ g(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{5}$

Mà m nguyên nên $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{4m + \frac{2x+12}{\sqrt{x+4}}}{(2x+4)^2}.$$

TH1: $m \geq 0$.

Khi đó $g'(x) > 0 \forall x \in [-1;1]$. Do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[-1;1]$.

Mà $g(0) = -1 \Rightarrow g(1) > -1$. Do đó $-1 < g(1) < 0$. Vậy $0 < \min_{[-1;1]} f(x) < 1$ hay $m \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ thỏa mãn bài toán.

TH2: $m < 0$.

Xét hàm số $h(x) = \frac{2x+12}{\sqrt{x+4}}$ trên $[-1;1]$. Ta có $h'(x) = \frac{x+2}{(x+4)\sqrt{x+4}} > 0 \forall x \in [-1;1]$.

Khi đó dễ thấy $h(x) \in \left[\frac{10}{\sqrt{3}}; \frac{14}{\sqrt{5}} \right]$.

* Khi $m = -1 \Rightarrow 4m + h(x) > 0 \forall x \in [-1;1] \Rightarrow g'(x) > 0 \forall x \in [-1;1]$ hay hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[-1;1]$. Khi đó $-1 < g(1) < 0$ nên $0 < \min_{x \in [-1;1]} f(x) < 1$. Vậy $m = -1$ thỏa mãn.

* Khi $m \in \{-3; -2\} \Rightarrow 4m + h(x) < 0 \forall x \in [-1;1] \Rightarrow g'(x) < 0 \forall x \in [-1;1]$ hay hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $[-1;1]$. Khi đó $g(-1) > g(0) \Rightarrow -1 < g(-1) < 0$ nên $0 < \min_{x \in [-1;1]} f(x) < 1$. Vậy

$m \in \{-3; -2\}$ thỏa mãn.

Do đó $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ hay có 8 giá trị nguyên của m .

Cách 2

Nhận thấy $f(x)$ liên tục trên $[-1;1]$ nên tồn tại giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[-1;1]$.

Ta có $\begin{cases} f(x) \geq 0, \forall x \in [-1;1] \\ f(0) = 1 \end{cases}$ nên suy ra $0 \leq \min_{x \in [-1;1]} f(x) \leq 1$.

Vậy điều kiện $0 < \min_{x \in [-1;1]} f(x) < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \min_{x \in [-1;1]} f(x) > 0 \quad (1) \\ \min_{x \in [-1;1]} f(x) \neq 1 \quad (2) \end{cases}$.

□ Ta có (1) $\Leftrightarrow$ Phương trình $mx - 2\sqrt{x+4} = 0$ vô nghiệm trên $[-1;1]$

$\Leftrightarrow$ Phương trình $m = \frac{2\sqrt{x+4}}{x}$ vô nghiệm trên $[-1;1] \setminus \{0\}$

Xét hàm số $g(x) = \frac{2\sqrt{x+4}}{x}, \forall x \in [-1;1] \setminus \{0\}$

$g'(x) = \frac{-x-8}{x^2\sqrt{x+4}} < 0, \forall x \in [-1;1] \setminus \{0\}$

Bảng biến thiên

x		-1	0	1	
$g'(x)$		-	-	-	
$g(x)$		$-2\sqrt{3}$	$+\infty$	$2\sqrt{5}$	

Từ bảng biến thiên suy ra điều kiện phương trình $m = \frac{2\sqrt{x+4}}{x}$ vô nghiệm trên

$[-1;1] \setminus \{0\} \Leftrightarrow -2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{5}$.

Do m nguyên nên $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

□ Để giải (2) trước hết ta đi tìm điều kiện để $\min_{x \in [-1;1]} f(x) = 1$.

Do $f(0) = 1$ nên $\min_{x \in [-1;1]} f(x) = f(0)$, mà $0 \in (-1;1)$, suy ra $x = 0$ là điểm cực trị của hàm số $f(x)$.

Đặt $h(x) = \frac{mx - 2\sqrt{x+4}}{2x+4} \Rightarrow h'(0) = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$. Do đó với m nguyên thì (2) chắc chắn xảy ra.

Vậy $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ thỏa mãn điều kiện (2)

Kết luận: Có 8 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 83. (Chuyên Sơn La - 2020) Gọi S là tập hợp những giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số

$f(x) = |x^3 - 12x + m|$ trên đoạn $[1;3]$ bằng 12. Tổng tất cả các phần tử của tập S bằng

A. 25.

B. 4.

C. 15.

D. 21.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 12x + m$ ($1 \leq x \leq 3$) $g'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2, x = -2$.

$g(1) = m - 11, g(2) = m - 16, g(3) = m - 9$.

Suy ra $\max_{[1;3]} f(x) = \{|m - 16|; |m - 9|\}$.

Giả sử $|m - 16| = 12 \Leftrightarrow m = 28, m = 4$ thử lại ta thấy $m = 4$ nhận.

Giả sử $|m - 9| = 12 \Leftrightarrow m = 21, m = -3$ thử lại ta thấy $m = 21$ nhận.

Vậy $m = 4$ và $m = 21$.

Câu 84. (Chuyên Thái Nguyên - 2020) Gọi S_0 là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m \right|$ trên đoạn $[2;4]$ không vượt quá 30. Số phần tử của S là

A. 50.

B. 49.

C. 66.

D. 73.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m$.

$f'(x) = x^3 - 28x + 48$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6(ktm) \\ x = 4(tm) \\ x = 2(tm) \end{cases}$

$f(2) = m + 44; f(4) = m + 32$.

$\Rightarrow \min_{[2;4]} f(x) = m + 32; \max_{[2;4]} f(x) = m + 44$.

$\Rightarrow \max_{[2;4]} y = \max \{|m + 44|; |m + 32|\}$.

Để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m \right|$ trên đoạn $[2; 4]$ không vượt quá 30 thì

$$\begin{cases} |m+44| \leq 30 \\ |m+32| \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -74 \leq m \leq -14 \\ -62 \leq m \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -62 \leq m \leq -14.$$

Câu 85. (Đại Học Hà Tĩnh - 2020) Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |e^{2x} - 4e^x + m|$ trên đoạn $[0; \ln 4]$ bằng 6?

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = e^x$, vì $x \in [0; \ln 4] \Rightarrow t \in [1; 4]$.

Khi đó yêu cầu bài toán trở thành tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(t) = |t^2 - 4t + m|$ trên đoạn $[1; 4]$ bằng 6.

Đặt $s = t^2 - 4t$, vì $t \in [1; 4] \Rightarrow s \in [-4; 0]$.

Xét hàm số $g(s) = s + m$ với $s \in [-4; 0]$ suy ra hàm số $g(s)$ đồng biến trên đoạn $[-4; 0]$.

Khi đó giá trị nhỏ nhất của $f(s) = |s + m|$, $s \in [-4; 0]$ chỉ đạt tại các đầu mút.

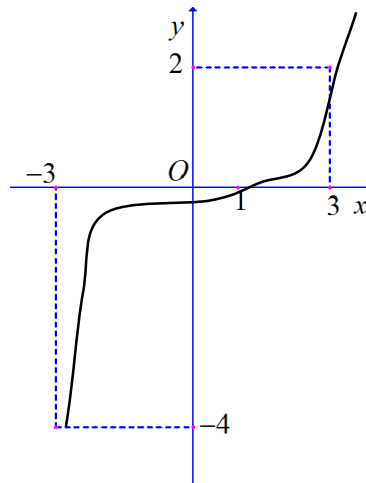
$$\text{TH1: } \begin{cases} \min_{[-4;0]} f(s) = |m-4| = 6 \\ |m| > |m-4| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 10 \\ m = -2 \\ |m| > |m-4| \end{cases} \Leftrightarrow m = 10 \text{ thỏa mãn.}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} \min_{[-4;0]} f(s) = |m| = 6 \\ |m| < |m-4| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = -6 \\ |m| < |m-4| \end{cases} \Leftrightarrow m = -6 \text{ thỏa mãn.}$$

Vậy có 2 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 86. (Sở Hưng Yên - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên.

Đặt $g(x) = 2f(x) - (x-1)^2$.



Khi đó $y = g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3; 3]$ tại

A. $x = -3$.

B. $x = 3$.

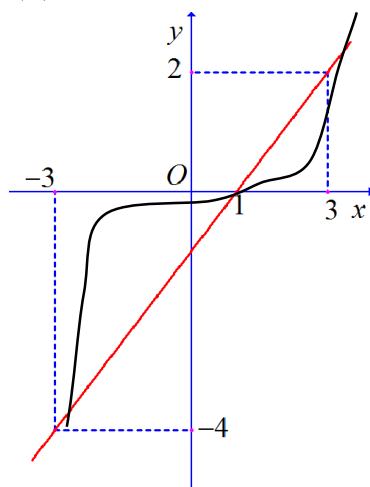
C. $x = 0$.

D. $x = 1$.

Lời giải.

Chọn A

Ta có $g(x) = 2f(x) - (x-1)^2 \Rightarrow g'(x) = 2(f'(x) - (x-1))$. Vẽ đồ thị hàm số $y = x-1$ trên cùng hệ trục tọa độ với đồ thị hàm số $y = f'(x)$.



Dựa vào đồ thị ta thấy

$+ \int_{-3}^1 g'(x) dx > 0 \Rightarrow g(1) > g(-3); \int_1^3 g'(x) dx < 0 \Rightarrow g(1) > g(3)$. Do đó $y = g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3; 3]$ tại $x = 3$ hoặc $x = -3$.

+ Phần hình phẳng giới hạn bởi $y = f'(x); y = x-1; x = -3; x = 1$ có diện tích lớn hơn phần hình

phẳng giới hạn bởi $y = f'(x); y = x-1; x = 1; x = 3$ nên $\int_{-3}^1 |g'(x)| dx > \int_1^3 |g'(x)| dx \Rightarrow g(3) > g(-3)$.

Vậy $y = g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3; 3]$ tại $x = -3$.

Câu 87. (Sở Bình Phước - 2020) Cho hàm số $f(x) = m\sqrt{x-1}$ (m là tham số thực khác 0). Gọi m_1, m_2 là hai giá trị của m thỏa mãn $\min_{[2;5]} f(x) + \max_{[2;5]} f(x) = m^2 - 10$. Giá trị của $m_1 + m_2$ bằng

A. 3.

B. 5.

C. 10.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = m \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$;

Do $m \neq 0$ nên $f'(x)$ khác 0 và có dấu không thay đổi với $\forall x \in (1; +\infty)$.

Nếu $m > 0$ thì $f'(x) > 0, \forall x \in [2; 5]$. Do đó $\min_{[2;5]} f(x) = f(2) = m; \max_{[2;5]} f(x) = f(5) = 2m$.

$$\min_{[2;5]} f(x) + \max_{[2;5]} f(x) = m^2 - 10$$

$$\Leftrightarrow m + 2m = m^2 - 10$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 3m - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = -2 \\ m_2 = 5 \end{cases}$$

Do $m > 0$ nên nhận $m_2 = 5$.

Nếu $m < 0$ thì $f'(x) < 0, \forall x \in [2; 5]$. Do đó $\min_{[2;5]} f(x) = f(5) = 2m; \max_{[2;5]} f(x) = f(2) = m$.

$$\min_{[2;5]} f(x) + \max_{[2;5]} f(x) = m^2 - 10$$

$$\Leftrightarrow 2m + m = m^2 - 10$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 3m - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = -2 \\ m_2 = 5 \end{cases}$$

Do $m < 0$ nên nhận $m_1 = -2$.

Vậy $m_1 + m_2 = 3$.

Câu 88. (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số $y = \frac{m \sin x + 1}{\cos x + 2}$ có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số

m thuộc đoạn $[-5; 5]$

để giá trị nhỏ nhất của y nhỏ hơn -1 .

A. 4.

B. 2.

C. 6.

D. 8.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\cos x + 2 \neq 0$ luôn đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$y = \frac{m \sin x + 1}{\cos x + 2} \Leftrightarrow y(\cos x + 2) = m \sin x + 1 \text{ (do } \cos x + 2 \neq 0 \text{ luôn đúng } \forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow m \sin x - y \cos x = 2y - 1 (*)$$

Phương trình (*) có nghiệm

$$\Leftrightarrow m^2 + y^2 \geq (2y - 1)^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 4y + 1 - m^2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{1 + 3m^2}}{3} \leq y \leq \frac{2 + \sqrt{1 + 3m^2}}{3}$$

$$\text{Vậy } \min_{\mathbb{R}} y = \frac{2 - \sqrt{1 + 3m^2}}{3}$$

$$\min_{\mathbb{R}} y < -1 \Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{1 + 3m^2}}{3} < -1 \Leftrightarrow \sqrt{1 + 3m^2} > 5 \Leftrightarrow m^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2\sqrt{2} \approx 2,82 \\ m < -2\sqrt{2} \approx -2,82 \end{cases}$$

Mà $m \in \mathbb{Z}, m \in [-5; 5]$ nên $m \in \{-5; -4; -3; 3; 4; 5\}$.

Câu 89. (Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020) Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho

giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{3}x^3 - 9x + m + 10 \right|$ trên đoạn $[0; 3]$ không vượt quá 12. Tổng giá trị

các phần tử của S bằng bao nhiêu?

A. -7.

B. 0.

C. 3.

D. 12.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x + m + 10$. Dễ thấy hàm số $g(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 3]$.

$$\text{Ta có } g'(x) = x^2 - 9; g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \notin [0; 3] \end{cases}$$

$$\text{Ta có } g(0) = m + 10; g(3) = m - 8.$$

$$\text{Theo yêu cầu bài toán, } \max_{[0;3]} y = \max_{[0;3]} |g(x)| \leq 12 \Leftrightarrow \begin{cases} |g(0)| \leq 12 \\ |g(3)| \leq 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m+10| \leq 12 \\ |m-8| \leq 12 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 2$$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là -7 .

Câu 90. (Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020) Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 30. Tổng tất cả các giá trị của S là

A. 180.

B. 136.

C. 120.

D. 210.

Lời giải

Chọn B

Xét $u = \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30$ trên đoạn $[0; 2]$.

$$u' = 0 \Leftrightarrow x^3 - 28x + 48 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \notin [0; 2] \\ x = 2 \in [0; 2] \\ x = 4 \notin [0; 2] \end{cases}$$

Khi đó $\max_{[0;2]} u = \max \{u(0), u(2)\} = \max \{m - 30, m + 14\} = m + 14$.

Suy ra $\max_{[0;2]} y = \max \{|m - 30|, |m + 14|\}$.

Trường hợp 1: $\max_{[0;2]} y = |m + 14|$

$$\begin{cases} |m + 14| \geq |m - 30| \\ |m + 14| \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m + 14|^2 \geq |m - 30|^2 \\ -30 \leq m + 14 \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 88m \geq 704 \\ -44 \leq m \leq 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 8 \\ -44 \leq m \leq 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 8 \leq m \leq 16, \text{ mà } m \in \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow m \in \{8; 9; 10; \dots; 16\}.$$

Trường hợp 2: $\max_{[0;2]} y = |m - 30|$

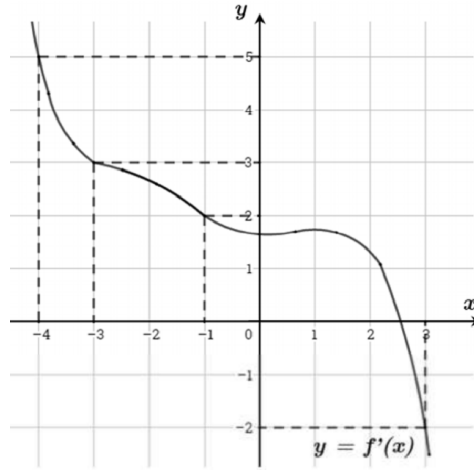
$$\begin{cases} |m - 30| \geq |m + 14| \\ |m - 30| \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m + 14|^2 \leq |m - 30|^2 \\ -30 \leq m - 30 \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 88m \leq 704 \\ 0 \leq m \leq 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 8 \\ 0 \leq m \leq 60 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq m \leq 8, \text{ mà } m \in \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow m \in \{0; 1; 2; \dots; 8\}.$$

Vậy tổng các giá trị m thỏa mãn là: $0 + 1 + 2 + \dots + 16 = 136$.

Câu 91. (Kim Liên - Hà Nội - 2020) Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Trên $[-4; 3]$, hàm số $g(x) = 2f(x) + (1 - x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm



A. $x = -3$.

B. $x = -4$.

C. $x = 3$.

D. $x = -1$.

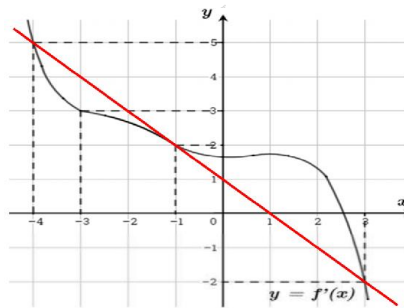
Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ trên $[-4; 3]$.

Ta có: $g'(x) = 2f'(x) - 2(1-x)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1 - x$. Trên đồ thị hàm số $f'(x)$ ta vẽ thêm đường thẳng $y = 1 - x$.



Từ đồ thị ta thấy $f'(x) = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau:

x	-4	-1	3
$g'(x)$	0	-	0
$g(x)$	$g(-4)$	$g(-1)$	$g(3)$

Vậy $\min_{[-4; 3]} g(x) = g(-1) \Leftrightarrow x = -1$.

Câu 92. (Lê Lai - Thanh Hóa - 2020) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{34}{\sqrt{(x^3 - 3x + 2m)^2 + 1}}$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng 2. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

- A. 8. B. -8. C. -6. D. -1.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \sqrt{(x^3 - 3x + 2m)^2 + 1} = |x^3 - 3x + 2m|$$

$$\text{Nhận thấy } \min_{[0;3]} f(x) = 2 \Leftrightarrow \max_{[0;3]} |x^3 - 3x + 2m| = 16 \quad (1).$$

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x + 2m$ trên $[0; 3]$, ta có:

$$+ g'(x) = 3x^2 - 3, \quad g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in (0; 3) \\ x = -1 \notin (0; 3) \end{cases}$$

$$+ g(0) = 2m, \quad g(1) = 2m - 2, \quad g(3) = 2m + 18$$

$$\text{Do đó } 2m - 2 \leq g(x) \leq 2m + 18, \forall x \in [0; 3], \text{ tức } \max_{[0;3]} |x^3 - 3x + 2m| = \max_{[0;3]} \{|2m - 2|; |2m + 18|\}.$$

$$\text{Từ đây ta có } (1) \Leftrightarrow \max_{[0;3]} \{|2m - 2|; |2m + 18|\} = 16$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |2m + 18| > |2m - 2| \\ |2m + 18| = 16 \\ |2m + 18| \leq |2m - 2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -7 \end{cases}. \text{ Suy ra } S = \{-7; -1\}. \text{ Vậy, tổng các phần tử của } S \text{ là } -8.$$

Câu 93. (Liên trường Nghệ An - 2020) Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = |2x^3 - 15x + m - 5| + 9x$ trên $[0; 3]$ bằng 60. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số thực m .

- A. 48. B. 5. C. 6. D. 62.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Có } \max_{[0;3]} f(x) = 60 \Leftrightarrow f(x) \leq 60, \forall x \in [0; 3] \text{ và } \exists x_0 \in [0; 3] \text{ sao cho } f(x_0) = 60.$$

$$\text{Có } f(x) \leq 60 \Leftrightarrow |2x^3 - 15x + m - 5| + 9x \leq 60 \Leftrightarrow |2x^3 - 15x + m - 5| \leq 60 - 9x$$

$$\Leftrightarrow 9x - 60 \leq 2x^3 - 15x + m - 5 \leq 60 - 9x \Leftrightarrow -2x^3 + 24x - 55 \leq m \leq -2x^3 + 6x + 65, \forall x \in [0; 3].$$

$$\text{Có } -2x^3 + 6x + 65 \geq 29, \forall x \in [0; 3] \text{ nên } m \leq -2x^3 + 6x + 65, \forall x \in [0; 3] \Leftrightarrow m \leq 29.$$

$$\text{Tương tự } -2x^3 + 24x - 55 \leq -23 \text{ nên } -2x^3 + 24x - 55 \leq m, \forall x \in [0; 3] \Leftrightarrow m \geq -23.$$

$$\text{Vậy } -23 \leq m \leq 29 \text{ thì } f(x) \leq 60, \forall x \in [0; 3].$$

$$\text{Để } \exists x_0 \in [0; 3] \text{ sao cho } f(x_0) = 60 \text{ thì } \begin{cases} -2x^3 + 24x - 55 = m \\ -2x^3 + 6x + 65 = m \end{cases} \text{ có nghiệm trên } [0; 3].$$

$$\text{Hay } \begin{cases} m \geq 29 \\ m \leq -23 \end{cases}. \text{ Vậy } \begin{cases} m = 29 \\ m = -23 \end{cases} \text{ thì } \max_{[0;3]} f(x) = 60.$$

$$\text{Khi đó tổng các giá trị của } m \text{ là } 29 - 23 = 6.$$

Câu 94. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 2.

B. 6.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x + m$, ta có $g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin [0; 2] \\ x = 1 \in [0; 2] \end{cases}$.

$$g(0) = m, g(1) = m - 2, g(2) = m + 2.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^3 - 3x + m|$ bằng max của $F = \{|m|; |m - 2|; |m + 2|\}$

$$\text{TH1: } |m| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -3 \end{cases}.$$

Với $m = 3 \Rightarrow F = \{3; 1; 5\}$ loại vì max bằng 5.

Với $m = -3 \Rightarrow F = \{3; 5; 1\}$ loại vì max bằng 5.

$$\text{TH2: } |m - 2| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = -1 \end{cases}.$$

Với $m = 5 \Rightarrow F = \{5; 3; 7\}$ loại vì max bằng 7.

Với $m = -1 \Rightarrow F = \{1; 3; 1\}$ có max bằng 3. Chọn $m = -1$.

$$\text{TH3: } |m + 2| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -5 \end{cases}.$$

Với $m = 1 \Rightarrow F = \{1; 1; 3\}$ có max bằng 3. Chọn $m = 1$.

Với $m = -5 \Rightarrow F = \{5; 7; 3\}$ loại vì max bằng 7.

Vậy $S = \{-1; 1\} \Rightarrow$ có 2 giá trị m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 95. (Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020) Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 2x^3 + x^2 + m|$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\min_{[-1; 2]} f(x) + \max_{[-1; 2]} f(x) = 10$. Số phần tử của S là?

