

TOÀN TẬP VỀ PHƯƠNG PHÁP GHEP TRUC

LÍ THUYẾT

❖ Cơ sở của phương pháp ghép trực giải quyết bài toán hàm hợp $g = f(u(x))$. Ta thực hiện theo các bước sau đây:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định của hàm $g = f(u(x))$. Giả sử tập xác định tìm được như sau:

$$D = (a_1; a_2) \cup (a_3; a_4) \cup \dots \cup (a_{n-1}; a_n), \text{ ở đây có thể } a_1 \equiv -\infty; a_n \equiv +\infty$$

- **Bước 2:** Xét sự biến thiên của hàm $u = u(x)$ và hàm $y = f(x)$

Lập bảng biến thiên kép, xét sự tương quan giữa $[x; u = u(x)]$ và $[u; g = f(u)]$

(Bảng biến thiên này thường có 3 dòng)

x	a_1	a_2					a_{n-1}	a_n	
$u = u(x)$	u_1	$\xrightarrow{b_1}$	b_2		b_k	$\xrightarrow{u_2}$		u_{n-1}	u_n
$g = f(u(x))$		$\nearrow g(b_1)$	$g(b_2)$		$g(u_2)$	$\nwarrow g(b_k)$		$g(u_{n-1})$	$g(u_n)$

- **Dòng 1:** Xác định các điểm đặc biệt của hàm $u = u(x)$, sắp xếp các điểm này theo thứ tự tăng dần từ trái qua phải, giả sử như sau: $a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n$ (xem chú ý số 1).
- **Dòng 2:** Điền các giá trị $u_i = u(a_i)$, với $(i = \overline{1, \dots, n})$.

Trên mỗi khoảng $(u_i; u_{i+1})$, với $(i = \overline{1, n-1})$ cần bổ sung các điểm kì dị $b_1, b_2, \dots, b_k$ của hàm số $y = f(x)$.

Trên mỗi khoảng $(u_i; u_{i+1})$, với $(i = \overline{1, n-1})$, sắp xếp các điểm $u_i; b_k$ theo thứ tự, chẳng hạn: $u_i < b_1 < b_2 < \dots < b_k < u_{i+1}$ hoặc $u_i > b_1 > b_2 > \dots > b_k > u_{i+1}$ (xem chú ý số 2).

- **Dòng 3:** Xét chiều biến thiên của hàm $g = f(u(x))$ dựa vào bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$ bằng cách hoán đổi u đóng vai trò của x ; $f(u)$ đóng vai trò của $f(x)$.

Sau khi hoàn thiện bảng biến thiên $g = f(u(x))$ ta sẽ thấy được hình dạng của đồ thị hàm số này.

- **Bước 4:** Dùng bảng biến thiên hàm hợp $g = f(u(x))$ để giải quyết các yêu cầu của bài toán và đưa ra kết luận.

- ❖ Một số chú ý quan trọng khi sử dụng phương pháp ghép trục để giải quyết các bài toán về hàm hợp.
- **CHÚ Ý 1:**
 - Các điểm đặc biệt của $u = u(x)$ gồm: các điểm biên của tập xác định D , các điểm cực trị của hàm số $u = u(x)$.
 - Nếu xét hàm $u = |u(x)|$ thì ở **dòng 1** các điểm đặc biệt còn có nghiệm của phương trình $u(x) = 0$ (là hoành độ giao điểm của hàm số $u = u(x)$ với trục Ox).
 - Nếu xét hàm $u = u(|x|)$ thì ở **dòng 1** các điểm đặc biệt còn có số 0 (là hoành độ giao điểm của $u = u(x)$ và trục Oy).
 - **CHÚ Ý 2:**
 - Có thể dùng thêm các mũi tên để thể hiện chiều biến thiên của $u = u(x)$.
 - Điểm đặc biệt của hàm số $y = f(x)$ gồm: các điểm tại đó $f(x)$ và $f'(x)$ không xác định, các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.
 - Nếu xét hàm $g = |f(u(x))|$ thì trong **dòng 2** các điểm đặc biệt còn có nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.
 - Nếu xét hàm $g = f(u(|x|))$ thì trong **dòng 2** các điểm đặc biệt còn có số 0.

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	$-1/4$	0	2	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		-2		2		-4		$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ của hàm số $5f(\cos^2 x - \cos x) = 1$ là

A. 11.

B. 10.

C. 9.

D. 12.

Lời giải

Chọn B

Tiến hành đặt $u = \cos^2 x - \cos x$. Đạo hàm $u' = -2 \cos x \sin x + \sin x = \sin x(1 - 2 \cos x)$.

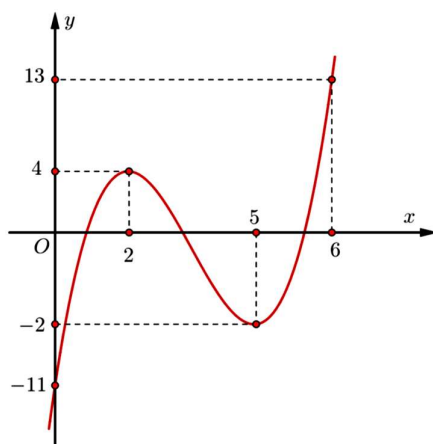
Giải phương trình: $u' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \Rightarrow x = 0; \pi; 2\pi \\ \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3} \end{cases}$

Sử dụng phương pháp ghép trục:

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{3}$	2π	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{2}$
u	0	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	2	0	$-\frac{1}{4}$	0
$f(u)$	2	-2	2	-2	2	-4	2	-2	2

Từ bảng biến thiên ta có phương trình $f(u) = \frac{1}{5}$ có tất cả 10 nghiệm phân biệt.

VÍ DỤ 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(x)+2) = \frac{m}{2}$ có 3 nghiệm phân biệt. Số phần tử của tập S là?

A. 10.

B. 32.

C. 9.

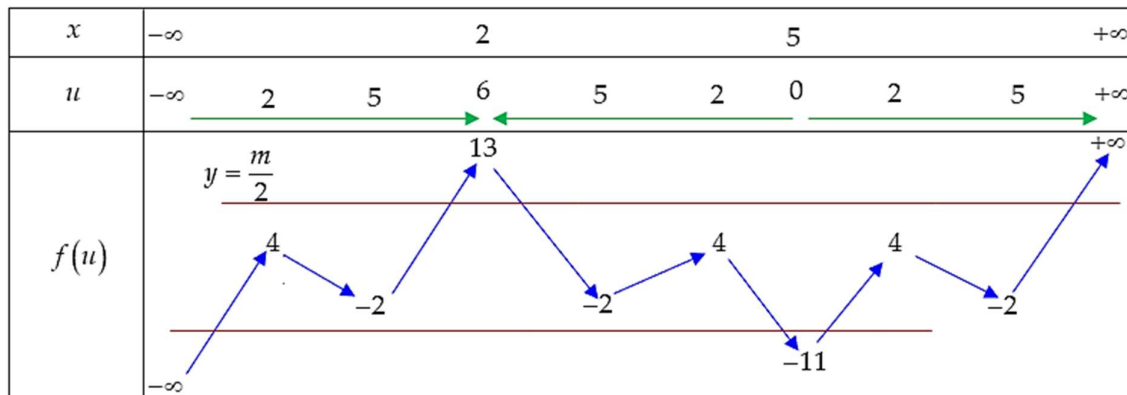
D. 34.

Lời giải

Chọn D

Đặt $u = f(x) + 2$. Từ đồ thị ta thấy hàm số đạt cực trị tại $x = 2$ và $x = 5$.

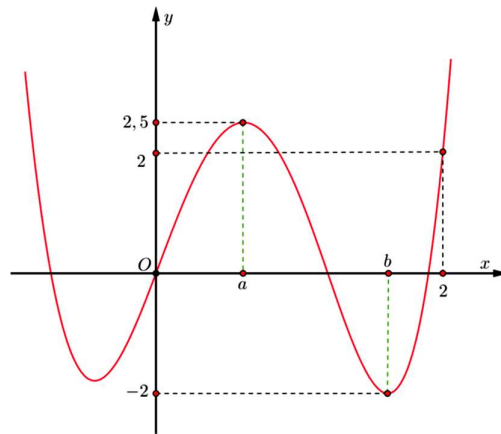
Sử dụng phương pháp ghép trục:



Từ bảng biến thiên, phương trình có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} -11 < \frac{m}{2} < -2 \\ 4 < \frac{m}{2} < 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 < m < 26 \\ -22 < m < -4 \end{cases}$

Vậy có 34 giá trị của m thỏa mãn.

VÍ DỤ 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Hỏi phương trình $f(|x^3 - 3x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc đoạn $[-2; 2]$?

A. 10.

B. 17.

C. 12.

D. 15.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } u = |x^3 - 3x| = \sqrt{(x^3 - 3x)^2} \Rightarrow u' = \frac{(x^3 - 3x)(3x^2 - 3)}{\sqrt{(x^3 - 3x)^2}}.$$

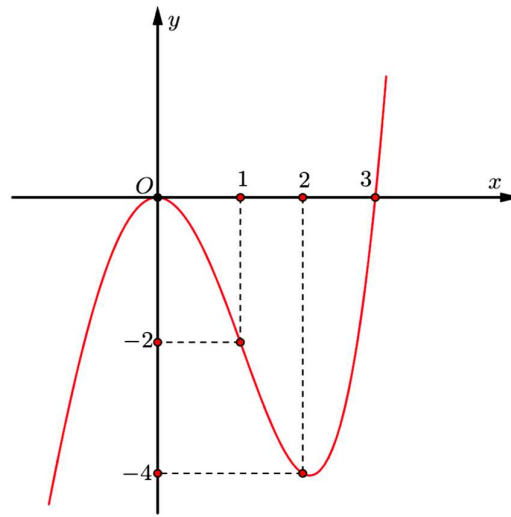
$$\text{Giải phương trình đạo hàm } u' = \frac{(x^3 - 3x)(3x^2 - 3)}{\sqrt{(x^3 - 3x)^2}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm \sqrt{3} \end{cases}.$$

Sử dụng phương pháp ghép trục:

x	-2	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	2
u	2	b	a	0	a	b	2
$f(u)$	2	2,5	2,5	0	2	2,5	2,5
	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $[-2; 2]$ có 17 điểm cực trị.

VÍ DỤ 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $7f\left(5-2\sqrt{1+3\cos x}\right) = 3m-10$ có đúng ba nghiệm phân biệt thuộc $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

A. 10.

B. 1.

C. 15.

D. 2.

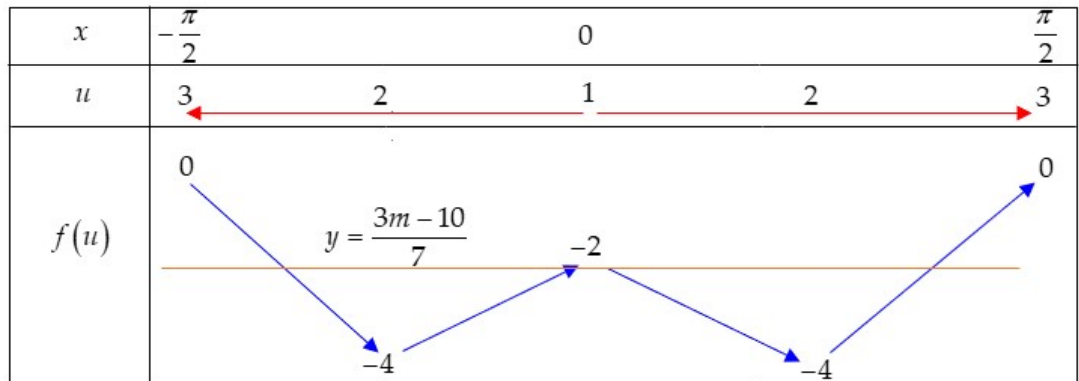
Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với $f\left(5-2\sqrt{1+3\cos x}\right) = \frac{3m-10}{7}$.

