

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN LỚP 10

Thời gian làm bài: 180 phút

(Đề thi có 01 trang, gồm 5 câu)

Câu 1. (5.0 điểm)

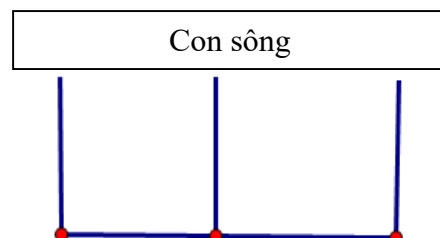
a. Giải bất phương trình $3x(2x - \sqrt{x^2 + 3}) \geq 2(1 - x^4)$.

b. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{y^2 + 1} - y) = 1 \\ 3\sqrt{x + 2y - 2} + x\sqrt{x - 2y + 6} = 10 \end{cases}$$
.

Câu 2. (5.0 điểm)

a. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2 - 4x + 3$, điểm $I(1;4)$ và đường thẳng $d: y = mx + m + 8$. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB cân tại I .

b. Một người nông dân có một khu đất rất rộng dọc theo một con sông. Người đó muốn làm một cái hàng rào hình chữ E (như hình vẽ) để được một khu đất gồm hai phần đất hình chữ nhật để trồng rau và nuôi gà. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 80 ngàn đồng một mét dài, đối với phần còn lại thì chi phí nguyên vật liệu là 40 ngàn đồng một mét dài. Tính diện tích lớn nhất của phần đất mà người nông dân rào được với chi phí vật liệu 20 triệu đồng.



Câu 3. (6.0 điểm)

a. Cho tam giác ABC có chu vi bằng 20, góc $\widehat{BAC}$ bằng 60° , bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng $\sqrt{3}$. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C lên BC, AC, AB và M là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{ABM} = \widehat{BCM} = \widehat{CAM} = \varphi$. Tính $\cot \varphi$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$.

b. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A , đỉnh $C(-4;1)$, phân giác trong góc A có phương trình $x + y - 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng BC , biết diện tích tam giác ABC bằng 36 và đỉnh A có hoành độ dương.

Câu 4. (2.0 điểm)

Cho phương trình $(x^2 + ax + 1)^2 + a(x^2 + ax + 1) + 1 = 0$, với a là tham số. Biết rằng phương trình có nghiệm thực duy nhất. Chứng minh rằng $a > 2$.

Câu 5. (2.0 điểm)

Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x^3 + y^3 + z^3 = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P = \frac{xyz + (x + y + z)^2}{xy + yz + zx} - \frac{1}{xy + yz + zx + 1}.$$

-----Hết-----

-Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay;
-Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

NỘI DUNG

Câu 1.a pt $\Leftrightarrow 2x^2(x^2 + 3) - 3x\sqrt{x^2 + 3} - 2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{x^2 + 3} \geq 2 & (1) \\ x\sqrt{x^2 + 3} \leq -\frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^4 + 3x^2 - 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \geq 1$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^4 + 3x^2 - \frac{1}{4} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \leq -\sqrt{\frac{-3 + \sqrt{10}}{2}}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x \geq 1$ hoặc $x \leq -\sqrt{\frac{-3 + \sqrt{10}}{2}}$

Câu 1b

$$(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{y^2 + 1} - y) = 1(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} + x = \sqrt{y^2 + 1} + y \\ \sqrt{x^2 + 1} - x = \sqrt{y^2 + 1} - y \end{cases} \Leftrightarrow x = y$$

Thay $x=y$ vào phương trình thứ hai ta được

$$3\sqrt{3x-2} + x\sqrt{6-x} = 10. \text{ ĐK: } \frac{2}{3} \leq x \leq 6$$

$$PT \Leftrightarrow 3(\sqrt{3x-2} - 2) + x(\sqrt{6-x} - 2) + 2(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{9}{\sqrt{3x-2}+2} + 2 - \frac{x}{\sqrt{6-x}+2}\right) = 0$$

$$\text{Ta có } \frac{9}{\sqrt{3x-2}+2} + 2 \geq \frac{9}{\sqrt{3 \cdot 6-2}+2} + 2 = \frac{7}{2}; \quad \frac{x}{\sqrt{6-x}+2} \leq \frac{6}{2} = 3$$

