

**Môn: Toán 12 CB****Chủ đề:****MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ TÍNH CHẤT
CỰC TRỊ HÀM BẬC 3 VÀ BẬC 4 TRÙNG
PHƯƠNG**

Tài liệu có tham khảo từ nhiều nguồn và trích
các sách chất lượng khác nhau!

Câu 1. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^3$ có cực đại, cực tiểu và hai điểm cực trị của đồ thị hàm số cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tam giác có diện tích bằng 48.

A. $\{-2; -3\}$.

B. $\{-2; 2\}$.

C. $\{-3; 3\}$.

D. $\{2; 3\}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2m.$$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $m \neq 0$ (*).

Các điểm cực trị của đồ thị là $A(0; 3m^3)$, $B(2m; -m^3)$.

$$\text{Suy ra } OA = 3|m^3|, d(B; OA) = 2|m|.$$

$$\text{Ta có } S_{\Delta OAB} = 48 \Leftrightarrow 3m^4 = 48 \Leftrightarrow m = \pm 2 \text{ thỏa mãn } (*).$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án B.

Câu 2. Tìm m để đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{m}{2} + 1$ có hai cực trị đối xứng nhau qua điểm $I(2; 2)$.

A. $m = 18$.

B. $m = 16$

C. $m = 4$

D. $m = 2$

Lời giải

$$\text{Trước hết, ta thấy rằng: } f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4.$$

Như vậy, với mọi giá trị của m , đồ thị hàm số luôn có hai cực trị là: $A\left(0; \frac{m}{2} + 1\right)$, $B\left(4; \frac{m}{2} - 15\right)$.

Hai điểm cực trị này đối xứng nhau qua điểm $I(2; 2)$ khi và chỉ khi I là trung điểm AB , tức là

$$\frac{m}{2} + 1 + \frac{m}{2} - 15 = 2 \cdot 2 \Leftrightarrow m = 18.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án A.

Câu 3. Tìm m để đồ thị hàm số $f(x) = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có cực đại, cực tiểu tạo thành một tam giác vuông.

A. $m = 2$.

B. $m = -1$.

C. $m = 0$.

D. $m = 1$.

Lời giải

Ta có $y' = 4x^3 - 4(m+1)x = 4x(x^2 - m - 1) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m + 1 \end{cases}$.

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị khi $m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1 (*)$.

Các điểm cực trị của đồ thị là: $A(0; m^2)$, $B(-\sqrt{m+1}; -2m-1)$, $C(\sqrt{m+1}; -2m-1)$.

Suy ra $\overline{AB} = (-\sqrt{m+1}; -(m+1)^2)$; $\overline{AC} = (\sqrt{m+1}; -(m+1)^2)$.

Vì $AB = AC$ nên tam giác ABC vuông khi và chỉ khi: $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0 \Leftrightarrow (m+1)^4 - (m+1) = 0$.

Kết hợp (*), ta được giá trị m cần tìm là $m = 0$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 4. Giá trị của m để đồ thị hàm số $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$ có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị cách đều gốc tọa độ O thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $\left(\frac{3}{5}; 1\right)$. B. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. C. $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$. D. $\left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{5}\right)$.

Lời giải

Ta có $y' = -3x^2 + 6x + 3(m^2 - 1)$. Hàm số đã cho có hai cực trị khi và chỉ khi $\Delta' = m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0 (*)$.

Lúc đó, hai điểm cực trị của đồ thị là: $A(1-m; -2-2m^3)$, $B(1+m; -2+2m^3)$.

Hai điểm cực trị của đồ thị cách đều gốc tọa độ O khi và chỉ khi $OA = OB \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}$ (thỏa (*)).

$\Rightarrow$ Chọn đáp án D.

Câu 5. Cho hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$ (1). Biết rằng các giá trị của m để đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại, điểm cực tiểu, đồng thời hoành độ của điểm cực tiểu nhỏ hơn 1, là khoảng dạng $(a; b)$; $(a < b; a \in \mathbb{R}; b \in \mathbb{R})$. Tích ab bằng:

- A. $\frac{2}{5}$. B. $\frac{4}{3}$. C. 1. D. $\frac{7}{4}$.

Lời giải

$y' = 3x^2 + 2(1-2m)x + 2 - m = g(x)$.

YCBT $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1 < x_2 < 1 \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < \frac{7}{5}$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án D.