Đặt $u = 5-2\sqrt{1+3\cos x} \Rightarrow u' = \frac{3\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}$.

Giải phương trình đạo hàm $u' = \frac{3\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

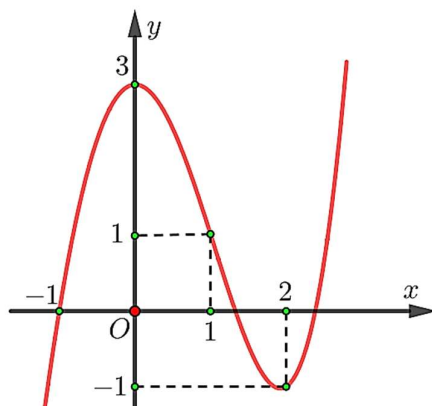
Sử dụng phương pháp ghép trục:



Từ bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \frac{3m-10}{7} = -2 \Leftrightarrow m = -\frac{4}{3}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

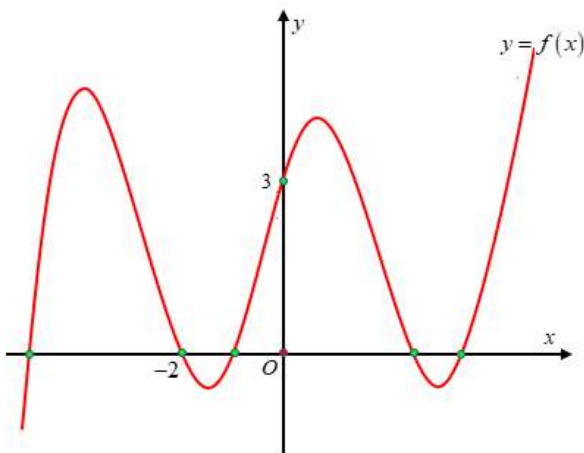
Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ



Số nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right)$ của phương trình $f^2(\sin x) - 5|f(\sin x)| + 6 = 0$ là

- A. 13. B. 12. C. 11. D. 10

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ có đồ thị như hình vẽ



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(|4x + 5| - 2) - 3 = 0$ là:

- A. 8. B. 4. C. 10. D. 6

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	0	
$f(x)$	$-\infty$	2	0	2	$-\infty$

Hỏi phương trình $\left|f\left(x - 1 - 2\sqrt{x - 1}\right)\right| = 1$ có bao nhiêu nghiệm thực?

- A. 12. B. 4. C. 5. D. 8

Câu 4: Cho bảng biến thiên hàm số $f(5-2x)$ như hình vẽ dưới.

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
y	-1	3	2	4	$-\infty$

Hỏi phương trình $|2f(x^2 - 4x + 3) - 1| = 3$ có bao nhiêu nghiệm thực x tương ứng?

- A. 6. B. 5. C. 7. D. 4

Câu 5: Cho bảng biến thiên của hàm số $f(3-2x)$ như hình vẽ. Biết $f(4) = 3; f(0) = 0$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|f(x^3 - 3x + 2) - m| = 2$ có nhiều nghiệm nhất?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y	-2	12	0	8	$-\infty$

- A. 7. B. 6. C. 5. D. 2

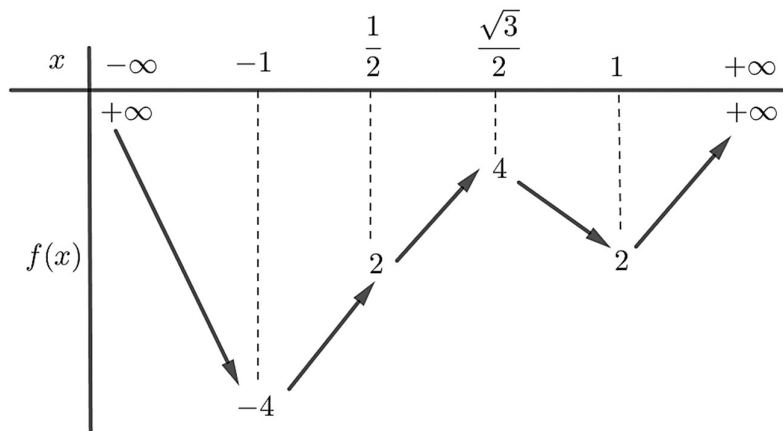
Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(-1) < 2 < f(5)$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$	$-\infty$	2	0	3	$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(\sqrt{2\cos^3(x) + 2\cos x + 5} + 2\cos x) = 2$ trên khoảng $(0; \frac{5\pi}{2})$ là?

- A. 2. B. 1. C. 5. D. 3

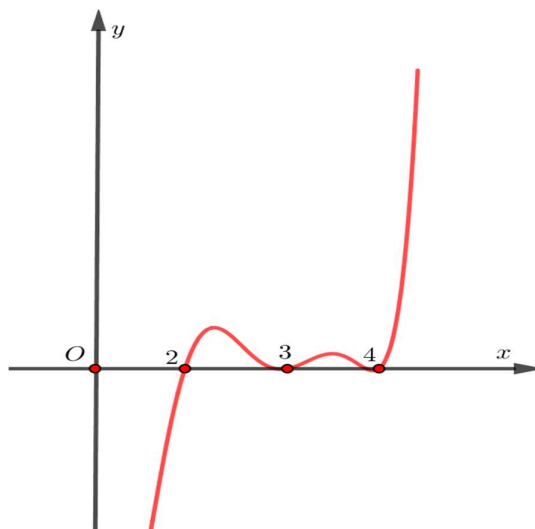
Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên.



Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x) + (3-m)f(\cos x) + 2m - 10 = 0$ có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]$ là

- A. 5. B. 6. C. 7. D. 4.

Câu 8: Cho $f(x)$ là hàm đa thức bậc 6 và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Hỏi hàm số $y = g(x) = f(x^2 + 4x + 5)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 2. B. 5. C. 3. D. 1.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x) = f(4 - \sqrt{4 - x^2})$ đồng biến trên:

x	$-\infty$	-3	1	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

- A. $(0;1)$. B. $(1;2)$. C. $(-1;0)$. D. $(-3;-1)$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x) = f\left(-1 + \sqrt{7 + 6x - x^2}\right)$ nghịch biến trên:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

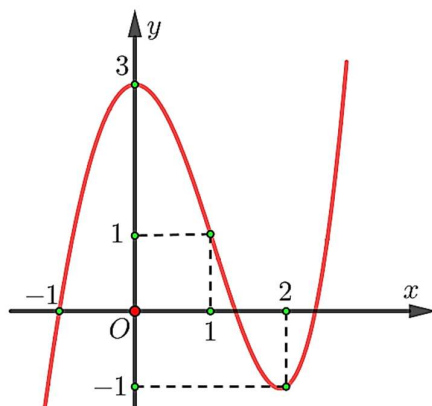
- A. $(5;6)$. B. $(-1;2)$. C. $(2;3)$. D. $(3;5)$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.D	3.C	4.D	5.D	6.A	7.B	8.C	9.C	10.D
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ



Số nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right)$ của phương trình $f^2(\sin x) - 5|f(\sin x)| + 6 = 0$ là

- A. 13. B. 12. C. 11. D. 10

Bài làm:

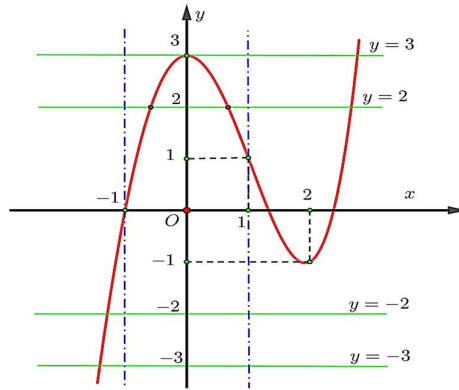
Chọn A

Ta giải phương trình: $f^2(\sin x) - 5|f(\sin x)| + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |f(\sin x)| = 3 \\ |f(\sin x)| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\sin x) = 3 \\ f(\sin x) = -3 \\ f(\sin x) = -2 \\ f(\sin x) = 2 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π
$\sin x$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0

Kết hợp bảng biến thiên và đồ thị tương giao:



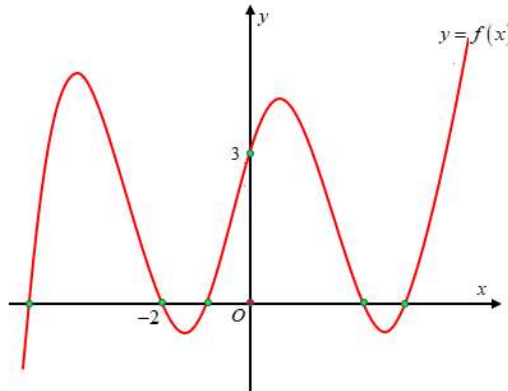
Ta thấy:

Với mọi $x \in [-1; 1]$ thì phương trình luôn có 3 nghiệm.

Với mọi $x \in [0; 1]$ thì phương trình có duy nhất 1 nghiệm.

Vậy số nghiệm của phương trình thuộc khoảng $\left(-\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right)$ là $3 \cdot 4 + 1 = 13$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ có đồ thị như hình vẽ



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(|4x+5|-2)-3=0$ là:

A. 8.

B. 4.

C. 10.

D. 6

Bài làm:

$$\text{Đặt } g(x) = |4x+5|-2 = \sqrt{(4x+5)^2} - 2 \Rightarrow g'(x) = \frac{4(4x+5)}{\sqrt{(4x+5)^2}}.$$

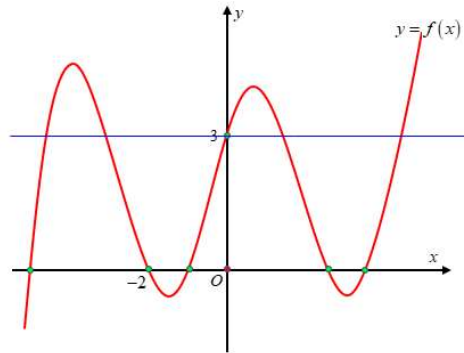
$$\text{Giải phương trình } g'(x) = \frac{4(4x+5)}{\sqrt{(4x+5)^2}} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}.$$

Ta lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$	$-\frac{5}{4}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	-2	$-\infty$

Yêu cầu bài toán trở thành: tìm số nghiệm phân biệt của phương trình $f(g(x))-3=0$.

Kẻ đường thẳng $y=3$ lên đồ thị như sau:



Từ bảng biến thiên ta thấy, số nghiệm của phương trình thuộc $[-2; +\infty]$ bằng số nghiệm của phương trình thuộc $[-\infty; -2]$. Mà trên $[-2; +\infty]$ phương trình có 3 nghiệm nên trên $[-\infty; -2]$ cũng có 3 nghiệm. Vậy phương trình có $3+3=6$ nghiệm phân biệt.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	0	
$f(x)$	$-\infty$	2	0	2	$-\infty$

Hỏi phương trình $\left| f(x-1-2\sqrt{x-1}) \right| = 1$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 12.

