LỜI NÓI ĐẦU

Nếu như em đang cần một cuốn sách ngắn gọn, tổng hợp được hết các dạng trong đề thi Học kỳ 2 – Toán 11 với đầy đủ cả phương pháp tự luận và phương pháp trắc nghiệm thì đây chính là cuốn sách dành cho em!

Với kinh nghiệm 8 năm đi dạy của mình thì thầy viết cuốn sách "BÍ KÍP ĐẠT ĐIỂM TỐI ĐA HỌC KỲ 2 – TOÁN 11" hội tụ những gì tinh túy để thầy đào tạo những học sinh ưu tú nhất.

Việc khiến các em yêu toán hơn nói chung và việc chạm tới điểm 9, điểm 10 nói riêng đó là niềm hạnh phúc tột cùng của thầy.

Chúc các em thành công với những trang sách đầy tâm huyết này!

Thầy của các em

Nguyễn Tiến Đạt

MỌI CHI TIẾT XIN LIÊN HỆ

Trung tâm toán thầy Đạt: số 88 ngõ 27 Đại Cồ Việt, Hà Nội.

SĐT: 0903288866

Facebook: Nguyễn Tiến Đạt

Fanpage: Toán thầy Đạt – chuyên luyện thi ĐH 10, 11, 12

MỤC LỤC

PHẦN 1. DÃY SỐ, CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

I. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

TÓM TẮT GIÁO KHOA

Nguyên lý quy nạp toán học:

Giả sử $P(n)$ là một mệnh đề phụ thuộc vào số tự nhiên n. Nếu cả hai điều kiện (i) và (ii) dưới đây được thỏa mãn thì $P(n)$ đúng với mọi $n \geq m$ (m là số tự nhiên cho trước).

$(i) P(m)$ đúng.

(ii) Với mỗi số tự nhiên $k \geq m$, nếu $P(k+1)$ đúng.

Phương pháp chứng minh dựa trên nguyên lý quy nạp toán học gọi là phương pháp quy nạp toán học(hay gọi tắt là phương pháp quy nạp).

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Phương pháp:

Để chứng minh một mệnh đề $P(n)$ phụ thuộc vào số tự nhiên n đúng với mọi $n \geq m$ (m là số tự nhiên cho trước), ta thực hiện theo hai bước sau:

Bước 1: Chứng minh rằng $P(n)$ đúng khi $n = m$.

Bước 2: Với k là một số tự nhiên tùy ý, $k \geq m$. Giả sử $P(n)$ đúng khi $n = k$, ta sẽ chứng minh $P(n)$ cũng đúng khi $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, ta kết luận rằng $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq m$.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với mọi số nguyên n, ta có:

a). $1.4 + 2.7 + \cdots + n(3n+1) = n(n+1)^2$

b). $\dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{1}{2.3.4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

a). $1.4 + 2.7 + \cdots + n(3n+1) = n(n+1)^2$ (1)

Với n = 1: Vế trái của (1) $= 1.4 = 4$; Vế phải của (1) $= 1(1+1)^2 = 4$. Suy ra Vế trái của (1) = Vế phải của (1). Vậy (1) đúng với n = 1.

Giả sử (1) đúng với $n = k$. Có nghĩa là ta có: $1.4 + 2.7 + \cdots + k(3k+1) = k(k+1)^2$ (2)

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n = k+1$. Có nghĩa ta phải chứng minh:

$1.4 + 2.7 + \cdots + k(3k+1) + (k+1)(3k+4) = (k+1)(k+2)^2$

Thật vậy $\underbrace{1.4+2.7+\cdots+k\left(3k+1\right)}_{=k(k+1)^2}+\left(k+1\right)\left(3k+4\right)=k\left(k+1\right)^2+\left(k+1\right)\left(3k+4\right)=\left(k+1\right)\left(k+2\right)^2$ (đpcm).

Vậy (1) đúng khi $n=k+1$. Do đó theo nguyên lí quy nạp, (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

b). $\dfrac{1}{1.2.3}+\dfrac{1}{2.3.4}+\cdots+\dfrac{1}{n\left(n+1\right)\left(n+2\right)}=\dfrac{n\left(n+3\right)}{4\left(n+1\right)\left(n+2\right)}$ (1)

Với n = 1: Vế trái của (1) $=\dfrac{1}{1.2.3}=\dfrac{1}{6}$; Vế phải của (1) $=\dfrac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)}=\dfrac{1}{6}$.

Suy ra Vế trái của (1) = Vế phải của (1). Vậy (1) đúng với n = 1.

Giả sử (1) đúng với $n=k$. Có nghĩa là ta có: $\dfrac{1}{1.2.3}+\dfrac{1}{2.3.4}+\cdots+\dfrac{1}{k\left(k+1\right)\left(k+2\right)}=\dfrac{k\left(k+3\right)}{4\left(k+1\right)\left(k+2\right)}$ (2)

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n=k+1$. Có nghĩa ta phải chứng minh:

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\cdots+\frac{1}{k\left(k+1\right)\left(k+2\right)}+\frac{1}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)\left(k+3\right)}=\frac{\left(k+1\right)\left(k+4\right)}{4\left(k+2\right)\left(k+3\right)} \quad (2)$$

Thật vậy $\underbrace{\dfrac{1}{1.2.3}+\dfrac{1}{2.3.4}+\cdots+\dfrac{1}{k\left(k+1\right)\left(k+2\right)}}_{=\frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}}+\dfrac{1}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)\left(k+3\right)}$

$$=\frac{k\left(k+3\right)}{4\left(k+1\right)\left(k+2\right)}+\frac{1}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)\left(k+3\right)}=\frac{1}{4\left(k+1\right)\left(k+2\right)}\left(k\left(k+3\right)+\frac{4}{k+3}\right)$$

$$=\frac{k^3+6k^2+9k+4}{4\left(k+1\right)\left(k+2\right)\left(k+3\right)}=\frac{\left(k+1\right)^2\left(k+4\right)}{4\left(k+1\right)\left(k+2\right)\left(k+3\right)}=\frac{\left(k+1\right)\left(k+4\right)}{4\left(k+2\right)\left(k+3\right)} \text{ (đpcm).}$$

Vậy (1) đúng khi $n=k+1$. Do đó theo nguyên lí quy nạp, (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

Ví dụ 2: Với mỗi số nguyên dương n, gọi $u_n=9^n-1$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì u_n luôn chia hết cho 8.

Ta có $u_1=9^1-1=8$ chia hết cho 8 (đúng).

Giả sử $u_k=9^k-1$ chia hết cho 8.

Ta cần chứng minh $u_{k+1}=9^{k+1}-1$ chia hết cho 8.

Thật vậy, ta có $u_{k+1}=9^{k+1}-1=9.9^k-1=9\left(9^k-1\right)+8=9u_k+8$. Vì $9u_k$ và 8 đều chia hết cho 8, nên u_{k+1} cũng chia hết cho 8.

Vậy với mọi số nguyên dương n thì u_n chia hết cho 8.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, ta luôn có: $2^{n+1} > 2n+3$ (*)

Với $n=2$ ta có $2^{2+1} > 2.2+3 \Leftrightarrow 8 > 7$ (đúng). Vậy (*) đúng với $n=2$.

Giả sử với $n=k, k \geq 2$ thì (*) đúng, có nghĩa ta có: $2^{k+1} > 2k+3$ (1).

Ta phải chứng minh (*) đúng với $n=k+1$, có nghĩa ta phải chứng minh:

$2^{k+2} > 2(k+1)+3$

Thật vậy, nhân hai vế của (1) với 3 ta được: $2.2^{k+1} > 2\left(2k+3\right) \Leftrightarrow 2^{k+2} > 4k+6 > 2(k+1)+3$.

Vậy $2^{k+2} > 2(k+1)+3$ (đúng).

Do đó theo nguyên lí quy nạp, (*) đúng với mọi số nguyên dương $n \geq 3$.

II. DÃY SỐ

DẠNG 1: THIẾT LẬP CÔNG THỨC TÍNH SỐ HẠNG TỔNG QUÁT u_n THEO N

Phương pháp:

- Nếu u_n có dạng $u_n = a_1 + a_2 + ... + a_k + ... + a_n$ (kí hiệu $u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$) thì biến đổi a_k thành hiệu của hai số hạng, dựa vào đó thu gọn u_n .
- Nếu dãy số (u_n) được cho bởi một hệ thức truy hồi, tính vài số hạng đầu của dãy số (chẳng hạn tính $u_1, u_2, ...$), từ đó dự đoán công thức tính u_n theo n, rồi chứng minh công thức này bằng phương pháp quy nạp. Ngoài ra cũng có thể tính hiệu $u_{n+1} - u_n$ dựa vào đó để tìm công thức tính u_n theo n.

Ví dụ 1: Cho dãy số (a_n). Đặt $u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Tính u_1, u_2, u_3, u_4 và xác định công thức tính u_n theo n trong trường hợp $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$

$$u_1 = a_1 = \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2} \;;\; u_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.(2+1)} = \frac{2}{3}$$

$$u_3 = a_1 + a_2 + a_3 = u_2 + a_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3(3+1)} = \frac{3}{4}$$

$$u_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = u_3 + a_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4.5} = \frac{4}{5}$$

Ta có $a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, do đó:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Ví dụ 2: Dãy số (u_n) được xác định bằng cộng thức: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^3 \end{cases} \quad \forall n \geq 1.$

a). Tìm công thức của số hạng tổng quát.

b). Tính số hạng thứ 100 của dãy số.

a). Ta có: $u_{n+1} = u_n + n^3 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = n^3$.

Từ đó suy ra:

$u_1 = 1$

$u_2 - u_1 = 1^3$

$u_3 - u_2 = 2^3$

$u_4 - u_3 = 3^3$

.............…………

$u_{n-1}-u_{n-2}=(n-2)^3$

$u_n-u_{n-1}=(n-1)^3$

Cộng từng vế n đẳng thức trên:

$u_1+u_2-u_1+u_3-u_2+...+u_{n-1}-u_{n-2}+u_n-u_{n-1}=1+1^3+2^3+3^3+...+(n-2)^3+(n-1)^3$
$\Leftrightarrow u_n=1+1^3+2^3+3^3+...+(n-2)^3+(n-1)^3$.

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được: $1^3+2^3+3^3+...+(n-1)^3=\dfrac{(n-1)^2.n^2}{4}$

Vậy $u_n=1+\dfrac{n^2(n-1)^2}{4}$

b). $u_{100}=1+\dfrac{100^2.99^2}{4}=24502501$.

DẠNG 2: TÍNH TĂNG, GIẢM CỦA DÃY SỐ

Phương pháp:
Cách 1: Xét dấu của biểu thức $u_{n+1} - u_n$

- Nếu $\forall n \in N^*, u_{n+1} - u_n > 0$ thì (u_n) là dãy số tăng;
- Nếu $\forall n \in N^*, u_{n+1} - u_n < 0$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Cách 2: Khi $\forall n \in N^*, u_n > 0$ thì có thể so sánh $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ với 1

- Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số tăng;
- Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Cách 3: Nếu dãy số (u_n) được cho bởi một hệ thức truy hồi thì ta có thể sử dụng phương pháp chứng minh quy nạp để chứng minh $u_{n+1} > u_n$ (hoặc $u_{n+1} < u_n$)

Chú ý:

- Nếu $\exists k \in N^* : u_{k+1} > u_k$ thì dãy số (u_n) không giảm.
- Nếu $\exists k \in N^* : u_{k+1} < u_k$ thì dãy số (u_n) không tăng.

Ví dụ 3 : Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) biết:

a). $u_n = \dfrac{1}{n} - 2$ b). $u_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ c). $u_n = (-1)^n\left(2^n + 1\right)$

a). $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - 2 - \left(\dfrac{1}{n} - 2\right) = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = -\dfrac{1}{n(n+1)} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Kết luận dãy số (u_n) là dãy số giảm.

b). $u_n = \dfrac{n-1}{n+1} = 1 - \dfrac{2}{n+1}$

Ta có $u_{n+1} - u_n = 1 - \dfrac{2}{n+2} - \left(1 - \dfrac{2}{n+1}\right) = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Kết luận dãy số (u_n) là dãy số tăng.

c). $u_n = (-1)^n\left(2^n + 1\right)$

Ta có $u_1 = -3, u_2 = 5, u_3 = -9$, từ đó suy ra dãy số (u_n) là dãy không tăng không giảm.

DẠNG 3: DÃY SỐ BỊ CHẶN

Phương pháp

1). Nếu $u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ thì:

- Thu gọn u_n , dựa vào biểu thức thu gọn để chặn u_n .

•• Ta cũng có thể chặn tổng $\sum_{k=1}^{n} a_k$ bằng một tổng mà ta có thể biết được chặn trên, chặn dưới của nó.

2). Nếu dãy số (u_n) ho bởi một hệ thức truy hồi thì:

- Dự đoán chặn trên, chặn dưới rồi chứng minh bằng phương pháp chứng minh quy nạp.

Ta cũng có thể xét tính đơn điệu (nếu có) sau đó giải bất phương trình $u_{n+1} - u_n$ dựa vào đó chặn (u_n).

Ví dụ 4: Xét tính tăng hay giảm và bị chặn của dãy số : $u_n = \dfrac{2n-1}{n+3}; n \in N^*$

Ta có: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2n+1}{n+4} - \dfrac{2n-1}{n+3} = \dfrac{2n^2+7n+3-2n^2-7n+4}{(n+4)(n+3)} = \dfrac{7}{(n+4)(n+3)} > 0; \forall n \in N^*$

Vậy: (u_n) là dãy số tăng.

Ta có $u_n = \dfrac{2n-1}{n+3} = \dfrac{2(n+3)-7}{n+3} = 2 - \dfrac{7}{n+3}$, suy ra:

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n < 2$ nên (u_n) bị chặn trên. Vì (u_n) là dãy số tăng $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_1 = \dfrac{1}{4} \le u_n$ Nên (u_n) bị chặn dưới. Vậy (u_n) bị chặn.

Ví dụ 5: Cho dãy số (u_n) với $u_n = 1 + (n-1).2^n$

a). Viết 5 số hạng đầu của dãy số.

b). Tìm công thức truy hồi.

c). Chứng minh dãy số tăng và bị chặn dưới.

a).Ta có:

$u_1 = 1 + (1-1).2^1 = 1$

$u_2 = 1 + (2-1).2^2 = 5$

$u_3 = 1 + (3-1).2^3 = 17$

$u_4 = 1 + (4-1).2^4 = 49$

$u_5 = 1 + (5-1).2^5 = 129$

b). Xét hiệu: $u_{n+1} - u_n = 1 + n.2^{n+1} - \left(1 + (n+1).2^n\right)$

$= 2n.2^n - (n-1).2^n = (2n-n+1).2^n = (n+1).2^n \quad \Rightarrow u_{n+1} = u_n + (n+1)2^n.$

Vậy công thức truy hồi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (n+1).2^n \end{cases} \quad \forall n \ge 1.$

c). Ta có: $u_{n+1} - u_n = (n+1).2^n > 0 \quad \forall n \ge 1$. Từ đó suy ra dãy số (u_n) là dãy số tăng.

Ta có: $u_n = 1 + (n-1).2^n \ge 1 \quad \forall n \ge 1$. Kết luận (u_n) là dãy số bị chặn dưới.

III. CẤP SỐ CỘNG

TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Cấp số cộng là một dãy số (vô hạn hay hữu hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó và một số d không đổi, nghĩa là:

(u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow \forall n \geq 2, u_n = u_{n-1} + d$

Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.

2.Định lý 1: Nếu (u_n) là một cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$

Hệ quả: Ba số a, b, c (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số cộng $\Leftrightarrow a + c = 2b$.

1). Định lý 2: Nếu một cấp số cộng có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức sau: $u_n = u_1 + (n-1)d$

2). Định lý 3: Giả sử (u_n) là một cấp số cộng có công sai d.

Gọi $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + ... + u_n$

(S_n là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng). Ta có : $S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2}$.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.

DẠNG 1: CHỨNG MINH MỘT DÃY SỐ (u_n) LÀ CẤP SỐ CỘNG

Phương pháp:
Để chứng minh dãy số (u_n) là một cấp số cộng, ta xét $A = u_{n+1} - u_n$

- Nếu A là hằng số thì (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = A$.
- Nếu A phụ thuộc vào n thì (u_n) không là cấp số cộng.

