

CHUYÊN ĐỀ 2.

BÀI 4. PHƯƠNG TRÌNH MŨ – BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Biết được cách giải một số dạng phương trình mũ.
- + Biết được cách giải một số dạng bất phương trình mũ.

❖ Kỹ năng

- + Giải được một số phương trình mũ và bất phương trình mũ đơn giản bằng các phương pháp đưa về cùng cơ số, logarit hóa, đặt ẩn phụ, tính chất của hàm số.
- + Nhận dạng được các loại phương trình mũ và bất phương trình mũ.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Phương trình mũ $a^x = b$

- + Nếu $b > 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.
- + Nếu $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

 **Đặc biệt:** Phương trình $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$ (biến đổi về cùng cơ số).

 **Dạng 1:** Phương trình có dạng $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.

- + Nếu $a = 1$ thì $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ nghiệm đúng với mọi x .
- + Nếu $0 < a \neq 1$ thì $f(x) = g(x)$.

 **Dạng 2:** Phương trình có dạng $a^{f(x)} = b$ (với $0 < a \neq 1, b > 0$)

$$a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b.$$

2. Bất phương trình mũ

 **Dạng 1:** Bất phương trình có dạng $a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$. (1)

- + Nếu $a > 1$ thì $(1) \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$.
- + Nếu $a = 1$ thì (1) nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.
- + Nếu $0 < a < 1$ thì $(1) \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$.

 **Dạng 2:** Bất phương trình có dạng $a^{f(x)} < b$ (với $b > 0$). (2)

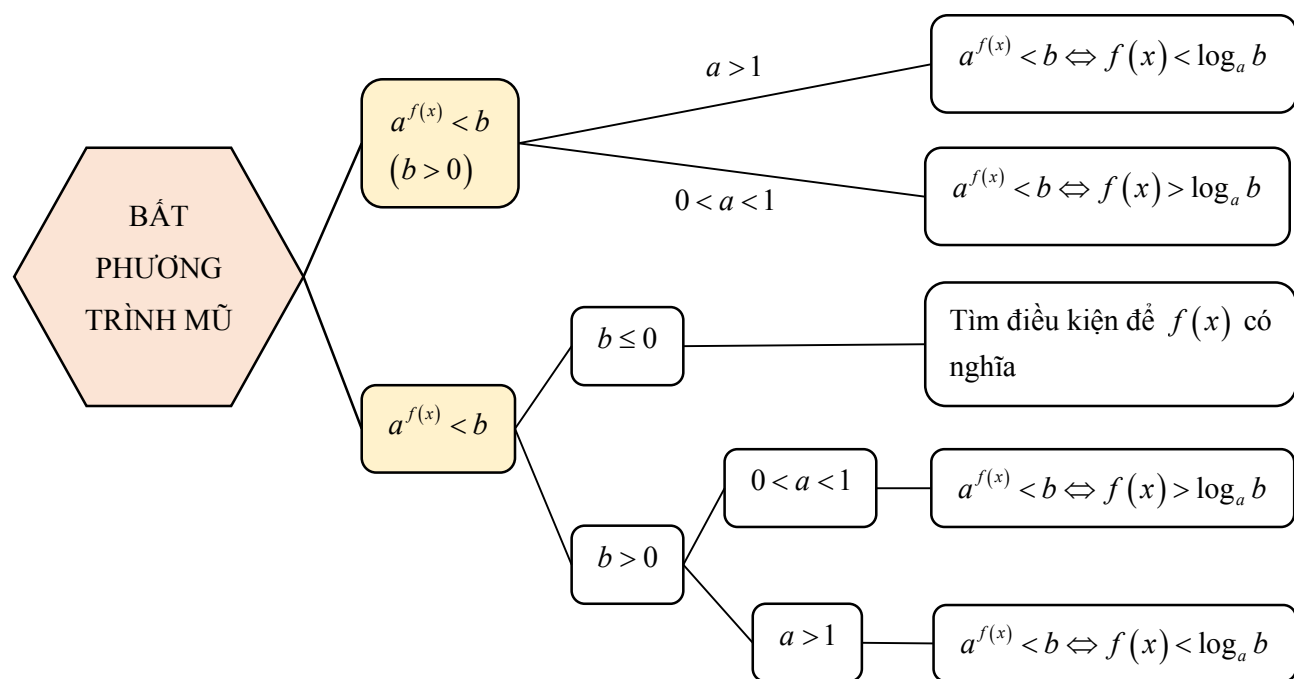
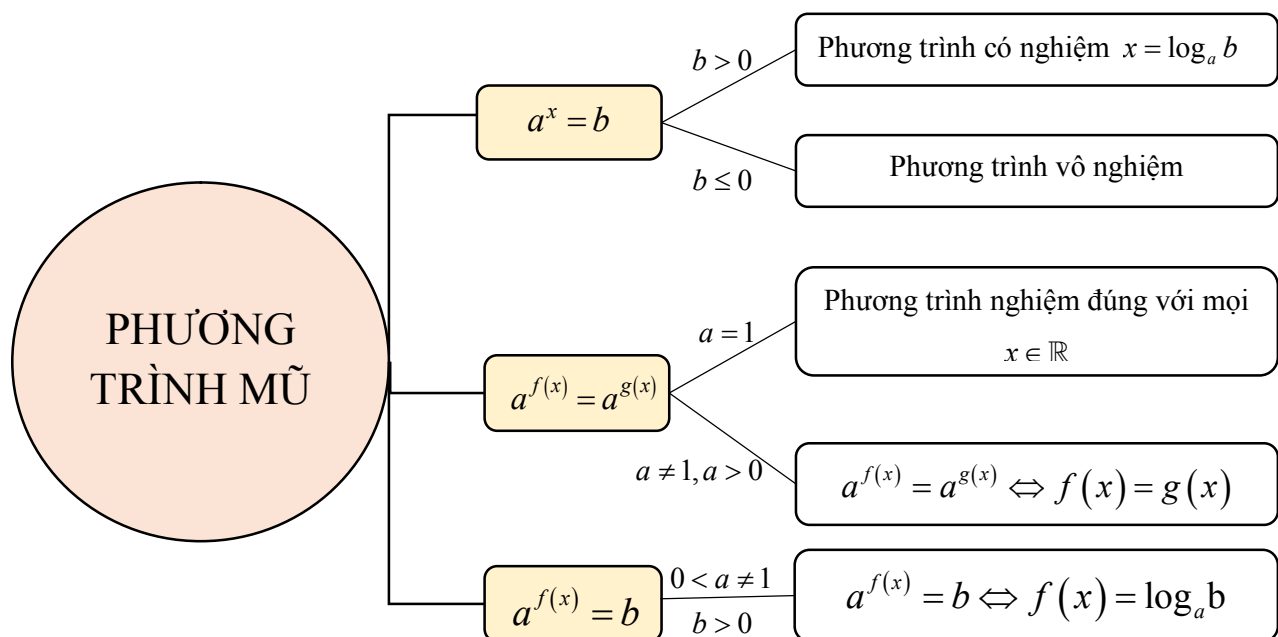
- + Nếu $a > 1$ thì $(2) \Leftrightarrow f(x) < \log_a b$.
- + Nếu $0 < a < 1$ thì $(2) \Leftrightarrow f(x) > \log_a b$.

 **Dạng 3:** Bất phương trình có dạng $a^{f(x)} > b$. (3)

- + Nếu $b \leq 0$ thì (3) nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.
- + Nếu $b > 0, a > 1$ thì $(3) \Leftrightarrow f(x) > \log_a b$.

+ Nếu $0 < a < 1$ thì $(3) \Leftrightarrow f(x) < \log_a b$.

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Phương trình mũ

Bài toán 1. Biến đổi về dạng phương trình cơ bản

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $2^{x^2-x-4} = \frac{1}{16}$ là

- A. 0. B. 2. C. 6. D. 1.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Ta có $2^{x^2-x-4} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow x^2 - x - 4 = \log_2 \frac{1}{16} \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình là 1.

Cách 2: Ta có: $2^{x^2-x-4} = 2^{-4} \Leftrightarrow x^2 - x - 4 = -4 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình là 1.

Chọn D.

Ví dụ 2. Tổng các nghiệm của phương trình $0,6^x \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{27}{125}\right)^3$ là

- A. -8. B. $\frac{1}{2}$. C. 1. D. 0.

Hướng dẫn giải

Ta có: $0,6^x \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{27}{125}\right)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2x^2-24} = \left(\frac{3}{5}\right)^9$
 $\Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{24-2x^2} = \left(\frac{3}{5}\right)^9 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{24+x-2x^2} = \left(\frac{3}{5}\right)^9 \Leftrightarrow -2x^2 + x + 24 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -\frac{5}{2} \end{cases}$.

Vậy tổng các nghiệm là $\frac{1}{2}$.

Chọn B.

Ví dụ 3. Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $3.5^{x-2x^2+1} = 5.3^{-2x^2+x+1}$ là

- A. $-\frac{1}{2}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $-\frac{3}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $3.5^{x-2x^2+1} = 5.3^{-2x^2+x+1} \Leftrightarrow \frac{5^{x-2x^2+1}}{3^{-2x^2+x+1}} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{-2x^2+x+1} = \frac{5}{3}$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + x + 1 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy tổng các nghiệm là $\frac{1}{2}$.

Chọn D.

Ví dụ 4. Gọi T là tích tất cả các nghiệm của phương trình $(3+2\sqrt{2})^{x^2-x+2} = (3-2\sqrt{2})^{x^3-2}$. Tìm T .

A. $T = 0$.

B. $T = -2$.

C. $T = -1$.

D. $T = 1$.

Hướng dẫn giải

Nhận xét: $(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}) = 1 \Rightarrow 3-2\sqrt{2} = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} = (3+2\sqrt{2})^{-1}$, nên

$$(3+2\sqrt{2})^{x^2-x+2} = (3-2\sqrt{2})^{x^3-2} \Leftrightarrow (3+2\sqrt{2})^{x^2-x+2} = (3+2\sqrt{2})^{2-x^3}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 2 - x^3 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Do đó tích tất cả các nghiệm là 0.

Chọn A.

Bài toán 2. Phương trình theo một hàm số mũ

 **Phương pháp giải**

Chú ý: Ta có thể đặt ẩn phụ sau khi đưa được về phương trình chứa một hàm số mũ.