B. 4.

C. 5.

D. 8

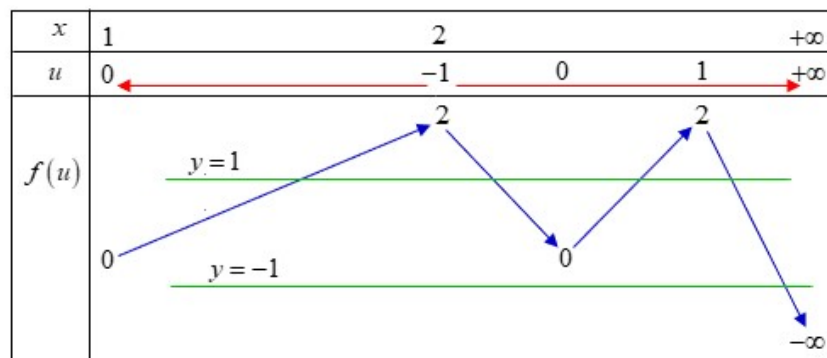
Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định: $x \geq 1$. Ta có: $\left| f(x-1-2\sqrt{x-1}) \right| = 1 \Rightarrow \begin{cases} f(x-1-2\sqrt{x-1}) = 1 \\ f(x-1-2\sqrt{x-1}) = -1 \end{cases}$.

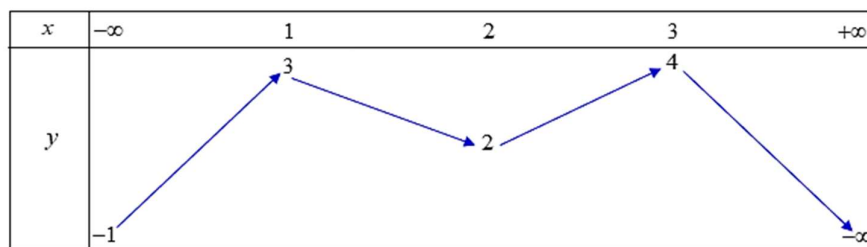
Đặt $u = x-1-2\sqrt{x-1} \Rightarrow u' = 1 - \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Sử dụng phương pháp ghép trục:



Từ bảng biến thiên suy ra phương trình có 5 nghiệm phân biệt.

Câu 4: Cho bảng biến thiên hàm số $f(5-2x)$ như hình vẽ dưới.



Hỏi phương trình $|2f(x^2 - 4x + 3) - 1| = 3$ có bao nhiêu nghiệm thực x tương ứng?

A. 6.

B. 5.

C. 7.

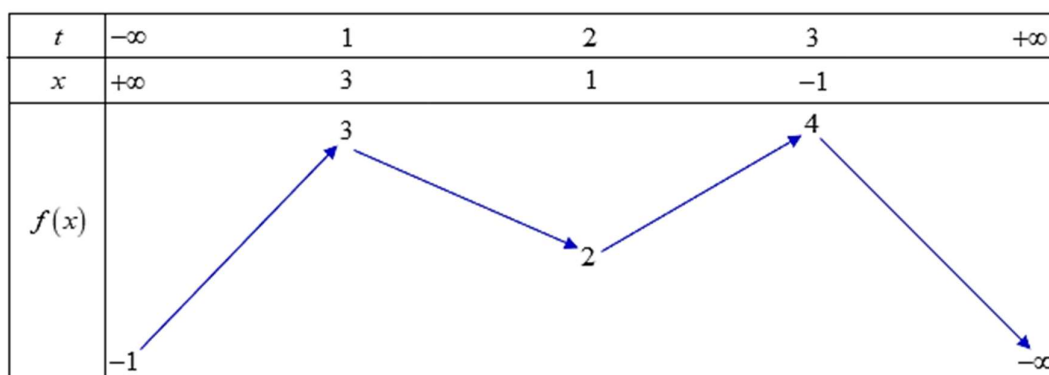
D. 4

Lời giải

Chọn D

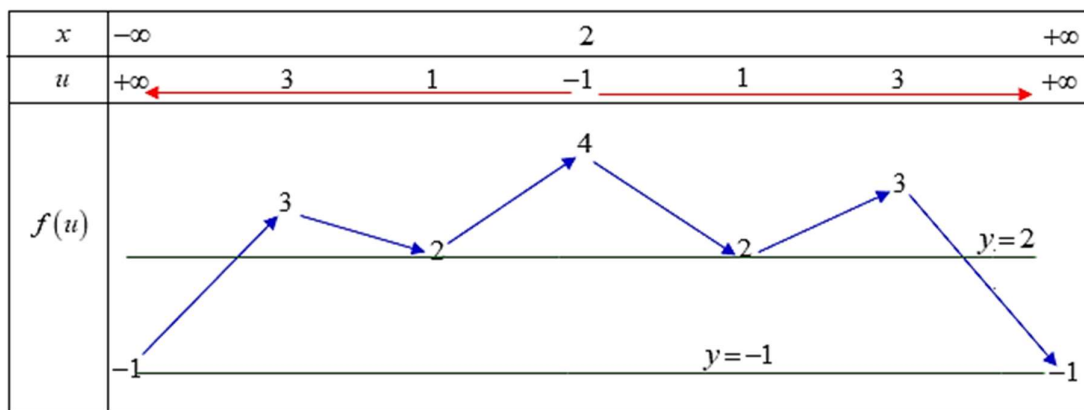
Đặt $x = 5 - 2t$, đưa bảng biến thiên hàm số $f(5 - 2x)$ về bảng biến thiên hàm số $f(x)$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:



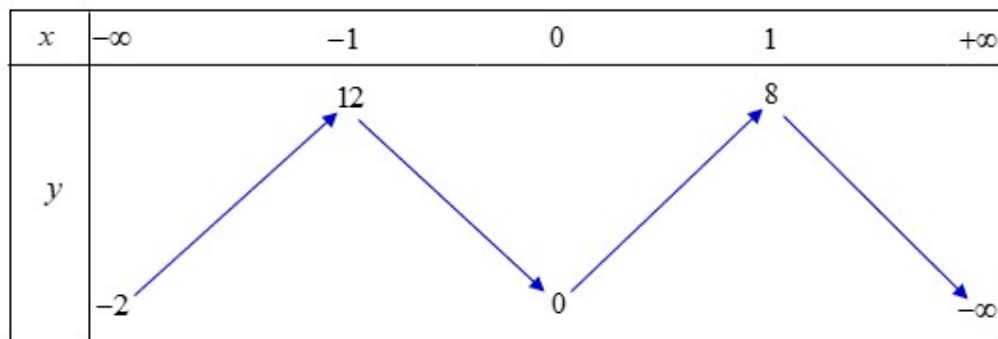
Đặt $u = x^2 - 4x + 3$, phương trình trở thành $|2f(u) - 1| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} f(u) = 2 \\ f(u) = -1 \end{cases}$.

Sử dụng phương pháp ghép trục:



Từ bảng biến thiên suy ra, phương trình có tất cả 4 nghiệm thực x .

Câu 5: Cho bảng biến thiên của hàm số $f(3-2x)$ như hình vẽ. Biết $f(4)=3; f(0)=0$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|f(x^3-3x+2)-m|=2$ có nhiều nghiệm nhất?



A. 7.

B. 6.

C. 5.

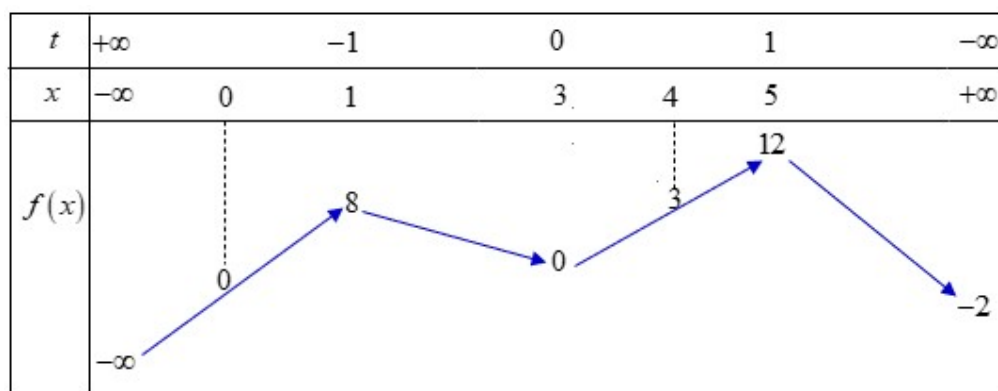
D. 2

Lời giải

Chọn D

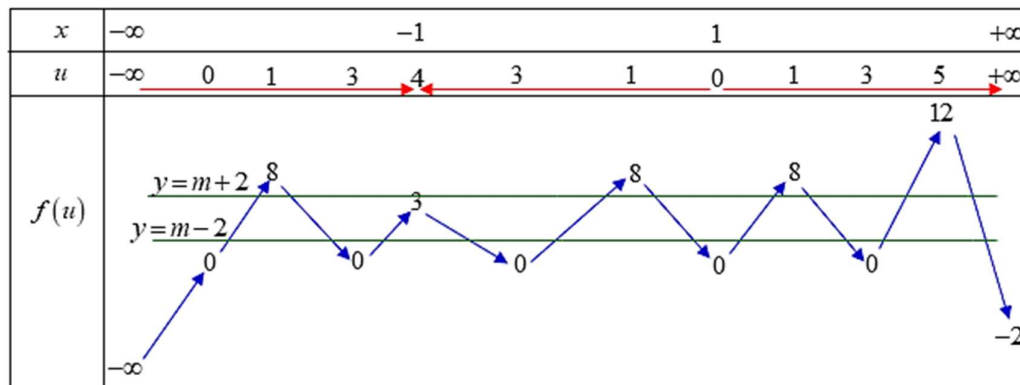
Đưa về bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ bằng cách đặt $x=3-2t \Rightarrow f(x)=f(3-2t)$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:



Đặt $u = x^3 - 3x + 2$ thì phương trình trở thành $|f(u)-m|=2 \Rightarrow \begin{cases} f(u) = m+2 \\ f(u) = m-2 \end{cases}$.

Sử dụng phương pháp ghép trục



Để phương trình có nhiều nghiệm nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} 3 < m+2 < 8 \\ 0 < m-2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m < 5 \Rightarrow m = \{3; 4\}$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(-1) < 2 < f(5)$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	2	0	3	$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $f\left(\sqrt{2\cos^3(x) + 2\cos x + 5} + 2\cos x\right) = 2$ trên khoảng $\left(0; \frac{5\pi}{2}\right)$ là?

A. 2.

B. 1.

C. 5.

D. 3

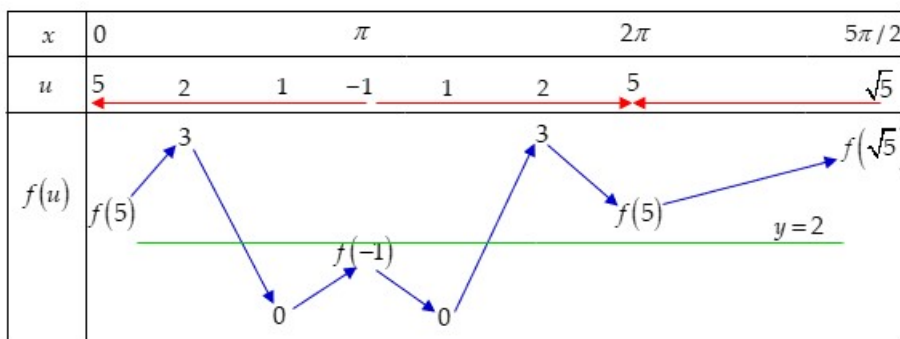
Lời giải

Chọn A

Ta đặt $u = \sqrt{2\cos^3(x) + 2\cos x + 5} + 2\cos x \Rightarrow u' = \sin x \left(\frac{-3\cos^2 x - 1}{\sqrt{2\cos^3(x) + 2\cos x + 5}} - 2 \right) = 0$

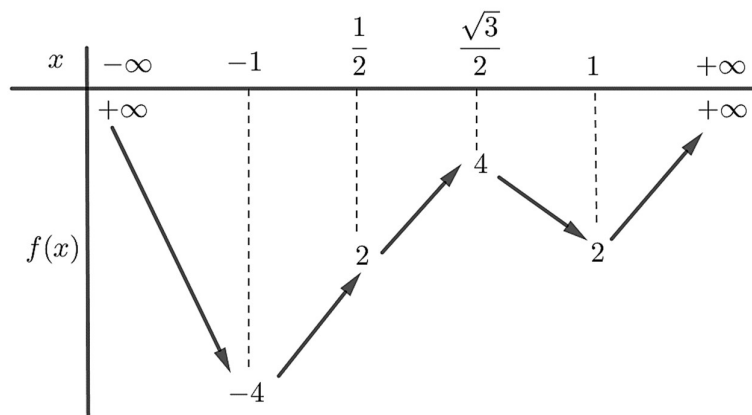
Giải phương trình $u' = 0$ $\begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{vì x \in \left(0; \frac{5\pi}{2}\right)} x = \pi; 2\pi. \\ \frac{-3\cos^2 x - 1}{\sqrt{2\cos^3(x) + 2\cos x + 5}} - 2 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases}$

Sử dụng phương pháp ghép trục:



Từ bảng biến thiên suy ra phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên.



Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x) + (3-m)f(\cos x) + 2m - 10 = 0$ có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]$ là

A. 5.

B. 6.

C. 7.

D. 4.

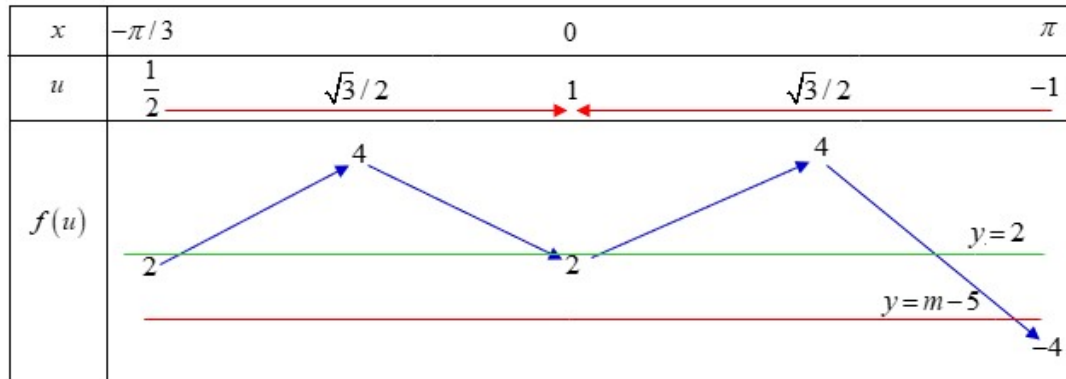
Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } u = \cos x \Rightarrow u' = -\sin x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pi \end{cases} \text{ (với } x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]).$$

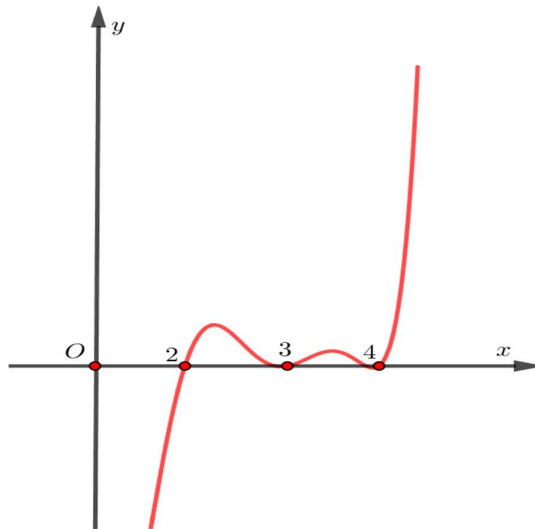
$$\text{Khi đó phương trình đã cho trở thành } f(u)^2 + (3-m)f(u) + 2m - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(u) = 2 \\ f(u) = m - 5 \end{cases}.$$

Sử dụng phương pháp ghép trục:



Do phương trình $f(u) = 2$ có 3 nghiệm nên yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $f(u) = m - 5$ có duy nhất một nghiệm $-4 \leq m - 5 < 2 \Leftrightarrow 1 \leq m < 7 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Câu 8: Cho $f(x)$ là hàm đa thức bậc 6 và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Hỏi hàm số $y = g(x) = f(x^2 + 4x + 5)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 5.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } u = x^2 + 4x + 5 \Rightarrow u' = 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

Sử dụng phương pháp ghép trục:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
u	$+\infty$	1	$+\infty$
$f(u)$	$+\infty$	$f(1)$	$+\infty$
		$f(2)$	$f(2)$

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x) = f\left(4 - \sqrt{4 - x^2}\right)$ đồng biến trên:

x	$-\infty$	-3	1	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

- A. $(0;1)$. B. $(1;2)$. C. $(-1;0)$. D. $(-3;-1)$.

Lời giải

Đặt $g(x) = f\left(4 - \sqrt{4 - x^2}\right) = f(u)$, $u = 4 - \sqrt{4 - x^2}$, với $x \in [-2;2]$

Sử dụng phương pháp ghép trục:

x	-2	0	2
u	4	2	4
$f(u)$			

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x) = f\left(-1 + \sqrt{7 + 6x - x^2}\right)$ nghịch biến trên:

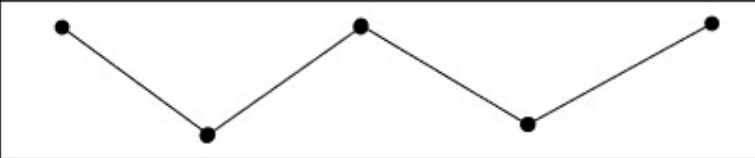
x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

- A. $(5;6)$. B. $(-1;2)$. C. $(2;3)$. D. $(3;5)$.

Lời giải

Đặt: $g(x) = f\left(-1 + \sqrt{7 + 6x - x^2}\right) = f(u)$ với $u = -1 + \sqrt{7 + 6x - x^2}$ và $x \in [-2;2]$

Sử dụng phương pháp ghép trục:

x	-1	$3-\sqrt{7}$	3	$3+\sqrt{7}$	7
u	-1	$\xleftarrow{2}$		3	$\xrightarrow{2} 4$
$f(u)$					

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1; 3 - \sqrt{7})$ và $(3; 3 + \sqrt{7})$.

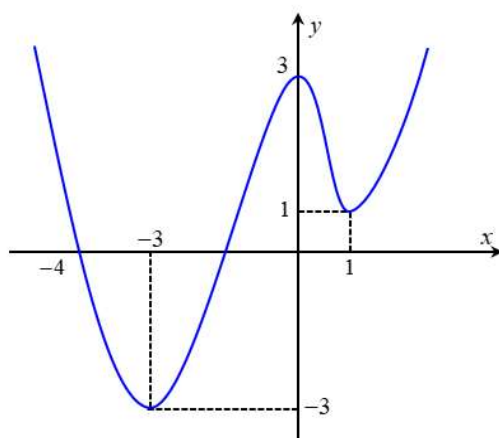
Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(-2)=7$ và có bảng biến thiên như dưới đây

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-2	-1	-2	$+\infty$

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|x^2-1|-2)=m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt?

- A. 9. B. 8. C. 7. D. 6.

Câu 2: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|x+3|(x-1))=\log m$ có ít nhất năm nghiệm phân biệt?



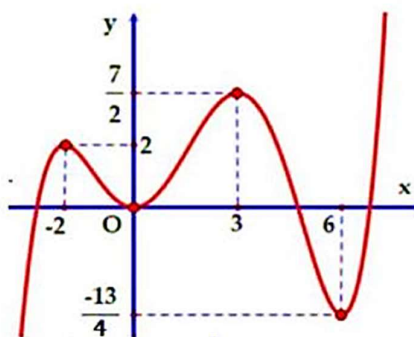
- A. 990. B. 991. C. 989. D. 913.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)=x^3+ax^2+bx-3$, a, b là các tham số thực thỏa mãn $\begin{cases} a+b-2>0 \\ 24+3(3a+b)<0 \end{cases}$

. Hỏi phương trình $2.f(x).f''(x)=[f'(x)]^2$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.

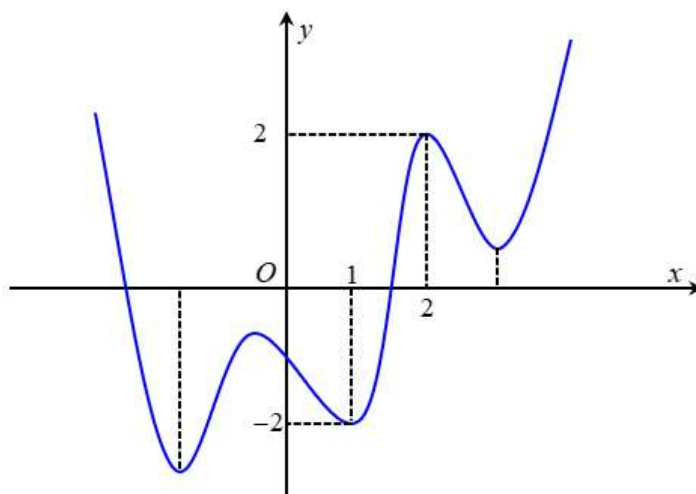
Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số nghiệm thực của phương trình $|f(2x^3-6x+2)|=2$ là

- A. 15. B. 14. C. 12. D. 13.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-10; 10]$ để hàm số

$$g(x) = f\left(\frac{x^3 + 1}{2}\right) - (2m - 1)(x^4 + 2x^2 + 2019) \text{ đồng biến trên khoảng } (0; +\infty)?$$

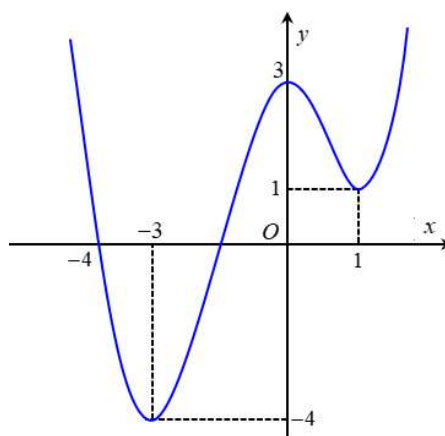
A. 8.

B. 9.

C. 11.

D. 10.

Câu 6: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|x + 3|(x - 1)) = \log m$ có ít nhất năm nghiệm phân biệt?



A. 990.

B. 991.

C. 989.

D. 913.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-3	-1	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	0	0	0	
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
	$-\infty$		0		-3	2	$-\infty$

Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = |f(|x^2 - 8x + 7| + x^2 - 3)|$ là

A. 6.

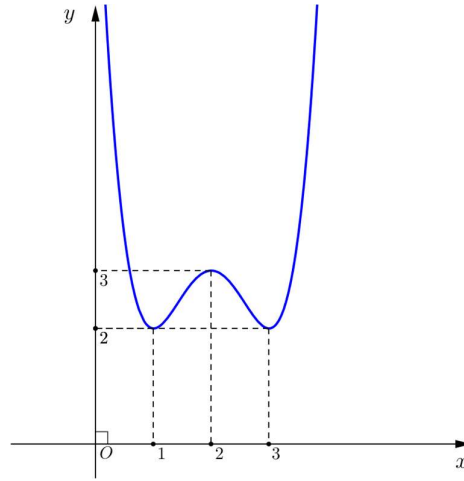
B. 7.

