PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT CHỨA THAM SỐ

PHƯƠNG PHÁP

Tìm m để $f(x,m)=0$ có nghiệm (hoặc có k nghiệm) trên D trong phương trình logarit chứa tham số:

- **Bước 1.** Tách m ra khỏi biến số và đưa về dạng $f(x)=A(m)$.
- **Bước 2.** Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x)$ trên D.
- **Bước 3.** Dựa vào bảng biến thiên để xác định giá trị của tham số m để đường thẳng $y=A(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$.
- **Bước 4.** Kết luận các giá trị cần tìm của m để phương trình $f(x)=A(m)$ có nghiệm (hoặc có k nghiệm) trên D.

Lưu ý

- Nếu hàm số $y=f(x)$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên D thì giá trị $A(m)$ cần tìm là những m thỏa mãn: $\min\limits_{x\in D} f(x)\le A(m)\le \max\limits_{x\in D} f(x)$.
- Nếu bài toán yêu cầu tìm tham số để phương trình có k nghiệm phân biệt, ta chỉ cần dựa vào bảng biến thiên để xác định sao cho đường thẳng $y=A(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại k điểm phân biệt.
- Lưu ý quan trọng:

  Các bước giải phương trình logarit có tham số cần chú ý:

  ☐ Bước 1. Đặt điều kiện (điều kiện đại số + điều kiện loga):

  $$\log_a b \xrightarrow{ĐK} \begin{cases} 0<a\ne 1 \\ b>0 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} \log_a\left[f(x)\right] & \xrightarrow[\text{mũ lẻ}]{ĐK} f(x)>0 \\ \log_a\left[f(x)\right] & \xrightarrow[\text{mũ chẵn}]{ĐK} f(x)\ne 0 \end{cases}.$$

  ☐ Bước 2. Dùng các công thức và biến đổi đưa về các phương trình cơ bản rồi giải.

  ☐ Bước 3. So với điều kiện và kết luận giá trị tham số cần tìm.

Câu 1. Cho hàm số $3\log_8\left[2x^2-(2m+3)x+1-2m\right]+\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-x+1-6m\right)=0$. Số các giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $|x_1-x_2|<15$ là:

A. $m<\dfrac{-13}{2}$. **B.** $m<\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{-13}{2}<m<\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$. **D.** $m\le -\dfrac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $3\log_8\left[2x^2-(2m+3)x+1-2m\right]+\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-x+1-6m\right)=0$

$\Leftrightarrow \log_2\left[2x^2-(2m+3)x+1-2m\right]=\log_2\left(x^2-x+1-6m\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x+1-6m>0 \\ 2x^2-(2m+3)x+1-2m=x^2-x+1-6m \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x+1-6m>0 \\ x^2-(2m+2)x+4m=0 \quad (1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x+1-6m>0 \quad (*) \\ \left[\begin{array}{l} x=2m \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases}$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2-2m+1-6m>0 \\ 2^2-2+1-6m>0 \\ 2m\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2-8m+1>0 \\ 3-6m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m<\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$.

Theo giả thiết $|x_1-x_2|<15 \Leftrightarrow (2m-2)^2<225 \Leftrightarrow 4m^2-8m-221<0 \Leftrightarrow \dfrac{-13}{2}<m<\dfrac{17}{2}$.

Do đó $\dfrac{-13}{2}<m<\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$.

Câu 2. Cho phương trình $\log_4 x^2-\log_2(5x-1)+\log_2 m=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

A. $m<0$. **B.** $m<5$. **C.** $0<m<5$. **D.** $m\le -\dfrac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x>\dfrac{1}{5} \\ m>0 \end{cases}$.

Xét phương trình: $\log_4 x^2-\log_2(5x-1)=-\log_2 m \quad (1)$.

$(1)\Leftrightarrow \log_2 x-\log_2(5x-1)=-\log_2 m \Leftrightarrow \log_2\dfrac{5x-1}{x}=\log_2 m \Leftrightarrow \dfrac{5x-1}{x}=m \Leftrightarrow 5-\dfrac{1}{x}=m \quad (2)$.

Xét $f(x)=5-\dfrac{1}{x}$ trên khoảng $\left(\dfrac{1}{5};+\infty\right)$.

Có $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}>0,\ \forall x\in\left(\dfrac{1}{5};+\infty\right)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5-\dfrac{1}{x}\right)=5$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$:

x	$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ 0	↗	5

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ phương trình (2) có nghiệm $x>\dfrac{1}{5}$.

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $0<m<5$.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m để phương trình $4\left(\log_3\sqrt{x}\right)^2-\log_{\frac{1}{3}}x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;1)$.

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$4\left(\log_3\sqrt{x}\right)^2-\log_{\frac{1}{3}}x+m=0\Leftrightarrow\left(2\log_3\sqrt{x}\right)^2+\log_3 x+m=0\Leftrightarrow\left(\log_3 x\right)^2+\log_3 x=-m\ (1)$

Đặt $t=\log_3 x$ với $t\in(-\infty;0)$.

$(1)\Leftrightarrow t^2+t=-m$.

Xét $f(t)=t^2+t$.

$f'(t)=2t+1$

$f'(t)=0\Leftrightarrow t=-\frac{1}{2}$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$-\infty$	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0

Dựa vào bảng biến thiên $-\frac{1}{4}<-m<0\Leftrightarrow 0<m<\frac{1}{4}$.

Vậy không có giá trị nguyên m nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x-3\log_3 x+2m-7=0$ có hai nghiệm thực x_1,x_2 thỏa mãn $(x_1+3)(x_2+3)=72$.

A. $m=\frac{61}{2}$. **B.** $m=3$. **C.** $m=\frac{9}{2}$. **D.** $m=\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=(0;+\infty)$.

Đặt $t=\log_3 x$. Phương trình đã cho trở thành $t^2-3t+2m-7=0\ (*)$.

Để phương trình đã cho có hai nghiệm thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm

$\Leftrightarrow\Delta=(-3)^2-4(2m-7)\ge 0\Leftrightarrow m\le\frac{37}{8}$.

Gọi t_1,t_2 là hai nghiệm của phương trình $(*)$, ta có $\begin{cases}t_1+t_2=3\\ t_1t_2=2m-7\end{cases}$.

Giả sử $\begin{cases} t_1 = \log_3 x_1 \\ t_2 = \log_3 x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3^{t_1} \\ x_2 = 3^{t_2} \end{cases}$.

Theo đề bài ta có $(x_1+3)(x_2+3) = 72 \Leftrightarrow (3^{t_1}+3)(3^{t_2}+3) = 72$

$\Leftrightarrow 3^{t_1+t_2} + 3.3^{t_1} + 3.3^{t_2} = 63 \Leftrightarrow 3^{t_1} + 3^{t_2} = 12$

$\Leftrightarrow 3^{2t_1} - 12.3^{t_1} + 27 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_1 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 1 \end{cases} \end{array}\right.$.

Mặt khác $t_1 t_2 = 2m - 7 \Leftrightarrow 2 = 2m - 7 \Leftrightarrow m = \dfrac{9}{2}$.

Câu 5. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_3(x+3) + m\log_{\sqrt{x+3}} 9 = 16$ có hai nghiệm thỏa mãn $-2 < x_1 < x_2$.

A. 15. **B.** 17. **C.** 14. **D.** 16.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = (-3;+\infty)\setminus\{-2\}$.

Phương trình $\Leftrightarrow \log_3(x+3) + \dfrac{4m}{\log_3(x+3)} = 16$.

Đặt $t = \log_3(x+3)$, phương trình trở thành $t + \dfrac{4m}{t} = 16 \Leftrightarrow t^2 - 16t + 4m = 0$ $(*)$.

Với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình đã cho thỏa mãn $-2 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow 1 < x_1+3 < x_2+3 \Leftrightarrow 0 < \log_3(x_1+3) < \log_3(x_2+3)$.

Do đó, yêu cầu bài toán trở thành tìm m để phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn

$t_2 > t_1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 64 - 4m > 0 \\ -\dfrac{b}{a} = 16 > 0 \\ \dfrac{c}{a} = 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 16.$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1;2;\ldots;15\}$.

Vậy có 15 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 6. Cho hai số thực $a, b > 1$ thỏa mãn $a + b = 2021$. Gọi m, n là hai nghiệm của phương trình $\log_a x \log_b x - 2\log_a x - 2 = 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $mn + 4a$ bằng

A. 8080. **B.** 2032. **C.** 1015. **D.** 3626.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > 0$.

Ta có $\log_a x.\log_b x - 2\log_a x - 2 = 0 \Leftrightarrow \log_b a.\log_a^2 x - 2\log_a x - 2 = 0$.

Đặt $t=\log_a x,$ phương trình trở thành $\log_b a.t^2-2t-2=0\ (1).$

$\Delta'=1+2\log_b a>1+2\log_b 1>0$ nên (1) luôn có hai nghiệm t_1,t_2 với

$t_1+t_2=\dfrac{2}{\log_b a}=2\log_a b=\log_a b^2.$

Xét hai nghiệm m và n, ta có $mn=a^{t_1}a^{t_2}=a^{t_1+t_2}=a^{\log_a b^2}=b^2$

Do đó $mn+4a=b^2+4(2021-b)=b^2-4b+4.2021=(b-2)^2+8080\ge 8080.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $b=2,a=2019.$

Câu 7. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để phương trình $\log_2 x+\log_3(m-x)=2$ có nghiệm thực

A. 15. **B.** 14. **C.** 24. **D.** 21.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\ m>x\end{cases}.$

Đặt: $t=\log_2\left(\dfrac{x}{4}\right)=\log_3\left(\dfrac{1}{m-x}\right)$

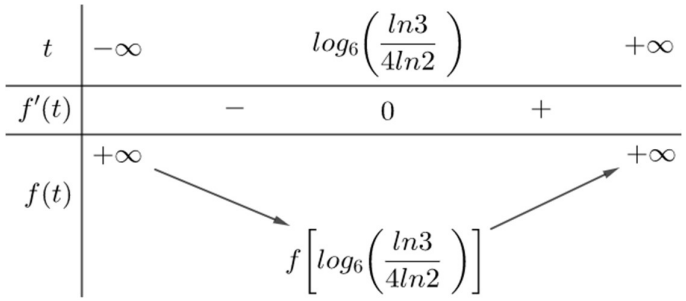
$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{4}=2^t\\ \dfrac{1}{m-x}=3^t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4.2^t\\ m-x=\dfrac{1}{3^t}\end{cases}\Rightarrow m=\frac{1}{3^t}+4.2^t\ (t\in\mathbb{R}).$$

Xét phương trình: $f(t)=\dfrac{1}{3^t}+4.2^t\ (t\in\mathbb{R}).$

$f'(t)=-\dfrac{\ln 3}{3^t}+4.\ln 2.2^t;$

$f'(t)=0\Rightarrow t=\log_6\left(\dfrac{\ln 3}{4\ln 2}\right)\approx-\dfrac{1}{2}.$

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình có nghiệm khi: $m\ge 4,56.$

Mà $m\in\mathbb{Z},m\in(-20;20)\Rightarrow m\in\{5;6;7;...;19\}.$

Vậy có 15 số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 8. Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1)=\log_2(mx-8)$ có hai nghiệm phân biệt là

A. 5. **B.** Vô số. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x>1$

Ta có: $\log_{\sqrt{2}}(x-1)=\log_2(mx-8)\Leftrightarrow\log_2(x-1)^2=\log_2(mx-8)\Leftrightarrow(x-1)^2=mx-8$

$\Leftrightarrow x^2-2x+9=mx$.