Ví dụ 1: Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số cộng. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng đó:

Dãy số (u_n) với $u_n = 19n - 5$

Dãy số (u_n) với $u_n = 19n - 5$

Ta có $u_{n+1} - u_n = 19(n+1) - 5 - (19n - 5) = 19$. Vậy (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 19$ và số hạng đầu $u_1 = 19.1 - 5 = 14$.

DẠNG 2: TIM SỐ HẠNG ĐẦU TIEN, CÔNG SAI CỦA CẤP SỐ CỘNG, TIM SỐ HẠNG THỨ K CỦA CẤP SỐ CỘNG, TINH TỔNG K SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN

Phương pháp:

Ta thiết lập một hệ phương trình gồm hai ẩn u_1 và d. Sau đó giải hệ phương trình này tìm được u_1 và d.

Muốn tìm số hạng thứ k, trước tiên ta phải tìm u_1 và d. Sau đó áp dụng công thức: $u_k = u_1 + (k-1)d$.

Muốn tính tổng của k số hạng đầu tiên, ta phải tìm u_1 và d. Sau đó áp dụng công thức:

$$S_k = \frac{k(u_1 + u_k)}{2} = \frac{k[2u_1 + (k-1)d]}{2}$$

Ví dụ 2: Tìm số hạng đầu tiên, công sai, số hạng thứ 20 và tổng của 20 số hạng đầu tiên của các cấp số cộng sau, biết rằng:

a) $\begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ s_{12} = 129 \end{cases}$ d) $\begin{cases} u_6 = 8 \\ u_2^2 + u_4^2 = 16 \end{cases}$

a) $\begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35 \end{cases}$ (1). Áp dụng công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$, ta có: $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 19 \\ u_1 + 8d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$

Vậy số hạng đầu tiên $u_1 = 3$, công sai $d = 4$.

Số hạng thứ 20: $u_{20} = u_1 + 19d = 3 + 19.4 = 79$.

Tổng của 20 số hạng đầu tiên: $S_{20} = \dfrac{20(2u_1 + 19d)}{2} = 10(2.3 + 19.4) = 820$

b) $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$ (1). Ta cũng áp dụng công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$:

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d - (u_1 + 2d) + u_1 + 4d = 10 \\ u_1 + 3d + u_1 + 5d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ 2u_1 + 8d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3. \end{cases}$

Vậy số hạng đầu tiên $u_1 = 1$, công sai $d = 3$.

Số hạng thứ 20: $u_{20} = u_1 + 19d = 1 + 19.3 = 58$.

Tổng của 20 số hạng đầu tiên: $S_{20} = \dfrac{20(2u_1 + 19d)}{2} = 10(2.1 + 19.3) = 590$

c) $\begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ s_{12} = 129 \end{cases}$ (1). Áp dụng công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$, $S_n = \dfrac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$ Ta có:

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d + u_1 + 4d = 14 \\ 6(u_1 + u_{12}) = 129 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 6d = 14 \\ 12u_1 + 66d = 129 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{5}{2} \\ d = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$

Vậy số hạng đầu tiên $u_1 = \frac{5}{2}$, công sai $d = \frac{3}{2}$.

Số hạng thứ 20: $u_{20} = u_1 + 19d = \frac{5}{2} + 19.\frac{3}{2} = 31$.

Tổng của 20 số hạng đầu tiên: $S_{20} = \frac{20(2u_1 + 19d)}{2} = 10\left(2.\frac{5}{2} + 19.\frac{3}{2}\right) = 335$

d) $\begin{cases} u_6 = 8 \\ {u_2}^2 + {u_4}^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 5d = 8 \\ (u_1 + d)^2 + (u_1 + 3d)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 - 5d \\ (8 - 5d + d)^2 + (8 - 5d + 3d)^2 = 16 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 - 5d \\ (8 - 4d)^2 + (8 - 2d)^2 = 16 \quad (*) \end{cases}$

Giải $(*)$: $20d^2 - 96d + 112 = 0 \Leftrightarrow d = \frac{14}{5} \vee$ d = 2 .

Với $d = \frac{14}{5} \Rightarrow u_1 = -6$

Số hạng thứ 20: $u_{20} = u_1 + 19d = -6 + 19.\frac{14}{5} = \frac{236}{5}$.

Tổng của 20 số hạng đầu tiên: $S_{20} = \frac{20(2u_1 + 19d)}{2} = 10\left(2.(-6) + 19.\frac{14}{5}\right) = 412$

Với $d = 2 \Rightarrow u_1 = -2$

Số hạng thứ 20: $u_{20} = u_1 + 19d = -2 + 19.2 = 36$.

Tổng của 20 số hạng đầu tiên: $S_{20} = \frac{20(2u_1 + 19d)}{2} = 10(2.(-2) + 19.2) = 340$

DẠNG 3: DỰA VÀO TÍNH CHẤT CỦA CẤP SỐ CỘNG, CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

Ví dụ 3: Cho a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, chứng minh rằng:

a). $a^2+2bc=c^2+2ab$

b). $a^2+8bc=(2b+c)^2$

c). $a^2+ab+b^2, a^2+ac+c^2, b^2+bc+c^2$ là cấp số cộng.

a). Vì a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng: $a+c=2b \Leftrightarrow a=2b-c$

Ta có: $a^2-2ab=a^2-a(a+c)=-ac \ =-c(2b-c)=c^2-2bc$

Vậy $a^2-2ab=c^2-2bc \Leftrightarrow a^2+2bc=c^2+2ab.$

b). Ta có $a^2+8bc=(2b-c)^2+8bc$

$=4b^2-4bc+c^2+8bc \ =4b^2+4bc+c^2 \ =(2b+c)^2.$

c). Ta cần chứng minh:

$(a^2+ab+b^2)+(b^2+bc+c^2)=2(a^2+ac+c^2)$

$\Leftrightarrow 2b^2+ab+bc=a^2+2ac+c^2$

$\Leftrightarrow 2b^2+b(a+c)=(a+c)^2$

$\Leftrightarrow 2b^2+2b^2=(2b)^2$

$\Leftrightarrow 4b^2=4b^2$ (đúng).

IV. CẤP SỐ NHÂN

TÓM TẮT GIÁO KHOA

1). Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn) mà trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó và một số q không đổi, nghĩa là:

(u_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow \forall n \geq 2, u_n = u_{n-1}.q$

Số q được gọi là công bội của cấp số nhân.

2). Định lý 1: Nếu (u_n) là một cấp số nhân thì kể từ số hạng thứ hai, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số nhân hữu hạn) bằng tích của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là:

$u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1}(k \geq 2)$.

Hệ quả: Nếu a, b, c là ba số khác 0, thì "ba số a, b, c (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số nhân khi và chỉ khi $b^2 = ac$ ".

3). Định lý 2: Nếu một cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội $q \neq 0$ thì số hạng tổng quát u_n của nó được tính bởi công thức: $u_n = u_1.q^{n-1}$.

4). Định lý 3: Giả sử (u_n) là một cấp số nhân có công bội q. Gọi $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + ... + u_n$($S_n$ là tổng cuản số hạng đầu tiên của cấp số nhân). Ta có:

- Nếu q=1 thì $S_n = nu_1$.
- Nếu $q \neq 1$ thì $S_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q}$

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.

DẠNG 1: CHỨNG MINH MỘT DÃY (u_n) LÀ CẤP SỐ NHÂN

Phương pháp:

- Chứng minh $\forall n \geq 1, u_{n+1} = u_n.q$ trong đó q là một số không đổi.
- Nếu $u_n \neq 0$ với mọi $n \in N^*$ thì ta lập tỉ số $T = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

  * T là hằng số thì (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = T$.

  * T phụ thuộc vào n thì (u_n) không là cấp số nhân.

Ví dụ 1: Xét trong các dãy số số sau, dãy số nào là cấp số nhân, (nếu có) tìm công bối của cấp số nhân đó:

a). $u_n = (-3)^{2n+1}$ b). $u_n = (-1)^n.5^{3n+2}$ c). $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$ d). $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{9}{u_n} \end{cases}$

a). Ta có $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(-3)^{2n+3}}{(-3)^{2n+1}} = (-3)^2 = 9$ (không đổi). Kết luận (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 9$.

b). Ta có $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(-1)^{n+1}.5^{3(n+1)+2}}{(-1)^n.5^{3n+2}} = -1.5^3 = -125$ (không đổi). Kết luận (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = -125$.

c). Ta có $u_2 = u_1^2 = 4$, $u_3 = u_2^2 = 16$, $u_4 = u_3^2 = 256$, suy ra $\frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{2} = 2$ và $\frac{u_4}{u_3} = \frac{256}{16} = 16 \Rightarrow \frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_4}{u_3}$. Do đó (u_n) không là cấp số nhân.

d). $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{9}{u_n}}{\frac{9}{u_{n-1}}} = \frac{u_{n-1}}{u_n} \Rightarrow u_{n+1} = u_{n-1}, \forall n \geq 2$. Do đó có:

$u_1 = u_3 = u_5 = ... = u_{2n+1} ....$ (1)

Và $u_2 = u_4 = u_6 = ... = u_{2n} = ...$ (2)

Theo đề bài có $u_1 = 3 \Rightarrow u_2 = \frac{9}{u_1} = 3$ (3)

Từ (1), (2) ,(3) suy ra $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = ... = \mathrm{u}_{2n} = u_{2n+1} ....$ Kết luận (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 1$.

Ví dụ 2: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + 9 \end{cases}, \forall n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = u_n + 3, \forall n \geq 1$ là một cấp số nhân. Hãy xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

Vì có $v_n = u_n + 3$ (1) $\Rightarrow v_{n+1} = u_{n+1} + 3$ (2).

Theo đề $u_{n+1} = 4u_n + 9 \Rightarrow u_{n+1} + 3 = 4(u_n + 3)$ (3).

Thay (1) và (2) vào (3) được: $v_{n+1} = 4v_n, \forall n \geq 1 \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = 4$ (không đổi). Kết luận (v_n) là cấp số nhân với công bội $q = 4$ và số hạng đầu $v_1 = u_1 + 3 = 5$.

DẠNG 2: XÁC ĐỊNH SỐ HẠNG ĐẦU CÔNG BỘI, XÁC ĐỊNH SỐ HẠNG THỨ K, TÍNH TỔNG CỦA N SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN

Phương pháp:
Dựa vào giả thuyết, ta lập một hệ phương trình chứa công bội q và số hạng đầu u_1, giải hệ phương trình này tìm được q và u_1.
Để xác định số hạng thứ k, ta sử dụng công thức: $u_k = u_1.q^{k-1}$.
Để tính tổng của n số hạng , ta sử dụng công thức: $S_n = u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q}, q \neq 1$. Nếu $q = 1$ thì $u_1 = u_2 = u_3 = ... = \text{u}_n$, do đó $S_n = nu_1$.

Ví dụ 3: Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân, biết:

a) $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 40 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_2 = 6 \\ S_3 = 43. \end{cases}$

a). $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q^4 = 51 \\ u_1q + u_1q^5 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q^4\right) = 51 \quad (*) \\ u_1q\left(1+q^4\right) = 102 \;\; (**) \end{cases}$

Lấy $\dfrac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow \dfrac{u_1q\left(1+q^4\right)}{u_1\left(1+q^4\right)} = \dfrac{102}{51} \Leftrightarrow q = 2 \Rightarrow u_1 = \dfrac{51}{1+q^4} = \dfrac{51}{17} = 3.$

Kết luận có công bội $q = 2$ và số hạng đầu tiên $u_1 = 3$.

Kết luận: $u_1 = 3$ và $q = 2$

b) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q + u_1q^2 = 135 \\ u_1.q^3 + u_1q^4 + u_1q^5 = 40 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right) = 135 \quad (*) \\ u_1q^3\left(1+q+q^2\right) = 40 \quad (**) \end{cases}$

Lấy $\dfrac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow \dfrac{u_1q^3\left(1+q+q^2\right)}{u_1\left(1+q+q^2\right)} = \dfrac{40}{135} \Leftrightarrow q^3 = \dfrac{8}{27} \Leftrightarrow q = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow u_1 = \dfrac{135}{1+q+q^2} = \dfrac{1215}{19}.$

Kết luận có công bội $q = \dfrac{2}{3}$ và số hạng đầu tiên $u_1 = \dfrac{1215}{19}$.

c) $\begin{cases} u_2 = 6 \\ S_3 = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q = 6 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q = 6 \\ u_1 + u_1q + u_1q^2 = 43 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q = 6 \quad (*) \\ u_1\left(1+q+q^2\right) = 43 \quad (**) \end{cases}$. Lấy $\dfrac{(*)}{(**)} \Leftrightarrow \dfrac{u_1 q}{u_1\left(1+q+q^2\right)} = \dfrac{6}{43}$

$\Leftrightarrow 43q = 6\left(1+q+q^2\right) \Leftrightarrow 6q^2 - 37q + 6 = 0 \Leftrightarrow q = 6 \vee q = \dfrac{1}{6}$

Với $q = 6 \Rightarrow u_1 = 1$. Với $q = \dfrac{1}{6} \Rightarrow u_1 = 36$.

Kết luận $\begin{cases} q = 6 \\ u_1 = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} q = \dfrac{1}{6} \\ u_1 = 36 \end{cases}$

Ví dụ 4: Cho CSN (u_n) có các số hạng thỏa: $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$

a). Tìm số hạng đầu và công bội của CSN.

b). Hỏi tổng bao nhiêu số hạng đầu tiên bằng 3069?

c). Số 12288 là số hạng thứ mấy?

a). Ta có $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q^4 = 51 \\ u_1 q + u_1 q^5 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q^4) = 51 \quad (*) \\ u_1 q(1+q^4) = 102 \quad (**) \end{cases}$

Lấy $\dfrac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow \dfrac{u_1 q(1+q^4)}{u_1(1+q^4)} = \dfrac{102}{51} \Leftrightarrow q = 2 \Rightarrow u_1 = 3$.

b). Có $S_n = 3069 \Leftrightarrow u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q} = 3069 \Leftrightarrow 3.\dfrac{1-2^n}{1-2} = 3069 \Leftrightarrow 2^n = 1024 \Rightarrow n = 10$. Kết luận tổng của 10 số hạng đầu tiên bằng 3069.

c).Có $u_k = 12288 \Leftrightarrow u_1.q^{k-1} = 12288 \Leftrightarrow 3.2^{k-1} = 12288 \Leftrightarrow 2^{k-1} = 4096 = 2^{12}$

$\Rightarrow k - 1 = 12 \Leftrightarrow k = 13$. Kết luận số 12288 là số hạng thứ 13.

Ví dụ 5: Tính các tổng sau:

a). $S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$

b). $S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$

c). $S_n = \left(3 + \dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(9 + \dfrac{1}{9}\right)^2 + \cdots + \left(3^n + \dfrac{1}{3^n}\right)^2$

d). $S_n = 6 + 66 + 666 + \cdots + \underbrace{666...6}_{n \text{ so } 6}$

a). Ta có dãy số $2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^n$ là một cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = \dfrac{2^2}{2} = 2$. Do đó $S_n = u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q} = 2.\dfrac{1-2^n}{1-2} = 2\left(2^n - 1\right)$.

b). Ta có dãy số $\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\cdots,\frac{1}{2^n}$ là một cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1=\frac{1}{2}$ và công bội $q=\frac{\frac{1}{2^2}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$. Do đó $S_n=u_1.\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{2}.\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$.

c). $S_n=\left(3+\frac{1}{3}\right)^2+\left(9+\frac{1}{9}\right)^2+\cdots+\left(3^n+\frac{1}{3^n}\right)^2$

$=3^2+2+\frac{1}{3^2}+3^4+2+\frac{1}{3^4}+\cdots+3^{2n}+2+\frac{1}{3^{2n}}$

$=\left(3^2+3^4+\cdots+3^{2n}\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{3^{2n}}\right)+\underbrace{2+2+2+\cdots+2}_{n}$

- Có dãy số $3^2,3^4,\cdots,3^{2n}$ là cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1=3^2$ và công bội $q=\frac{3^4}{3^2}=9$.

