

CHUYÊN ĐỀ 4 SỐ PHỨC

BÀI 1. KHÁI NIỆM SỐ PHỨC

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Nắm vững khái niệm số phức, số phức liên hợp, hai số phức bằng nhau.
- + Trình bày được công thức tính môđun số phức.
- + Mô tả được biểu diễn hình học của một số phức.

❖ Kỹ năng

- + Biết tìm phần thực, phần ảo của một số phức.
- + Biết tìm số phức liên hợp của số phức $z = a + bi$.
- + Tính được môđun của một số phức.
- + Biết biểu diễn hình học của một số phức.
- + Cho điểm $M(a; b)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = a + bi$, biết tìm phần thực, phần ảo; biết tính môđun của z .
- + Biết tìm điều kiện để hai số phức bằng nhau.
- + Biết cách tìm tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z thỏa mãn tính chất nào đó.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Số phức

Định nghĩa

Cho số phức z có dạng: $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$, trong đó a gọi là phần thực của z , b gọi là phần ảo của z , i gọi là đơn vị ảo thỏa mãn $i^2 = -1$.

Đặc biệt:

Tập hợp các số phức, kí hiệu là $\mathbb{C}$.

Số phức z là số thực nếu $b = 0$.

Số phức z là số thuần ảo nếu $a = 0$.

Số phức $z = 0 + 0i = 0$ vừa là số thực, vừa là số ảo (còn gọi là số thuần ảo).

Số phức liên hợp

Số phức liên hợp của số phức z , kí hiệu là $\bar{z}$, là $\bar{z} = a - bi$.

Môđun của số phức

Môđun của số phức z , kí hiệu là $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2. Hai số phức bằng nhau

Định nghĩa

Hai số phức $z_1 = a_1 + b_1i$ và $z_2 = a_2 + b_2i$ được gọi là bằng nhau khi

và chỉ khi $\begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$.

3. Biểu diễn hình học của số phức

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , mỗi số phức $z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}$ được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$. Ngược lại, mỗi điểm $M(a; b)$ biểu

Ví dụ:

+) $z = 5 - \frac{2}{7}i \in \mathbb{C}$;

+) $z = -\sqrt{2} + \pi i \in \mathbb{C}$;

+) $z = \frac{4}{3}i, w = \cos \frac{\pi}{12}i, u = -i, \dots$ là các số thuần ảo.

Ví dụ

+) Số phức $z = 5 - \frac{2}{7}i$ có số phức liên hợp là $\bar{z} = 5 + \frac{2}{7}i$;

+) Số phức $z = \frac{4}{3}i$ có số phức liên hợp là $\bar{z} = -\frac{4}{3}i$.

Nhận xét: Mỗi số thực có số phức liên hợp là chính nó.

Ví dụ:

Số phức $z = 5 - \frac{2}{7}i$ có môđun

$$|z| = \sqrt{5^2 + \left(-\frac{2}{7}\right)^2} = \frac{\sqrt{1229}}{7}$$

Ví dụ:

Số phức $z = a + bi$ bằng 0 khi và chỉ

khi $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

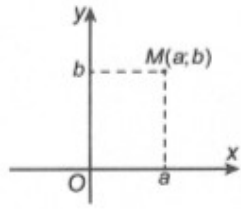
hay $z = 0$.

Nhận xét:

+) $OM = |z|$;