Câu 6. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$ (1). Tổng tất cả các giá trị m để hàm số (1) có cực trị đồng thời khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ O bằng $\sqrt{2}$ lần khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ O , bằng bao nhiêu?

- A. $-3\sqrt{2}$. B. -6. C. $2\sqrt{2}$. D. 3.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$. Hàm số (1) có cực trị $\Leftrightarrow$ PT $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = 1 > 0, \forall m$.

Khi đó: điểm cực đại $A(m-1; 2-2m)$ và điểm cực tiểu $B(m+1; -2-2m)$

$$\text{Ta có } OA = \sqrt{2}OB \Leftrightarrow m^2 + 6m + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 + 2\sqrt{2}, \\ m = -3 - 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án B.

Câu 7. Cho hàm số $y = x^3 + 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x + m^3 + 3m^2$ (C_m). Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Với mọi m , đồ thị (C_m) luôn có 2 điểm cực trị và khoảng cách giữa 2 điểm cực trị là $2\sqrt{5}$.
- B. Với mọi m , đồ thị (C_m) luôn có 2 điểm cực trị và khoảng cách giữa 2 điểm cực trị là 2.
- C. Với mọi m , đồ thị (C_m) luôn có 2 điểm cực trị và khoảng cách giữa 2 điểm cực trị là $|2+2m|$.
- D. Với mọi m , đồ thị (C_m) luôn có 2 điểm cực trị và khoảng cách giữa 2 điểm cực trị là $\sqrt{5}$.

Lời giải

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2-m \\ x = -m \end{cases}$. Đồ thị (C_m) có điểm cực đại $A(-2-m; 4)$ và điểm cực tiểu

$$B(-m; 0) \Rightarrow AB = 2\sqrt{5}.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án A.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x) = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$ (C_m). Giá trị của m để đồ thị (C_m) của hàm số có các điểm cực đại, cực tiểu tạo thành 1 tam giác vuông cân thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $\left(\frac{4}{7}; \frac{3}{2}\right)$.
- B. $\left(\frac{3}{2}; \frac{21}{10}\right)$.
- C. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.
- D. $(-1; 0)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = 4x^3 + 4(m-2)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 2-m \end{cases}$$

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m < 2$ (*).

Khi đó tọa độ các điểm cực trị là:

$$A(0; m^2 - 5m + 5), B(\sqrt{2-m}; 1-m), C(-\sqrt{2-m}; 1-m)$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AB} = (\sqrt{2-m}; -m^2 + 4m - 4), \overrightarrow{AC} = (-\sqrt{2-m}; -m^2 + 4m - 4)$$

Do ΔABC luôn cân tại A, nên bài toán thỏa mãn khi ΔABC vuông tại A

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (m-2)^3 = -1 \Leftrightarrow m = 1 \quad (\text{thỏa } (*)).$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án A.

Câu 9. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ có đồ thị là (C_m). Có bao nhiêu giá trị m để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu cách đều đường thẳng $y = x - 1$?

A. 3.

B. 1.

C. 0.

D. 2.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - m$. Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow \Delta_{y'} = 36 + 12m > 0 \Leftrightarrow m > -3$ (*).

Gọi hai điểm cực trị là $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$. Ta có: $y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)y' + \left(\frac{2m}{3} - 2\right)x + \left(2 + \frac{m}{3}\right)$.

Suy ra phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là $\Delta: y = \left(\frac{2m}{3} - 2\right)x + 2 + \frac{m}{3}$.

Các điểm cực trị cách đều đường thẳng $y = x - 1 \Leftrightarrow$ xảy ra 1 trong 2 trường hợp:

TH1: Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị song song hoặc trùng với đường thẳng $y = x - 1 \Leftrightarrow \frac{2m}{3} - 2 = 1 \Leftrightarrow m = \frac{9}{2}$ (không thỏa (*)).

TH2: Trung điểm I của AB nằm trên đường thẳng $y = x - 1$

$$\Leftrightarrow y_I = x_I - 1 \Leftrightarrow \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} - 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2m}{3} - 2\right)(x_1 + x_2) + 2\left(2 + \frac{m}{3}\right) = (x_1 + x_2) - 2 \Leftrightarrow \left(\frac{2m}{3} - 2\right) \cdot 2 + 2\left(2 + \frac{m}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow m = 0$$

Vậy các giá trị cần tìm của m là $m = 0$ (thỏa (*)).