Do $x>1$ nên suy ra $\dfrac{x^2-2x+9}{x}=m.$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-2x+9}{x}$ trên khoảng $(1;+\infty)$.

$f'(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2}$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm3.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$			‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	8	↘	4	↗	$+\infty$

Nhìn vào BBT ta thấy, từ yêu cầu của bài toán tìm được $4<m<8$.

Do m nguyên nên $m\in\{5;6;7\}$.

Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\log_3(x+3)+m\log_{\sqrt{x+3}}9=16$ có hai nghiệm thỏa mãn $-2<x_1<x_2$.

A. 17. **B.** 16. **C.** 14. **D.** 15.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $x>-3$ và $x\neq-2$.

Biến đổi phương trình đã cho về phương trình sau: $\log_3(x+3)+4m\log_{(x+3)}3-16=0$.

$\Leftrightarrow\log_3^2(x+3)-16\log_3(x+3)+4m=0$ (1).

Đặt $\log_3(x+3)=t$, phương trình (1) trở thành: $t^2-16t+4m=0$ (2).

Ta có: $\log_3(x+3)=t\Leftrightarrow x=3^t-3$.

Theo điều kiện đề bài thì $x>-2$ nên $3^t-3>-2\Leftrightarrow t>0$.

Vậy để phương trình $\log_3(x+3)+m\log_{\sqrt{x+3}}9=16$ có hai nghiệm thỏa mãn $-2<x_1<x_2$ thì phương trình (2) phải có hai nghiệm t dương phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ t_1+t_2=16>0\\ t_1.t_2=4m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}64-4m>0\\ 4m>0\end{cases}\Leftrightarrow0<m<16.$$

Vậy có 15 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m nhỏ hơn 2022 để phương trình $\log_5\left(m+\sqrt{m+5^x}\right)-2x=0$ có nghiệm thực?

A. 2022. **B.** 2018. **C.** 2021. **D.** 1011.

Lời giải

Chọn A

Phương trình đã cho tương đương với phương trình :

$m+\sqrt{m+5^x}=5^{2x} \Leftrightarrow \left(m+5^x\right)+\sqrt{m+5^x}=5^{2x}+5^x$

Ta có $\sqrt{m+5^x} \geq 0$, $5^x>0$

Xét hàm đặc trưng $f(t)=t^2+t$ trên $(0;+\infty)$.

$f'(t)=2t+1 \geq 0, \forall t \in (0;+\infty)$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ do đó $(1) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{m+5^x}\right)=f\left(5^x\right) \Leftrightarrow \sqrt{m+5^x}=5^x$

$\Leftrightarrow m=5^{2x}-5^x$.

Đặt $a=5^x$, $a>0$. Ta có $\Leftrightarrow m=g(a)=a^2-a$.

a	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g(a)$	0	$\searrow$	$\frac{-1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{4}$ mà m nguyên dương nhỏ hơn 2022 nên $m \in \{1;2;3;...;2022\}$.

Vậy có 2022 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 11: Cho phương trình $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}^2(x+1)^2+4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x+1}+4m-4=0$. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên âm để phương trình có nghiệm thực trong đoạn $\left[-\frac{1}{2};1\right]$?

A. 6 . **B.** 5 . **C.** 2 . **D.** 3 .

Lời giải

Chọn D

Trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};1\right]$ thì phương trình luôn xác định.

Với m nguyên âm ta có $m \neq 1$, do đó phương trình đã cho trở thành

$4(m-1)\log_{\frac{1}{2}}^2(x+1)-4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}(x+1)+4m-4=0$

$\Leftrightarrow (m-1)\log_{\frac{1}{2}}^2(x+1)-(m-5)\log_{\frac{1}{2}}(x+1)+m-1=0$

Đặt $t=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$, với $x\in\left[-\frac{1}{2};1\right]$ thì $-1\le t\le 1$. Ta có phương trình

$(m-1)t^2-(m-5)t+m-1=0\Leftrightarrow m\left(t^2-t+1\right)=t^2-5t+1\Leftrightarrow m=\frac{t^2-5t+1}{t^2-t+1}\ (*)$

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2-5t+1}{t^2-t+1}$ với $-1\le t\le 1$.

Ta có $f'(t)=\frac{4t^2-4}{\left(t^2-t+1\right)^2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\pm 1$.

$f(-1)=\frac{7}{3}$, $f(1)=-3$

Do đó $\min\limits_{[-1;1]}f(t)=-3$ và $\max\limits_{[-1;1]}f(t)=\frac{7}{3}$.

Phương trình đã cho có nghiệm thực trong đoạn $\left[-\frac{1}{2};1\right]$ khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm

$\forall t\in[-1;1]\Leftrightarrow \min\limits_{[-1;1]}f(t)\le m\le \max\limits_{[-1;1]}f(t)\Leftrightarrow -3\le m\le\frac{7}{3}$.

Do m nguyên âm nên $m\in\{-3;-2;-1\}$.

Câu 12. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-10;10)$ để phương trình $3^{x-1}=\log_{27}(x+3m)+m$ có nghiệm?

A. 9. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x+3m>0$

Ta có $3^{x-1}=\log_{27}(x+3m)+m\Leftrightarrow 3^x=\log_3(x+3m)+3m$

Đặt $t=\log_3(x+3m)$, ta có ta có $\begin{cases}3^x=t+3m\\3^t=x+3m\end{cases}\Rightarrow 3^x+x=3^t+t$

Xét $f(u)=3^u+u$ có $f'(u)=3^x\ln 3+3>0\Rightarrow f(u)$ đồng biến, ta có

$3^x+x=3^t+t\Leftrightarrow f(x)=f(t)\Leftrightarrow x=t\Leftrightarrow x=\log_3(x+3m)\Leftrightarrow 3^x-x=3m\ (*)$

Xét hàm số $g(x)=3^x-x$ có $g'(x)=3^x\ln 3-1$; $g'(x)=0\Leftrightarrow x=\log_3\frac{1}{\ln 3}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\log_3\frac{1}{\ln 3}$	$+\infty$
$g'(x)$		0	
$g(x)$	$+\infty$	$g\left(\log_3\frac{1}{\ln 3}\right)$	$+\infty$

Phương trình $(*)$ có nghiệm khi $3m\ge\log_3\frac{1}{\ln 3}\Leftrightarrow m\ge\frac{1}{3}\log_3\frac{1}{\ln 3}\Rightarrow m\in\{0;1;2...9\}$.

Câu 13. Cho phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x+m)+\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\sqrt{2}-x\right)=0(1)$. Với m là giá trị của tập $S=\{m\mid m<49;m\in\mathbb{Z}\}$ để phương trình (1) có nghiệm. Tính tổng lập phương tất cả các phần tử của S

A. 1382975. **B.** 1382976. **C.** 1382977. **D.** 1382978.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_{\sqrt{2}}(x+m)+\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\sqrt{2}-x\right)=0\Leftrightarrow\log_{\sqrt{2}}(x+m)=\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}-x\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x<\sqrt{2}\\x=\dfrac{\sqrt{2}-m}{2}\end{cases}$.

Vì $x<\sqrt{2}$ nên $\dfrac{\sqrt{2}-m}{2}<\sqrt{2}\Leftrightarrow m>-\sqrt{2}$.

Kết hợp với $m\in\mathbb{Z}$, $m<49$. Khi đó $-\sqrt{2}<m<49$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=\{-1;0;1...48\}$ có 50 giá trị.

Vậy tổng S các giá trị của m để phương trình có nghiệm là:

$S=(-1)^3+0^3+\left(1^3+2^3+3^3+...+28^3\right)=-1+\dfrac{48^2.49^2}{4}=1382975$.

Câu 14. Cho phương trình

$\dfrac{1}{5}\log_{\sqrt{2}}\left[2x^2-(m+3)x+1-m\right]^5+\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(x^2-x+1-3m\right)=0$. Số các giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2\le 20$ là:

A. 13 **B.** 9 **C.** 14 **D.** 5

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\dfrac{1}{5}\log_{\sqrt{2}}\left[2x^2-(m+3)x+1-m\right]^5+\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(x^2-x+1-3m\right)=0$

$\Leftrightarrow\log_{\sqrt{2}}\left[2x^2-(m+3)x+1-m\right]=\log_{\sqrt{2}}\left(x^2-x+1-3m\right)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-x+1-3m>0\\2x^2-(m+3)x+1-m=x^2-x+1-3m\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-x+1-3m>0(*)\\x^2-(m+2)x+2m=0\ (1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-x+1-3m>0(*)\\\left[\begin{array}{l}x=m\\x=2\end{array}\right.\end{cases}$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn (*) $\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-m+1-3m>0\\2^2-1+1-3m>0\\m\ne 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-4m+1>0\\4-3m>0\end{cases}\Leftrightarrow m<2-\sqrt{3}$.

Theo giả thiết $x_1^2+x_2^2\le 20$ *hay* $m^2+4\le 20\Leftrightarrow m^2\le 16\Leftrightarrow -4\le m\le 4$

Do đó $-4\le m<2-\sqrt{3}$. Vậy số các giá trị nguyên của m thỏa mãn là 5.

Câu 15. Cho phương trình $\ln\left[\ln\left(\cos x+m\right)+m\right]=\cos x\,(1)$. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm.

