SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ TĨNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 1 trang, gồm 5 câu)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 12 THPT
NĂM HỌC 2017 - 2018

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút.

Câu 1. *(5.0 điểm)*

a. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng d: $y=-2x+m$. Chứng minh rằng d cắt (C) tại hai điểm A, B phân biệt với mọi số thực m. Gọi $k_1,\ k_2$ lần lượt là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại A và B. Tìm m để $k_1+k_2=4$.

b. Cho khai triển $(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n,\ n\in\mathbb{N},\ n\ge 1$. Hỏi có bao nhiêu giá trị $n\le 2017$ sao cho tồn tại k thỏa mãn $\dfrac{a_k}{a_{k+1}}=\dfrac{7}{15}$.

Câu 2. *(4.5 điểm)*

a. Tìm các giá trị của m để phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2>1$

$$2\log_{9+4\sqrt{5}}(2x^2-x-4m^2+2m)+\log_{\sqrt{\sqrt{5}-2}}\sqrt{x^2+mx-2m^2}=0.$$

b. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)=\sqrt{x}\\ 2x^3(y^2+1)-(x+1)xy=2\end{cases}$.

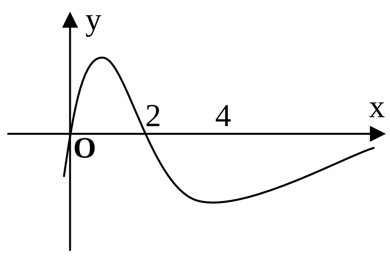
Câu 3. *(4.0 điểm)*

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, $AB=AC=a$; tam giác SBD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của cạnh SC, mặt phẳng (ABM) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện.

a. Tính thể tích của khối đa diện không chứa điểm S.

b. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng *SA và BM*.

Câu 4. *(4.0 điểm)*



a. Giả sử hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm số $y=f'(x)$; đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên và $f(0)+f(1)-2f(2)=f(4)-f(3)$.
Hỏi trong các giá trị $f(0);f(1);f(4)$ giá trị nào là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[0;4]$?.

b. Cho hàm số $f(x)=\left|2x^3-9x^2+12x+m\right|$. Tìm tất cả các số thực m sao cho với mọi số thực $a,b,c\in[1;3]$ thì $f(a);f(b);f(c)$ là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Câu 5. *(2.5 điểm)*

Một công ty sữa muốn thiết kế hộp đựng sữa với thể tích hộp là $1\,dm^3$, hộp được thiết kế bởi một trong hai mẫu sau với cùng một loại vật liệu: mẫu 1 là hình hộp chữ nhật; mẫu 2 là hình trụ. Biết rằng chi phí làm mặt hình tròn cao hơn 1,2 lần chi phí làm mặt hình chữ nhật với cùng diện tích. Hỏi thiết kế hộp theo mẫu nào sẽ tiết kiệm chi phí hơn? (xem diện tích các phần nối giữa các mặt là không đáng kể).

------------------------------------HẾT ----------------------------------

- *Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*
- *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

Họ và tên thí sinh: ....Số báo danh:..

Câu	**NỘI DUNG**

1a

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và *d*:

$$\frac{2x+3}{x+2}=-2x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -2 \\ 2x^2+(6-m)x+3-2m=0(*) \end{cases}$$

Phương trình (*) có $\Delta=(6-m)^2-8(3-2m)=m^2+4m+12>0,\forall m\in\mathbb{R}$ và $x=-2$ không là nghiệm của (*) nên đường thẳng *d* luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi *m*.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại A, tại B lần lượt là

$k_1=\frac{1}{(x_1+2)^2}, k_2=\frac{1}{(x_2+2)^2}$, trong đó x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (*)

Ta có $k_1+k_2\geq 2\sqrt{k_1k_2}=2\sqrt{\frac{1}{\left(x_1+2\right)^2\left(x_2+2\right)^2}}=2\sqrt{\frac{1}{\left(x_1x_2+2x_1+2x_2+4\right)^2}}=4$

Có "=" $\Leftrightarrow k_1=k_2 \Leftrightarrow \frac{1}{(x_1+2)^2}=\frac{1}{(x_2+2)^2}\Leftrightarrow (x_1+2)^2=(x_2+2)^2$

$\Leftrightarrow (x_1+2)=-(x_2+2)$ (do $x_1\neq x_2$) $\Leftrightarrow x_1+x_2=-4\Leftrightarrow \frac{m-6}{2}=-4\Leftrightarrow m=-2$

1b.