C. 8.

D. 9.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ của phương trình

$$2f(\sin x + 2) - 5 = 0 \text{ là}$$



A. 11.

B. 15.

C. 7.

D. 9.

Câu 9: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$), biết $f(1) = \frac{-1}{2}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x) = |2f(x) - x^2 + 2x|$ đồng biến trên khoảng

A. $(2; +\infty)$.

B. $(-1; 1)$.

C. $(1; 2)$.

D. $(-\infty; -1)$.

Câu 10: Cho hàm số bậc bốn $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$), biết $f(1) = -\frac{1}{2}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x) = |2f(x) - x^2 + 2x|$ đồng biến trên khoảng

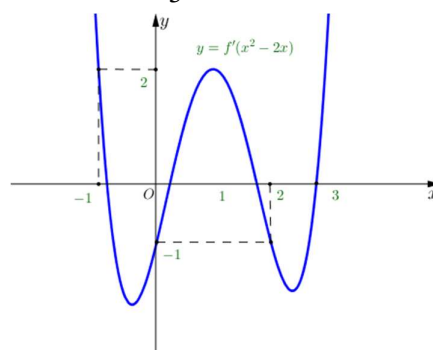
A. $(2; +\infty)$.

B. $(-1; 1)$.

C. $(1; 2)$.

D. $(-\infty; -1)$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x^2 - 2x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 1) + \frac{2}{3}x^3 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?



A. $(-3; -2)$.

B. $(1; 2)$.

C. $(-2; -1)$.

D. $(-1; 0)$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trơn (không bị gãy khúc), tham khảo hình vẽ bên. Gọi hàm số $g(x) = f[f(x)]$. Hỏi phương trình $g'(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

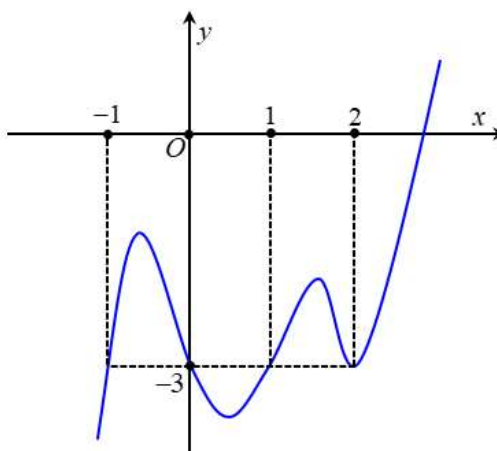
A. 14.

B. 10.

C. 12.

D. 8.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0) < 0$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây.



Hàm số $g(x) = |f(|x|) + 3|x|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$. Tìm m để phương trình $f\left(3m + \frac{1}{4}\sin x\right) + f(\cos^2 x) = 1$ có đúng 8 nghiệm phân biệt thuộc $[0; 3\pi]$

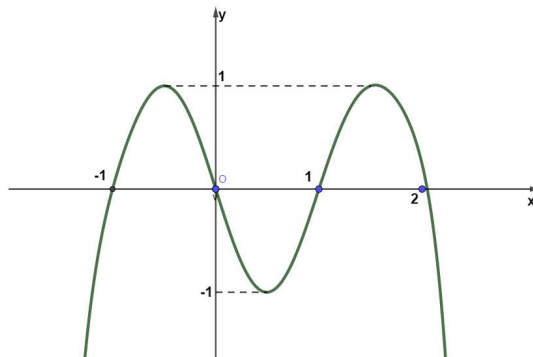
Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	0	2	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{9\pi}{2}\right]$ phương trình $f(f(\cos x)) = 2$ là

- A. 9. B. 6. C. 5. D. 7.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ với $a \neq 0$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $|f(f(x))| = \log_2 m$ (với m là tham số thực dương), có tối đa bao nhiêu nghiệm?



- A. 18. B. 3. C. 5. D. 7.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình

$$f(2x^3 - 6x + 2) = 2m - 1 \text{ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn } [-1; 2] ?$$

A. 2.

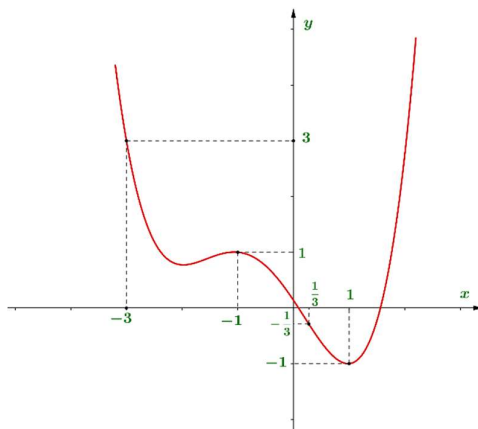
B. 3.

C. 0.

D. 1.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số

$$g(x) = 2f\left(\frac{5\sin x - 1}{2}\right) + \frac{(5\sin x - 1)^2}{4} + 3 \text{ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng } (0; 2\pi) ?$$



A. 9.

B. 7.

C. 6.

D. 8.

Câu 19: Cho $f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	-1	$-\frac{61}{3}$	$+\infty$

Hàm số $g(x) = |f(x^3) - 3x|$ có bao nhiêu điểm cực trị

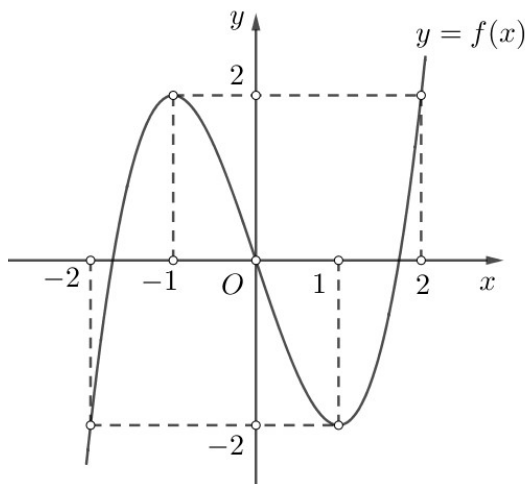
A. 5.

B. 4.

C. 2.

D. 3

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x)) = x$ là



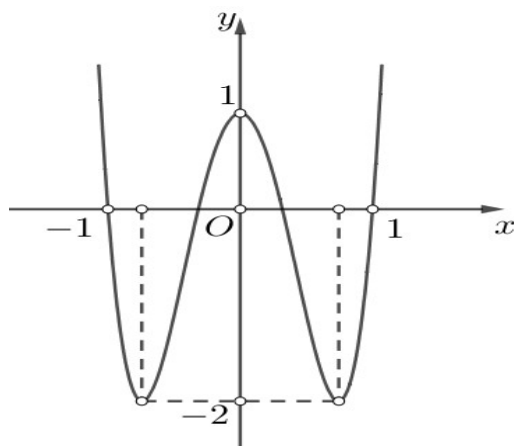
A. 6.

B. 7.

C. 8.

D. 9.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ bậc bốn có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)$, biết $g'(x) = x^2 [f(x^2 - 1)]^3$.



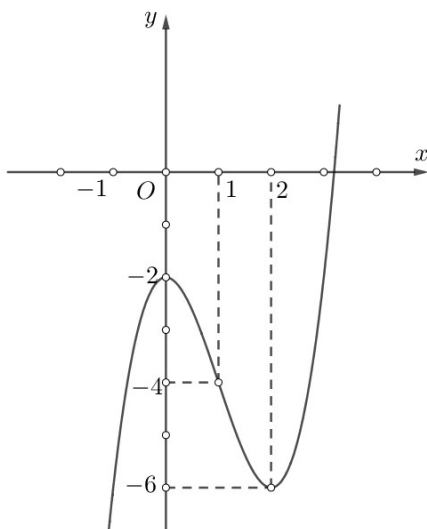
A. 5.

B. 6.

C. 9.

D. 10.

Câu 22: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-20; 20]$ để hàm số $g(x) = |f(1 - |x|) + m|$ có 5 điểm cực trị?



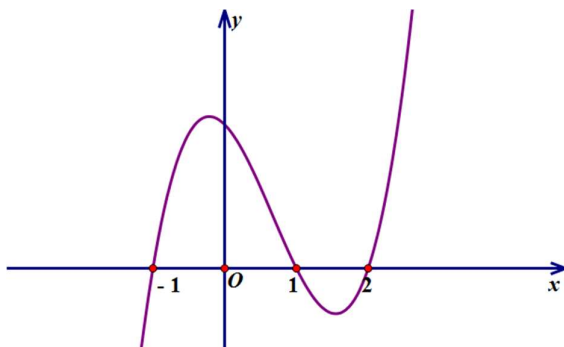
A. 14.

B. 15.

C. 16.

D. 17.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $g(x) = f(|x| + |x^2 - 1|)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

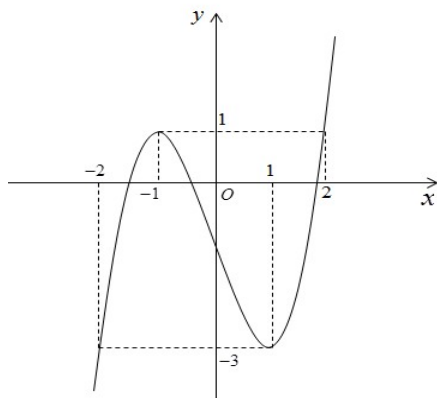
A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 7.

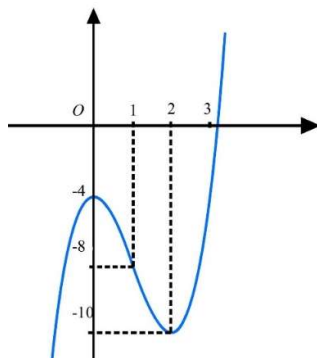
Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên dưới.



Số giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $f(2\sin x) = f(m)$ có 5 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ là

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

Câu 25: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-20; 20]$ để hàm số $g(x) = |f(1 - |x|) + m|$ có 5 điểm cực trị.



- A. 14. B. 13. C. 11. D. 12.

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x$. Số điểm cực tiểu của hàm số $f\left(\sin 3x - \frac{3}{2}(\sin x + \sqrt{3} \cos x)\right)$ trên $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right]$ là?

- A. 6. B. 5. C. 7. D. 8

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(-2) = 7$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-2	-1	-2	$+\infty$

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|x^2 - 1| - 2) = m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt?

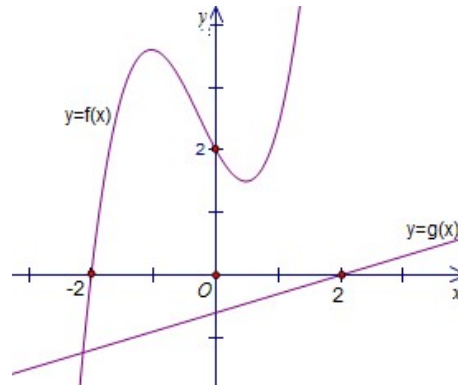
A. 9.

B. 8.

C. 7.

D. 6

Câu 28: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ và hàm số bậc nhất $y = g(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



Hàm số $h(x) = \int_0^{f(x)} g(t) dt$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-3; -2)$.

B. $(-2; -1)$.

C. $(-1; 1)$.

D. $(1; 3)$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.B	3.A	4.B	5.C	6.B	7.B	8.C	9.C	10.C
11.C	12.C	13.D	14	15.A	16.A	17.D	18.D	19.D	20.D
21.B	22.D	23.A	24.A	25.B	26.A	27.C	28.A		

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Đặt $u = |x^2 - 1| - 2 \Rightarrow u' = \frac{2x(x^2 - 1)}{|x^2 - 1|}$ với $x \neq \pm 1$.

$$\text{Ta có: } u' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Ghép trực ta được:

x	$-\infty$				-1	0	1			$+\infty$	
u	$+\infty$	1	0	-1	-2	-1	-2	-1	0	1	$+\infty$
$f(u)$	$+\infty$										$+\infty$

The graph shows a piecewise linear function $f(u)$ plotted against u . The function is defined on the interval $[-1, 1]$ for x and u . The function values are -2 at $u = -1$ and $u = 1$, -1 at $u = -0.5$ and $u = 0.5$, and 0 at $u = 0$. The function is symmetric about the y -axis. A dashed red line is drawn at $y = m$, where m is a constant. The function is above the line for $-1 < x < 1$ and below the line for $x < -1$ or $x > 1$.