A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } g(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + m \Rightarrow g'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm $g(x)$

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$g'(x)$	-	0	+	0	+
$g(x)$	$m+4$	m	$m+\frac{1}{16}$	m	$m+4$

Dựa vào bảng biến thiên của $g(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của

$f(x) = |g(x)| = |x^4 - 2x^3 + x^2 + m|$. Ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $m \geq 0$. Bảng biến thiên của $f(x) = |g(x)| = |x^4 - 2x^3 + x^2 + m|$

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	$m+4$		$m+\frac{1}{16}$		$m+4$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min_{[-1;2]} f(x) + \max_{[-1;2]} f(x) = 10 \Leftrightarrow m + m + 4 = 10 \Leftrightarrow m = 3$ (TM)

Trường hợp 2: $m < 0 < m + \frac{1}{16} \Leftrightarrow -\frac{1}{16} < m < 0$. Bảng biến thiên:

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	$m+4$				$m+4$
		$-m$	$m+\frac{1}{16}$	$-m$	
	0	0	0	0	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min_{[-1;2]} f(x) + \max_{[-1;2]} f(x) = 10 \Leftrightarrow 0 + m + 4 = 10 \Leftrightarrow m = 6$ (Loại)

Trường hợp 3: $m + \frac{1}{16} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{16}$. Tương tự ta có:

$$\min_{[-1;2]} f(x) + \max_{[-1;2]} f(x) = 10 \Leftrightarrow 0 + m + 4 = 10 \Leftrightarrow m = 6 \text{ (Loại)}$$

Trường hợp 4: $m + \frac{1}{16} < 0 < m + 4 \Leftrightarrow -4 < m < -\frac{1}{16}$. Bảng biến thiên:

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	$m+4$	$-m$	$-m-\frac{1}{16}$	$-m$	$m+4$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$$\begin{cases} \min_{[-1;2]} f(x) + \max_{[-1;2]} f(x) = 10 \\ \min_{[-1;2]} f(x) + \max_{[-1;2]} f(x) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 + m + 4 = 10 \\ 0 + (-m) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = -10 \end{cases} \text{ (Loại)}$$

Trường hợp 5: $m+4=0 \Leftrightarrow m=-4$. Ta có:

$$\min_{[-1;2]} f(x) + \max_{[-1;2]} f(x) = 10 \Leftrightarrow 0 - m = 10 \Leftrightarrow m = -10 \text{ (Loại)}$$

Trường hợp 6: $m+4 < 0 \Leftrightarrow m < -4$. Ta có:

$$\min_{[-1;2]} f(x) + \max_{[-1;2]} f(x) = 10 \Leftrightarrow -m - m - 4 = 10 \Leftrightarrow m = -7 \text{ (Thỏa mãn)}$$

Vậy $m \in \{-7; 3\}$.

Câu 96. (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020) Cho hàm số $y = (x^3 - 3x + m + 1)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 1 là

A. -2.

B. 4.

C. -4.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Đặt $y = f(x) = (x^3 - 3x + m + 1)^2$ là hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-1; 1]$.

Ta có $y' = f'(x) = 2(x^3 - 3x + m + 1)(3x^2 - 3)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ m = -x^3 + 3x - 1 = g(x) \end{cases}$$

Ta khảo sát hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-1; 1]$.

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	$+\infty$			1			$-\infty$

Nếu $m \in [-3; 1]$ thì luôn tồn tại $x_0 \in [-1; 1]$ sao cho $m = g(x_0)$ hay $f(x_0) = 0$. Suy ra

$\min_{[-1;1]} y = 0$, tức là không tồn tại m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nếu $m \notin [-3; 1]$ thì $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \in [-1; 1]$.

Ta có: $\min_{[-1;1]} f(x) = \min \{f(1); f(-1)\} = \min \{(m-1)^2; (m+3)^2\}$

Trường hợp 1: $m > 1$ tức là $m+3 > m-1 > 0$ suy ra

$$\min_{[-1;1]} f(x) = (m-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 & (TM) \\ m=0 & (KTM) \end{cases}$$

Trường hợp 2: $m < -3$ tức là $m-1 < m+3 < 0$ suy ra

$$\min_{[-1;1]} f(x) = (m+3)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m=-4 & (TM) \\ m=-2 & (KTM) \end{cases}$$

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán: $m=2; m=-4$, từ đó tổng tất cả các giá trị của m là -2 .

Câu 97. (Tiên Du - Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $f(x) = m + \int_0^x \frac{3t^4 + 4t^3}{(t+1)^2} dt$ với $x \in [1;2]$ và m là tham số.

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $\max_{[1;2]} |f(x)| \geq 3 \min_{[1;2]} |f(x)|$?

A. 9.

B. 7.

C. 10.

D. 8.

Lời giải

Chọn A

Ta

có:

$$\begin{aligned} f(x) &= m + \int_0^x \frac{3t^4 + 4t^3}{(t+1)^2} dt = m + \int_0^x \left[3t^2 - 2t + 1 - \frac{1}{(t+1)^2} \right] dt = m + \left(t^3 - t^2 + t + \frac{1}{t+1} \right) \Big|_0^x \\ &= x^3 - x^2 + x + \frac{1}{x+1} + m - 1. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = 2x(x-1) + x^2 + \left[1 - \frac{1}{(x+1)^2} \right] > 0, \forall x \in [1;2].$$

Suy ra hàm số f đồng biến trên $[1;2]$.

Từ đó ta có: $\max_{[1;2]} f(x) = m + \frac{16}{3}$ và $\min_{[1;2]} f(x) = m + \frac{1}{2}$.

Đặt $g(x) = |f(x)|$.

$$\text{Ta có: } \max_{[1;2]} g(x) = \max \left\{ \left| m + \frac{16}{3} \right|; \left| m + \frac{1}{2} \right| \right\}, \min_{[1;2]} g(x) = \begin{cases} m + \frac{1}{2} & \text{neg } m > -\frac{1}{2} \\ 0 & \text{neg } -\frac{16}{3} \leq m \leq -\frac{1}{2} \\ -m - \frac{16}{3} & \text{neg } m < -\frac{16}{3} \end{cases}$$

Trường hợp 1: $m > -\frac{1}{2}$.

Khi đó: $\max_{[1;2]} g(x) = m + \frac{16}{3}$, $\min_{[1;2]} g(x) = m + \frac{1}{2}$.

Suy ra: $\max_{[1;2]} g(x) \geq 3 \min_{[1;2]} g(x) \Leftrightarrow m + \frac{16}{3} \geq 3 \left(m + \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow m \leq \frac{23}{12}$.

Kết hợp điều kiện ta được: $-\frac{1}{2} < m \leq \frac{23}{12}$. Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0;1\}$.

Trường hợp 2: $-\frac{16}{3} \leq m \leq -\frac{1}{2}$.

Khi đó: $\min_{[1;2]} g(x) = 0$ và $\max_{[1;2]} g(x) = \max \left\{ \left| m + \frac{16}{3} \right|; \left| m + \frac{1}{2} \right| \right\}$.

Suy ra: $\max_{[1;2]} g(x) \geq 3 \min_{[1;2]} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \left| m + \frac{16}{3} \right| \geq 0 \\ \left| m + \frac{1}{2} \right| \geq 0 \end{cases}$ (luôn đúng với mọi $m \in \left[-\frac{16}{3}; -\frac{1}{2} \right]$).

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-5; -4; -3; -2; -1\}$.

Trường hợp 3: $m < -\frac{16}{3}$.

Khi đó: $\min_{[1;2]} g(x) = -m - \frac{16}{3}$ và $\max_{[1;2]} g(x) = -m - \frac{1}{2}$.

Suy ra: $\max_{[1;2]} g(x) \geq 3 \min_{[1;2]} g(x) \Leftrightarrow -m - \frac{1}{2} \geq -3m - 16 \Leftrightarrow m \geq -\frac{31}{4}$.

Kết hợp điều kiện ta được $-\frac{31}{4} \leq m < -\frac{16}{3}$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-7; -6\}$.

Vậy có 9 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 98. (Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0) = 3, f'(2) = f'(-2018) = 0$, và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(|x-1|-2018)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty; -2015)$. **B.** $(1; 3)$. **C.** $(-1009; 2)$. **D.** $(-2015; 1)$.

Lời giải.

Chọn C

Từ bảng xét dấu của $f''(x)$ và giả thiết $f'(0) = 3, f'(2) = f'(-2018) = 0$ suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2018	0	2	$+\infty$	
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$						

Từ đó suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$:

x	$-\infty$	-2018	2	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$					

Hàm số $y = f(|x-1|-2018)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi

$$|x-1|-2018 = -2018 \Leftrightarrow |x-1| = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in (-1009; 2).$$

Câu 99. (Hải Hậu - Nam Định - 2020) Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số

$$f(x) = \left| \frac{2mx - 2\sqrt{4x+8}}{x+2} \right| \text{ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn } [-1; 1] \text{ là } a \text{ thỏa mãn } 0 < a < 1.$$

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 2.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x+2}, x \in [-1; 1] \Rightarrow t \in [1; \sqrt{3}]; x = t^2 - 2.$$

$$\text{Hàm số đã cho trở thành } g(t) = \left| \frac{2mt^2 - 4t - 4m}{t} \right|.$$

$$\text{Xét hàm } h(t) = \frac{2mt^2 - 4t - 4m}{t} \text{ trên đoạn } [1; \sqrt{3}].$$

$$\text{Ta có } h'(t) = \frac{2m(t^2 + 2)}{t^2}$$

$$\text{Th1: } m = 0 \text{ thì } h(t) = -4 \Rightarrow g(t) = 4 \forall t \in [1; \sqrt{3}] \Rightarrow a = 4 \text{ (loại).}$$

$$\text{Th2: } m \neq 0 \text{ thì hàm số } h(t) \text{ đồng biến hoặc nghịch biến trên } [1; \sqrt{3}]$$

$$\text{Ta có } h(1) = -2m - 4; h(\sqrt{3}) = \frac{2m - 4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Nếu } h(1) \cdot h(\sqrt{3}) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 2\sqrt{3} \end{cases} \text{ và hàm số } h(t) \text{ liên tục trên đoạn } [1; \sqrt{3}] \text{ suy ra đồ thị hàm số } h(t)$$

$$\text{trên đoạn } [1; \sqrt{3}] \text{ cắt trục hoành} \Rightarrow a = 0 \text{ (loại).}$$

$$\text{Nếu } h(1) \cdot h(\sqrt{3}) > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2\sqrt{3}. \text{ Khi đó, } h(1) < 0; h(\sqrt{3}) < 0$$

$$\Rightarrow a = \left| \frac{2m - 4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right|. \text{ Suy ra } \begin{cases} m = 3 \\ m = 4 \end{cases} \text{ là các giá trị nguyên dương để } 0 < a < 1.$$

Câu 100. (Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020) Cho hàm số $y = |x^4 - 2x^2 + 3m|$ với m là tham số. Biết rằng

có đúng hai giá trị m_1, m_2 của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[-1; 2]$ bằng 2021. Tính giá trị $|m_1 - m_2|$.

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{4052}{3}$.

C. $\frac{8}{3}$.

D. $\frac{4051}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét hàm số } f(x) = x^4 - 2x^2 + 3m, \text{ ta có } f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số trên $[-1; 2]$:

x	-1	0	1	2
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$3m-1$	$3m$	$3m-1$	$3m+8$

Vì $\min_{[-1;2]} y = 2021 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm thuộc $[-1;2]$.

Trường hợp 1 : $3m-1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{3}$. Ta có $\min_{[-1;2]} y = |3m-1| = 3m-1 = 2021 \Leftrightarrow m = \frac{2022}{3}$

Trường hợp 2 : $3m+8 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{8}{3}$. Ta có $\min_{[-1;2]} y = |3m+8| = -3m-8 = 2021 \Leftrightarrow m = -\frac{2029}{3}$.

$$\text{Vậy } |m_1 - m_2| = \left| \frac{2022}{3} + \frac{2029}{3} \right| = \frac{4051}{3}.$$

Câu 101. (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020) Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + m + 1$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ sao cho $\max_{[1;4]} |f(x)| \leq 3 \min_{[1;4]} |f(x)|$. Số phần tử của S là

A. 4003.

B. 4002.

C. 4004.

D. 4001.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + m + 1 \Rightarrow y' = f'(x) = 3x^2 - 6x$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$f(1) = m - 1; f(2) = m - 3; f(4) = 17 + m.$$

$$\max_{[1;4]} f(x) = m + 17; \min_{[1;4]} f(x) = m - 3.$$

+Nếu $m - 3 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 3$ thì $\max_{[1;4]} |f(x)| = m + 17, \min_{[1;4]} |f(x)| = m - 3$. Khi đó:

$$\max_{[1;4]} |f(x)| \leq 3 \min_{[1;4]} |f(x)| \Leftrightarrow m + 17 \leq 3(m - 3) \Leftrightarrow m \geq 13.$$

+Nếu $m + 17 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -17$ thì $\max_{[1;4]} |f(x)| = -m + 3, \min_{[1;4]} |f(x)| = -17 - m$.

$$\text{Khi đó: } \max_{[1;4]} |f(x)| \leq 3 \min_{[1;4]} |f(x)| \Leftrightarrow -m + 3 \leq 3(-17 - m) \Leftrightarrow m \leq -27.$$

+Nếu $(m - 3)(m + 17) < 0 \Leftrightarrow -17 < m < 3$ thì

$$\max_{[1;4]} |f(x)| = \max\{|m + 17|, |m - 3|\} = \max\{m + 17, 3 - m\} > 0; \min_{[1;4]} |f(x)| = 0.$$

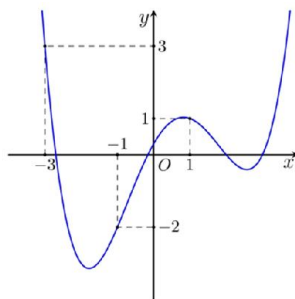
Khi đó, không thỏa điều kiện $\max_{[1;4]} |f(x)| \leq 3 \min_{[1;4]} |f(x)|$.

$$\text{Do đó: } \begin{cases} m \leq -27 \\ m \geq 13 \end{cases} \text{ kết hợp với } m \in [-2020; 2020] \text{ ta có } m \in [-2020; -27] \cup [13; 2020]$$

Vậy 4002 giá trị nguyên của m cần tìm.

Câu 102. (Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020) Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2020.$$



Trong các mệnh đề dưới đây:

(I) $g(0) < g(1)$. (III) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-3; 1)$.

(II) $\min_{x \in [-3; 1]} g(x) = g(-1)$. (IV) $\max_{x \in [-3; 1]} g(x) = \max\{g(3), g(1)\}$.

Số mệnh đề đúng là:

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

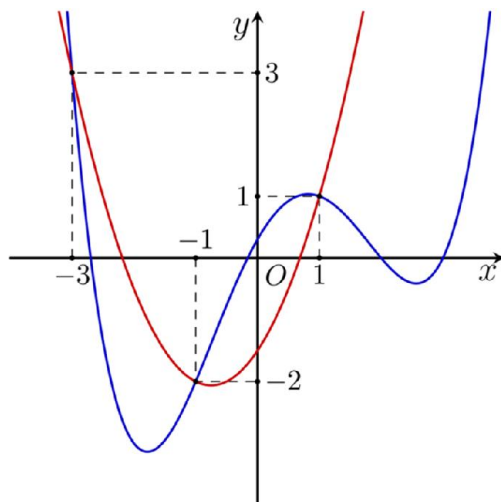
Ta có $g'(x) = f'(x) - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$.

Vẽ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đồ thị hàm số $y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

Ta thấy trên $[-3; 1]$ hai đồ thị có ba giao điểm là: $(-3; 3)$, $(-1; -2)$ và $(1; 1)$.

Trên khoảng $(-3; -1)$ thì $f'(x) < x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ nên $g'(x) < 0$.

Trên khoảng $(-1; 1)$ thì $f'(x) > x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ nên $g'(x) > 0$.



Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $[-3; 1]$:

x	-3	-1	1
$g'(x)$	0	-	0
$g(x)$			

Từ bảng biến thiên ta có:

- +) Mệnh đề (I) $g(0) < g(1)$ là đúng.
- +) Mệnh đề (II) $\min_{x \in [-3;1]} g(x) = g(-1)$ là đúng.
- +) Mệnh đề (III) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-3;1)$ là sai.
- +) Mệnh đề (IV) $\max_{x \in [-3;1]} g(x) = \max\{g(3), g(1)\}$ là đúng.

Nguyễn Bảo Vương

PHẦN 4. TIỆM CẬN

Câu 103. (Chuyên KHTN - 2020) Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên m để đồ thị hàm số

$$y = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2-6x+2m}} \text{ có hai đường tiệm cận đứng. Số phần tử của } S \text{ là}$$

A. vô số.

B. 12.

C. 14.

D. 13.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x^2-6x+2m > 0 \end{cases}$$

Để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng thì phương trình $x^2-6x+2m=0$ có hai nghiệm phân

$$\text{biệt } x_1, x_2 \text{ lớn hơn } -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 9-2m > 0 \\ x_1+x_2 > -2 \\ (-2)^2-6 \cdot (-2)+2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{2} \\ 3 > -2 \\ 4+12+2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{2} \\ m > -8 \end{cases}$$

Do đó tập $S = \{-7; -6; -5; \dots; 4\}$ có 12 giá trị.

Câu 104. (Chuyên Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ (C). Biết rằng $M_1(x_1; y_1)$ và $M_2(x_2; y_2)$ là hai

điểm trên đồ thị (C) có tổng khoảng cách đến hai đường tiệm cận của (C) nhỏ nhất. Tính giá trị

$$P = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2.$$

A. 0.

B. -2.

C. -1.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Vì $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = -\infty \Rightarrow \Delta_1 : x = -1$ là tiệm cận đứng của (C).

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 2 \Rightarrow \Delta_2 : y = 2$ là tiệm cận ngang của (C).

Ta có $y = \frac{2x-1}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1}$, gọi $M\left(a; 2 - \frac{3}{a+1}\right) \in (C)$, ($a \neq -1$).

$$d(M, \Delta_1) = |a+1|.$$

$$d(M, \Delta_2) = \left| \frac{-3}{a+1} \right| = \frac{3}{|a+1|}.$$

$$S = d(M, \Delta_1) + d(M, \Delta_2) = |a+1| + \frac{3}{|a+1|} \geq 2 \cdot \sqrt{|a+1| \cdot \frac{3}{|a+1|}} = 2\sqrt{3}, \forall a \neq -1.$$

$$\text{Suy ra } \min S = 2\sqrt{3}, \text{ đạt được khi } |a+1| = \frac{3}{|a+1|} \Leftrightarrow (a+1)^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 - \sqrt{3} \\ a = -1 + \sqrt{3} \end{cases}.$$

Do đó $M_1(-1-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3})$, $M_2(-1+\sqrt{3}; 2-\sqrt{3})$ là hai điểm trên (C) có tổng khoảng cách đến hai tiệm cận nhỏ nhất.

Vậy $P = x_1.x_2 + y_1.y_2 = (-1-\sqrt{3})(-1+\sqrt{3}) + (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = -1$.

Câu 105. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2-8x+m}$ có 3 đường tiệm cận?

A. 14.

B. 8.

C. 15.

D. 16.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^2-8x+m} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2-8x+m} = 0$ nên hàm số có một tiệm cận ngang $y = 0$.

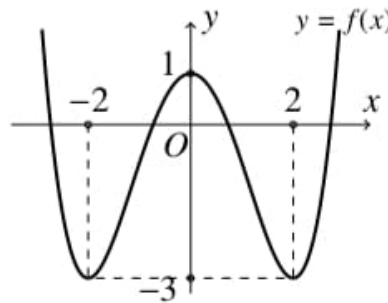
Hàm số có 3 đường tiệm cận khi và chỉ khi hàm số có hai đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình

$$x^2 - 8x + m = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt khác } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 16 - m > 0 \\ m - 7 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 16 \\ m \neq 7 \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện m nguyên dương ta có $m \in \{1; 2; 3; \dots; 6; 8; \dots; 15\}$. Vậy có 14 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Câu 106. (Chuyên Quang Trung - 2020) Cho hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ.

Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{(x^2-4)(x^2+2x)}{[f(x)]^2 + 2f(x) - 3}$ có tổng cộng bao nhiêu tiệm cận đứng?



A. 5.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

$$y = \frac{(x^2-4)(x^2+2x)}{[f(x)]^2 + 2f(x) - 3} = \frac{x(x+2)^2(x-2)}{[f(x)]^2 + 2f(x) - 3}$$

$$\text{Ta có: } [f(x)]^2 + 2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ f(x) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m (m < -2) \\ x = 0 \\ x = n (n > 2) \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta thấy các nghiệm $x = 0; x = \pm 2$ là các nghiệm kép (nghiệm bội 2) và đa thức

$$[f(x)]^2 + 2f(x) - 3 \text{ có bậc là 8 nên } y = \frac{x(x+2)^2(x-2)}{a^2x^2(x+2)^2(x-2)^2(x-m)(x-n)}$$

TH 1: Nếu $m = -1$ thì $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)+2} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)+2} = 1$ thì đồ thị hàm số có một tiệm cận.

TH 2: Nếu $m \neq -1$

Để đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)+2}$ không có giá trị hữu hạn

$$\Leftrightarrow m+2=0 \Leftrightarrow m=-2.$$

Vậy khi $m \in \{-2; -1\}$ thì đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận ngang.

Câu 109. (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020) Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m}$. Có bao nhiêu giá

trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận?

A. 4039.

B. 4040.

C. 4038.

D. 4037.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận ngang.

Do đó đồ thị hàm số đã cho có 4 đường tiệm cận khi và chỉ khi nó có 3 tiệm cận đứng (*).

$$\text{Có } x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m = (x - m)(x^2 - 2mx + 1)$$

$$x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x^2 - 2mx + 1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

(*) $\Leftrightarrow x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khác 3.

$\Leftrightarrow m \neq 3$ và (2) có 2 nghiệm phân biệt khác m và khác 3.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m^2 - 2m \cdot m + 1 \neq 0 \\ 3^2 - 2m \cdot 3 + 1 \neq 0 \\ \Delta'_2 = m^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3, m \neq \frac{5}{3} \\ m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$$

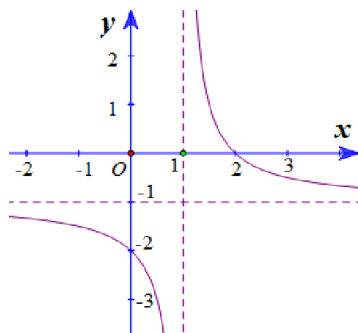
Do đó tập tất cả giá trị nguyên của m thỏa ycbt là $\{-2020; -2019; \dots; -2; 2; 4; 5; \dots; 2020\}$.

Vậy có 4037 giá trị m thỏa ycbt.

PHẦN 5. ĐỒ THỊ

Câu 110. (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020) Đồ thị trong hình bên dưới là của hàm số

$$y = \frac{ax+b}{x+c} \quad (\text{với } a, b, c \in \mathbb{R}).$$



Khi đó tổng $a+b+c$ bằng

A. -1.

B. 1.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ có đường tiệm cận ngang $y=a$, đường tiệm cận đứng $x=-c$ và cắt Oy tại điểm $\left(0; \frac{b}{c}\right)$.

Từ đồ thị hàm số ta có đường tiệm cận ngang $y=-1$, đường tiệm cận đứng $x=1$ và cắt Oy tại điểm $(0;-2)$.

$$\text{Từ đó suy ra: } \begin{cases} a = -1 \\ -c = 1 \\ \frac{b}{c} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ c = -1 \\ b = -2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ c = -1 \\ b = 2 \end{cases}. \text{ Vậy } a+b+c = -1-1+2 = 0.$$

Câu 111. (Chuyên Lương Văn Tỵ - Ninh Bình - 2020) Cho hàm số $f(x) = \frac{2-ax}{bx-c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, b \neq 0$) có bảng

biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+		+
y	3 ↗ $+\infty$		$-\infty$ ↗ 3

Tổng các số $(a+b+c)^2$ thuộc khoảng nào sau đây

A. $(1;2)$.

B. $(2;3)$.

C. $\left(0; \frac{4}{9}\right)$.

D. $\left(\frac{4}{9}; 1\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-ax}{bx-c} = \frac{-a}{b}$, theo giả thiết suy ra $\frac{-a}{b} = 3 \Leftrightarrow a = -3b$

Hàm số không xác định tại $x=1 \Rightarrow b-c=0 \Leftrightarrow b=c$

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định nên $f'(x) = \frac{ac-2b}{(bx-c)^2} > 0$ với mọi x khác 1

$$\text{Suy ra } ac-2b > 0 \Leftrightarrow -3b^2-2b > 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < b < 0 \Leftrightarrow 0 < -b < \frac{2}{3}$$

$$\text{Lại có } a+b+c = -3b+b+b = -b. \text{ Suy ra } (a+b+c)^2 = b^2 \in \left(0; \frac{4}{9}\right)$$

Vậy tổng $a+b+c$ thuộc khoảng $\left(0; \frac{4}{9}\right)$.