Do đó $S_1=u_1.\frac{1-q^n}{1-q}=9.\frac{1-9^n}{1-9}=\frac{9}{8}\left(9^n-1\right)$.

- Có dãy số $\frac{1}{3^2},\frac{1}{3^4},\cdots,\frac{1}{3^{2n}}$ là cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1=\frac{1}{3^2}$ và công bội $q=\frac{1}{9}$. Do đó $S_1=u_1.\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{9}.\frac{1-\frac{1}{9^n}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{9^n}\right)=\frac{9^n-1}{8.9^n}$.

Vậy $S_n=\frac{9}{8}\left(9^n-1\right)+\frac{9^n-1}{8.9^n}+2n=\frac{\left(9^n-1\right)\left(9^{n+1}+1\right)}{8.9^n}+2n$.

d). $S_n=6+66+666+\cdots+\underbrace{666...6}_{n\text{ so }6}=\frac{6}{9}\left(9+99+999+\cdots+\underbrace{999...9}_{n}\right)$

$=\frac{2}{3}\left[(10-1)+(100-1)+(1000-1)+\cdots+(10^n-1)\right]$

$=\frac{2}{3}\left[10+10^2+10^3+\cdots+10^n-n\right]=\frac{2}{3}\left[10.\frac{10^n-1}{10-1}-n\right]=\frac{20}{27}\left(10^n-1\right)-\frac{2n}{3}$.

DẠNG 3: DỰA VÀO TÍNH CHẤT CỦA CẤP SỐ NHÂN, CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

Ví dụ 6: Cho a, b, c, d là bốn số hạng liên tiếp của một cấp số nhân. Chứng minh:

$a).\left(ab+bc+ca\right)^3=abc\left(a+b+c\right)^3$

$b).\ \left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)=\left(ab+bc\right)^2$

$c).\ \left(a+b+c\right)\left(a-b+c\right)=a^2+b^2+c^2$

d). $\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2+\left(d-b\right)^2=\left(a-d\right)^2$

Vì a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, nên có $ac=b^2$.

a). Ta có $abc\left(a+b+c\right)^3=b^3\left(a+b+c\right)^3=\left(ab+b^2+bc\right)^3=\left(ab+bc+ca\right)^3$ (đpcm).

b). Ta có: $\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)=a^2b^2+a^2c^2+b^4+b^2c^2=a^2b^2+2b^4+b^2c^2$

$=a^2b^2+2ab.bc+b^2c^2=\left(ab+bc\right)^2$ (đpcm).

c). Ta có $\left(a+b+c\right)\left(a-b+c\right)=\left[\left(a+c\right)+b\right]\left[\left(a+c\right)-b\right]=\left(a+c\right)^2-b^2$

$=a^2+2ac+c^2-b^2=a^2+2b^2+c^2-b^2=a^2+b^2+c^2$ (đpcm).

d). Vì a, b, c, d lập thành CSN nên có: $a.d=bc, a.c=b^2, b.d=c^2$

Khai triển: $\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2+\left(d-b\right)^2=a^2+2b^2+2c^2+d^2-2bc-2ca-2bd$

$=a^2+2b^2+2c^2+d^2-2ad-2b^2-2c^2=a^2-2ad+d^2=\left(a-d\right)^2$

PHẦN 2: GIỚI HẠN

I. GIỚI HẠN DÃY SỐ

GIỚI HẠN HỮU HẠN	GIỚI HẠN VÔ CỰC
1. Giới hạn đặc biệt: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^k}=0\ (k\in\mathbb{Z}^+)$ $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0\ (\lvert q\rvert<1)$; $\lim\limits_{n\to+\infty}C=C$ **2. Định lí** : a) Nếu lim u_n = a, lim v_n = b thì • lim (u_n+v_n) = a + b • lim (u_n-v_n) = a – b • lim $(u_n.v_n)$ = a.b • $\lim\dfrac{u_n}{v_n}=\dfrac{a}{b}$ (nếu b ≠ 0) b) Nếu $u_n\ge 0$, ∀n và lim u_n= a thì a ≥ 0 và $\lim\sqrt{u_n}=\sqrt{a}$ c) Nếu $\lvert u_n\rvert\le v_n$,∀n và lim v_n = 0 thì lim u_n = 0 d) Nếu lim u_n = a thì $\lim\lvert u_n\rvert=\lvert a\rvert$ **3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn** $S=u_1+u_1q+u_1q^2+\ldots=\dfrac{u_1}{1-q}\quad(\lvert q\rvert<1)$	**1. Giới hạn đặc biệt**: $\lim\sqrt{n}=+\infty$ $\lim n^k=+\infty\ (k\in\mathbb{Z}^+)$ $\lim q^n=+\infty\ (q>1)$ **2. Định lí**: a) Nếu $\lim\lvert u_n\rvert=+\infty$ thì $\lim\dfrac{1}{u_n}=0$ b) Nếu lim u_n = a, lim v_n = ±∞ thì $\lim\dfrac{u_n}{v_n}=0$ c) Nếu lim u_n = a ≠ 0, lim v_n = 0 thì $\lim\dfrac{u_n}{v_n}=\begin{cases}+\infty & \text{nếu } a.v_n>0\\-\infty & \text{nếu } a.v_n<0\end{cases}$ d) Nếu lim u_n = +∞, lim v_n = a thì $\lim(u_n.v_n)=\begin{cases}+\infty & \text{nếu } a>0\\-\infty & \text{nếu } a<0\end{cases}$ * Khi tính giới hạn có một trong các dạng vô định: $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, ∞ – ∞, 0.∞ thì phải tìm cách khử dạng vô định.

DẠNG 1: u_n LÀ MỘT PHÂN THỨC HỮU TỈ DẠNG $u_n=\dfrac{P(n)}{Q(n)}$ (TRONG ĐÓ $P(n),Q(n)$ LÀ HAI ĐA THỨC CỦA N).

Phương pháp: Chia cả tử và mẫu cho n^k với n^k là lũy thừa có số mũ lớn nhất của $P(n)$ và $Q(n)$

Ví dụ 1: Tìm giới hạn của dãy (u_n) biết:

a). $u_n=\dfrac{2n^2-3n+1}{5n^2+3}$ b). $u_n=\dfrac{-2n^3+3n^2+4}{n^4+4n^3+n}$

a). Ta thấy n^2 là lũy thừa cao nhất của tử và mẫu, nên chia cả tử và mẫu của u_n cho n^2 được:

$u_n=\dfrac{2n^2-3n+1}{5n^2+3}=\dfrac{\frac{2n^2-3n+1}{n^2}}{\frac{5n^2+3}{n^2}}=\dfrac{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{5+\frac{3}{n^2}}$. Ta có : $\lim\dfrac{3}{n}=0,\lim\dfrac{1}{n^2}=0$ và $\lim\dfrac{3}{n^2}=0$ nên

$\lim u_n=\dfrac{2-0+0}{5+0}=\dfrac{2}{5}$.

b). Dễ dàng thấy n^4 là lũy thừa cao nhất của tử và mẫu, nên chia cả tử và mẫu của u_n cho n^4 được:

$u_n = \dfrac{-2n^3+3n^2+4}{n^4+4n^3+n} = \dfrac{\dfrac{-2n^3+3n^2+4}{n^4}}{\dfrac{n^4+4n^3+n}{n^4}} = \dfrac{-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{4}{n^4}}{1+\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^3}}$. Ta có $\lim\dfrac{2}{n}=0$, $\lim\dfrac{3}{n^2}=0$, $\lim\dfrac{4}{n^4}=0$, $\lim\dfrac{4}{n}=0$ và $\lim\dfrac{1}{n^3}=0$. Do đó $\lim u_n = \dfrac{0+0+0}{1+0+0}=0$.

DẠNG 2: u_n LA MỘT PHÂN THỨC HỮU TỈ DẠNG $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ (TRONG ĐÓ $P(n), Q(n)$ LÀ CÁC BIỂU THỨC CHỨA CĂN CỦA N).

Phương pháp : Rút bậc lớn nhất ra ngoài và rút gọn dần.

Ví dụ 2: Tìm giới hạn của dãy (u_n) biết:

a). $u_n = \dfrac{\sqrt{4n^2 - n + 1} - n}{\sqrt{9n^2 + 3n}}$ b). $u_n = \dfrac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+3}}{\sqrt{4n-5}}$

a). $u_n = \dfrac{\sqrt{4n^2 - n + 1} - n}{\sqrt{9n^2 + 3n}} = \dfrac{\sqrt{n^2\left(\dfrac{4n^2 - n + 1}{n^2}\right)} - n}{\sqrt{n^2\left(\dfrac{9n^2 + 3n}{n^2}\right)}} = \dfrac{n\sqrt{4 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}} - n}{n\sqrt{9 + \dfrac{3}{n}}} = \dfrac{\sqrt{4 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}} - 1}{\sqrt{9 + \dfrac{3}{n}}}$. Vì có $\lim \dfrac{1}{n} = 0,$

$\lim \dfrac{1}{n^2} = 0,$ và $\lim \dfrac{3}{n} = 0$. Nên $\lim u_n = \dfrac{\sqrt{4 - 0 + 0} - 1}{\sqrt{9 + 0}} = \dfrac{1}{3}$.

b). $u_n = \dfrac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+3}}{\sqrt{4n-5}} = \dfrac{\sqrt{n\left(\dfrac{2n+1}{n}\right)} - \sqrt{n\left(\dfrac{n+3}{n}\right)}}{\sqrt{n\left(\dfrac{4n-5}{n}\right)}} = \dfrac{\sqrt{n}.\sqrt{2 + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{n}.\sqrt{1 + \dfrac{3}{n}}}{\sqrt{n}.\sqrt{4 - \dfrac{5}{n}}} = \dfrac{\sqrt{2 + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{1 + \dfrac{3}{n}}}{\sqrt{4 - \dfrac{5}{n}}}$.

Vì có $\lim \dfrac{1}{n} = 0,$ $\lim \dfrac{3}{n} = 0$ và $\lim \dfrac{5}{n} = 0$.

Từ đó có $\lim u_n = \dfrac{\sqrt{2+0} - \sqrt{1+0}}{\sqrt{4-0}} = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}$.

DẠNG 3: u_n LÀ MỘT PHÂN THỨC HỮU TỈ DẠNG $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ (TRONG ĐÓ $P(n), Q(n)$ LÀ CÁC BIỂU THỨC CHỨA HÀM MŨ a^n, b^n, c^n ,....)

Phương pháp : Chia cả tử và mẫu cho a^n với a là cơ số lớn nhất.

Ví dụ 3: Tìm giới hạn của dãy (u_n) biết:

a). $u_n = \dfrac{2^n + 4^n}{4^n - 3^n}$ b) $u_n = \dfrac{2^n - 3^n + 4.5^{n+2}}{2^{n+1} + 3^{n+2} + 5^{n+1}}$

a).Ta có $u_n = \dfrac{2^n + 4^n}{4^n - 3^n} = \dfrac{\dfrac{2^n + 4^n}{4^n}}{\dfrac{4^n - 3^n}{4^n}} = \dfrac{\dfrac{2^n}{4^n} + \dfrac{4^n}{4^n}}{\dfrac{4^n}{4^n} - \dfrac{3^n}{4^n}} = \dfrac{\left(\dfrac{2}{4}\right)^n + 1}{1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n}$. Ta có $\lim\left(\dfrac{2}{4}\right)^n = 0$ và $\lim\left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$.

Nên $\lim u_n = \dfrac{0+1}{1-0} = 1$.

b) Ta có $u_n = \dfrac{2^n - 3^n + 4.5^{n+2}}{2^{n+1} + 3^{n+2} + 5^{n+1}} = \dfrac{2^n - 3^n + 100.5^n}{2.2^n + 9.3^n + 5.5^n} = \dfrac{\dfrac{2^n - 3^n + 100.5^n}{5^n}}{\dfrac{2.2^n + 9.3^n + 5.5^n}{5^n}}$

$= \dfrac{\dfrac{2^n}{5^n} - \dfrac{3^n}{5^n} + 100.\dfrac{5^n}{5^n}}{2.\dfrac{2^n}{5^n} + 9.\dfrac{3^n}{5^n} + 5.\dfrac{5^n}{5^n}} = \dfrac{\left(\dfrac{2}{5}\right)^n - \left(\dfrac{3}{5}\right)^n + 100}{2.\left(\dfrac{2}{5}\right)^n + 9.\left(\dfrac{3}{5}\right)^n + 5}$. Vì $\lim\left(\dfrac{2}{5}\right)^n = 0$ và $\lim\left(\dfrac{3}{5}\right)^n = 0$

Nên $\lim u_n = \dfrac{0 - 0 + 100}{2.0 + 9.0 + 5} = 20$.

DẠNG 4 : NHÂN LƯỢNG LIÊN HỢP

Dấu hiệu nhận biết nhân lượng liên hợp : Để nhận biết một bài tập có nhân lượng liên hợp hay không các bạn chỉ chú ý tới n có mũ cao nhất sau đó đưa ra ngoài dấu căn thức, nếu chúng trừ nhau bằng 0 thì bài này ta phải nhân lượng liên hợp. Cụ thể ta làm lại câu a) $u_n=\sqrt{n^2+3n+5}-n$ biểu thức trong căn thức có n^2 là cao nhất và ta quan tâm đến « nó », những thừa số sau bỏ hết có nghĩa xem $u_n=\sqrt{n^2}-n=n-n=0$ (nên các bạn phải nhân lượng liên hợp).

Dùng các hằng đẳng thức:

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b; \qquad \left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a-b$$

Ví dụ 4: Tìm giới hạn của dãy (u_n) biết:

a). $u_n=\sqrt{n^2+3n+5}-n$ b). $u_n=\sqrt{9n^2+3n-4}-3n+2$

c). $u_n=\sqrt[3]{n^3+3n^2}-n$ d). $u_n=\sqrt{4n^2+3n+7}-\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}$

a). Ta có $u_n=\sqrt{n^2+3n+5}-n=\dfrac{\left(\sqrt{n^2+3n+5}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n+5}+n\right)}{\sqrt{n^2+3n+5}+n}=\dfrac{3n+5}{\sqrt{n^2+3n+5}+n}$. Và có

$3n+5=n\left(\dfrac{3n+5}{n}\right)=n\left(3+\dfrac{5}{n}\right)$ và $\sqrt{n^2+3n+5}=\sqrt{n^2\left(\dfrac{n^2+3n+5}{n^2}\right)}=n\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}$.

Do đó $u_n=\dfrac{n\left(3+\dfrac{5}{n}\right)}{n\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}+n}=\dfrac{3+\dfrac{5}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}+1}$, vì $\lim\dfrac{5}{n}=0,\ \lim\dfrac{3}{n}=0$ và $\lim\dfrac{5}{n^2}=0$. Nên $\lim u_n=\dfrac{3}{2}$.

b). $u_n=\sqrt{9n^2+3n-4}-3n+2=\dfrac{\left(\sqrt{9n^2+3n-4}-3n\right)\left(\sqrt{9n^2+3n-4}+3n\right)}{\sqrt{9n^2+3n-4}+3n}+2=\dfrac{3n-4}{\sqrt{9n^2+3n-4}+3n}+2$.

Ta có $3n-2=n\left(\dfrac{3n-2}{n}\right)=n\left(3-\dfrac{2}{n}\right)$ và $\sqrt{9n^2+3n-4}=\sqrt{n^2\left(\dfrac{9n^2+3n-4}{n^2}\right)}=n\sqrt{9+\dfrac{3}{n}-\dfrac{4}{n^2}}$.

Từ đó suy ra $u_n=\dfrac{n\left(3-\dfrac{2}{n}\right)}{n\sqrt{9+\dfrac{3}{n}-\dfrac{4}{n^2}}+3n}+2=\dfrac{3-\dfrac{2}{n}}{\sqrt{9+\dfrac{3}{n}-\dfrac{4}{n^2}}+3}+2$, vì $\lim\dfrac{2}{n}=0,\ \lim\dfrac{3}{n}=0$ và $\lim\dfrac{4}{n^2}=0$.