Đề phương trình $f(|x^2 - 1| - 2) = m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt thì $-1 < m < 7$.

Suy ra $m \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Câu 2: Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	-4	-3	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	-4	3	1	$+\infty$

Đặt $u = |x+3|(x-1) = \sqrt{(x+3)^2} \cdot (x-1)$

$$\Rightarrow u' = \frac{x+3}{\sqrt{(x+3)^2}} \cdot (x-1) + \sqrt{(x+3)^2} = \frac{(x+3)(2x+2)}{\sqrt{(x+3)^2}}$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $u = u(x)$

x	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$			
u'		$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	
u	$-\infty$		0		-4		$+\infty$

Ghép trục ta được:

x	$-\infty$	-3	-1							$+\infty$
u	$-\infty$	-3	0	-3	-4	-3	0	1	$+\infty$	
$f(u)$	$+\infty$									

$$f(u) = \log m \text{ có ít nhất 5 nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < \log m \leq 0 \\ 1 \leq \log m < 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10^{-4} < m \leq 1 \\ 10 \leq m < 10^3 \end{cases} \text{ và } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1; 10; 11; \dots; 999\}.$$

Câu 3: Ta có
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \\ f(1) = a + b - 2 > 0 \\ f(3) = 9a + 3b + 24 = 24 + 3(3a + b) < 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$$

Suy ra $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $x_1 < 1 < x_2 < 3 < x_3$.

$$\text{Mặt khác: } 2.f(x).f''(x) = [f'(x)]^2 \Leftrightarrow 2.f(x).f''(x) - [f'(x)]^2 = 0$$

$$\text{Xét } g(x) = 2.f(x).f''(x) - [f'(x)]^2$$

$$\Rightarrow g'(x) = 2.f'(x).f''(x) + 2f(x).f'''(x) - 2f'(x).f''(x) = 2f(x).f'''(x) = 12f(x).$$

$$\text{Khi đó } g'(x) = 0 \Leftrightarrow 12f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in (-\infty; 1) \\ x = x_2 \in (1; 3) \\ x = x_3 \in (3; +\infty) \end{cases}.$$

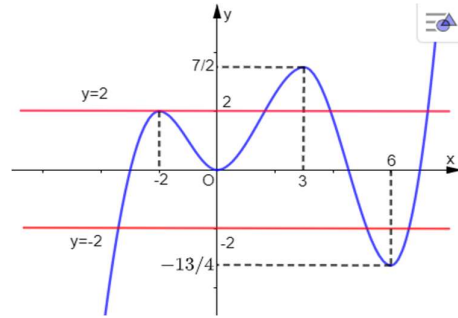
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	$+\infty$			
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$							$+\infty$

The diagram illustrates the function $g(x)$ and its critical points. A horizontal blue line represents $y = 0$. The function $g(x)$ is shown as a W-shaped curve with arrows indicating its direction. The curve starts at $+\infty$ for $x \rightarrow -\infty$, decreases to a local minimum at $g(x_1)$, increases to a local maximum at $g(x_2)$, decreases to another local minimum at $g(x_3)$, and finally increases to $+\infty$ as $x \rightarrow +\infty$. The critical points x_1, x_2, x_3 are marked on the x-axis, and their corresponding function values $g(x_1), g(x_2), g(x_3)$ are marked on the curve.

Do $g(x_2) = 2 \cdot f(x_2) \cdot f''(x_2) - [f'(x_2)]^2 = -[f'(x_2)]^2 < 0$ nên $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Câu 4:



Ta có: $|f(2x^3 - 6x + 2)| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(2x^3 - 6x + 2) = 2 & \text{khi } f(2x^3 - 6x + 2) \geq 0 \\ f(2x^3 - 6x + 2) = -2 & \text{khi } f(2x^3 - 6x + 2) < 0 \end{cases}$

Theo đồ thị: $f(-2) = 2$ (1)

$f(a) = 2$ ($0 < a < 3$) (2)

$f(b) = 2$ ($3 < b < 6$) (3)

$f(c) = 2$ ($c > 6$) (4)

Với (1) thì $2x^3 - 6x + 2 = -2 \Leftrightarrow 2x^3 - 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2; x = 1$ (2 nghiệm).

Với (2) thì $2x^3 - 6x + 2 = a \Leftrightarrow 2x^3 - 6x + 2 - a = 0$ (3 nghiệm).

Với (3) thì $2x^3 - 6x + 2 = b \Leftrightarrow 2x^3 - 6x + 2 - b = 0$ (3 nghiệm).

Với (4) thì $2x^3 - 6x + 2 = c$ (1 nghiệm).

Vậy $f(2x^3 - 6x + 2) = 2$ có $2+3+3+1 = 9$ nghiệm.

Với $f(2x^3 - 6x + 2) = -2$ thì có 3 trường hợp là $f(d) = -2$ với $d < -2$; $f(e) = -2$ với $3 < e < 6$ và $f(f) = -2$ với $f > 6$.

Với $d < -2$ thì $2x^3 - 6x + 2 = d$ có 1 nghiệm.

Với $3 < e < 6$ thì $2x^3 - 6x + 2 = e$ có 3 nghiệm.

Với $f > 6$ thì $2x^3 - 6x + 2 = f$ có 1 nghiệm.

Trường hợp $f(2x^3 - 6x + 2) = -2$ có $1+3+1 = 5$ nghiệm.

Vậy tổng cộng $|f(2x^3 - 6x + 2)| = 2$ có $9 + 5 = 14$ nghiệm.

Câu 5: Chọn C

Ta có $g'(x) = \frac{3}{2}x^2 f'\left(\frac{x^3+1}{2}\right) - (2m-1)(4x^3+4x)$.

Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 f'\left(\frac{x^3+1}{2}\right) - (2m-1)(4x^3+4x) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow 2m-1 \leq \frac{3x}{8x^2+8} \cdot f'\left(\frac{x^3+1}{2}\right), \forall x \in (0; +\infty)$$

Với $x > 0$ thì $\frac{x^3+1}{2} > 0 \Rightarrow f'\left(\frac{x^3+1}{2}\right) \geq -2$.

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{x^3+1}{2} = 1 \Leftrightarrow x = 1$. Mặt khác, $0 < \frac{3x}{8x^2+8} = \frac{3}{8(x+\frac{1}{x})} \leq \frac{3}{16}$

Suy ra $\frac{3x}{8x^2+8} \cdot f'\left(\frac{x^3+1}{2}\right) \geq (-2) \cdot \frac{3}{16} \Leftrightarrow \frac{3x}{8x^2+8} \cdot f'\left(\frac{x^3+1}{2}\right) \geq \frac{-3}{8}$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = 1$. Như vậy: $2m-1 \leq \frac{-3}{8} \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{16}$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-10; 10]$ nên $m \in \{-10; -9; -8; \dots; -1; 0\}$. Có 11 giá trị.

Câu 6: Đặt

$$u(x) = |x+3|(x-1) = \sqrt{(x+3)^2}(x-1)$$

$$u'(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{\sqrt{(x+3)^2}} + \sqrt{(x+3)^2} = \frac{(x+3)(x-1) + (x+3)^2}{\sqrt{(x+3)^2}} = \frac{(x+3)(2x+2)}{\sqrt{(x+3)^2}}$$

$$u'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-1				$+\infty$
$u(x)$	$-\infty$	-3	0	-3	-4	-3	0	1	$+\infty$
$f(u(x))$	$+\infty$		3		-4		3		$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy, phương trình đã cho có ít nhất năm nghiệm khi :

$$\begin{cases} -4 < \log m \leq 0 \\ 1 \leq \log m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10^{-4} < m \leq 1 \\ 10 \leq m < 10^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 10, 11, 12, \dots, 999 \end{cases}$$

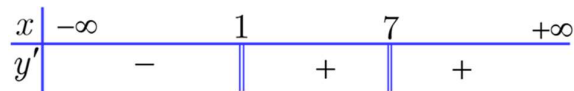
Vậy có **991** giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 7: Xét hàm số $y = |x^2 - 8x + 7| + x^2 - 3$

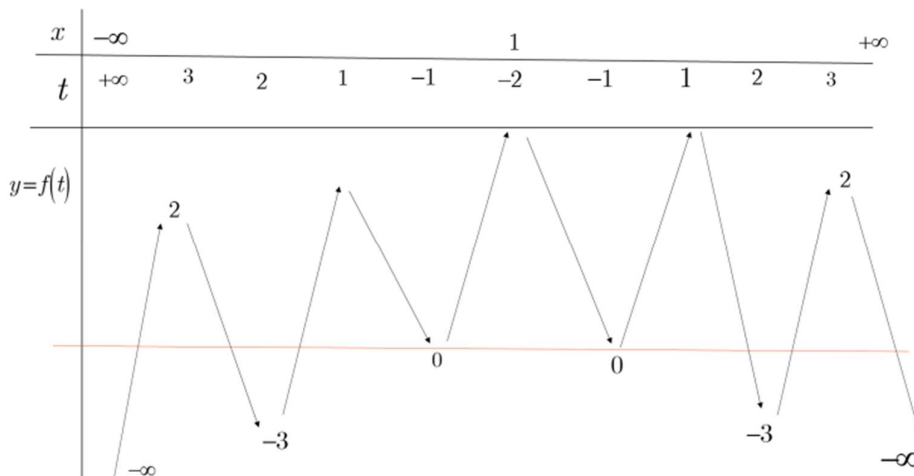
Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

Ta có $y = |x^2 - 8x + 7| + x^2 - 3 = \begin{cases} 2x^2 - 8x + 4, & x \leq 1 \vee x \geq 7 \\ 8x - 10, & 1 < x < 7 \end{cases}$

$$y' = \begin{cases} 4x-8, & x < 1 \vee x > 7 \\ 8 & , \quad 1 < x < 7 \end{cases}$$



Đặt $t = |x^2 - 8x + 7| + x^2 - 3$. Khi đó bảng biến thiên của hàm số $y = f(t)$ là



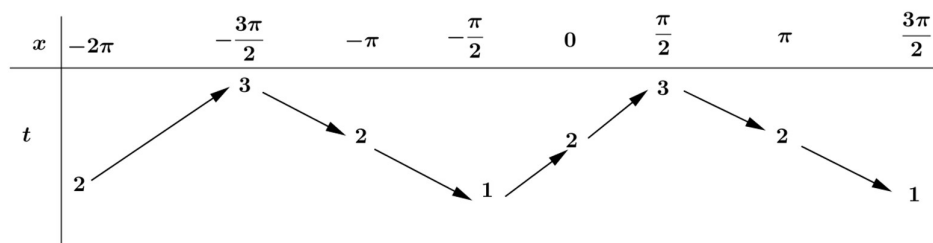
Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số $y = |f(t)|$ cho có 7 điểm cực đại.