$\Rightarrow$ Chọn đáp án B.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 + 3(m-3)x^2 + 11 - 3m$ (C_m). Có bao nhiêu giá trị m để (C_m) có hai điểm cực trị M_1, M_2 sao cho các điểm M_1, M_2 và $B(0; -1)$ thẳng hàng?

A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

$$y' = 6x^2 + 6(m-3). y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 3 - m. \end{cases}$$

Hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow m \neq 3$ (*). Ta có: $f(x) = f'(x)\left(\frac{1}{3}x + \frac{m-3}{6}\right) - (m-3)^2 x + 11 - 3m$.

Phương trình đường thẳng M_1M_2 là $y = -(m-3)^2 x + 11 - 3m$.

Ba điểm M_1, M_2, B thẳng hàng $\Leftrightarrow B \in M_1M_2 \Leftrightarrow m = 4$ (thỏa (*)).

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 11. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m - 2$ có đồ thị (C_m). Tập hợp các giá trị của m để đồ thị hàm số có các điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía đối với trục hoành có dạng nào dưới đây?

A. $(-\infty; a), a > 0$.B. $(a; b), 0 < a < b < 1$.C. $[a; +\infty), a > 0$.D. $(a; b], 1 < a < b < 2$.**Lời giải**

$$\text{Xét phương trình: } x^3 + 3x^2 + mx + m - 2 = 0 \quad (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ g(x) = x^2 + 2x + m - 2 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

(C_m) có 2 điểm cực trị nằm về 2 phía đối với trục $Ox \Leftrightarrow$ (C_m) cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ PT (1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 3 - m > 0 \\ g(-1) = m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 3.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án A.

Câu 12. Cho hàm số $y = -x^3 + (2m+1)x^2 - (m^2 - 3m + 2)x - 4$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m) . Biết rằng tập hợp các giá trị m để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía của trục tung là một khoảng $(a; b)$, với $a < b$ và $a, b \in \mathbb{R}$. Tính $b - a$.

A. $\frac{3}{4}$.

B. $1 + 2\sqrt{3}$.

C. $2\sqrt{3} - 1$.

D. 1.

Lời giải

$$y' = -3x^2 + 2(2m+1)x - (m^2 - 3m + 2).$$

(C_m) có các điểm CĐ và CT nằm về hai phía của trục tung $\Leftrightarrow$ PT $y' = 0$ có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow 3(m^2 - 3m + 2) < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2 \Rightarrow b - a = 1$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án D.

Câu 13. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 9x + m - 2$ (1) có đồ thị là (C_m) . Có bao nhiêu giá trị của m thì đồ thị hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: y = \frac{1}{2}x$?

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow m \in (-\infty; -1 - \sqrt{3}) \cup (-1 + \sqrt{3}; +\infty)$.

$$\text{Ta có } y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{m+1}{3} \right) y' - 2(m^2 + 2m - 2)x + 4m + 1.$$

Giả sử các điểm cực trị là $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, I là trung điểm của AB .

$$\text{Theo định lý Viète, ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1), \\ x_1 \cdot x_2 = 3. \end{cases}$$

Vậy đường thẳng đi qua hai điểm cực đại và cực tiểu là: $y = -2(m^2 + 2m - 2)x + 4m + 1$

$$A, B \text{ đối xứng qua } d: y = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow \begin{cases} AB \perp d \\ I \in d \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án B.

Câu 14. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ có đồ thị là (C_m) . Có bao nhiêu giá trị m để (C_m) có các điểm cực đại, cực tiểu và đường thẳng đi qua các điểm cực trị song song với đường thẳng $y = -4x + 2017$?

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' = 9 + 3m > 0 \Leftrightarrow m > -3$ (*). Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là $\Delta: y = -\left(\frac{2m}{3} + 2\right)x + \left(2 - \frac{m}{3}\right)$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án B.

Câu 15. Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 + 7x + 3$ có đồ thị là (C_m) . Tổng tất cả các giá trị m để (C_m) có các điểm cực đại, cực tiểu và đường thẳng đi qua các điểm cực trị vuông góc với đường thẳng $d: y = 3x + 2017$ bằng bao nhiêu?

A. $\sqrt{10}$.

B. $2\sqrt{3}$.

C. 0.

D. $3\sqrt{5}$.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 + 2mx + 7$. Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow \Delta'_y = m^2 - 21 > 0 \Leftrightarrow |m| > \sqrt{21}$.

Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là $\Delta: y = \frac{2}{9}(21 - m^2)x + 3 - \frac{7m}{9}$.

$$\text{Ta có: } \Delta \perp d \Leftrightarrow \begin{cases} |m| > \sqrt{21} \\ \frac{2}{9}(21 - m^2) \cdot 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm \frac{3\sqrt{10}}{2}.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 16. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ có đồ thị là (C_m) . Có bao nhiêu giá trị m để (C_m) có các điểm cực đại, cực tiểu và đường thẳng đi qua các điểm cực trị tạo với đường thẳng $d: x + 4y - 5 = 0$ một góc $\alpha = 45^\circ$?

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow m > -3$. Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là

$$\Delta: y = -\left(\frac{2m}{3} + 2\right)x + \left(2 - \frac{m}{3}\right).$$

Đặt $k = -\left(\frac{2m}{3} + 2\right)$. Đường thẳng $d: x + 4y - 5 = 0$ có hệ số góc bằng $-\frac{1}{4}$.

$$\text{Ta có } \tan 45^\circ = \left| \frac{k + \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}k} \right| \Leftrightarrow \begin{cases} k + \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}k \\ k + \frac{1}{4} = -1 + \frac{1}{4}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{3}{5} \\ k = -\frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{39}{10} \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện, suy ra giá trị m cần tìm là $m = -\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 17. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx + m^3$ (1). Các giá trị m để đồ thị của hàm số (1) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC vuông tại C , với $C(4;0)$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(\frac{7}{10}; \frac{9}{11}\right)$.

B. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$.

C. $\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$.

D. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow m \neq 1$.

Khi đó các điểm cực trị là $A(1; m^3 + 3m - 1), B(m; 3m^2)$. ΔABC vuông tại $C \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (m+1)[m^2(m^2 - m + 1) + 3m^2 - 5m + 4] = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 18. Cho hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5(C_m)$. Với những giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có điểm cực đại và điểm cực tiểu, đồng thời các điểm cực đại và điểm cực tiểu lập thành một tam giác đều.

A. $m = 2 - \sqrt[3]{3}$.

B. $m = 2 + \sqrt[3]{3}$.

C. $m = 5 - 2\sqrt[3]{3}$.

D. $m = 5 + 2\sqrt[3]{3}$.

Lời giải

Do ΔABC luôn cân tại A , nên bài toán thỏa mãn khi $\hat{A} = 60^\circ \Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = 2 - \sqrt[3]{3}$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án A.

Câu 19. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có đồ thị (C_m) . Có bao nhiêu giá trị của m thì đồ thị (C_m) có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó lập thành một tam giác có diện tích $S = 4$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ g(x) = x^2 - m = 0. \end{cases}$

Hs có 3 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta_g > 0 \Leftrightarrow m > 0 (*)$

Với điều kiện (*), phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm $x_1 = -\sqrt{m}; x_2 = 0; x_3 = \sqrt{m}$. Hàm số đạt cực trị tại $x_1; x_2; x_3$.

Gọi $A(0; 2m + m^4); B(\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m); C(-\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m)$ là 3 điểm cực trị của (C_m) . Ta có:

$AB^2 = AC^2 = m^4 + m; BC^2 = 4m \Rightarrow \Delta ABC$ cân đỉnh A .

Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow M(0; m^4 - m^2 + 2m) \Rightarrow AM = |m^2| = m^2$.

Vì ΔABC cân tại A nên AM cũng là đường cao, do đó:

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AM \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot m^2 \cdot \sqrt{4m} = 4 \Leftrightarrow m^{\frac{5}{2}} = 4 \Leftrightarrow m^5 = 16 \Leftrightarrow m = \sqrt[5]{16}$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án A.

Câu 20. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có đồ thị (C_m) . Có bao nhiêu giá trị của m thì đồ thị (C_m) có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó lập thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1?

A. 3.

B. 1.

C. 0.

D. 2.

Lời giải

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x^2 = m. \end{cases}$

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m > 0$. Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị (Cm) là $A(0; m-1), B(-\sqrt{m}; -m^2 + m - 1), C(\sqrt{m}; -m^2 + m - 1)$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |y_B - y_A| \cdot |x_C - x_B| = m^2 \sqrt{m}; \quad AB = AC = \sqrt{m^4 + m}, \quad BC = 2\sqrt{m}$$

$$R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S_{\triangle ABC}} = 1 \Leftrightarrow \frac{(m^4 + m)2\sqrt{m}}{4m^2\sqrt{m}} = 1 \Leftrightarrow m^3 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1, \\ m = \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án D.