Ta thường gặp các dạng sau:

- $m.a^{2f(x)} + n.a^{f(x)} + p = 0$
- $m.a^{f(x)} + n.b^{f(x)} + p = 0$, trong đó $a.b = 1$. Đặt $t = a^{f(x)}$, $t > 0$ suy ra $b^{f(x)} = \frac{1}{t}$.
- $m.a^{2f(x)} + n.(a.b)^{f(x)} + p.b^{2f(x)} = 0$. Chia hai vế cho $b^{2f(x)}$ và đặt $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = t > 0$.
- Ẩn phụ không hoàn toàn: Đặt $a^x = t$ khi đó phương trình mới chứa cả x và t . Ta coi t là ẩn; x là tham số, tìm mối quan hệ x và t .

 **Ví dụ mẫu**

Ví dụ 1. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $4^{x^2} - 5.2^{x^2} + 4 = 0$ là

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Ta có: $4^{x^2} - 5.2^{x^2} + 4 = 0 \Leftrightarrow (2^2)^{x^2} - 5.2^{x^2} + 4 = 0$

Đưa phương trình ban đầu về dạng phương trình bậc hai ẩn 2^{x^2} .

$$\Leftrightarrow (2^{x^2})^2 - 5 \cdot 2^{x^2} + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2} = 1 \\ 2^{x^2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}.$$

Chọn A.

Ví dụ 2. Phương trình $3^{1+x} + 3^{1-x} = 10$ có hai nghiệm $x_1; x_2$. Khi đó giá trị biểu

thức $P = x_1 + x_2 + 2x_1x_2$ là

A. 0. B. -6. C. -2. D. 2.

Hướng dẫn giải

Ta có: $3^{1+x} + 3^{1-x} = 10 \Leftrightarrow 3 \cdot 3^x + \frac{3}{3^x} = 10 \Leftrightarrow 3 \cdot (3^x)^2 - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 3 \\ 3^x = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}. \text{ Vậy } P = -2.$$

Chọn C.

Ví dụ 3. Tích các nghiệm của phương trình $(\sqrt{2}-1)^x + (\sqrt{2}+1)^x - 2\sqrt{2} = 0$ là

A. 2. B. -1. C. 0. D. 1.

Hướng dẫn giải

Ta có $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1 \Rightarrow \sqrt{2}-1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ nên phương trình thành

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^x + (\sqrt{2}+1)^x - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[(\sqrt{2}+1)^x\right]^2 - 2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)^x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{2}+1)^x = 1+\sqrt{2} \\ (\sqrt{2}+1)^x = \sqrt{2}-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Vậy tích các nghiệm của phương trình là -1.

Chọn B.

Ví dụ 4. Gọi S là tổng tất cả các nghiệm của phương trình

$$3 \cdot 4^{x+1} - 11 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^x = 0. \text{ . Tìm S.}$$

A. $S = 1 - \log_2 3$. B. $S = 1 - \log_3 2$.
C. $S = 1 - 2 \log_{\frac{2}{3}} 2$. D. $S = 1$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $3 \cdot 4^{x+1} - 11 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^x = 0 \Leftrightarrow 12 \cdot 4^x - 11 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^x = 0$

Đưa phương trình ban đầu về dạng phương trình bậc hai ẩn 3^x .

Nhận xét:

$$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}-1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

Đưa phương trình ban đầu về dạng phương trình bậc hai ẩn $(\sqrt{2}+1)^x$.

$$\Leftrightarrow 12 - 11 \cdot \frac{6^x}{4^x} + 2 \cdot \frac{9^x}{4^x} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 11 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 12 = 0 \quad \text{là } \left(\frac{3}{2}\right)^x.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^x = 4 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_{\frac{3}{2}} 4 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\log_{\frac{2}{3}} 4 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Vậy $S = 1 - 2 \log_{\frac{2}{3}} 2$.

Chọn C.

Ví dụ 5. Phương trình $(3 + \sqrt{5})^x + (3 - \sqrt{5})^x = 3 \cdot 2^x$ có hai nghiệm $x_1; x_2$. Giá trị biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$ bằng bao nhiêu?

A. 9. B. 13. C. 1. D. 2.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$\text{Nhận xét } (3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5}) = 4 \Leftrightarrow \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^{-1}. \quad \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^{-1}$$

$$\text{Do đó: } \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^x + \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^x = 3 \Leftrightarrow \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^{2x} - 3 \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^x + 1 = 0$$

Chia 2 vế cho 2^x đưa về phương trình bậc hai ẩn

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

$$\text{là } \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^x.$$

Vậy $A = 2$.

Chọn D.

Ví dụ 6. Tổng tất cả các nghiệm thực $3 \cdot 4^x + (3x - 10) \cdot 2^x + 3 - x = 0$ là $S = \log_2 \frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a + b$ bằng

A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Hướng dẫn giải

$$3 \cdot 4^x + (3x - 10) \cdot 2^x + 3 - x = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot (2^x)^2 + (3x - 10) \cdot 2^x + 3 - x = 0$$

Đặt $2^x = t (t > 0)$, phương trình trở thành $3t^2 + (3x - 10)t + 3 - x = 0$

Ta xem đây là phương trình bậc hai theo ẩn là $t = 2^x$ và tham số x .

Giải phương trình theo tham số x ta được $\begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ t = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = \frac{1}{3} \\ 2^x = 3 - x (*) \end{cases}$

Giải phương trình (*), ta có: $2^x + x - 3 = 0$.

Đặt $f(x) = 2^x + x - 3, f'(x) = 2^x \ln 2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên phương trình $f(x) = 0$ có tối đa một nghiệm.

Mà $f(1) = 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Tóm lại phương trình có nghiệm $x_1 = \log_2 \frac{1}{3}; x_2 = 1$ nên $S = \log_2 \frac{1}{3} + 1 = \log_2 \frac{2}{3}$.

Do đó $a = 2, b = 3$ suy ra $a + b = 5$.

Chọn D.

Bài toán 3. Lấy logarit hai vế

Phương pháp giải

Cho $0 < a \neq 1$ và $x, y > 0$ ta có $x = y \Leftrightarrow \log_a x = \log_a y$

- Phương trình $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1, b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}$
- Phương trình $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot \log_a b$
hoặc $\log_b a^{f(x)} = \log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \cdot \log_b a = g(x)$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Gọi S là tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $7^{x^2} \cdot 3^{-x} = 1$. Tìm S .

A. $S = \log_7 3$.

B. $S = \log_3 7$.

C. $S = \log_2 3$.

D. $S = \log_3 2$.

Hướng dẫn giải

Ta có:

Lấy logarit cơ số 3

$$7^{x^2} \cdot 3^{-x} = 1 \Leftrightarrow \log_3 (7^{x^2} \cdot 3^{-x}) = \log_3 1 \Leftrightarrow \log_3 7^{x^2} + \log_3 3^{-x} = 0$$

hoặc cơ số 7 hai vế.

$$\Leftrightarrow x^2 \cdot \log_3 7 - x = 0 \Leftrightarrow x(x \log_3 7 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{\log_3 7} = \log_7 3 \end{cases}$$

Vậy tổng các nghiệm là $S = \log_7 3$.

Chọn A.

Ví dụ 2. Phương trình $3^x \cdot 5^{\frac{2x-1}{x}} = 15$ có một nghiệm dạng $x = -\log_a b$, với a, b là các số nguyên dương lớn hơn 1 và nhỏ hơn 8. Giá trị của $P = a + 2b$ bằng bao nhiêu?

A. $P = 8$. B. $P = 5$. C. $P = 13$. D. $P = 3$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } 3^x \cdot 5^{\frac{2x-1}{x}} = 15 \Leftrightarrow \frac{3^x \cdot 5^{\frac{2x-1}{x}}}{3 \cdot 5} = 1 \Leftrightarrow 3^{x-1} \cdot 5^{\frac{x-1}{x}} = 1 \Leftrightarrow \log_3 \left(3^{x-1} \cdot 5^{\frac{x-1}{x}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3 3^{x-1} + \log_3 5^{\frac{x-1}{x}} = 0 \Leftrightarrow x-1 + \frac{x-1}{x} \cdot \log_3 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \cdot \left(1 + \frac{1}{x} \cdot \log_3 5 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\log_3 5 \end{cases}$$

Vậy $a = 3, b = 5$ suy ra $a + 2b = 13$.

Chọn C.

Bài toán 4. Đặt nhân tử chung

 **Ví dụ mẫu**

Ví dụ 1. Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $2 \cdot 11^x + 253^x - 23^x = 2$ là

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } 2 \cdot 11^x + 253^x - 23^x = 2 \Leftrightarrow 2 \cdot 11^x + 11^x \cdot 23^x - 23^x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(11^x - 1) + 23^x(11^x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 + 23^x)(11^x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 11^x - 1 = 0 \text{ (vì } 2 + 3^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow x = 0.$$

Chọn A.

Ví dụ 2. Phương trình $2^{x^2+x} - 4 \cdot 2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0$ có số nghiệm nguyên dương là

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } 2^{x^2+x} - 4 \cdot 2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0 \Leftrightarrow 2^{x^2-x} \cdot 2^{2x} - 4 \cdot 2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2-x} \cdot (2^{2x} - 4) - (2^{2x} - 4) = 0 \Leftrightarrow (2^{2x} - 4)(2^{x^2-x} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2x} = 4 \\ 2^{x^2-x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2 \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Vậy phương trình có một nghiệm nguyên dương.

Chọn B.

Bài toán 5. Phương pháp hàm số

Phương pháp giải

Sử dụng tính đơn điệu của hàm số:

Tính chất 1. Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên $(a; b)$ thì có tối đa một nghiệm của phương trình $f(x) = k$ trên $(a; b)$ và $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v, \forall u, v \in (a; b)$.

Tính chất 2. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và đồng biến (hoặc nghịch biến); hàm số $y = g(x)$ liên tục và nghịch biến (hoặc đồng biến) trên D thì số nghiệm trên D của phương trình $f(x) = g(x)$ không nhiều hơn một.

Tính chất 3. Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên D thì bất phương trình $f(u) > f(v) \Leftrightarrow u > v$ (hoặc $u < v$), $\forall u, v \in D$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Phương trình $3^x = 5 - 2x$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Hướng dẫn giải

Ta có: $3^x = 5 - 2x \Leftrightarrow 3^x + 2x - 5 = 0$

Đặt $f(x) = 3^x + 2x - 5$, ta có $f'(x) = 3^x \ln 3 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên phương trình

$f(x) = 0$ có tối đa một nghiệm.

Mà $f(1) = 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

Vậy phương trình có duy nhất một nghiệm.