Câu 112. (Chuyên Chu Văn An - 2020) Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = \frac{x-7}{x+1}$, A, B là các điểm thuộc (C) có hoành độ lần lượt là 0 và 3. M là điểm thay đổi trên (C) sao cho $0 < x_M < 3$, tìm giá trị lớn nhất của diện tích ΔABM .

A. 5.

B. 3.

C. 6.

D. $3\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

+) Từ đề bài suy ra $A(0; -7); B(3; -1); M\left(x_M; \frac{x_M-7}{x_M+1}\right)$. $AB = 3\sqrt{5}$, đường thẳng AB có phương trình $2x - y - 7 = 0$.

$$+) d(M, AB) = \frac{\left|2x_M - \frac{x_M-7}{x_M+1} - 7\right|}{\sqrt{5}} = \frac{\left|2(x_M+1) + \frac{8}{x_M+1} - 10\right|}{\sqrt{5}}$$

$$+) S_{MAB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot d(M, AB) = \frac{2 \cdot 3\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\left|(x_M+1) + \frac{4}{x_M+1} - 5\right|}{\sqrt{5}} = 3 \cdot \left|(x_M+1) + \frac{4}{x_M+1} - 5\right|.$$

Đặt $t = x_M + 1, t \in (1; 4)$

$$\Rightarrow S_{MAB} = 3 \left| \frac{t^2 - 5t + 4}{t} \right| = \frac{-3t^2 + 15t - 12}{t} = -3 \left(t + \frac{4}{t} \right) + 15 \leq -6\sqrt{t \cdot \frac{4}{t}} + 15 = 3$$

$$\Rightarrow \text{Max}(S_{MAB}) = 3 \Leftrightarrow t = \frac{4}{t} \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow x_M = 1.$$

Câu 113. (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020) Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$ và $c \neq 0$). Biết rằng đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $(-1; 7)$ và giao điểm hai tiệm cận là $(-2; 3)$. Giá trị biểu thức $\frac{2a+3b+4c+d}{7c}$ bằng

A. 7.

B. 4.

C. 6.

D. -5.

Lời giải

Chọn C

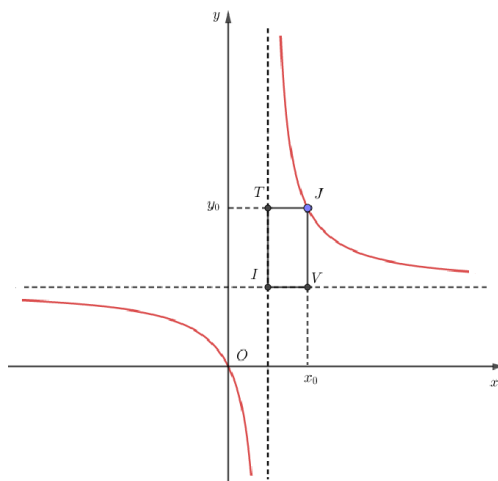
+ Ta có đồ thị hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đường tiệm cận ngang là $y = \frac{a}{c}$, đường tiệm cận đứng là $x = \frac{-d}{c}$.

Theo bài ra, ta có:
$$\begin{cases} \frac{a}{c} = 3 \\ \frac{-d}{c} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3c \\ d = 2c \end{cases}.$$

+ Điểm $(-1; 7)$ thuộc đồ thị hàm số $f(x)$ nên $\frac{-a+b}{-c+d} = 7 \Leftrightarrow \frac{-3c+b}{-c+2c} = 7 \Leftrightarrow b = 10c$.

Vậy $\frac{2a+3b+4c+d}{7c} = \frac{2.(3c)+3.(10c)+4c+2c}{7c} = 6$.

Câu 114. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020) Cho hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm J thay đổi thuộc (C) như hình vẽ bên.



Hình chữ nhật $ITJV$ có chu vi nhỏ nhất bằng

A. $2\sqrt{2}$.

B. 6.

C. $4\sqrt{2}$.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$ có tiệm cận đứng là đường $x = 1$, và tiệm cận ngang là đường $y = 2$.

J nằm trên đồ thị (C) nên $J\left(x_0; \frac{2x_0}{x_0-1}\right)$ với $x_0 \neq 1$.

Khoảng cách từ J đến tiệm cận đứng là $d_1 = |x_0 - 1|$.

Khoảng cách từ J đến tiệm cận ngang là $d_2 = \left| \frac{2x_0}{x_0-1} - 2 \right| = \left| \frac{2}{x_0-1} \right|$.

Hình chữ nhật $ITJV$ có chu vi bằng $2JT + 2JV = 2(d_2 + d_1) = 2\left(|x_0 - 1| + \left|\frac{2}{x_0 - 1}\right|\right)$.

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng và trung bình nhân ta

$$\text{có: } 2\left(|x_0 - 1| + \left|\frac{2}{x_0 - 1}\right|\right) \geq 2 \cdot 2 \sqrt{|x_0 - 1| \cdot \left|\frac{2}{x_0 - 1}\right|} = 4\sqrt{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $|x_0 - 1| = \left|\frac{2}{x_0 - 1}\right| \Leftrightarrow x_0 = 1 \pm \sqrt{2}$ (thỏa mãn).

Vậy hình chữ nhật $ITJV$ có chu vi nhỏ nhất bằng $4\sqrt{2}$.

Câu 115. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020) Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx+c}$ (a, b, c là các tham số) có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		+		+	
y			$+\infty$		1
	1			$-\infty$	

Xét các phát biểu sau: (1): $c > 1$; (2): $a + b < 0$; (3): $a + b + c = 0$; (4): $a > 0$. Số phát biểu đúng là?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} -\frac{c}{b} = 2 \\ \frac{a}{b} = 1 \\ ac - b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2b \\ a = b \\ ac - b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2b \\ a = b \\ -2b^2 - b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < c < 1 \\ -\frac{1}{2} < a < 0 \\ -\frac{1}{2} < b < 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

Dựa vào hệ trên ta có các phát biểu (1), (4) là sai, (2), (3) đúng.

Câu 116. (Đại Học Hà Tĩnh - 2020) Gọi hai điểm M, N lần lượt là hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-1}{x-3}$. Khi đó độ dài đoạn thẳng MN ngắn nhất bằng

A. $6\sqrt{2}$.

B. $\frac{17}{2}$.

C. 8.

D. 9.

Lời giải

Chọn C

Do M, N thuộc hai nhánh của đồ thị hàm số nên ta gọi $M\left(3-m; 3-\frac{8}{m}\right), N\left(3+n; 3+\frac{8}{n}\right)$ với $m, n > 0$.

$$\text{Khi đó } MN^2 = (m+n)^2 + \left(\frac{8}{m} + \frac{8}{n}\right)^2 = (m+n)^2 + \frac{64(m+n)^2}{(mn)^2} = (m+n)^2 \left[1 + \frac{64}{(mn)^2}\right].$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$(m+n)^2 \left[1 + \frac{64}{(mn)^2}\right] \geq 4mn \left[1 + \frac{64}{(mn)^2}\right] \Rightarrow MN^2 \geq 4 \left(mn + \frac{64}{mn}\right).$$

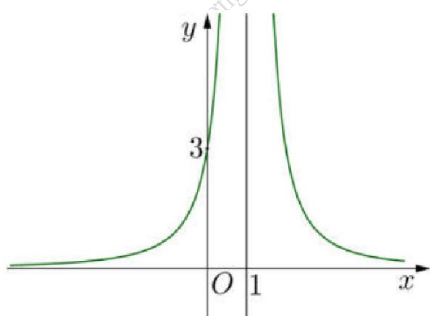
Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$mn + \frac{64}{mn} \geq 2\sqrt{mn \cdot \frac{64}{mn}} \Rightarrow MN^2 \geq 4 \cdot 2 \cdot 8 \Leftrightarrow MN^2 \geq 64.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} m = n \\ mn = \frac{64}{mn} \end{cases} \Leftrightarrow m = n = 2\sqrt{2}.$$

Vậy độ dài đoạn thẳng MN ngắn nhất bằng 8.

Câu 117. (Sở Hà Tĩnh - 2020) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $(0;1)$. Giá trị $f(-2)$ bằng

A. -1.

B. 3.

C. 1.

D. -3.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y = f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}.$$

$$\text{Từ đồ thị hàm số } y = f'(x) \text{ suy ra } f'(0) = 3 \Leftrightarrow \frac{ad-bc}{d^2} = 3 \quad (1).$$

$$\text{Mặt khác đồ thị hàm số } y = f(x) \text{ đi qua điểm } (0;1) \text{ nên ta có } \frac{b}{d} = 1 \Leftrightarrow b = d \quad (2).$$

$$\text{Do hàm số không xác định tại } 1 \text{ nên } -\frac{d}{c} = 1 \Leftrightarrow d = -c \quad (3).$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) ta được: } \frac{ad-bc}{d^2} = 3 \Leftrightarrow \frac{a-c}{d} = 3 \Leftrightarrow a = c + 3d \Rightarrow a = -2c.$$

$$\text{Vậy } f(-2) = \frac{-2a+b}{-2c+d} = \frac{-2 \cdot (-2c) - c}{-2c - c} = \frac{3c}{-3c} = -1.$$

Câu 118. (Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020) Ta xác định được các số a, b, c để đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $(1;0)$ và có điểm cực trị $(-2;0)$. Tính giá trị biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2$.

A. 25.

B. -1.

C. 7.

D. 14.

Lời giải

Chọn A

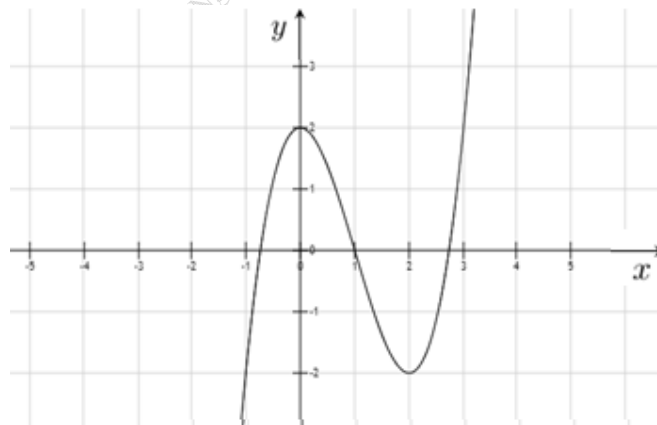
$$\text{Ta có } y = x^3 + ax^2 + bx + c \Rightarrow y' = 3x^2 + 2ax + b.$$

$$\text{Theo đề, ta có hệ phương trình } \begin{cases} y(1) = 0 \\ y(-2) = 0 \\ y'(-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ 0 = (-2)^3 + a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \\ 0 = 3 \cdot (-2)^2 + 2a \cdot (-2) + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = -1 \\ 4a - 2b + c = 8 \\ -4a + b = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \\ c = -4 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } T = a^2 + b^2 + c^2 = 3^2 + 0^2 + (-4)^2 = 25.$$

Câu 119. (Lê Lai - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Tính $S = a + b$?



A. $S = -2$.

B. $S = 0$.

C. $S = 1$.

D. $S = -1$.

Lời giải

Chọn A

Vì đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $y = 2$ nên $d = 2$.

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Hàm số đạt cực trị tại $x = 0$ và $x = 2$ nên

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = -3a \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Từ đồ thị ta nhận thấy } y(2) = -2 \Leftrightarrow 8a + 4b + d = -2 \Leftrightarrow 8a + 4b = -4 \Leftrightarrow 2a + b = -1 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta tìm được $a = 1, b = -3$.

Vậy $S = -2$.

Câu 120. (Liên trường Nghệ An - 2020) Cho hàm số $y = \frac{ax-7}{bx-c}$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
y'	+		+
y	2	$+\infty$	$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $3^{\log_3(x-9)} \cdot [\log_4(bx+a-2)^2 + \log_2(x-2)] = c(x-9)$ là

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Từ BBT ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \frac{a}{b} = 2 \\ \frac{c}{b} = 3 \\ y' = \frac{-ac+7b}{(bx-c)^2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ c = 3b \\ -6b^2 + 7b > 0 (b \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = 3 \\ b = 1 \end{cases}$$

Khi đó phương trình trở thành:

$$3^{\log_3(x-9)} \cdot [\log_4 x^2 + \log_2(x-2)] = 3(x-9)$$

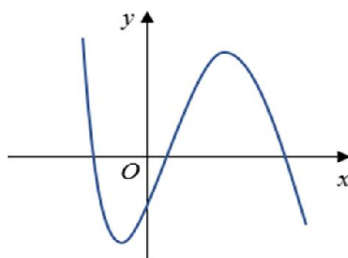
$$\Leftrightarrow (x-9) \cdot [\log_2 x + \log_2(x-2)] = 3(x-9)$$

$$\Leftrightarrow (x-9) \cdot (\log_2(x^2 - 2x) - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 9(l) \\ \log_2(x^2 - 2x) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - 2x = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2(l) \\ x = 4(l) \end{cases}$$

Vậy số nghiệm của phương trình là 0.

Câu 121. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



A. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

B. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

D. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c, \quad y'' = 6ax + 2b$$

Từ đồ thị ta thấy:

$$\square \lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty. \text{ Ta suy ra } a < 0.$$

$$\square y(0) < 0 \Rightarrow d < 0 \text{ loại } \quad \mathbf{C.}$$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị với hoành độ x_1, x_2 trái dấu và $x_1 + x_2 > 0$. Ta suy ra phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu và $x_1 + x_2 > 0$.

$$\text{Ta suy ra } x_1 x_2 = \frac{c}{3a} < 0, \Rightarrow c > 0 \text{ loại } \quad \mathbf{B.}$$

$$\text{Hơn nữa, } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{3a} > 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow b > 0. \text{ Loại } \quad \mathbf{A.}$$

Câu 122. (Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020) Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+1}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		+	+
y		$+\infty$	2
	2	$-\infty$	

Tập các giá trị b là tập nghiệm của bất phương trình nào dưới đây?

$$\mathbf{A.} \quad b^3 - 8 \leq 0.$$

$$\mathbf{B.} \quad -b^2 + 4 > 0.$$

$$\mathbf{C.} \quad b^2 - 3b + 2 < 0.$$

$$\mathbf{D.} \quad b^3 - 8 < 0.$$

Lời giải**Chọn D**

Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+1}$ có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -\frac{1}{c}$ và đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{a}{c}$.

Nhìn vào bảng biến thiên, ta thấy $-\frac{1}{c} = -1 \Rightarrow c = 1$ và $\frac{a}{c} = 2 \Rightarrow a = 2$ (vì $c = 1$).

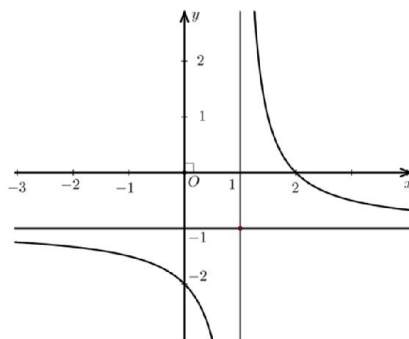
$$\text{Ta có } y' = \frac{a-bc}{(cx+1)^2}.$$

Vì hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$ nên

$$y' = \frac{a-bc}{(bx+c)^2} > 0 \Leftrightarrow a-bc > 0 \Leftrightarrow 2-b > 0 \Leftrightarrow b < 2 \Leftrightarrow b^3 < 8 \Leftrightarrow b^3 - 8 < 0.$$

Vậy tập các giá trị b là tập nghiệm của bất phương trình $b^3 - 8 < 0$.

Câu 123. (Tiên Du - Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (với a, b, c, d là số thực) có đồ thị như hình dưới đây. Tính giá trị biểu thức $T = \frac{a-2b+3d}{c}$.

A. $T = 6$.B. $T = 0$.**C. $T = -8$.**D. $T = 2$.**Lời giải****Chọn C**

Từ đồ thị ta có

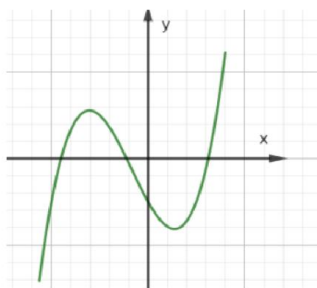
$$\text{TCD: } x = 1 \Rightarrow \frac{-d}{c} = 1 \Rightarrow \frac{d}{c} = -1 \Rightarrow d = -c$$

$$\text{TCN: } y = -1 \Rightarrow \frac{a}{c} = -1 \Rightarrow a = -c$$

$$\text{Đồ thị cắt trục hoành tại điểm: } x = 2 \Rightarrow \frac{-b}{a} = 2 \Rightarrow \frac{-b}{-c} = 2 \Rightarrow \frac{b}{c} = 2 \Rightarrow b = 2c$$

$$\text{Vậy } T = \frac{a-2b+3d}{c} = \frac{-c-4c-3c}{c} = -8$$

Câu 124. (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Trong các số a, b, c và d có bao nhiêu số dương?



A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải**Chọn D**Từ hình dạng đồ thị hàm số ta có $a > 0$ Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow d < 0$

$$\text{Ta có: } y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu $\Rightarrow y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ca < 0$

Mà $a > 0$ nên $c < 0$

Ta lại có: $y'' = 6ax + 2b$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow 6ax + 2b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}$$

Từ đồ thị hàm số ta thấy tâm đối xứng có hoành độ âm. Do đó $-\frac{b}{3a} < 0$

Mà $a > 0$ nên $b > 0$

Vậy trong các số a, b, c và d có 2 số dương là a và b

Câu 125. (Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020) Cho hàm số $f(x) = \frac{ax-6}{bx-c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như

sau:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	$1 \rightarrow -\infty$		$+\infty \rightarrow 1$

Trong các số a, b, c có bao nhiêu số âm?

A. 0.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên của hàm số, ta thấy đồ thị có hai đường tiệm cận, trong đó tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \frac{c}{b} = -2 \\ \frac{a}{b} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bc < 0 \\ ab > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0, c < 0, a > 0 \quad (1) \\ b < 0, c > 0, a < 0 \quad (2) \end{cases}$$

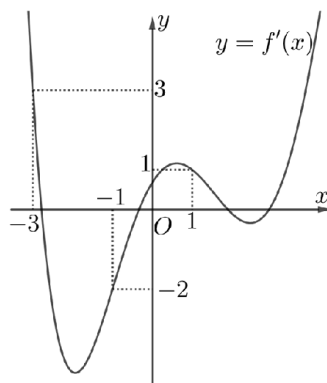
Lại có hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định $f'(x) = \frac{-ac + 6b}{(bx - c)^2} < 0 \Rightarrow ac > 6b$.

Ta thấy (1) không thể xảy ra do nếu $b > 0$ thì $ac > 6b > 0$; và (2) có thể xảy ra do nếu $c > 0, a < 0$ thì $6b < ac < 0$.

Vậy trong các số a, b, c có hai số âm.

PHẦN 6. TƯƠNG GIAO

Câu 126. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình sau.



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình

$$2f(\sin x - 2) - \frac{2\sin^3 x}{3} + \sin x > m + \frac{5\cos 2x}{4} \text{ nghiệm đúng với mọi } x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

A. $m \leq 2f(-3) + \frac{11}{12}$. **B.** $m < 2f(-1) + \frac{19}{12}$.

C. $m \leq 2f(-1) + \frac{19}{12}$. **D.** $m < 2f(-3) + \frac{11}{12}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$\begin{aligned} 2f(\sin x - 2) - \frac{2\sin^3 x}{3} + \sin x &> m + \frac{5\cos 2x}{4} \\ \Leftrightarrow m &< 2f(\sin x - 2) - \frac{2\sin^3 x}{3} + \sin x - \frac{5(1 - 2\sin^2 x)}{4} \end{aligned}$$

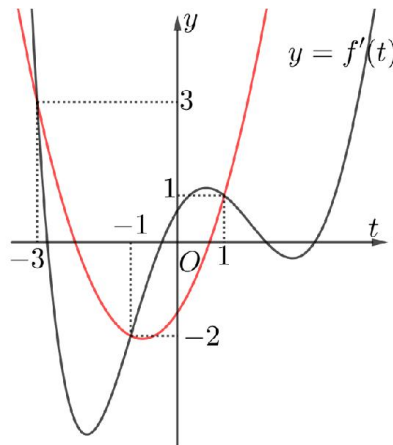
Đặt $t = \sin x - 2$ (với $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $t \in (-3; -1)$), khi đó bất phương trình được viết lại thành:

$$m < 2f(t) - \frac{2(t+2)^3}{3} + (t+2) - \frac{5[1 - 2(t+2)^2]}{4}.$$

hay $m < 2f(t) - \frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 3t + \frac{65}{12}$ (*).

Xét hàm số $g(t) = 2f(t) - \frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 3t + \frac{65}{12}$ trên đoạn $[-3; -1]$.

Ta có $g'(t) = 2f'(t) - 2t^2 - 3t + 3$. Do đó $g'(t) = 0 \Leftrightarrow f'(t) = t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}$.



Dựa vào sự tương giao của đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và parabol $y = t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}$ trên đoạn $[-3; -1]$ thì $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t \in \{-3; -1\}$.

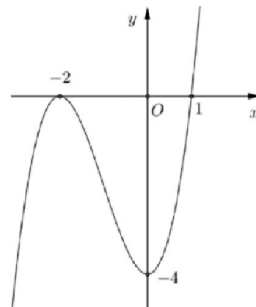
Suy ra bảng biến thiên của hàm số $g(t)$ trên đoạn $[-3; -1]$ như sau:

t	-3		-1
$g'(t)$	0	$-$	0
$g(t)$	$g(-3)$		$g(-1)$

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi bất phương trình (*)

nghiệm đúng với mọi $t \in (-3; -1)$. Điều đó tương đương với $m \leq g(-1) = 2f(-1) + \frac{19}{12}$ dựa vào tính liên tục của hàm số $g(t)$.

Câu 127. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình dưới đây



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-5; 5)$ để phương trình

$f^2(x) - (m + 4)|f(x)| + 2m + 4 = 0$ có 6 nghiệm phân biệt

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

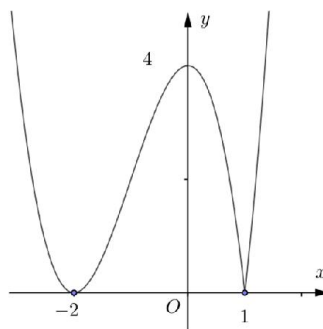
Chọn C

Ta có: $f^2(x) - (m + 4)|f(x)| + 2m + 4 = 0 \Leftrightarrow |f(x)|^2 - m|f(x)| - 4|f(x)| + 2m + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (|f(x)| - 2)^2 - m(|f(x)| - 2) = 0 \Leftrightarrow (|f(x)| - 2)(|f(x)| - 2 - m) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |f(x)| - 2 = 0 \\ |f(x)| - 2 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |f(x)| = 2 & (1) \\ |f(x)| = m + 2 & (2) \end{cases}$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ta có đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ như sau:



Dựa vào đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ suy ra phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.

