

Câu 1: (3,0 điểm)

Giải các phương trình sau:

a) $\cos 2x - 5 \sin x + \sqrt{3} \sin 2x - 5\sqrt{3} \cos x + 8 = 0$.

b) $(x-3)\sqrt{1+x} - x\sqrt{4-x} = 2x^2 - 6x - 3$.

Câu 2: (3,0 điểm)

a) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	1	8	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Tìm các điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 - 3x}{x + m}$ đồng biến trên $[1; +\infty)$.

Câu 3: (3,0 điểm)

Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(1; 2)$, đường trung tuyến và đường phân giác trong hạ từ đỉnh B lần lượt có phương trình $d: 2x - 3y = 2$, $d_1: 9x - 3y = 16$. Tìm tọa độ đỉnh C của tam giác ABC .

Câu 4: (3,0 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , cạnh a . Biết $SA = SB = SC = a$. Đặt $SD = x$ ($0 < x < a\sqrt{3}$).

a) Tính số đo góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ khi $x = a$.

b) Tính x theo a sao cho tích $AC \cdot SD$ lớn nhất.

Câu 5: (3,0 điểm)

a. Cho đa giác đều có 24 đỉnh, chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh của (H) . Tính xác suất để 4 đỉnh chọn được tạo thành một hình chữ nhật nhưng không phải là hình vuông.

b. Cho $P(x) = (1 + 4x + 3x^2)^{13}$. Xác định hệ số của x^3 trong khai triển $P(x)$ theo lũy thừa của x .

Câu 6: (3,0 điểm)

Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \sqrt{3u_n^2 + 2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

b) Tính tổng $S = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_{2020}^2$.

Câu 7: (2,0 điểm)

Cho hai số thực thay đổi x, y với $x > 0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{xy^2}{(x^2 + 3y^2)(x + \sqrt{x^2 + 12y^2})}.$$

_____ **HẾT** _____

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Giải các phương trình sau:

- a) $\cos 2x - 5\sin x + \sqrt{3}\sin 2x - 5\sqrt{3}\cos x + 8 = 0$.
b) $(x-3)\sqrt{1+x} - x\sqrt{4-x} = 2x^2 - 6x - 3$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } & \cos 2x - 5\sin x + \sqrt{3}\sin 2x - 5\sqrt{3}\cos x + 8 = 0 \\ & \Leftrightarrow -5(\sin x + \sqrt{3}\cos x) + \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x + 8 = 0 \\ & \Leftrightarrow -5\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + 4 = 0 \\ & \Leftrightarrow -5\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 4 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = x + \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x + \frac{\pi}{6} = 2t - \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Phương trình trở thành } -5\sin t + \sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) + 4 = 0.$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow -5\sin t - \cos 2t + 4 = 0 \\ & \Leftrightarrow 2\sin^2 t - 5\sin t + 3 = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = 1 \\ \sin t = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

$$\text{b) } (x-3)\sqrt{1+x} - x\sqrt{4-x} = 2x^2 - 6x - 3.$$

$$\text{Điều kiện: } -1 \leq x \leq 4.$$

$$PT \Leftrightarrow (x-3)(\sqrt{1+x}-1) + x(1-\sqrt{4-x}) = 2x^2 - 6x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x-3)}{\sqrt{1+x}+1} + \frac{x(x-3)}{1+\sqrt{4-x}} = 2x(x-3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-3) = 0 & (1) \\ \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} + \frac{1}{1+\sqrt{4-x}} = 2 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Xét phương trình (2): Ta có } \begin{cases} \sqrt{1+x}+1 \geq 1 \\ 1+\sqrt{4-x} \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} + \frac{1}{1+\sqrt{4-x}} \leq 2.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases} \text{ (vô lí). Vậy phương trình (2) vô nghiệm.}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 3$.

Câu 2:

a) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	1	8	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Tìm các điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } g'(x) = (2x-2)f'(x^2-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2-2x=-3 \\ x^2-2x=-1 \\ x^2-2x=1 \\ x^2-2x=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=1 \text{ (BC)} \\ x=1 \pm \sqrt{2} \text{ (BC)} \\ x=-2; x=4 \end{cases}.$$

Vậy các điểm cực trị của hàm số $g(x)$ lần lượt là $x = -2$; $x = 1$; $x = 4$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 - 3x}{x + m}$ đồng biến trên $[1; +\infty)$.