A. $1\le m\le e^{-1}-1$ **B.** $e^{-1}-1\le m\le e^{-1}+1$ **C.** $-1\le m\le 1$ **D.** $1\le m\le e-1$

Lời giải

Chọn D

Đặt $u=\ln\left(\cos x+m\right)$ ta được hệ phương trình: $\begin{cases}u=\ln\left(m+\cos x\right)\\ \ln\left(m+u\right)=\cos x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e^{u}=m+\cos x\\ e^{\cos x}=m+u\end{cases}$

Từ hệ phương trình ta suy ra: $e^{u}+u=e^{\cos x}+\cos x\ (*)$

Xét hàm số $f\left(t\right)=e^{t}+t$ có $f'\left(t\right)=e^{t}+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$.

Hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\left(-\infty;+\infty\right)$

$(*)\Leftrightarrow f\left(u\right)=f\left(\cos x\right)\Leftrightarrow u=\cos x$

Khi đó ta được: $\ln\left(m+\cos x\right)=\cos x\Leftrightarrow e^{\cos x}-\cos x=m\,(**)$;

Đặt $z=\cos x, z\in\left[-1;1\right]$. Phương trình $(**)$ trở thành: $e^{z}-z=m\,(**)$

Xét hàm số: $g\left(z\right)=e^{z}-z$ trên $\left[-1;1\right]$.

Hàm số $g\left(z\right)=e^{z}-z$ liên tục trên $\left[-1;1\right]$; $g'\left(z\right)=e^{z}-1$; $g'\left(z\right)=0\Leftrightarrow e^{z}-1=0\Leftrightarrow z=0$ và có Bảng biến thiên

z	−1		0		1
g'(z)		-	0	+	
g(z)	$e^{-1}+1$	↘	1	↗	$e-1$

Do đó $\max\limits_{[-1;1]}g\left(z\right)=g\left(1\right)=e-1,\min\limits_{[-1;1]}g\left(z\right)=g\left(0\right)=1$

Hệ phương trình ban đầu có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $(**)$ có nghiệm $\Leftrightarrow 1\le m\le e-1$.

Câu 16. Cho phương trình $3^{m\cos 2x-\sin 2x}-3^{2(1-\sin 2x)}=2-\sin 2x-m\cos 2x$ với m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên dương bé hơn 2021 để phương trình có nghiệm.

A. 2019. **B.** 2018. **C.** 2020. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn A

Ta có $3^{m\cos 2x-\sin 2x}-3^{2(1-\sin 2x)}=2-\sin 2x-m\cos 2x$

$\Leftrightarrow 3^{m\cos 2x-\sin 2x}+m\cos 2x-\sin 2x=3^{2(1-\sin 2x)}+2\left(1-\sin 2x\right)$

Xét hàm số $f\left(t\right)=3^{t}+t\ \left(t\in\mathbb{R}\right)$, $f'\left(t\right)=3^{t}\ln 3+1>0\Rightarrow f\left(t\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $3^{m\cos 2x-\sin 2x}+m\cos 2x-\sin 2x=3^{2(1-\sin 2x)}+2\left(1-\sin 2x\right)$

$\Leftrightarrow m\cos 2x-\sin 2x=2\left(1-\sin 2x\right)$

$\Leftrightarrow m\cos 2x+\sin 2x=2$. Phương trình có nghiệm khi $m^{2}+1\ge 4\Leftrightarrow m^{2}\ge 3$.

$\Rightarrow m\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3};+\infty\right)$. Do $m\in\mathbb{Z}^{+}, m<2021$ nên có 2019 giá trị của tham số m.

Câu 17. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $\left(-2022;2022\right)$ để phương trình $10^{x}=\log\left(x+3m\right)+3m$ có nghiệm?

A. 2020 . **B.** 4042 . **C.** 4040 . **D.** 2021 .

Lời giải

Chọn D

Ta có: $10^x = \log(x+3m)+3m$

$\Leftrightarrow 10^x + x = \log(x+3m)+x+3m$

$\Leftrightarrow 10^x + x = \log(x+3m)+10^{\log(x+3m)}$ (1)

Xét hàm số: $f(t)=10^t+t;\forall t\in\mathbb{R}$.

$f'(t)=10^t\ln 10+1>0;\forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình (1) $\Leftrightarrow x=\log(x+3m)\Leftrightarrow x+3m=10^x\Leftrightarrow 10^x-x=3m$ (2).

Đặt $g(x)=10^x-x\Rightarrow g'(x)=10^x\ln 10-1; g'(x)=0\Leftrightarrow x=\log\left(\frac{1}{\ln 10}\right)$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\log\left(\frac{1}{\ln 10}\right)$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{\ln 10}-\log\left(\frac{1}{\ln 10}\right)\approx 0,8$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy: để phương trình (2) có nghiệm thì:

$3m\ge\frac{1}{\ln 10}-\log\left(\frac{1}{\ln 10}\right)\Leftrightarrow m\ge\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\ln 10}-\log\left(\frac{1}{\ln 10}\right)\right)\approx 0,3$.

Vì $m\in\mathbb{Z}\cap(-2022;2022)$ nên $m\in\{1;2;3;....;2021\}$.

Vậy có 2021 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu đề.

Câu 18. Cho phương trình $\log_2{}^2 x-2\log_2 x-\sqrt{m+\log_2 x}=m(*)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2021;2022]$ để phương trình (*) có nghiệm?

A. 2021 . **B.** 2022 . **C.** 4042 . **D.** 2024 .

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\ m+\log_2 x\ge 0\end{cases}$.

$\log_2{}^2 x-2\log_2 x-\sqrt{m+\log_2 x}=m\Leftrightarrow 4\log_2{}^2 x-8\log_2 x-4\sqrt{m+\log_2 x}=4m$

$\Leftrightarrow 4\log_2{}^2 x-4\log_2 x+1=4\sqrt{m+\log_2 x}+4(m+\log_2 x)+1$

$\Leftrightarrow(2\log_2 x-1)^2=\left(2\sqrt{m+\log_2 x}+1\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\sqrt{m+\log_2 x}+1=2\log_2 x-1\\ 2\sqrt{m+\log_2 x}+1=-2\log_2 x+1\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{m+\log_2 x}=\log_2 x-1\\ \sqrt{m+\log_2 x}=-\log_2 x\end{array}\right.$

* **TH 1:** $\sqrt{m+\log_2 x}=-\log_2 x \Leftrightarrow \begin{cases}\log_2 x\le 0\\ m+\log_2 x=\log_2^2 x\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}0<x\le 1\\ \log_2^2 x-\log_2 x-m=0(1)\end{cases}$

Đặt: $t=\log_2 x(t\le 0)$, phương trình (1) trở thành: $t^2-t-m=0\Leftrightarrow t^2-t=m(2)$

Đặt: $g(t)=t^2-t(t\in(-\infty;0]$.Bài toán trở thành: Tìm giá trị của tham số m để phương trình (2) có ít nhất 1 nghiệm $t\le 0$

Ta có: $g(t)=t^2-t\Rightarrow g'(t)=2t-1<0\forall t\le 0$

Ta có BBT:

t	$-\infty$		0
$g'(t)$		$-$	
$g(t)$	$+\infty$	↘	0

Dựa vào BBT, suy ra: để phương trình (2) có ít nhất 1 nghiệm $t\le 0$ thì $m\ge 0$ (*)

* **TH 2:** $\sqrt{m+\log_2 x}=\log_2 x-1\Leftrightarrow \begin{cases}\log_2 x\ge 1\\ m+\log_2 x=\log_2^2 x-2\log_2 x+1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\log_2 x\ge 1\\ \log_2^2 x-3\log_2 x+1-m=0(3)\end{cases}$

Đặt: $t=\log_2 x(t\ge 1)$, phương trình (1) trở thành: $t^2-3t+1-m=0\Leftrightarrow m=t^2-3t+1(4)$

Đặt: $g(t)=t^2-t+1, t\in[1;+\infty)$

Ta có: $g(t)=t^2-3t+1\Rightarrow g'(t)=2t-3$

$g'(t)=0\Leftrightarrow 2t-3=0\Leftrightarrow t=\dfrac{3}{2}\in[1;+\infty)$

Bài toán trở thành: Tìm giá trị của tham số m để phương trình (4) có ít nhất 1 nghiệm $t\ge 1$

Ta có BBT:

t	1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	-1	↘	$-\frac{5}{4}$	↗	$+\infty$

Dựa vào BBT, suy ra: để phương trình (4) có ít nhất 1 nghiệm $t\ge 1$ thì $m\ge -\dfrac{5}{4}$ (**)

Kết hợp (*) và (**), $m\in[-2021;2022]\Rightarrow m\in\{-1;0;1;2;...;2022\}$

Vậy có tất cả 2024 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\ln\left(m+\ln\left(m+\cos x\right)\right)=\cos x$ có nghiệm.

A. $\dfrac{1}{e}+1\le m\le e-1$. **B.** $1\le m\le e-1$. **C.** $1\le m\le \dfrac{1}{e}+1$. **D.** $1\le m<e-1$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $u=\ln\left(m+\cos x\right)$ ta được hệ phương trình: $\begin{cases}u=\ln\left(m+\cos x\right)\\ \ln\left(m+u\right)=\cos x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e^{u}=m+\cos x\\ e^{\cos x}=m+u\end{cases}$

Từ hệ phương trình ta suy ra: $e^{u}+u=e^{\cos x}+\cos x\ \left(*\right)$

Xét hàm số $f\left(t\right)=e^{t}+t$ có $f'\left(t\right)=e^{t}+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$. Hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$\left(*\right)\Leftrightarrow f\left(u\right)=f\left(\cos x\right)\Leftrightarrow u=\cos x$

Khi đó ta được: $\ln\left(m+\cos x\right)=\cos x\Leftrightarrow e^{\cos x}-\cos x=m\left(**\right)$

Đặt $z=\cos x, z\in\left[-1;1\right]$. Phương trình $\left(**\right)$ trở thành: $e^{z}-z=m\left(**\right)$

Xét hàm số: $g\left(z\right)=e^{z}-z$ trên $\left[-1;1\right]$.

Hàm số $g\left(z\right)=e^{z}-z$ liên tục trên $\left[-1;1\right]$ và có $\max\limits_{[-1;1]}g\left(z\right)=g\left(1\right)=e-1,\min\limits_{[-1;1]}g\left(z\right)=g\left(0\right)=1$

Ta có bảng biến thiên:

x	-1		0		1
g'		$-$	0	$+$	
g	$\frac{1}{e}-1$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$e-1$

Hệ phương trình ban đầu có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $\left(**\right)$ có nghiệm $\Leftrightarrow\ 1\le m\le e-1$.

