

BẤT ĐẲNG THỨC MINKOWSKI VÀ ÁP DỤNG

Vũ Quốc Triệu , Hà Nội tháng 6.2023

A. BẤT ĐẲNG THỨC MINKOWSKI

Hermann Minkowski (1864 – 1909) là một nhà Toán học sinh tại Aleksotas (ngoại ô của Kaunas, Litva) trong một gia đình gốc Đức, Ba Lan và Do Thái. Tại Đức, Ông học ở Đại học Berlin và Königsberg, nơi ông nhận học vị tiến sĩ năm 1885 dưới sự hướng dẫn của **Ferdinand von Lindemann**. Khi còn là sinh viên tại Königsberg, năm 1883 Ông đã được nhận giải thưởng Toán học của Viện khoa học Pháp cho các công trình về lý thuyết các dạng Toàn phương. **Hermann Minkowski** đã dạy tại đại học Bonn, Göttingen, Königsberg và Zurich. Tại viện Bách Khoa liên bang (Federal Polytechnic Institute), nay là ETH Zurich, ông là một trong những thầy giáo của **Albert Einstein** (1979 – 1955).



Bất đẳng thức **Minkowski** thường sử dụng là :

$$1) \sqrt{A^2 + X^2} + \sqrt{B^2 + Y^2} \geq \sqrt{(A+B)^2 + (X+Y)^2} .$$

$$\text{Dấu bằng xảy} \Leftrightarrow \frac{A}{B} = \frac{X}{Y} = k > 0 .$$

$$2) \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} + \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \geq \sqrt{(A+X)^2 + (B+Y)^2 + (C+Z)^2} .$$

$$\text{Dấu bằng xảy} \Leftrightarrow \frac{A}{X} = \frac{B}{Y} = \frac{C}{Z} = k > 0 .$$

Lưu ý : Bất đẳng thức **Minkowski** được chứng minh dễ dàng bằng phương pháp véc – tơ nên có thể gọi là bất đẳng thức “ độ dài véc – tơ ”

B. ÁP DỤNG

ÁP DỤNG 1 : Cho số phức z thỏa mãn $|z| \leq 2$. GTNN của biểu thức $P = 2|z+1| + 2|z-1| + 2|z-\bar{z}-4i|$ bằng

- A. 4. **B. $4+2\sqrt{3}$.** C. $8+4\sqrt{5}$. D. $4\sqrt{5}$.

(Trích đề thi khảo sát môn Toán 12 trường THPT Lê Quý Đôn – Đồng Đa, Hà Nội 2023)

Lời giải

Chọn B

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Giả thiết $|z| \leq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4$ suy ra $y^2 \leq 4 \Rightarrow y \in [-2; 2]$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + 2|y-2| \\ &= 2\left[\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(1-x)^2 + y^2}\right] - 2(y-2) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức **Minkowski**, ta có:

$$P \geq 2\sqrt{(x+1+1-x)^2 + (y+y)^2} - 2(y-2) = 4\sqrt{1+y^2} - 2(y-2) = f(y)$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \frac{x+1}{1-x} = \frac{y}{y} \Leftrightarrow x = 0.$$

Xét hàm số $f(y) = 4\sqrt{1+y^2} - 2(y-2)$ với $y \in [-2; 2]$.

$$f'(y) = \frac{4y}{\sqrt{1+y^2}} - 2; \quad f'(y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+y^2} = 2y \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}} \in [-2; 2].$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 4 + 2\sqrt{3} \\ f(2) = 4\sqrt{5} \\ f(-2) = 4\sqrt{5} + 8 \end{cases} \Rightarrow \underset{y \in [-2; 2]}{\text{Min}P} = 4 + 2\sqrt{3} \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}; x = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{\sqrt{3}}i.$$

Nhận xét : Ở phép đánh giá trên, ta đã sử dụng BĐT Minkowski để triệt hạ ẩn x , không triệt hạ ẩn y !

ÁP DỤNG 2 : Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25$ và hai điểm $A(7; 9; 0)$, $B(0; 8; 0)$. Điểm M di động trên (S) . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA + 2MB$ bằng

- A. $5\sqrt{3}$. B. $5\sqrt{2}$. **C. $5\sqrt{5}$.** D. 5.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x; y; z) \Rightarrow M \in (S) : (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 23 = 0$.