Chọn C.

Ví dụ 2. Phương trình $2^x + 5^x = 2 + 5x$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Hướng dẫn giải

Ta có: $2^x + 5^x = 2 + 5x \Leftrightarrow 5^x + 2^x - 5x - 2 = 0$

Đặt $f(x) = 5^x + 2^x - 5x - 2$, ta có $f'(x) = 5^x \ln 5 + 2^x \ln 2 - 5$

Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5^x \ln 5 + 2^x \ln 2 - 5 = 0$

Ta có $f''(x) = 5^x \ln^2 5 + 2^x \ln^2 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên phương trình $f'(x) = 0$ có tối đa một nghiệm.

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -5$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ nên phương trình $f'(x) = 0$ có duy nhất một nghiệm $x = x_0$.

Do đó, phương trình $f(x) = 0$ có tối đa hai nghiệm.

Mà $\begin{cases} f(1)=0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ nên phương trình có hai nghiệm $x=0$ hoặc $x=1$.

Chọn D.

Ví dụ 3. Tổng các nghiệm của phương trình $2^{23x^3} \cdot 2^x - 2^{10x^2} + 23x^3 = 10x^2 - x$ gần bằng số nào dưới đây?

A. 0,35. B. 0,40. C. 0,50. D. 0,45.

Hướng dẫn giải

Ta có $2^{23x^3} \cdot 2^x - 2^{10x^2} + 23x^3 = 10x^2 - x \Leftrightarrow 2^{23x^3+x} + 23x^3 + x = 2^{10x^2} + 10x^2$

Đặt $f(t) = 2^t + t$, ta có $f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Mà $f(23x^3 + x) = f(10x^2)$ nên $23x^3 + x = 10x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{5 \pm \sqrt{2}}{23} \end{cases}$.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là $\frac{10}{23}$.

Chọn B.

Ví dụ 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$\sqrt[3]{3m+27}\sqrt[3]{3m+27} \cdot 2^x = 2^x$ có nghiệm thực?

A. 6. B. 4.
C. Vô số. D. Không tồn tại m .

Hướng dẫn giải

Ta có $\sqrt[3]{3m+27}\sqrt[3]{3m+27} \cdot 2^x = 2^x \Leftrightarrow 27\sqrt[3]{3m+27} \cdot 2^x = 2^{3x} - 3m. \quad (1)$

Đặt $2^x = u$, điều kiện: $u > 0$ và $\sqrt[3]{3m+27} \cdot 2^x = v \Rightarrow v^3 = 3m+27u. \quad (2)$

(1) trở thành $u^3 = 27v + 3m. \quad (3)$

Từ (3) và (2) suy ra $u^3 - 27v = v^3 - 27u \Leftrightarrow (u-v) \cdot (u^2 + uv + v^2 + 27) = 0$

$$\Leftrightarrow u = v.$$

Do $u^2 + uv + v^2 + 27 = \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3v^2}{4} + 27 > 0, \forall u, v \in \mathbb{R}$, nên

$$\sqrt[3]{3m+27}u = u \Leftrightarrow m = \frac{u^3 - 27u}{3}, \text{ với } u > 0.$$

Xét hàm số $f(u) = \frac{u^3 - 27u}{3}$ với $u > 0$.

Ta có $f'(u) = \frac{1}{3}(3u^2 - 27); f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = 3$ do $u > 0$.

Suy ra $\min_{(0;+\infty)} f(u) = -54$. Do đó có vô số giá trị nguyên của m để phương trình

có nghiệm thực.

Chọn C.

Bài toán 6. Phương trình chứa tham số

Phương pháp giải

Bước 1. Đặt $t = a^x (t > 0)$, chuyển phương trình ban đầu về phương trình ẩn t .

Bước 2. Sử dụng định lý Vi-ét về điều kiện có nghiệm và mối quan hệ giữa các nghiệm để giải quyết.

Ví dụ 1. Cho phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$. Biết rằng khi $m = m_0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. m_0 là số nguyên âm.
- B. m_0 là số nguyên tố.
- C. m_0 là số lẻ.
- D. m_0 là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2m \cdot 2^x + 2m = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = 2^x, t > 0$, phương trình thành

$$t^2 - 2mt + 2m = 0 \quad (2).$$

Ta thấy rằng ứng với một giá trị $t > 0$ ta tìm được một nghiệm x nên để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thì phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $t_2 > t_1 > 0$ đồng thời

$$x_1 + x_2 = 3 \Rightarrow 2^{x_1+x_2} = 2^3 \Leftrightarrow t_1 t_2 = 8.$$

Từ đó, ta có điều kiện

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 8m > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m = 8 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4.$$

Vậy $m_0 = 4$ là một số chính phương.

Chọn D.

Ví dụ 2. Tìm m để phương trình

Bài toán: Tìm tham số m để phương trình có

nghiệm thuộc $(x_1; x_2)$ ta giải như sau:

$$9^x - 2 \cdot 3^x + 3 - m = 0 \text{ có nghiệm thuộc } (0; +\infty).$$

Bước 1. Đặt $t = a^x, t > 0$

Đặt $3^x = t, (t > 0)$. Vì $x \in (0; +\infty)$ nên $t \in (1; +\infty)$.

vì $x \in (x_1; x_2) \Rightarrow t \in (a^{x_1}; a^{x_2})$.

Bước 2. Chuyển về phương trình ẩn t , cô lập m

Phương trình trở thành:

chuyển về dạng $f(t) = m$

$$t^2 - 2t + 3 - m = 0 \Leftrightarrow m = t^2 - 2t + 3.$$

Bước 3. Xét hàm $f(t)$: tìm đạo hàm, lập bảng

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 2t + 3$ trên khoảng $(1; +\infty)$.

biến thiên và đưa ra kết luận.

Có $f'(t) = 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Ta có bảng biến thiên

t	1	$+\infty$
$f'(t)$		+
$f(t)$	2	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $m > 2$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$4^x - m \cdot 2^x + 2m - 5 = 0 \text{ có hai nghiệm trái dấu?}$$

A. Vô số. B. 0. C. 1. D. 4.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } 4^x - m \cdot 2^x + 2m - 5 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - m \cdot 2^x + 2m - 5 = 0$$

$$\text{Đặt } t = 2^x, t > 0, \text{ phương trình thành } t^2 - mt + 2m - 5 = 0 \quad (2).$$

$$\text{Đặt } f(t) = t^2 - mt + 2m - 5$$

Nhận xét rằng với một giá trị $t > 0$ ta tìm được một nghiệm x nên để phương trình có hai nghiệm $x_1 < 0 < x_2$ thì phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt

$t_2 > t_1 > 0$ đồng thời $t_1 < 1 < t_2$ (vì $2^{x_1} < 2^0 < 2^{x_2}$). Từ đó, ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \\ 1. f(t) < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m^2 - 4(2m - 5) > 0 \\ 2m - 5 > 0 \\ m > 0 \\ 1. (1 - m + 2m - 5) < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m^2 - 8m + 20 > 0 \\ m > \frac{5}{2} \\ m > 0 \\ m < 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \frac{5}{2} < m < 4.$$

Vậy chỉ có một giá trị nguyên của tham số m thỏa đề.

Chọn C.

Ví dụ 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình

$$2^x + 3 = m\sqrt{4^x + 1} (*) \text{ có nghiệm duy nhất?}$$

A. 3. B. Vô số. C. 1. D. 2.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = 2^x, t > 0$, phương trình $(*) \Leftrightarrow t + 3 = m\sqrt{t^2 + 1} \Leftrightarrow m = \frac{t+3}{\sqrt{t^2+1}} \quad (1).$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}$ xác định trên tập $D = (0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \frac{1-3t}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}$. Cho $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 1-3t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	
y'			$+$	0	$-$
y				$\sqrt{10}$	

$3 \rightarrow \sqrt{10} \rightarrow 1$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy với $1 < m \leq 3$ hoặc $m = \sqrt{10}$ phương trình có nghiệm duy nhất nên có hai giá trị nguyên của tham số m .

Chọn D.

Ví dụ 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình

$$2.4^{\sqrt{x}-1} - 5.2^{\sqrt{x}-1} + m = 0, (*) \text{ có nghiệm?}$$

A. 3. B. 0. C. 1. D. 4.

Hướng dẫn giải

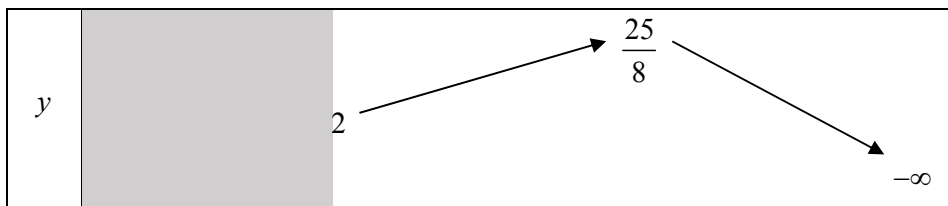
Đặt $t = 2^{\sqrt{x}-1}$, điều kiện $t \geq \frac{1}{2}$ vì $\sqrt{x} - 1 \geq -1$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow 2t^2 - 5t = -m$.

Xét hàm số $y = -2t^2 + 5t$ trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Ta có $y' = -4t + 5$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{4}$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$+\infty$	
y'			+	0	-



Do đó phương trình có nghiệm khi $m \leq \frac{25}{8}$.

Chọn A.

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Giá trị của tham số k để hai phương trình $3^x = 30 - x(1)$ và $x - k = 0(2)$ có nghiệm chung là

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 2: Phương trình $3^{x^3-9x+4} = 81$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 3: Phương trình $\left(\sqrt{6+\sqrt{35}}\right)^x + \left(\sqrt{6-\sqrt{35}}\right)^x = 12$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 4: Phương trình $2^{x+2} \cdot 5^x = 40000$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 5: Phương trình $3^{x-2} = 666661$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 6: Phương trình $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 1. B. 4. C. 3. D. 2.

Câu 7: Cho phương trình $3^{x^2-4x+5} = 9$. Tổng các lập phương các nghiệm thực của phương trình là

- A. 28. B. 27. C. 26. D. 25.

Câu 8: Cho phương trình $3^{x^2-3x+8} = 9^{2x-1}$, khi đó tập nghiệm của phương trình là

- A. $S = \{2; 5\}$. B. $S = \left\{ \frac{-5-\sqrt{61}}{2}; \frac{-5+\sqrt{61}}{2} \right\}$.
C. $S = \left\{ \frac{5-\sqrt{61}}{2}; \frac{5+\sqrt{61}}{2} \right\}$. D. $S = \{-2; -5\}$.