Suy ra $x = 2$. Vậy hệ có nghiệm $(2; 2)$

Câu 2a. Hoành độ giao điểm là nghiệm phương trình

$$x^2 - 4x + 3 = mx + m + 8 \Leftrightarrow x^2 - (m+4)x - m - 5 = 0 \quad (1)$$

(1) Có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = m^2 + 12m + 36 > 0 \Leftrightarrow m \neq -6$

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = m + 5 \end{cases}$$

Gọi $A(-1; 8)$, $B(m+5; m^2 + 6m + 8)$,

Tam giác IAB cân tại I

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I \notin d \\ IA = IB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ (m+4)^2 + (m^2 + 6m + 4)^2 = 2^2 + 4^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ (m+6)(m+2)(m^2 + 4m + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m = -2 \pm \sqrt{3} \quad (\text{Do } m \neq -2, m \neq -6)$$

Câu 2b. Gọi x là chiều dài hàng rào vuông góc với bờ sông, y là chiều dài hàng rào song song với bờ sông. Theo giả thiết ta có: $3x \cdot 40.000 + y \cdot 80.000 = 20.000.000$

$$\Leftrightarrow 3x + 2y = 500 \Leftrightarrow y = \frac{500 - 3x}{2}$$

Diện tích khu vườn sau khi rào là

$$f(x) = xy = \frac{-3}{2}x^2 + 250x, \quad 0 < x < \frac{500}{3}$$

Ta có: $f(x)$ là tam thức bậc hai có hệ số của x^2 âm nên đạt GTLN tại

$$x = \frac{-250}{-3} = \frac{250}{3} \in (0; \frac{500}{3})$$

$$\max_{(0; \frac{500}{3})} f(x) = \frac{31250}{3} (m^2). \quad \text{Vậy diện tích lớn nhất mà người nông dân rào được là}$$

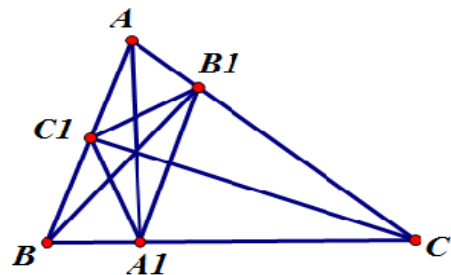
$$\frac{31250}{3} (m^2) \approx 10416,666 (m^2).$$

Câu 3a. Ta có: $S = \frac{1}{2}bc \sin 60^\circ = p \cdot r = 10\sqrt{3} \Rightarrow bc = 40$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow a^2 = (b+c)^2 - 3bc$$

$$\Leftrightarrow a^2 = (20-a)^2 - 120 \Leftrightarrow a = 7$$



$$\begin{cases} b+c=13 \\ bc=40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=8 \\ c=5 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} b=5 \\ c=8 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \cot \varphi &= \frac{AB^2 + BM^2 - AM^2}{4S_{ABM}} = \frac{AD^2 + AM^2 - DM^2}{4S_{ADM}} = \frac{DB^2 + DM^2 - BM^2}{4S_{DBM}} \\ &= \frac{AB^2 + AC^2 + BC^2}{4S_{ABC}} = \frac{8^2 + 5^2 + 7^2}{4 \cdot 10\sqrt{3}} = \frac{23\sqrt{3}}{20} \end{aligned}$$

Ta thấy tam giác ABC nhọn. Theo tính chất của tứ giác nội tiếp đường tròn ta có:

$$B_1BA = C_1CA = 90^\circ - A = 30^\circ;$$

$$B_1A_1C_1 = B_1A_1A + AA_1C_1 = C_1CA + B_1BA = 90^\circ - A + 90^\circ - A = 60^\circ.$$

Theo định lý sin trong tam giác CC_1B_1 nội tiếp đường tròn đường kính BC , ta có

$$\frac{B_1C_1}{\sin C_1CA} = BC \Rightarrow B_1C_1 = 7 \sin 30^\circ = \frac{7}{2}$$

$$\text{Ta có: } R_1 = \frac{B_1C_1}{2 \sin 60^\circ} = \frac{7}{2\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 3b.