Ta có:

$$\begin{aligned} MA + 2MB &= \sqrt{(x-7)^2 + (y-9)^2 + z^2} + 2\sqrt{x^2 + (y-8)^2 + z^2} \\ &= \sqrt{(x-7)^2 + (y-9)^2 + z^2} + 3 \cdot 0 + 2\sqrt{x^2 + (y-8)^2 + z^2} \\ &= \sqrt{(x-7)^2 + (y-9)^2 + z^2 + 3(x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 23)} + 2\sqrt{x^2 + (y-8)^2 + z^2} \\ &= 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 5x - 6y + \frac{61}{4}} + 2\sqrt{x^2 + (y-8)^2 + z^2} \\ &= 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 5x - 6y + \frac{61}{4}} + 2\sqrt{x^2 + (y-8)^2 + z^2} \\ &= 2 \left[\sqrt{\left(\frac{5}{2} - x\right)^2 + (3-y)^2 + (-z)^2} + \sqrt{x^2 + (y-8)^2 + z^2} \right] \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức **Minkowski**, ta có:

$$P \geq 2\sqrt{\left(\frac{5}{2} - x + x\right)^2 + (3 - y + y - 8)^2 + (-z + z)^2} = 5\sqrt{5}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\frac{5}{2} - x}{x} = \frac{3 - y}{y - 8} = k > 0 \\ z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 23 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow M(1; 6; 0).$$

ÁP DỤNG 3 : Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$, đường thẳng

$d' : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$ và hai điểm $A(2; 1; -1)$, $B(1; 1; 2)$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm di động trên d và d' sao cho $MN = \sqrt{5}$. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ có dạng $\sqrt{a} + b$ ($a, b \in \mathbb{N}$). Tổng $a + b$ bằng

- A. 3. B. 1. C. 57. **D. 27.**

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(m; m; m) \in d$ và $N(n; n+1; n-1) \in d'$.

$$\text{Ta có } MN = \sqrt{(m-n)^2 + (m-n-1)^2 + (m-n+1)^2}$$

$$\text{Vì } MN = \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{(m-n)^2 + (m-n-1)^2 + (m-n+1)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow |m-n| = 1 \Rightarrow \begin{cases} m-n=1 \\ m-n=-1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } AM + BN &= \sqrt{(m-2)^2 + (m-1)^2 + (m+1)^2} + \sqrt{(n-1)^2 + n^2 + (n-3)^2} \\ &= \sqrt{3m^2 - 4m + 6} + \sqrt{3n^2 - 8n + 10} \\ &= \sqrt{3} \cdot \left[\sqrt{\left(m - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{14}}{3}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{4}{3} - n\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{14}}{3}\right)^2} \right] \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức **Minkowski**, ta có:

$$AM + BN \geq \sqrt{3} \cdot \sqrt{\left(m - n + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{14}}{3} + \frac{\sqrt{14}}{3}\right)^2}$$

$$\text{- TH1 : } m - n = 1 \Rightarrow AM + BN \geq \sqrt{3} \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{14}}{3} + \frac{\sqrt{14}}{3}\right)^2} = 3\sqrt{3}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} m - n = 1 \\ m - \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{14}}{3} \\ \frac{4}{3} - n = \frac{\sqrt{14}}{3} \end{cases} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ n = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right) \\ N\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\text{- TH2 : } m - n = -1 \Rightarrow AM + BN \geq \sqrt{3} \cdot \sqrt{\left(-1 + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{14}}{3} + \frac{\sqrt{14}}{3}\right)^2} = \sqrt{57}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} m - n = -1 \\ m - \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{14}}{3} \\ \frac{4}{3} - n = \frac{\sqrt{14}}{3} \end{cases} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ n = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \\ N\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp TH1 và TH2 suy ra } \min(AM + BN) = 3\sqrt{3} = \sqrt{27} + 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 27 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow a + b = 27.$$

ÁP DỤNG 4 : Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;5;0); B(3;3;6)$ và đường thẳng Δ :

$$\frac{x-7}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-8}{2}. \text{ Gọi } M(a;b;c) \text{ là điểm thuộc đường thẳng } \Delta \text{ sao cho chu vi tam giác}$$

MAB nhỏ nhất. Khi đó $a+b+c$ bằng

- A. 1. B. 2. C. 4. **D. 3.**

Lời giải

Chọn D

- **Cách 1 :** Đại số - Sử dụng BĐT Minkowski.

$$\text{Gọi } M(7+2t; -3-t; 8+2t) \in \Delta.$$

Ta có chu vi tam giác MAB là

$$P = MA + MB + AB = \sqrt{9t^2 + 72t + 164} + \sqrt{9t^2 + 36t + 56} + 2\sqrt{11}$$

$$P = 3 \left[\sqrt{(t+4)^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2} + \sqrt{(-t-2)^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2} \right] + 2\sqrt{11}$$