+) Nếu z_1, z_2 có các điểm biểu diễn

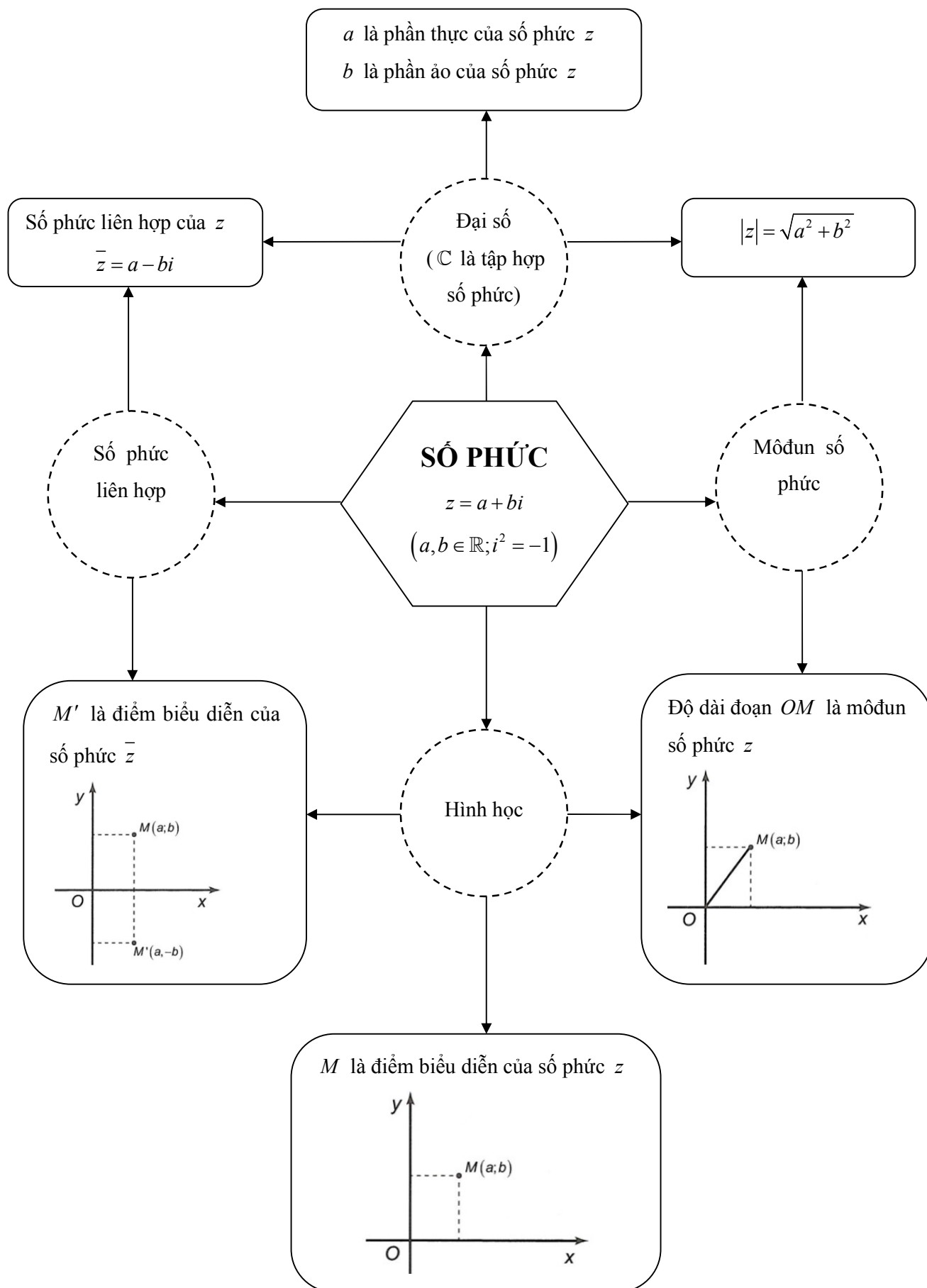
diễn duy nhất một số phức là $z = a + bi$.



lần lượt là M_1, M_2 thì

$$M_1 M_2 = |z_1 - z_2|.$$

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Xác định các yếu tố liên quan đến khái niệm số phức

Bài toán 1. Tìm phần thực, phần ảo của số phức

Phương pháp giải

Sử dụng định nghĩa: Số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ có a là phần thực, b là phần ảo.

Ví dụ: Số phức $z = 3 - 7i$ có phần thực là 3, phần ảo của z là -7

Chú ý: Tránh nhầm lẫn phần ảo của z là $-7i$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Phần ảo của số phức $z = -7 + 6i$ bằng

- A. -6 . B. $6i$. C. 6 . D. $-6i$.

Hướng dẫn giải

Phần ảo của số phức z là 6.

Chọn C.

Ví dụ 2: Số phức có phần thực bằng 1 và phần ảo bằng 3 là

- A. $-1 - 3i$. B. $1 + 3i$. C. $-1 + 3i$. D. $1 - 3i$.

Hướng dẫn giải

Số phức có phần thực bằng 1 và phần ảo bằng 3 là $z = 1 + 3i$.

Chọn B.

Ví dụ 3: Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tổng phần thực và phần ảo của số phức z bằng

- A. 5 . B. -1 . C. -5 . D. 1 .

Hướng dẫn giải

Số phức $z = 3 - 2i$ có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng -2 .

Vậy tổng phần thực và phần ảo của số phức z bằng 1.

Chọn D.