Câu 20. Giá trị nào của m để phương trình $\log_3^2 x+\sqrt{\log_3^2 x+1}-2m-1=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[1;\ 3^{\sqrt{3}}\right]$.

A. $1\le m\le 16$. **B.** $4\le m\le 8$. **C.** $3\le m\le 8$. **D.** $0\le m\le 2$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x>0$. Đặt $t=\sqrt{\log_3^2 x+1}\ge 1$, ta được phương trình $t^2+t-2m-2=0\quad\left(*\right)$.

Ta có $x\in\left[1;\ 3^{\sqrt{3}}\right]\Leftrightarrow 0\le\log_3 x\le\sqrt{3}\Leftrightarrow 1\le t=\sqrt{\log_3^2 x+1}\le 2$.

Phương trình đã cho có nghiệm thuộc $x\in\left[1;\ 3^{\sqrt{3}}\right]\Leftrightarrow\left(*\right)$ có nghiệm $t\in\left[1;\ 2\right]$.

Đặt $f\left(t\right)=t^2+t$, với $t\in\left[1;\ 2\right]$.

Hàm số $f\left(t\right)$ là hàm đồng biến trên đoạn $\left[1;\ 2\right]$. Ta có $f\left(1\right)=2$ và $f\left(2\right)=6$.

Phương trình $t^2+t=2m+2\ \Leftrightarrow\ f\left(t\right)=2m+2$ có nghiệm $t\in\left[1;\ 2\right]\ \Leftrightarrow\ f\left(1\right)\le 2m+2\le f\left(2\right)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}f\left(1\right)\le 2m+2\\ 2m+2\le f\left(2\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\le 2m+2\\ 2m+2\le 6\end{cases}\Leftrightarrow\ 0\le m\le 2$.

Câu 21. Cho Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $\left(-2021;2021\right)$ để phương trình $10^{x}=\log\left(x+3m\right)+3m$ có nghiệm?

A. 2021. **B.** 2020. **C.** 2010. **D.** 4040.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $10^x = \log(x+3m)+3m$

$\Leftrightarrow 10^x + x = \log(x+3m)+x+3m$

$\Leftrightarrow 10^x + x = \log(x+3m)+10^{\log(x+3m)}$ (1)

Xét hàm số: $f(t)=10^t+t;\forall t\in\mathbb{R}$.

$f'(t)=10^t\ln 10+1>0;\forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình (1) $\Leftrightarrow x=\log(x+3m)\Leftrightarrow x+3m=10^x\Leftrightarrow 10^x-x=3m$ (2).

Đặt $g(x)=10^x-x\Rightarrow g'(x)=10^x\ln 10-1; g'(x)=0\Leftrightarrow x=\log\left(\frac{1}{\ln 10}\right)$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\log\left(\frac{1}{\ln 10}\right)$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{\ln 10}-\log\left(\frac{1}{\ln 10}\right)\approx 0,8$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy: để phương trình (2) có nghiệm thì:

$$3m\ge\frac{1}{\ln 10}-\log\left(\frac{1}{\ln 10}\right)\Leftrightarrow m\ge\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\ln 10}-\log\left(\frac{1}{\ln 10}\right)\right)\approx 0,3.$$

Vì $m\in\mathbb{Z}\cap(-2021;2021)$ nên $m\in\{1;2;3;....;2020\}$.

Vậy có 2020 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu đề.

Câu 22. Có bao nhiêu giá trị m nguyên trong $[-2017;2017]$ để phương trình $\log(mx)=2\log(x+1)$ có nghiệm duy nhất?

A. 2017. **B.** 4014. **C.** 2018. **D.** 4015.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$\log(mx)=2\log(x+1)\Leftrightarrow\begin{cases}mx>0\\x+1>0\\\log(mx)=\log(x+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}mx>0\\x+1>0\\mx=(x+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\mx=x^2+2x+1\end{cases}(1)$$

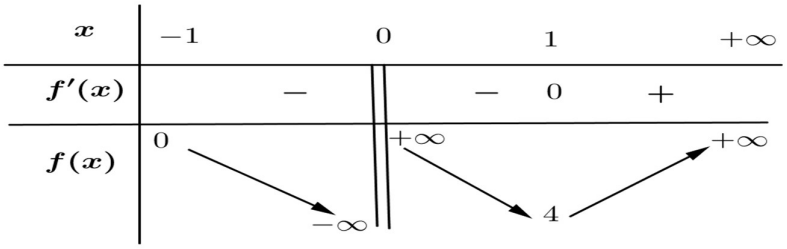
Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình (1).

Với $-1<x\neq 0$ ta có phương trình (1) trở thành $m=x+\frac{1}{x}+2$ (2).

Xét hàm số $f(x)=x+\frac{1}{x}+2$, $x\in(-1;+\infty)\setminus\{0\}$.

Ta có $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=0\Rightarrow x=\pm 1$

Bảng biến thiên



Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi phương trình (2) có nghiệm duy nhất trên $(-1;+\infty)\setminus\{0\}$.

Từ bảng biến thiên suy ra $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m=4 \end{array}\right.$.

Vì $m\in[-2017;2017]\Rightarrow\left[\begin{array}{l} m\in\{-1;-2;...;-2017\} \\ m=4 \end{array}\right.\Rightarrow$ có 2018 giá trị m thỏa mãn.

Câu 23. Cho phương trình $4^{-|x-m|}.\log_{\sqrt{2}}\left(x^2-2x+3\right)+2^{2x-x^2}.\log_{\frac{1}{2}}\left(2|x-m|+2\right)=0$ với m là tham số. Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $4^{-|x-m|}.\log_{\sqrt{2}}\left(x^2-2x+3\right)+2^{2x-x^2}.\log_{\frac{1}{2}}\left(2|x-m|+2\right)=0$

$\Leftrightarrow 4^{-|x-m|}.\log_{\frac{1}{2^2}}\left(x^2-2x+3\right)+2^{2x-x^2}.\log_{2^{-1}}\left(2|x-m|+2\right)=0$

$\Leftrightarrow 2.4^{-|x-m|}.\log_2\left(x^2-2x+3\right)-2^{2x-x^2}.\log_2\left(2|x-m|+2\right)=0$

$\Leftrightarrow 2.4^{-|x-m|}.\log_2\left(x^2-2x+3\right)=2^{2x-x^2}.\log_2\left(2|x-m|+2\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{2.\log_2\left(x^2-2x+3\right)}{2^{2x-x^2}}=\dfrac{\log_2\left(2|x-m|+2\right)}{4^{-|x-m|}}$

$\Leftrightarrow 2.2^{x^2-2x}.\log_2\left(x^2-2x+3\right)=2^{2|x-m|}.\log_2\left(2|x-m|+2\right)$

$\Leftrightarrow 2^3.2^{x^2-2x}.\log_2\left(x^2-2x+3\right)=2^2.2^{2|x-m|}.\log_2\left(2|x-m|+2\right)$

$\Leftrightarrow 2^{x^2-2x+3}.\log_2\left(x^2-2x+3\right)=2^{2|x-m|+2}.\log_2\left(2|x-m|+2\right)$ (1)

Xét hàm số $y=f(t)=2^t.\log_2 t$ với $t\ge 2$, có $f'(t)=2^t.\ln 2.\log_2 t+2^t.\dfrac{1}{t\ln 2}>0,\forall t\ge 2$.

Suy ra hàm số $y=f(t)=2^t.\log_2 t$ đồng biến trên nửa khoảng $[2;+\infty)$.

Khi đó

$(1) \Leftrightarrow f\left(x^2-2x+3\right)=f\left(2|x-m|+2\right)$

$\Leftrightarrow x^2-2x+3=2|x-m|+2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x+1=2(x-m) \\ x^2-2x+1=2(m-x) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} (x-2)^2=-2m+3 & (2) \\ x^2=2m-1 & (3) \end{array}\right.$

Trường hợp 1: Phương trình (3) có 1 nghiệm kép và phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1=0 \\ -2m+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\dfrac{1}{2} \\ m<\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$.

Trường hợp 2: Phương trình (2) có 1 nghiệm kép và phương trình (3) có 2 nghiệm phân biệt khác 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1>0 \\ 2m-1\neq 4 \\ -2m+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>\dfrac{1}{2} \\ m\neq\dfrac{5}{2} \\ m=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2}$.

Vậy tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt là $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}=2$.

Câu 24. Cho phương trìn $4^{-|x-m|}\log_{\sqrt{2}}\left(x^2-2x+3\right)+2^{-x^2+2x}\log_{\frac{1}{2}}\left(2|x-m|+2\right)=0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình trên có đúng hai nghiệm thực phân biệt.

A. $m<\dfrac{1}{2}$ hoặc $m>\dfrac{3}{2}$. **B.** $m>\dfrac{1}{2}$. **C.** $m<\dfrac{3}{2}$. **D.** $m<-\dfrac{3}{2}$ hoặc $m>-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$4^{-|x-m|}\log_{\sqrt{2}}\left(x^2-2x+3\right)+2^{-x^2+2x}\log_{\frac{1}{2}}\left(2|x-m|+2\right)=0$

$\Leftrightarrow 2^{1-2|x-m|}\log_{\sqrt{2}}\left(x^2-2x+3\right)=2^{-x^2+2x}\log_2\left(2|x-m|+2\right) \Leftrightarrow \dfrac{\log_{\sqrt{2}}\left(x^2-2x+3\right)}{2^{3-\left(x^2-2x+3\right)}}=\dfrac{\log_2\left(2|x-m|+2\right)}{2^{3-(2+2|x-m|)}}$

Xét hàm số $f(u)=\dfrac{\log_2 u}{2^{3-u}}=\dfrac{2^u\log_2 u}{8}$ với $u\geq 2$. Ta có $f'(u)=\dfrac{1}{8}\left(2^u\log_2 u.\ln 2+\dfrac{2^u}{u.\ln 2}\right)>0$

$\forall u\geq 2$. Suy ra hàm số $f(u)$ đồng biến trên $[2;+\infty)$ nên

$f\left(x^2-2x+3\right)=f\left(2|x-m|+2\right)\Leftrightarrow (x-1)^2=2|x-m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x+1+2m=0(1) \\ x^2+1-2m=0(2) \end{array}\right.$. phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt.