Áp dụng bất đẳng thức **Minkowski**, ta có:

$$P \geq 3 \cdot \sqrt{(t+4-t-2)^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{3} + \frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2} = 2\sqrt{29} + 2\sqrt{11}$$

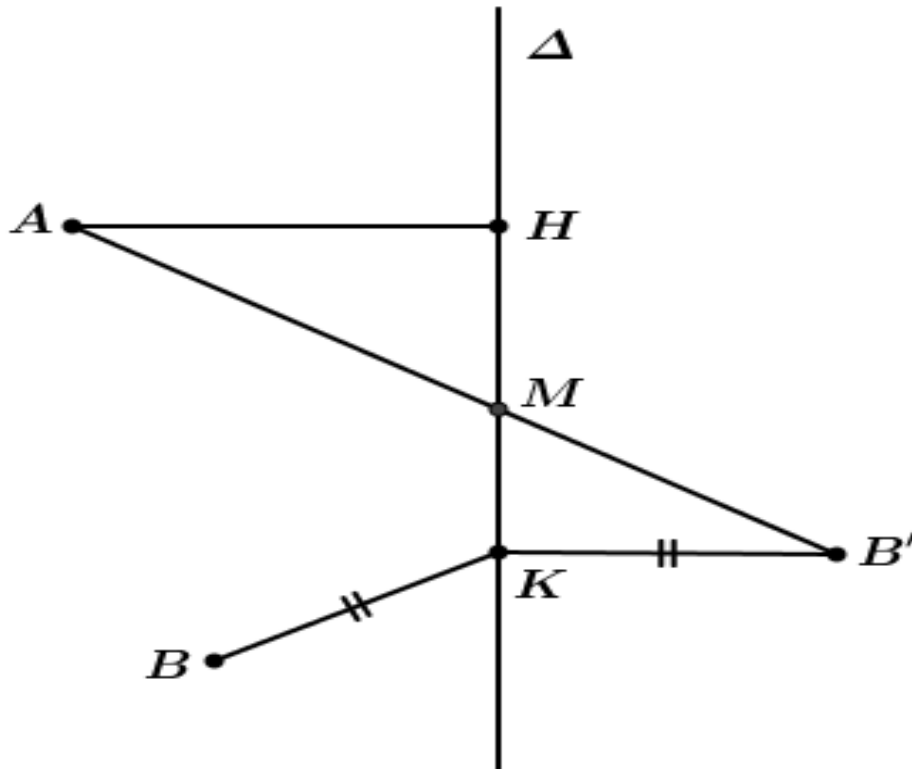
$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \frac{t+4}{-t-2} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{3}}{\frac{2\sqrt{5}}{3}} \Leftrightarrow t = -3 \Rightarrow M(1; 0; 2).$$

Vậy $a+b+c=3$.

- Cách 2 : Hình học.

Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B lên Δ

Kẻ đường thẳng d đi qua K và song song với AH . Trên d lấy điểm $B' \in d$ sao cho $KB' = BK$ và điểm A, B' khác phía với đường thẳng Δ (tham khảo hình vẽ)



Suy ra $MA + MB + AB = MA + MB' + AB \geq AB' + AB = \text{const.}$

Do đó $MA + MB + AB$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $M = AB' \cap \Delta$

Tính được tọa độ điểm $H(-1; 1; 0); K(3; -1; 4); AH = 2\sqrt{5}; BK = 2\sqrt{5}$

$$\text{Lại có: } \frac{AH}{B'K} = \frac{MH}{MK} \Rightarrow AH \cdot MK = MH \cdot B'K \Rightarrow \overrightarrow{MH} = \overrightarrow{KM}, (1)$$

$$\text{Ta có } M(7+2t; -3-t; 8+2t) \in \Delta \text{ nên } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} -8-2t=4+2t \\ 4+t=-2-t \\ -8-2t=4+2t \end{cases} \Leftrightarrow t=-3 \Rightarrow M(1;0;2).$$

Vậy $a+b+c=3$.

ÁP DỤNG 5: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;1-3)$ và $B(1;-3;2)$. Xét hai điểm M và N thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN=3$. Giá trị lớn nhất của $|AM-BN|$ bằng

A. $\sqrt{65}$.

B. $\sqrt{29}$.

C. $\sqrt{26}$.

D. $\sqrt{91}$.

(Trích đề thi THPT QG môn Toán – BGD năm 2021 – Đợt 01)

Lời giải

Chọn A

- **Cách 1:** Đại số - Sử dụng BĐT Minkowski.