Bài toán 2. Tìm số phức liên hợp, môđun của số phức, điều kiện để hai số phức bằng nhau

Phương pháp giải

• Số phức liên hợp của số phức $z = a + bi$ kí hiệu $\bar{z}$ là $\bar{z} = a - bi$.

• Môđun của số phức $z = a + bi$, kí hiệu là $|a| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

• Hai số phức $z_1 = a_1 + b_1i$ và $z_2 = a_2 + b_2i$ bằng

nhau khi và chỉ khi $\begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$.

Ví dụ: Số phức $z = 3 - 7i$ có:

+) Số phức liên hợp $\bar{z} = 3 + 7i$;

+) Môđun $|z| = \sqrt{3^2 + (-7)^2} = \sqrt{58}$.

Chú ý: Tránh nhầm lẫn đổi dấu ở phần thực là

$\bar{z} = -3 - 7i$

 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Số phức liên hợp của số phức $z = -1 + 3i$ là

- A. $1 - 3i$. B. $1 + 3i$. C. $-1 + 3i$. D. $-1 - 3i$.

Hướng dẫn giải

Số phức liên hợp của số phức $z = -1 + 3i$ là $\bar{z} = -1 - 3i$.

Chọn D.

Ví dụ 2: Cho số phức $\bar{z} = 3 + 4i$. Phần thực và phần ảo của số phức z là

- A. Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$.
B. Phần thực 3 là và phần ảo là -4 .
C. Phần thực là -4 và phần ảo là 3 .
D. Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$.

Hướng dẫn giải

Số phức $\bar{z} = 3 + 4i$, suy ra số phức $z = \bar{\bar{z}} = 3 - 4i$ có phần thực là 3 và phần ảo là -4

Chọn B.

Ví dụ 3: Môđun của số phức $z = 3 + 4i$ là

- A. 7 . B. 5 . C. 3 . D. $\sqrt{7}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $z = 3 + 4i \Rightarrow |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Chọn B.

Ví dụ 4: Cho số phức $z = -12 + 5i$. Môđun của số phức $\bar{z}$ bằng

- A. 13 . B. 119 . C. 17 . D. -7 .

Hướng dẫn giải

Ta có: $|\bar{z}| = |z| = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$.

Chọn A.

Ví dụ 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(-3; 4)$ là điểm biểu diễn của số phức z . Môđun số phức z bằng

- A. 1 . B. 25 . C. $\sqrt{7}$. D. 5 .

Hướng dẫn giải

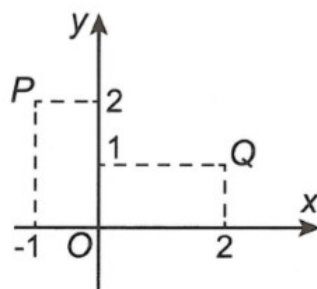
Cách 1: Ta có: Điểm $M(-3; 4)$ là điểm biểu diễn của số phức z , nên $z = -3 + 4i$.

Suy ra, $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$.

Cách 2: Ta có $|z| = OM = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

Chọn D.

Ví dụ 6: Trong hình vẽ bên, điểm P biểu diễn số phức z_1 , điểm Q biểu diễn số phức z_2 . Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $z_1 = \overline{z_2}$. B. $|z_1| = |z_2| = 5$.
C. $|z_1| = |z_2| = \sqrt{5}$. D. $z_1 = -z_2$.

Hướng dẫn giải

Ta có $z_1 = -1 + 2i, z_2 = 2 + i$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5} \\ |z_2| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow |z_1| = |z_2| = \sqrt{5}$$

Chọn C.

Ví dụ 7: Tìm các số thực x và y thỏa mãn điều kiện $(2x+1) + (3y-2)i = (x+2) + (y+4)i$

- A. $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$(2x+1) + (3y-2)i = (x+2) + (y+4)i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 = x+2 \\ 3y-2 = y+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$$

Chọn D.

Ví dụ 8: Biết rằng có duy nhất một cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn $(x+y) + (x-y)i = 5 + 3i$. Giá trị của

$S = x + 2y$ là

- A. $S = 5$. B. $S = 4$. C. $S = 6$. D. $S = 3$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } (x+y) + (x-y)i = 5 + 3i \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy $S = x + 2y = 6$.

Chọn C.