TH1: Phương trình (1) có nghiệm hai 2 nghiệm phân biệt, phương trình (2) vô nghiệm suy ra $\begin{cases}3-2m>0\\2m-1<0\end{cases}\Leftrightarrow m<\frac{1}{2}(I)$

TH2: Phương trình (2) có nghiệm hai 2 nghiệm phân biệt, phương trình (1) vô nghiệm suy ra $\begin{cases}3-2m<0\\2m-1>0\end{cases}\Leftrightarrow m>\frac{3}{2}(II)$

TH3: Phương trình (1) và (2) đều có hai nghiệm phân biệt và hai nghiệm này giống nhau $\begin{cases}3-2m>0\\2m-1>0\end{cases}\Leftrightarrow \frac{1}{2}<m<\frac{3}{2}(III)$

Gọi $a;b\ (b\neq a)$ là hai nghiệm của phương trình (1), theo định lý viet ta có $\begin{cases}a+b=4\\a.b=2m+1\end{cases}$. Vì $a;b$ cung là nghiệm của phương trình (2) nên $\begin{cases}a+b=0\\a.b=-2m+1\end{cases}$ suy ra vô lý vậy $m\in\varnothing$ (III)

Vậy từ (I) ; (II) và (III) suy ra $m<\frac{1}{2}$ hoặc $m>\frac{3}{2}$.

Câu 25. Cho phương trình $(m-1)\log_{\frac{1}{3}}^2(x+1)^2+4(m-5)\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{x+1}+4m-4=0(1)$. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên

âm để phương trình (1) có nghiệm thực trên đoạn $\left[-\frac{2}{3};2\right]$?

A. 6 . **B.** 5 . **C.** 2 . **D.** 3 .

Lời giải

Chọn D

Ta có

$(1)\Leftrightarrow 4(m-1)\log_{\frac{1}{3}}^2(x+1)-4(m-5)\log_{\frac{1}{3}}(x+1)+4m-4=0$

$\Leftrightarrow (m-1)\log_{\frac{1}{3}}^2(x+1)-(m-5)\log_{\frac{1}{3}}(x+1)+m-1=0$

Đặt $t=\log_{\frac{1}{3}}(x+1)$ với $x\in\left[-\frac{2}{3};2\right]$ thì $-1\le t\le 1$ ta có phương trình:

$(m-1)t^2-(m-5)t+m-1=0\Leftrightarrow m(t^2-t+1)=t^2-5t+1\Leftrightarrow m=\frac{t^2-5t+1}{t^2-t+1}(2)$

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2-5t+1}{t^2-t+1}$ với $-1\le t\le 1$. Ta có $f'(t)=\frac{4t^2-4}{(t^2-t+1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-1\end{array}\right.$

$f(-1)=\frac{7}{3};f(1)=-3$. Do đó $\min\limits_{[-1;1]}f(t)=-3;\max\limits_{[-1;1]}f(t)=\frac{7}{3}$

Phương trình đã cho có nghiệm thực trong đoạn $\left[-\frac{2}{3};2\right]$ khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t\in[-1;1]\Leftrightarrow\min\limits_{[-1;1]}f(t)\le m\le\max\limits_{[-1;1]}f(t)\Leftrightarrow -3\le m\le\frac{7}{3}$

Như vậy các giá trị nguyên âm của m cần tìm là $\{-3;-2;-1\}$

Câu 26. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại đúng một bộ số thực $(x;y)$ thỏa mãn $\log_2^2(x+y)-4m\log_2(x^2+y^2)+15-3m=0$. Tính tổng bình phương giá trị tất cả các phần tử của tập S đó

A. $\frac{144}{289}$ **B.** $\frac{45}{4}$ **C.** $\frac{225}{256}$ **D.** $\frac{41}{16}$

Lời giải

Chọn C

Áp dụng quy tắc cần và đủ, ta nhận thấy vai trò của hai ẩn x và y là như nhau. Nếu $(x;y)$ thỏa mãn thì $(y;x)$ cũng thỏa mãn. Vì vậy, muốn bộ số $(x;y)$ thỏa mãn là duy nhất thì tất cả các biến phải bằng nhau. Suy ra $x=y$. Phương trình trở thành như sau:

$\Leftrightarrow \log_2^2(2x)-4m\log_2(2x^2)+15-3m=0 \Leftrightarrow (1+\log_2 x)^2-4m(1+2\log_2 x)+15-3m=0$

$\Leftrightarrow \log_2^2(x)-2(4m-1)\log_2 x+16-7m=0$

Để có duy nhất nghiệm thực x thì $\Delta'=(4m-1)^2-(16-7m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\frac{-15}{16} \end{array}\right.$

Ta thử lại:

Với $m=1$, ta có: $\log_2^2(x+y)-4\log_2(x^2+y^2)+12=0$

Dễ thấy cho $y=0 \Rightarrow \log_2^2(x)-4\log_2(x^2)+12=0 \Leftrightarrow \log_2^2(x)-8\log_2(x)+12=0$

Do phương trình trên có hai nghiệm nên suy ra trường hợp này loại

Với $m=\frac{-15}{16}$, ta có: $\log_2^2(x+y)+\frac{15}{4}\log_2(x^2+y^2)+\frac{285}{16}=0$

Đánh giá thông qua bất đẳng thức Bunyakovsky, ta nhận thấy:

$0=\log_2^2(x+y)+\frac{15}{4}\log_2(x^2+y^2)+\frac{285}{16} \ge \log_2^2(x+y)+\frac{15}{4}\log_2\left(\frac{(x+y)^2}{2}\right)+\frac{285}{16}$

$\Leftrightarrow 0 \ge \log_2^2(x+y)+\frac{15}{2}\log_2(x+y)+\frac{225}{16}=\left[\log_2(x+y)+\frac{15}{4}\right]^2 \Leftrightarrow \log_2(x+y)=-\frac{15}{4}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\left\{\begin{array}{l} x=y \\ x+y=2^{\frac{-15}{4}}=\frac{1}{8\sqrt[4]{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{16\sqrt[4]{2}}$ (thỏa mãn)

Suy ra $S=\left\{\frac{-15}{16}\right\} \Rightarrow$ Tổng bình phương bằng: $\frac{225}{256}$

Câu 27. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thức của tham số m để tồn tại duy nhất bộ ba số thực $(x;y;z)$ thỏa mãn điều kiện $\log_2^2(2x^2+y^2+z^2)-2m\log_2(4x+2y+2z)\le 0$. Tích tất cả các phần tử của tập S tương ứng bằng:

A. 0. **B.** -16. **C.** 6. **D.** 12.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $2x+y+z>0$.

Ta có $2x+y+z=\sqrt{2}\sqrt{2}x+y+z \le 2\sqrt{2x^2+y^2+z^2}$ hay $4x+2y+2z \le 4\sqrt{2x^2+y^2+z^2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$.

Khi đó $4x+2y+2z\le 4\sqrt{2x^2+y^2+z^2}\Rightarrow \log_2\left(4x+2y+2z\right)\le 2+\frac{1}{2}\log_2\left(2x^2+y^2+z^2\right)$

$\Leftrightarrow \log_2\left(2x^2+y^2+z^2\right)\ge 2\left[\log_2\left(4x+2y+2z\right)-2\right]$.

$\log_2^2\left(2x^2+y^2+z^2\right)-2m\log_2\left(4x+2y+2z\right)\le 0$

$2m\log_2\left(4x+2y+2z\right)\ge \log_2^2\left(2x^2+y^2+z^2\right)\ge 4\left[\log_2\left(4x+2y+2z\right)-2\right]^2$.

Đặt $t=\log_2\left(4x+2y+2z\right)$ ta được $4\left(t-2\right)^2\le 2mt\ \Leftrightarrow 2t^2-\left(m+8\right)t+8\le 0$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\ 2t^2-\left(m+8\right)t+8\le 0$ có đúng một giá trị $t\ \Leftrightarrow \left(m+8\right)^2-64=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=0\\ m=-16\end{array}\right.$.

* Khi $m=0$ thì $t=2\ \Leftrightarrow \log_2\left(4x+2y+2z\right)=2\ \Leftrightarrow 2x+y+z=2$.

Mặt khác dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$ nên $x=y=z=\frac{1}{2}$.

* $m=-16$ tương tự $x=y=z=\frac{1}{32}$. Vậy $S=\left\{0;-16\right\}$.

Câu 28. Cho hai số thực x,y thỏa mãn hệ thức $2^{2|y|-x^2}=\log_{2|y|+1}x$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên $m\in\left[-40;40\right]$ để tồn tại duy nhất một số thực x thỏa mãn hệ thức $4y^2-10x^2-mx-1=0$?

A. 51. **B.** 52. **C.** 53. **D.** 31.

Lời giải

+) Vì $2^{2|y|-x^2}>0,\forall x;y$ nên với $y\ne 0$ thì $\log_{2|y|+1}x>0\Leftrightarrow x>1$.

Do đó điều kiện của bài toán là $\begin{cases} x>1\\ y\ne 0\end{cases}$.

+) Khi đó $2^{2|y|-x^2}=\log_{2|y|+1}x\Leftrightarrow 2.2^{2|y|-x^2}=2\log_{2|y|+1}x\Leftrightarrow 2^{2|y|+1-x^2}=\log_{2|y|+1}x^2$

$\Leftrightarrow \frac{2^{2|y|+1}}{2^{x^2}}=\frac{\log_2 x^2}{\log_2\left(2|y|+1\right)}\Leftrightarrow 2^{2|y|+1}\log_2\left(2|y|+1\right)=2^{x^2}\log_2 x^2$.

Xét hàm đặc trưng $f\left(t\right)=2^t.\log_2 t$ trên $\left(1;+\infty\right)$, ta có $f'\left(t\right)=2^t.\ln 2.\log_2 t+\frac{2^t}{t\ln 2}>0,\forall t>1$.

Do đó hàm $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\left(1;+\infty\right)$.

