

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Câu 1 (5,0 điểm).

a) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m-1)x^2 + (m+1)x - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

b) Cho hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) . Cho d là tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$, d cắt hai đường tiệm cận của (C) lần lượt tại A và B . Tính độ dài IA, IB theo x_0 (I là giao điểm của hai đường tiệm cận) và tìm bán kính lớn nhất của đường tròn nội tiếp tam giác IAB .

Câu 2 (5,0 điểm).

a) Giải phương trình: $4\sin^4 x + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 4x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x$.

b) Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 9y^2 + x - 28y = 30 \\ \sqrt{2-y} + \sqrt{5-x} = 2x-6 \end{cases}$$

Câu 3 (2,0 điểm). Cho 2021 tấm thẻ được đánh số theo thứ tự từ 1 đến 2021 (mỗi tấm thẻ được đánh duy nhất một số và không có hai thẻ nào có số giống nhau). Các tấm thẻ được úp xuống mặt bàn và không nhìn thấy số trên thẻ. Bốc ngẫu nhiên 1 tấm thẻ, tính xác suất để số ghi trên tấm thẻ

a) Chia hết cho cả 6 và 15.

b) Chia hết cho 2, hoặc chia hết cho 3 hoặc chia hết cho 5.

Câu 4 (2,0 điểm). Một cửa hàng bán quýt loại I với giá là 50.000 đồng/kg. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 40kg mỗi ngày. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm 5000 đồng/kg thì số quýt bán được tăng thêm là 50kg. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập mỗi kg quýt ban đầu là 30.000 đồng?

Câu 5. (6,0 điểm). Cho tứ diện $ABCD$ với $AB \perp (BCD)$ và $AB = 2\sqrt{2}$. Tam giác ACD có ba góc nhọn, đường cao $AK = 2\sqrt{6}$ và $AC = 5, AD = 7$.

a) Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$.

b) Gọi L là trung điểm của BC . Tính góc tạo bởi đường thẳng KL và mặt phẳng (ACD) .

c) Gọi M, N lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ABD và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ACD . Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (MNI) .

-----Hết-----

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Chữ kí giám thị số 1: Chữ kí giám thị số 2:

HƯỚNG DẪN CHẤM THI MÔN TOÁN LỚP 12 THPT

(Hướng dẫn chấm gồm 05 trang)

Chú ý: Những cách giải khác HDC mà đúng thì cho điểm theo thang điểm đã định.

Câu	Nội dung	Điểm
1a (2,5 đ)	$y' = 3x^2 + 2(m-1)x + (m+1)$ Đề hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thì phương trình $y' = 0$ phải có 2 nghiệm phân biệt tức là $\Delta' = (m-1)^2 - 3(m+1) > 0$	0,5
	$\Leftrightarrow m^2 - 5m - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{5-\sqrt{33}}{2} \\ m > \frac{5+\sqrt{33}}{2} \end{cases}$	0,5
	Theo đề bài $ x_1 - x_2 = \frac{4\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \left \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \right = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ $\Leftrightarrow \left \frac{\sqrt{4(m^2 - 5m - 2)}}{3} \right = \frac{4\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow m^2 - 5m - 14 = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 7 \end{cases}$	0,5
	Kết hợp với điều kiện, có $m = -2, m = 7$ là các giá trị cần tìm	0,5
1b (2,5 đ)	Đồ thị (C) có tiệm cận đứng $x = 1$, tiệm cận ngang $y = 2 \Rightarrow I(1; 2)$ $y' = \frac{-4}{(x-1)^2}, \forall x \neq 1$.	0,5
	Phương trình tiếp tuyến d của (C) tại điểm có hoành độ x_0 là $y = -\frac{4}{(x_0-1)^2}x + \frac{2x_0^2 + 4x_0 - 2}{x_0 - 1}, x_0 \neq 1$. Tọa độ điểm $A\left(1; \frac{2x_0 + 6}{x_0 - 1}\right), B(2x_0 - 1; 2)$.	0,5
	Khi đó $IA = \frac{8}{ x_0 - 1 }, IB = 2 x_0 - 1 $.	0,5
	Tam giác IAB vuông tại I có $IA \cdot IB = 16$. Gọi p, S, r lần lượt nửa chu vi, diện tích và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác IAB . Ta có $r = \frac{S}{p} = \frac{IA \cdot IB}{IA + IB + \sqrt{IA^2 + IB^2}} \leq \frac{IA \cdot IB}{2\sqrt{IA \cdot IB} + \sqrt{2IA \cdot IB}} = \frac{16}{2\sqrt{16} + \sqrt{32}} = 4 - 2\sqrt{2}$.	0,5
	Vậy $\text{Max}(r) = 4 - 2\sqrt{2}$ khi $IA = IB = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ x_0 = -1 \end{cases}$.	0,5
2a (2,5 đ)	$4\sin^4 x + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 4x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x$	0,5