Lời giải

ĐK: $x \neq -m$.

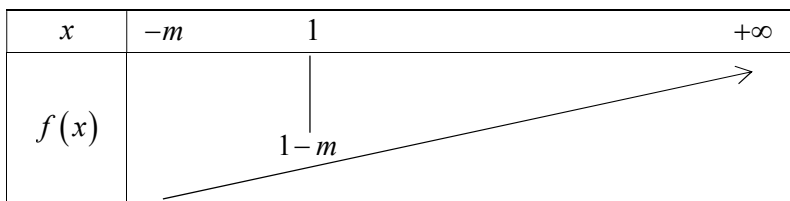
$$\text{Ta có: } y' = \frac{x^2 + 2mx - 3m}{(x + m)^2}.$$

$$\text{Hàm số đồng biến trên } [1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} y' \geq 0, \forall x \in [1; +\infty) \\ -m \notin [1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2mx - 3m \geq 0, \forall x \in [1; +\infty) (*) \\ m > -1 \end{cases}.$$

$$(*) \Leftrightarrow \min_{[1; +\infty)} f(x) \geq 0 \text{ với } f(x) = x^2 + 2mx - 3m.$$

Đồ thị của hàm số $f(x)$ là parabol có tọa độ đỉnh $I(-m; -m^2 - 3m)$.

BBT:

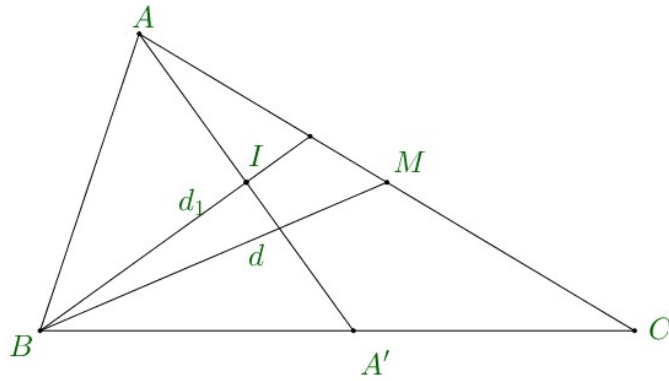


Dựa vào BBT, suy ra $\min_{[1; +\infty)} f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$.

Vậy $-1 < m \leq 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3: Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(1; 2)$, đường trung tuyến và đường phân giác trong hạ từ đỉnh B lần lượt có phương trình $d: 2x - 3y = 2$, $d_1: 9x - 3y = 16$. Tìm tọa độ đỉnh C của tam giác ABC .

Lời giải



Ta có $d \cap d_1 = B$ nên tọa độ điểm B thỏa hệ phương trình $\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 9x - 3y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$.

Do đó $B\left(2; \frac{2}{3}\right)$.

Gọi $A'(a; b)$ là điểm đối xứng với A qua $d_1 \Rightarrow A' \in BC$.

Khi đó trung điểm của AA' là $I\left(\frac{1+a}{2}; \frac{2+b}{2}\right) \in d_1$ và $\overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{u_{d_1}}$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} 9\left(\frac{1+a}{2}\right) - 3\left(\frac{2+b}{2}\right) = 16 \\ a - 1 + 3(b - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{18}{5} \\ b = \frac{17}{5} \end{cases} \Rightarrow A'\left(\frac{18}{5}; \frac{17}{5}\right).$$

Đường thẳng BC đi qua điểm $B\left(2; \frac{2}{3}\right)$ nhận vector $\overrightarrow{A'B} = \left(\frac{-8}{5}; \frac{-41}{15}\right)$ làm vector pháp tuyến nên

có phương trình: $72x + 123y - 226 = 0$.

Gọi M là trung điểm của đoạn AC .

$$\text{Do } C \in BC \Rightarrow C\left(t; \frac{226 - 72t}{123}\right) \Rightarrow M\left(\frac{t+1}{2}; \frac{472 - 72t}{123}\right).$$

$$M \in d \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{t+1}{2} - 3 \cdot \frac{472 - 72t}{123} = 2 \Leftrightarrow t = \frac{513}{113} \text{ suy ra } C\left(\frac{513}{113}; \frac{-278}{339}\right).$$

Câu 4:

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , cạnh a . Biết $SA = SB = SC = a$.