Gọi $M(a;b;0)$; $N(c;d;0) \in (Oxy)$.

$$\text{Ta có } MN=3 \Leftrightarrow (a-c)^2 + (b-d)^2 = 9.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x=a-c \\ y=b-d \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 9.$$

Ta có

$$\begin{aligned} |AM-BN| &= \left| \sqrt{(a+2)^2 + (b-1)^2 + 9} - \sqrt{(c-1)^2 + (d+3)^2 + 4} \right| \\ &= \left| \sqrt{(a+2)^2 + (b-1)^2 + (3)^2} - \sqrt{(-c+1)^2 + (-d-3)^2 + (-2)^2} \right| \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Minkowski, ta có:

$$|AM-BN| \leq \sqrt{(a+2-c+1)^2 + (b-1-d-3)^2 + (3-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow |AM-BN| \leq \sqrt{(a-c+3)^2 + (b-d-4)^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow |AM-BN| \leq \sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2 + 1} = \sqrt{6x-8y+35}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có: $6x-8y \leq \sqrt{(36+64)(x^2+y^2)} = 30$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{-6} = \frac{y}{8} \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{5} \\ y = -\frac{12}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-c = \frac{9}{5} \\ b-d = -\frac{12}{5} \end{cases} \quad (1)$$

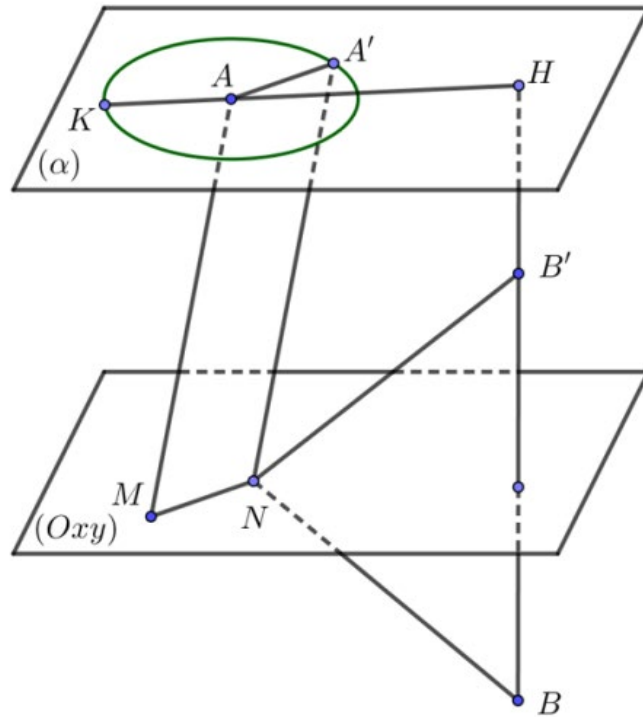
Suy ra $|AM - BN| \leq \sqrt{65}$.

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a+2-c+1}{a+2} = \frac{b-1-d-3}{b-1} = \frac{3-2}{3} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-3c=-7 \\ 2b-3d=11 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{cases} M\left(\frac{62}{5}; -\frac{91}{5}; 0\right) \\ N\left(\frac{53}{5}; -\frac{79}{5}; 0\right) \\ M\left(\frac{8}{5}; -\frac{19}{5}; 0\right) \\ N\left(\frac{17}{5}; -\frac{31}{5}; 0\right) \end{cases}$$

- **Cách 2 : Hình học.**



Ta có A, B nằm khác phía với mp (Oxy) .

Gọi $(\alpha): z+3=0$ là mp qua A song song với mp (Oxy) và (C) là đường tròn tâm A bán kính $R=3$ nằm trong mp (α) .

+) $BH \perp (\alpha)$ tại H suy ra $H(1; -3; -3)$

+) B' là điểm đối xứng của B qua mp (Oxy) suy ra $B'(1; -3; -2)$

+) Và $NA' \parallel MA, A' \in (C)$

$$\text{Ta có: } |AM - NB| = |NA' - NB'| \leq A'B' = \sqrt{B'H^2 + A'H^2} \leq \sqrt{1 + (HA+3)^2} = \sqrt{65}$$

$$\text{Suy ra } |AM - NB|_{\max} = \sqrt{65}.$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN**BÀI TẬP 01**

Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi biểu thức $P = |z - 1| + |z + 1| + \frac{1}{2}|z - \bar{z} - 4i|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $x^2 + 3y^2$ bằng

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

BÀI TẬP 02

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 81$ và hai điểm $M(4; -4; 2)$, $N(6; 0; 6)$. Gọi E là điểm thuộc (S) sao cho $EM + EN$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tiếp diện của mặt cầu (S) tại điểm E cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

- A. -9. B. -6. C. 6. D. 9.