Câu 9: Phương trình $3^x + 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} - 4 = 0$ có bao nhiêu nghiệm âm?

- A. 1. B. 3. C. 0. D. 2.

Câu 10: Cho phương trình $2^{\left|\frac{28}{3}x+4\right|} = 16^{x^2-1}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Tổng các nghiệm của phương trình là một số nguyên.
B. Tích các nghiệm của phương trình là một số âm.
C. Nghiệm của phương trình là các số vô tỉ.

D. Phương trình vô nghiệm.

Câu 11: Phương trình $2^{8-x^2} \cdot 5^{8-x^2} = 0,001 \cdot (10^5)^{1-x}$ có tổng các nghiệm là

- A. 7. B. -7. C. 5. D. -5.

Câu 12: Phương trình $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$ có nghiệm là

- A. $x = 1, x = \log_2 3$. B. $x = -1, x = \log_3 2$. C. $x = 1, x = \log_3 2$. D. $x = -1, x = -\log_3 2$.

Câu 13: Cho phương trình $4 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình trên. Khi đó, tích $x_1 \cdot x_2$ bằng

- A. -1. B. 2. C. -2. D. 1.

Câu 14: Cho phương trình $4^x - 4^{1-x} = 3$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Phương trình đã cho tương đương với phương trình: $4^{2x} - 3 \cdot 4^x - 4 = 0$.
B. Phương trình có một nghiệm.
C. Nghiệm của phương trình là luôn lớn hơn 0.
D. Phương trình vô nghiệm.

Câu 15: Nghiệm của phương trình $2^x + 2^{x+1} = 3^x + 3^{x+1}$ là

- A. $x = \log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{4}$. B. $x = 1$. C. $x = 0$. D. $x = \log_{\frac{4}{3}} \frac{2}{3}$.

Câu 16: Nghiệm của phương trình $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0$ là

- A. $x \in \{0; 1\}$. B. $x \in \left\{\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right\}$. C. $x \in \{-1; 0\}$. D. $x \in \{-1; 1\}$.

Câu 17: Nghiệm của phương trình $12 \cdot 3^x + 3 \cdot 15^x - 5^{x+1} = 20$ là

- A. $x = \log_5 3 - 1$. B. $x = \log_3 5$. C. $x = \log_3 5 + 1$. D. $x = \log_3 5 - 1$.

Câu 18: Phương trình $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$ có tổng các nghiệm là

- A. $\log_3 6$. B. $\log_3 \frac{2}{3}$. C. $\log_3 \frac{3}{2}$. D. $-\log_3 6$.

Câu 19: Phương trình $5^x + 25^{1-x} = 6$ có tích các nghiệm là

- A. $\log_5 \left(\frac{1 - \sqrt{21}}{2} \right)$. B. $\log_5 \left(\frac{1 + \sqrt{21}}{2} \right)$. C. 5. D. $5 \log_5 \left(\frac{1 + \sqrt{21}}{2} \right)$.

Câu 20: Phương trình $(7 + 4\sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^x = 6$ có nghiệm là

- A. $x = \log_{(2+\sqrt{3})} 2$. B. $x = \log_2 3$. C. $x = \log_2 (2 + \sqrt{3})$. D. $x = 1$.

Câu 21: Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $4^{x^2-3x+2} + 4^{x^2+6x+5} = 4^{2x^2+3x+7} + 1$.

- A. $x \in \{-5; -1; 1; 2\}$. B. $x \in \{-5; -1; 1; 3\}$. C. $x \in \{-5; -1; 1; -2\}$. D. $x \in \{5; -1; 1; 2\}$.

Câu 22: Phương trình $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^x + (\sqrt{3} + \sqrt{2})^x = (\sqrt{10})^x$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 23: Cho phương trình $2^{\cos^2 x} + 4 \cdot 2^{\sin^2 x} = 6$. Phương trình có bao nhiêu nghiệm?

A. 0. B. 2. C. 4. D. Vô số nghiệm.

Câu 24: Phương trình $x \cdot 2^x + x^2 + 2 = 2^{x+1} + 3x$ có tổng các nghiệm bằng bao nhiêu?

A. 0. B. 4. C. 3. D. 2.

Câu 25: Phương trình $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^x + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^x = (\sqrt{7})^x$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 4. B. 0. C. 3. D. 2.

Câu 26: Phương trình $3^{2x} + 2x(3^x + 1) - 4 \cdot 3^x - 5 = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm không âm?

A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 27: Phương trình $2^{x-3} = 3^{x^2-5x+6}$ có hai nghiệm x_1, x_2 trong đó $x_1 < x_2$ hãy chọn phát biểu đúng?

A. $3x_1 + 2x_2 = \log_3 54$. B. $2x_1 - 3x_2 = \log_3 8$. C. $2x_1 + 3x_2 = \log_3 54$. D. $3x_1 - 2x_2 = \log_3 8$.

Câu 28: Phương trình $4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x} = 2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0; 15]$?

A. 3. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 29: m là tham số thay đổi sao cho phương trình $9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27^{m^2-1} = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Tổng hai nghiệm đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

A. 1. B. -3. C. 2. D. -4.

Câu 30: Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = m$ có hai nghiệm phân biệt?

A. $m < 2$. B. $m > 2$. C. $m = 2$. D. $m \leq 2$.

Câu 31: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2^{x^2+4} = 2^{2(x^2+1)} + \sqrt{2^{2(x^2+2)} - 2^{x^2+3}} + 1$. Khi đó, tổng hai nghiệm bằng?

A. -2. B. 2. C. 0. D. 1.

Câu 32: Tìm tập nghiệm S của phương trình $3^{x-1} \cdot 5^{\frac{2x-2-m}{x-m}} = 15, m$ là tham số khác 2.

A. $S = \{2; m \log_3 5\}$. B. $S = \{2; m + \log_3 5\}$. C. $S = \{2\}$. D. $S = \{2; m - \log_3 5\}$.

Câu 33: Biết rằng phương trình $3^{x^2+1} \cdot 25^{x-1} = \frac{3}{25}$ có đúng hai nghiệm x_1, x_2 . Tính giá trị của

$$P = \sqrt{3^{x_1} + 3^{x_2}}.$$

A. $P = \frac{\sqrt{26}}{5}$. B. $P = \sqrt{26}$. C. $P = 26$. D. $P = \frac{26}{25}$.

Câu 34: Phương trình $2^{x-1} - 2^{x^2-x} = (x-1)^2$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 35: Tính tổng T tất cả các nghiệm của phương trình $2017^{\sin^2 x} - 2017^{\cos^2 x} = \cos 2x$ trên đoạn $[0; \pi]$.

- A. $T = \pi$. B. $T = \frac{\pi}{4}$. C. $T = \frac{\pi}{2}$. D. $T = \frac{3\pi}{4}$.

Câu 36: Biết rằng phương trình $3^{x^2-1} + (x^2-1)3^{x+1} = 1$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Tổng lập phương hai nghiệm của phương trình bằng

- A. 2. B. 0. C. 8. D. -8.

Câu 37: Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 1$.

- A. $m = 6$. B. $m = -3$. C. $m = 3$. D. $m = 1$.

Câu 38: Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 2$.

- A. $m = 4$. B. $m = 3$. C. $m = 2$. D. $m = 1$.

Câu 39: Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $2017^{2x-1} - 2m \cdot 2017^x + m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 1$.

- A. $m = 0$. B. $m = 3$. C. $m = 2$. D. $m = 1$.

Câu 40: Cho phương trình $(m+1)16^x - 2(2m-3)4^x + 6m+5 = 0$ với m là tham số thực. Tập các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm trái dấu có dạng $(a; b)$. Tính $P = ab$.

- A. $P = 4$. B. $P = -4$. C. $P = -\frac{3}{2}$. D. $P = \frac{5}{6}$.

Câu 41: Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $9^x - (m-1)3^x + 2m = 0$ có nghiệm duy nhất.

- A. $m = 5 + 2\sqrt{6}$. B. $m = 0; m = 5 + 2\sqrt{6}$.
C. $m < 0$. D. $m < 0; m = 5 + 2\sqrt{6}$.

Câu 42: Cho phương trình $4^{x^2-2x+1} - m \cdot 2^{x^2-2x+2} + 3m - 2 = 0$ với m là tham số thực. Tìm các giá trị của m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

- A. $m < 1$. B. $m < 1; m > 2$. C. $m \geq 2$. D. $m > 2$.

Câu 43: Cho phương trình $m \cdot 2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2 \cdot 2^{6-5x} + m$ với m là tham số thực. Có tất cả bao nhiêu giá trị của m để phương trình có đúng ba nghiệm phân biệt?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 44: Cho phương trình $25^{1+\sqrt{1-x^2}} - (m+2)5^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2m+1 = 0$ với m là tham số thực. Số nguyên dương m lớn nhất để phương trình có nghiệm là

- A. $m = 20$. B. $m = 35$. C. $m = 30$. D. $m = 25$.

Dạng 2: Bất phương trình mũ

Bài toán 1. Biến đổi về dạng bất phương trình cơ bản

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Giải bất phương trình $(\sqrt{3}-1)^{x+1} > 4-2\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Ta thấy $a = \sqrt{3}-1 \in (0;1)$ nên ta có: $x+1 < \log_{\sqrt{3}-1}(4-2\sqrt{3}) \Leftrightarrow x+1 < 2 \Leftrightarrow x < 1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty; 1)$

Chọn D.

Ví dụ 2. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} \geq 448$ là

- A. $\left(-\infty; \frac{9}{2}\right]$. B. $\left[\frac{9}{2}; +\infty\right)$. C. $\left(-\infty; -\frac{9}{2}\right]$. D. $\left[-\frac{9}{2}; +\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{1}{2} \cdot 2^{2x} + \frac{1}{4} \cdot 2^{2x} + \frac{1}{8} \cdot 2^{2x} \geq 448 \Leftrightarrow \frac{7}{8} \cdot 2^{2x} \geq 448 \Leftrightarrow 2^{2x} \geq 512$

$$\Leftrightarrow 2x \geq \log_2 512 \Leftrightarrow 2x \geq 9 \Leftrightarrow x \geq \frac{9}{2}.$$

Chọn B.