Suy ra phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt (2) có 2 nghiệm phân biệt khác các nghiệm của phương trình (1).

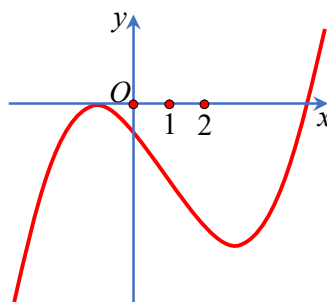
Ta có phương trình (2) là phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y = |f(x)|$ và $y = m + 2$. Số nghiệm phương trình (2) là số giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ và $y = m + 2$. Dựa vào hình vẽ đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ ta được phương trình $|f(x)| = m + 2$ có 2 nghiệm phân biệt khác

$$\text{các nghiệm của phương trình } |f(x)| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 = 0 \\ m + 2 > 4 \\ m + 2 \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m > 2 \end{cases}$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in (-5; 5) \Rightarrow m \in \{-2; 3; 4\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên $m \in (-5; 5)$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 128. (Chuyên Lam Sơn - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $f(x) > x^2 - 2x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (1; 2)$ khi và chỉ khi



A. $m \leq f(2) - 2$.

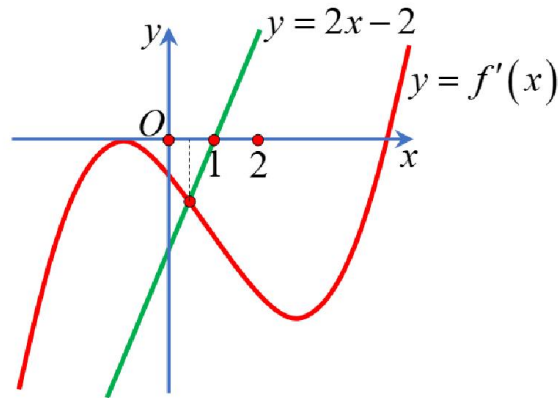
B. $m \leq f(1) + 1$.

C. $m \leq f(1) - 1$.

D. $m \leq f(2)$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $f(x) > x^2 - 2x + m \quad (\forall x \in (1; 2)) \Leftrightarrow f(x) - x^2 + 2x > m \quad (\forall x \in (1; 2)) \quad (*)$.

Gọi $g(x) = f(x) - (x^2 - 2x)$

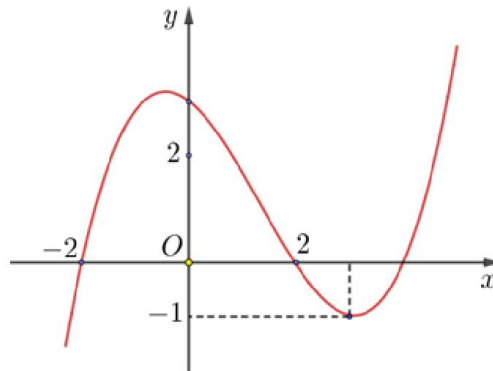
$\Rightarrow g'(x) = f'(x) - (2x - 2)$

Theo đồ thị ta thấy $f'(x) < (2x - 2) \quad (\forall x \in [1; 2]) \Rightarrow g'(x) < 0 \quad (\forall x \in [1; 2])$.

Vậy hàm số $y = g(x)$ liên tục và nghịch biến trên $[1; 2]$

Do đó $(*) \Leftrightarrow m \leq \min_{[1; 2]} g(x) = g(2) = f(2)$.

Câu 129. (Chuyên Lam Sơn - 2020) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3 - 3x)| = 1$ là

A. 10.

B. 8.

C. 9.

D. 7.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $|f(x^3 - 3x)| = 1 \quad (1)$

Đặt $t = x^3 - 3x$, ta có bảng biến thiên của hàm số $t = g(x) = x^3 - 3x$ như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên, ta thấy

+ Với mỗi $t_0 > 2$ hoặc $t_0 < -2$, phương trình $t_0 = x^3 - 3x$ có một nghiệm;

+ Với mỗi $-2 < t_0 < 2$, phương trình $t_0 = x^3 - 3x$ có 3 nghiệm.

Khi đó, (1) trở thành $|f(t)| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) = 1 \\ f(t) = -1 \end{cases}$

* TH 1: $f(t) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = t_1 \in (-2; 0) \\ t = t_2 \in (0; 2) \\ t = t_3 \in (2; +\infty) \end{cases}$

+ Với $t = t_1 \in (-2; 0) \Rightarrow$ Phương trình $t_1 = x^3 - 3x$ có 3 nghiệm;

+ Với $t = t_2 \in (0; 2) \Rightarrow$ Phương trình $t_2 = x^3 - 3x$ có 3 nghiệm;

+ Với $t = t_3 \in (2; +\infty) \Rightarrow$ Phương trình $t_3 = x^3 - 3x$ có 1 nghiệm;

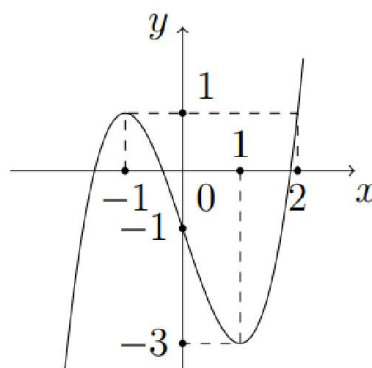
* TH 2: $f(t) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = t_4 \in (-\infty; -2) \\ t = t_5 \in (2; +\infty) \end{cases}$

+ Với $t = t_4 \in (-\infty; -2) \Rightarrow$ Phương trình $t_4 = x^3 - 3x$ có 1 nghiệm;

+ Với $t = t_5 \in (2; +\infty) \Rightarrow$ Phương trình $t_5 = x^3 - 3x$ có 1 nghiệm.

Mặt khác, các nghiệm này đều phân biệt. Vậy phương trình $|f(x^3 - 3x)| = 1$ có 9 nghiệm phân biệt.

Câu 130. (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $f[f(\cos x) - 1] = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$?



A. 2.

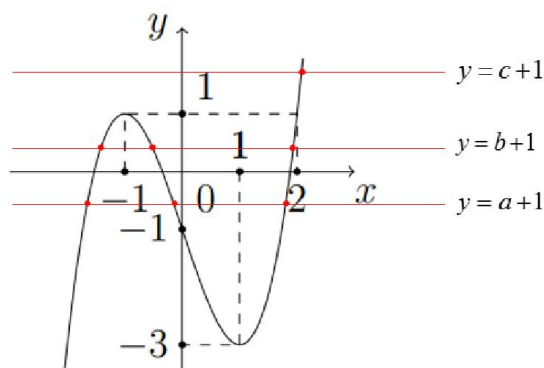
B. 5.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn C



Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy:

$$f[f(\cos x) - 1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\cos x) - 1 = a \in (-2; -1) \\ f(\cos x) - 1 = b \in (-1; 0) \\ f(\cos x) - 1 = c \in (1; 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(\cos x) = a + 1 \in (-1; 0) \\ f(\cos x) = b + 1 \in (0; 1) \\ f(\cos x) = c + 1 \in (2; 3) \end{cases}$$

• Xét phương trình $f(\cos x) = a + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \alpha_1 < -1 & (1) \\ \cos x = \alpha_2 \in (-1; 0) & (2) \\ \cos x = \alpha_3 > 1 & (3) \end{cases}$

Vì $\cos x \in [-1; 1]$ nên phương trình (1), (3) vô nghiệm và phương trình (2) có 2 nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$.

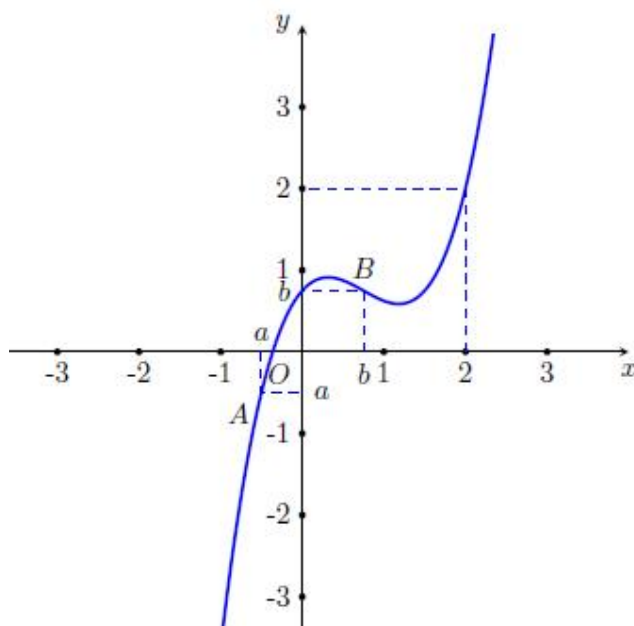
• Xét phương trình $f(\cos x) = b + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \beta_1 < -1 & (4) \\ \cos x = \beta_2 \in (-1; 0) & (5) \\ \cos x = \beta_3 > 1 & (6) \end{cases}$

Vì $\cos x \in [-1; 1]$ nên phương trình (4), (6) vô nghiệm và phương trình (5) có 2 nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$.

• Xét phương trình $f(\cos x) = c + 1 \Leftrightarrow \cos x = t > 2$ (vô nghiệm)

Nhận xét hai nghiệm của phương trình (5) không trùng với nghiệm nào của phương trình (2) nên phương trình $f[f(\cos x) - 1] = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 131. (Chuyên Lương Văn Tỵ - Ninh Bình - 2020) Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ:



Số nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2}; 3\pi\right)$ của phương trình $f(\cos x + 1) = \cos x + 1$ là

A. 2.

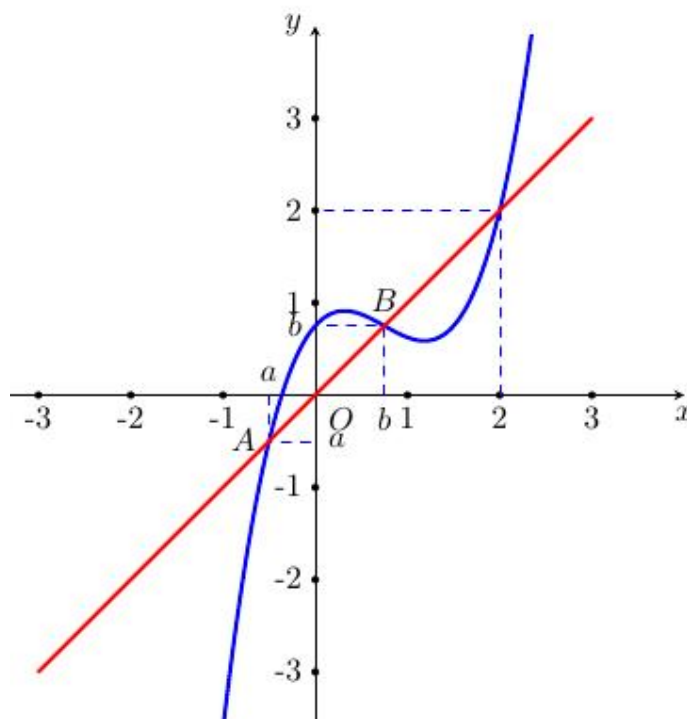
B. 3.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn C



Từ đồ thị ta có $f(x) = x \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (-\infty; 0) \\ x = b \in (0; 1) \\ x = 2 \end{cases}$

$$\text{Do đó } f(\cos x + 1) = \cos x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + 1 = a \in (-\infty; 0) \\ \cos x + 1 = b \in (0; 1) \\ \cos x + 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = a - 1 = t_1 \in (-\infty; -1) \text{ (VN)} \\ \cos x = b - 1 = t_2 \in (-1; 0) \quad (1) \\ \cos x = 1 \quad (2) \end{cases}$$

Dựa vào đường tròn lượng giác, phương trình (1) có 3 nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2}; 3\pi\right)$.

Phương trình (2) có 2 nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2}; 3\pi\right)$.

Vậy phương trình ban đầu có tất cả 5 nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2}; 3\pi\right)$.

Câu 132. (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - Quảng Nam - 2020) Tập hợp tất cả các số thực của tham số m để phương trình $x^6 + 6x^4 - m^3x^3 + (15 - 3m^2)x^2 - 6mx + 10 = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ là:

A. $2 < m \leq \frac{5}{2}$.

B. $\frac{7}{5} \leq m < 3$.

C. $\frac{11}{5} < m < 4$.

D. $0 < m < \frac{9}{4}$.

Lời giải**Chọn A**

Ta có:

$$x^6 + 6x^4 - m^3x^3 + (15 - 3m^2)x^2 - 6mx + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2)^3 + 3(x^2 + 2) = (mx + 1)^3 + 3(mx + 1)$$

$$\Leftrightarrow f(x^2 + 2) = f(mx + 1) (*)$$

Với $f(t) = t^3 + 3t$. Do $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nên $(*) \Leftrightarrow x^2 + 2 = mx + 1$

$$\Leftrightarrow x^2 - mx + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{x^2 + 1}{x}.$$

Xét hàm số $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ trên $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$

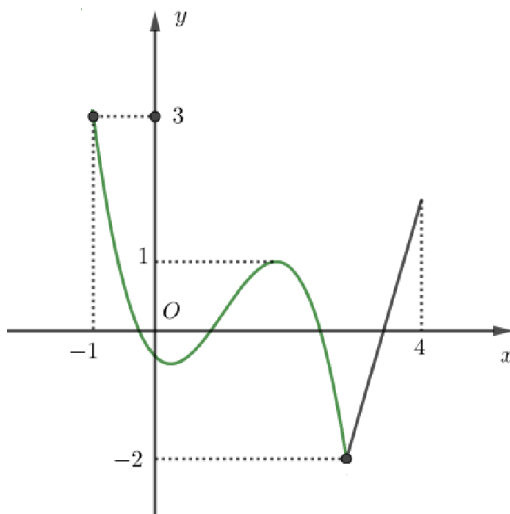
Ta có: $g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên.

x	$\frac{1}{2}$	1	2	
g'		-	0	+
g	$\frac{5}{2}$			$\frac{5}{2}$



Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ khivà chỉ khi $2 < m \leq \frac{5}{2}$.**Câu 133. (Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để bất phương trình $|f(x) + m| < 2m$ đúng với mọi x thuộc đoạn $[-1; 4]$.

A. 6.

B. 5.

C. 7.

D. 8.

Lời giải

Chọn C

Để bất phương trình $|f(x) + m| < 2m$ có nghiệm ta suy ra điều kiện $m > 0$.

$$|f(x) + m| < 2m \Leftrightarrow -2m < f(x) + m < 2m \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -3m \\ f(x) < m \end{cases}.$$

Bất phương trình $|f(x) + m| < 2m$ đúng với mọi x thuộc đoạn $[-1; 4] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -3m \\ f(x) < m \end{cases}$ đúng

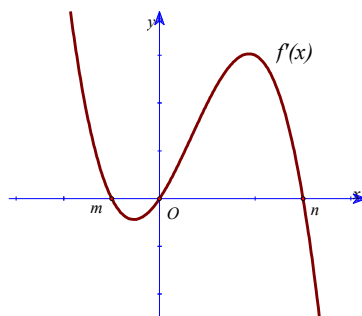
$$\text{với mọi } x \text{ thuộc đoạn } [-1; 4] \Leftrightarrow \begin{cases} -3m < \min_{[-1; 4]} f(x) \\ m > \max_{[-1; 4]} f(x) \end{cases}.$$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy ra $\min_{[-1; 4]} f(x) = -2$; $\max_{[-1; 4]} f(x) = 3$.

$$\Rightarrow \begin{cases} -3m < \min_{[-1; 4]} f(x) \\ m > \max_{[-1; 4]} f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m < -2 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2}{3} \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3 \text{ (thỏa mãn điều kiện } m > 0 \text{)}$$

Vậy trên đoạn $[-10; 10]$ có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 134. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho hàm số $f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn, có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ



Phương trình $f(x) = 0$ có bốn nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi

A. $f(0) < 0 < f(m)$. **B.** $f(0) > 0$. **C.** $f(m) < 0 < f(n)$. **D.** $f(0) < 0 < f(n)$.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số $f'(x)$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$	m	0	n	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	$f(m)$	$f(0)$	$f(n)$	$-\infty$

Gọi S_1 là diện tích giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$, trục hoành và hai đường thẳng

$x = m, x = 0$. Ta có $S_1 = -\int_m^0 f'(x)dx = f(m) - f(0)$.

Gọi S_2 là diện tích giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$, trục hoành và hai đường thẳng

$x = 0, x = n$. Ta có $S_2 = \int_0^n f'(x)dx = f(n) - f(0)$.

Theo hình vẽ ta có $S_2 > S_1 \Leftrightarrow f(n) - f(0) > f(m) - f(0) \Leftrightarrow f(n) > f(m)$.

Từ đó suy ra phương trình $f(x) = 0$ có bốn nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $f(0) < 0 < f(m)$.

Câu 135. (Chuyên Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.

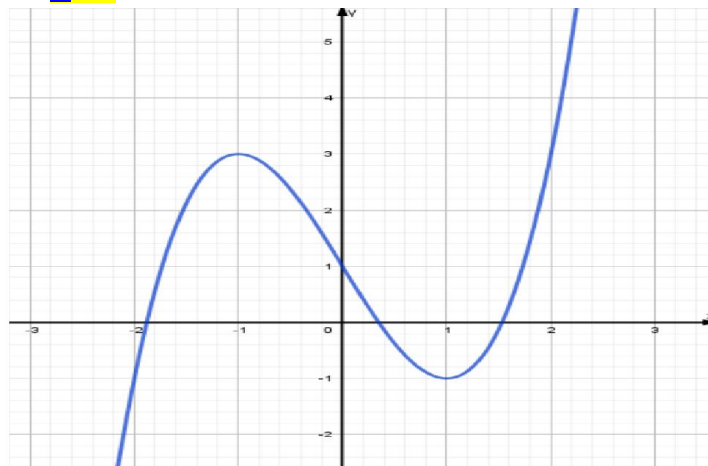
Hỏi phương trình $f(f(\sin x)) - 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$?

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. 2.



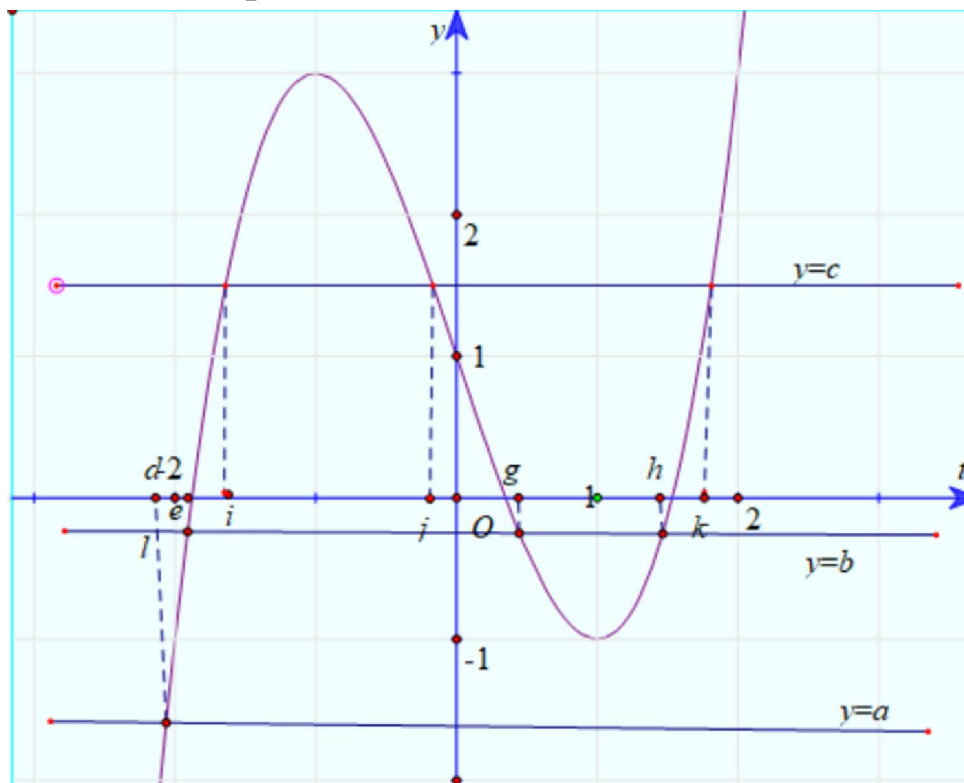
Lời giải

Chọn B

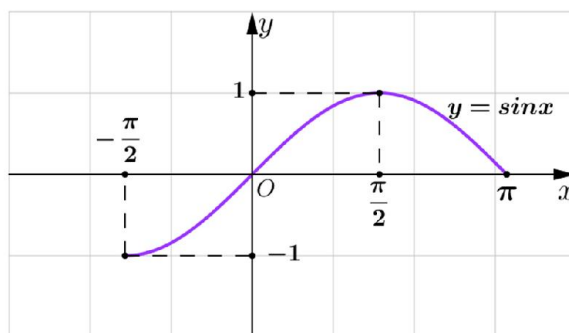
Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ta có:

$$f(f(\sin x)) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\sin x) = a, a \in (-2; -1) \\ f(\sin x) = b, b \in (-1; 0) \\ f(\sin x) = c, c \in (1; 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = d, d \in (-3; -2) & (1) \\ \sin x = e, e \in (-2; -1) & (2) \\ \sin x = g, g \in (0; 1) & (3) \\ \sin x = h, h \in (1; 2) & (4) \\ \sin x = i, i \in (-2; -1) & (5) \\ \sin x = j, j \in (-1; 0) & (6) \\ \sin x = k, k \in (1; 2) & (7) \end{cases}$$



Ta có đồ thị của hàm số $y = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ là hình vẽ dưới:



Suy ra

+) Các phương trình (1), (2), (4), (5), (7) vô nghiệm.

+) Phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

+) Phương trình (6) có nghiệm duy nhất thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Vậy phương trình $f(f(\sin x)) - 2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Câu 136. (Chuyên Bến Tre - 2020) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{-2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB \leq 2\sqrt{2}$. Tổng giá trị các phần tử của S bằng

A. -6.

B. -27.

C. 9.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{-2x+1}{x+1} = -x + m \quad (1)$

Điều kiện: $x \neq -1$.

Phương trình (1) $\Rightarrow \frac{-2x+1}{x+1} = -x + m$

$$\Leftrightarrow -2x+1 = (-x+m)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + (m+1)x + m - 1 = 0 \quad (2).$$

Để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{-2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B thì

phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác $-1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ -3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + 6m - 3 > 0.$

$$\Leftrightarrow m \in (-\infty; -3 - 2\sqrt{3}) \cup (-3 + 2\sqrt{3}; +\infty) \quad (3).$$

Gọi $A(x_A; -x_A + m), B(x_B; -x_B + m)$ là tọa độ giao điểm:

Theo đề ta có:

$$AB \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (x_B - x_A)^2} \leq 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(x_B - x_A)^2 = 8 \Leftrightarrow x_B^2 - 2x_A x_B + x_A^2 - 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x_A + x_B)^2 - 4x_A x_B - 4 \leq 0.$$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 - 4(1-m) - 4 < 0$$

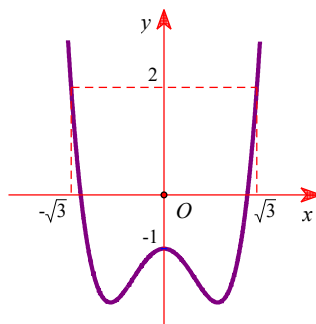
$$\Leftrightarrow m^2 + 6m - 7 < 0 \Leftrightarrow m \in (-7; 1) \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có $m \in (-7; -3 - 2\sqrt{2}) \cup (-3 + 2\sqrt{2}; 1)$.