Theo giả thiết $\frac{C_n^k}{C_n^{k+1}}=\frac{7}{15}\Leftrightarrow \frac{(k+1)!(n-k-1)!}{k!(n-k)!}=\frac{7}{15}$ với $k,n\in\mathbb{N}, n\geq 1, k\leq n-1$

$\Leftrightarrow \frac{k+1}{n-k}=\frac{7}{15}\Leftrightarrow 7n=22k+15$

$\Leftrightarrow n=3k+2+\frac{k+1}{7}$

Vì $n,k\in\mathbb{N},\ n\geq 1\Rightarrow \frac{k+1}{7}\in\mathbb{N}^*$. Đặt $\frac{k+1}{7}=m\in\mathbb{N}\Rightarrow k=7m-1\Rightarrow n=22m-1$

Vì $n\in\mathbb{N}^*, n\leq 2017\Rightarrow 1\leq 22m-1\leq 2017\Rightarrow 1\leq m\leq 91$

Do đó có 91 giá trị của n thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2a

$2\log_{9+4\sqrt{5}}(2x^2-x-4m^2+2m)+\log_{\sqrt{\sqrt{5}-2}}\sqrt{x^2+mx-2m^2}=0$ (1)

Đk: $\begin{cases} 2x^2-x-4m^2+2m>0 \\ x^2+mx-2m^2>0 \end{cases}$

Ta thấy $9+4\sqrt{5}=\left(2+\sqrt{5}\right)^2$ và $\sqrt{\sqrt{5}-2}=(\sqrt{5}-2)^{\frac{1}{2}}=(\sqrt{5}+2)^{\frac{-1}{2}}$ nên phương trình

(1) $\Leftrightarrow \log_{\sqrt{5}+2}(2x^2-x-4m^2+2m)-\log_{\sqrt{5}+2}(x^2+mx-2m^2)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-x-4m^2+2m=x^2+mx-2m^2 \\ x^2+mx-2m^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-(m+1)x-2m^2+2m=0 & (2) \\ x^2+mx-2m^2>0 & (3) \end{cases}$$

PT (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn (3)

PT (2) có $\Delta=(m+1)^2+4(2m^2-2m)=(3m-1)^2>0\Leftrightarrow m\neq\frac{1}{3}$ (4)

Lúc đó $(2)\Leftrightarrow x=2m;\ x=-m+1$

Hai nghiệm thỏa mãn (3)

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(2m)^2+m.2m-2m^2>0\\(-m+1)^2+m(-m+1)-2m^2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4m^2>0\\-2m^2-m+1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 0\\-1<m<\dfrac{1}{2}\end{cases} \ (5)$$

$$x_1^2+x_2^2>1 \Leftrightarrow 4m^2+(1-m)^2>1 \Leftrightarrow 5m^2-2m>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m<0\\m>\dfrac{2}{5}\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện (4) và (5) ta có $-1<m<0;\ \dfrac{2}{5}<m<\dfrac{1}{2}$

2b

$$\begin{cases}\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)=\sqrt{x} & (1)\\2x^3(y^2+1)-(x+1)xy=2 & (2)\end{cases}$$

ĐK: $x\geq 0$

Ta thấy $x=0$ không thỏa mãn hệ.