Nên $\lim u_n=\dfrac{3-0}{\sqrt{9+0-0}+3}=\dfrac{1}{2}$.

c). $u_n=\sqrt[3]{n^3+3n^2}-n=\dfrac{\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}-n\right)\left[\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}\right)^2+n.\sqrt[3]{n^3+3n^2}+n^2\right]}{\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}\right)^2+n.\sqrt[3]{n^3+3n^2}+n^2}$

$=\dfrac{3n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}\right)^2+n.\sqrt[3]{n^3+3n^2}+n^2}$. Ta có $\sqrt[3]{n^3+3n^2}=\sqrt[3]{n^3\left(\dfrac{n^3+3n^2}{n^3}\right)}=n.\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{n}}$.

Do đó $u_n=\dfrac{3n^2}{n^2\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{n}}\right)^2+n^2.\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{n}}+n^2}=\dfrac{3}{\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{n}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{n}}+1}$, ta có $\lim\dfrac{3}{n}=0$. Nên $\lim u_n=1$

d). $u_n=\sqrt{4n^2+3n+7}-\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}=\left(\sqrt{4n^2+3n+7}-2n\right)+\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}\right)$

- Tính $\lim\left(\sqrt{4n^2+3n+7}-2n\right)=\lim\dfrac{3n+7}{\sqrt{4n^2+3n+7}+2n}=\lim\dfrac{3+\dfrac{7}{n}}{\sqrt{4+\dfrac{3}{n}+\dfrac{7}{n^2}}+2}=\dfrac{3}{4}$
- Tính $\lim\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}\right)$

$=\lim\dfrac{\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}\right)\left[4n^2+2n.\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}+\left(\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}\right)^2\right]}{4n^2+2n.\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}+\left(\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}\right)^2}$

$=\lim\dfrac{-5n^2-1}{4n^2+2n.\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}+\left(\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}\right)^2}\quad(1)$

Có $\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}=\sqrt[3]{n^3\left(\dfrac{8n^3+5n^2+1}{n^3}\right)}=n.\sqrt[3]{8+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^3}}$

Nên $(1)\Leftrightarrow\lim\dfrac{n^2\left(-5-\dfrac{1}{n^2}\right)}{4n^2+2n^2.\sqrt[3]{8+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^3}}+n^2.\left(\sqrt[3]{8+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^3}}\right)^2}$

$=\lim\dfrac{-5-\dfrac{1}{n^2}}{4+2.\sqrt[3]{8+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^3}}+\left(\sqrt[3]{8+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^3}}\right)^2}=-\dfrac{5}{12}$. Từ đó suy ra $\lim u_n=\dfrac{3}{4}-\dfrac{5}{12}=\dfrac{1}{3}$.

DẠNG 5. GIỚI HẠN CỦA MỘT TỔNG DÀI DÀI

Ví dụ 3 : Tìm giới hạn của dãy (u_n) biết:

a). $u_n=\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}$

b). $u_n=\dfrac{1}{1.4}+\dfrac{1}{4.7}+\dfrac{1}{7.10}\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

c). $u_n=\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)...\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

d). $u_n=\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n+1)}{3n^2+4}$

e). $u_n=\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n(n+1)(n+2)}$

f). $\lim\left(\dfrac{1}{1.2.3}+\dfrac{1}{2.3.4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$

a). Ta có $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{k+1-k}{k(k+1)}=\dfrac{k+1}{k(k+1)}-\dfrac{k}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1},(\forall k=1,2,...,n)$.

Từ đó $u_n=\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=1-\dfrac{1}{n+1}$.

Nên $\lim u_n=\lim\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=\lim 1-\lim\dfrac{1}{n+1}=1-0=1$.

b). Ta có $\dfrac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{(3k+1)-(3k-2)}{(3k-2)(3k+1)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3k+1}{(3k-2)(3k+1)}-\dfrac{3k-2}{(3k-2)(3k+1)}\right)$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3k-2}-\dfrac{1}{3k+1}\right),(\forall k=1,2,3...,n)$. Từ đó $u_n=\dfrac{1}{1.4}+\dfrac{1}{4.7}+\dfrac{1}{7.10}\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

$=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{10}+\cdots+\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}\right)=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{3n+1}\right)$, có $\lim\dfrac{1}{3n+1}=0$.

Do đó $\lim u_n=\dfrac{1}{3}(1-0)=\dfrac{1}{3}$.

c). $\forall k\geq 2$ ta có $1-\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{k^2-1}{k^2}=\dfrac{(k-1)(k+1)}{k^2}$. Do đó $u_n=\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)...\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

$=\dfrac{1.3}{2^2}\cdot\dfrac{2.4}{3^2}\cdot\dfrac{3.5}{4^2}\cdot\dfrac{4.6}{5^2}\cdots\dfrac{(n-3)(n-1)}{(n-2)^2}\cdot\dfrac{(n-2)n}{(n-1)^2}\cdot\dfrac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{n+1}{n}$.

Nên $\lim u_n=\lim\dfrac{n+1}{2n}=\lim\dfrac{1+\frac{1}{n}}{2}=\dfrac{1}{2}$.

d). $u_n=\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n+1)}{3n^2+4}$.

Ta có dãy số $1+3+5+\cdots+(2n+1)$ là một cấp số cộng với $u_1=1$ công sai $d=3-1=2$ và số hạng tổng quát $u_m=2n+1 \Leftrightarrow u_1+(m-1)d=2n+1 \Leftrightarrow 1+(m-1).2=2n+1 \Leftrightarrow m=n+1$, nên tổng của dãy số trên là

$S=\frac{m}{2}(u_1+u_m)=\frac{n+1}{2}(1+2n+1)=(n+1)^2$. Từ đó $u_n=\frac{(n+1)^2}{3n^2+4}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{3+\frac{4}{n^2}}$ có $\lim\frac{1}{n}=0$ và $\lim\frac{4}{n^2}=0$

Từ đó suy ra $\lim u_n=\frac{1}{3}$.

e). $u_n=\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n(n+1)(n+2)}$. Ta có tổng $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (được chứng minh bằng phương pháp quy nạp). Nên $u_n=\frac{2n+1}{6(n+2)}=\frac{2+\frac{1}{n}}{6\left(1+\frac{2}{n}\right)}$ vì $\lim\frac{1}{n}=\lim\frac{2}{n}=0$ do đó $\lim u_n=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

f). Ta có $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$ (Chứng minh dựa vào nguyên lý quy nạp). Do đó $L=\lim\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=\lim\frac{1}{4}-\lim\frac{1}{2(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}$.

II. GIỚI HẠN HÀM SỐ

Giới hạn hữu hạn	Giới hạn vô cực, giới hạn ở vô cực
1. Giới hạn đặc biệt: $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$ (c: hằng số) **2. Định lí:** a) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$ thì: $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right] = L+M$ $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right] = L-M$ $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right] = L.M$ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (nếu $M \ne 0$) b) Nếu $f(x) \ge 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ thì $L \ge 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$ c) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\lvert f(x)\rvert = \lvert L\rvert$ **3. Giới hạn một bên:** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$ $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$	**1. Giới hạn đặc biệt:** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{neáu } k \text{ chaün} \\ -\infty & \text{neáu } k \text{ leû} \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} c = c$; $\quad$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{c}{x^k} = 0$ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x} = -\infty$; $\quad$ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{\lvert x\rvert} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\lvert x\rvert} = +\infty$ **2. Định lí:** Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \ne 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ thì: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{neáu } L \text{ vaø } \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \text{ cuøng daáu} \\ -\infty & \text{neáu } L \text{ vaø } \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \text{ traùi daáu} \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & \text{neáu } \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty \\ +\infty & \text{neáu } \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0 \text{ vaø } L.g(x) > 0 \\ -\infty & \text{neáu } \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0 \text{ vaø } L.g(x) < 0 \end{cases}$ * Khi tính giới hạn có một trong các dạng vô định: $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0.\infty$ thì phải tìm cách khử dạng vô định.

DẠNG 1. THAY TRỰC TIẾP ĐƯỢC SỐ

Ví dụ 1: Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+2x^2+1}{2x^5+1}$ là:

A. -2. $\qquad$ **B.** $-\dfrac{1}{2}$. $\qquad$ **C.** $\dfrac{1}{2}$. $\qquad$ **D.** 2.

Chọn A.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+2x^2+1}{2x^5+1} = \frac{(-1)^3+2.(-1)^2+1}{2(-1)^5+1} = -2$$

DẠNG 2. L = $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ VỚI P(X), Q(X) LÀ CÁC ĐA THỨC VÀ $P(X_0) = Q(X_0) = 0$

Phân tích cả tử và mẫu thành nhân tử và rút gọn.

Chú ý:

+ Nếu tam thức bậc hai ax^2+bx+c có hai nghiệm x_1, x_2 thì ta luôn có sự phân tích $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$.

+ $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

Ví dụ 2: Tìm các giới hạn sau:

a). $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+8}{x^2+11x+18}$ b). $\lim\limits_{x \to 2}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2} + \dfrac{1}{x^2-5x+6}\right)$

a).Ta có $x^3+8 = x^3+2^3 = (x+2)(x^2+2x+4)$ (áp dụng hằng đẳng thức), và $x^2+11x+18 = (x+2)(x+9)$ (với $x_1 = -2$ và $x_2 = -9$ là hai nghiệm của phương trình $x^2+11x+18 = 0$).

Do đó $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+8}{x^2+11x+18} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x+9)} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2-2x+4}{x+9} = \dfrac{12}{7}$.

f). $L = \lim\limits_{x \to 2}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2} + \dfrac{1}{x^2-5x+6}\right) = \lim\limits_{x \to 2}\left[\dfrac{1}{(x-1)(x-2)} + \dfrac{1}{(x-2)(x-3)}\right] = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2}{(x-1)(x-3)} = -2$

DẠNG 3. L = $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ VỚI $P(X_0) = Q(X_0) = 0$ VÀ P(X), Q(X) LÀ CÁC BIỂU THỨC CHỨA CĂN CÙNG BẬC

Sử dụng các hằng đẳng thức để nhân lượng liên hợp ở tử và mẫu.

Các lượng liên hợp:

+ $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$

+ $(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=a-b$

+ $(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+...+\sqrt[n]{b^{n-1}})=a-b$

Ví dụ 3: Tìm các giới hạn sau :

a). $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

b). $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$

c). $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$

d) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2}$

a). $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+3-2^2}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\dfrac{1}{4}.$

b). $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\left(x^2-2x+6\right)-\left(x^2+2x-6\right)}{\left(x^2-4x+3\right)\left(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{-4(x-3)}{(x-1)(x-3)\left(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}\right)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{-4}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}\right)}=-\dfrac{1}{3}.$

c). $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\left(x+2-2^2\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\left(x+7-3^2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+2}+2}=\dfrac{3}{2}.$

d) Ta có $\sqrt[3]{4x}-2=\dfrac{\left(\sqrt[3]{4x}-2\right)\left[\left(\sqrt[3]{4x}\right)^2+2.\sqrt[3]{4x}+4\right]}{\underbrace{\left(\sqrt[3]{4x}\right)^2+2.\sqrt[3]{4x}+4}_{A}}=\dfrac{\left(\sqrt[3]{4x}\right)^3-2^3}{A}=\dfrac{4x-8}{A}=\dfrac{2(x-2)}{A}.$

Do đó $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2(x-2)}{(x-2).A}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2}{A}=\dfrac{2}{\left(\sqrt[3]{4.2}\right)^2+2.\sqrt[3]{4.2}+4}=\dfrac{1}{6}.$

DẠNG 4: THÊM BỚT SỐ HẠNG HOẶC MỘT BIỂU THỨC VẮNG ĐỂ KHỬ ĐƯỢC DẠNG VÔ ĐỊNH

Các dạng hay gặp $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt[k]{f(x)}+\sqrt[k]{g(x)}+c}{x-x_0}$ **hoặc** $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt[k]{f(x)}+\sqrt[m]{g(x)}+c}{x-x_0}$ **hoặc** $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt[k]{f(x)}+\sqrt[m]{g(x)}+c}{(x-x_0)^n}$ **. Trong đó k, m, n** $\in\mathbb{N}^*$ **và** $n\le\min(k,m)$**.**

Ví dụ 4: Tìm các giới hạn sau :

a). $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x+2}+\sqrt{5x+4}-5}{x-1}$

b). $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-\sqrt{5x-6}}{x-2}$

a). Ta có khi $x\to1$ thì $\left(\sqrt{2x+2}+\sqrt{5x+4}-5\right)\to0$ do đó đây là bài dạng vô định $\dfrac{0}{0}$, ta phải tách được về dạng $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{f(x)}-c}{x-1}+\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{g(x)}-m}{x-1}$ sao cho mỗi giới hạn nhân lượng liên hợp đều khử được dạng vô định . Kỹ thuật ta thay $x=1$ vào $\sqrt{2x+2}=2$ và $\sqrt{5x+4}=3$ nên số (-5) tách thành $(-2)+(-3)$ và gom lại như sau :

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x+2}+\sqrt{5x+4}-5}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{2x+2}-2\right)+\left(\sqrt{5x+4}-3\right)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x+2}-2}{x-1}+\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{5x+4}-3}{x-1}.$$

Sau đó tính từng giới hạn.

- Tính $L_1=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x+2}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(\sqrt{2x+2}-2\right)\left(\sqrt{2x+2}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{2x+2}+2\right)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(\sqrt{2x+2}\right)^2-4}{(x-1)\left(\sqrt{2x+2}+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{2x+2}+2\right)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2}{\sqrt{2x+2}+2}=\dfrac{1}{2}.$

- Tính $L_2=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5x+4}-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(\sqrt{5x+4}-3\right)\left(\sqrt{5x+4}+3\right)}{(x-1)\left(\sqrt{5x+4}+3\right)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(\sqrt{5x+4}\right)^2-9}{(x-1)\left(\sqrt{5x+4}+3\right)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{5x+4}+3\right)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5}{\sqrt{5x+4}+3}=\dfrac{5}{6}.$

Kết luận $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x+2}+\sqrt{5x+4}-5}{x-1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{6}=\dfrac{4}{3}.$

b). $L=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-\sqrt{5x-6}}{x-2}$.

Thay $x=2$ vào $\sqrt[3]{3x+2}$ và $\sqrt{5x-6}$ đều bằng 2. Suy ra 2 là giá trị ta cần thêm bớt.

Cụ thể làm như sau: $L=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-\sqrt{5x-6}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt[3]{3x+2}-2\right)+\left(2-\sqrt{5x-6}\right)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2}+\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-\sqrt{5x-6}}{x-2}$.

Tính $L_1=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt[3]{3x+2}-2\right)\left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+2.\sqrt[3]{3x+2}+4\right]}{(x-2)\underbrace{\left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+2.\sqrt[3]{3x+2}+4\right]}_{A}}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3(x-2)}{(x-2).A}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3}{A}=\dfrac{1}{4}$.

Tính $L_2=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-\sqrt{5x-6}}{x-2}=\dfrac{\left(2-\sqrt{5x-6}\right)\left(2+\sqrt{5x-6}\right)}{(x-2)\left(2+\sqrt{5x-6}\right)}=\dfrac{4-(5x-6)}{(x-2)\left(2+\sqrt{5x-6}\right)}$

$=\dfrac{-5(x-2)}{(x-2)\left(2+\sqrt{5x-6}\right)}=\dfrac{-5}{2+\sqrt{5x-6}}=-\dfrac{5}{4}$. Do đó $L=L_1+L_2=\dfrac{1}{4}-\dfrac{5}{4}=-1$.

DẠNG 5. L = $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ TRONG ĐÓ $P(x),Q(x)\to\infty$, DẠNG NÀY TA CÒN GỌI LÀ DẠNG VÔ ĐỊNH $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Phương pháp: (làm giống giới hạn dãy số)

với P(x), Q(x) là các đa thức hoặc các biểu thức chứa căn.

– Nếu P(x), Q(x) là các đa thức thì chia cả tử và mẫu cho luỹ thừa cao nhất của x.

– Nếu P(x), Q(x) có chứa căn thì có thể chia cả tử và mẫu cho luỹ thừa cao nhất của x hoặc nhân lượng liên hợp.

Tương tự như cách khử dạng vô định ở dãy số. Ta cần tìm cách đưa về các giới hạn:

+ $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} x^{2k}=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} x^{2k+1}=+\infty\ (-\infty)$.

+ $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \dfrac{k}{x^n}=0\ \ (n>0;k\neq 0)$.

+ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty\ (-\infty)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{k}{f(x)}=0\ \ (k\neq 0)$.