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-6; 0\}$

Chọn **A.**

Câu 137. (Chuyên Bến Tre - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Cho bất phương trình $3f(x) \geq x^3 - 3x + m$ (m là tham số thực). Điều kiện cần và đủ để bất phương trình $3f(x) \geq x^3 - 3x + m$ đúng với mọi $x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ là



A. $m \geq 3f(1)$.

B. $m \geq 3f(-\sqrt{3})$.

C. $m \leq 3f(0)$.

D. $m \leq 3f(\sqrt{3})$.

Lời giải

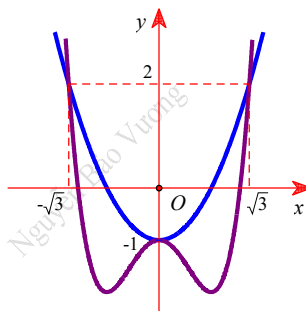
Chọn D

Ta có $3f(x) \geq x^3 - 3x + m \Leftrightarrow 3f(x) - x^3 + 3x \geq m$

Đặt $g(x) = 3f(x) - x^3 + 3x$. Tính $g'(x) = 3f'(x) - 3x^2 + 3$

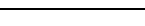
Có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 - 1$

Nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và parabol $y = x^2 - 1$



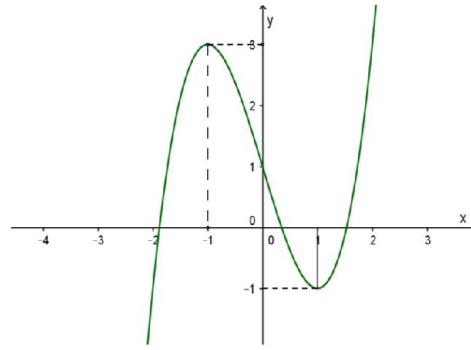
Dựa vào đồ thị hàm số ta có: $f'(x) = x^2 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ x = 0 \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$

BBT

x	$-\sqrt{3}$		-1		$\sqrt{3}$
$g'(x)$	0	$-$	0	$-$	0
$g(x)$	$g(-\sqrt{3})$				

Để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ thì $m \leq \min_{[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]} g(x) = g(\sqrt{3}) = 3f(\sqrt{3})$.

Câu 138. (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x) - m + 2 = 2 \sin x$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$. Tổng các phần tử của S bằng



A. 4.

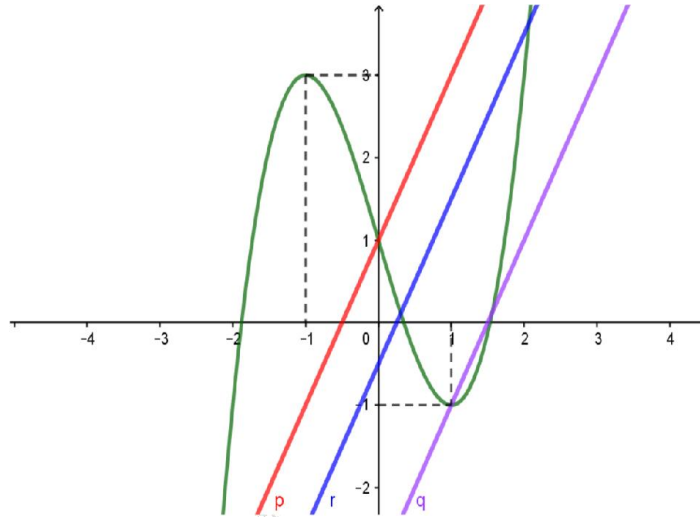
B. -1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D



Đặt $t = \sin x$, với $x \in (0; \pi) \Rightarrow t \in (0; 1]$

Ta được phương trình: $f(t) - 2t = m - 2 \Leftrightarrow f(t) = 2t + m - 2$ (1)

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(t)$ và đường thẳng $y = 2t + m - 2$ (r).

Gọi (p): $y = 2x + 1$ song song với đường thẳng (Δ): $y = 2t$ và đi qua điểm $A(0; 1)$.

Gọi q: $y = 2x - 3$ song song với đường thẳng (Δ): $y = 2t$ và đi qua điểm $B(1; -1)$.

Để phương trình $f(\sin x) - m + 2 = 2 \sin x$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ thì phương trình (1) phải có nghiệm $t \in (0; 1]$, suy ra đường thẳng r nằm trong miền nằm giữa hai đường thẳng q và p (có thể trùng lên q và bỏ p)

$$\Rightarrow -3 \leq m - 2 < 1 \Leftrightarrow -1 \leq m < 3 \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1; 2\} \Rightarrow S = \{-1; 0; 1; 2\}.$$

Do đó tổng các phần tử là: $-1 + 0 + 1 + 2 = 2$.

Câu 139. (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020) Cho hàm số $f(x) = x^3 + x + 2$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}\right) = -x^3 - x + 2$ có nghiệm $x \in [-1; 2]$?

A. 1750.

B. 1748.

C. 1747.

D. 1746.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t + 2$, ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số f đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f\left(\sqrt[3]{f^3(x)+f(x)+m}\right)=f(-x)$

$$\Leftrightarrow -x = \sqrt[3]{f^3(x)+f(x)+m} \Leftrightarrow f^3(x)+f(x)+x^3+m=0 \quad (1)$$

Xét $h(x)=f^3(x)+f(x)+x^3+m$ trên đoạn $[-1;2]$.

Ta có $h'(x)=3f'(x) \cdot f^2(x)+f'(x)+3x^2=f'(x)[3f^2(x)+1]+3x^2$.

Ta có $f'(x)=3x^2+1>0, \forall x \in [-1;2] \Rightarrow h'(x)>0, \forall x \in [-1;2]$.

Hàm số $h(x)$ đồng biến trên $[-1;2]$ nên $\min_{[-1;2]} h(x)=h(-1)=m-1, \max_{[-1;2]} h(x)=h(2)=m+1748$.

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} \min_{[-1;2]} h(x) \cdot \max_{[-1;2]} h(x) &\leq 0 \Leftrightarrow h(-1) \cdot h(2) \\ &\Leftrightarrow (m-1)(1748+m) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -1748 \leq m \leq 1. \end{aligned}$$

Do m nguyên nên tập các giá trị m thỏa mãn là $S = \{-1748; -1747; \dots; 0; 1\}$.

Vậy có tất cả 1750 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 140. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020) Có bao nhiêu m nguyên dương để hai đường cong

$(C_1): y = \left| 2 + \frac{2}{x-10} \right|$ và $(C_2): y = \sqrt{4x-m}$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương?

A. 35.

B. 37.

C. 36.

D. 34.

Lời giải.

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 10 \\ x \geq \frac{m}{4} \end{cases}$

Xét trên $(0; +\infty) \setminus \{10\}$, phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là

$$\left| 2 + \frac{2}{x-10} \right| = \sqrt{4x-m} \Leftrightarrow m = 4x - \left(\frac{2x-18}{x-10} \right)^2.$$

Đặt $g(x) = 4x - \left(\frac{2x-18}{x-10} \right)^2$ với $x \in (0; +\infty) \setminus \{10\}$.

Ta có: $g'(x) = 4 \left(1 + \frac{2x-18}{(x-10)^3} \right); g''(x) = \frac{-4x+34}{(x-10)^4}.$

$g'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	0	$\frac{17}{2}$	10	$+\infty$
$g''(x)$	+	0	-	-
$g'(x)$	4,072	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
			$-\infty$	0

Suy ra phương trình $g'(x) = 0$ có một nghiệm duy nhất $\alpha \in \left(\frac{17}{2}; 10\right)$. Lại có $g'(9,22) > 0$ nên $\alpha \in (9,22;10)$. Ta có bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(0;+\infty) \setminus \{10\}$:

x	0	9	α	10	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	+
$g(x)$	$-\frac{81}{25}$	$\nearrow 36$	$\nearrow g(\alpha)$	$\searrow -\infty$	$\nearrow +\infty$

Từ đó suy ra phương trình $m = g(x)$ có 3 nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi $\frac{-81}{25} < m < g(\alpha)$.

Trên khoảng $(9,22;10)$ thì $\begin{cases} 4x < 40 \\ 3 < \left(\frac{2x-18}{x-10}\right)^2 \end{cases}$ nên $g(x) < 37 \Rightarrow g(\alpha) \in (36;37)$.

Vậy những giá trị m nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán là 1; 2; 3; ...; 36 hay có 36 giá trị của m cần tìm.

Câu 141. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$+$	0	$-$	$+$	0	$-$		
y									
	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thuộc khoảng $(-\infty; \ln 2)$ của phương trình $2019f(1-e^x) - 2021 = 0$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 1 - e^x$; $x \in (-\infty; \ln 2) \Rightarrow t \in (-1; 1)$.

Nhận xét: $x = \ln(1-t) \Rightarrow$ với mỗi giá trị của $t \in (-1; 1)$ ta được một giá trị của $x \in (-\infty; \ln 2)$.

Phương trình tương đương: $f(t) = \frac{2021}{2019}$.

Sử dụng bảng biến thiên của $f(x)$ cho $f(t)$ như sau:

t	$-\infty$	-1	t_1	0	t_2	1	$+\infty$
$f'(t)$		+	0	-	0	+	-
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow 2$	$\searrow 0$	$\nearrow 2$	$\searrow -\infty$		

$y = \frac{2021}{2019}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(t) = \frac{2021}{2019}$ có 2 nghiệm $t_1, t_2 \in (-1; 1)$.

Vậy phương trình $2019f(1 - e^x) - 2021 = 0$ có 2 nghiệm $x \in (-\infty; \ln 2)$.

Câu 142. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020) Cho hàm số $f(x) = (x-1).(x-2)...(x-2020)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn

$[-2020; 2020]$ để phương trình $f'(x) = m.f(x)$ có 2020 nghiệm phân biệt?

A. 2020.

B. 4040.

C. 4041.

D. 2020.

Lời giải

Chọn B

Ta có nhận xét: khi $f(x) = 0$ thì phương trình $f'(x) = m.f(x)$ vô nghiệm.

Do đó: $f'(x) = m.f(x) \Leftrightarrow m = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Xét hàm số $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \dots + \frac{1}{x-2020}$.

Ta có $g'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{-1}{(x-2)^2} + \frac{-1}{(x-3)^2} + \dots + \frac{-1}{(x-2020)^2} < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2; 3; \dots; 2020\}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2	3	...	2020	$+\infty$
$g'(x)$	-		-		-		-
$g(x)$	0	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0

Dựa vào BBT, phương trình $f'(x) = m.f(x)$ có 2020 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m > 0$ hoặc $m < 0$.

Kết hợp với điều kiện m là số nguyên thuộc $[-2020; 2020]$ nên

$m \in \{n \in \mathbb{Z} \mid -2020 \leq n \leq 2020, n \neq 0\}$.

Vậy có tất cả 4040 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 143. (Chuyên Quang Trung - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[2; 4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x + 2\sqrt{x^2 - 2x} = m.f(x)$ có nghiệm thuộc đoạn $[2; 4]$?

x	2	3	$\frac{7}{2}$	4
$f(x)$	4	3	$\sqrt{11}$	2

A. 6.

B. 5.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min_{[2;4]} f(x) = f(4) = 2$ và $\max_{[2;4]} f(x) = f(2) = 4$

Hàm số $g(x) = x + 2\sqrt{x^2 - 2x}$ liên tục và đồng biến trên $[2;4]$

Suy ra $\min_{[2;4]} g(x) = g(2) = 2$ và $\max_{[2;4]} g(x) = g(4) = 4 + 4\sqrt{2}$

Ta có $x + 2\sqrt{x^2 - 2x} = m.f(x) \Leftrightarrow \frac{x + 2\sqrt{x^2 - 2x}}{f(x)} = m \Leftrightarrow \frac{g(x)}{f(x)} = m$

Xét hàm số $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ liên tục trên $[2;4]$

Vì $g(x)$ nhỏ nhất và $f(x)$ lớn nhất đồng thời xảy ra tại $x = 2$ nên

$$\min_{[2;4]} h(x) = \frac{\min_{[2;4]} g(x)}{\max_{[2;4]} f(x)} = \frac{g(2)}{f(2)} = h(2) = \frac{1}{2}$$

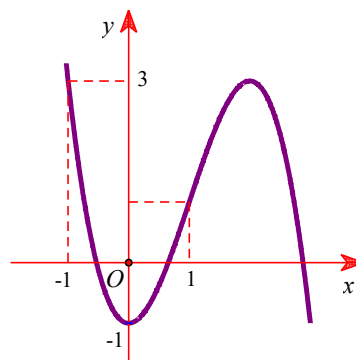
Vì $g(x)$ lớn nhất và $f(x)$ nhỏ nhất đồng thời xảy ra tại $x = 4$ nên

$$\max_{[2;4]} h(x) = \frac{\max_{[2;4]} g(x)}{\min_{[2;4]} f(x)} = \frac{g(4)}{f(4)} = h(4) = 2 + 2\sqrt{2}$$

Từ đó suy ra phương trình $h(x) = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $\frac{1}{2} \leq m \leq 2 + 2\sqrt{2}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm.

Câu 144. (Chuyên Sơn La - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x) + (m - 2019)f(\cos x) + m - 2020 = 0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ là



A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 5.

Lời giải

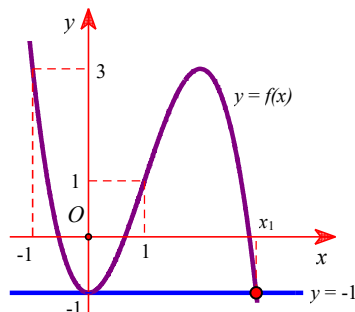
Chọn C

Ta có $f^2(\cos x) + (m - 2019)f(\cos x) + m - 2020 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\cos x) = -1 \\ f(\cos x) = 2020 - m \end{cases} \quad (1)$

* Với $f(\cos x) = -1$

Dựa vào đồ thị ta có $f(\cos x) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = x_1 \ (x_1 > 1) \end{cases} (VN) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Vì $x \in [0; 2\pi] \Rightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\}$

* Với $f(\cos x) = 2020 - m$

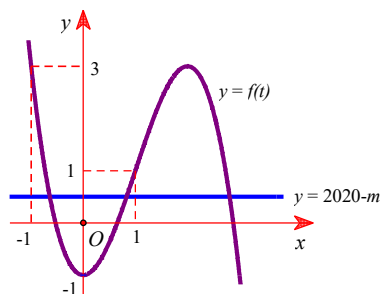
Đặt $t = \cos x \ (t \in [-1; 1])$

Với $t \in (-1; 1]$ thì phương trình $t = \cos x$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $[0; 2\pi]$.

Với $t = -1$ thì phương trình $t = \cos x$ có một nghiệm thuộc $[0; 2\pi]$

Phương trình trở thành $f(t) = 2020 - m$

Để phương trình (1) có tất cả 6 nghiệm phân biệt thì phương trình $f(\cos x) = 2020 - m$ có 4 nghiệm phân biệt, hay phương trình $f(t) = 2020 - m$ có hai nghiệm $t \in (-1; 1]$



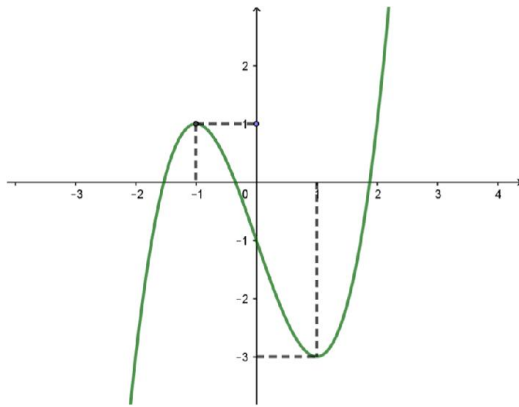
Dựa vào đồ thị ta có để phương trình $f(t) = 2020 - m$ có hai nghiệm $t \in (-1; 1]$ thì $-1 < 2020 - m \leq 1 \Leftrightarrow 2019 \leq m < 2021$

Vì m nguyên nên $m \in \{2019; 2020\}$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 145. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc 3 và có đồ thị như hình vẽ bên.

Hỏi phương trình $f(f(\cos x) - 1) = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0; 3\pi]$?



A. 2.

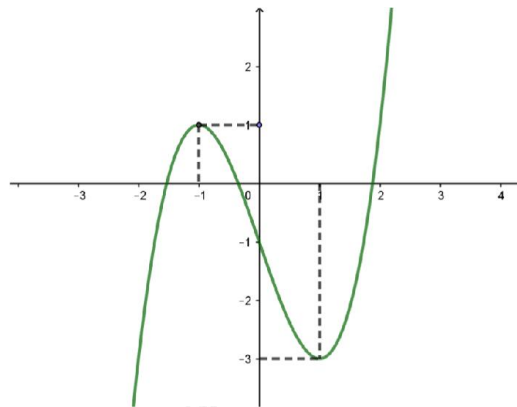
B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn D



Đặt $t = \cos x$, với $x \in [0; 3\pi] \Rightarrow t \in [-1; 1]$.

Với $t = 1$, phương trình $t = \cos x$ có hai nghiệm $x \in [0; 3\pi]$.

Với $t = -1$, phương trình $t = \cos x$ có hai nghiệm $x \in [0; 3\pi]$.

Với $-1 < t < 1$, phương trình $t = \cos x$ có ba nghiệm $x \in [0; 3\pi]$.

Thay $t = \cos x$ vào phương trình $f(f(\cos x) - 1) = 0$, ta được phương trình:

$$f(f(t) - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) - 1 = a \in (-2; -1) \\ f(t) - 1 = b \in (-1; 0) \\ f(t) - 1 = c \in (1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) = a + 1 \in (-1; 0) & (1) \\ f(t) = b + 1 \in (0; 1) & (2) \\ f(t) = c + 1 \in (2; 3) & (3) \end{cases}$$

Từ đồ thị ta có:

+) Phương trình (1) có 1 nghiệm $t \in (-1; 0)$, suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm.

+) Phương trình (2) có 1 nghiệm $t \in (-1; 0)$, suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm.

+) Phương trình (3) có 1 nghiệm $t > 1$, suy ra phương trình đã cho vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm.

Câu 146. (Chuyên Thái Nguyên - 2020) Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 - m^3 + 3m^2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt. Tổng tất cả các phần tử của T bằng

A. 1.

B. 5.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

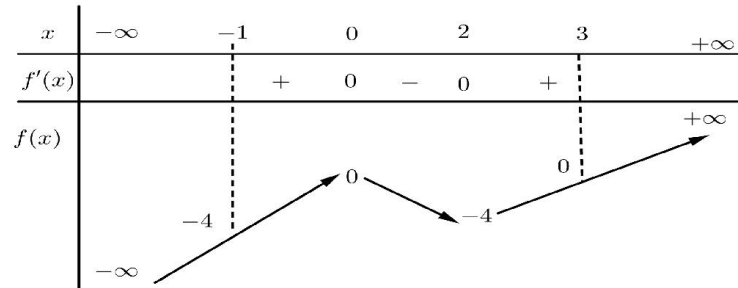
Cách 1: Ta có $x^3 - 3x^2 - m^3 + 3m^2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = m^3 - 3m^2 \Leftrightarrow f(x) = f(m)$ (1)

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}.$$

$$f(x) = -4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}.$$



Dựa vào bảng biến thiên, suy ra (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -4 < f(m) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 3 \\ m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases}$.

Suy ra $T = \{1\}$. Vậy tổng tất cả các phần tử của T bằng 1.

Cách 2: Ta có $x^3 - 3x^2 - m^3 + 3m^2 = 0 \Leftrightarrow (x^3 - m^3) - 3(x^2 - m^2) = 0$

$$\Leftrightarrow (x - m)[x^2 + (m - 3)x + m^2 - 3m] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x^2 + (m - 3)x + m^2 - 3m = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt, khác m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m - 3)^2 - 4(m^2 - 3m) > 0 \\ m^2 + (m - 3)m + m^2 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m - 3)(-3m - 3) > 0 \\ 3m^2 - 6m \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 3 \\ m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Rightarrow m = 1 \text{ (vì } m \in \mathbb{Z} \text{)}.$$

Suy ra $T = \{1\}$. Vậy tổng tất cả các phần tử của T bằng 1.

Câu 147. (Chuyên Thái Nguyên - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y			5		-3	$+\infty$
	$-\infty$					

Phương trình $|f(3x+1)-2|=5$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 3.

B. 5.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } |f(3x+1)-2|=5 \Leftrightarrow \begin{cases} f(3x+1)-2=5 \\ f(3x+1)-2=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(3x+1)=7 \quad (1) \\ f(3x+1)=-3 \quad (2) \end{cases}$$

Dựa vào bảng biến thiên,

$$+ \text{ Phương trình (1) có nghiệm duy nhất thỏa mãn } 3x+1=a>3 \Leftrightarrow x=\frac{a-1}{3}>\frac{2}{3}.$$

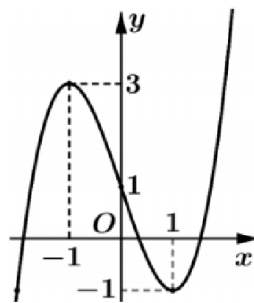
$$+ \text{ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \text{ thỏa mãn } \begin{cases} 3x_1+1=3 \\ 3x_2+1=b<-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\frac{2}{3} \\ x_2=\frac{b-1}{3}<-\frac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Câu 148. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020) Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết

$$f(-1)=1; f\left(-\frac{1}{e}\right)=2. \text{ Tìm tất cả các giá trị của } m \text{ để bất phương trình } f(x)<\ln(-x)+m$$

$$\text{nghiệm đúng với mọi } x \in \left(-1; \frac{-1}{e}\right).$$



A. $m \geq 2$.

B. $m \geq 3$.

C. $m > 2$.

D. $m > 3$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } f(x)<\ln(-x)+m \Leftrightarrow m>f(x)-\ln(-x).$$

$$\text{Xét hàm số } g(x)=f(x)-\ln(-x) \text{ trên } \left(-1; -\frac{1}{e}\right).$$

$$\text{Có } g'(x)=f'(x)-\frac{1}{x}.$$

Trên $\left(-1; -\frac{1}{e}\right)$ có $f'(x) > 0$ và $\frac{1}{x} < 0$ nên $g'(x) > 0, \forall x \in \left(-1; -\frac{1}{e}\right)$

$\Rightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left(-1; -\frac{1}{e}\right)$.

Vậy nên $f(x) < \ln(-x) + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left(-1; -\frac{1}{e}\right)$

$$\Leftrightarrow m \geq g(x), \forall x \in \left(-1; -\frac{1}{e}\right)$$

$$\Leftrightarrow m \geq g\left(-\frac{1}{e}\right)$$

$$\Leftrightarrow m \geq 3.$$

Câu 149. (Đại Học Hà Tĩnh - 2020) Cho đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 . Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} + \frac{1}{f'(x_3)}$.

A. $P = 3 + 2b + c$.

B. $P = 0$.

C. $P = b + c + d$.

D. $P = \frac{1}{2b} + \frac{1}{c}$.

Lời giải

Chọn B

Vì x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình bậc ba $f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

Ta có $f'(x) = (x - x_1)(x - x_2) + (x - x_2)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_3)$.