Ví dụ 3. Tập nghiệm của bất phương trình $2^x + 2^{x+2} + 2^{x+4} \geq 3^x + 3^{x+2} + 3^{x+4}$ là

- A. $T = \left(-\infty; \log_2 \frac{13}{3}\right]$. B. $T = \left[\log_2 \frac{13}{3}; +\infty\right)$.
C. $T = \left(-\infty; \log_2 \frac{13}{3}\right)$. D. $T = \left(\log_2 \frac{13}{3}; +\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $2^x + 4 \cdot 2^x + 16 \cdot 2^x \geq 3^x + 9 \cdot 3^x + 81 \cdot 3^x \Leftrightarrow 21 \cdot 2^x \geq 91 \cdot 3^x \Leftrightarrow \frac{2^x}{3^x} \geq \frac{91}{21} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x \geq \frac{13}{3}$.

Vì cơ số $a = \frac{2}{3} \in (0;1)$ nên bất phương trình thành $x \leq \log_{\frac{2}{3}} \frac{13}{3}$.

Chọn A.

Ví dụ 4. Tập nghiệm của bất phương trình $(\sqrt{5}-2)^{\frac{2x}{x-1}} \leq (\sqrt{5}+2)^x$ là

- A. $(-\infty; -1] \cup [0; 1]$. B. $[-1; 0]$.
C. $(-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$. D. $[-1; 0] \cup (1; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Ta thấy $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)=1 \Leftrightarrow \sqrt{5}-2=(\sqrt{5}+2)^{-1}$ nên bất phương trình thành

$$(\sqrt{5}-2)^{\frac{2x}{x-1}} \leq (\sqrt{5}-2)^{-x} \quad (1)$$

Vì cơ số $a = \sqrt{5}-2 \in (0;1)$ nên

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} \geq -x \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} + x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ x > 1 \end{cases}$$

Chọn D.

Bài toán 2. Bất phương trình theo một hàm số mũ

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Bất phương trình $5.4^x + 2.25^x - 7.10^x \leq 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

Hướng dẫn giải

Ta có: $5.4^x + 2.25^x - 7.10^x \leq 0$

$$\Leftrightarrow 5 + 2 \cdot \frac{25^x}{4^x} - 7 \cdot \frac{10^x}{4^x} \leq 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - 7 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x + 5 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \left(\frac{5}{2}\right)^x \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1.$$

Vậy bất phương trình có hai nghiệm nguyên.

Chọn A.

Ví dụ 2. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $4^{2x^2} - 5.4^{x^2+x} + 4^{2x+1} = 0$ là

A. 2. B. 4. C. 0. D. 1.

Hướng dẫn giải

Ta có: $4^{2x^2} - 5.4^{x^2+x} + 4^{2x+1} = 0 \Leftrightarrow (4^{x^2})^2 - 5.4^{x^2}.4^x + 4.(4^x)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (4^{x^2-x})^2 - 5.4^{x^2-x} + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x^2-x} = 1 \\ 4^{x^2-x} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ x^2 - x = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là 2.

Chọn A.

Ví dụ 3. Bất phương trình $\frac{4^x - 3.2^{x+1} + 8}{2^{x+1} - 1} \geq 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên âm?

A. 2. B. -1. C. 0. D. 1.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8}{2^{x+1} - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8}{2 \cdot 2^x - 1} \geq 0$

Lập bảng xét dấu của $f(t) = \frac{t^2 - 6t + 8}{2t - 1}, 2^x = t$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	4	$+\infty$	
VT	$-$	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu ta có:

$$\frac{(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8}{2 \cdot 2^x - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \geq 4 \\ \frac{1}{2} < 2^x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ -1 < x \leq 1 \end{cases}$$

Vậy bất phương trình không có nghiệm nguyên âm.

Chọn C.

Ví dụ 5. Bất phương trình $\frac{1}{5^{x+1} - 1} \geq \frac{1}{5 - 5^x}$ có tập nghiệm dạng $S = (-a; b] \cup (a; +\infty)$ với $a > 0$. Giá trị tổng $a + b$ là

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{1}{5^{x+1} - 1} \geq \frac{1}{5 - 5^x} \Leftrightarrow \frac{1}{5 \cdot 5^x - 1} - \frac{1}{5 - 5^x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5 - 5^x - 5 \cdot 5^x + 1}{(5 \cdot 5^x - 1) \cdot (5 - 5^x)} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{5 - 5^x - 5 \cdot 5^x + 1}{(5 \cdot 5^x - 1) \cdot (5 - 5^x)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{6 - 6 \cdot 5^x}{(5 \cdot 5^x - 1) \cdot (5 - 5^x)} \geq 0$$

Đưa về trái về dạng một ẩn chứa 5^x sau đó xét dấu

Lập bảng xét dấu $f(t) = \frac{t^2 - 6 \cdot t}{(5 \cdot t - 1) \cdot (5 - t)}, 5^x = t$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{5}$	1	5	$+\infty$
VT	$-$	$+$	0	$-$	$+$

Từ bảng xét dấu ta có $\frac{6 - 6 \cdot 5^x}{(5 \cdot 5^x - 1) \cdot (5 - 5^x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x > 5 \\ \frac{1}{5} < 5^x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ -1 < x \leq 0 \end{cases}$

Vậy $a = 1, b = 0 \Rightarrow a + b = 1$.

Chọn D.

Bài toán 3. Lấy logarit hai vế

Phương pháp giải

Cho $0 < a \neq 1$ và $x, y > 0$ ta có:

+ Nếu $0 < a < 1$ thì $x < y \Leftrightarrow \log_a x > \log_a y$.

+ Nếu $a > 1$ thì $x < y \Leftrightarrow \log_a x < \log_a y$.

Ví dụ: Tập nghiệm của bất phương trình

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{3x^2} < \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \text{ là}$$

A. $S = (1; +\infty)$.

B. $S = \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

C. $S = \left(-\frac{1}{3}; 1\right)$.

D. $S = \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}\right)^{3x^2} < \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} &\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{3x^2} > \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \\ &\Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{3} \\ x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $S = \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

Chọn B.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3x^2} < 3^{2x+1}$ là

A. $S = (1; +\infty)$.

B. $S = \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

C. $S = \left(-\frac{1}{3}; 1\right)$.

D. $S = \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \left(\frac{1}{3}\right)^{-3x^2} < 3^{2x+1} &\Leftrightarrow 3^{3x^2} < 3^{2x+1} \Leftrightarrow \log_3 3^{3x^2} < \log_3 3^{2x+1} \\ &\Leftrightarrow 3x^2 < 2x+1 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < 1. \end{aligned}$$

Vậy $S = \left(-\frac{1}{3}; 1\right)$.

Chọn C.

Ví dụ 2. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+5x} > \left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}$ là

A. $S = (\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

B. $S = (-\infty; 1)$.

C. $S = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

D. $S = (2; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+5x} > \left(\frac{1}{4}\right)^{x+1} &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+5x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+2} \\ &\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+5x} < \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+2} \\ &\Leftrightarrow -x^2 + 5x < 2x + 2 \\ &\Leftrightarrow -x^2 + 3x - 2 < 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $S = (\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Chọn A.

Ví dụ 3. Nghiệm của bất phương trình $8^{\frac{x}{x+2}} > 36 \cdot 3^{2-x}$ là

A. $\begin{cases} -3 < x < 2 \\ x > 4 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} -\log_2 6 < x < -2 \\ x > 4 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} -4 < x < -2 \\ x > 1 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} -\log_3 18 < x < -2 \\ x > 4 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 8^{\frac{x}{x+2}} > 36 \cdot 3^{2-x} &\Leftrightarrow 2^{\frac{x-4}{x+2}} > 3^{4-x} \Leftrightarrow \log_3 2^{\frac{x-4}{x+2}} > \log_3 3^{4-x} \\ &\Leftrightarrow \frac{x-4}{x+2} \log_3 2 > 4-x \Leftrightarrow (x-4) \left(\frac{\log_3 2}{x+2} + 1 \right) > 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-4 > 0 \\ \frac{\log_3 2}{x+2} + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ \frac{\log_3 2 + 2 + x}{x+2} < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ \begin{cases} x < 4 \\ \frac{\log_3 18 + x}{x+2} < 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ \begin{cases} x < 4 \\ -\log_3 18 < x < -2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ -\log_3 18 < x < -2 \end{cases}$$

Chọn D.

Ví dụ 4. Bất phương trình $2^x \cdot 5^{\frac{2x}{x+1}} < 10$ có tập nghiệm là $(-\infty; -b) \cup (-a; a)$. Khi đó $b - a$ bằng

- A. $\log_2 5$. B. $-\log_5^2$. C. 1. D. $2 + \log_2 5$.

Hướng dẫn giải

Ta có $2^x \cdot 5^{\frac{2x}{x+1}} < 10 \Leftrightarrow \frac{2^x \cdot 5^{\frac{2x}{x+1}}}{2 \cdot 5} < 1 \Leftrightarrow 2^{x-1} \cdot 5^{\frac{x-1}{x+1}} < 1 \Leftrightarrow \log_5 \left(2^{x-1} \cdot 5^{\frac{x-1}{x+1}} \right) < \log_5 1$

$$\Leftrightarrow (x-1) \cdot \log_5 2 + \frac{x-1}{x+1} < 0 \Leftrightarrow (x-1) \cdot \left(\log_5 2 + \frac{1}{x+1} \right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1) \cdot (x \cdot \log_5 2 + \log_5 2 + 1)}{x+1} < 0.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\log_2 10$	-1	1	$+\infty$
VT	$-$	$+$	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu ta có $\frac{(x-1) \cdot (x \cdot \log_5 2 + \log_5 2 + 1)}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ -\infty < x < -\log_2 10 \end{cases}$

Do đó $\begin{cases} a = 1 \\ b = \log_2 10 \end{cases} \Rightarrow b - a = \log_2 5$.

Chọn A.

Bài toán 4. Đặt nhân tử chung

 **Phương pháp giải**

Phân tích để xuất hiện nhân tử và đặt nhân tử chung. Ta có $A \cdot B + A \cdot C = A(B + C)$

Với bài phức tạp ta có thể đặt ẩn phụ để giải.

 **Ví dụ mẫu**

Ví dụ 1. Tập nghiệm S của bất phương trình $8 \cdot 3^x + 3 \cdot 2^x - 24 \geq 6^x$ có dạng $S = [a; b]$. Giá trị tổng $a + b$ bằng

- A. 4. B. $2 - \sqrt{2}$. C. $1 + \sqrt{3}$. D. 0.