	$\Leftrightarrow 4\sin^4 x + 2(1 - 2\sin^2 x) + \frac{1}{2}\sin 4x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x$	
	$\Leftrightarrow (2\sin^2 x - 1)^2 + \frac{1}{2}\sin 4x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x$	0,5
	$\Leftrightarrow \cos^2 2x + \frac{1}{2}\sin 4x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x$	
	$\Leftrightarrow \frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{1}{2}\sin 4x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x$	0,5
	$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{2}\sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x$	
	$\Leftrightarrow \sin\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + \frac{\pi}{4} = x + k2\pi \\ 4x + \frac{\pi}{4} = \pi - x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{3\pi}{20} + k\frac{2\pi}{5} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$	0,5
2b (2,5 đ)	$\begin{cases} x^3 - y^3 - 9y^2 + x - 28y = 30 & (1) \\ \sqrt{2-y} + \sqrt{5-x} = 2x-6 & (2) \end{cases}$ ĐK: $\begin{cases} x \leq 5 \\ y \leq 2 \end{cases}$. PT (1) $\Leftrightarrow x^3 + x = (y+3)^3 + (y+3)$	0,5
	Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ Suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến, liên tục trên $\mathbb{R}$.	0,5
	Phương trình $f(x) = f(y+3) \Leftrightarrow x = y+3 \Leftrightarrow y = x-3$	0,5
	Thay $y = x-3$ vào phương trình (2) ta được $\sqrt{5-x} = x-3$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x = 1 \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow y = 1 \\ x = 4 \end{cases}$ Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất (4;1).	0,5
3a (1,0 đ)	Số cách chọn ra 1 tấm thẻ từ 2021 tấm thẻ là $n(\Omega) = 2021$. Gọi X là biến cố "Số trên thẻ bốc ra chia hết cho cả 6 và 15", vậy X là biến cố "Số trên thẻ bốc ra chia hết cho 30"	0,5
	Số các số thỏa mãn là $n(X) = \left\lfloor \frac{2021}{30} \right\rfloor = 67$. Do đó, xác suất cần tìm bằng $P(X) = \frac{n(X)}{n(\Omega)} = \frac{67}{2021}$.	0,5
3b (1,0 đ)	Gọi A là biến cố "Số trên thẻ bốc ra chia hết cho 2". Gọi B là biến cố "Số trên thẻ bốc ra chia hết cho 3". Gọi C là biến cố "Số trên thẻ bốc ra chia hết cho 5". Khi đó: $A \cap B$ là biến cố "Số trên thẻ bốc ra chia hết cho 6". $B \cap C$ là biến cố "Số trên thẻ bốc ra chia hết cho 15".	0,25

	$A \cap C$ là biến cố "Số trên thẻ bốc ra chia hết cho 10". $A \cap B \cap C$ là biến cố "Số trên thẻ bốc ra chia hết cho 30", đây chính là biến cố X ở ý a. $A \cup B \cup C$ là biến cố "Số trên thẻ bốc ra hoặc chia hết cho 2, hoặc chia hết cho 3 hoặc chia hết cho 5" và đây là biến cố cần tính xác suất.	
	$n(A) = \left[\frac{2021}{2} \right] = 1010; n(B) = \left[\frac{2021}{3} \right] = 673; n(A) = \left[\frac{2021}{5} \right] = 404$	0,25
	$n(A \cap B) = \left[\frac{2021}{6} \right] = 336; n(A \cap C) = \left[\frac{2021}{10} \right] = 202; n(B \cap C) = \left[\frac{2021}{15} \right] = 134$ $n(A \cap B \cap C) = n(X) = 67$	0,25
	Vậy xác suất cần tìm là $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$ $- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$ $= \frac{1010 + 673 + 404 - 336 - 202 - 134 + 67}{2021} = \frac{1482}{2021}$.	0,25
4 (2,0 đ)	Gọi x là giá bán thực tế của mỗi kg quýt, (x : đồng; $30000 \leq x \leq 50000$ đồng). Khi đó số kg bán thêm được là: $(50000 - x) \cdot \frac{50}{5000} = \frac{1}{100}(50000 - x)$.	0,5
	Do đó số kg quýt bán được tương ứng với giá bán x : $40 + \frac{1}{100}(50000 - x) = -\frac{1}{100}x + 540$ Gọi $f(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($f(x)$: đồng). Ta có: $f(x) = \left(-\frac{1}{100}x + 540 \right) \cdot (x - 30000) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16200000$	0,5
	Bài toán trở thành tìm GTLN của $f(x) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16200000$ với $30000 \leq x \leq 50000$. $f'(x) = -\frac{1}{50}x + 840$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{50}x + 840 = 0 \Leftrightarrow x = 42000$	0,5
	Vì hàm $f(x)$ liên tục trên $30000 \leq x \leq 50000$ nên ta có: $f(30000) = 0$ $f(42000) = 1440000$ $f(50000) = 800000$ Vậy với $x = 42000$ thì $f(x)$ đạt GTLN. Vậy để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất thì giá bán thực tế của mỗi kg quýt là 42.000 đồng.	0,5

	Theo tính chất tỉ lệ thức thì $\frac{AI}{IE} = \frac{AC + AD}{CE + DE} = \frac{AC + AD}{CD} = \frac{5 + 7}{6} = 2.$	
	Theo tính chất trọng tâm thì ta có $\frac{AM}{ML} = \frac{AN}{NG} = 2$, do đó $\frac{AM}{ML} = \frac{AN}{NG} = \frac{AI}{IE}$ vậy thì $MI \parallel LE, MN \parallel LG$ (theo Ta-lét đảo) suy ra $(MNI) \parallel (BCD).$ Ta gọi $Z = (MNI) \cap AB = Z \Rightarrow \frac{AZ}{ZB} = \frac{AN}{NG} = 2 \Rightarrow BZ = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$ Do đó, $d(D; (MNI)) = d(B; (MNI)) = BZ = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$	0,5

-----**Hết**-----