Ví dụ 5: Giá trị đúng của $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4+7}{x^4+1}$ là:

A. -1. **B.** 1.. **C.** 7.. **D.** $+\infty$.

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^4+7}{x^4+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{7}{x^4}}{1+\frac{1}{x^4}}=1.$$

Ví dụ 6: Tìm giới hạn $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-\sqrt{3x^2+2}}{5x+\sqrt{x^2+1}}$ là:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{2-\sqrt{3}}{6}$ **D.** 0

Ta có: $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\sqrt{3+\frac{2}{x^2}}}{5+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{6}$

Ví dụ 7: Tìm giới hạn $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^4+x^6}}{\sqrt{1+x^3+x^4}}$ là:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{4}{3}$ **D.** -1

$$D=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^2}+1}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}}}=-1$$

Ví dụ 8: Tìm giới hạn $E=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)$ là:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\dfrac{1}{2}$ **D.** 0

Ta có: $E=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=-\dfrac{1}{2}$

DẠNG 6: GIỚI HẠN MỘT BÊN

Ví dụ 9: Tìm các giới hạn sau:

a). $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{|x-3|}{5x-15}$ b). $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$.

a). Vì $x\to 3^+ \Rightarrow x>3 \Leftrightarrow x-3>0$. Vậy $|x-3|=x-3$

Ta có $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{|x-3|}{5x-15}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x-3}{5(x-3)}=\dfrac{1}{5}$.

b). Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=-1$.

Ví dụ 10: $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x^3-x^2}}{\sqrt{x-1}+1-x}$ bằng:

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Chọn C.

$$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x^3-x^2}}{\sqrt{x-1}+1-x}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x^2(x-1)}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{(x-1)^2}}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\left(1-\sqrt{x-1}\right)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{\left(1-\sqrt{x-1}\right)}=1.$$

DẠNG 7 : GIỚI HẠN LƯỢNG GIÁC

Phương pháp:

Ta sử dụng các công thức lượng giác biến đổi về các dạng sau:

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$, từ đây suy ra $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=1$.
- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin u(x)}{u(x)}=1$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\tan u(x)}{u(x)}=1$.

Ví dụ 11: Tìm các giới hạn sau

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{3x}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x.\sin 3x.\sin x}{45x^3}$ 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x-\sin 5x}{\sin x}$

1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{\sin 5x}{5x}=\dfrac{1}{5}$

2). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\tan 2x}{2x}=\dfrac{2}{3}$

3). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\tan\dfrac{x}{2}=0$

4). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

5). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x.\sin 3x.\sin x}{45x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{3}$

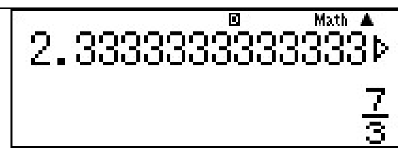
6). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x-\sin 5x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos 6x\sin x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}2\cos 6x=2$

DẠNG 8: SỬ DỤNG MÁY TÍNH: TÍNH GIỚI HẠN

Gán cho biến X một giá trị gần đúng rồi tính giá trị biểu thức (dùng phím CALC)

Giới hạn	CACL X =
$x \to a^+$	a + 0.00000001
$x \to a^-$	a – 0,00000001
$x \to 1$	1.000000001 hoặc 0,99999999
$x \to +\infty$	9999999999
$x \to -\infty$	- 999999999

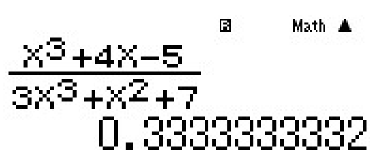
(Nếu máy báo lỗi thì lấy ít chữ số 0 hơn)

Các kết quả hay gặp trong máy	*Ý nghĩa*
Số có số mũ lớn: VD: 2.10^{20}	Dương vô cực
Số có số mũ lớn: VD: -2.10^{20}	Âm vô cực
Số có số mũ nhỏ: VD: 2.10^{-20}	0
Số chưa đẹp: VD: 2,3333. Cách 1. Ta gõ lại vào máy tính lần nữa: 2,3333333333333 Máy sẽ tự làm tròn giúp. Cách 2. Ta ấn 2. ALPHA √■ 3	

Ví dụ 12: Tính giới hạn : $\lim \dfrac{n^3+4n-5}{3n^3+n^2+7}$

A. $\dfrac{1}{3}$ **B.** 1 **C.** $\dfrac{1}{4}$ **D.** $\dfrac{1}{2}$

- Đề bài không cho x tiến tới bao nhiêu thì ta hiểu đây là giới hạn dãy số và $x \to +\propto$
  Nhập biểu thức vào máy tính ta ấn CALC x = 999999999



- Ta nhận được kết quả $0.3333333332 \approx \dfrac{1}{3}$ $\Rightarrow$ **A** là đáp án chính xác

Ví dụ 13: Tìm giới hạn $D = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^4+x^6}}{\sqrt{1+x^3+x^4}}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{4}{3}$ **D.** -1

Nhập biểu thức vào máy tính ta ấn CALC x = -999999

Ta được kết quả bằng -1

Ví dụ 14: Tìm giới hạn $E=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{4x-1}-\sqrt{x+2}}{\sqrt[4]{2x+2}-2}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{-8}{27}$ **D.** 1

Ta nhập biểu thức vào máy tính và ấn CALC x = 7+0,000000001 hoặc CALC x = 7 – 0,000000001

Ta được kết quả bằng $\dfrac{-8}{27}$

Ví dụ 15: $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x^3-x^2}}{\sqrt{x-1}+1-x}$ bằng:

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Ta nhập biểu thức vào máy tính và ấn CALC x = 1+0,000000001

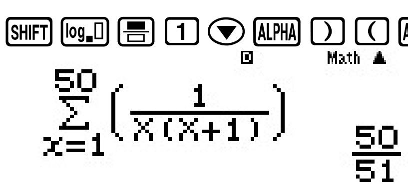
Ta được kết quả bằng 1

Ví dụ 16: Tính giới hạn: $\lim\left[\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+....+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$

A. 0 **B.** 1. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** Không có giới hạn.

Ta có: $\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+....+\dfrac{1}{n(n+1)}=\sum\limits_{x=1}^{n}\dfrac{1}{x(x+1)}$

Ta cho n tăng đến n = 50. Nhập vào máy tính



Ta thấy kết quả xấp xỉ bằng 1. **Chọn B**

Ví dụ 17: Tính giới hạn của dãy số $u_n=\dfrac{(n+1)\sqrt{1^3+2^3+...+n^3}}{3n^3+n+2}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{1}{9}$ **D.** 1

Ta có: $\dfrac{(n+1)\sqrt{1^3+2^3+...+n^3}}{3n^3+n+2}=\dfrac{(n+1)\sqrt{\sum\limits_{x=1}^{n}x^3}}{3n^3+n+2}$

Ta cho n tăng đến n = 50. Nhập vào máy tính

$\dfrac{(50+1)\sqrt{\sum\limits_{x=1}^{50}x^3}}{3.50^3+50+2}=0{,}1733$. Gần nhất với đáp án C.

III. HÀM SỐ LIÊN TỤC

1. Hàm số liên tục tại một điểm: y = f(x) liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

- Để xét tính liên tục của hàm số y = f(x) tại điểm x_0 ta thực hiện các bước:

  B1: Tính $f(x_0)$.

  B2: Tính $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (trong nhiều trường hợp ta cần tính $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$)

  B3: So sánh $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ với $f(x_0)$ và rút ra kết luận.

2. Hàm số liên tục trên một khoảng: y = f(x) liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

3. Hàm số liên tục trên một đoạn [a; b]: y = f(x) liên tục trên (a; b) và

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a),\ \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$$

- Hàm số đa thức liên tục trên R.
- Hàm số phân thức, các hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

Giả sử y = f(x), y = g(x) liên tục tại điểm x_0. Khi đó:

- Các hàm số y = f(x) + g(x), y = f(x) – g(x), y = f(x).g(x) liên tục tại x_0.
- Hàm số $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

4. Nếu y = f(x) liên tục trên [a; b] và f(a). f(b)< 0 thì tồn tại ít nhất một số c ∈ (a; b): f(c) = 0.

Nói cách khác: Nếu y = f(x) liên tục trên [a; b] và f(a). f(b)< 0 thì phương trình f(x) = 0 có ít nhất một nghiệm c∈ (a; b).

Mở rộng: Nếu y = f(x) liên tục trên [a; b]. Đặt m = $\min\limits_{[a;b]} f(x)$, M = $\max\limits_{[a;b]} f(x)$. Khi đó với mọi T ∈ (m; M) luôn tồn tại ít nhất một số c ∈ (a; b): f(c) = T.

DẠNG 1: XÉT TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

Phương pháp 1:

Bước 1: Tính $f(x_0)$.

Bước 2: Tính $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ thì hàm số f(x) liên tục tại x_0.

Phương pháp 2:

Bước 1: Tìm $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

Bước 2: Tìm $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ thì hàm số f(x) liên tục tại x_0.

Ví dụ 1. Cho hàm số: $y=f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{x^2+5}}{x^2-4} & x\neq \pm 2\\ -\dfrac{1}{6} & x=2\end{cases}$

a). Tính $\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)$.

b). Xét tính liên tục của hàm số $f\left(x\right)$ tại $x=2; x=-2$.

a).Ta có $\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3-\sqrt{x^2+5}}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{9-x^2-5}{\left(x^2-4\right)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-1}{3+\sqrt{x^2+5}}=-\dfrac{1}{6}$.

b). Từ câu a) suy ra $\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)=f\left(2\right)$. Vậy hàm số đã cho liên tục tại $x=2$.

hàm số đã cho không xác định tại $x=-2$, do đó hàm số không liên tục tại $x=-2$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & x\neq 2\\ a & x=2\end{cases}$

Với giá trị nào của a thì hàm số đã cho liên tục tại điểm $x=2$?

Ta có $\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x-1\right)\left(x-2\right)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\left(x-1\right)=1$.

Hàm liên tục tại $x=2$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)=f\left(2\right)\Leftrightarrow a=1$.

Vậy hàm số đã cho liên tục tại $x=2$ khi $a=1$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\left|2x^2-7x+6\right|}{x-2} & \text{khi } x<2\\ \text{a}+\dfrac{1-x}{2+x} & khi\ \ x\geq 2\end{cases}$. Xác định a để hàm số f(x) liên tục tại $x_0=2$

.

Ta có :

- $\lim\limits_{x\to 2^-} f\left(x\right)=\dfrac{\left|2x^2-7x+6\right|}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\left|\left(x-2\right)\left(2x-3\right)\right|}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\left(2-x\right)\left(2x-3\right)}{x-2}$

  $=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(3-2x\right)=-1$

- $\lim\limits_{x\to 2^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\text{a}+\dfrac{1-x}{2+x}\right)=a-\dfrac{1}{4}=f\left(2\right)$.

Hàm số liên tục tại $x_0=2\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^+} f\left(x\right)=f\left(2\right)\Leftrightarrow a-\dfrac{1}{4}=-1\Leftrightarrow a=-\dfrac{3}{4}$.

DẠNG 2: HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT TẬP HỢP

Ví dụ 4: Chứng minh các hàm số sau liên tục trên R.

a). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^3+x+3}{x^3+1} & x\neq -1\\ \dfrac{7}{3} & x=-1\end{cases}$ b). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & x>1\\ -\sqrt{5-x} & x\le 1\end{cases}$

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^3+x+3}{x^3+1} & x\neq -1\\ \dfrac{7}{3} & x=-1\end{cases}$. Tập xác định của f(x) là $D=\mathbb{R}$

Nếu $x\neq -1$ thì $f(x)=\dfrac{2x^3+x+3}{x^3+1}$ là hàm số phân thức hữu tỉ, nên liên tục trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$ (1).

Bây giờ ta xét tính liên tục của f(x) tại $x_0=-1$

Ta có: $f(x_0)=f(-1)=\dfrac{7}{3}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3+x+3}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(2x^2-2x+3)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-2x+3}{x^2-x+1}=\dfrac{7}{3}$

Vì $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=f(-1)\Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x_0=-1$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra hàm số f(x) liên tục trên R.

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & x>1\\ -\sqrt{5-x} & x\le 1\end{cases}$. Tập xác định của f(x) là $D=\mathbb{R}$

Với mọi $x_0\in(1;+\infty)$, ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}=\dfrac{x_0^2-4x_0+3}{x_0-1}=f(x_0)$. Suy ra hàm số f(x) liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$ (1).

Với mọi $x_0\in(-\infty;1)$, ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\left(-\sqrt{5-x}\right)=-\sqrt{5-x_0}=f(x_0)$. Suy ra hàm số f(x) liên tục trên khoảng $(-\infty;1)$ (2).

Ta xét tính liên tục của f(x) tại $x_0=1$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(x-3)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-3)=-2.$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(-\sqrt{5-x}\right) = -2.$

Và có $f(1) = -\sqrt{5-1} = 2$

Vì $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow$ Hàm số liên tục tại 1 (3)

Từ (1) (2) và (3) suy ra f(x) liên tục trên R.

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 & x \le 3 \\ ax+b & 3 < x < 5 \\ 7 & x \ge 5 \end{cases}$

Xác định a, b để hàm số liên tục trên R.

Ta có tập xác định của hàm số f(x) là $D = \mathbb{R}$.

Ta có: hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty;3),(3;5),(5;+\infty)$ (vì là hàm đa thức).

Do đó hàm số liên tục trên R khi và chỉ khi hàm số liên tục tại các điểm $x=3$ và $x=5$.

+ Tại $x=3$:

Ta có $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} 1 = 1$ và $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+}(ax+b) = 3a+b$ và $f(3)=1$.

Do đó hàm liên tục tại $x=3$ khi và chỉ khi

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = f(3) \Leftrightarrow 3a+b=1 \quad (1)$

+ Tại $x=5$

Ta có $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 5a+b$ và $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = 7 = f(5)$.

Do đó hàm số liên tục tại $x=5$ khi và chỉ khi

$\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = f(5) \Leftrightarrow 5a+b=7 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra hàm số liên tục trên R khi và chỉ khi: $\begin{cases} 3a+b=1 \\ 5a+b=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-8 \end{cases}$.

Vậy với $a=3, b=-8$ thì hàm số liên tục trên R.

DẠNG 3: CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM

Phương pháp:

Bước 1: Biến đổi phương trình về dạng $f(x)=0$.

Bước 2: Tìm hai số a và b sao cho $f(a).f(b)<0$.

Bước 3: Chứng minh hàm số f(x) liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Từ đó suy ra phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(a;b)$.

Chú ý:

Nếu $f(a).f(b)\le 0$ thì phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc $[a;b]$

Nếu hàm số f(x) liên tục trên $[a;+\infty)$ và có $f(a).\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(a;+\infty)$.

Nếu hàm số f(x) liên tục trên $(-\infty;a]$ và có $f(a).\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-\infty;a)$.

Ví dụ 6: Chứng minh rằng phương trình $4x^3-8x^2+1=0$ có nghiệm trong khoảng $(-1;2)$

Hàm số $f(x)=4x^3-8x^2+1$ liên tục trên R.

Ta có $f(-1)=-11, f(2)=1$ nên $f(-1).f(2)<0$

Do đó theo tính chất hàm số liên tục, phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1;2)$

Ví dụ 7: Chứng minh phương trình $4x^4+2x^2-x-3=0$ có ít nhất 2 nghiệm thuộc khoảng $(-1;1)$.

Đặt $f(x)=4x^4+2x^2-x-3$ thì $\mathrm{f}(x)$ liên tục trên R.

$f(-1)=4+2+1-3=4; f(0)=-3; f(1)=2.$

Vì $f(-1).f(0)<0$ nên phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$

$f(1).f(0)<0$ suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

Mà hai khoảng $(-1;0)$, $(0;1)$ không giao nhau. Từ đó suy ra phương trình đã cho có ít nhất 2 nghiệm thuộc khoảng $(-1;1)$.

Ví dụ 8: Chứng minh rằng phương trình $(m^2-m+3)x^{2n}-2x-4=0$ với $n\in\mathbb{N}^*$ luôn có ít nhất một nghiệm âm với mọi giá trị của tham số m.