Câu 8: Đặt $t = \sin x + 2, 1 \leq t \leq 3$

Phương trình $2f(\sin x + 2) - 5 = 0$ trở thành:

$$f(t) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t = t_1 \in (0; 1) \rightarrow \text{PTVN} \\ t = t_2 \in (1; 2) \\ t = t_3 \in (2; 3) \\ t = t_4 \in (3; 4) \rightarrow \text{PTVN} \end{cases}$$

BBT:



Dựa vào bảng biến thiên ta có:

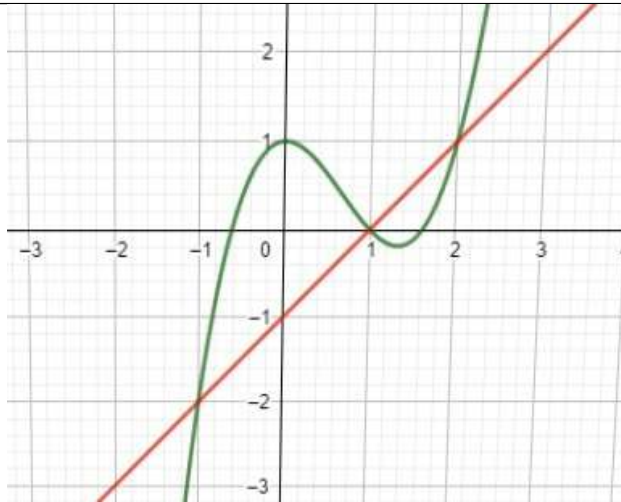
+. $t = t_2$ có 3 nghiệm phân biệt x thuộc $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$

+. $t = t_3$ có 4 nghiệm phân biệt x thuộc $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm phân biệt.

Câu 9: Xét hàm số $h(x) = 2f(x) - x^2 + 2x \Rightarrow h'(x) = 2f'(x) - 2x + 2$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x - 1 \quad (1)$$



Vẽ đường thẳng $y = x - 1$. Từ đồ thị hàm số ta thấy đường thẳng $y = x - 1$ cắt đồ thị hàm số

$y = f'(x)$ tại ba điểm. Khi đó phương trình (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

$$h(1) = 2f(1) - x^2 + 2x = 0$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$h(x)$					

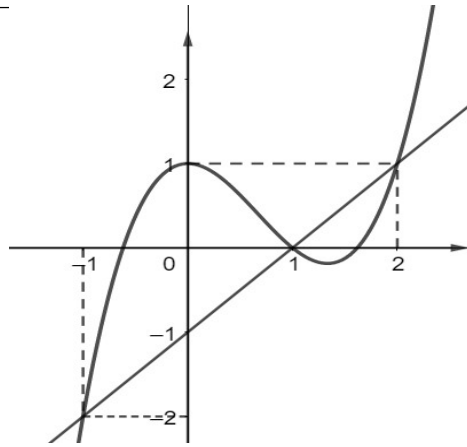
Khi đó ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x) = |h(x)|$

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$h(x)$					

Câu 10: Xét $h(x) = 2f(x) - x^2 + 2x$

$$\Rightarrow h'(x) = 2f'(x) - 2x + 2$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2f'(x) - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x - 1$$



Dựa vào đồ thị ta thấy, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = x - 1$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ là $x = -1; x = 1; x = 2$

Do đó phương trình $f'(x) = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		1		2	$+\infty$	
$h'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
$h(x)$	↘ $h(-1)$ ↗ 0 ↘ $h(2)$ ↗							

Bảng biến thiên của hàm số $g(x) = |h(x)|$

x	$-\infty$	-1		1		2	$+\infty$	
$h'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
$h(x)$								

Vậy hàm số $g(x) = |2f(x) - x^2 + 2x|$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Câu 11: Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 1) + \frac{2}{3}x^3 + 1$

Ta có: $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 1) + 2x^2 = 2x[f'(x^2 - 1) + x]$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 1) = -x \end{cases} \quad (1)$$

Xét (1): Đặt $x = t - 1$

$$\text{Khi đó ta có: } f'(t^2 - 2t) = -t + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = a \ (a \in (0;1)) \\ t = 2 \\ t = b \ (b \in (2;3)) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = a - 1 \ (a - 1 \in (-1;0)) \\ x = 1 \\ x = b - 1 \ (b - 1 \in (1;2)) \end{cases}$$

Ta có:

x	$-\infty$	-2		$a-1$		0		1		$b-1$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu trên ta thấy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$.

Câu 12: Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (-2; -1) \\ x = 0 \\ x = b \in (1; 2) \\ x = 2 \end{cases}$

Từ đồ thị ta có $f(a) = M, M > 3$ và $f(b) = m, m \in (0; 1)$.

Đặt $u = f(x)$, ta có hàm số $g(x) = f(u)$.

Số nghiệm phân biệt của phương trình $g'(x) = 0$ chính là số cực trị của hàm số $g(x) = f(u)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có bảng biến thiên sau:

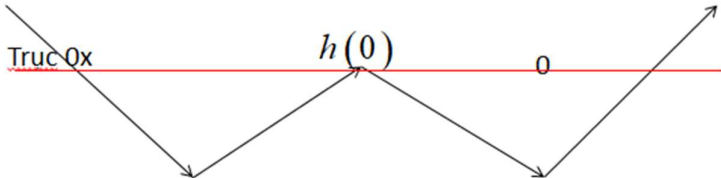
x	$-\infty$	a	0	b	2	M	2	b	0	m	0	b	2	$+\infty$
u	$-\infty$	a	0	b	2	M	2	b	0	m	0	b	2	$+\infty$
$f(u)$														

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $g(x) = f(u)$ có 12 cực trị.

Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 12 nghiệm phân biệt.

Câu 13: Đặt: $h(x) = f(x) + 3x \Rightarrow h'(x) = f'(x) - (-3)$

Từ đồ thị hàm $y = f'(x)$ ta có BBT:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$h'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$h(x)$							

Số điểm cực trị dương của hàm $|h(x)|$ là 2.

Do đó số điểm cực tiểu của $g(x)$ là: $2.2+1=5$.

Câu 14: Ta có $f(x) + f(1-x) = \frac{9^x}{9^x+3} + \frac{9^{1-x}}{9^{1-x}+3} = \frac{9^x}{9^x+3} + \frac{3}{9^x+3} = 1 \quad \forall x$

Do đó

$$f\left(3m + \frac{1}{4}\sin x\right) + f(\cos^2 x) = 1$$

$$\Leftrightarrow 3m + \frac{1}{4}\sin x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow 3m = \sin^2 x - \frac{1}{4}\sin x.$$

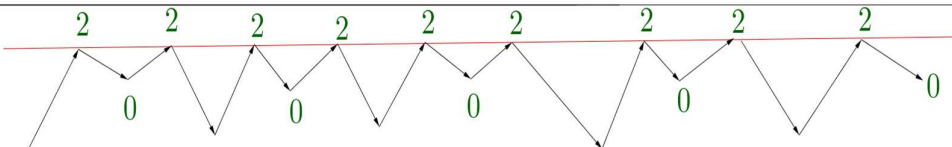
x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$	3π
$t = \sin x$	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{8}$	0
$y = t^2 - \frac{1}{4}t$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	0
		$-\frac{1}{64}$	$-\frac{1}{64}$	$-\frac{1}{64}$	$-\frac{1}{64}$

Kết luận: $\frac{-1}{64} < 3m \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{192} < m \leq 0$.

Câu 15: Đặt $u = \cos x, t = f(u)$

Phương trình trở thành: $f(t) = 2$.

Ta có bảng biến thiên hàm số $y = f(t)$

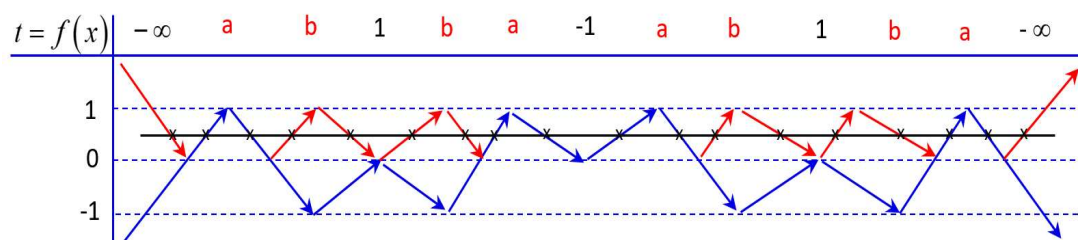
x	0	π		2π		3π		4π		$\frac{9\pi}{2}$	
$u = \cos x$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	
$t = f(u)$	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1	0
$y = f(t)$											

Số nghiệm phương trình $f(f(\cos x)) = 2$ bằng số giao điểm của đường thẳng $y = 2$ và đồ thị hàm số $y = f(t)$, từ bảng biến thiên $\Rightarrow$ phương trình $f(t) = 2$ có 9 nghiệm.

Vậy phương trình $f(f(\cos x)) = 2$ có 9 nghiệm.

Câu 16: Đặt $t = f(x)$

Phương trình trở thành: $|f(t)| = \log_2 m$



Số nghiệm phương trình $|f(f(x))| = \log_2 m$ bằng số giao điểm của đường thẳng $y = \log_2 m$ và đồ thị hàm số $y = |f(t)|$, từ bảng biến thiên $\Rightarrow$ phương trình có tối đa 18 nghiệm.

Câu 17: Đặt $t = 2x^3 - 6x + 2$

$$\text{Khi đó } t' = 6x^2 - 6, t' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1					1					2	$+\infty$
$t = 2x^3 - 6x + 2$	$-\infty$	-2	0	3	6	3	0	-2	0	3	6	6	$+\infty$
$y = f(2x^3 - 6x + 2)$													

$$f(2x^3 - 6x + 2) = 2m - 1 \text{ có 6 nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow 0 < 2m - 1 < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m < \frac{3}{2}$$

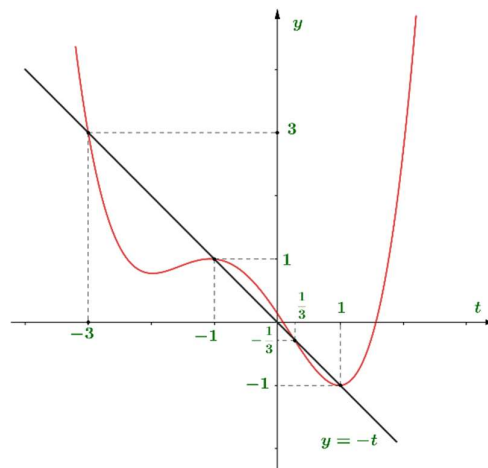
Lại có $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 1$. Vậy có duy nhất 1 số nguyên m thỏa mãn bài toán.

Câu 18: Đặt $t = \frac{5\sin x - 1}{2}$. Suy ra $g(t) = 2f(t) + t^2 + 3$

$$\text{Ta có } g'(t) = 2f'(t) + 2t = 0 \Leftrightarrow f'(t) = -t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \pm 1 \\ t = \frac{1}{3} \\ t = -3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:



t	$-\infty$	-3	-1	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$-$	$+$
$g(t)$	$-\infty$	$g(-3)$	$g(-1)$	$g(\frac{1}{3})$	$g(1)$	$+\infty$

Suy ra:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π	
t	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1	2	1	$\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{1}{2}$
$g(t)$								

Câu 19: Đặt $t = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{t}$. Ta có $h(x) = f(x^3) - 3x \Rightarrow h(t) = f(t) - 3\sqrt[3]{t}$

$$\Rightarrow h'(x) = f'(t) - \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} = 0 \Leftrightarrow t = a$$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra

$$t = a \Rightarrow x = \sqrt[3]{a}$$

x	$-\infty$	0	$\sqrt[3]{a}$	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$ h(x) $		0		

Suy ra hàm số $g(x) = |h(x)|$ có 3 cực trị

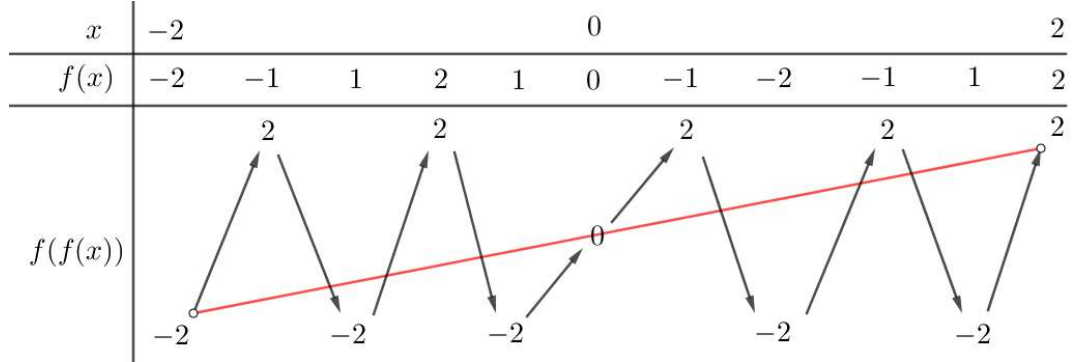
Câu 20: Xét phương trình $f(f(x)) = x$ (1)

Nhận xét:

$x > 2 \Rightarrow f(x) > x > 2 \Rightarrow f(f(x)) > f(x) > x \Rightarrow (1)$ không có nghiệm $x > 2$.