$$A(a; 5-a), a > 0; \overrightarrow{AC} = (-4-a; -4+a), \quad d: x+y-5=0, \quad \vec{u}_d = (1; -1)$$

Do d là phân giác góc BAC nên góc giữa d và AC bằng 45°

$$\Rightarrow \cos 45^\circ = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \vec{u}_d|}{AC \cdot |\vec{u}_d|} = \frac{|(-4-a) \cdot 1 + (a-4) \cdot (-1)|}{\sqrt{(4+a)^2 + (a-4)^2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow a = 4 \Rightarrow A(4; 1) \quad (\text{Do } a > 0)$$

$$\text{Ta có: } AB: x-4=0. \text{ Gọi } B(4; b); \quad \overrightarrow{AB} = (0; b-1); \quad AB = |b-1|, \quad AC = 8$$

$$S_{ABC} = 36 \Leftrightarrow \frac{1}{2} |b-1| \cdot 8 = 36 \Leftrightarrow |b-1| = 9$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=10 \\ b=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(4; 10) \\ B(4; -8) \end{cases}$$

Do B, C nằm về hai phía của d nên $B(4; 10)$

$$BC: 9x-8y+44=0$$

Câu 4. Đặt $f(x) = x^2 + ax + 1$. Do phương trình $f(f(x)) = 0$ có nghiệm thực nên phương

trình $f(x) = 0$ có nghiệm thực. Suy ra $\Delta = a^2 - 4 \geq 0$.

$$\text{Gọi } f(x) = (x-x_1)(x-x_2), x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

+) Nếu $x_1 = x_2$ thì $f(f(x)) = (f(x) - x_1)^2$. Suy ra phương trình $f(x) = x_1$ có nghiệm duy nhất hay $(x-x_1)^2 = x_1$ có nghiệm duy nhất. Suy ra $x_1 = 0 \Rightarrow f(x) = x^2$

Vô lý. Suy ra $a^2 - 4 > 0$.

+) Khi $x_1 \neq x_2$ thì một trong 2 phương trình $f(x) = x_i$ vô nghiệm, phương trình còn lại có nghiệm kép. (Nếu xảy ra cả hai phương trình có nghiệm thì nghiệm của

phương trình này không là nghiệm phương trình kia vì $x_1 \neq x_2$ và khi đó phương trình $f(f(x))=0$ có hơn 1 nghiệm).

Giả sử $x^2 + ax + 1 - x_1 = 0$ có nghiệm kép và $x^2 + ax + 1 - x_2 = 0$ vô nghiệm.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \Delta_1 = a^2 - 4 + 4x_1 = 0 \\ \Delta_2 = a^2 - 4 + 4x_2 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow a = -(x_1 + x_2) > 0. \text{ Kết hợp với } a^2 - 4 > 0. \text{ Suy ra } a > 2.$$

Câu 5. Áp dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân ta có:

$$x^3 + 1 + 1 \geq 3x \Leftrightarrow x^3 + 2 \geq 3x. \text{ Tương tự: } y^3 + 2 \geq 3y; z^3 + 2 \geq 3z$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên suy ra $x + y + z \leq 3$.

$$\text{Ta có } 3 = x^3 + y^3 + z^3 \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^3} = 3xyz \Leftrightarrow xyz \leq 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 3 - 3xyz &= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\ &\leq 3(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1 - xyz \leq x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \Leftrightarrow xyz + (x + y + z)^2 \geq 1 + 3(xy + yz + zx).$$

$$\text{Ta có: } 1 + 3(xy + yz + zx) \leq xyz + (x + y + z)^2 \leq 1 + 3^2 = 10$$

$$0 < xy + yz + zx \leq 3.$$

$$\text{Ta có: } P \geq f(t) = \frac{3t+1}{t} - \frac{1}{t+1} \text{ với } t = xy + yz + zx; t \in (0; 3]$$

$$+) f(t) = \frac{3t+1}{t} - \frac{1}{t+1} = 3 + \frac{1}{t(t+1)} \geq 3 + \frac{1}{3(3+1)} = \frac{37}{12}$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{37}{12} \Leftrightarrow x = y = z = 1$$