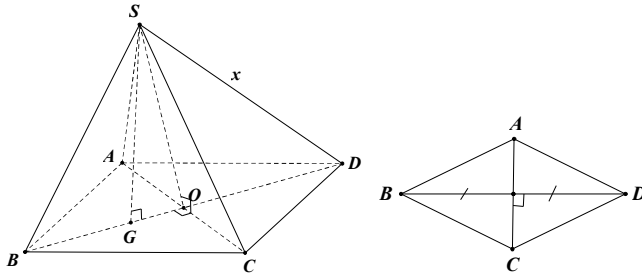
Đặt $SD = x$ ($0 < x < a\sqrt{3}$).

a) Tính số đo góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ khi $x = a$.

b) Tính x theo a sao cho tích $AC \cdot SD$ lớn nhất.

Lời giải

Cách 1:



a) Tính số đo góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ khi $x = a$.

Gọi O là hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$.

Ta có: $SA = SB = SC = SD = a \Rightarrow OA = OB = OC = OD \Rightarrow ABCD$ là hình vuông.

Xét tam giác vuông:

$$\cos \widehat{SBC} = \frac{BO}{SB} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{SBC} = 45^\circ.$$

b) Tính x theo a sao cho tích $AC \cdot SD$ lớn nhất.

Gọi G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Do $SA = SB = SC \Rightarrow SG \perp (ABCD)$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SG \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SO.$$

$\Delta SOC = \Delta BOC$ (do $SC = BC = a$, OC chung).

$SO = OB = OD \Rightarrow \Delta BSD$ vuông tại S .

$$BD^2 = a^2 + x^2 \Rightarrow OD = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{2}.$$

$$OA^2 = AD^2 - OD^2 = a^2 - \frac{a^2 + x^2}{4} = \frac{3a^2 - x^2}{4}.$$

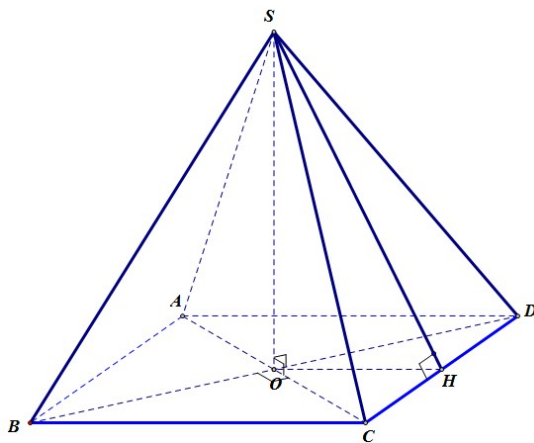
$$\Rightarrow OA = \frac{\sqrt{3a^2 - x^2}}{2} \Rightarrow AC = \sqrt{3a^2 - x^2}.$$

$$\text{Xét } AC \cdot SD = x \cdot \sqrt{3a^2 - x^2} \leq \frac{x^2 + 3a^2 - x^2}{2} = \frac{3a^2}{2}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } x = \sqrt{3a^2 - x^2} \Leftrightarrow 2x^2 = 3a^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3a^2}{2} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Cách 2:

a) Tính số đo góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ khi $x = a$.

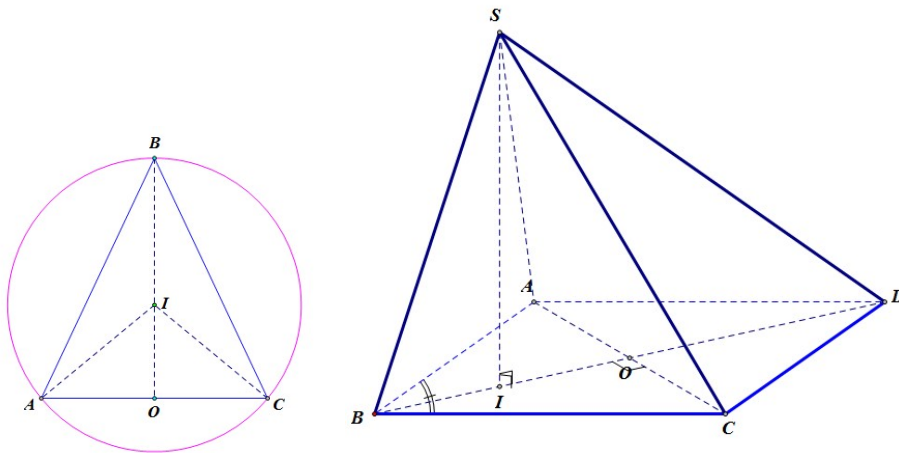


Do $SA = SB = SC = SD = a \Rightarrow SO \perp (ABCD)$. Gọi H là trung điểm của CD suy ra $CD \perp (SOH) \Rightarrow CD \perp OH \Rightarrow ABCD$ là hình vuông.