BÀI TẬP 03

Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = |z - 9| + 3|z + 1 - 6i|$ bằng

- A. $3\sqrt{10}$. B. $6\sqrt{10}$. C. $3\sqrt{10} + 4$. D. $6\sqrt{10} + 3$.

BÀI TẬP 04

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 0; 0)$; $B(-1; 3; -3)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc đường thẳng Δ sao cho chu vi tam giác MAB nhỏ nhất. Khi đó $a + b + c$ bằng.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

BÀI TẬP 05

Xét các số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z + 2 - 4i| + |z - 3 + i| = 5\sqrt{2}$. Khi biểu thức $P = |z + i| + |z - 3 - 3i|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì tổng $x + y$ bằng

- A. -2. B. 1. C. 2. D. -1.

BÀI TẬP 06

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -3; 2)$ và $B(-2; 1; -4)$. Xét hai điểm M và N thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN = 4$. Giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng

- A. $5\sqrt{2}$. B. $3\sqrt{13}$. C. $\sqrt{61}$. D. $\sqrt{85}$.

----- HẾT -----

BÀI TẬP 01

Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi biểu thức $P = |z - 1| + |z + 1| + \frac{1}{2}|z - \bar{z} - 4i|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $x^2 + 3y^2$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } P = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(-1-x)^2 + y^2} + |y-2|$$

Áp dụng bất đẳng thức **Minkowski**, ta có:

$$P \geq \sqrt{(x-1-1-x)^2 + (y+y)^2} + |y-2| = 2\sqrt{1+y^2} + |y-2| = f(y)$$

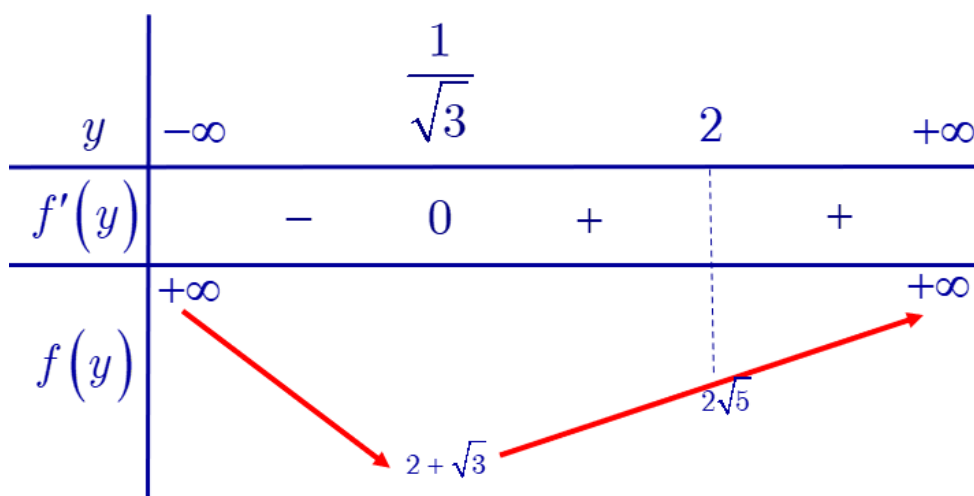
$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \frac{x-1}{y} = \frac{-1-x}{y} \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\text{Xét hàm số } f(y) = 2\sqrt{1+y^2} + |y-2| = \begin{cases} 2\sqrt{1+y^2} + y - 2; & y \geq 2 \\ 2\sqrt{1+y^2} - y + 2; & y < 2 \end{cases}.$$

$$f'(y) = \begin{cases} \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}} + 1; & y \geq 2 \\ \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}} - 1; & y < 2 \end{cases}$$

$$f'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ta có **BBT** :



$$\text{Từ BBT suy ra } \min_{y \in \mathbb{R}} P = 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}; x = 0 \Rightarrow x^2 + 3y^2 = 1.$$

BÀI TẬP 02

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 81$ và hai điểm $M(4; -4; 2), N(6; 0; 6)$. Gọi E là điểm thuộc (S) sao cho $EM + EN$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tiếp diện của mặt cầu (S) tại điểm E cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. -9 .

B. -6 .

C. 6 .

D. 9 .

Lời giải

Chọn A

Dễ thấy (S) có tâm $I(1; 2; 2)$, bán kính $R = 9$.

Gọi $E(x; y; z) \Rightarrow E \in (S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 81 \quad (1)$.