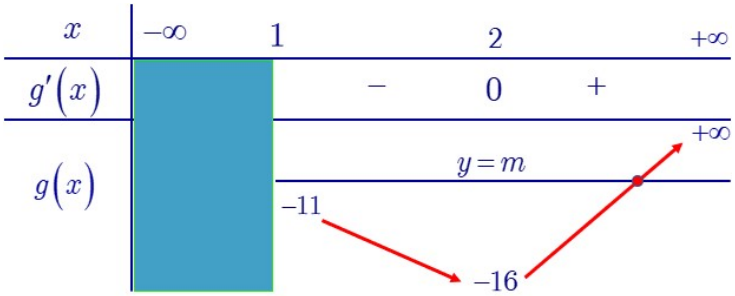
Khi đó, $f\left(2|y|+1\right)=f\left(x^2\right)\ \Leftrightarrow 2|y|+1=x^2\Leftrightarrow 4y^2=\left(x^2-1\right)^2$.

+) Ta có $4y^2-10x^2-mx-1=0\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)^2-10x^2-mx-1=0$

$\Leftrightarrow x^4-12x^2-mx=0\Leftrightarrow x^3-12x=m$ (do $x>1$).

Xét hàm $g\left(x\right)=x^3-12x\Rightarrow g'\left(x\right)=3x^2-12$, $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=\pm 2$.

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên của hàm $g(x)$ suy ra phương trình $4y^2-10x^2-mx-1=0$ có duy nhất một nghiệm khi và chỉ khi $m\in[-11;40]$, do đó có tất cả 52 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 29. Cho các số thực x,y,z thỏa mãn $\log_3\left(2x^2+y^2\right)=\log_7\left(x^3+2y^3\right)=\log z$. Có bao giá trị nguyên của z để có đúng hai cặp (x,y) thỏa mãn đẳng thức trên.

A. 2. **B.** 211. **C.** 99. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

ĐK $\begin{cases}x\ge 0\\ x^2+y^2\ne 0\\ y\ge 0\\ z>0\end{cases}$

Ta có $\log_3\left(2x^2+y^2\right)=\log_7\left(x^3+2y^3\right)=\log z=t\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+y^2=3^t & (1)\\ x^3+2y^3=7^t & (2)\\ z=10^t & (3)\end{cases}$.

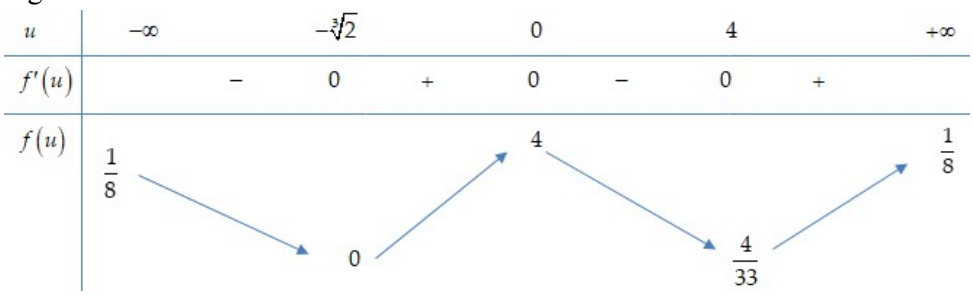
+ Nếu $y=0$ $(2)\Rightarrow x=7^{\frac{t}{3}}$ thay vào (1) ta được $2.7^{\frac{2t}{3}}=3^t\Leftrightarrow t=\log_{\sqrt[3]{49}}2$ do đó $z=10^{\log_{\sqrt[3]{49}}2}$.

+ Nếu $y\ne 0$

Từ $(1)\&(2)$ suy ra $\begin{cases}\left(2x^2+y^2\right)^3=27^t\\ \left(x^3+2y^3\right)^2=49^t\end{cases}\Rightarrow\frac{\left(x^3+2y^3\right)^2}{\left(2x^2+y^2\right)^3}=\left(\frac{49}{27}\right)^t\Leftrightarrow\frac{\left(\left(\frac{x}{y}\right)^3+2\right)^2}{\left(2\left(\frac{x}{y}\right)^2+1^2\right)^3}=\left(\frac{49}{27}\right)^t,(*)$.

Đặt $\frac{x}{y}=u,u\ne-\sqrt[3]{2}$. Xét $f(u)=\frac{\left(u^3+2\right)^2}{\left(2u^2+1\right)^3}\Rightarrow f'(u)=\frac{6u\left(u^3+2\right)(u-4)}{\left(2u^2+1\right)^4}=0\Leftrightarrow\begin{cases}u=0\\ u=-\sqrt[3]{2}\\ u=4\end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên



Nhận xét với mỗi giá trị u tương ứng với duy nhất 1 cặp (x,y) thỏa mãn bài toán do đó

Yêu cầu bài toán tương đương $\frac{4}{33}\le\left(\frac{49}{27}\right)^t<\frac{1}{8}\Leftrightarrow 10^{\log_{\frac{49}{27}}\left(\frac{4}{33}\right)}\le z<10^{\log_{\frac{49}{27}}\left(\frac{1}{8}\right)}$.

Vì z là số nguyên nên có 211 giá trị thỏa mãn.

Câu 30. Cho phương trình sau:

$\left(x^2-2mx\right)\left(2^{x^2-4x+m}-2\right)+\left(x^2-4x+m-1\right)\left(2^{2x^2-4mx}-1\right)=0$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để phương trình đã cho có 3 nghiệm thực x?

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

$\left(x^2-2mx\right)\left(2^{x^2-4x+m}-2\right)+\left(x^2-4x+m-1\right)\left(2^{2x^2-4mx}-1\right)=0$

Nhân 2 vế với 2: $\left(2x^2-4mx\right)\left(2^{x^2-4x+m}-2\right)+\left(x^2-4x+m-1\right)\left(2^{2x^2-4mx}-1\right)=0$

Đặt: $a=2x^2-4mx$, $b=x^2-4x+m-1\Rightarrow a\left(2^{x^2-4x+m}-2\right)+b\left(2^{2x^2-4mx}-1\right)=0\quad(*)$

Nếu $a\ne 0,b\ne 0$ thì $\frac{2^{b+1}-2}{b}=\frac{2-2^{a+1}}{a}$ (vô lý).

Suy ra: $\left[\begin{array}{l}a=0\\b=0\end{array}\right.(tm)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2mx=0\\x^2-4x+m-1=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2m\\x^2-4x+m-1=0\ (1)\end{array}\right.$

Để có 3 nghiệm thực phân biệt thì (1) có nghiệm:

$+\ x=0\Rightarrow m=1$

$+\ x=2m\Rightarrow m=\frac{7\pm\sqrt{65}}{8}$

+ nghiệm kép $\Rightarrow m=5$

Câu 31. Tổng tất cả các số nguyên a để tồn tại số thực b thỏa mãn

$\sqrt{4^b-a-2}+\sqrt{a+2}=3^b$

A. 7 **B.** 0 **C.** -3 **D.** -2

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $\begin{cases}a\ge -2\\4^b\ge a+2\end{cases}$

Đặt $\sqrt{a+2}=t,\ (t\ge 0)\Leftrightarrow a=t^2-2$, phương trình trở thành

$\sqrt{4^b-t^2}+t=3^b\Leftrightarrow\sqrt{4^b-t^2}=3^b-t\Leftrightarrow\begin{cases}4^b-t^2=9^b-2.3^b.t+t^2\\3^b-t\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t^2-3^b.t+\frac{9^b-4^b}{2}=0\ (1)\\3^b-t\ge 0\end{cases}$

Để phương trình (1) có nghiệm:

$\Delta=9^b-2\left(9^b-4^b\right)\ge 0\Leftrightarrow 2.4^b-9^b\ge 0\Leftrightarrow\left(\frac{4}{9}\right)^b\ge\frac{1}{2}\Leftrightarrow b\le log_{\frac{4}{9}}\frac{1}{2}\Leftrightarrow b\le\log_{\frac{9}{4}}2$.

Khi đó tổng hai nghiệm $t_1+t_2=3^b$. Để có nghiệm $t\le 3^b$ thì phương trình (1) phải có hai nghiệm không âm $\Leftrightarrow 9^b-4^b\ge 0\Leftrightarrow b\ge 0$

Khi đó ta có hai trường hợp nghiệm của phương trình

Trường hợp 1: $t=\dfrac{3^b+\sqrt{2.4^b-9^b}}{2}$. Ta có $\sqrt{a+2}=\dfrac{3^b+\sqrt{2.4^b-9^b}}{2}\Rightarrow a=\left(\dfrac{3^b+\sqrt{2.4^b-9^b}}{2}\right)^2-2$

Với $0\le b\le log_{\frac{9}{4}}2$ ta thấy $a\in(-2;1)$ mà a nguyên nên $a\in\{-1;0\}$.

Trường hợp 2: $t=\dfrac{3^b-\sqrt{2.4^b-9^b}}{2}$. Ta có $\sqrt{a+2}=\dfrac{3^b-\sqrt{2.4^b-9^b}}{2}\Rightarrow a=\left(\dfrac{3^b-\sqrt{2.4^b-9^b}}{2}\right)^2-2$

Với $0\le b\le log_{\frac{9}{4}}2$ ta thấy $a\in[-2;0)$ mà a nguyên nên $a\in\{-1;-2\}$.

Vậy tổng tất cả số nguyên a thỏa mãn là $-1-2+0=-3$.

Câu 32. Cho phương trình $4^x+4=a.2^x\log_2\left(2x-x^2+b\right)$. Có bao nhiêu bộ số (a,b) thỏa mãn điều kiện $100a\in\mathbb{Z},100b\in\mathbb{Z},-100\le a,b\le 100$ sao cho phương trình có nghiệm duy nhất

A. 15 **B.** 6 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Chọn B

Ta có $4^x+4=a.2^x\log_2\left(2x-x^2+b\right)\Leftrightarrow 2^x+2^{2-x}=a\log_2\left(x(2-x)+b\right)$.

Ta nhận thấy $x=x_0$ là nghiệm thì $x=2-x_0$ cũng là nghiệm. Do đó để có nghiệm duy nhất thì $x_0=1$. Khi đó thay vào ta được: $4=a\log_2(b+1)\Leftrightarrow 2^{\frac{4}{a}}=b+1$. Đặt $a=\dfrac{p}{100},b=\dfrac{q}{100}$ với $p,q\in\mathbb{Z}$

Khi đó: $2^{\frac{400}{p}}=b+1=\dfrac{q}{100}+1$. Chú ý $\dfrac{q}{100}+1\in\mathbb{Q}$ nên $\dfrac{400}{p}\in\mathbb{Z}$. Ta có 2 tình huống:

Trường hợp 1: $\dfrac{400}{p}\in\mathbb{Z}^+\Rightarrow p\in\{1;2;4;5;8;10;16;20;25;40;50;80;100;200;400\}$.