Ví dụ 9: Có tất cả bao nhiêu cặp số thực $(x; y)$ để hai số phức

$z_1 = 9y^2 - 4 - 10xi^5, z_2 = 8y^2 + 20i^{11}$ là hai số phức liên hợp của nhau?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$z_1 = \overline{z_2} \Leftrightarrow 9y^2 - 4 - 10xi^5 = 8y^2 - 20i^{11} \Leftrightarrow 9y^2 - 4 - 10xi = 8y^2 + 20i$$

Nhận xét:

$$i^{4k} = 1;$$

$$i^{4k+1} = i;$$

$$i^{4k+2} = -1;$$

$$i^{4k+3} = -i.$$

Với mọi $k \in \mathbb{N}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9y^2 - 4 = 8y^2 \\ -10x = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = \pm 2 \end{cases}.$$

Do đó:

$$i^5 = i; i^{11} = -i.$$

Vậy có hai cặp số thỏa mãn: $(-2; -2); (-2; 2)$.

Chọn B.

Bài tập tự luyện dạng 1

Bài tập cơ bản

Câu 1: Cho số phức $z = 1 - 2i$. Phần ảo của số phức $\bar{z}$ là?

- A. 2. B. -2. C. -1. D. 1.

Câu 2: Đây là giá trị của hai số thực x và y thỏa mãn $(3x + 2yi) + (3 - i) = 4x - 3i$ với i là đơn vị ảo?

- A. $x = 3; y = -1$. B. $x = \frac{2}{3}; y = -1$. C. $x = 3; y = -3$. D. $x = -3; y = -1$.

Câu 3: Cho số phức $z = 10 - 2i$. Phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$ là

- A. Phần thực bằng -10 và phần ảo bằng $-2i$. B. Phần thực bằng -10 và phần ảo bằng -2 .
C. Phần thực bằng 10 và phần ảo bằng 2 . D. Phần thực bằng 10 và phần ảo bằng $2i$.

Câu 4: Số phức liên hợp của số phức $z = 1 - 2i$ là

- A. $\bar{z} = 1 + 2i$. B. $\bar{z} = 2 - i$. C. $\bar{z} = -1 + 2i$. D. $\bar{z} = -1 - 2i$.

Câu 5: Cho số phức $z = -1 - 2\sqrt{6}i$. Phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$ là?

- A. Phần thực bằng -1 và phần ảo bằng $2\sqrt{6}$. B. Phần thực bằng -1 và phần ảo bằng $2\sqrt{6}i$.
C. Phần thực bằng 1 và phần ảo bằng $2\sqrt{6}$. D. Phần thực bằng -1 và phần ảo bằng $-2\sqrt{6}i$.

Câu 6: Môđun của số phức $z = (-4 + 3i).i$ bằng

- A. $\sqrt{7}$. B. 5. C. 3. D. 4.

Bài tập nâng cao

Câu 7: Số thực x và y thỏa mãn $x^2 + (2xy - 4y)i - 4x - y^2 + 29 = 0$ với i là đơn vị ảo là

- A. $\begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = -5 \\ y = 0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 2 \\ y = \pm 5 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm\sqrt{29} \end{cases}$.

Dạng 2: Tìm điểm biểu diễn hình học của số phức

Phương pháp giải

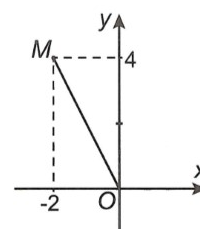
Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , số phức $z = a + bi$ **Ví dụ:**

có điểm biểu diễn là $M(a; b)$.

Chú ý:

- Ta có: $OM = |z|$.

- Nếu z_1, z_2 có các điểm biểu diễn lần lượt là $M_1(a_1; b_1)$ và $M_2(a_2; b_2)$ thì điểm biểu diễn của $z_1 + z_2$ là $M(a_1 + a_2; b_1 + b_2)$. Điểm $M(-2; 4)$ trên hình vẽ là điểm biểu diễn số



$$M_1, M_2 \text{ thì } M_1 M_2 = |z_1 - z_2|.$$

$$\text{phức } z = -2 + 4i. \text{ Khi đó } OM = |z| = 2\sqrt{5}.$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy , điểm nào sau đây biểu diễn số phức $z = 2 + i$?

A. $M(2;0)$.

B. $N(2;1)$.

C. $P(2;-1)$.

D. $Q(1;2)$.

Hướng dẫn giải

Điểm biểu diễn số phức $z = 2 + i$ là $N(2;1)$.

Chọn B.

Ví dụ 2: Điểm nào trong hình vẽ dưới đây là điểm biểu diễn số phức $z = -1 + 2i$?