Với $x>0$ ta có $(1)\Leftrightarrow x\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)=\left(\sqrt{x+1}+1\right)\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{y^2+1}+y=\sqrt{\dfrac{1}{x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (3)

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+1},\ t\in\mathbb{R}$

ta có $f'(t)=1+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}=\dfrac{t+\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t^2+1}}>\dfrac{t+|t|}{\sqrt{t^2+1}}\geq 0,\ \forall t\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

PT (3) $\Leftrightarrow f(y)=f(\dfrac{1}{\sqrt{x}})\Rightarrow y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Thay vào PT (2) ta có $2x^3(\dfrac{1}{x}+1)-(x+1)\sqrt{x}=2 \Leftrightarrow 2x^3+2x^2-x\sqrt{x}-\sqrt{x}=2$ (*)

Đặt $t=\sqrt{x}\,(t>0)$

ta có PT $2t^6+2t^4-t^3-t-2=0 \Leftrightarrow (t-1)(2t^5+2t^4+4t^3+3t^2+3t+2)=0 \Leftrightarrow t=1$

Với $t=1\Rightarrow x=1\Rightarrow y=1$. Vậy hệ có nghiệm (1;1)

3a

Gọi O là giao điểm của AC và BD, từ giả thiết ta có

$$SO\perp(ABCD); BD=SB=SD=a\sqrt{3}\Rightarrow SO=\frac{a\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2}=\frac{3a}{2}$$

$$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.SO.\frac{1}{2}.AC.BD=\frac{1}{3}.\frac{3a}{2}.\frac{a.a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$

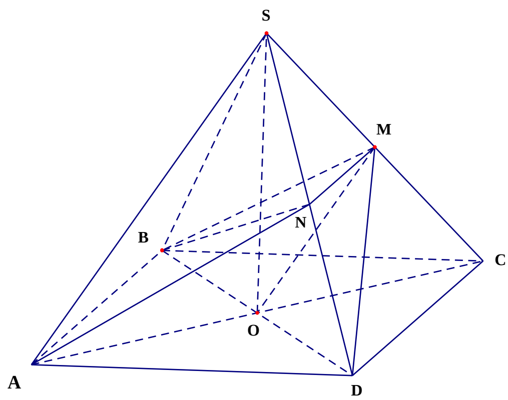
Gọi N là giao điểm của (ABM) và SD.

Ta có N là trung điểm của SD.

Sử dụng tỉ số thể tích ta có

$$\frac{V_{S.BMN}}{V_{S.BCD}}=\frac{SB}{SB}.\frac{SM}{SC}.\frac{SN}{SD}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{V_{S.ABN}}{V_{S.ABD}}=\frac{SA}{SA}.\frac{SB}{SB}.\frac{SN}{SD}=\frac{1}{2}$$



do đó $\dfrac{V_{S.MBN}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{1}{8};\ \dfrac{V_{S.ABN}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow\dfrac{V_{S.ABMN}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{3}{8}$ suy ra thể tích của khối đa diện không chứa S bằng $\frac{5}{8}V_{S.ABCD}=\frac{5}{8}.\frac{a^3\sqrt{3}}{4}=\frac{5a^3\sqrt{3}}{32}$

Ta có $MO//SA \Rightarrow SA//(MBD)$ do đó

3b $d(SA;MB)=d(SA;(MBD))=d(A;(MBD))=d(C;(MBD))$

Xét hình chóp $M.BCD$ có $V_{M.BCD}=\frac{1}{2}V_{S.BCD}=\frac{1}{4}V_{S.ABCD}=\frac{1}{4}.\frac{a^3\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$

Tam giác MBD là tam giác cân tại M có MO là đường cao. Mặt khác trong tam giác vuông SOC có $MO=\frac{1}{2}SC=\frac{1}{2}\sqrt{SO^2+OC^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{10}}{4}$

suy ra $S_{MBD}=\frac{1}{2}BD.MO=\frac{1}{2}a\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{10}}{4}=\frac{a^2\sqrt{30}}{8}$

$d(C;(MBD))=\frac{3V_{C.MBD}}{S_{MBD}}=\frac{3a^3\sqrt{3}.8}{16.a^2\sqrt{30}}=\frac{3a\sqrt{10}}{20}$

4a Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta có BBT của hàm số $y=f(x)$ như hình bên. Dựa vào BBT ta thấy trên đoạn [0;4] giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ là $f(2)$; giá trị nhỏ nhất chỉ có thể là $f(0)$ hoặc $f(4)$.