Câu 21. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2$ (C_m). Có bao nhiêu giá trị của m để (C_m) có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có đường tròn ngoại tiếp đi qua điểm $D\left(\frac{3}{5}; \frac{9}{5}\right)$?

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Ta có: $y' = 4x^3 - 4mx; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x^2 = m. \end{cases}$

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó các điểm cực trị của (C_m) là $A(0; 2), B(-\sqrt{m}; -m^2 + 2), C(\sqrt{m}; -m^2 + 2)$.

Gọi $I(x; y)$ là tâm của đường tròn (P) ngoại tiếp $\triangle ABC$. Ta có:

$$\begin{cases} IA^2 = ID^2 \\ IB^2 = IC^2 \\ IB^2 = IA^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ 2x\sqrt{m} = -2x\sqrt{m} \\ (x + \sqrt{m})^2 + (y + m^2 - 2)^2 = x^2 + (y - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ m = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án D.

Câu 22. Cho hàm số $y = 3x^3 - 6mx^2 + 3m^2x$, m là tham số. Tập tất cả giá trị thực của m thì hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 1$ là

A. $\{0\}$.

B. $\{1\}$.

C. $\{3\}$.

D. $\{1; 3\}$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 9x^2 - 12mx + 3m^2; \quad y'' = 18x - 12m.$$

Khi đó: Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ suy ra: $y'(1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 3 \end{cases}$.

Kiểm tra lại với $m = 1; m = 3$ ta có: $y''(1) < 0$ khi $m = 3$ và $y''(1) > 0$ khi $m = 1$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 23. Cho hàm số $y = mx^4 + 2(m+1)x^2 - m$, m là tham số. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

A. $m \geq -1$.

B. $m \leq 1$.

C. $m \geq 0$.

D. $0 \leq m \leq 1$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 4mx^3 + 4(m+1)x; y'' = 12mx^2 + 4(m+1).$$

Để ý rằng, hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) đạt cực tiểu tại $x = 0$ trong hai trường hợp:

TH 1: Hàm số có duy nhất 1 điểm cực trị; $a > 0$ và $c = 0$.

TH 2: Hàm số có 3 điểm cực trị; $a > 0$ và $c = 0$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 24. Cho hàm số $y = mx^3 + 2mx^2 + (m+2)x - 5$. Tìm tập hợp tất cả các giá trị m để hàm số không có cực trị.

A. $(-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$.

B. $(-\infty; 0] \cup [6; +\infty)$.

C. $[0; 6]$.

D. $(0; 6)$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

- Nếu $m = 0$ thì hàm số là $y = 2x$. Khi đó hàm số không có cực trị.
- Nếu $m \neq 0$, ta có: $y' = 3mx^2 + 4mx + m + 2$

Khi đó, hàm số không có cực trị khi và chỉ khi: $y' = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm.

$$\Leftrightarrow \Delta'_{y'} \leq 0 \Leftrightarrow (2m)^2 - 3m(m+2) \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 6.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 25. Cho hàm số $y = 3x^3 + 6mx^2 - 3x$. Tìm tập hợp các giá trị m để hàm số có hai cực trị tại x_1 và x_2 sao cho $x_1 = -3x_2$.

A. $\left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$.

B. $\left\{-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right\}$.

C. $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

D. $\left\{\frac{1}{4}\right\}$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 9x^2 + 12mx - 3.$$

Do $\Delta'_{y'} = 36m^2 + 27 > 0$ nên $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Do đó hàm số đã cho có hai

$$\text{cực trị } x_1, x_2. \text{ Ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{4}{3}m \\ x_1 x_2 = -\frac{1}{3} \\ x_1 = -3x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2m \\ x_2 = \frac{2}{3}m \\ -2m \cdot \frac{2}{3}m = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow 4m^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án A.

Câu 26. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 8m^2x^2 + 3$ có 3 điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

- A. $\{0\}$.
 B. $\left\{\frac{1}{8}\right\}$.
 C. $\left\{-\frac{1}{8}\right\}$.
 D. $\left\{-\frac{1}{8}; \frac{1}{8}\right\}$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x(x^2 - 4m^2)$.

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Lúc đó, ba điểm cực trị là: $A(2m; -16m^2 + 3)$, $B(0; 3)$, $C(-2m; -16m^2 + 3)$.