Từ đó $\triangle SBD$ vuông cân tại S , nên $\widehat{(SB, (ABCD))} = \widehat{SBD} = 45^\circ$.

b) Tính x theo a sao cho tích $AC \cdot SD$ đạt giá trị lớn nhất.

Gọi I là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$, do $SA = SB = SC = a$ nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , dễ thấy I thuộc đường thẳng BO .



Đặt $\widehat{ABC} = \alpha$. Ta có $AC = 2R \sin \alpha$. Suy ra $BO = \sqrt{a^2 - R^2 \sin^2 \alpha}$.

Theo công thức tính diện tích tam giác ABC ta có: $\frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 - R^2 \sin^2 \alpha} \cdot 2R \sin \alpha$

$$\Leftrightarrow a^2 = 4R^2 (a^2 - R^2 \sin^2 \alpha) \Rightarrow \sin \alpha = \frac{a\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R^2}.$$

Mặt khác xét tam giác vuông SBI và tam giác vuông SID ta có:

$$SI^2 = a^2 - R^2 = x^2 - \left(2\sqrt{a^2 - R^2 \sin^2 \alpha} - R\right)^2.$$

$$\text{Thay } \sin \alpha = \frac{a\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R^2} \text{ vào rút gọn ta được } R = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

$$\text{Nên } AC = 2R \sin \alpha = \sqrt{3a^2 - x^2}. \text{ Từ đó } AC \cdot SD = x\sqrt{3a^2 - x^2} = \sqrt{-x^4 + 3a^2x^2}.$$

Xét hàm số $f(x) = -x^4 + 3a^2x^2$ với $(0 < x < a\sqrt{3})$.

$$\text{Có } f'(x) = -4x^3 + 6a^2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{\sqrt{6}a}{2} \end{cases} \text{ do } x \in (0; \sqrt{3}a) \text{ nên ta nhận } x = \frac{\sqrt{6}}{2}a.$$

Lập bảng biến thiên ta được $\max_{(0; \sqrt{3}a)} f(x) = f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}a\right)$. Vậy khi $x = \frac{\sqrt{6}}{2}a$ thì $AC.SD$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5:

- Cho đa giác đều có 24 đỉnh, chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh của (H) . Tính xác suất để 4 đỉnh chọn được tạo thành một hình chữ nhật nhưng không phải là hình vuông.
- Cho $P(x) = (1 + 4x + 3x^2)^{13}$. Xác định hệ số của x^3 trong khai triển $P(x)$ theo lũy thừa của x .

Lời giải

- Số phần tử của không gian mẫu là: C_{24}^4 .

Đa giác đều có 24 đỉnh thì có 12 đường chéo đi qua tâm nên số hình chữ nhật, kể cả hình vuông là: C_{12}^2 hình.

Ứng với 1 đường chéo thì có một đường chéo duy nhất để tạo thành hình vuông, nên số hình vuông là 6.

Nên số hình chữ nhật cần tìm là $C_{12}^2 - 6$.

$$\text{Vậy xác suất cần tìm là: } \frac{C_{12}^2 - 6}{C_{24}^4} = \frac{10}{1771}.$$

$$\begin{aligned} \text{b. } P(x) &= (1 + 4x + 3x^2)^{13} = [(1 + 4x) + 3x^2]^{13} = C_{13}^0 (1 + 4x)^{13} + C_{13}^1 (1 + 4x)^{12} \cdot 3x^2 + \dots \\ &= (1 + 4x)^{13} + 13(1 + 4x)^{12} \cdot 3x^2 + \dots = (1 + 4x)^{13} + 39(1 + 4x)^{12} \cdot x^2 + \dots \end{aligned}$$

* Tìm hệ số của x^3 trong khai triển $(1 + 4x)^{13}$:

$$(1 + 4x)^{13} = \sum_{k=0}^{13} C_{13}^k \cdot 1^{13-k} (4x)^k = \sum_{k=0}^{13} C_{13}^k \cdot 4^k \cdot x^k.$$

Ta có $k = 3$ nên hệ số của x^3 là: $C_{13}^3 \cdot 4^3$.