Vì $2^{\frac{400}{p}}=b+1\le 101\Rightarrow\dfrac{400}{p}\le\log_2 101\Rightarrow p\ge\dfrac{400}{\log_2 101}\approx 60$ vậy $p\in\{80;100;200;400\}$.

Khi đó ta có: $(a;b)\in\left\{\left(\dfrac{4}{5};31\right);(1;15);(2;3);(4;1)\right\}$. Với mỗi bộ số $(a;b)$ tương ứng đều có nghiệm duy nhất bởi vì ta có đánh giá: $2^x+2^{2-x}\ge 2\sqrt{2^x2^{2-x}}=4=a\log_2(b+1)\ge a\log_2\left(b+1-(x-1)^2\right)$.

Trường hợp 2: Nếu $\dfrac{400}{p}\in\mathbb{Z}^-$ khi đó vế trái có dạng phân số với mẫu số có dạng lũy thừa của 2.

Vì vậy vế phải cũng phải như vậy tức là $q\vdots 25$

Lại có khi đó $1>2^{\frac{400}{p}}=b+1=\dfrac{q}{100}+1>0\Rightarrow\boxed{-100<q<0}$ cho nên $q\in\{-25;-50;-75\}$.

- Với $q=-25\Rightarrow 2^{\frac{400}{p}}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow p\notin\mathbb{Z}$ (Loại).
- Với $q=-50\Rightarrow 2^{\frac{400}{p}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow p=-400\Rightarrow\boxed{a=-4,b=-\dfrac{1}{2}}$.

Khi đó: $2^x+2^{2-x}=-4\log_2\left(x(2-x)-\frac{1}{2}\right)$. Dùng TABLE ta thấy có duy nhất 1 nghiệm $x=1$

- Với $q=-75\Rightarrow 2^{\frac{400}{p}}=\frac{1}{4}\Rightarrow p=-200\Rightarrow \boxed{a=-2,b=-\frac{3}{4}}$.

Khi đó: $2^x+2^{2-x}=-2\log_2\left(x(2-x)-\frac{3}{4}\right)$. Dùng TABLE ta thấy có duy nhất 1 nghiệm $x=1$

Kết luận: Có tất cả 6 bộ số $(a;b)$ thỏa mãn điều kiện.

Câu 33. Cho phương trình sau: $\left(2^{2\log^2 x-\log x}-4^{1+\log x}\right)\sqrt{9^x+(2-m)3^x-2m}=0$ (với m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt. Tổng của phần tử nhỏ nhất và phần tử lớn nhất của S bằng

A. $3^{100}+1$. **B.** $3^{100}-1$. **C.** 3^{99}. **D.** $3^{99}+1$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\3^x\ge m\end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với phương trình: $\left(2^{2\log^2 x-\log x}-4^{1+\log x}\right)\sqrt{(3^x+2)(3^x-m)}=0$

Ta có: $\left(2^{2\lg^2 x-\lg x}-4^{1+\lg x}\right)\sqrt{(3^x+2)(3^x-m)}=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^x=m\\2^{2\log^2 x-\log x}=4^{1+\log x}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^x=m\\2\log^2 x-\log x=2+2\log x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log x=2\\\log x=-\frac{1}{2}\\3^x=m\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=100\\x=\frac{1}{\sqrt{10}}\\x=\log_3 m,\forall m\in\mathbb{Z}_+^*\end{array}\right.$$

Trường hợp 1: Với $m=1$ thì $x=\log_3 m=0$ (loại). Do đó phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt $x=100,\ x=\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Trường hợp 2: Với $m>1$ thì $x=\log_3 m>0$ nên phương trình đã cho luôn nhận nghiệm $x=\log_3 m$

Mà $100>\frac{1}{\sqrt{10}}$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi

$\frac{1}{\sqrt{10}}\le\log_3 m<100\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{\sqrt{10}}}\le m<3^{100}$.

Do m nguyên dương, $m>1$ nên $m\in\{2;3;4;...,3^{100}-1\}$. Vậy $S=\{2;3;4;...,3^{100}-1\}$.

Suy ra tổng của phần nhỏ nhất và phần tử lớn nhất của S bằng $3^{100}+1$.

Câu 34. Cho hàm số $f(x)=\frac{x+m}{2x+1}$. Gọi S là tập hợp các số nguyên dương $m\le 7$ sao cho với mọi bộ số thực $a,b,c\in[2;3]$ thì $|\ln f(a)|,|\ln f(b)|,|\ln f(c)|$ là độ dài ba cạnh của một tam giác. Tổng các phần tử của S là

A. 10. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 14.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết ta có với $\forall m \in S, \forall x \in [2;3]$ thì $f(x) = \dfrac{x+m}{2x+1} > 0$.

Xét hàm số $g(x) = \ln f(x)$, ta có $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1-2m}{(x+m)(2x+1)} < 0, \forall m \in S, \forall x \in [2;3]$ do vậy ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau

x	2	3
$g'(x)$	-	
$g(x)$	$\ln\frac{m+2}{5}$	$\ln\frac{m+3}{7}$

TH1: $\ln\dfrac{m+3}{7} > 0 \Leftrightarrow m > 4$, lúc này xét mọi bộ số thực $a,b,c \in [2;3]$ sao cho $|\ln f(a)|$, $|\ln f(b)|$, $|\ln f(c)|$ là độ dài ba cạnh của một tam giác khi đó ta cần có $2\min\limits_{x\in[2;3]} g(x) > \max\limits_{x\in[2;3]} g(x)$

$$\Leftrightarrow 2\ln\frac{m+3}{7} > \ln\frac{m+2}{5} \Leftrightarrow \left(\frac{m+3}{7}\right)^2 > \frac{m+2}{5} \Leftrightarrow 5m^2 - 19m - 53 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{19+7\sqrt{29}}{10} \\ m < \dfrac{19-7\sqrt{29}}{10} \end{array}\right.,$$

kết hợp với $m \in S$ ta có $m \in \{6;7\}$.

TH2: $\ln\dfrac{m+2}{5} < 0 \Leftrightarrow m < 3$, lúc này xét mọi bộ số thực $a,b,c \in [2;3]$ sao cho $|\ln f(a)|$, $|\ln f(b)|$, $|\ln f(c)|$ là độ dài ba cạnh của một tam giác khi đó ta cần có

$$-2\max_{x\in[2;3]} g(x) > -\min_{x\in[2;3]} g(x) \Leftrightarrow \ln\frac{m+3}{7} > 2\ln\frac{m+2}{5} \Leftrightarrow \left(\frac{m+2}{5}\right)^2 < \frac{m+3}{7} \Leftrightarrow 7m^2 + 3m - 47 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3-5\sqrt{53}}{14} < m < \frac{-3+5\sqrt{53}}{14}$$, kết hợp với $m \in S$ ta có $m \in \{1;2\}$.

TH3: $\begin{cases} \ln\dfrac{m+2}{5} \ge 0 \\ \ln\dfrac{m+3}{7} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \le m \le 4$ khi đó tồn tại $\alpha \in [2;3]$ để $\ln f(\alpha) = 0$ khi đó chọn bất kỳ bộ ba số a,b,α với $a,b \in [2;3]$ thì $|\ln f(a)|$, $|\ln f(b)|$, $|\ln f(\alpha)|$ không thể là độ dài của 3 cạnh của một tam giác.

Từ 3 trường hợp trên ta có $S = \{1;2;6;7\}$ do đó tổng các phần tử của S là 16.

Câu 35. Cho hàm số $f(x) = \log_x 2.\log_4(2-x) - m$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{x} + \sqrt{2-x}\right) = 0$ có tổng tất cả các nghiệm bằng 2.

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Chọn D

+ Đặt $t=\sqrt{x}+\sqrt{2-x} \Rightarrow t\in\left[\sqrt{2};2\right]$.

Giả sử t_0 là nghiệm của phương trình $f(t)=0$ khi đó: $\sqrt{x}+\sqrt{2-x}=t_0\,(*)$.

Dễ thấy pt (*) chỉ có tối đa 2 nghiệm vì khi bình phương thoát hết căn chỉ ra phương trình bậc hai.

+ Nếu x_0 là một nghiệm của phương trình (*) thì $2-x_0$ cũng là một nghiệm của (*) vì:

$\sqrt{2-x_0}+\sqrt{2-\left(2-x_0\right)}=t_0 \Leftrightarrow \sqrt{x_0}+\sqrt{2-x_0}=t_0$.

Mà $x_0+\left(2-x_0\right)=2\ \forall\ x_0$ nên suy ra

$\Rightarrow$ Để phương trình $f\left(\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\right)=0$ có tổng các nghiệm bằng 2

$\Leftrightarrow$ Phương trình $f(t)=0$ có duy nhất một nghiệm trên $\left[\sqrt{2};2\right]$.

+ Xét phương trình $f(t)=0 \Leftrightarrow \log_t 2.\log_4\left(2-t\right)-m=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\ln 2}{\ln t}.\dfrac{\ln\left(2-t\right)}{2\ln 2}=m$

$\Leftrightarrow \ln\left(2-t\right)=2m\ln t$

Vì $m\in\mathbb{N}^*$ nên ta có: $\ln\left(2-t\right)=2m\ln t \Leftrightarrow 2-t=t^{2m} \Leftrightarrow t^{2m}+t-2=0$.

+ Xét hàm số $g(t)=t^{2m}+t-2$

$\Rightarrow g'(t)=2mt^{2m-1}+1>0\ \forall \begin{cases} t\in\left[\sqrt{2};2\right] \\ m\in\mathbb{N}^* \end{cases}$

$\Rightarrow$ Phương trình $g(t)=0$ có nhiều nhất 1 nghiệm trên $\left[\sqrt{2};2\right]$

Mặt khác $g(t)\ge g\left(\sqrt{2}\right)=2^m+\sqrt{2}-2>0\ \forall\ m\in\mathbb{N}^*$

Suy ra phương trình $g(t)=0$ vô nghiệm.

Vậy không có giá trị nào của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 36. Cho phương trình $\left(\log_3\left(\dfrac{x}{3}\right)\right)^2+3m\log_3 x+2m^2-2m-1=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m lớn hơn -2021 sao cho phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thoả $x_1+x_2>10$?