Đặt $f(x)=(m^2-m+3)x^{2n}-2x-4$.

Ta có $f(-2)=(m^2-m+3)(-2)^{2n}-2(-2)-4=(m^2-m+3).2^{2n}>0,\forall m\in\mathbb{R}$, $f(0)=-4<0,\forall m\in\mathbb{R}$. Từ đó có $f(-2).f(0)<0,\forall m\in\mathbb{R}$ (1). Do hàm số xác định và liên tục trên R nên hàm số liên tục trên đoạn $[-2;0]$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-2;0),\forall m\in\mathbb{R}$.

Kết luận phương trình $f(x)=0$ luôn có ít nhất một nghiệm âm với mọi giá trị tham số m.

Ví dụ 9: Chứng minh phương trình sau có nghiệm với mọi $m\in\mathbb{R}$

a). $m(x-1)(x+2)+2x+1=0$ (1)

b). $(4m+1)x^3-(m+1)x+m=0$ (1)

a). $m(x-1)(x+2)+2x+1=0$ (1)

Đặt $f(x)=m(x-1)(x+2)+2x+1$.

Tập xác định của hàm số f(x) là $D=R$. Vì f(x) là hàm đa thức $\Rightarrow f(x)$ liên tục trên R.

Ta có $f(-2)=m(-2-1)(-2+2)+2(-2)+1=-3$ và có $f(1)=m(1-1)(1+2)+2.1+1=3$. Vì $f(-2).f(1)=-3.3=-9<0$ với mọi m.

Do đó $f(x)=0$ luôn có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $x_0\in(-2,1)$ với mọi m.

Kết luận phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi giá trị m.

b). $(4m+1)x^3-(m+1)x+m=0$ (1)

Đặt $f(x)=(4m+1)x^3-(m+1)x+m$. Tập xác định của hàm số f(x) là $D=R$. Vì f(x) là hàm đa thức $\Rightarrow f(x)$ liên tục trên R.

Ta có $f(0)=m$ và có $f(-1)=(4m+1)(-1)^3-(m+1)(-1)+m=-2m$. Từ đó suy ra $f(-1).f(0)=-2m^2<0\quad\forall m\neq 0\Rightarrow f(x)=0$ luôn có ít nhất 1 nghiệm $x_0\in(-1;0)$

Xét trường hợp: $m=0$

$(4.0+1).x^3-(0+1)x+0=0\Leftrightarrow x^3-x=0\Leftrightarrow x=\pm 1\quad \vee x=0$

Kết luận phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi giá trị m.

Ví dụ 10: Chứng minh rằng với mọi a, b, c phương trình $x^3+ax^2+bx+c=0$ luôn có nghiệm.

Đặt $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ thì $f(x)$ liên tục trên R.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\Rightarrow\exists x_1>0$ để $f(x_1)>0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty\Rightarrow\exists x_2>0$ để $f(x_2)<0$.

Như vậy có x_1, x_2 để $f\left(x_1\right).f\left(x_2\right)<0$ suy ra phương trình có nghiệm $x\in\left(x_1;x_2\right)$ vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Ví dụ 11: Chứng minh rằng với mọi a, b, c phương trình $x^4+ax^3+bx^2+cx-1=0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt.

Đặt $f\left(x\right)=x^4+ax^3+bx^2+cx-1$ thì $f\left(x\right)$ liên tục trên R.

Ta có: $f\left(0\right)=-1;$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=+\infty \Rightarrow \exists x_1>0$ để $f\left(x_1\right)>0.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=+\infty \Rightarrow \exists x_2<0$ để $f\left(x_2\right)>0.$

Do đó $f\left(0\right).f\left(x_2\right)<0$ suy ra phương trình có nghiệm trong khoảng $\left(x_2;0\right)$

$f\left(0\right).f\left(x_1\right)<0$ suy ra phương trình có nghiệm trong khoảng $\left(0;x_1\right)$ mà các khoảng $\left(x_2;0\right)$ và $\left(0;x_1\right)$ không giao nhau, do đó phương trình có ít nhất hai nghiệm phân biệt.

PHẦN 3: ĐẠO HÀM

I. QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

Giả sử $u = u(x), v = v(x), w = w(x)$ **là các hàm số có đạo hàm, khi đó:**
1). $(u + u - w)' = u' + v' - w'$; **2).** $(uv)' = u'v + v'u$; **3)** $(k.u)' = k.u'$ $(k \in R)$
4). $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ **5).** $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$.

BẢNG ĐẠO HÀM CỦA CÁC HÀM SỐ SƠ CẤP CƠ BẢN

Đạo hàm của hàm số sơ cấp cơ bản	**Đạo hàm của hàm số hợp (u = u(x))**
$(C)' = 0$	
$\left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1}, \left(\alpha \in \mathbb{R}, x > 0\right)$ $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$ $(\dfrac{1}{x})' = -\dfrac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$ $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)' = -\dfrac{n}{x^{n+1}}, \left(x \neq 0\right)$	$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1} u', \left(\alpha \in \mathbb{R}, u > 0\right)$ $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ $(u > 0)$ $(\dfrac{1}{u})' = -\dfrac{u'}{u^2}$ $(u \neq 0)$ $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{n}{u^{n+1}}.u', \left(u \neq 0\right)$
$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $\left(\tan x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $(x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z)$ $\left(\cot x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\left(1 + \cot^2 x\right)$ $(x \neq k\pi, k \in Z)$.	$(\sin u)' = \cos u.u'$ $(\cos u)' = -\sin u.u'$ $\left(\tan u\right)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = \left(1 + \tan^2 u\right)u'$ $(u \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z)$ $\left(\cot u\right)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u} = -\left(1 + \cot^2 u\right)u'$ $(u \neq k\pi, k \in Z)$.

CÔNG THỨC TÍNH ĐẠO HÀM NHANH HAY DÙNG

- $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

Ví dụ 1: Đạo hàm các hàm số sau:

1: $y=\left(\frac{1}{2}x^5+\frac{2}{3}x^4-x^3-\frac{3}{2}x^2+4x-5\right)$ 2: $y=2x^4-\frac{1}{3}x^3+2\sqrt{x}-5$

1: $y=\left(\frac{1}{2}x^5+\frac{2}{3}x^4-x^3-\frac{3}{2}x^2+4x-5\right)$

$y'=\left(\frac{1}{2}x^5+\frac{2}{3}x^4-x^3-\frac{3}{2}x^2+4x-5\right)' \Leftrightarrow y'=\left(\frac{1}{2}x^5\right)'+\left(\frac{2}{3}x^4\right)'-\left(x^3\right)'-\left(\frac{3}{2}x^2\right)'+\left(4x\right)'-5'$

$y'=\frac{5}{2}x^4+\frac{8}{3}x^3-3x^2-3x+4.$

2: $y=2x^4-\frac{1}{3}x^3+2\sqrt{x}-5$

$y'=\left(2x^4-\frac{1}{3}x^3+2\sqrt{x}-5\right)' \Leftrightarrow y'=\left(2x^4\right)'-\left(\frac{1}{3}x^3\right)'+\left(2\sqrt{x}\right)'-5' \Leftrightarrow y'=8x^3-x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}.$

Ví dụ 2: Đạo hàm các hàm số sau:

a). $y=\left(x^2+3x\right)\left(2-x\right).$ b) $y=x^2\sqrt{x}$. c) $y=\frac{2x-1}{4x-3}.$

d). $y=\left(x^7+x\right)^2.$ f). $y=\frac{1}{\left(x^2-x+1\right)^5}.$ g). $y=\frac{\left(2-x^2\right)\left(3-x^3\right)}{1-x+x^2}$.

k). $y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}.$

a). $y=\left(x^2+3x\right)\left(2-x\right). \Rightarrow y'=\left(\left(x^2+3x\right)\left(2-x\right)\right)'=\left(x^2+3x\right)'.\left(2-x\right)+\left(x^2+3x\right).\left(2-x\right)'$

$=\left(2x+3\right)\left(2-x\right)+\left(x^2+3x\right)\left(-1\right)=-3x^2-2x+6.$

b) $y=x^2\sqrt{x} \Rightarrow y'=\left(x^2\sqrt{x}\right)'=\left(x^2\right)'.\sqrt{x}+\left(\sqrt{x}\right)'.x^2=2x.\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}.x^2=2x\sqrt{x}+\frac{1}{2}x\sqrt{x}=\frac{5x\sqrt{x}}{2}.$

c) $y=\frac{2x-1}{4x-3} \Rightarrow y'=\left(\frac{2x-1}{4x-3}\right)'$

$=\frac{\left(2x-1\right)'\left(4x-3\right)-\left(4x-3\right)'\left(2x-1\right)}{\left(4x-3\right)^2}=\frac{2\left(4x-3\right)-4\left(2x-1\right)}{\left(4x-3\right)^2}=\frac{-2}{\left(4x-3\right)^2}.$

d). $y=\left(x^7+x\right)^2$. Sử dụng công thức $\left(u^\alpha\right)'=\alpha.u^{\alpha-1}.u'$ (với $u=x^7+x$)

$y'=2\left(x^7+x\right).\left(x^7+x\right)'=2\left(x^7+x\right)\left(7x^6+1\right)$

f). $y=\dfrac{1}{\left(x^2-x+1\right)^5}$. Đầu tiên sử dụng công thức $\left(\dfrac{1}{u}\right)^{/}$ với $u=\left(x^2-x+1\right)^5$

$$y'=-\frac{\left(\left(x^2-x+1\right)^5\right)^{/}}{\left(\left(x^2-x+1\right)^5\right)^2}=\frac{-5\left(x^2-x+1\right)^4.\left(x^2-x+1\right)^{/}}{\left(x^2-x+1\right)^{10}}=-\frac{5\left(2x-1\right)}{\left(x^2-x+1\right)^6}$$

g). $y=\dfrac{\left(2-x^2\right)\left(3-x^3\right)}{1-x+x^2}$. Đầu tiên sử dụng $\left(\dfrac{u}{v}\right)^{/}$

$$y'=\frac{\left[\left(2-x^2\right)\left(3-x^3\right)\right]^{/}.\left(1-x+x^2\right)-\left(1-x+x^2\right)^{/}\left(2-x^2\right)\left(3-x^3\right)}{\left(1-x+x^2\right)^2}$$

Tính $\left[\left(2-x^2\right)\left(3-x^3\right)\right]^{/}=\left(2-x^2\right)^{/}\left(3-x^3\right)+\left(3-x^3\right)^{/}\left(2-x^2\right)$

$=-2x\left(3-x^3\right)-3x^2\left(2-x^2\right)=5x^4-6x^2-6x.$

Vậy $y'=\dfrac{\left(5x^4-6x^2-6x\right)\left(1-x+x^2\right)-\left(-1+2x\right)\left(2-x^2\right)\left(3-x^3\right)}{\left(1-x+x^2\right)^2}$

k). $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$. Sử dụng $\left(\dfrac{u}{v}\right)^{/}$ được: $y'=\dfrac{(1+x)^{/}\sqrt{1-x}-\left(\sqrt{1-x}\right)^{/}(1+x)}{\left(\sqrt{1-x}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{1-x}-\dfrac{(1-x)^{/}}{2\sqrt{1-x}}.(1+x)}{(1-x)}$

$=\dfrac{2(1-x)+(1+x)}{2\sqrt{1-x}.(1-x)}=\dfrac{3-x}{2\sqrt{1-x}\,(1-x)}.$

Ví dụ 3: Đạo hàm các hàm số sau:

a). $y=x\cos x$.

b) $y=\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^3$.

c). $y=\sin^3\left(2x+1\right)$.

d). $y=\tan 3x-\cot 3x$

e). $y=x\cot 2x$

a). $y=x\cos x$. Ta áp dụng đạo hàm tích.

$y'=x'\cos x+x.(\cos x)^{/}=\cos x-x\sin x.$

b) $y=\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^3$. Bước đầu tiên ta áp dụng công thức $\left(u^{\alpha}\right)^{/}$ với $u=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

$$y'=3\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2.\left(\frac{\sin}{1+\cos x}\right)^{/}$$

Tính : $\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)' = \dfrac{(\sin x)'(1+\cos x)-(1+\cos x)'.\sin x}{(1+\cos x)^2} = \dfrac{\cos x(1+\cos x)+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$

$$= \frac{\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x}.$$

Vậy $y' = 3\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2.\dfrac{1}{1+\cos x} = \dfrac{3\sin^2 x}{(1+\cos x)^3}$.

c). $y=\sin^3(2x+1)$. Bước đầu tiên áp dung công thức $(u^\alpha)'$ với $u=\sin(2x+1)$

Vậy $y' = (\sin^3(2x+1))' = 3\sin^2(2x+1).(\sin(2x+1))'$.

Tính $(\sin(2x+1))'$: Áp dụng $(\sin u)'$, với $u=(2x+1)$

Ta được: $(\sin(2x+1))' = \cos(2x+1).(2x+1)' = 2\cos(2x+1)$.

$\Rightarrow y' = 3.\sin^2(2x+1).2\cos(2x+1) = 6\sin^2(2x+1)\cos(2x+1)$.

d). $y=\sin\sqrt{2+x^2}$. Áp dụng công thức $(\sin u)'$ với $u=\sqrt{2+x^2}$

$$y' = \cos\sqrt{2+x^2}.\left(\sqrt{2+x^2}\right)' = \cos\sqrt{2+x^2}.\frac{(2+x^2)'}{2\sqrt{2+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}.\cos\sqrt{2+x^2}.$$

d). $y=\tan 3x-\cot 3x$

$y' = (\tan 3x)' - (\cot 3x)' = (1+\tan^2 3x)(3x)' + (1+\cot^2 3x)(3x)'$

$= 3(1+\tan^2 3x)+3(1+\cot^2 3x) = 3(2+\tan^2 3x+\cot^2 3x)$.

e). $y = x\cot 2x$

$y' = x'.\cot 2x + x(\cot 2x)' = \cot 2x - x(1+\cot^2 2x).(2x)' = \cot 2x - 2x(1+\cot^2 2x)$.

Ví dụ 4: Tính

1). Cho $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}$. Tính $f'(-1)$.

2). Cho $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+x^2$. Tính $f'(1)$

1). Cho $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}$. Tính $f'(-1)$.

Bước đầu tiên tính đạo hàm sử dụng công thức $\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)' = \dfrac{-\alpha}{x^{\alpha+1}}$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)'=-\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}-\frac{9}{x^4}\Rightarrow f'(1)=-1-4-9=-14$$

2). Cho $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+x^2$. Tính $f'(1)$

Ta có $f'(x)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+x^2\right)'=-\frac{1}{x^2}-\frac{(\sqrt{x})'}{x}+2x=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}+2x$

Vậy $f'(1)=-1-\frac{1}{2}+2=\frac{1}{2}$

Ví dụ 5: Cho $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x$. Với những giá trị nào của x thì:

a. $f'(x)=0$ b. $f'(x)=-2$ c. $f'(x)=10$

Ta có $f'(x)=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right)=x^2+x-2$

a). $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow x=1\vee x=-2$

b). $f'(x)=-2\Leftrightarrow x^2+x-2=-2\Leftrightarrow x^2+x=0\Leftrightarrow x=0\vee x=-1$

c). $f'(x)=10\Leftrightarrow x^2+x-2=10\Leftrightarrow x^2+x-12=0\Leftrightarrow x=3\vee x=-4$

Ví dụ 5:

a). Cho $f(x)=2x^3+x-\sqrt{2}, g(x)=3x^2+x+\sqrt{2}$. Giải bất phương trình $f'(x)>g'(x)$.

b).Cho $f(x)=2x^3-x^2+\sqrt{3}, g(x)=x^3+\frac{x^2}{2}-\sqrt{3}$. Giải bất phương trình $f'(x)>g'(x)$.

a). Ta có $f'(x)=\left(2x^3+x-\sqrt{2}\right)'=6x^2+1$, $g'(x)=\left(3x^2+x+\sqrt{2}\right)'=6x+1$

$f'(x)>g'(x)\Leftrightarrow 6x^2+1>6x+1\Leftrightarrow 6x^2-6x>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$

b). $f'(x)=\left(2x^3-x^2+\sqrt{3}\right)'=6x^2-2x$, $g'(x)=\left(x^3+\frac{x^2}{2}-\sqrt{3}\right)'=3x^2+x$

$f'(x)>g'(x)\Leftrightarrow 6x^2-2x>3x^2+x\Leftrightarrow 3x^2-3x>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$

II. ĐẠO HÀM CẤP CAO

1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$. Hàm số $f'\left(x\right)$ còn gọi là đạo hàm cấp 1 của hàm số $f\left(x\right)$. Nếu hàm số $f'\left(x\right)$ có đạo hàm thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm cấp 2 của hàm số $f\left(x\right)$, kí hiệu là y'' hay $f''\left(x\right)$. Đạo hàm của đạo hàm cấp 2 được gọi là đạo hàm cấp 3 của hàm số $f\left(x\right)$, kí hiệu là y''' hay f'''$\left(x\right)$. Tương tự, ta gọi đạo hàm của đạo hàm cấp $\left(n-1\right)$ là đạo hàm cấp n của hàm số $f\left(x\right)$, kí hiệu là $y^{(n)}$ hay $f^{(n)}\left(x\right)$, tức là ta có: $y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'\left(n\in N, n>1\right)$.