* Tìm hệ số của x^3 trong khai triển $(1 + 4x)^{12} \cdot x^2$ tức là tìm hệ số của x trong khai triển $(1 + 4x)^{12}$.

$$\text{Ta có } (1 + 4x)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^m \cdot 1^{12-m} (4x)^m = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^m \cdot 4^m \cdot x^m.$$

Từ đó $m = 1$ nên hệ số của x^3 là: $C_{12}^1 \cdot 4$.

Vậy hệ số của x^3 trong khai triển $P(x)$ là: $C_{13}^3 \cdot 4^3 + 39 \cdot C_{12}^1 \cdot 4 = 20176$.

Câu 6:

Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \sqrt{3u_n^2 + 2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

- Tính tổng $S = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_{2020}^2$.

Lời giải

a) Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

Ta có: $u_{n+1} = \sqrt{3u_n^2 + 2} \Rightarrow u_{n+1}^2 + 1 = 3(u_n^2 + 1), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Đặt } v_n = u_n^2 + 1 \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = 3v_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Suy ra (v_n) là cấp số nhân với số hạng đầu $v_1 = 2$, công bội $q = 3$.

$$\Rightarrow v_n = 2 \cdot 3^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\Rightarrow u_n = \sqrt{2 \cdot 3^{n-1} - 1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ là số hạng tổng quát của dãy số } (u_n).$$

b) Tính tổng $S = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_{2020}^2$.

$$\text{Ta có: } S = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_{2020}^2 = 2(1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2019}) - 2020.$$

$$= 2 \cdot \frac{1 - 3^{2020}}{1 - 3} - 2020 = 3^{2020} - 2021.$$

$$\text{Vậy } S = 3^{2020} - 2021.$$

Câu 7: Cho hai số thực thay đổi x, y với $x > 0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{xy^2}{(x^2 + 3y^2)(x + \sqrt{x^2 + 12y^2})}.$$

Lời giải

$$P = \frac{xy^2}{(x^2 + 3y^2)(x + \sqrt{x^2 + 12y^2})} = \frac{\frac{y^2}{x^2}}{(1 + 3\frac{y^2}{x^2})(1 + \sqrt{1 + 12\frac{y^2}{x^2}})} \quad (\text{do } x > 0).$$

$$\text{Đặt } \frac{y}{x} = t.$$

$$\text{Khi đó: } P = \frac{t^2}{(1 + 3t^2)(1 + \sqrt{1 + 12t^2})} = \frac{t^2(1 - \sqrt{1 + 12t^2})}{(1 + 3t^2)(-12t^2)} = \frac{1}{12} \cdot \frac{\sqrt{1 + 12t^2} - 1}{1 + 3t^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{1 + 12t^2} - 1}{12t^2 + 4}.$$

$$\text{Đặt } m = \sqrt{1 + 12t^2} \geq 1.$$

$$\text{Khi đó } P = \frac{1}{3} \cdot \frac{m - 1}{m^2 + 3} \Leftrightarrow 3P = \frac{m - 1}{m^2 + 3} = f(m).$$

$$f'(m) = \frac{m^2 + 3 - 2m(m - 1)}{(m^2 + 3)^2} = \frac{-m^2 + 2m + 3}{(m^2 + 3)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}$$

m	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
$f'(m)$	-	0	+	+	0	-
$f(m)$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$	0	

$$\Rightarrow 0 \leq 3P \leq \frac{1}{6} \Leftrightarrow 0 \leq P \leq \frac{1}{18}.$$

$$+ P \geq 0, \text{ dấu "="} \Leftrightarrow m = 1 \Leftrightarrow y = 0.$$

$$+ P \leq \frac{1}{18}, \text{ dấu "="} \Leftrightarrow m = 3 \Leftrightarrow 2x^2 = 3y^2.$$

$$\text{Vậy } \text{Min}P = 0 \Leftrightarrow y = 0; \text{Max}P = \frac{1}{18} \Leftrightarrow 2x^2 = 3y^2.$$

_____ **HẾT** _____