Hướng dẫn giải

Ta có $8.3^x + 3.2^x - 24 \geq 6^x \Leftrightarrow 8.3^x + 3.2^x - 2^x.3^x - 24 \geq 0$

$$\Leftrightarrow 3^x(8-2^x) + 3.(2^x-8) \geq 0 \Leftrightarrow (2^x-8)(3-3^x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2^x-8)(3^x-3) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \leq 8 \\ 3^x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3.$$

Vậy $a=1, b=3$ nên $a+b=4$

Chọn A.

Ví dụ 2. Nghiệm của bất phương trình $5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{1+\sqrt{x}} + 5^{\sqrt{x}}$ là

A. $0 \leq x \leq 1.$

B. $0 < x < 1.$

C. $0 < x \leq 1.$

D. $0 \leq x \leq 1.$

Hướng dẫn giải

Ta có $5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{1+\sqrt{x}} + 5^{\sqrt{x}} \Leftrightarrow (5^{\sqrt{x}})^2 - 6.5^{\sqrt{x}} + 5 < 0$

$$\Leftrightarrow (5^{\sqrt{x}})^2 - 5^{\sqrt{x}} - 5.5^{\sqrt{x}} + 5 < 0$$

$$\Leftrightarrow (5^{\sqrt{x}} - 5)(5^{\sqrt{x}} - 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow 1 < 5^{\sqrt{x}} < 5$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

Chọn B.

Bài toán 5. Phương pháp hàm số

Phương pháp giải

Sử dụng tính đơn điệu của hàm số

Tính chất:

+ Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn đồng biến trên D thì bất phương trình:

$$f(u) > f(v) \Leftrightarrow u > v, \forall u, v \in D.$$

+ Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn nghịch biến trên D thì bất phương trình:

$$f(u) > f(v) \Leftrightarrow u < v, \forall u, v \in D.$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Bất phương trình $8^x + 2^x > 27^{x+1} + 3^{x+1}$ có tập nghiệm là $S = \left(-\infty; \log_{\frac{a}{b}} 3\right)$, với $\frac{a}{b}$ là phân số

tối giản. Giá trị của $a.b$ bằng

A. 2.

B. 3.

C. 6.

D. 12.

Hướng dẫn giải

Ta có $8^x + 2^x > 27^{x+1} + 3^{x+1} \Leftrightarrow (2^x)^3 + 2^x > (3^{x+1})^3 + 3^{x+1}$

Đặt $f(t) = t^3 + t$, ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $f(2^x) > f(3^{x+1}) \Leftrightarrow 2^x > 3^{x+1} \Leftrightarrow 2^x > 3 \cdot 3^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x > 3$

Vì $\frac{2}{3} \in (0; 1)$ nên $x < \log_{\frac{2}{3}} 3$ từ đó $a = 2, b = 3$ nên $a.b = 6$.

Chọn C.

Ví dụ 2. Tập nghiệm S của bất phương trình $2^{4-x} - x + 1 \geq 0$

A. $S = (-\infty; 3]$. B. $S = (3; +\infty)$. C. $S = (-\infty; 3)$. D. $S = [3; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $f(x) = 2^{4-x} - x + 1$ có $f'(x) = -2^{4-x} \ln 2 - 1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Mà ta có $f(3) = 0$ nên: $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(3) \Leftrightarrow x \leq 3$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 3]$.

Chọn A.

Ví dụ 3. Cho phương trình $2^{2x^2-15x+10} - 2^{x^2+10x-50} + x^2 - 25x + 150 \leq 0$. Số nghiệm nguyên của bất phương trình là

A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases} u = 2x^2 - 15x + 100 \\ v = x^2 + 10x - 50 \end{cases} \Rightarrow u - v = x^2 - 25x + 150$

Thay vào bất phương trình ta được: $2^u - 2^v + u - v \leq 0 \Leftrightarrow 2^u + u \leq 2^v + v$.

Xét hàm $f(t) = 2^t + t$ ta có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $f(u) \leq f(v)$ nên $u \leq v$. Do đó:

$$2x^2 - 15x + 100 \leq x^2 + 10x - 50 \Leftrightarrow x^2 - 25x + 150 \leq 0 \Leftrightarrow 10 \leq x \leq 15.$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x = \{10; 11; 12; 13; 14; 15\}$.

Chọn D.

Ví dụ 4. Cho bất phương trình $36(2^{x^3} + 3^{x^3}) > 9 \cdot 8^x + 4 \cdot 27^x$. Nghiệm của bất phương trình là

A. $x \in (-2; +\infty)$. B. $x \in (-2; +\infty) \setminus \{1\}$.
C. $x \in (1; +\infty)$. D. $x \in (-\infty; -2)$.

Hướng dẫn giải

$$36(2^{x^3} + 3^{x^3}) > 9 \cdot 8^x + 4 \cdot 27^x \Leftrightarrow 2^{x^3} + 3^{x^3} > \frac{8^x}{4} + \frac{27^x}{9} \Leftrightarrow 2^{x^3} + 3^{x^3} > 2^{3x-2} + 3^{3x-2}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^3 \\ v = 3x - 2 \end{cases} \text{ khi đó } 2^{x^3} + 3^{x^3} > 2^{3x-2} + 3^{3x-2} \Leftrightarrow 2^u + 3^u > 2^v + 3^v$$

Xét hàm $f(t) = 2^t + 3^t$ trên $\mathbb{R}$, $f'(t) = 2^t \ln 2 + 3^t \ln 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Mà } f(u) > f(v) \Leftrightarrow u > v \Leftrightarrow x^3 > 3x - 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2; +\infty) \setminus \{1\}$$

Chọn B.

Ví dụ 5. Biết tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $4^{\sin^2 x} + 5^{\cos^2 x} \leq m \cdot 7^{\cos^2 x}$ có nghiệm là $m \in \left[\frac{a}{b}; +\infty\right)$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tổng $S = a + b$ là

A. $S = 13$.

B. $S = 15$.

C. $S = 9$.

D. $S = 11$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } 4^{\sin^2 x} + 5^{\cos^2 x} \leq m \cdot 7^{\cos^2 x} \Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{28}\right)^{\cos^2 x} + \left(\frac{5}{7}\right)^{\cos^2 x} \leq m.$$

$$\text{Xét } f(x) = 4\left(\frac{1}{28}\right)^{\cos^2 x} + \left(\frac{5}{7}\right)^{\cos^2 x} \text{ với } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Do } \begin{cases} \left(\frac{1}{28}\right)^{\cos^2 x} \geq \frac{1}{28} \\ \left(\frac{5}{7}\right)^{\cos^2 x} \geq \frac{5}{7} \end{cases} \text{ nên } f(x) \geq \frac{4}{28} + \frac{5}{7} \text{ hay } f(x) \geq \frac{6}{7}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$.

Vậy $\min_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{6}{7}$. Bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq \min_{\mathbb{R}} f(x)$

$$\Leftrightarrow m \geq \frac{6}{7} \text{ hay } m \in \left[\frac{6}{7}; +\infty\right) \Rightarrow S = 13.$$

Chọn A.

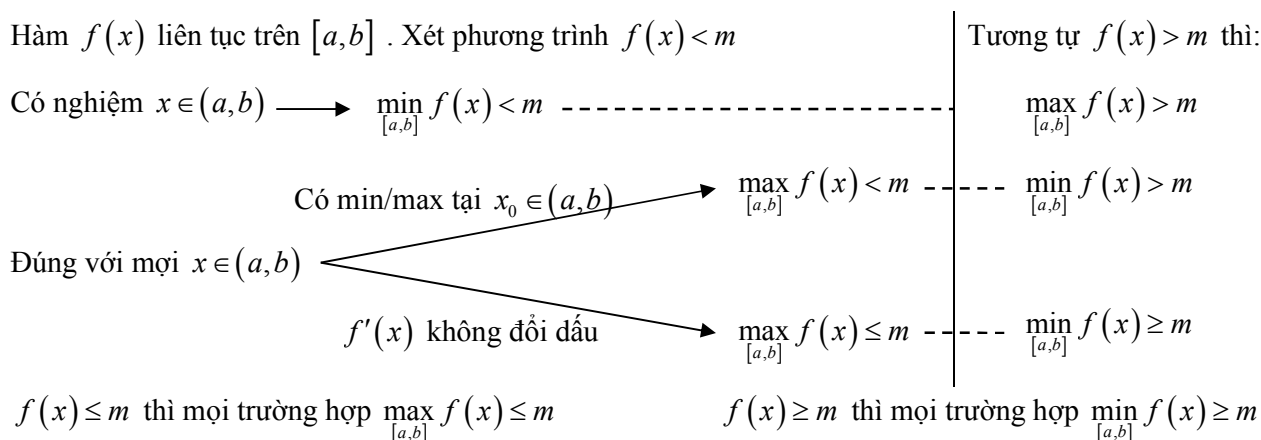
Bài toán 6. Bất phương trình chứa tham số

Phương pháp giải

- Đặt $t = a^x$ ($t > 0$)

- + Chuyển về bất phương trình ẩn t .
- + Sử dụng định lý Vi-ét và điều kiện có nghiệm và mối quan hệ giữa các nghiệm để giải quyết.
- Khi gặp dạng: Tìm tham số m để phương trình có nghiệm thuộc $(x_1; x_2)$ ta giải như sau:
 - + Đặt $t = a^x, t > 0, x \in (x_1; x_2) \Rightarrow t \in (a^{x_1}; a^{x_2})$
 - + Chuyển về phương trình ẩn t , cô lập m . Chuyển về dạng $f(t) \geq m; f(t) \leq m$,
 - + Xét hàm $f(t)$ tính đạo hàm, lập bảng biến thiên và đưa ra kết luận.

Chú ý:



Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $9^x - m \cdot 3^x - m + 3 > 0$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$?

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = 3^x, t > 0$, bất phương trình thành:

$$t^2 - mt - m + 3 > 0 \Leftrightarrow mt + m < t^2 + 3 \Leftrightarrow m(t+1) < t^2 + 3$$

Vì $t > 0$ nên $t+1 > 0$ do đó ta có $m < \frac{t^2 + 3}{t+1}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 + 3}{t+1}$ trên khoảng $(0; +\infty)$, ta có $f'(t) = \frac{t^2 + 2t - 3}{(t+1)^2}$.

$$\text{Cho } f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+

$f(t)$	3 2 $+\infty$
--------	--

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $m < 2$ thì bất phương trình nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó có một giá trị nguyên dương của tham số m thỏa đề.

Chọn C.