A. N.

B. P.

C. M.

D. Q.

Hướng dẫn giải

Điểm biểu diễn cho số phức $z = -1 + 2i$ là $Q(-1;2)$.

Chọn D.

Ví dụ 3: Cho $z = -1 - 2i$. Điểm nào trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức $\bar{z}$?

A. N.

B. M.

C. P.

D. Q.

Hướng dẫn giải

Ta có $\bar{z} = -1 + 2i$ nên điểm biểu diễn số phức $\bar{z}$ là $Q(-1;2)$

Chọn D.

Ví dụ 4: Cho hai điểm M, N trong mặt phẳng phức như hình bên. Gọi P là điểm sao cho $OMPN$ là hình bình hành. Điểm P biểu thị cho số phức nào trong các số phức sau?

A. $z = 4 - 3i$.

B. $z = 4 + 3i$.

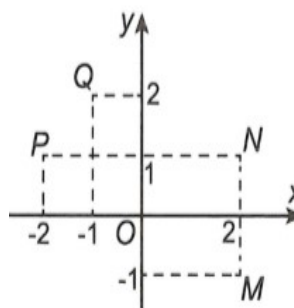
C. $z = -2 + i$.

D. $z = 2 - i$.

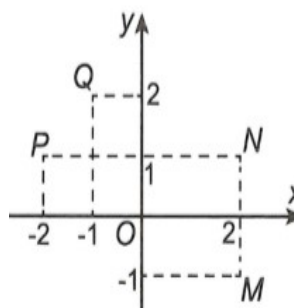
Hướng dẫn giải

Cách 1: Giả sử $P(x; y)$. Ta có: $\overrightarrow{MP} = (x-1; y-2); \overrightarrow{ON} = (3;1)$.

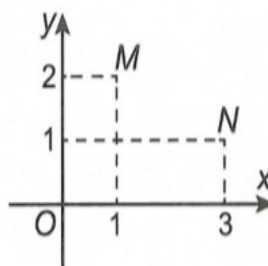
Tứ giác $OMPN$ là hình bình hành khi $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{ON} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=3 \\ y-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$.



Chú ý: Tránh nhầm lẫn phần thực và phần ảo trên hệ trục tọa độ, dẫn đến chọn nhầm đáp án C.



Chú ý: Tránh nhầm lẫn phần thực và phần ảo trên hệ trục tọa độ, dẫn đến chọn nhầm đáp án B.



Suy ra, $P(4;3)$ là điểm biểu diễn số phức $z = 4 + 3i$.

Cách 2: Ta có: $M(1;2), N(3;1) \Rightarrow I\left(2; \frac{3}{2}\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng MN .

Tứ giác $OMPN$ là hình bình hành nên I là trung điểm OP . Suy ra $P(4;3)$, là điểm biểu diễn số phức $z = 4 + 3i$.

Chọn B.

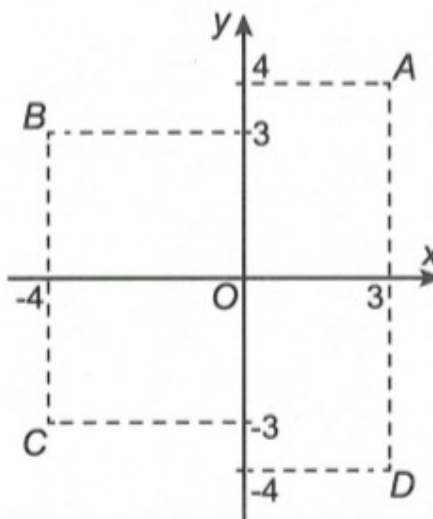
Ví dụ 5: Các điểm A, B, C, D ở hình vẽ bên là các điểm biểu diễn cho các số phức z_1, z_2, z_3, z_4 . Hỏi trong số đó có bao nhiêu số phức có môđun bằng 5?

- A. 1. B. 2.
C. 3. D. 4.

Hướng dẫn giải

Ta có $OA = OB = OC = OD = 5$. Vậy, có bốn số phức có môđun bằng 5.

Chọn D.



Ví dụ 6: Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = 2$, $z_2 = 4i$, $z_3 = 2 + 4i$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Diện tích tam giác ABC bằng

- A. 8. B. 2. C. 6. D. 4.