A. 2020. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x>0$.

$\left(\log_3\left(\dfrac{x}{3}\right)\right)^2+3m\log_3 x+2m^2-2m-1=0 \Leftrightarrow \left(\log_3 x-1\right)^2+3m\log_3 x+2m^2-2m-1=0$

Đặt $t=\log_3 x$

Phương trình trở thành

$\left(t-1\right)^2+3mt+2m^2-2m-1=0 \Leftrightarrow t^2+\left(3m-2\right)t+2m^2-2m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-m \\ t=-2m+2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=3^{-m} \\ x=3^{-2m+2} \end{array}\right.$

$x_1+x_2>10 \Leftrightarrow 3^{-m}+3^{-2m+2}>10$

$\Leftrightarrow 9.3^{-2m}+3^{-m}-10>0 \Leftrightarrow 3^{-m}>1$

$\Leftrightarrow -m>0 \Leftrightarrow m<0$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ và $m>-2021$ nên $m\in\{-2020;-2019;...;-1\}$.

Câu 37. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-24;24]$ để ba số hạng sau theo thứ tự tạo thành 1 cấp số cộng, với $\forall x\in[1;2]$: $(9.2^x+1);(m);(2^{3x}-3.2^{2x+1})$

A. 2. **B.** 1. **C.** 17. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Để ba số lập thành một cấp số cộng thì $(9.2^x+1)+(2^{3x}-3.2^{2x+1})=2m$

$\Leftrightarrow 2^{3x}-6.2^{2x}+9.2^x=2m-1$.

Đặt $t=2^x\in[2^1;2^2]=[2;4]$. Khi đó

$f(t)=t^3-6t^2+9t=2m-1$ với $\forall t\in[2;4]$

Suy ra $\min\limits_{[2;4]}(f(t)=t^3-6t^2+9t)\le 2m-1\le\max\limits_{[2;4]}(f(t)=t^3-6t^2+9t)$

$\Leftrightarrow 0\le 2m-1\le 4\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le m\le\frac{5}{2}\Rightarrow m\in\{1;2\}$

Câu 5. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-18;18]$ để phương trình $2^{2x}-(m-1).2^x+3m-1=0$ có hai nghiệm thỏa $0<x_1\le 1<3<x_2$

A. 8. **B.** 18. **C.** 11. **D.** 12.

Lời giải

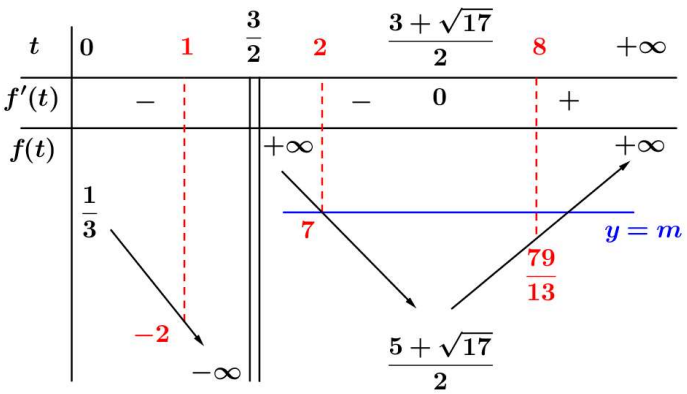
Chọn D

Đặt $t=2^x>0$. Phương trình trở thành: $t^2-(m-1)t+3m-1=0\Leftrightarrow m=\frac{t^2+2t-1}{2t-3}$

Hai nghiệm thỏa mãn: $0<x_1\le 1<3<x_2\Leftrightarrow 2^0<2^{x_1}=t_1\le 2^1<2^3<2^{x_2}=t_2$

$\Leftrightarrow 1<t_1\le 2<8<t_2$

Xét hàm số $y=f(t)=\frac{t^2+2t-1}{2t-3}$ có bảng biến thiên như sau:



Suy ra $m\ge 7\Rightarrow 7\le m\le 18$ tức có tất cả 12 giá trị nguyên m thỏa

Câu 38. Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị nguyên của $m\in[-2022;2022]$

sao cho phương trình $\log_2^2 x-(2m+1)\log_2(x^2)-2m+3=0$ có hai nghiệm sao cho thỏa mãn $0<x_1<x_2\le 8$. Số các phần tử của S là

A. 2021. **B.** 2019. **C.** 18. **D.** 2023.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\log_2 x$. Phương trình trở thành: $f(t)=t^2-2(2m+1)t-2m+3=0$ (1)

Hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $0<x_1<x_2\le 8\Leftrightarrow t_1<t_2\le\log_2 8=3$

Ta xét phương trình (1) có: $\Delta'=(2m+1)^2+2m-3=4m^2+6m-2$

Khi $\Delta'=4m^2+6m-2>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<\dfrac{-3-\sqrt{17}}{4}\\ m>\dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}\end{array}\right.$ thì phương trình (1) sẽ có hai nghiệm phân biệt là:

$$\left[\begin{array}{l}t_1=(2m+1)-\sqrt{4m^2+6m-2}\\ t_2=(2m+1)+\sqrt{4m^2+6m-2}\end{array}\right.$$

Đến đây ta chỉ cần điều kiện $t_2=(2m+1)+\sqrt{4m^2+6m-2}\le 3$ là bài toán được giải quyết

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2-2m\ge 0\\ 4m^2-8m+4\ge 4m^2+6m-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le 1\\ m\le\dfrac{3}{7}\end{cases}\Leftrightarrow m\le\frac{3}{7}$$

Kết hợp với điều kiện $\Delta'>0$, suy ra: $\left[\begin{array}{l}m<\dfrac{-3-\sqrt{17}}{4}\\ \dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}<m\le\dfrac{3}{7}\end{array}\right.\xrightarrow{m\in Z;m\in[-2022;2022]}-2022\le m\le -2$

Như vậy có tất cả 2021 giá trị nguyên m thỏa mãn

Câu 39. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-20;20]$ để phương trình sau có nghiệm

$$\log_2\left(x^2+m+x\sqrt{x^2+4}\right)=(2m-9)x-1+(1-2m)\sqrt{x^2+4}$$

A. 12. **B.** 23. **C.** 25. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Phương trình tương đương với:

$$\log_2\left(x^2+m+x\sqrt{x^2+4}\right)=(2m-9)x-1+(1-2m)\sqrt{x^2+4}$$

$$\Leftrightarrow\log_2\left(2x^2+2m+2x\sqrt{x^2+4}\right)=(2m-9)x+(1-2m)\sqrt{x^2+4}$$

$$\Leftrightarrow\log_2\left(\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)^2+2m-4\right)=(2m-9)x+(1-2m)\sqrt{x^2+4}$$

$$\Leftrightarrow\log_2\left(\frac{16}{\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)^2}+2m-4\right)=(1-2m)\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)-8x$$

Đặt $t=\sqrt{x^2+4}-x$, ta thấy

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4}-x=0;\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+4}-x=+\infty\Rightarrow t\in(0;+\infty)\Rightarrow 2x=\dfrac{4-t^2}{t}$

Phương trình trở thành $\log_2\left(\dfrac{16+(2m-4)t^2}{t^2}\right)=(1-2m)t-\dfrac{4(4-t^2)}{t}$

$\Leftrightarrow \log_2\left(16+(2m-4)t^2\right)+\dfrac{16+(2m-4)t^2}{t}=\log_2\left(t^2\right)+\dfrac{t^2}{t}$

Xét hàm đặc trưng $y=f(u)=\log_2 u+\dfrac{u}{t}$ có $f'(u)=\dfrac{1}{u\ln 2}+\dfrac{1}{t}>0$ (xem như t là tham số)

Suy ra $f(u)$ luôn đồng biến

$\Leftrightarrow f\left(16+(2m-4)t^2\right)=f\left(t^2\right)\Leftrightarrow 16+(2m-4)t^2=t^2\Leftrightarrow t^2=\dfrac{16}{5-2m}$

Do $t\in(0;+\infty)$ nên suy ra $t^2=\dfrac{16}{5-2m}>0\Leftrightarrow m<\dfrac{5}{2}\xrightarrow{m\in Z,m\in[-20;20]}-20\le m\le 2$

Như vậy ta kết luận có tất cả 23 giá trị nguyên của tham số m. **Chọn B**

Câu 40. Cho hệ phương trình $\begin{cases}2^{x-y}-2^y+x=2y\\ 2^x+1=\left(m^2+2\right).2^y.\sqrt{1-y^2}\end{cases}(1)$, m là tham số.

Gọi S là tập các giá trị m nguyên để (1) có một nghiệm duy nhất. Tập S có bao nhiêu phần tử?

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $|y|\le 1\Leftrightarrow y\in[-1;1]$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ (1) ta có $2^{x-y}+(x-y)=2^y+y\,(2)$.

Xét hàm số $y=f(t)=2^t+t$ với $t\in\mathbb{R}$.

Dễ thấy $y'=2^t.\ln 2+1>0$ với mọi $t\in\mathbb{R}$ nên hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình (2) tương đương với $x-y=y\Leftrightarrow x=2y$.

Thay $x=2y$ vào phương trình thứ hai của hệ (1) ta được $4^y+1=\left(m^2+2\right).2^y.\sqrt{1-y^2}\,(3)$.

Để hệ đã cho có nghiệm duy nhất thì phương trình (3) phải có nghiệm duy nhất $y\in[-1;1]$.

Giả sử $y_0\in[-1;1]$ là một nghiệm của (3) thì $4^{y_0}+1=\left(m^2+2\right).2^{y_0}.\sqrt{1-y_0^2}$.

Khi đó $4^{-y_0}+1=\left(m^2+2\right).2^{-y_0}.\sqrt{1-(-y_0)^2}\Leftrightarrow 4^{y_0}+1=\left(m^2+2\right).2^{y_0}.\sqrt{1-y_0^2}$ nên $-y_0$ cũng là nghiệm của (3).

Suy ra $y_0=-y_0\Leftrightarrow y_0=0$. Thay $y=0$ vào (3) ta được $m=0$.

Thử lại: với $m=0$ thì (3) viết thành $4^y+1=2.2^y.\sqrt{1-y^2}\Leftrightarrow 2^y+\dfrac{1}{2^y}=2\sqrt{1-y^2}\,(4)$.

Ta có $VT(4)\ge 2$, dấu bằng khi $2^y=\dfrac{1}{2^y}\Leftrightarrow y=0$; $VP(4)\le 2$, dấu bằng khi $y=0$.

Suy ra phương trình (4) có nghiệm duy nhất là $y=0$.

Vậy $m=0$ thỏa mãn (1 giá trị m thỏa).

TOANMATH.com