Ví dụ 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $m.9^x - (2m+1).6^x + m.4^x \leq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0;1)$?

A. 8.

B. Vô số.

C. 5.

D. 6.

Hướng dẫn giải

Ta có $m.9^x - (2m+1).6^x + m.4^x \leq 0 \Leftrightarrow m.\left(\frac{9}{4}\right)^x - (2m+1).\left(\frac{3}{2}\right)^x + m \leq 0$.

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ vì $x \in (0;1)$ nên $1 < t < \frac{3}{2}$.

Khi đó bất phương trình trở thành $m.t^2 - (2m+1).t + m \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{t}{(t-1)^2}$.

Đặt $f(t) = \frac{t}{(t-1)^2}$ với $1 < t < \frac{3}{2}$.

Ta có $f'(t) = \frac{-t-1}{(t-1)^3}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1$.

Bảng biến thiên

t	-1	1	$\frac{3}{2}$
$f'(t)$	0	-	-
$f(t)$			$+\infty$ 6

Dựa vào bảng biến thiên ta có $m \leq \lim_{t \rightarrow \frac{3}{2}} f(t) = 6$ thì bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in (0;1)$.

Chọn D.



Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Nghiệm của bất phương trình $3^{2x+1} > 3^{3-x}$ là

A. $x > \frac{3}{2}$.

B. $x < \frac{2}{3}$.

C. $x > -\frac{2}{3}$.

D. $x > \frac{2}{3}$.

Câu 2: Nghiệm của bất phương trình $(\sqrt{2})^{x-2} > 2^{x+3}$ là

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(-\infty; -8)$. D. $(6; +\infty)$.

Câu 3: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2+2x+1} \leq \left(\frac{5}{2}\right)^{x-5}$ là

- A. $x \leq -4$. B. $x \geq 1$. C. $\begin{cases} x \leq -4 \\ x \geq 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 4 \end{cases}$.

Câu 4: Tập hợp các số x thỏa mãn $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x}$ là

- A. $\left(-\infty; \frac{2}{5}\right]$. B. $\left[-\frac{2}{3}; +\infty\right)$. C. $\left[\frac{2}{5}; +\infty\right)$. D. $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$.

Câu 5: Nghiệm của bất phương trình $3 \cdot 9^{\frac{3x^2+2}{x}} > 729^x$ là

- A. $-4 < x < 0$. B. $x < -4$. C. $x > 0$. D. $\begin{cases} x < -4 \\ x > 0 \end{cases}$.

Câu 6: Nghiệm của bất phương trình $3^{2-\sqrt{x^2+5x-6}} \geq \frac{1}{3^x}$ là

- A. $x \leq 10$. B. $x \geq 1$. C. $1 \leq x \leq 10$. D. $\begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 10 \end{cases}$.

Câu 7: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{2}{5}\right)^{\sqrt{2-x}} > \left(\frac{2}{5}\right)^x$ là

- A. $(1; 2]$. B. $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(1; 2)$.

Câu 8: Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{2^{\sqrt{x^2-2x}}} - \frac{2^x}{2} \leq 0$ là

- A. $(-\infty; 0]$. B. $(-\infty; 1]$. C. $[2; +\infty)$. D. $[0; 2]$.

Câu 9: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{|x-2|} > 4^{|x+1|}$ là

- A. $(-4; 0)$. B. $(-2; 1)$. C. $(-\infty; -4)$. D. $(0; +\infty)$.

Câu 10: Nghiệm của bất phương trình $2^{3x} \cdot 3^x - 2^{3x-1} \cdot 3^{x+1} > -288$ là

- A. $x < 3$. B. $x > 3$. C. $x < 2$. D. $x > 2$.

Câu 11: Bất phương trình $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} \geq 448$ có nghiệm là

- A. $x \leq \frac{9}{2}$. B. $x \geq \frac{9}{2}$. C. $x \leq -\frac{9}{2}$. D. $x \geq -\frac{9}{2}$.

Câu 12: Bất phương trình $2^{x+2} + 5^{x+1} < 2^x + 5^{x+2}$ có nghiệm là

- A. $x > \log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{20}{3}\right)$. B. $x < \log_{\frac{2}{5}}\left(\frac{20}{3}\right)$. C. $x > \log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{3}{20}\right)$. D. $x < \log_{\frac{2}{5}}\left(\frac{3}{20}\right)$.

Câu 13: Tập nghiệm của bất phương trình $(\sqrt{5}-2)^{\frac{2x}{x-1}} \leq (\sqrt{5}+2)^x$ là

- A. $(-\infty; -1] \cup [0; 1]$. B. $[-1; 0]$. C. $(-\infty; -1) \cup [0; +\infty)$. D. $[-1; 0] \cup (1; +\infty)$.

Câu 14: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $(\sqrt{10}-3)^{\frac{3-x}{x-1}} > (\sqrt{10}+3)^{\frac{x+1}{x+3}}$ là

- A. 1. B. 3. C. 0. D. 2.

Câu 15: Bất phương trình $(2+\sqrt{3})^{\frac{x-3}{x-1}} < (2-\sqrt{3})^{\frac{x-1}{x-3}}$ có nghiệm là

- A. $\begin{cases} x < 1 \\ x > 3 \end{cases}$. B. $x > 1$. C. $x < 3$. D. $1 < x < 3$.

Câu 16: Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $(2+\sqrt{3})^{x^2} \leq (7-4\sqrt{3})^{x-4}$ bằng

- A. -7. B. 4. C. 5. D. 0.

Câu 17: Tập nghiệm của bất phương trình $4^x - 7 \cdot 2^x - 8 \geq 0$ là

- A. $(-\infty; -1] \cup [8; +\infty)$. B. $[0; 4]$. C. $(-\infty; 3]$. D. $[3; +\infty)$.

Câu 18: Bất phương trình $9^x - 3^x - 6 < 0$ có tập nghiệm là

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-\infty; 1)$. C. $(-1; 1)$. D. $(-\infty; -1)$.

Câu 19: Bất phương trình $4^x < 2^{x+1} + 3$ có tập nghiệm là

- A. $(1; 3)$. B. $(2; 4)$. C. $(\log_2 3; 5)$. D. $(-\infty; \log_2 3)$.

Câu 20: Tập nghiệm của bất phương trình $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 \leq 0$ là

- A. $[-1; 1]$. B. $[-1; 0)$. C. $(0; 1]$. D. $(-1; 1)$.

Câu 21: Tập nghiệm của bất phương trình $3^{2x+1} - 2 \cdot 3^x - 1 \geq 0$ trên tập số thực là

- A. $(-\infty; 0]$. B. $[0; +\infty)$. C. $(-\infty; 1]$. D. $[1; +\infty)$.

Câu 22: Cho bất phương trình $3^x - (\sqrt{3})^x < 0$. Tập nghiệm của bất phương trình là

- A. $(-\infty; 0)$. B. $(0; 1)$. C. $(-\infty; 1)$. D. $\emptyset$.

Câu 23: Đặt $t = 5^x$ thì bất phương trình $5^{2x} - 3 \cdot 5^{x+2} + 32 < 0$ trở thành bất phương trình nào sau đây?

- A. $t^2 - 75t + 32 < 0$. B. $t^2 - 6t + 32 < 0$. C. $t^2 - 3t + 32 < 0$. D. $t^2 - 16t + 32 < 0$.

Câu 24: Bất phương trình $4^{x+\sqrt{x-1}} - 5 \cdot 2^{x+\sqrt{x-1}+1} + 16 \geq 0$ có nghiệm là

- A. $\begin{cases} x = 1 \\ 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 1 \\ x \geq 2 \end{cases}$. C. $1 \leq x \leq 3$. D. $\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Câu 25: Tập nghiệm của bất phương trình $3^x - 3^{-x+2} + 8 > 0$ là

- A. $(-\infty; 0)$. B. $(0; +\infty)$. C. $(-\infty; 1)$. D. $(1; +\infty)$.

Câu 26: Bất phương trình $5^x - 5^{3-x} \leq 20$ có tập nghiệm là

- A. $(-\infty; 2]$. B. $(-\infty; 1]$. C. $(0; 2)$. D. $(2; +\infty)$.

Câu 27: Cho bất phương trình $2^x + 2^{3-x} \leq 9$. Tập nghiệm của bất phương trình là

- A. $[0; 3]$. B. $[0; 2]$. C. $[0; 4]$. D. $[0; 1]$.

Câu 28: Giải bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^x - 2\left(\frac{3}{2}\right)^x < 1$ ta được

- A. $x = \log_{\frac{2}{3}} 2$. B. $x < \log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3}$. C. $x < \log_{\frac{2}{3}} 2$. D. $x > \log_{\frac{2}{3}} 2$.

Câu 29: Tập nghiệm của bất phương trình $3^{3x-2} + \frac{1}{27^x} \leq \frac{2}{3}$ là

- A. $(0; 1)$. B. $(1; 2)$. C. $\left\{\frac{1}{3}\right\}$. D. $(2; 3)$.

Câu 30: Giải bất phương trình $2^{\frac{4x-1}{2x+1}} > 2^{\frac{2-2x}{2x+1}} + 1$ ta được

- A. $\begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ x > 1 \end{cases}$. B. $-\frac{1}{2} < x < 1$. C. $x > 1$. D. $x < -\frac{1}{2}$.

Câu 31: Cho bất phương trình $5.4^x + 2.25^x - 7.10^x \leq 0$. Tập nghiệm của bất phương trình là

- A. $[1; 2]$. B. $[0; 1]$. C. $[-2; -1]$. D. $[-1; 0]$.

Câu 32: Nghiệm của bất phương trình $8^x + 18^x - 2.27^x > 0$ là

- A. $x < 0$. B. $x > 0$. C. $x < 1$. D. $x > 1$.

Câu 33: Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x+1} - 2^{2x+1} - 12^{\frac{x}{2}} < 0$ là

- A. $(0; +\infty)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-\infty; 0)$. D. $(-\infty; 1)$.

Câu 34: Cho bất phương trình $5.4^x + 2.25^x - 7.10^x \leq 0$. Tập nghiệm của bất phương trình là

- A. $[1; 2]$. B. $[0; 1]$. C. $[-2; -1]$. D. $[-1; 0]$.

Câu 35: Tập nghiệm của bất phương trình $3.4^x - 5.6^x + 2.9^x < 0$ là

- A. $(-\infty; 0)$. B. $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$. C. $\left(0; \frac{2}{3}\right)$. D. $(0; 1)$.