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} f'(x_1) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \\ f'(x_2) = (x_2 - x_3)(x_2 - x_1) \\ f'(x_3) = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } P &= \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{1}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)} + \frac{1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \\ &= \frac{(x_2 - x_3) - (x_1 - x_3) + (x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} = 0. \end{aligned}$$

Câu 150. (ĐHQG Hà Nội - 2020) Cho phương trình $4\cos^3 x - 12\cos^2 x - 33\cos x = 4m + 3\sqrt{3\cos^2 x + 9\cos x + m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm duy nhất thuộc $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.

A. 15.

B. 16.

C. 17.

D. 18.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \cos x$ với $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right] \Rightarrow t \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$, với mỗi $t \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ chỉ có một $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$

Ta có $4t^3 - 12t^2 - 33t = 4m + 3\sqrt{3t^2 + 9t + m}$ (1)

Bài toán trở thành tìm m để phương trình (1) có nghiệm duy nhất $t \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$

$$\text{Đặt } u = \sqrt[3]{3t^2 + 9t + m} \Rightarrow \begin{cases} 4t^3 - 12t^2 - 33t = 4m + 3u \\ u^3 = 3t^2 + 9t + m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t^3 = 12t^2 + 33t + 4m + 3u \\ 4u^3 = 12t^2 + 36t + 4m \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4t^3 - 4u^3 = 3u - 3t \Leftrightarrow (t-u)(4t^2 + 4ut + 4u^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow u = t, (4t^2 + 4ut + 4u^2 + 3 > 0)$$

Ta tìm m để phương trình $m = t^3 - 3t^2 - 9t$ có nghiệm duy $t \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$

$$\text{Xét } g(t) = t^3 - 3t^2 - 9t \Rightarrow g'(t) = 3t^2 - 6t - 9 \Rightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 (l) \\ t = 3 (l) \end{cases}$$

Vậy $g(1) \leq m \leq g\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow -11 \leq m \leq \frac{29}{8}$ vậy có 15 giá trị nguyên của m .

Câu 151. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(-1) = 5, f(-3) = 0$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-

Số giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $3f(2-x) + \sqrt{x^2 + 4} - x = m$ có nghiệm trong khoảng $(3; 5)$ là

A. 16.

B. 17.

C. 0.

D. 15.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x) = 3f(2-x) + \sqrt{x^2 + 4} - x$ với $x \in (3; 5)$.

Ta có: $g'(x) = -3f'(2-x) + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} - 1$.

Với $x \in (3; 5)$:

Ta có: $2-x \in (-3; -1)$ nên $f'(2-x) > 0$ suy ra $-3f'(2-x) < 0$.

Ta có: $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} < \frac{x}{x} = 1$

Suy ra $g'(x) = -3f'(2-x) + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} - 1 < 0, \forall x \in (3; 5)$ nên hàm số nghịch biến trên $(3; 5)$.

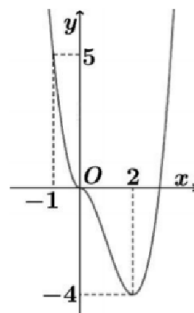
Suy ra $\min_{(3; 5)} g(x) = g(5) = 3f(-3) + \sqrt{5^2 + 4} - 5 = \sqrt{29} - 5$;

$\max_{(3; 5)} g(x) = g(3) = 3f(-1) + \sqrt{3^2 + 4} - 3 = 12 + \sqrt{13}$.

Để phương trình $3f(2-x) + \sqrt{x^2 + 4} - x = m$ có nghiệm thì $\sqrt{29} - 5 \leq m \leq 12 + \sqrt{13}$ mà m nguyên dương nên $m \in \{1, 2, \dots, 15\}$ tức là có 15 giá trị

Câu 152. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-1) = 1$, $f\left(-\frac{1}{e}\right) = 2$.

Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Bất phương trình $f(x) < \ln(-x) + x^2 + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left(-1; -\frac{1}{e}\right)$ khi và chỉ khi



- A. $m > 0$. B. $m > 3 - \frac{1}{e^2}$. C. $m \geq 3 - \frac{1}{e^2}$. D. $m \geq 0$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $-x > 0 \Leftrightarrow x < 0$

Bất phương trình đã cho tương đương với $f(x) - \ln(-x) - x^2 < m$ (*).

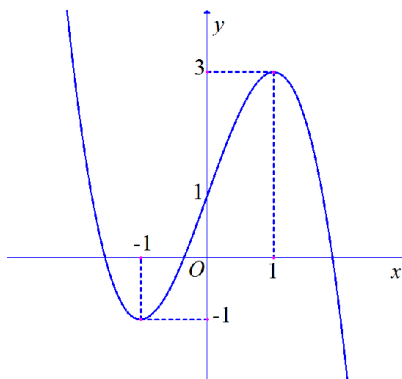
Xét hàm số $g(x) = f(x) - \ln(-x) - x^2$ trên $\left(-1; -\frac{1}{e}\right)$.

Ta có $g'(x) = f'(x) - \frac{1}{x} - 2x$. Với $x \in \left(-1; -\frac{1}{e}\right)$ thì $f'(x) > 0$; $-\frac{1}{x} - 2x > 0$ nên $g'(x) > 0$.

Do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left(-1; -\frac{1}{e}\right)$.

Suy ra (*) nghiệm đúng với mọi $x \in \left(-1; -\frac{1}{e}\right)$ khi và chỉ khi $m \geq g\left(-\frac{1}{e}\right) = f\left(-\frac{1}{e}\right) - \ln \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} = 3 - \frac{1}{e^2}$.

Câu 153. (Sở Hà Tĩnh - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(\cos x)) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$?

A. 2.

B. 4.

C. 5.

D. 3.

Lời giải.

Chọn B

Khi $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ thì $\cos x \in [-1; 0)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy khi $\cos x \in [-1; 0)$ thì $f(\cos x) \in [-1; 1)$; khi đó $f(f(\cos x)) \in [-1; 3)$.

Do đó phương trình $f(f(\cos x)) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi $-1 \leq m < 3$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 154. (Sở Hà Tĩnh - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn $|x^3 - 3x^2 + m| \leq 4$ với mọi $x \in [1; 3]$?

A. 6.

B. 3.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

$|x^3 - 3x^2 + m| \leq 4$ với mọi $x \in [1; 3] \Leftrightarrow -4 - m \leq x^3 - 3x^2 \leq 4 - m$ với mọi $x \in [1; 3]$.

Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	0	-2	-4	0	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên $-4 - m \leq x^3 - 3x^2 \leq 4 - m$ với mọi $x \in [1; 3]$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} -4 - m \leq -4 \\ 4 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq 4 \end{cases}$$

Vậy có 5 giá trị nguyên m .

Câu 155. (Sở Ninh Bình) Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ của tham số m để

đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt?

A. 4036.

B. 4040.

C. 4038.

D. 4034.

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = x + m$ và đường cong $y = \frac{2x-3}{x-1}$

$$x + m = \frac{2x-3}{x-1} \Leftrightarrow (x+m)(x-1) = 2x-3 \quad (x \neq 1).$$

$$\Leftrightarrow x^2 + mx - x - m = 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 + (m-3)x - m + 3 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Ta có } \Delta = (m-3)^2 - 4(-m+3) = m^2 - 6m + 9 + 4m - 12 = m^2 - 2m - 3.$$

Để đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt thì phương trình (*)

có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 1^2 + (m-3) \cdot 1 - m + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 3 > 0 \\ 1 \neq 0 \quad (\text{lđ}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 3 \end{cases}.$$

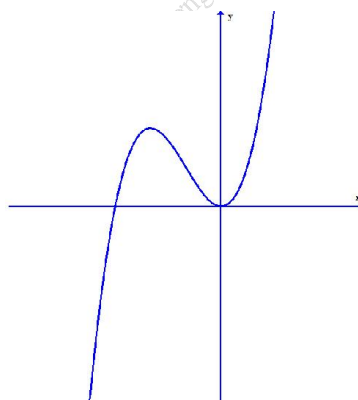
Theo giả thiết: $-2020 \leq m \leq 2020$ và $\begin{cases} m < -1 \\ m > 3 \end{cases}$ nên $\begin{cases} -2020 \leq m < -1 \\ 3 < m \leq 2020 \end{cases}.$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ và $-2020 \leq m < -1$, suy ra có $\frac{-2 - (-2020)}{1} + 1 = 2019$ giá trị nguyên m .

Vì $m \in \mathbb{Z}$ và $3 < m \leq 2020$, suy ra có $\frac{2020 - 4}{1} + 1 = 2017$ giá trị nguyên m .

Tóm lại có tất cả $2019 + 2017 = 4036$ giá trị nguyên của tham số m .

Câu 156. (Sở Ninh Bình) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(2|\sin x|) = f(m^2 + 6m + 10)$ có nghiệm?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Lời giải.

Chọn B

Từ đồ thị suy ra hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên nửa khoảng $[0; +\infty)$.

Do $2|\sin x| \geq 0; m^2 + 6m + 10 > 0$ nên $f(2|\sin x|) = f(m^2 + 6m + 10) \Leftrightarrow 2|\sin x| = m^2 + 6m + 10$.

Mà $0 \leq 2|\sin x| \leq 2$ nên yêu cầu bài toán tương đương

$$0 \leq m^2 + 6m + 10 \leq 2 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 8 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq -2.$$

Vậy có 3 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 157. (Sở Ninh Bình) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2m$. Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn E

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3mx^2 + 2m = 0$ (*)

Phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có ba nghiệm lập thành cấp số cộng $\longrightarrow$ phương trình có một nghiệm $x_0 = -\frac{b}{3a}$.

Suy ra phương trình (*) có một nghiệm $x = m$.

Thay $x = m$ vào phương trình (*), ta được $m^3 - 3m \cdot m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow -2m^3 + 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m = 0 \end{cases}$.

Thử lại:

● Với $m = 1$, ta được $x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{3} \\ x = 1 \\ x = 1 + \sqrt{3} \end{cases}$.

Do đó $m = 1$ thỏa mãn.

● Với $m = -1$, ta được $x^3 + 3x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + \sqrt{3} \\ x = -1 \\ x = -1 - \sqrt{3} \end{cases}$.

Do đó $m = -1$ thỏa mãn.

● Với $m = 0$, ta được $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Do đó $m = 0$ không thỏa mãn.

Vậy $m = \pm 1$ là hai giá trị cần tìm.

Câu 158. (Sở Ninh Bình) Cho hai hàm số $y = \ln \left| \frac{x-2}{x} \right|$ và $y = \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x} + 4m - 2020$, Tổng tất các các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hai hàm số cắt nhau tại một điểm duy nhất là

A. 506. B. 1011. C. 2020. D. 1010.

Lời giải

Chọn A

+ Phương trình hoành độ điểm chung của hai đồ thị hàm số là

$$\ln \left| \frac{x-2}{x} \right| = \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x} + 4m - 2020 \Leftrightarrow \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| - \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x} = 4m - 2020 \quad (*)$$

Đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại một điểm duy nhất khi và chỉ khi (*) có duy nhất một nghiệm.

$$+ \text{ Xét hàm số } y = \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| - \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x} = \begin{cases} g_1(x) = \ln(x-2) - \ln x - \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x} & \text{khi } x > 2 \\ g_2(x) = \ln(2-x) - \ln x - \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x} & \text{khi } 0 < x < 2 \\ g_3(x) = \ln(2-x) - \ln(-x) - \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

Ta có
$$\begin{cases} g_1'(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} + \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{4(x^2-1)}{x^2(x-2)^2} & \text{khi } x > 2 \\ g_2'(x) = \frac{-1}{2-x} - \frac{1}{x} + \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{4(x^2-1)}{x^2(x-2)^2} & \text{khi } 0 < x < 2, \text{ do vậy } y=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases} \\ g_3'(x) = \frac{-1}{2-x} - \frac{1}{x} + \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{4(x^2-1)}{x^2(x-2)^2} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

bảng biến thiên hàm số như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
y'	+	0	-	-	0	+
y	0	$\ln 3$	$+\infty$	4	$+\infty$	0

+ Qua bảng biến thiên này ta có (*) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 4m - 2020 = 4 \\ 4m - 2020 = \ln 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 506 \in \mathbb{Z} \\ m = \frac{2020 + \ln 3}{4} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

+ Từ đây yêu cầu bài toán xảy ra khi và chỉ khi $m = 506$.

Câu 159. (Sở Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	1	3	2	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ của phương trình $3f\left(\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}}\right) - 7 = 0$ là:

A. 6.

B. 3.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

$$\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}} = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$x \in \left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right] \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right] \Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \in [-1; 1]$$

$$3f\left(\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}}\right) - 7 = 0 \Leftrightarrow f\left(\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{7}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = a \in (-1; 0) \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = b \in (0; 1) \end{cases}$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = a \in (-1; 0) \text{ có 2 nghiệm.}$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = b \in (0; 1) \text{ có 3 nghiệm.}$$

Vậy phương trình có 5 nghiệm.

Câu 160. (Sở Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị đi qua điểm $A(1;1), B(2;4), C(3;9)$.

Các đường thẳng AB, AC, BC lại cắt đồ thị lần lượt tại các điểm M, N, P (M khác A và B , N khác A và C , P khác B và C). Biết rằng tổng các hoành độ của M, N, P bằng 5, giá trị của $f(0)$ là

A. -6.

B. -18.

C. 18.

D. 6.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thuyết bài toán ta giả sử $f(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) + x^2$ ($a \neq 0$)

Ta có: $AB: y = 3x - 2$, $AC: y = 4x - 3$, $BC: y = 5x - 6$.

Khi đó:

Hoành độ của M là nghiệm của phương trình:

$$a(x_M - 1)(x_M - 2)(x_M - 3) + x_M^2 = 3x_M - 2 \Leftrightarrow a(x_M - 1)(x_M - 2)(x_M - 3) + (x_M - 1)(x_M - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow a(x_M - 3) + 1 = 0 \Leftrightarrow x_M = 3 - \frac{1}{a}.$$

Hoành độ của N là nghiệm của phương trình:

$$a(x_N - 1)(x_N - 2)(x_N - 3) + x_N^2 = 4x_N - 3 \Leftrightarrow a(x_N - 1)(x_N - 2)(x_N - 3) + (x_N - 1)(x_N - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow a(x_N - 2) + 1 = 0 \Leftrightarrow x_N = 2 - \frac{1}{a}.$$

Hoành độ của P là nghiệm của phương trình:

$$a(x_P - 1)(x_P - 2)(x_P - 3) + x_P^2 = 5x_P - 6 \Leftrightarrow a(x_P - 1)(x_P - 2)(x_P - 3) + (x_P - 2)(x_P - 3) = 0$$

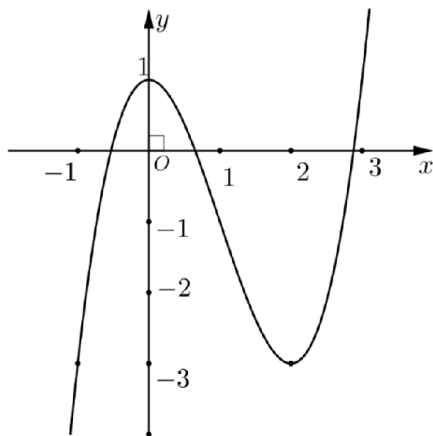
$$\Leftrightarrow a(x_P - 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow x_P = 1 - \frac{1}{a}.$$

$$\text{Từ giả thuyết ta có: } x_M + x_N + x_P = 5 \Leftrightarrow 6 - \frac{3}{a} = 5 \Leftrightarrow a = 3.$$

$$\text{Do đó: } f(x) = 3(x-1)(x-2)(x-3) + x^2$$

$$f(0) = -18.$$

Câu 161. (Sở Yên Bái - 2020) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x^3 - 3x^2 + m) + 3 = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $[-1; 2]$.



A. 7.

B. 8.

C. 10.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Từ hình vẽ, ta suy ra được hình vẽ là đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

$$f(x^3 - 3x^2 + m) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x^3 - 3x^2 + m) = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + m = -1 \\ x^3 - 3x^2 + m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 1 = -m \\ x^3 - 3x^2 + 1 = -m + 3 \end{cases}$$

$$\text{Để phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn } [-1; 2] \text{ thì } \begin{cases} -3 \leq -m \leq 1 \\ -3 \leq -m + 3 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \leq 3 \\ 2 \leq m \leq 6 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow m \in [-1; 6].$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên có 8 giá trị m để phương trình đã cho có nghiệm.

Câu 162. (Sở Yên Bái - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình

$$16.8^{f(x)} \leq (-m^2 + 5m).4^{f(x)} - ((4 - f^2(x)).16^{f(x)})$$

nghiệm đúng với mọi số thực x là

A. 3.

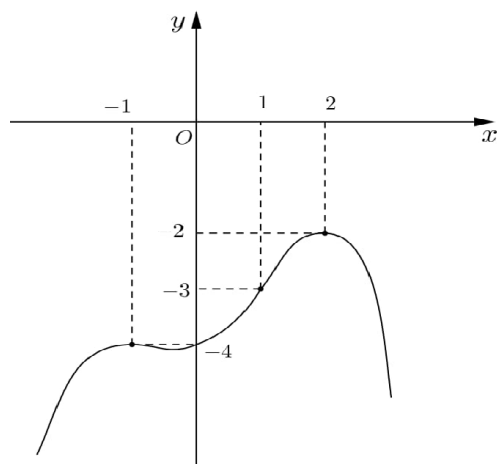
B. 5.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

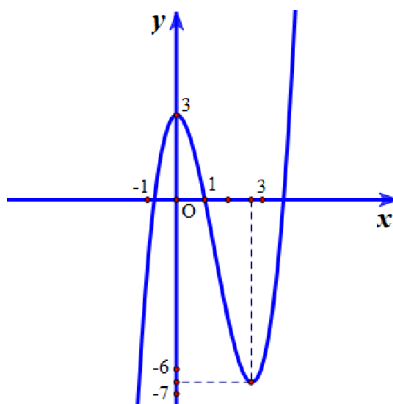


$$16.8^{f(x)} \leq (-m^2 + 5m).4^{f(x)} - ((4 - f^2(x)).16^{f(x)}) \Leftrightarrow -m^2 + 5m \geq 16.2^{f(x)} + (4 - f^2(x)).4^{f(x)}$$

$$\text{Vì nên ta có } 16.2^{f(x)} + (4 - f^2(x)).4^{f(x)} \leq 16.2^{-2} + 0 = 4 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow -m^2 + 5m \geq 4 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 4$$

Câu 163. (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Đặt $g(x) = f[f(x)]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.



A. 8.

B. 2.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } g'(x) = f'(x) \cdot f'[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'[f(x)] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = m \in (1; 3) \end{cases}.$$

Phương trình $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm

Phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm

Phương trình $f(x) = m \in (1; 3)$ có 3 nghiệm

Vậy phương trình có 8 nghiệm.

Câu 164. (Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	1	2	-2	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{9\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(2\sin x + 1) = 1$ là

A. 7.

B. 5.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } f(2\sin x + 1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x + 1 = -1 \\ 2\sin x + 1 = a \in (1; 3) \\ 2\sin x + 1 = b \in (3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 & (1) \\ \sin x = \frac{a-1}{2} \in (0; 1) & (2) \\ \sin x = \frac{b-1}{2} \in (1; +\infty) & (3) \end{cases}$$

(1) có 2 nghiệm trong $\left[0; \frac{9\pi}{2}\right]$.

(2) có 5 nghiệm trong $\left[0; \frac{9\pi}{2}\right]$.

(3) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm trong $\left[0; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Câu 165. (Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020) Cho hai hàm số $y = (x+1)(2x+1)(3x+1)(m+2|x|)$; $y = -12x^4 - 22x^3 - x^2 + 10x + 3$ có đồ thị lần lượt là (C_1) , (C_2) . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên đoạn $[-2020; 2020]$ để (C_1) cắt (C_2) tại 3 điểm phân biệt?

A. 4040.

B. 2020.

C. 2021.

D. 4041.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị (C_1) và (C_2) :

$$(x+1)(2x+1)(3x+1)(m+2|x|) = -12x^4 - 22x^3 - x^2 + 10x + 3 \quad (1)$$

Để đồ thị (C_1) cắt (C_2) tại 3 điểm phân biệt thì phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt.

Với $x \in \left\{-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right\}$: Không là nghiệm của phương trình (1).

Với $x \notin \left\{-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right\}$ ta có:

$$(1) \Leftrightarrow m = \frac{-12x^4 - 22x^3 - x^2 + 10x + 3}{(x+1)(2x+1)(3x+1)} - 2|x| \Leftrightarrow m = -2x - 2|x| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3x+1}.$$

Xét hàm số $f(x) = -2x - 2|x| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3x+1}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right\}$.

$$\text{Suy ra: } f'(x) = -2 - \frac{2x}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(2x+1)^2} - \frac{3}{(3x+1)^2}.$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = \begin{cases} -4 - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(2x+1)^2} - \frac{3}{(3x+1)^2} & \text{khi } x \in (0; +\infty) \\ -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(2x+1)^2} - \frac{3}{(3x+1)^2} & \text{khi } x \in (-\infty; 0) \setminus \left\{-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right\} \end{cases} \text{ và } f'(x) \text{ không xác}$$

định tại $x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$- \parallel$	$- \parallel$	$- \parallel$	$- \parallel$	
$f(x)$	$0 \rightarrow$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt thì $m \geq 0$. Do đó có 2021 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 166. (Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020) Tìm giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ cắt đường thẳng $d: y = m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 5$.

A. $m \geq -3$.

B. $m \geq -2$

C. $m > -3$.

D. $m > -2$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 - 3x^2 + 2 = m(x-1) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - mx + m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - m - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ g(x) = x^2 - 2x - (m+2) = 0 (*) \end{cases}$$

Để hai đồ thị cắt nhau tại ba điểm phân biệt thì phương trình (*) phải có hai nghiệm phân biệt khác

$$1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1^2 + (m+2) > 0 \\ 1 - 2 - m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow m > -3.$$

Gọi x_2, x_3 là hai nghiệm phương trình (*).

$$\text{Theo định lý Viét ta có } \begin{cases} x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 \cdot x_3 = -(m+2) \end{cases}$$

$$\text{Theo bài ta có } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 5 \Leftrightarrow 1 + x_2^2 + x_3^2 > 5 \Leftrightarrow x_2^2 + x_3^2 > 4$$

$$\Leftrightarrow (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 > 4 \Leftrightarrow 4 + 2(m+2) > 4 \Leftrightarrow m > -2.$$

So sánh với điều kiện ở trên suy ra $m > -2$.

Kết luận: $m > -2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 167. (Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $m + e^x < f(x)$ có nghiệm với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi.