Ta có

$$EM + EN = \sqrt{(x-4)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2} + \sqrt{(6-x)^2 + (-y)^2 + (6-z)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức **Minkowski**, ta có:

$$EM + EN \geq \sqrt{(x-4+6-x)^2 + (y+4-y)^2 + (z-2+6-z)^2} = 6$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \frac{x-4}{6-x} = \frac{y+4}{-y} = \frac{z-2}{6-z} = k > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 12 & (2) \\ 2x - z = 6 & (3) \end{cases}$$

$$\text{Từ (1)(2)(3)} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E(5; -2; 4) \text{ (TM } k > 0) \\ E(4; -4; 2) \text{ (KTM } k > 0) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } E(5; -2; 4) \Rightarrow (P) \begin{cases} \text{qua } E(5; -2; 4) \\ VTPT: \vec{n}_{(P)} = \vec{IE} = (4; -4; 2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (P): 4(x-5) - 4(y+2) + 2(z-4) = 0 \Leftrightarrow (P): 2x - 2y + z - 18 = 0.$$

Suy ra tiếp diện (P) của mặt cầu (S) tại điểm E cắt trục tung tại điểm có tung độ $y = -9$.

BÀI TẬP 03

Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = |z-9| + 3|z+1-6i|$ bằng

A. $3\sqrt{10}$.

B. $6\sqrt{10}$.

C. $3\sqrt{10} + 4$.

D. $6\sqrt{10} + 3$.

Lời giải

Chọn B

- Cách 1 : Đại số - Sử dụng BĐT Minkowski.

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Giả thiết $|z| = 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 9 = 0$ (1)

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \sqrt{(x-9)^2 + y^2} + 3\sqrt{(x+1)^2 + (y-6)^2} \\ &= \sqrt{(x-9)^2 + y^2 + 8 \cdot 0} + 3\sqrt{(x+1)^2 + (y-6)^2} \\ &= \sqrt{(x-9)^2 + y^2 + 8(x^2 + y^2 - 9)} + 3\sqrt{(x+1)^2 + (y-6)^2} \\ &= 3\sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1} + 3\sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 12y + 37} \\ &= 3\left[\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(-x-1)^2 + (6-y)^2}\right] \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức **Minkowski**, ta có:

$$T \geq 3\sqrt{(x-1-x-1)^2 + (y+6-y)^2} = 6\sqrt{10}$$

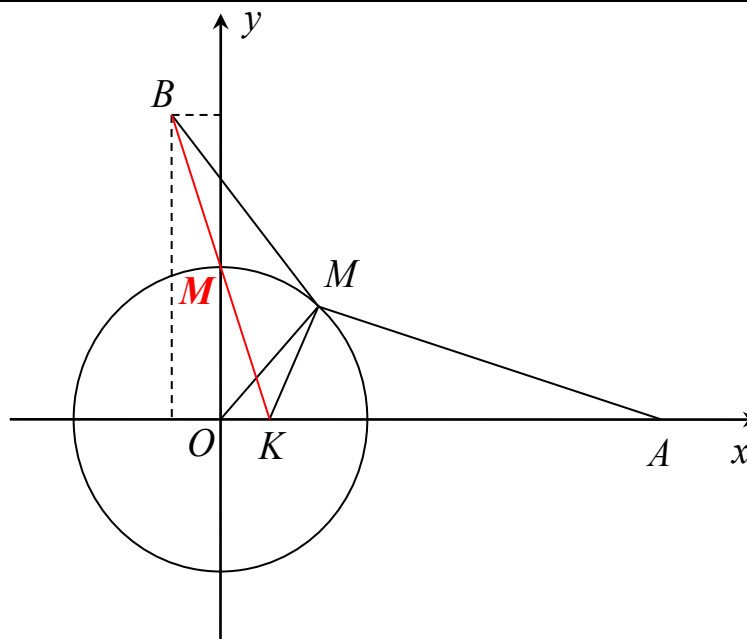
Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x-1}{-x-1} = \frac{y}{6-y}$ ($= k > 0$) $\Leftrightarrow 3x + y = 3$ (2).

$$\text{Từ (1)(2)} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{9}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=-\frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases} \quad (TM \ k > 0) \\ \begin{cases} x=\frac{9}{5} \\ y=-\frac{3}{5} \end{cases} \quad (KTM \ k > 0) \end{cases} \Leftrightarrow z = 3i.$$

Vậy $\text{Min} T = 6\sqrt{10}$ khi $z = 3i$.

- Cách 2 : Hình học.

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng $Oxy \Rightarrow M$ thuộc đường tròn tâm O , bán kính $R = 3$.



Gọi $A(9;0)$, $B(-1;6) \Rightarrow T = MA + 3MB$.