2. Đạo hàm cấp 2 của hàm số f(t) là gia tốc tức thời của chuyển động $s=f(t)$ tại thời điểm t.

DẠNG 1: TÍNH ĐẠO HÀM CẤP CAO CỦA HÀM SỐ.

Phương pháp:

Áp dụng trực tiếp định nghĩa: $y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'$ để tính đạo hàm đến cấp mà đề bài yêu cầu.

Ví dụ 1: Tính đạo hàm đến cấp đã chỉ ra của các hàm số sau:

a). $y=x\sin 2x,\left(y'''\right)$

b). $y=\cos^2 x,\left(y'''\right)$

c). $y=x^4+4x^3-3x^2+1,\left(y^{(n)}\right)$

d). $y=x^4-\sin 2x,\left(y^{(4)}\right)$

a). Có $y'=x'\sin 2x+x.(\sin 2x)'=\sin 2x+2x\cos 2x$

$\Rightarrow y''=(\sin 2x)'+(2x)'\cos 2x+2x(\cos 2x)'=4\cos 2x-4x\sin 2x$

$\Rightarrow y'''=4(\cos 2x)'-(4x)'\sin 2x-4x(\sin 2x)'=-8\sin 2x-4\sin 2x-8\cos 2x$

$=-12\sin 2x-8\cos 2x$.

b). Ta có $y=\cos^2 x=\frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right)\Rightarrow y'=-\sin 2x \;\Rightarrow y''=-2\cos 2x\Rightarrow y'''=4\sin 2x$

c). $y=x^4+4x^3-3x^2+1$

$\Rightarrow y'=4x^3+12x^2-6x\Rightarrow y''=12x^2+24x-6\Rightarrow y'''=24x+24$

$\Rightarrow y^{(4)}=24\Rightarrow y^{(5)}=0\Rightarrow ...\Rightarrow y^{(n)}=0$.

d). $y=x^4-\sin 2x$

$\Rightarrow y'=4x^3-2\cos 2x\Rightarrow y''=12x^2+4\sin 2x$

$\Rightarrow y'''=24x+8\cos 2x\Rightarrow y^{(4)}=24-16\sin 2x$

DẠNG 2: TÌM ĐẠO HÀM CẤP N CỦA MỘT HÀM SỐ

Phương pháp:

Bước 1: Tính y', y'', y'''. Dựa vào các đạo hàm vừa tính, dự đoán công thức tính $y^{(n)}$.

Bước 2: Chứng minh công thức vừa dự đoán là đúng bằng phương pháp quy nạp.

Chú ý: Cần phân tích kĩ các kết quả của đạo hàm y', y'', y''' tìm ra quy luật để dự đoán công thức $y^{(n)}$ chính xác.

Ví dụ 2: Tìm đạo hàm cấp n của hàm số $y = \sin x\left(n \in N^*\right)$

Bước 1: Ta có: $y' = \cos x = \sin\left(x + 1.\frac{\pi}{2}\right); y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$

Dự đoán: $y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad (1), \forall n \in N^*$

Bước 2: Chứng minh (1) bằng quy nạp:

$*$ $n = 1 : (1)$ hiển nhiên đúng.

$*$ Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1$ nghĩa là ta có: $y^k = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$ ta phải chứng minh (1) cũng đúng với $n = k + 1$ nghĩa là ta phải chứng minh

$y^{(k+1)} = \sin\left(x + (k+1)\frac{\pi}{2}\right) \quad (2)$

Thật vậy : vế trái $(2) = y^{k+1} = \left[y^k\right]' = \left[\sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (k+1)\frac{\pi}{2}\right) =$ =vế phải $(2) \Rightarrow (2)$ đúng, nghĩa là (1) đúng với $n = k + 1$.

Bước 3: theo nguyên lí quy nạp suy ra $y^n = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \forall n \in N^*$.

Ví dụ 2: Tìm đạo hàm cấp n của hàm số $y = \frac{1}{x+3}\left(n \in N^*\right)$

Ta có: $y' = (-1)^1 \frac{1}{(x+3)^2} = (-1)^1 \frac{1!}{(x+3)^2}$;

$y'' = (-1)^2 . \frac{1.2}{(x+3)^3} = (-1)^2 . \frac{2!}{(x+3)^3}$.

Dự đoán: $y^n = (-1)^n \frac{n!}{(x+3)^{n+1}} \quad (1), \forall n \in N^*$.

Chứng minh (1) bằng phương pháp quy nạp:

$*n=1:(1)$ hiển nhiên đúng.

$*$ Giả sử (1) đúng với $n=k\ge 1$, nghĩa là ta có: $y^k=(-1)^k\dfrac{k!}{(x+3)^{k+1}}$ ta phải chứng minh (1) cũng đúng với $n=k+1$, nghĩa là ta phải chứng minh: $y^{k+1}=(-1)^{k+1}\dfrac{(k+1)!}{(x+3)^{k+2}}\quad(2)$

Thật vậy: vế trái

$$(2)=y^{k+1}=\left[y^k\right]'=\left[(-1)^k\frac{k!}{(x+3)^{k+1}}\right]'=(-1)^{k+1}.\frac{k!}{\left[(x+3)^{k+1}\right]^2}.\left[(x+3)^{k+1}\right]'$$

$$=(-1)^{k+1}.\frac{k!(k+1)}{(x+3)^{k+2}}=(-1)^{k+1}.\frac{(k+1)!}{(x+3)^{k+2}}=vt(2)$$

Vậy (2) đúng nghĩa là (1) đúng với $n=k+1$.

Theo nguyên lí quy nạp ta suy ra $y^n=(-1)^n.\dfrac{n!}{(x+3)^{n+1}},\forall n\in N^*$.

DẠNG 3: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

Ví dụ 3:

a). Cho hàm số $y=x\sin x$. Chứng minh $x.y''-2(y'-\sin x)+xy=0\quad(*)$

b). Cho hàm số : $y=\sqrt{2x-x^2}$ chứng minh: $y^3.y''+1=0\quad(*)$

c). Cho hàm số: $y=x\tan x$ chứng minh: $x^2.y''-2(x^2+y^2)(1+y)=0\quad(*)$

d). Cho hàm số: $y=\dfrac{x-3}{x+4}$ chứng minh: $2(y')^2=(y-1).y''\quad(*)$

a). Cho hàm số $y=x\sin x$. Chứng minh $x.y''-2(y'-\sin x)+xy=0\quad(*)$

Ta có $y'=(x\sin x)'\Leftrightarrow y'=x'.\sin x+x.(\sin x)'\Leftrightarrow y'=\sin x+x\cos x$

$$y''=(\sin x+x\cos x)'=(\sin x)'+(x\cos x)'=\cos x+x'.\cos x+x.(\cos x)'=2\cos x-x\sin x$$

$$(1)\Leftrightarrow x(2\cos x-x\sin x)-2(\sin x+x\cos x-\sin x)+x^2\sin x=0$$

$\Leftrightarrow 2x\cos x-x^2\sin x-2x\cos x+x^2\sin x=0\Leftrightarrow 0=0$ (đpcm).

b). Cho hàm số : $y=\sqrt{2x-x^2}$ chứng minh: $y^3.y''+1=0\quad(*)$

Ta có: $y'=\left(\sqrt{2x-x^2}\right)' \Leftrightarrow y'=\dfrac{1}{2\sqrt{2x-x^2}}.\left(2x-x^2\right)'=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$.

$$y''=\frac{(1-x)'.\sqrt{2x-x^2}-\left(\sqrt{2x-x^2}\right)'.(1-x)}{\left(\sqrt{2x-x^2}\right)^2}=\frac{-\sqrt{2x-x^2}-\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}.(1-x)}{\left(\sqrt{2x-x^2}\right)^2}$$

$$=\frac{-\left(2x-x^2\right)-(1-x)^2}{\sqrt{2x-x^2}.\left(\sqrt{2x-x^2}\right)^2}=\frac{-1}{\left(\sqrt{2x-x^2}\right)^3}.$$

$(*)\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x-x^2}\right)^3.\dfrac{-1}{\left(\sqrt{2x-x^2}\right)^3}+1=0\Leftrightarrow -1+1=0$ (đpcm).

c). Cho hàm số: $y=x\tan x$ chứng minh: $x^2.y''-2\left(x^2+y^2\right)(1+y)=0\quad(*)$

Ta có: $y'=(x\tan x)'=x'.\tan x+x.(\tan x)'=\tan x+x\left(1+\tan^2 x\right)$

$y''=(\tan x)'+x'.(1+\tan x)+x.(1+\tan x)'=2\left(1+\tan^2 x\right)+x.(2\tan x).\left(\tan^2+1\right)$

$=2\left(1+\tan^2 x\right)(1+x\tan x)$

$(*)\Leftrightarrow 2x^2\left(1+\tan^2 x\right).(1+x\tan x)-2\left(x^2+x^2\tan^2 x\right)(1+x\tan x)=0$

$\Leftrightarrow 2x^2\left(1+\tan^2 x\right)(1+x\tan x)-2x^2\left(1+\tan^2 x\right)(1+x\tan x)=0$

$\Leftrightarrow 0=0$ (đpcm).

d). Cho hàm số: $y=\dfrac{x-3}{x+4}$ chứng minh: $2(y')^2=(y-1).y''\quad(*)$

Ta có: $y'=\left(\dfrac{x-3}{x+4}\right)'=\dfrac{7}{(x+4)^2}$, $y''=\dfrac{-7\left((x+4)^2\right)'}{(x+4)^4}=\dfrac{-14}{(x+4)^3}$

$(*)\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{7}{(x+4)^2}\right)^2=\left(\dfrac{x-3}{x+4}-1\right).\left(\dfrac{-14}{(x+4)^3}\right)\Leftrightarrow\dfrac{98}{(x+4)^4}=\dfrac{98}{(x+4)^4}$ (đpcm).

e) Cho hàm số $y=\cos^2 3x$ chứng minh: $18(2y-1)+y''=0\quad(*)$

Ta có: $y=\cos^2 3x$

$y'=2.\cos 3x(\cos 3x)'=2\cos 3x.(-\sin 3x)(3x)'=-3\sin 6x\Rightarrow y''=-18\cos 6x$

$(*)\Leftrightarrow 18\left(2\cos^2 3x-1\right)-18\cos 6x=0\Leftrightarrow 18.\cos 6x-18\cos 6x=0$ (đpcm).

III. PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

Tính đạo hàm bằng máy tính

Phương pháp:

*** Tính đạo hàm cấp 1 :** [SHIFT] [∫□]

*** Tính đạo hàm cấp 2 :**

$$y''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y'}{\Delta x}=\frac{y'(x_0+0,000001)-y'(x_0)}{0,000001}$$

*** Dự đoán công thức đạo hàm bậc n :**

+ Bước 1 : Tính đạo hàm cấp 1, đạo hàm cấp 2, đạo hàm cấp 3

+ Bước 2 : Tìm quy luật về dấu, về hệ số, về số biến, về số mũ rồi rút ra công thức tổng quát.

Quy trình bấm máy tính đạo hàm cấp 1:

Bước 1: Ấn [SHIFT] [∫□]

Bước 2: Nhập biểu thức $\frac{d}{dx}\left(f(X)\right)_{X=x_0}$ và ấn =.

Quy trình bấm máy tính đạo hàm cấp 2:

Bước 1: Tính đạo hàm cấp 1 tại điểm $x=x_0$

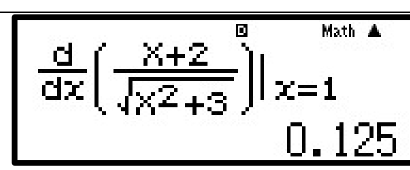
Bước 2: Tính đạo hàm cấp 1 tại điểm $x=x_0+0,000001$

Bước 3: Nhập vào máy tính $\frac{Ans - PreAns}{X}$ ấn =.

Ví dụ 1: Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+3}}$ tại điểm có hoành độ $x_0=1$ là

A. $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** -2.

Hệ số góc tiếp tuyến $k=y'_{(1)}$ Nhập vào máy tính $\frac{d}{dx}\left(\frac{X+2}{\sqrt{X^2+3}}\right)_{X=1}$

Phép tính	Quy trình bấm máy	Màn hình hiển thị
$\frac{d}{dx}\left(\frac{X+2}{\sqrt{X^2+3}}\right)_{X=1}$	[SHIFT] [∫□] [■/□] [ALPHA] [)] [+] [2] [▼] [√■] [ALPHA] [)] [x²] [+] [3] [▶] [▶] [▶] [1] [=]	

Vậy $k=y'_{(1)}=\frac{d}{dx}\left(\frac{X+2}{\sqrt{X^2+3}}\right)_{X=1}=0,125=\frac{1}{8}\Rightarrow$ ***Chọn C.***

Ví dụ 2: Đạo hàm cấp 2 của hàm số $y = x^4 - \sqrt{x}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$ gần số giá trị nào nhất trong các giá trị sau:

A. 7. **B.** 19. **C.** 25. **D.** 48.

Phép tính	Quy trình bấm máy	Màn hình hiển thị
Tại $x_0 = 2$ $\frac{d}{dx}\left(X^4 - \sqrt{X}\right)_{X=2}$	SHIFT ∫■ ALPHA) x■ 4 ▶ − √■ ALPHA) ▶ ▶ 2 =	
$x_0 = 2 + 0,000001$ $\frac{d}{dx}\left(X^4 - \sqrt{X}\right)_{X=2+0,000001}$	◀ ◀ + 0 . 0 0 0 0 0 1 =	
Tính $y''(2) = \dfrac{y'(2+0.000001) - y'(2)}{0.000001}$ nhờ $\dfrac{Ans\text{ - }PreAns}{X}$		
	■/■ Ans − ALPHA Ans ▼ 0 . 0 0 0 0 0 1 =	

Vậy $y''(2) \approx 48 \Rightarrow$ ***Chọn D.***

Ví dụ 3: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+1}{4^x}$

A. $y' = \frac{1 - 2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$

B. $y' = \frac{1 + 2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$

C. $y' = \frac{1 - 2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$

D. $y' = \frac{1 + 2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$

Ta chọn tính đạo hàm tại điểm bất kì ví dụ chọn $x = 0,5$ rồi tính đạo hàm của hàm số tại $X = 0,5$.