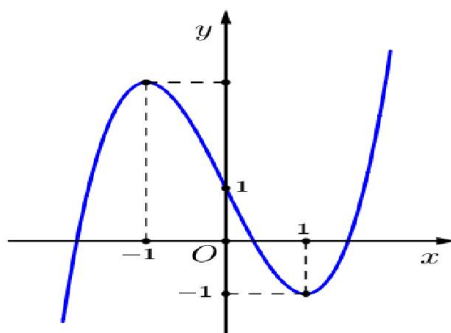
A. $m \leq \min \left\{ f(1) - e; f(-1) - \frac{1}{e} \right\}.$

B. $m < f(0) - 1.$

C. $m < \min \left\{ f(1) - e; f(-1) - \frac{1}{e} \right\}.$

D. $m \leq f(0) - 1.$

Lời giải



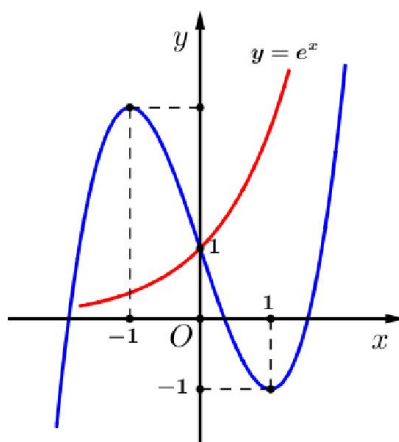
Chọn A

Ta có: $m + e^x < f(x) \Leftrightarrow m < f(x) - e^x$

Xét hàm số $g(x) = f(x) - e^x$ với $x \in (-1; 1)$

$$g'(x) = f'(x) - e^x; g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - e^x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = e^x$$

Để thấy với $x \in (-1; 1); f'(0) = 1; e^0 = 1 \Rightarrow x = 0$ là nghiệm của phương trình $f'(x) = e^x$ hơn nữa là nghiệm duy nhất (Minh họa bằng hình vẽ)



Dựa vào vị trí đồ thị hình vẽ trên ta có bảng biến thiên

x	-1	0	1
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$g(-1)$	$g(0)$	$g(1)$

Qua bảng biến thiên và chỉ xét trong khoảng $(-1; 1)$

$$m < g(x) \Leftrightarrow m \leq \min \{ g(-1); g(1) \} \Leftrightarrow m \leq \min \left\{ f(1) - e; f(-1) - \frac{1}{e} \right\}.$$

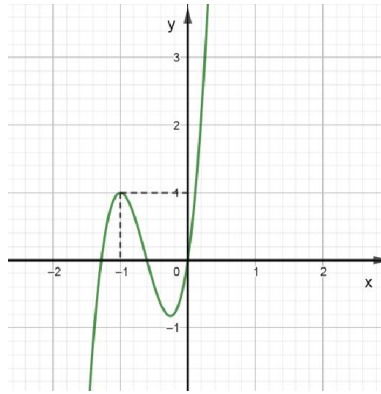
Câu 168. (Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $f\left(f\left(\sqrt{f(x)}\right) + f(x) + 2\sqrt{f(x)}\right) - f(1) = 0$ là

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.



Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \sqrt{f(x)}$, $t \geq 0$.

Ta có: $f(f(t) + t^2 + 2t) - f(1) = 0$ (*).

Xét $t = 0$: (*) $\Leftrightarrow f(0) - f(1) = 0$ (không thỏa).

Xét $t > 0$: Ta có $f(t) > 0$ và $f(t) + t^2 + 2t > 0$

Theo đồ thị, hàm $f(u)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

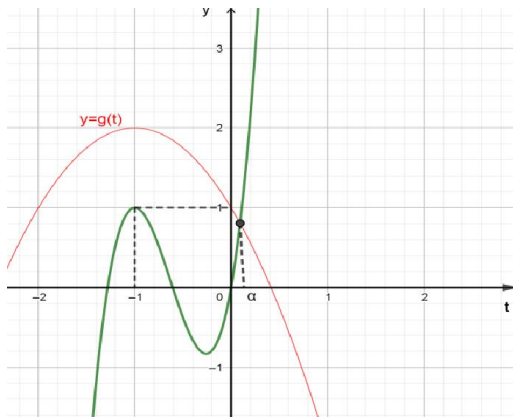
Do đó, (*) $\Leftrightarrow f(f(t) + t^2 + 2t) = f(1) \Leftrightarrow f(t) + t^2 + 2t = 1$

$$\Leftrightarrow f(t) = 1 - t^2 - 2t$$

$$\Leftrightarrow f(t) = g(t) \text{ (**)} \text{ (với } g(t) = 1 - t^2 - 2t, t > 0 \text{)}$$

Vì hàm $f(t)$ đồng biến và $g(t)$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$ nên phương trình (**) có nghiệm duy nhất $t = \alpha$

Theo đồ thị hàm $f(t), g(t)$ ta có $\alpha \in (0; 1)$.



Khi đó, $t = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha^2$, $\alpha^2 \in (0; 1)$ (***)

Vì đồ thị hàm $f(x)$ cắt đường thẳng $y = \alpha^2$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình (***) có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 169. (Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số $y = \frac{(x^2 - 2x + m)^2 - 3x - m}{x - 3}$ (C) và đường thẳng

(d): $y = 2x$ (m là tham số thực).

Số giá trị nguyên của $m \in [-15; 15]$ để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt là

A. 15.**B. 30.****C. 16.****D. 17.****Lời giải****Chọn A**

Xét pt hoành độ giao điểm của hai đồ thị:

$$\frac{(x^2 - 2x + m)^2 - 3x - m}{x - 3} = 2x \Leftrightarrow (x^2 - 2x + m)^2 - 3x - m = 2x^2 - 6x \quad (x \neq 3)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + m)^2 = 2x^2 - 3x + m \quad (x \neq 3) \quad (*)$$

$$\text{Đặt: } x^2 - 2x + m = t \text{ ta được hệ: } \begin{cases} x^2 - 2x + m = t \\ t^2 = 2x^2 - 3x + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - t + m = 0 \\ 2x^2 - t^2 - 3x + m = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 - t^2 - x + t = 0 \Rightarrow (x - t)(x + t - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = x \\ t = 1 - x \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} x^2 - 2x + m = x \\ x^2 - 2x + m = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + m = 0 \quad (1) \\ x^2 - x + m - 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

YCBT $\Leftrightarrow (*)$ phải có 4 nghiệm phân biệt khác 3 $\Leftrightarrow (1), (2)$ đều phải có hai nghiệm pb khác 3 và các nghiệm của chúng không trùng nhau.

$$-(1), (2) \text{ đều có hai nghiệm pb khác 3 khi: } \begin{cases} 9 - 4m > 0 \\ 3^3 - 3 \cdot 3 + m \neq 0 \\ 1 - 4(m - 1) > 0 \\ 3^2 - 3 + m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{4} \\ m \neq 0 \\ m < \frac{5}{4} \\ m \neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1,25 \\ m \neq 0 \\ m \neq -5 \end{cases} \quad (**)$$

$$-(1), (2) \text{ không có nghiệm trùng nhau} \Leftrightarrow \text{Hệ: } \begin{cases} x^2 - 3x + m = 0 \\ x^2 - x + m - 1 = 0 \end{cases} \text{ Vô nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ x^2 - 3x + m = 0 \end{cases} \text{ Vô nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x^2 - 3x + m = 0 \end{cases} \text{ Vô nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + m \neq 0$$

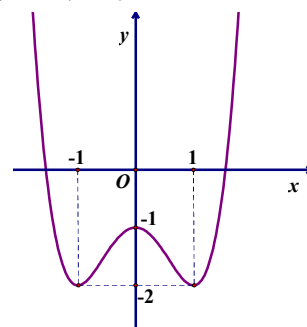
$$\Leftrightarrow m \neq \frac{5}{4} \quad (***)$$

Vậy số giá trị nguyên của $m \in [-15; 15]$ đồng thời thỏa mãn $(**)$ và $(***)$ là 15.

Câu 170. (Lê Lai - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ của phương trình

$$3f(\cos x) + 5 = 0 \text{ là}$$

A. 4.**B. 7.**

C. 6.

D. 8.

Lời giải

Chọn B

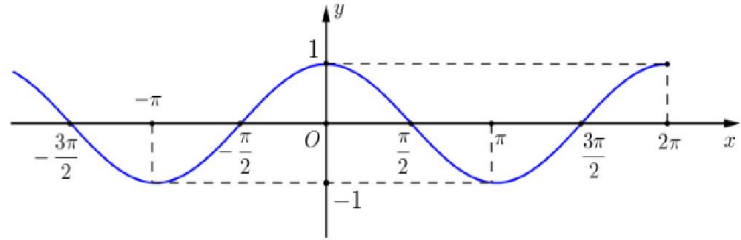
$$\text{Ta có } 3f(\cos x) + 5 = 0 \Leftrightarrow f(\cos x) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = a \in (-2; -1) \\ \cos x = b \in (-1; 0) \\ \cos x = c \in (0; 1) \\ \cos x = d \in (1; 2) \end{cases}$$

Vì $\cos x \in [-1; 1]$ nên $\cos x = a \in (-2; -1)$ và $\cos x = d \in (1; 2)$ vô nghiệm.

Xét đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$

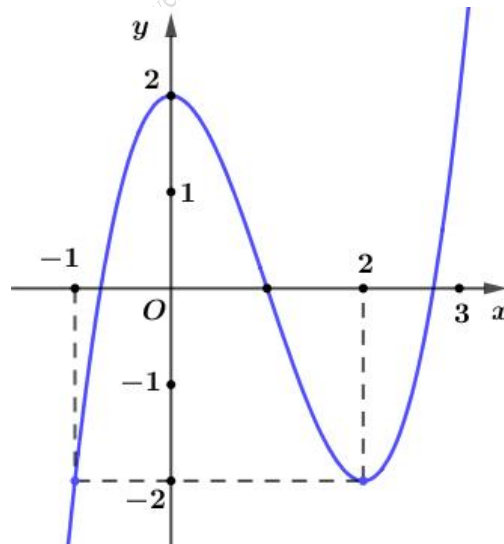
Phương trình $\cos x = b \in (-1; 0)$ có 4 nghiệm phân biệt.

Phương trình $\cos x = c \in (0; 1)$ có 3 nghiệm phân biệt, không trùng với nghiệm nào của phương trình $\cos x = b \in (-1; 0)$.



Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Câu 171. (Liên trường Nghệ An - 2020) Cho hàm số $f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn. Biết $f(0) = 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có hình vẽ bên dưới.



Tập nghiệm của phương trình $f(|2\sin x - 1| - 1) = m$ (với m là tham số) trên đoạn $[0; 3\pi]$ có tất cả bao nhiêu phân tử?

A. 8.

B. 20.

C. 12.

D. 16.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị đã cho là đồ thị hàm số bậc ba có hai điểm cực trị $x=0$ và $x=2$ nên có dạng

$$f'(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Lần lượt thay thế các dữ kiện từ hình vẽ, ta được

$$\begin{cases} d=2 \\ c=0 \\ 3 \cdot a \cdot 2^2 + 2 \cdot b \cdot 2 = 0 \\ -a^3 + b + d = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=0 \\ d=2 \end{cases}.$$

Suy ra $f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + 2x + C.$

Mà $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + 2x.$

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=1-\sqrt{3} \\ x=1+\sqrt{3} \end{cases}.$

Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$	$1-\sqrt{3}$	1	$1+\sqrt{3}$	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		$\frac{5}{4}$		$+\infty$	
		-1		-1		

Từ đó ta có bảng biến thiên của $f(x-1)$

x	$-\infty$	$2-\sqrt{3}$	2	$2+\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x-1)$		$-$	0	$+$	
$f(x-1)$	$+\infty$	-1	$\frac{5}{4}$	-1	$+\infty$

Vì $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in [0; 3\pi]$ nên $0 \leq |2 \sin x - 1| \leq 3.$

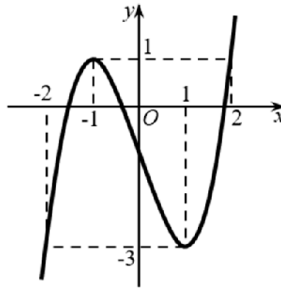
Đặt $t = |2 \sin x - 1|, t \in [0; 3]$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra phương trình $f(t-1) = m$ có tối đa 2 nghiệm $t = h, t = k.$

$$\text{Do đó } \begin{cases} 2 \sin x - 1 = \pm h \\ 2 \sin x - 1 = \pm k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\pm h + 1}{2} \\ \sin x = \frac{\pm k + 1}{2} \end{cases}$$

Trên $[0; 3\pi]$, mỗi phương trình có nhiều nhất 4 nghiệm, do đó phương trình đã cho có nhiều nhất 16 nghiệm.

Câu 172. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(f(x) - 1) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 6.

B. 5.

C. 7.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

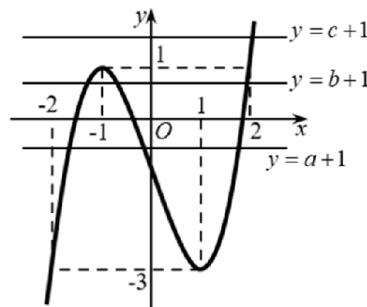
$$\text{Từ đồ thị của hàm số } y = f(x) \text{ suy ra } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (-2; -1) \\ x = b \in (-1; 0) \\ x = c \in (1; 2) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } f(f(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - 1 = a \\ f(x) - 1 = b \\ f(x) - 1 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a + 1 \\ f(x) = b + 1 \\ f(x) = c + 1 \end{cases}$$

+ Do $a \in (-2; -1) \Rightarrow a + 1 \in (-1; 0) \Rightarrow$ Phương trình $f(x) = a + 1$ có 3 nghiệm phân biệt.

+ Do $b \in (-1; 0) \Rightarrow b + 1 \in (0; 1) \Rightarrow$ Phương trình $f(x) = b + 1$ có 3 nghiệm phân biệt.

+ Do $c \in (1; 2) \Rightarrow c + 1 \in (2; 3) \Rightarrow$ Phương trình $f(x) = c + 1$ có 1 nghiệm.



Vậy phương trình $f(f(x) - 1) = 0$ có $3 + 3 + 1 = 7$ nghiệm.

Câu 173. (Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$						$-\infty$

$\swarrow$ 2020 $\searrow$
 $-\infty$ 2020 $-\infty$

Số nghiệm của phương trình $|f(x + 2019) - 2020| = 2021$ là

A. 4.

B. 6.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có :

$$|f(x + 2019) - 2020| = 2021 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x + 2019) - 2020 = -2021 \\ f(x + 2019) - 2020 = 2021 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x + 2019) = -1 \\ f(x + 2019) = 4041 \end{cases}$$

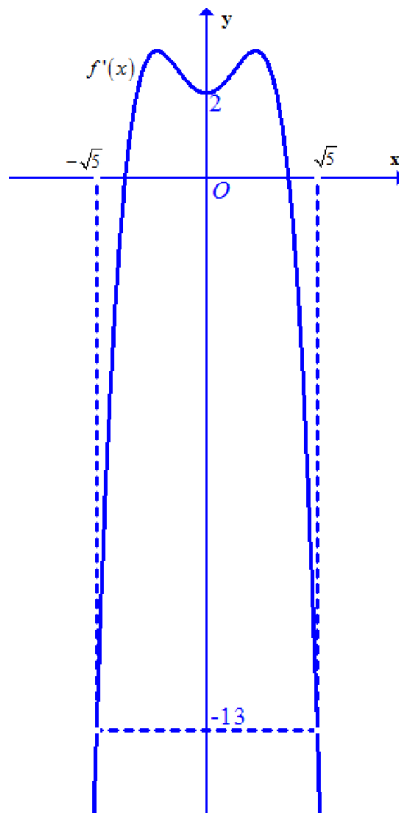
Từ bảng biến thiên suy ra:

+) Phương trình: $f(x + 2019) = -1$ có 3 nghiệm.

+) Phương trình: $f(x + 2019) = 4041$ có 1 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Câu 174. (Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = 2f(x) + 2x^3 - 4x - 3m - 6\sqrt{5}$ với m là số thực. Để $g(x) \leq 0, \forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ thì điều kiện của m là



A. $m \geq \frac{2}{3}f(-\sqrt{5}) - 4\sqrt{5}$.

B. $m \leq \frac{2}{3}f(\sqrt{5})$.

C. $m \leq \frac{2}{3}f(0) - 2\sqrt{5}$. D. $m \geq \frac{2}{3}f(\sqrt{5})$.

Lời giải

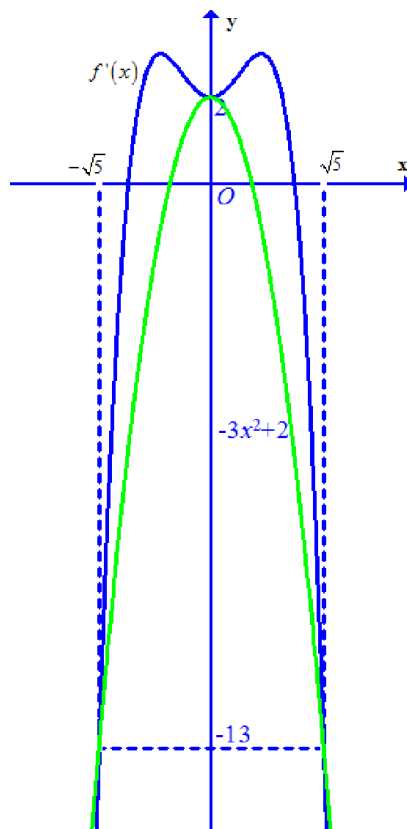
Chọn D

Ta có $g(x) \leq 0 \Leftrightarrow 2f(x) + 2x^3 - 4x \leq 3m + 6\sqrt{5}$.

Đặt $h(x) = 2f(x) + 2x^3 - 4x$ thì bất phương trình $g(x) \leq 0 \Leftrightarrow h(x) \leq 3m + 6\sqrt{5}$

$$h'(x) = 2f'(x) + 2 \cdot 3x^2 - 4 = 2(f'(x) - (-3x^2 + 2)).$$

Vẽ đồ thị hàm số $y = -3x^2 + 2$ trên cùng hệ trục tọa độ với hàm số $y = f'(x)$.



Ta thấy $f'(x) \geq -3x^2 + 2 \forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ nên $h'(x) \geq 0, \forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$.

Suy ra $h(x) \leq h(\sqrt{5}), \forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ hay $\max_{[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]} h(x) = h(\sqrt{5}) = 2f(\sqrt{5}) + 6\sqrt{5}$

Do đó $h(x) \leq 3m + 6\sqrt{5}, \forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}] \Leftrightarrow \max_{[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]} h(x) \leq 3m + 6\sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow 2f(\sqrt{5}) + 6\sqrt{5} \leq 3m + 6\sqrt{5} \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{3}f(\sqrt{5})$$

Câu 175. (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(f(x) - 1)$. Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là

A. 6.

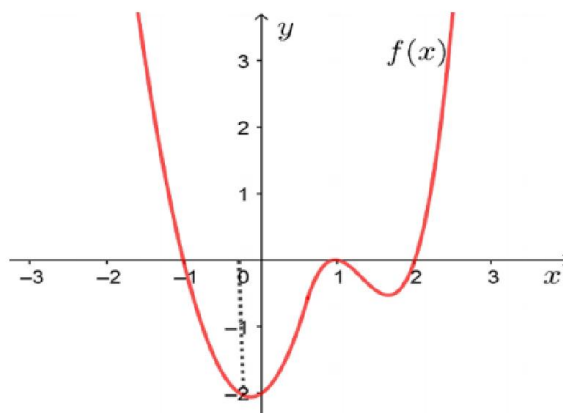
B. 10.

C. 9.

D. 8.

Lời giải

Chọn C



Ta có $g'(x) = f'(x) \cdot f'(f(x) - 1)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) \cdot f'(f(x)-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f(x)-1) = 0 \end{cases}$$

$$+) f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a_1 (a_1 \in (-1; 0)) \\ x = 1 \\ x = a_2 (a_2 \in (1; 2)) \end{cases}$$

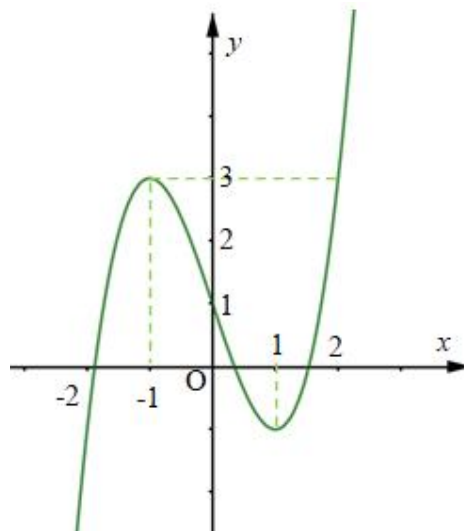
$$+) f'(f(x)-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)-1 = a_1 \\ f(x)-1 = 1 \\ f(x)-1 = a_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a_1 + 1 \in (0; 1) & (1) \\ f(x) = 2 & (2) \\ f(x) = a_2 + 1 \in (2; 3) & (3) \end{cases}$$

Từ đồ thị suy ra

- ☐ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $b_1 \in (-2; -1); b_2 \in (2; 3)$
- ☐ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $c_1 \in (-2; b_1); c_2 \in (b_2; 3)$
- ☐ phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt $d_1 \in (-2; c_1); d_2 \in (c_2; 3)$

Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm phân biệt.

Câu 176. (Tiên Du - Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{7\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(f(\cos x)) = 0$ là

A. 7.

B. 5.

C. 8.

D. 6.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(\cos x) = t$ ta được phương trình $f(t) = 0$.

$$\text{Quan sát đồ thị } y = f(x) \text{ ta suy ra } f(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = t_1 \in (-2; -1) \\ t = t_2 \in (0; 1) \\ t = t_3 \in (1; 2) \end{cases}$$

* Với $t = t_1$ ta có $f(\cos x) = t_1$. Xét tương giao giữa hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = t_1 \in (-2; -1) \Rightarrow f(\cos x) = t_1 \Leftrightarrow \cos x = x_1 < -1$ nên phương trình vô nghiệm.

* Với $t = t_2$ ta có $f(\cos x) = t_2$. Xét tương giao giữa hai đồ thị $y = f(x)$ và

$$y = t_2 \in (0;1) \Rightarrow f(\cos x) = t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = x_2 < -1 \\ \cos x = x_3 \in (0;1). \\ \cos x = x_4 \in (1;2) \end{cases}$$

Chỉ có $\cos x = x_3$ thỏa mãn. Khi đó tồn tại 3 giá trị $x \in \left[0; \frac{7\pi}{2}\right]$ tương ứng để $\cos x = x_3$.

* Với $t = t_3$ tương tự ta có $\begin{cases} \cos x = x_5 < -1 \\ \cos x = x_6 \in (-1;0). \\ \cos x = x_7 > 1 \end{cases}$

Chỉ có $\cos x = x_6$ thỏa mãn. Khi đó tồn tại 2 giá trị $x \in \left[0; \frac{7\pi}{2}\right]$ tương ứng để $\cos x = x_6$.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Câu 177. (Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020) Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 2m + 1$ và trục

Ox có đúng hai điểm chung phân biệt. Tính tổng T của các phần tử thuộc tập S

A. $T = -10$.

B. $T = 10$.

C. $T = -12$.

D. $T = 12$.

Lời giải

Chọn C

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 2m + 1$ và trục Ox là nghiệm của phương trình: $x^3 + 3x^2 - 9x + 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow -x^3 - 3x^2 + 9x = 2m + 1$.

Xét hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = -3x^2 - 6x + 9, f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$ 0	$+$ 0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ -27	$\nearrow$ 5	$\searrow$ $-\infty$

Đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 2m + 1$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = 2m + 1$ cắt đồ thị hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x$ tại hai điểm phân biệt.

$$\text{Từ bảng biến thiên suy ra: } \begin{cases} 2m + 1 = 5 \\ 2m + 1 = -27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -14 \end{cases} \Rightarrow S = \{-14; 2\}.$$

Tổng của các phần tử thuộc tập S là: $T = -14 + 2 = -12$.