Suy ra: $\overrightarrow{BA} = (2m; -16m^2) \Rightarrow BA = \sqrt{4m^2 + 256m^4}$

$\overrightarrow{BC} = (-2m; -16m^2) \Rightarrow BC = \sqrt{4m^2 + 256m^4}$

Nên $BA = BC$. Do đó, tam giác ABC cân tại B .

Khi đó, tam giác ABC vuông cân khi và chỉ khi:

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 256m^4 = 0 \Leftrightarrow 1 - 64m^2 = 0 \quad (m \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{8} \\ m = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án D.

Câu 27. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 6mx^2 + 32m^3$ có các điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$.

- A. $\left\{\frac{\sqrt{2}}{4}\right\}$.
 B. $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}\right\}$.
 C. $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.
 D. $\left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 12mx = 3x(x - 4m) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4m \end{cases}$.

Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $m \neq 0$.

Lúc đó, hai điểm cực trị là: $A(0; 32m^3)$, $B(4m; 0)$.

Hai điểm A, B đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$ khi và chỉ khi:

$$4m = 32m^3; (m \neq 0) \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ m = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án B.

Câu 28. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx - m + 8}{x - 1}$. Tìm m để đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu đồng thời các điểm cực đại, cực tiểu nằm về hai phía trục hoành.

A. $m < -8$ hoặc $m > 4$.

B. $-8 < m < 4$.

C. $m < -4$ hoặc $m > 8$.

D. $-4 < x < 8$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có: $y' = \frac{x^2 - 2x - 8}{(x - 1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 8 = 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 4 \end{cases}.$

Đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu là $A(-2; m - 4), B(4; m + 8)$.

Hai điểm cực đại, cực tiểu nằm về hai phía trục hoành khi và chỉ khi:

$$(m - 4)(m + 8) < 0 \Leftrightarrow -8 < m < 4.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án B.

Câu 29. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx - m - 1}{x + 1}$. Tìm m để đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu đồng thời các điểm cực đại, cực tiểu nằm về hai phía trục tung.

A. $m = -\frac{1}{2}$.

B. $m > -\frac{1}{2}$.

C. $m < -\frac{1}{2}$.

D. Không tồn tại m .

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có: $y' = \frac{x^2 + 2x + 2m + 1}{(x + 1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 2m + 1 = 0 \\ x \neq -1 \end{cases}.$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực tiểu, cực đại nằm về hai phía trục tung khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi $\begin{cases} 2m + 1 < 0 \\ (-1)^2 + 2(-1) + 2m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}.$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 30. Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} + 2mx^2 + (m + 2)x$. Tìm m để hàm số có hai cực trị tại x_1 và x_2 sao cho $|x_1 - x_2| > 2$.

A. $m < -\frac{3}{4}$ hoặc $m > 1$.

B. $m < \frac{1 - \sqrt{33}}{8}$ hoặc $m > \frac{1 + \sqrt{33}}{8}$.

C. $-\frac{3}{4} < m < 1$.

C. $\frac{1-\sqrt{33}}{8} < m < \frac{1+\sqrt{33}}{8}$.

Lời giảiTXĐ: $D = \mathbb{R}$.Ta có: $y' = x^2 + 4mx + m + 2$.Hàm số có hai điểm cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm

$$\text{phân biệt, tức là: } \Delta'_{y'} = 4m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1+\sqrt{33}}{8} \\ m < \frac{1-\sqrt{33}}{8} \end{cases}.$$

Theo định lý Vi-ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -4m \\ x_1 x_2 = m + 2 \end{cases}$. Theo đề ra ta có: $|x_1 - x_2| > 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 > 4$.

$$\Leftrightarrow (4m)^2 - 4(m+2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{3}{4} \\ m > 1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

 $\Rightarrow$ Chọn đáp án A.

Câu 31. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 2}{mx - 1}$. Tìm m để hàm số có hai cực trị tại x_1 và x_2 sao cho

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} > 1.$$

A. $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \setminus \{0\}$.

B. $(-1; 1) \setminus \{0\}$.

C. $x < -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ hoặc $x > \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

D. $x < -1$ hoặc $x > 1$.

Lời giải

- Nếu $m = 0$ thì hàm số là $y = -x^2 + 2$ có một cực trị nên không thỏa.

- Nếu $m \neq 0$ thì $x \neq \frac{1}{m}$. Lúc đó: $y' = \frac{mx^2 - 2x + m}{(mx - 1)^2}$.