Lấy $K(1;0) \Rightarrow OM = 3OK$.

Xét $\triangle AOM$ và $\triangle MOK$ có: $\begin{cases} \widehat{AOM} \text{ chung} \\ \frac{OM}{OK} = \frac{OA}{OM} = 3 \end{cases}$ suy ra hai tam giác ta xét đồng dạng với nhau.

Suy ra $AM = 3MK$.

Khi đó: $T = MA + 3MB = 3MK + 3MB = 3(MK + MB) \geq 3BK = 6\sqrt{10}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M$ thuộc đoạn thẳng $BK \Leftrightarrow M(0;3)$ hay $z = 3i$.

Vậy $\min T = 6\sqrt{10}$ khi $z = 3i$.

- **Cách 3 : Lượng giác hóa.**

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$\text{Giả thiết } |z| = 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 \quad (1)$$

$$\text{Từ (1), ta có } \begin{cases} \frac{x}{3} = \sin t \\ \frac{y}{3} = \cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \sin t \\ y = 3 \cos t \end{cases} (t \in [-\pi; \pi]).$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } P &= \sqrt{(x-9)^2 + y^2} + 3\sqrt{(x+1)^2 + (y-6)^2} \\ &= \sqrt{(3 \sin t - 9)^2 + (3 \cos t)^2} + 3\sqrt{(3 \sin t + 1)^2 + (3 \cos t - 6)^2} \end{aligned}$$

Sử dụng **CASIO** với chức năng **MODE7** hoặc **MENU8** $\Rightarrow \min P = 6\sqrt{10} \Leftrightarrow z = 3i$.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;0;0); B(-1;3;-3)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc đường thẳng Δ sao cho chu vi tam giác MAB nhỏ nhất. Khi đó $a+b+c$ bằng.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

- **Cách 1 : Đại số - Sử dụng BĐT Minkowski.**

Gọi $M(t;t;2+t) \in \Delta$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có chu vi tam giác } MAB \text{ là } P &= MA + MB + AB = \sqrt{3t^2 + 8} + \sqrt{3t^2 + 6t + 35} + 3\sqrt{3} \\ &= \sqrt{3} \left[\sqrt{(t+4)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2} + \sqrt{(-t-1)^2 + \left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2} \right] + 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức **Minkowski**, ta có:

$$P \geq \sqrt{3} \cdot \sqrt{(t-t-1)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2} + 3\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

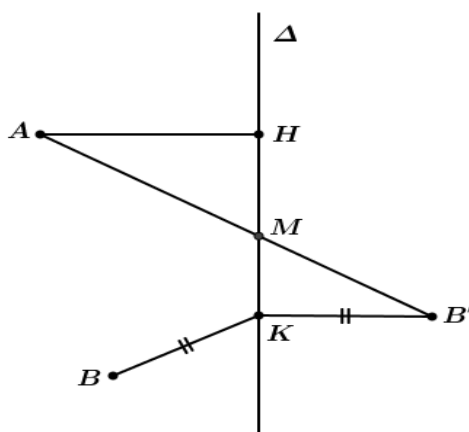
$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \frac{t}{-t-1} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right).$$

Vậy $a+b+c=3$.

- **Cách 2 : Hình học.**

Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B lên Δ

Kẻ đường thẳng d đi qua K và song song với AH . Trên d lấy điểm $B' \in d$ sao cho $KB' = BK$ và điểm A, B' khác phía với đường thẳng Δ (tham khảo hình vẽ)



Suy ra $MA + MB = MA + MB' \geq AB' = \text{const.}$

Do đó chu vi của tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất khi $M = AB' \cap \Delta$

Tính được tọa độ điểm $H(0;0;2); K(-1;-1;1); AH = 2\sqrt{2}; BK = 4\sqrt{2}$

Lại có: $\frac{AH}{B'K} = \frac{MH}{MK} \Rightarrow AH.MK = MH.B'K \Rightarrow \overrightarrow{KM} = 2\overrightarrow{MH}, (1)$

Ta có $M(t;t;2+t) \in \Delta$ nên $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} t+1=2(0-t) \\ t+1=2(0-t) \\ t+1=2(2-t) \end{cases} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right).$

Vậy $a+b+c=1.$

BÀI TẬP 05

Xét các số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z+2-4i| + |z-3+i| = 5\sqrt{2}$. Khi biểu thức $P = |z+i| + |z-3-3i|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì tổng $x+y$ bằng

A. -2.

B. 1.

C. 2.

D. -1.

Lời giải

Chọn C

Trên mặt phẳng phức, xét 2 điểm $A(-2;4), B(3;-1)$ và gọi M là điểm biểu diễn số phức z .