Hướng dẫn giải

Ta có $A(2;0), B(0;4), C(2;4)$ suy ra $\overrightarrow{AC} = (0;4); \overrightarrow{BC} = (2;0) \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Do đó tam giác ABC là tam giác vuông tại C .

Suy ra $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} CA \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$.

Chọn D.

Ví dụ 7: Tập hợp điểm biểu diễn các số phức z có phần ảo bằng 2 là

- A. Đường thẳng có phương trình $x = 2$.
B. Đường thẳng có phương trình $x = -2$.
C. Đường thẳng có phương trình $y = 2$.
D. Đường thẳng có phương trình $y = -2$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$. Số phức z có phần ảo bằng 2 khi $y = 2$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức z có phần ảo bằng 2 là đường

Nhận xét:

$ax + by = c (a, b, c \in \mathbb{R})$ là phương trình của đường thẳng trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) .

thẳng $y = 2$.

Chọn C.

Bài tập tự luyện dạng 2

Bài tập cơ bản

Câu 1: Trên mặt phẳng tọa độ, các điểm A, B, C theo thứ tự biểu diễn các số phức $2 + 3i, 3 + i, 1 + 2i$.

Trọng tâm G của tam giác ABC biểu diễn số phức z . Số phức z là

- A. $z = 1 + i$. B. $z = 2 + 2i$. C. $z = 2 - 2i$. D. $z = 1 - i$.

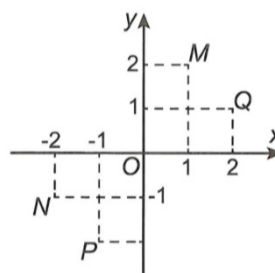
Câu 2: Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn hình học các số phức $z = 2 - i$ và $w = 4 + 5i$. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng MN là

- A. $I(2;3)$. B. $I(4;6)$. C. $I(3;2)$. D. $I(6;4)$.

Câu 3: Cho số phức $z = -2 + i$. Trong hình bên điểm

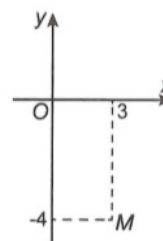
biểu diễn số phức $\bar{z}$ là

- A. M . B. Q .
C. P . D. N .



Câu 4: Số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) có điểm biểu diễn như hình vẽ bên. Giá trị của a, b là

- A. $a = -4, b = 3$.
B. $a = 3, b = -4$.
C. $a = 3, b = 4$.
D. $a = -4, b = -3$.



Bài 1. Khái niệm số phức

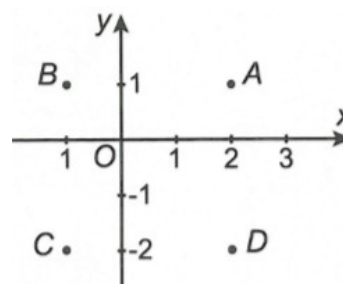
Câu 5: Gọi M và M' lần lượt là các điểm biểu diễn cho các số phức z và $\bar{z}$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề dưới đây.

- A. M và M' đối xứng nhau qua trục hoành. B. M và M' đối xứng nhau qua trục tung.
C. M và M' đối xứng nhau qua gốc tọa độ. D. Ba điểm O, M và M' thẳng hàng.

Câu 6: Trong hình vẽ dưới đây, điểm nào trong các điểm

A, B, C, D biểu diễn số phức có môđun bằng $2\sqrt{2}$?

- A. Điểm A .
B. Điểm B .
C. Điểm C .
D. Điểm D .



Bài tập nâng cao

Câu 7: Tập hợp điểm biểu diễn các số phức z có phần thực bằng -3 là

- A. Đường thẳng có phương trình $x = -3$. B. Đường thẳng có phương trình $x = 3$.
C. Đường thẳng có phương trình $y = 3$. D. Đường thẳng có phương trình $y = -3$.

Câu 8: Biết rằng ba điểm A , B , C lần lượt là các điểm biểu diễn hình học của số phức $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 3 + i$, $z_3 = -2 - 2i$. Tìm tọa độ đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCD$.

- A. $D(-6; -5)$. B. $D(-6; -3)$. C. $D(-4; -3)$. D. $D(-4; -5)$.

Câu 9: Cho các số phức $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = 1 + 4i$ và $z_3 = -1 + i$ có biểu diễn hình học trong mặt phẳng tọa độ Oxy lần lượt là các điểm A , B , C . Diện tích tam giác ABC bằng

- A. $2\sqrt{17}$. B. 12. C. $4\sqrt{13}$. D. 9.