Hàm số đạt cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác $\frac{1}{m}$, tức

$$\text{là: } \begin{cases} \Delta' = 1 - m^2 > 0 \\ m\left(\frac{1}{m}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{m} + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ m^2 \neq 1 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases} (*).$$

$$\text{Theo đề ra ta có: } \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} > 1 \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} > 1 \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} > 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{4}{m^2} - 2}{1} > 1 \Leftrightarrow \frac{4}{m^2} > 3 \Leftrightarrow m^2 < \frac{4}{3} \Leftrightarrow -\frac{2}{\sqrt{3}} < m < \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Kết hợp với $(*)$, ta được $\begin{cases} -1 < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$ thỏa yêu cầu bài toán.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án B.

Câu 32. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3mx^2 - 6(3m^2 - 1) + 6$. Tìm m để hàm số có hai cực trị tại x_1 và x_2 sao cho $x_1^3 + x_2^3 = 7$.

A. $m = 0$.

B. $m = 1$.

C. $m = 2$.

D. $m = 3$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 6x^2 - 6mx - 6(3m^2 - 1)$.

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt, tức là:

$$\Delta_{y'} = 9m^2 + 36(3m^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow 9(13m^2 - 4) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2}{\sqrt{13}} \\ m < -\frac{2}{\sqrt{13}} \end{cases}.$$

Theo đề ra ta có: $x_1^3 + x_2^3 = 7 \Leftrightarrow (x_1 + x_2) \left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 \right] = 7 \Leftrightarrow m \left[m^2 + 3(3m^2 - 1) \right] = 7$.
 $\Leftrightarrow 10m^3 - 3m - 7 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án B.

Câu 33. Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 + x + 2017$ (1). Tìm tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại nằm bên phải điểm cực tiểu.

A. $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.

B. $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$.

C. $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$.

D. $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty)$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 2mx + 1$.

Để đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại nằm bên phải điểm cực tiểu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} = 4m^2 - 12 > 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty).$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án B.

Câu 34. Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + x + 1$ (1). Tìm tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại nằm bên phải điểm cực tiểu.

A. $[-1; 1]$.

B. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

C. $(-1; +\infty)$.

D. $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -x^2 - 2(m-1)x + 1$.

Để đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại nằm bên phải điểm cực tiểu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} = (m+1)^2 + 4 > 0 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án D.

Câu 35. Cho hàm số $y = \frac{mx^3}{3} - 2x^2 + mx + 2$ (1). Tìm tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại nằm bên phải điểm cực tiểu.

A. $(-2; 2)$.

B. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

C. $(-2; 0)$.

D. $(0; 2)$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = mx^2 - 4x + m$.

Để đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại nằm bên phải điểm cực tiểu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} = 16 - 4m^2 > 0 \\ a = m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-2; 0).$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 36. Cho hàm số $y = \frac{mx^3}{3} + \frac{x^2}{2} - (m-1)x + 1$ (1). Tìm tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại nằm bên phải điểm cực tiểu.

A. $\mathbb{R}$.

B. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

C. $(0; +\infty)$.

D. $(0; +\infty) \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = mx^2 + x + 1 - m$.

Để đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại nằm bên phải điểm cực tiểu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} = 1 - 4m(1-m) = 4m^2 - 4m + 1 > 0 \\ a = m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (0; +\infty) \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án D.

----- HẾT -----

SẼ CÒN UPDATE TIẾP.....

Các em cùng thầy cô cố gắng nhé!! Thầy tin mọi việc rồi sẽ tốt đẹp thôi! À quên, nếu có nhầm gì thì các em phản hồi giúp thầy nhé!! Hẹn gặp lại các em ở những chủ đề sau!

Huế, ngày 05 tháng 9 năm 2017!

P/S: Trong quá trình biên soạn chắc chắn không tránh khỏi sai sót, rất mong nhận được sự góp ý của quý thầy cô giáo và các em học sinh thân yêu để các bài viết tiếp theo được hoàn thiện hơn. Xin chân thành cảm ơn!

CLB GIÁO VIÊN TRẺ TP HUẾ

Phụ trách chung: **Giáo viên LÊ BÁ BẢO.**

Đơn vị công tác: **Trường THPT Đặng Huy Trứ, Thừa Thiên Huế.**

Email: lebabaodanghuytru2016@gmail.com Facebook: **Lê Bá Bảo**

Số điện thoại: **0935.785.115**