$x < -2 \Rightarrow f(x) < x < -2 \Rightarrow f(f(x)) < f(x) < x \Rightarrow (1)$ không có nghiệm $x < -2$.

Ta xét bảng biến thiên của $f(f(x))$ với $-2 \leq x \leq 2$ như sau:



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình $f(f(x)) = x$ có 9 nghiệm.

Câu 21: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ f(x^2 - 1) = 0 \end{cases} \cdot x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (nghiệm kép, loại).

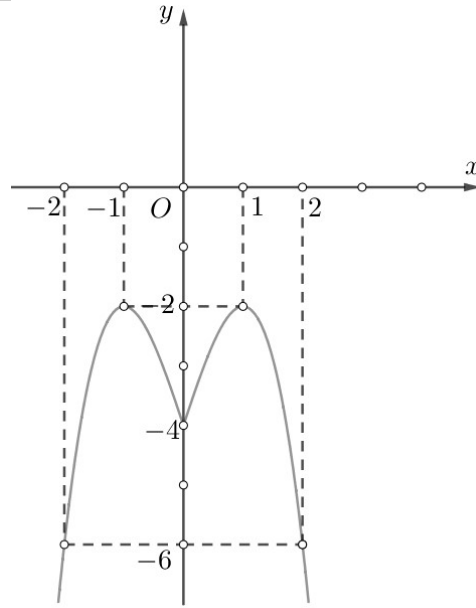
$$f(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = -1 \quad (I) \\ x^2 - 1 = a \quad (-1 < a < 0) \\ x^2 - 1 = b \quad (0 < b < 1) \\ x^2 - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{a+1} \\ x = \pm\sqrt{b+1} \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \text{ . Vậy } g(x) \text{ có 6 cực trị.}$$

Câu 22: $f(x)$ có hai cực trị là $x = 0, x = 2 \Rightarrow f'(x) = ax(x-2) \Rightarrow f(x) = \frac{a}{3}x^3 - ax^2 + C$.

$$f(0) = -2, f(1) = -4 \Rightarrow a = 3, c = -2 \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 - 2.$$

$$f(1-|x|) = \begin{cases} f(1-x), & \text{khi } x \geq 0 \\ f(1+x), & \text{khi } x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(1-|x|) = \begin{cases} -x^3 + 3x - 4, & \text{khi } x \geq 0 \\ x^3 - 3x - 4, & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

Ta có đồ thị của $f(1-|x|)$ như sau:



Đặt $h(x) = f(1 - |x|) + m$. Ta có $g(x) = |h(x)|$.

$g(x)$ có 5 cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $h(x) = 0$ có 2 nghiệm đơn $\Leftrightarrow m \geq 4$.

Vậy có 17 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 23: Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị là $x = -1$; $x = 1$; $x = 2$.

$$\text{Đặt } u(x) = |x| + |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 + x - 1, & x \geq 1 \\ -x^2 + x + 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ -x^2 - x + 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 - x - 1, & x \leq -1 \end{cases}; u'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên ghép trực

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	(2)	1	$\frac{5}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	1 (2) $+\infty$
$f(u(x))$							

Hàm số $g(x) = f(u(x))$ có 3 điểm cực đại và 4 điểm cực tiểu.

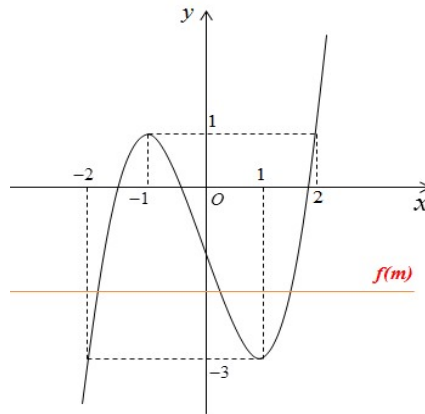
Câu 24: Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy hàm số có các cực trị $x = -1$; $x = 1$.

$$\text{Đặt } t = 2 \sin x \Rightarrow t' = 2 \cos x; t' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ta có bảng ghép trực.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$
$t = 2 \sin x$	0	2	-2
$f(t)$	$f(0)$	1	-3

Phương trình $f(2 \sin x) = f(m)$ có 5 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ khi $-3 < f(m) \leq f(0)$.

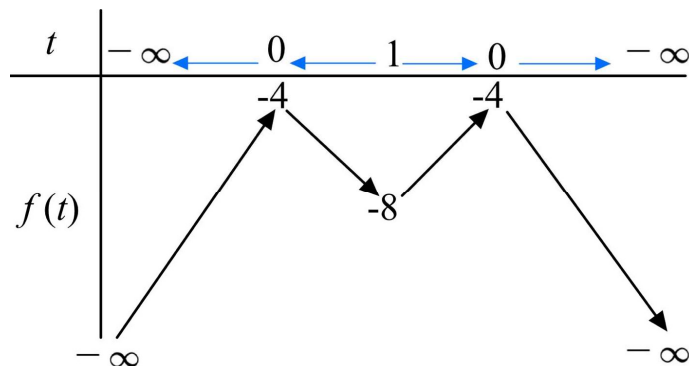


Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy

$$-3 < f(m) \leq f(0) \Leftrightarrow \begin{cases} m = a \in (-2; -1) \\ m = b \in [0; 1) \\ m = c \in (1; 2) \end{cases} \quad . \text{ Vì } m \in \mathbb{Z} \text{ nên } m = 0.$$

Câu 25: Đặt $t = 1 - |x| \Leftrightarrow f(1 - |x|) = f(t)$

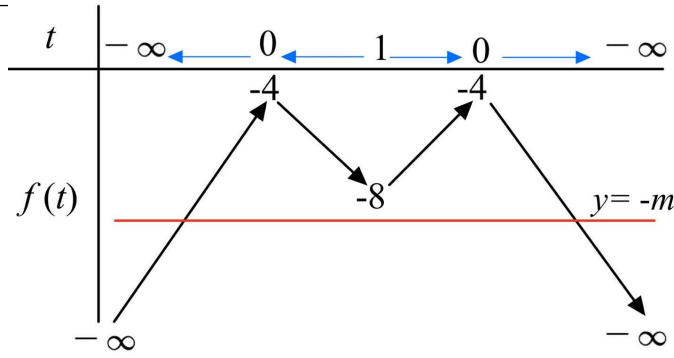
Bảng ghép trực:



Phương trình $g(x)$ trở thành $g(t) = |f(t) + m|$

YCBT trở thành: $f(t) + m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

Để $f(t) + m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt thì: $-m \leq -8 \Leftrightarrow m \geq 8 \xrightarrow[m \in [-20; 20]]{m \in \mathbb{Z}}$ có 13 giá trị m



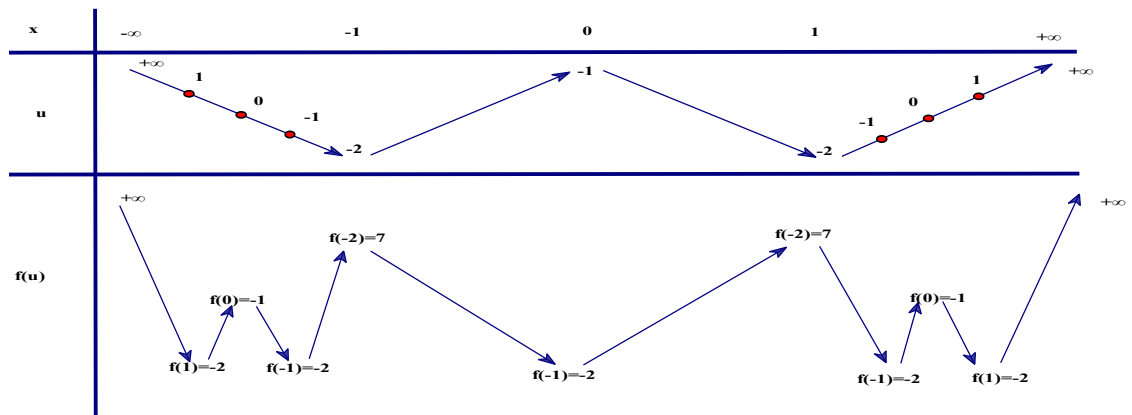
Câu 26: Ta có: $y = f\left[-\sin(3x + \pi) - 3\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = f\left(4\sin^3\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 6\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)$

x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{6}$
$u = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$t = 4u^3 - 6u$	$-\frac{5}{2}$	$-2\sqrt{2}$	-2	$-2\sqrt{2}$
$y = f(t)$				

Vậy hàm số trên có 6 điểm cực tiểu.

Câu 27: Đặt $u = |x^2 - 1| - 2 \Rightarrow u' = \frac{2x(x^2 - 1)}{|x^2 - 1|}$

Ta có bảng biến thiên như sau



Từ bảng biến thiên để phương trình có đúng 6 nghiệm thực phân biệt khi $-1 < m < 7$

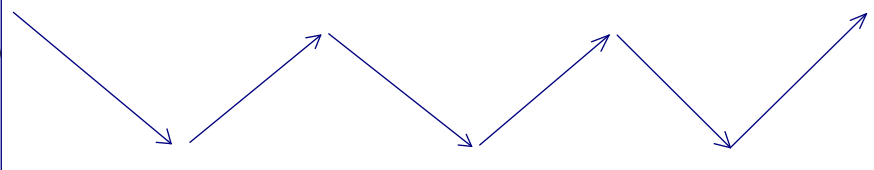
Suy ra $m \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Câu 28: Đặt $g(x) = k(x - 2)$, $k > 0 \Rightarrow h(x) = \int_0^{f(x)} g(t) dt = k \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_0^{f(x)} = k \left(\frac{f^2(x)}{2} - 2f(x) \right)$.

$$\Rightarrow h'(x) = k \cdot f'(x)(f(x) - 2) \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in (-2; 0) \\ x = x_2 \in (0; 2) \\ x = x_3 \in (-2; x_1) \\ x = x_4 \in (x_2; 2) \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	x_3	x_1	0	x_2	x_4	2	$-\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$									



The diagram shows a series of arrows indicating the behavior of the function h(x) across the intervals defined by the critical points. The arrows alternate between pointing down (decreasing) and up (increasing): down from $-\infty$ to x_3 , up from x_3 to x_1 , down from x_1 to 0 , up from 0 to x_2 , down from x_2 to x_4 , and up from x_4 to 2 .

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số $h(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-3; -2)$.

.

.