Câu 36: Bất phương trình $2.5^{x+2} + 5.2^{x+2} \leq 133.\sqrt{10^x}$ có tập nghiệm là $S = [a; b]$ thì $b - 2a$ bằng

- A. 6. B. 10. C. 12. D. 16.

Câu 37: Bất phương trình $25^{-x^2+2x+1} + 9^{-x^2+2x+1} \geq 34.15^{-x^2+2x}$ có tập nghiệm là

- A. $S = (-\infty; 1 - \sqrt{3}] \cup [0; 2] \cup [1 + \sqrt{3}; +\infty)$. B. $S = (0; +\infty)$.
C. $S = (2; +\infty)$. D. $S = (1 - \sqrt{3}; 0)$.

Câu 38: Bất phương trình $64.9^x - 84.12^x + 27.16^x < 0$ có nghiệm là

- A. $\frac{9}{16} < x < \frac{3}{4}$. B. $1 < x < 2$. C. $\begin{cases} x < 1 \\ x > 2 \end{cases}$. D. Vô nghiệm.

Câu 39: Bất phương trình $5 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^x - 7 \cdot 10^x \leq 0$ có nghiệm là

- A. $0 \leq x \leq 1$. B. $1 \leq x \leq 2$. C. $-2 \leq x \leq -1$. D. $-1 \leq x \leq 0$.

Câu 40: Nghiệm của bất phương trình $(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x \leq 14$ là

- A. $-1 \leq x \leq 1$. B. $-2 \leq x \leq 2$. C. $\begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 2 \end{cases}$.

Câu 41: Giải bất phương trình $(3 - \sqrt{5})^{2x-x^2} + (3 + \sqrt{5})^{2x-x^2} - 2^{1+2x-x^2} \leq 0$ ta được

- A. $\begin{cases} x < 0 \\ x > 2 \end{cases}$. B. $x > 2$. C. $\{0; 2\}$. D. $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}; 1\right) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

Câu 42: Tổng của tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $\frac{1}{3^x+5} \leq \frac{1}{3^{x+1}-1}$ là

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 43: Nghiệm của bất phương trình $\frac{4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8}{2^{x+1} - 1} \geq 0$ là

- A. $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{cases}$. B. $\begin{cases} -1 < x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{cases}$. C. $\begin{cases} \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ x \geq 4 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x < 1 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$.

Câu 44: Cho bất phương trình $\frac{1}{5^{x+1}-1} \geq \frac{1}{5-5^x}$. Tìm tập nghiệm của bất phương trình.

- A. $S = (-1; 0] \cup (1; +\infty)$. B. $S = (-1; 0] \cap [1; +\infty)$.
C. $S = (-\infty; 0]$. D. $S = (-\infty; 0)$.

Câu 45: Cho bất phương trình $8^x + 2^x > 27^{x+1} + 3^{x+1}$. Tập nghiệm của bất phương trình là

- A. $(-\infty; \log_2 3)$. B. $\left(-\infty; \log_{\frac{2}{3}} 3\right)$. C. $(\log_3 2; +\infty)$. D. $(-\infty; 0)$.

Câu 46: Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-3x+2} \leq 5^{1-x}$ là

- A. $[2 - \log_3 5; 1]$. B. $(2 - \log_3 5; 1)$.
C. $(-\infty; 2 - \log_3 5) \cup [1; +\infty)$. D. $(-\infty; 2 - \log_3 5) \cup (1; +\infty)$.

Câu 47: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x-1} > 5^{2x^2-5x+2}$ là

- A. $\left(\frac{1}{2}; 2 + \log_5 2\right)$. B. $\left(\frac{1}{2}; \frac{2 + \log_5 2}{2}\right)$.
C. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2 + \log_5 2; +\infty)$. D. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (2 + \log_2 5; +\infty)$.

Câu 48: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{4-x^2} \leq 3^{x-2}$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 49: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x-3} \geq 3^{x^2-5x+6}$

- A. $[0; 2]$. B. $(-\infty; 2]$. C. $[2 + \log_3 2; 3]$. D. $(0; +\infty)$.

Câu 50: Cho hàm số $y = 4^x \cdot 3^{x^2}$, khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $f(x) > 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x \log_3 2 > 1$. B. $f(x) > 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x \ln 2 > \ln 3$.
C. $f(x) > 3 \Leftrightarrow x^2 \log 3 + 2x \log 2 > \log 3$. D. $f(x) > 3 \Leftrightarrow x^2 + x \log_3 4 > 1$.

Câu 51: Cho hàm số $f(x) = 5^x \cdot 7^{x^5+1}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $f(x) > 1 \Leftrightarrow x + x^5 \log_5 7 + \log_5 7 > 0$. B. $f(x) > 1 \Leftrightarrow x \ln 5 + x^5 \ln 7 + \ln 7 > 0$.
C. $f(x) > 1 \Leftrightarrow x \log_7 5 + x^5 > -1$. D. $f(x) > 1 \Leftrightarrow 1 + x^4 \log_5 7 > -\log_5 7$.

Câu 52: Bất phương trình $2^x \cdot 5^{\frac{2x}{x+1}} < 10$ với $x > -1$ có tập nghiệm là $(a; b)$. Khi đó $b - a$ bằng

- A. $-\log_2^5$. B. $2 + \log_2 5$. C. 1. D. 2.

Câu 53: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $3^x \cdot 5^{x^2} < 1$ là

- A. $(-\log_5 3; 0]$. B. $[\log_3 5; 0)$. C. $(-\log_5 3; 0)$. D. $(\log_3 5; 0)$.

Câu 54: Tập nghiệm của bất phương trình $2^x > 1 - x$ là

- A. $(-\infty; 0)$. B. $\emptyset$. C. $(0; +\infty)$. D. $\mathbb{R}$.

Câu 55: Tập nghiệm của bất phương trình $2^x + 3^{x+1} \leq 13 - 2x$ là

- A. $(-\infty; -1]$. B. $(-\infty; e) \cup (e^2; +\infty)$. C. $[1; +\infty)$. D. $(-\infty; 1]$.

Câu 56: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $2^{4-x} - x + 1 \geq 0$.

- A. $S = (-\infty; 1]$. B. $S = (-\infty; 3)$. C. $(-\infty; 3]$. D. $[3; +\infty)$.

Câu 57: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq x + 4$ là

- A. $(-\infty; -1]$. B. $[-1; +\infty)$. C. $[1; +\infty)$. D. $(-\infty; 1)$.

Câu 58: Tập nghiệm của bất phương trình $3^x \leq 5 - 2x$ là

- A. $\mathbb{R}$. B. $(-\infty; 1]$. C. $(-\infty; -1]$. D. $[1; +\infty)$.

Câu 59: Tập nghiệm của bất phương trình $4^x + 3^x \geq 5^x$ là

- A. $\mathbb{R}$. B. $(-\infty; 2]$. C. $(-\infty; 0]$. D. $[2; +\infty)$.

Câu 60: Nghiệm của bất phương trình $5^x + 3^x > 8^x$ là

- A. $x < 1$. B. $x > 2$. C. $x < 2$. D. $x > 1$.

Câu 61: Số nghiệm nguyên dương của bất phương trình $2^x \leq 3^{\frac{x}{2}} + 1$ là

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Câu 62: Tập nghiệm của bất phương trình $3 \cdot 2^x + 7 \cdot 5^x > 49 \cdot 10^x - 2$

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-1; 0)$. C. $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$. D. $(1; +\infty)$.

Câu 63: Cho bất phương trình $\frac{3^{2-x} + 3 - 2x}{4^x - 2} \geq 0$. Tập nghiệm của bất phương trình là

- A. $(-\infty; \frac{1}{2})$. B. $[\frac{1}{2}; 2]$. C. $(2; +\infty)$. D. $(\frac{1}{2}; 2]$.

Câu 64: Với giá trị nào của m thì bất phương trình $9^x - 2(m+1)3^x - 3 - 2m > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$?

- A. $m \neq -2$. B. $m \leq -\frac{3}{2}$.
C. $m \in (-5 - 2\sqrt{3}; -5 + 2\sqrt{3})$. D. không tồn tại m .

Câu 65: Tất cả các giá trị của m để bất phương trình $(3m+1)12^x + (2-m)6^x + 3^x < 0$ nghiệm đúng $\forall x > 0$ là

- A. $(-2; +\infty)$. B. $(-\infty; -2]$. C. $(-\infty; -\frac{1}{3})$. D. $(-2; -\frac{1}{3})$.

Câu 66: Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $9^x - m \cdot 3^x - m + 3 > 0$ nghiệm đúng với mọi x ?

- A. $m > 2$. B. $m > 2$ hoặc $m < -6$.
C. $m < 2$. D. $-6 < m < 2$.

Câu 67: Với giá trị nào của tham số m thì bất phương trình $2^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} \geq m \cdot 3^{\sin^2 x}$ có nghiệm?

- A. $m \geq 4$. B. $m \leq 4$. C. $m \leq 1$. D. $m \geq 1$.

Câu 68: Với điều kiện nào của tham số m thì bất phương trình $\sqrt{2^x + 7} + \sqrt{2^x - 2} \leq m$ có nghiệm?

- A. $0 \leq m \leq 3$. B. $3 \leq m \leq 5$. C. $m \leq 3$. D. $m \geq 3$.

III. ĐÁP ÁN BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Phương trình mũ

1- B	2- C	3- B	4- A	5- B	6- D	7- A	8- A	9- C	10- B
11- C	12- C	13- C	14- D	15- A	16- D	17- D	18- A	19- B	20- A
21- A	22- A	23- D	24- D	25- B	26- A	27- D	28- A	29- B	30- B
31- C	32- D	33- A	34- A	35- A	36- B	37- C	38- C	39- D	40- A
41- D	42- D	43- C	44- D						

Dạng 2. Bất phương trình mũ

1- D	2- C	3- C	4- B	5- D	6- C	7- A	8- C	9- A	10- C
11- B	12- C	13- D	14- B	15- D	16- A	17- D	18- B	19- D	20- A
21- B	22- A	23- A	24- B	25- B	26- A	27- A	28- D	29- C	30- A
31- B	32- A	33- A	34- B	35- D	36- B	37- A	38- B	39- A	40- B
41- C	42- D	43- B	44- A	45- B	46- A	47- A	48- D	49- C	50- B
51- D	52- D	53- C	54- C	55- D	56- C	57- B	58- B	59- B	60- A
61- B	62- A	63- D	64- B	65- B	66- C	67- B	68- D		