Câu 178. (Kim Thành - Hải Dương - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	3	18	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-	0
$f'(x)$	$-\infty$	5	0	$+\infty$

Bất phương trình $e^{\sqrt{x}} \geq m - f(x)$ có nghiệm $x \in [4; 16]$ khi và chỉ khi:

- A. $m < f(4) + e^2$. B. $m \leq f(4) + e^2$. C. $m < f(16) + e^2$. D. $m \leq f(16) + e^2$.

Lời giải

Chọn B

Từ BBT suy ra $f'(x) > 0, \forall x \in [4; 16]$. Ta có: $e^{\sqrt{x}} \geq m - f(x) \Leftrightarrow m \leq e^{\sqrt{x}} + f(x)$ (*).

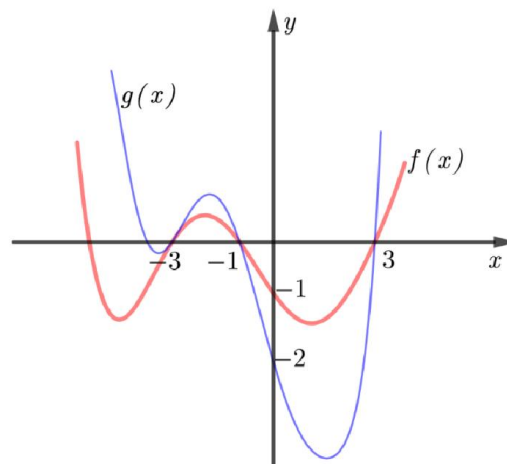
Đặt $g(x) = e^{\sqrt{x}} + f(x), \forall x \in [4; 16] \Rightarrow g'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} + f'(x) > 0, \forall x \in [4; 16]$

Bảng biến thiên:

x	4	16
$g'(x)$		+
$g(x)$	$f(4) + e^2$	$f(16) + e^4$

(*) thỏa mãn khi $m \leq \min_{[4; 16]} g(x) = f(4) + e^2$.

Câu 179. (Kim Thành - Hải Dương - 2020) Cho hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây đường đậm hơn là đồ thị hàm số $y = f(x)$. Biết rằng hai đồ thị tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ là -3 và cắt nhau tại hai điểm nữa có hoành độ lần lượt là -1 và 3 . Tìm tập hợp tất các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f(x) \geq g(x) + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-3; 3]$.



- A. $\left(-\infty; \frac{12-10\sqrt{3}}{9}\right]$. B. $\left[\frac{12-8\sqrt{3}}{9}; +\infty\right)$. C. $\left[\frac{12-10\sqrt{3}}{9}; +\infty\right)$. D. $\left(-\infty; \frac{12-8\sqrt{3}}{9}\right]$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$.

Vì đồ thị hàm số $f(x)$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $g(x)$ tại điểm có hoành độ -3 và cắt nhau tại hai điểm nữa có hoành độ lần lượt là -1 và 3 suy ra $h(x) = f(x) - g(x) = a(x+3)^2(x+1)(x-3)$.

Nhận xét từ đồ thị khi $x \rightarrow \pm\infty$ thì phần đồ thị $f(x)$ nằm dưới $g(x)$ nên $a < 0$.

Mặt khác ta có $h(0) = 27a = -2 - (-1) = -1 \Rightarrow a = \frac{-1}{27}$

Xét hàm $y = h(x) = \frac{-1}{27}(x+3)^2(x+1)(x-3) = \frac{-1}{27}(x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 36x - 27)$.

Ta có $y' = h'(x) = \frac{-1}{27}(4x^3 + 12x^2 - 12x - 36) = \frac{-1}{27}(x+3)(4x^2 - 12)$.

Suy ra $y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x		-3		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		3
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$								
		</						

Vậy tập hợp tất các giá trị thực của tham số m để bất phương trình

$$f(x) \geq g(x) + m \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq m \text{ nghiệm đúng với mọi } x \in [-3; 3] \text{ là } m \leq \frac{12-8\sqrt{3}}{9}.$$

Câu 180. (Kim Thành - Hải Dương - 2020) Cho hàm số $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt[3]{f(x)+m}) = x^3 - m$ có nghiệm thuộc đoạn $[1; 2]$?

A. 18.

B. 17.

C. 15.

D. 16.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $f(\sqrt[3]{f(x)+m}) = x^3 - m$ (1)

Đặt $t = \sqrt[3]{f(x)+m}$. Ta có $\begin{cases} f(t) = x^3 - m \\ f(x) = t^3 - m \end{cases} \Rightarrow f(t) + t^3 = f(x) + x^3$ (2)

Xét hàm số $g(u) = f(u) + u^3 \Rightarrow g'(u) = f'(u) + 3u^2 = 5u^4 + 12u^2 \geq 0, \forall u$.

Khi đó (2) $\Leftrightarrow g(t) = g(x) \Leftrightarrow t = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{f(x)+m} = x \Leftrightarrow x^3 - f(x) = m \Leftrightarrow x^5 + 2x^3 = 3m$

Xét hàm số $h(x) = x^5 + 2x^3 \Rightarrow h'(x) = 5x^4 + 6x^2 \geq 0, \forall x$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$:

x	$-\infty$	0	1	2
$h'(x)$		+	0	+
$h(x)$				
	$-\infty$		3	48

Từ bảng biến thiên suy ra để (1) có nghiệm thuộc đoạn $[1; 2] \Leftrightarrow 3 \leq 3m \leq 48 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 16$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; \dots; 16\}$ suy ra có 16 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 181. (Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020) Cho hàm số $y = \frac{2x - m^2}{x + 1}$ có đồ thị (C_m) , trong đó m là tham số thực. Đường thẳng $d: y = m - x$ cắt (C_m) tại hai điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ với $x_A < x_B$; đường thẳng $d': y = 2 - m - x$ cắt (C_m) tại hai điểm $C(x_C; y_C), D(x_D; y_D)$ với $x_C < x_D$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để $x_A \cdot x_D = -3$. Số phần tử của tập S là

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Hoành độ điểm A và B là nghiệm phương trình: $2x - m^2 = (x + 1)(m - x)$

$$\Leftrightarrow x^2 + (3 - m)x - m^2 - m = 0 \text{ suy ra } x_A \cdot x_B = -m^2 - m; x_A + x_B = m - 3$$

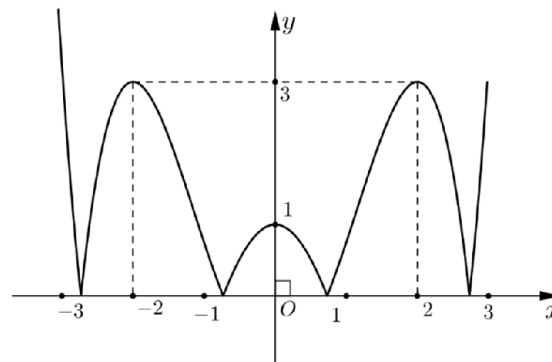
Hoành độ điểm C và D là nghiệm phương trình: $2x - m^2 = (x + 1)(2 - m - x)$

$$\Leftrightarrow x^2 + (m + 1)x - m^2 + m - 2 = 0 \text{ suy ra } x_C \cdot x_D = -m^2 + m - 2; x_C + x_D = -m - 1$$

Mặt khác x_A và x_D là nghiệm của phương trình: $x^2 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -3 \\ x_D = 1 \end{cases}$. Suy ra

$$m^2 + 6m + 9 = 5m^2 - 2m + 9 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

Câu 182. (Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số nghiệm thuộc đoạn $[2017\pi; 2020\pi]$ của phương trình $3f(2\cos x) = 8$.



A. 8.

B. 3.

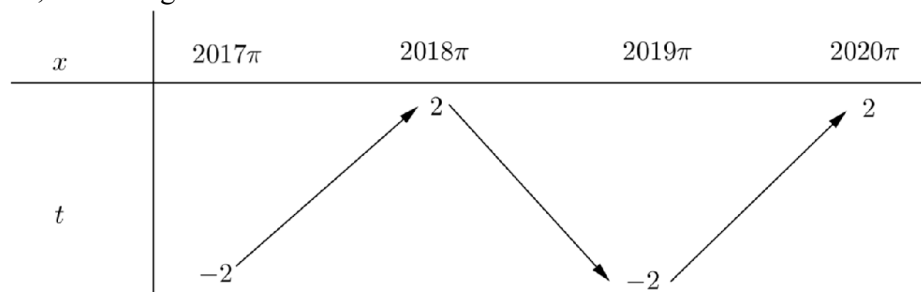
C. 4.

D. 6.

Lời giải

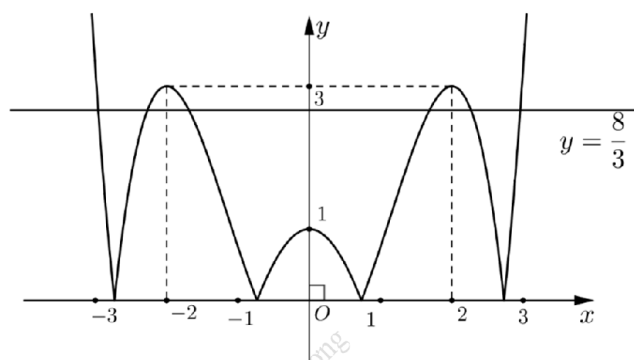
Chọn D

Đặt $t = 2 \cos x$, ta có bảng biến thiên của t như sau



Khi đó $3f(2 \cos x) = 8 \Leftrightarrow f(t) = \frac{8}{3}$.

Vẽ thêm đường thẳng $y = \frac{8}{3}$ trên đồ thị $y = f(x)$ đã cho.



Xét trên đoạn $[-2; 2]$, đường thẳng $y = \frac{8}{3}$ cắt đồ thị hàm số $f(t)$ tại hai điểm $t_1 \in (-2; -1)$ và $t_2 \in (1; 2)$.

Từ bảng biến thiên của t , ứng với giá trị t_1 , ta tìm được 3 nghiệm x thỏa $2 \cos x = t_1$, tương tự, ta cũng tìm được 3 nghiệm x thỏa $2 \cos x = t_2$.

Vậy phương trình $3f(2 \cos x) = 8$ có 6 nghiệm x thuộc đoạn $[2017\pi; 2020\pi]$

Câu 183. (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020) Cho hai hàm số $y = x^6 + 6x^4 + 6x^2 + 1$ và $y = x^3 \sqrt{m-15x} (m+3-15x)$ có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt. Số phần tử của tập hợp S bằng

A. 2006.

B. 2005.

C. 2007.

D. 2008.

Lời giải

Chọn A

Ta biết (C_1) cắt (C_2) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình

$$x^6 + 6x^4 + 6x^2 + 1 = x^3 \sqrt{m-15x} (m+3-15x) \quad (1) \text{ có hai nghiệm phân biệt.}$$

Điều kiện: $m-15x \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 15x$ (*).

Nếu $x = 0$ thì phương trình (1) vô nghiệm. Suy ra $x \neq 0$.

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 6x + \frac{1}{x^3} = \sqrt{m-15x} (m+3-15x)$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = (\sqrt{m-15x})^3 + 3\sqrt{m-15x}.$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t$. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số $f(t) = t^3 + 3t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = \sqrt{m-15x}$ (2).

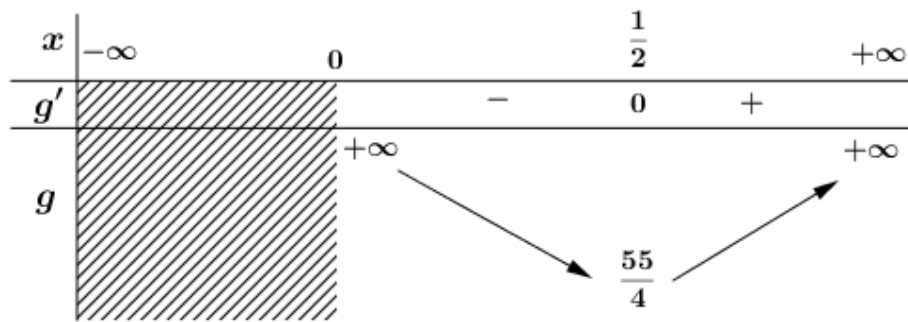
Nếu $x < 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} < 0 \Rightarrow$ Phương trình (2) vô nghiệm $\Rightarrow x > 0$.

Khi đó $\begin{cases} m > 0 \\ x + \frac{1}{x} > 0 \end{cases}$ nên (2) $\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = m - 15x \Leftrightarrow m = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 + 15x$.

Đặt $g(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 + 15x, x > 0$. $g'(x) = 2x - \frac{2}{x^3} + 15$.

Phương trình $g'(x) = 0$ có một nghiệm $x = \frac{1}{2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Bảng biến thiên



Suy ra (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m > \frac{55}{4}$ (thỏa $m > 0$).

Kết hợp với m nguyên và $m \in [-2019; 2019]$ ta có được m nguyên và $m \in [14; 2019]$.

Khi đó S có $2019 - 14 + 1 = 2006$ phần tử.

Câu 184. (Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-4	2	4	2	$+\infty$

Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x) + (3-m)f(\cos x) + 2m - 10 = 0$ có đúng

4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]$ là

A. 5.

B. 6.

C. 7.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Xét $f^2(\cos x) + (3-m)f(\cos x) + 2m - 10 = 0$. Ta có $\Delta = (m-7)^2$.

Do đó
$$\begin{cases} f(\cos x) = m-5 & (1) \\ f(\cos x) = 2 & (2) \end{cases}$$

Với $f(\cos x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = a < -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = 1 \end{cases}$.

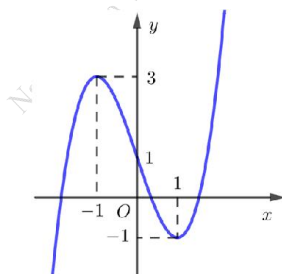
Trường hợp này được 3 nghiệm trong $\left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.

Để phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]$ thì (1) có đúng 1 nghiệm trong $\left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]$ và không trùng với nghiệm của các phương trình $\cos x = \frac{1}{2}; \cos x = 1$

$\Leftrightarrow f(t) = m-5$ với $t = \cos x$ có đúng 1 nghiệm trong $\left[-1; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow -4 \leq m-5 < 2 \Leftrightarrow 1 \leq m < 7$.

Do m nguyên nên có 6 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 185. (Trần Phú - Quảng Ninh - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $y = f(\sin x) = 3 \sin x + m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$. Tổng các phần tử của S bằng



A. -5.

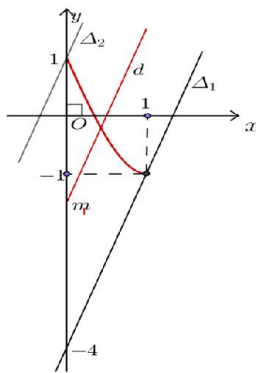
B. -8.

C. -6.

D. -10.

Lời giải

Chọn D



Đặt $t = \sin x$, $x \in (0; \pi) \Leftrightarrow t \in (0; 1]$.

Phương trình $f(\sin x) = 3\sin x + m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = 3t + m$ có nghiệm thuộc $(0; 1]$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $d: y = 3x + m$ có điểm chung với hoành độ $x \in (0; 1]$.

$\Delta_1: y = 3x - 4$ là đường thẳng qua điểm $(1; -1)$ và $\Delta_2: y = 3x + 1$ là đường thẳng qua điểm $(0; 1)$

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên $(0; 1]$ là phần đường cong nằm giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 .

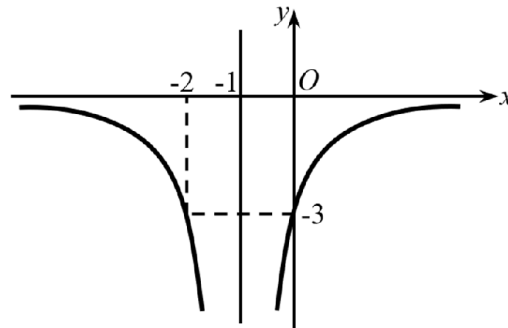
Vậy phương trình $f(t) = 3t + m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $(0; 1]$ khi và chỉ khi d dao động trong miền giới hạn bởi Δ_1 và Δ_2 (không trùng với Δ_2) khi và chỉ

khi $-4 \leq m < 1 \Leftrightarrow m \in \{-4; -3; -2; -1; 0\}$.

Vậy tổng các giá trị của S bằng -10 .

PHẦN 7. TIẾP TUYẾN

Câu 186. (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ (với $a, b, c, d \in \mathbb{R}, c \neq 0, d \neq 0$) có đồ thị là (C) . Biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới



Biết đồ thị (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2. Tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành có phương trình là

A. $x - 3y - 2 = 0$. **B.** $x - 3y + 2 = 0$. **C.** $x + 3y - 2 = 0$. **D.** $x + 3y + 2 = 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$.

Đồ thị (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 nên $f(0) = 2 \Rightarrow \frac{b}{d} = 2$.

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có:

+ Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$ nên $-\frac{d}{c} = -1 \Leftrightarrow \frac{d}{c} = 1$.

+ Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ đi qua điểm $(-2; -3)$ nên $f'(-2) = -3 \Rightarrow -3 = \frac{ad - bc}{(-2c + d)^2}$.

+ Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục tung tại điểm $(0; -3)$ nên $f'(0) = -3 \Rightarrow -3 = \frac{ad - bc}{d^2}$.

Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} b = 2d = 2c \\ \frac{ad - bc}{(d - 2c)^2} = -3 \\ \frac{ad - bc}{d^2} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2c = 2d = 2t \ (t \neq 0) \\ \frac{at - 2t \cdot t}{(t - 2t)^2} = -3 \\ \frac{at - 2t \cdot t}{t^2} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2c = 2d = 2t \\ at - 2t^2 = -3t^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2c = 2d = 2t \\ a = -t \end{cases}.$$

Suy ra $y = f(x) = \frac{-tx + 2t}{tx + t} = \frac{-x + 2}{x + 1}$ và $y' = f'(x) = \frac{-3}{(x + 1)^2}.$

Giao điểm của đồ thị (C) với trục hoành là $A(2; 0) \Rightarrow$ Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm A là

$$k = f'(2) = \frac{-3}{(2 + 1)^2} = -\frac{1}{3}.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến là $y = -\frac{1}{3}(x - 2) + 0 \Leftrightarrow x + 3y - 2 = 0.$

Câu 187. (Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020) Cho hàm số $y = \frac{2x - 1}{2x - 2}$ có đồ thị (C) . Gọi $M(x_0; y_0)$ (với $x_0 > 1$) là điểm thuộc (C) , biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A và B sao cho $S_{\Delta OIB} = 8S_{\Delta OIA}$ (trong đó O là gốc tọa độ, I là giao điểm hai tiệm cận). Tính $S = x_0 - 4y_0$.

A. $S = \frac{13}{4}.$

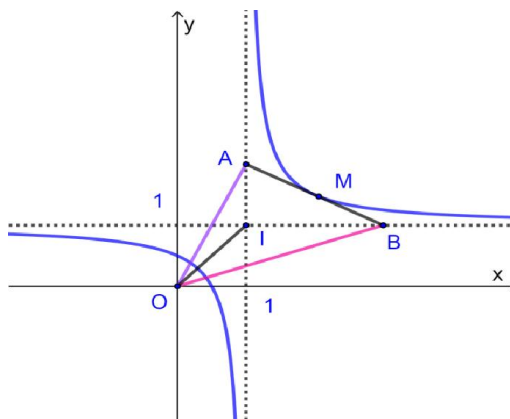
B. $S = \frac{7}{4}.$

C. $S = -2.$

D. $S = 2.$

Lời giải

Chọn C



Ta có $y = \frac{2x - 1}{2x - 2} = 1 + \frac{1}{2x - 2}$

TCĐ: $x = 1$ (d_1), TCN: $y = 1$ (d_2). Điểm $I(1; 1)$.

Ta có $y' = \frac{-1}{2(x - 1)^2}$

Giả sử $M\left(x_0; 1 + \frac{1}{2x_0 - 2}\right) \in (C)$

Phương trình tiếp tuyến tại M là $\Delta: y = \frac{-1}{2(x_0-1)^2}(x-x_0)+1+\frac{1}{2x_0-2}$

$$A = \Delta \cap d_1 \Rightarrow A\left(1; \frac{x_0}{x_0-1}\right), B = \Delta \cap d_2 \Rightarrow B(2x_0-1; 1), \overline{IB} = (2x_0-2; 0); \overline{IA} = \left(0; \frac{1}{x_0-1}\right).$$

$$\text{Ta có } S_{\Delta OIB} = 8S_{\Delta OIA} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot IB = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot IA \Leftrightarrow IB = 8IA$$

$$\Leftrightarrow |2x_0-2| = 8 \cdot \left| \frac{1}{x_0-1} \right| \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \text{ (TM)} \\ x_0 = -1 \text{ (L)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_0 = \frac{5}{4} \Rightarrow S = x_0 - 4y_0 = 3 - 4 \cdot \frac{5}{4} = -2.$$

Câu 188. (Chuyên Thái Bình - 2020) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{x-1}$, biết tiếp tuyến đó

tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.

A. $y = -x + 6; y = -x - 2.$

B. $y = -x - 6; y = -x - 2.$

C. $y = x + 1; y = x + 6.$ **D.** $y = x - 1; y = x - 6.$

Lời giải

Chọn A

Gọi tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến cần lập là $A(x_0; y_0)$, $x_0 \neq 1$, ta có $y_0 = \frac{x_0+3}{x_0-1}$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{-4}{(x-1)^2} \text{ suy ra hệ số góc của tiếp tuyến là } f'(x_0) = \frac{-4}{(x_0-1)^2}.$$

Vì tiếp tuyến đó tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân nên tiếp tuyến tạo với trục Ox góc 45° . Do

$$\text{đó } f'(x_0) = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-4}{(x_0-1)^2} = 1 \\ \frac{-4}{(x_0-1)^2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ x_0 = -1 \end{cases}.$$

Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 3$ ta có phương trình tiếp tuyến $y = -(x-3)+3 \Leftrightarrow y = -x+6$.

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -1$ ta có phương trình tiếp $y = -(x+1)-1 \Leftrightarrow y = -x-2$.

Câu 189. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Gọi d_1, d_2 lần lượt là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = xf(2x-1)$ tại điểm có hoành độ bằng 1. Biết hai đường thẳng d_1, d_2 vuông góc với nhau, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2 \leq |f(1)| < 2\sqrt{2}.$

B. $|f(1)| \geq 2\sqrt{2}.$

C. $\sqrt{2} < |f(1)| < 2.$

D. $|f(1)| \leq \sqrt{2}.$

Lời giải

Chọn B

Vì d_1 là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 nên d_1 có hệ số góc $k_1 = f'(1)$.

Ta có $[xf(2x-1)]' = f(2x-1) + 2xf'(2x-1)$.

Vì d_2 là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = xf(2x-1)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 nên d_2 có hệ số góc $k_2 = f(1) + 2f'(1)$.

Mặt khác, hai đường thẳng d_1, d_2 vuông góc với nhau nên $k_1.k_2 = -1$.

Từ đó, $2[f'(1)]^2 + f'(1).f(1) = -1$.

Suy ra $2\left[f'(1) + \frac{1}{4}f(1)\right]^2 = \frac{1}{8}[f(1)]^2 - 1$. Dẫn đến, $|f(1)| \geq 2\sqrt{2}$.

----- HẾT -----

Nguyễn Bảo Vương