Giả thiết $|z+2-4i| + |z-3+i| = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow MA + MB = AB \Leftrightarrow M$ thuộc đoạn thẳng AB .

Đường thẳng AB có phương trình: $y = 2 - x$, suy ra $M(x; 2-x)$ với $-2 \leq x \leq 3$.

Ta có: $P = \sqrt{x^2 + (3-x)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (-x-1)^2} = \sqrt{2x^2 - 6x + 9} + \sqrt{2x^2 - 4x + 10}$

$$= \sqrt{2} \cdot \left[\sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} + \sqrt{(-x+1)^2 + (2)^2} \right]$$

Áp dụng bất đẳng thức Minkowski, ta có: $P \geq \sqrt{2} \sqrt{\left(x - \frac{3}{2} - x + 1\right)^2 + \left(\frac{3}{2} + 2\right)^2} = 5.$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x - \frac{3}{2}}{-x+1} = \frac{\frac{3}{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{9}{7} \in [-2; 3] \Rightarrow y = \frac{5}{7} \Rightarrow x + y = \frac{9}{7} + \frac{5}{7} = 2.$

BÀI TẬP 06

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;2)$ và $B(-2;1;-4)$. Xét hai điểm M và N thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN = 4$. Giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng

A. $5\sqrt{2}$.

B. $3\sqrt{13}$.

C. $\sqrt{61}$.

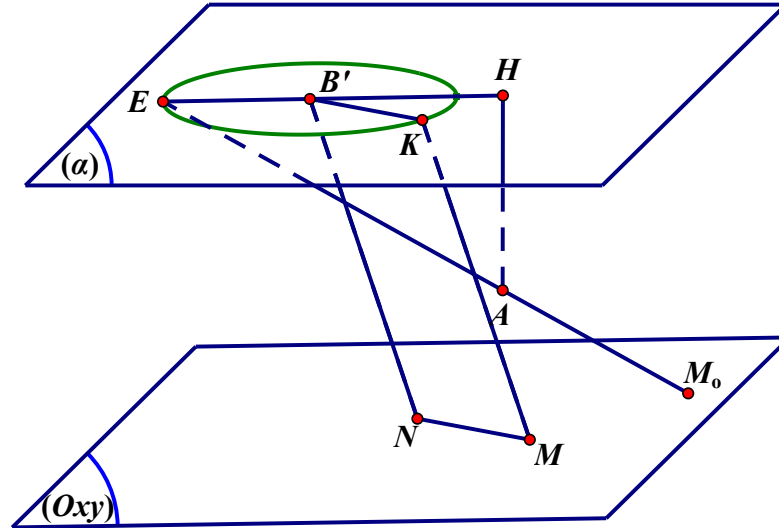
D. $\sqrt{85}$.

Lời giải

Chọn D

- **Cách 1 :** Đại số - Sử dụng BĐT Minkowski.

- **Cách 2 :** Hình học.



Gọi B' là điểm đối xứng với B qua mặt phẳng (Oxy) , suy ra $B'(-2;1;4)$, $BN = B'N$ và A, B' ở cùng phía so với mặt phẳng (Oxy) .

Lấy điểm K sao cho $\overline{B'K} = \overline{NM}$ ($B'NMK$ là hình bình hành), khi đó $B'K = MN = 4$, $B'N = MK$.

Do $B'K \parallel MN$ nên $B'K$ nằm trên mặt phẳng (α) đi qua B' và song song với mặt phẳng (Oxy) , suy ra (α) có phương trình $z = 4$.

Do $B'K = 4$ nên K thuộc đường tròn (C) nằm trên mặt phẳng (α) có tâm là B' , bán kính $R = 4$.

Gọi H là hình chiếu của A lên $(\alpha) \Rightarrow H(1;-3;4)$ và $HB' = 5 > R$, E là giao điểm của tia đối của tia $B'H$ với (C) .

Ta có $|AM - BN| = |AM - B'N| = |AM - MK| \leq AK = \sqrt{AH^2 + HK^2} \leq \sqrt{AH^2 + HE^2}$.

Mà $AH = 2, HE = HB' + B'E = 5 + 4 = 9$ suy ra $|AM - BN| \leq \sqrt{2^2 + 9^2} = \sqrt{85}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} K \equiv E \\ M \in AK, |AM - MK| = AK \end{cases} \Leftrightarrow M = AE \cap (Oxy) = M_0$.

Vậy giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng $\sqrt{85}$.

----- HẾT -----