x					
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x$	↘		↗		↘

Cũng từ BBT ta có $f(1), f(3)<f(2) \Rightarrow f(1)+f(3)<2f(2)$

Mặt khác $f(0)-f(4)=2f(2)-f(1)-f(3)>0 \Rightarrow f(0)>f(4)$

Vậy GTNN của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn [0;4] là $f(4)$

4b Vì hàm số $f(x)=\left|2x^3-9x^2+12x+m\right|$ liên tục trên [1;3] nên có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên [1;3].

yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \min\limits_{[1;3]} f(x)+\min\limits_{[1;3]} f(x)>\max\limits_{[1;3]} f(x)$ (1)

và $\min\limits_{[1;3]} f(x)>0$

Đặt $g(x)=2x^3-9x^2+12x+m$

Ta có $g'(x)=6x^2-18x+12=0 \Leftrightarrow x=1; x=2$;

$g(1)=5+m;\ g(2)=4+m;\ g(3)=9+m$

Ta thấy $m+4<m+5<m+9 \Rightarrow m+4\le g(x)\le m+9$

Do đó $\max\limits_{[1;3]} f(x)=max\left\{|m+4|;|m+9|\right\}$;

$$\min_{[1;3]} f(x)=\begin{cases}0 & \text{khi } (m+4)(m+9)\le 0\\ min\left\{|m+4|;|m+9|\right\} & \text{khi } (m+4)(m+9)>0\end{cases}$$

$$\min_{[1;3]} f(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>-4\\ m<-9\end{array}\right.$$

Nếu $m<-9 \Rightarrow \min\limits_{[1;3]} f(x)=|m+9|=-9-m;\ \max\limits_{[1;3]} f(x)=|m+4|=-4-m$

khi đó $(1)\Leftrightarrow 2(-m-9)>-m-4 \Leftrightarrow m<-14$ (thỏa mãn)

Nếu $m>-4 \Rightarrow \min\limits_{[1;3]} f(x)=|m+4|=m+4;\ \max\limits_{[1;3]} f(x)=|m+9|=m+9$

khi đó $(1)\Leftrightarrow 2(m+4)>m+9 \Leftrightarrow m>1$ (thỏa mãn)

ĐS: $m > 1;\ m < -14$

5 Gọi t là chi phí làm $1dm^2$ mặt hình chữ nhật suy ra chi phí làm $1dm^2$ mặt hình tròn là 1,2t

- Nếu sản suất theo mẫu 1: Hình hộp chữ nhật.

Gọi $a, b, c\,(dm)$ kích thước của hình hộp chữ nhật. Khi đó $V = abc = 1dm^3$

Suy ra chi phí theo mẫu 1 là

$$T_1 = S_{tp}.t = 2(ab + bc + ca)t \geq 6\sqrt[3]{(abc)^2}\ t = 6t.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1dm$

- Nếu sản suất theo mẫu 2: Hình trụ.

Gọi $r(dm)$ là bán kính đáy và $h(dm)$ là chiều cao. Khi đó

$$V = \pi h.r^2 = 1dm^3 \Rightarrow h = \frac{1}{\pi r^2}.$$

Suy ra chi phí theo mẫu 2 là

$$T_2 = 2\pi r^2 1,2t + 2\pi r.h.t = (2,4\pi r^2 + \frac{2}{r})t = \left(2,4\pi r^2 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right)t \geq 3\sqrt[3]{2,4\pi}.t$$

Đẳng thức xảy ra khi $r = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2,4\pi}}, h = \sqrt[3]{\dfrac{2,4^2}{\pi}}$

Ta thấy $\dfrac{\min T_1}{\min T_2} = \dfrac{6t}{3.\sqrt[3]{2,4\pi}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{2,4\pi}} = \sqrt[3]{\dfrac{8}{2,4\pi}} > 1$

suy ra sản xuất hộp theo mẫu thứ 2 sẽ tiết kiệm chi phí hơn.