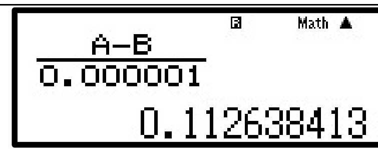
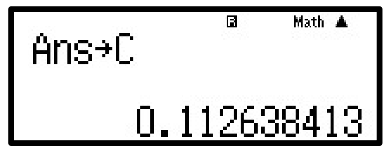
Nhập vào máy tính $\frac{d}{dx}\left(\frac{X+1}{4^X}\right)_{X=0,5}$

Phép tính	Quy trình bấm máy	Màn hình hiển thị
$\frac{d}{dx}\left(\frac{X+1}{4^X}\right)_{X=0,5}$	SHIFT ∫ ▭/▭ ALPHA) + 1 ▼ 4 $x^{\blacksquare}$ ALPHA) ▶ ▶ ▶ 0 • 5 =	$\frac{d}{dx}\left(\frac{X+1}{4^X}\right)\Big\|_{x=0.5}$ -0.5397207708
Lưu kết quả vừa tìm được vào biến A	SHIFT RCL (−)	Ans→A -0.5397207708
Lấy A trừ đi kết quả tính giá trị các biểu thức ở các đáp án nếu ra 0 thì chọn đáp án đó.		
Đáp án A	− ▭/▭ 1 − 2 (ALPHA) + 1) ln 2) ▼ 2 $x^{\blacksquare}$ 2 ALPHA) CALC 0 • 5 =	Ans−$\frac{1-2(X+1)\ln(}{2^{2X}}$▸ -8.562×10^{-12}
Số $-8,562.10^{-12}\approx 0$. *Nếu chưa ra kết quả là 0 thì thay các đáp án còn lại bao giờ ra 0 thì chọn* $\Rightarrow$ ***Chọn A.***		

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=e^{-x}\sin x$, đặt $F=y''+2y'$ khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. $F=-2y$ **B.** $F=y$ **C.** $F=-y$ **D.** $F=2y$

Phép tính	Quy trình bấm máy	Màn hình hiển thị
Tính $y'(2+0,001)$	SHIFT MODE 4 SHIFT ∫ ALPHA $\times10^x$ $x^{\blacksquare}$ − ALPHA) ▶ sin ALPHA)) ▶ 2 + 0 • 0 0 0 0 0 1 = SHIFT RCL (−)	$\frac{d}{dx}(e^{-X}\sin(X))\|_{x=}$▸ -0.1793792622
Lưu kết quả vừa tìm được vào biến A	SHIFT RCL (−)	Ans→A -0.1793792622

Tính $y'(0)$	▲ ◄ ◄ DEL DEL DEL DEL DEL DEL DEL DEL DEL = SHIFT RCL °'''	
Lưu kết quả vừa tìm được vào biến B	SHIFT RCL °'''	
Thay vào công thức $f''(x_0)=\dfrac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x_0}=C$		
	▭/▭ ALPHA (−) − ALPHA °''' ▼ 0 . 0 0 0 0 0 1 = SHIFT RCL hyp	 
Tính $F=y''+2y'=C+2B=-0.2461...=-2y\Rightarrow$ ***Chọn A.***		

PHẦN 4: PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN

I – Kiến thức cần nhớ

—Phương trình tiếp tuyến của $(C): y = f(x)$ **tại** điểm $M(x_o; y_o)$ có dạng:

$\Delta: \boxed{y = k(x - x_o) + y_o}$ Với $k = y'(x_o)$ là hệ số góc tiếp tuyến.

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

① ② ③ $\longrightarrow$ *Để viết phương trình tiếp tuyến Δ, ta cần tìm ba thành phần x_o, y_o, k*

—Điều kiện cần và đủ để hai đường $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$ ***tiếp xúc nhau***

— $\Leftrightarrow$ hệ $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm ***(nhớ: "hàm = hàm, đạo = đạo")***

II – Các dạng toán viết phương trình tiếp tuyến thường gặp

① **Viết PTTT Δ của $(C): y = f(x)$, biết Δ có hệ số góc k cho trước**

— Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm. Tính $y' \Rightarrow y'(x_o)$.

— Do phương trình tiếp tuyến Δ có hệ số góc k $\Rightarrow y'(x_o) = k$ (i)

— Giải (i) tìm được $x_o \longrightarrow y_o = f(x_o) \longrightarrow \Delta: y = k(x - x_o) + y_o$.

✍ <u>**Lưu ý**</u>. Hệ số góc $k = y'(x_o)$ của tiếp tuyến Δ thường cho gián tiếp như sau:

— Phương trình tiếp tuyến $\Delta \,//\, d: y = ax + b \Rightarrow k = a$.

— Phương trình tiếp tuyến $\Delta \perp d: y = ax + b \Rightarrow k = -\dfrac{1}{a}$.

— Phương trình tiếp tuyến Δ tạo với trục hoành góc $\alpha \Rightarrow |k| = \tan\alpha$.

— Phương trình tiếp tuyến Δ tạo với $d: y = ax + b$ góc $\alpha \Rightarrow \left|\dfrac{k - a}{1 + k.a}\right| = \tan\alpha$

② **Viết PTTT Δ của $(C): y = f(x)$, biết Δ đi qua (kẻ từ) điểm $A(x_A; y_A)$**

— Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm. Tính $y_o = f(x_o)$ và $k = y'(x_o)$ theo x_o.

— Phương trình tiếp tuyến Δ tại $M(x_o; y_o)$ là $\Delta: y = k(x - x_o) + y_o$.

— Do $A(x_A; y_A) \in \Delta \Rightarrow y_A = k(x_A - x_o) + y_o$ (i)

— Giải phương trình $(i) \longrightarrow x_o \longrightarrow y_o$ và $k \longrightarrow$ phương trình Δ.

③ **Viết PTTT Δ của $(C): y = f(x)$, biết Δ cắt hai trục tọa độ tại A và B sao cho tam giác OAB vuông cân hoặc có diện tích S cho trước**

— Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm và tính hệ số góc $k = y'(x_o)$ theo x_o.

— Đề cho $\left[\begin{array}{ll} \Delta OAB \text{ vuông cân} \Leftrightarrow \Delta \text{ tạo với Ox một góc } 45^o \text{ và } O \notin \Delta & (i) \\ S_{\Delta OAB} = S \Leftrightarrow OA.OB = 2S & (ii) \end{array}\right.$

— Giải (i) hoặc $(ii) \longrightarrow x_o \longrightarrow y_o; k \longrightarrow$ phương trình tiếp tuyến Δ.

④ **Tìm những điểm trên đường thẳng $d: ax + by + c = 0$ mà từ đó vẽ được $1, 2, 3, ..., n$ tiếp tuyến với đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$**

— Gọi $M\left(x_M;y_M\right)\in d:ax+by+c=0$ (sao cho có một biến x_M trong M)

— PTTT Δ qua M và có hệ số góc k có dạng $\Delta: y=k\left(x-x_M\right)+y_M$.

— Áp dụng điều kiện tiếp xúc: $\begin{cases} f\left(x\right)=k\left(x-x_M\right)+y_M & (i) \\ f'\left(x\right)=k & (ii) \end{cases}$

— Thế k từ (ii) vào (i), được: $f\left(x\right)=f'\left(x\right).\left(x-x_M\right)+y_M \qquad (iii)$

— Số tiếp tuyến của (C) vẽ từ M = số nghiệm x của (iii).

⑤ **Tìm những điểm $M\left(x_M;y_M\right)$ mà từ đó vẽ được hai tiếp tuyến với đồ thị hàm số $(C): y=f\left(x\right)$ và hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau**

— PTTT Δ qua M và có hệ số góc k có dạng $\Delta: y=k\left(x-x_M\right)+y_M$.

— Áp dụng điều kiện tiếp xúc: $\begin{cases} f\left(x\right)=k\left(x-x_M\right)+y_M & (i) \\ f'\left(x\right)=k & (ii) \end{cases}$

— Thế k từ (ii) vào (i), được: $f\left(x\right)=f'\left(x\right).\left(x-x_M\right)+y_M \qquad (iii)$

— Qua M vẽ được hai tiếp tuyến với $(C)\Leftrightarrow(iii)$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2.

— Hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau $\Leftrightarrow k_1.k_2=-1\Leftrightarrow y'\left(x_1\right).y'\left(x_2\right)=-1$.

✍ **<u>Lưu ý</u>**.

— Qua M vẽ được hai tiếp tuyến với (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía với trục hoành thì $\begin{cases} (iii): \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1,x_2. \\ f\left(x_1\right).f\left(x_2\right)<0. \end{cases}$

— Đối với bài toán tìm điểm $M\in(C): y=f\left(x\right)$ sao cho tại đó tiếp tuyến song song hoặc vuông góc với đường thẳng d cho trước, ta chỉ cần gọi $M\left(x_o;y_o\right)$ và Δ là tiếp tuyến với $k=f'\left(x_o\right)$. Rồi áp dụng $k=f'\left(x_o\right)=k_d$ nếu cho song song và $f'\left(x_o\right).k_d=-1$ nếu cho vuông góc $\Rightarrow x_o\Rightarrow y_o\Rightarrow M\left(x_o;y_o\right)$.

Ví dụ 1: Cho đường cong $(C): y=f\left(x\right)=x^3-3x^2$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) trong các trường hợp sau:

a) Tại điểm $M_0\left(1;-2\right)$.

b) Tại điểm thuộc (C) và có hoành độ $x_0=-1$.

c) Tại giao điểm của (C) với trục hoành .

d) Biết tiếp tuyến đi qua điểm $A\left(-1;-4\right)$.

Ta có $f'(x)=3x^2-6x$

a). Ta có $f'(x_0)=f'(1)=-3$

Vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm $M\left(1;-2\right)$: $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

$\Leftrightarrow y=-3\left(x-1\right)-3\Leftrightarrow y=-3x$

b). Ta có $x_0=-1\Rightarrow y_0=-4, f'\left(x_0\right)=9$

Vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm $N\left(-1;-4\right)$ là $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

$y=9(x+1)-4 \Leftrightarrow y=9x+5$.

c). Phương trình hoành độ giao điểm của (C) với trục hoành: $x^3-3x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$

Với $x_0=0 \Rightarrow y_0=0, f'(x_0)=f'(0)=0$

Vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm $(0;0)$ là $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0 \Leftrightarrow y=0$

Với $x_0=3 \Rightarrow y_0=0, f'(x_0)=f'(3)=9$

Vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm $(3;0)$ là $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

$\Leftrightarrow y=9(x-3) \Leftrightarrow y=9x-27$.

d). Gọi $(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của phương trình tiếp tuyến d đi qua điểm A

Vì điểm $(x_0;y_0)\in(C) \Rightarrow y_0=x_0^3-3x_0^2$, và $f'(x_0)=3x_0^2-6x_0$

Phương trình d: $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0 \Leftrightarrow y=(3x_0^2-6x_0)(x-x_0)+x_0^3-3x_0^2$

Vì $A(-1;-4)\in d$ nên: $(3x_0^2-6x_0)(-1-x_0)+x_0^3-3x_0^2=-4$

$\Leftrightarrow 2x_0^3-6x_0-4=0 \Leftrightarrow x_0=2 \vee x_0=-1$

Với $x_0=2 \Rightarrow y_0=-4, f'(2)=0$, phương trình tiếp tuyến $y=-4$

Với $x_0=-1 \Rightarrow y_0=-4, f'(-1)=9$, phương trình tiếp tuyến $y=9(x+1)-4 \Leftrightarrow y=9x+5$

Ví dụ 2: Cho đường cong $(C): y=\dfrac{3x+1}{1-x}$.

a). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $(d): x-4y-21=0$.

b). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $(\Delta): 2x+2y-9=0$.

c). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng :
$(d): x-2y+5=0$ một góc 30^0.

Tập xác định $D=R\setminus\{1\}$. Ta có $y'=f'(x)=\dfrac{4}{(1-x)^2}$

a). Có $(d): x-4y-21=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{21}{4} \Rightarrow k_d=\dfrac{1}{4}$

Vì tiếp tuyến song song với d nên $k_{tt}=k_d=\dfrac{1}{4}$.

Gọi $M(x_0,y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến, ta có $f'(x_0)=k_{tt} \Leftrightarrow \dfrac{4}{(1-x_0)^2}=\dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow (x_0-1)^2=16 \Leftrightarrow x_0=5 \vee x_0=-3$

Với $x_0 = 5 \Rightarrow y_0 = -4$, phương trình tiếp tuyến tại điểm này là: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{4}(x-5) - 4 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{21}{4}$ (loại, vì trùng với d).

Với $x_0 = -3 \Rightarrow y = -2$, phương trình tiếp tuyến tại điểm này là: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{4}(x+3) - 2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$.

b). $(\Delta): 2x + 2y - 9 = 0 \Leftrightarrow y = -x + \frac{9}{2} \Rightarrow k_\Delta = -1$

Vì tiếp tuyến vuông góc với Δ nên, $k_{tt}.k_\Delta = -1 \Rightarrow k_{tt} = 1$

Gọi $N(x_0, y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến, ta có $f'(x_0) = k_{tt} \Leftrightarrow \frac{4}{(1-x_0)^2} = 1$

$\Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = 3 \vee x_0 = -1$.

Với $x_0 = 3 \Rightarrow y = -5$, phương trình tiếp tuyến tại điểm này là: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

$\Leftrightarrow y = -1(x-3) - 5 \Leftrightarrow y = -x - 2$

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y = -1$, phương trình tiếp tuyến tại điểm này là: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

$\Leftrightarrow y = -1(x+1) - 1 \Leftrightarrow y = -x - 2$.

c). $(d): x - 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \Rightarrow k_d = \frac{1}{2}$

Ta có tiếp tuyến hợp với d một góc 30^0, nên có $\left|\frac{k_{tt} - k_d}{1 + k_{tt}k_d}\right| = \tan 30^0$

$$\left|\frac{k_{tt} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}k_{tt}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3\left(k_{tt} - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{2}k_{tt}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{11}{4}k_{tt}^2 - 4k_{tt} - \frac{1}{4} = 0$$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x - 1}$ (C)

a). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M(2; 4).

b). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = 1$.

Ta có: $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$

a). Ta có $x_0 = 2 \Rightarrow f'(x_0) = f'(2) = -1$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M(2; 4) là $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

$\Leftrightarrow y = -1(x-2) + 4 \Leftrightarrow y = -x + 6$

b). Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị, ta có $f'(x_0)=1$

$\Leftrightarrow \dfrac{x_0{}^2-2x_0-1}{(x_0-1)^2}=1 \Leftrightarrow -1=1$ (vô lý).

Kết luận không có tiếp tuyến nào có hệ số góc bằng 1.

Ví dụ 4: Cho hàm số (C): $y=\sqrt{1-x-x^2}$. Tìm phương trình tiếp tuyến với (C):

a) Tại điểm có hoành độ $x_0=\dfrac{1}{2}$.

b) Song song với đường thẳng (d): x + 2y = 0.

Tập xác định $D=\left[\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$. Ta có $f'(x)=\dfrac{-1-2x}{2\sqrt{1-x-x^2}}$

a). Với $x_0=\dfrac{1}{2}\Rightarrow y_0=\sqrt{1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}, f'(x_0)=f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=-2$

Vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ là $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

$y=-2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow y=-2x+\dfrac{3}{2}$.

b). Ta có $(d): x+2y=0 \Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{2}x \Rightarrow k_d=-\dfrac{1}{2}$

Vì tiếp tuyến song song với d nên, $k_{tt}=k_d=-\dfrac{1}{2}$. Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị,

ta có $f'(x_0)=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \dfrac{-1-2x_0}{2\sqrt{1-x_0-x_0^2}}=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 1+2x_0=\sqrt{1-x_0-x_0^2}\Leftrightarrow \begin{cases}1+2x_0\ge 0\\ x_0=0\vee x_0=-1\end{cases}$

So với điều kiện $x_0=0$ (nhận), $x_0=-1$ (loại)

Với $x_0=0\Rightarrow y_0=1$, phương trình tiếp tuyến tại điểm $(0;1)$ là: $y=-\dfrac{1}{2}(x-0)+1\Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{2}x+1$.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=x^3+3x^2-9x+5$ (C). Trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị (C), hãy tìm tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất.

Ta có $y'=f'(x)=3x^2+6x-9$

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến, vậy $f'(x_0)=3x_0^2+6x_0-9$

Ta có $3x_0^2+6x_0-9=3(x_0^2+2x_0+1)-12=3(x_0+1)^2-12\ge -12, \forall x_0\in(C)$

Vậy $\min f'(x_0)=-12$ tại $x_0=-1\Rightarrow y_0=16$

Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm: $y=-12(x+1)+16\Leftrightarrow y=-12x+4$

Ví dụ 6: Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x+3}\quad(1)$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O.

Tập xác định $D=R\setminus\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$. Ta có $y'=f'(x)=\dfrac{-1}{(2x+3)^2}$

Vì tiếp tuyến (d) cắt hai trục Ox, Oy lần lượt tại A, B tạo thành tam giác OAB vuông cân, nên đường thẳng (d) hợp với trục Ox một góc 45^0.

Vậy có $k_{tt}=\pm\tan 45^0 \Leftrightarrow k_{tt}=\pm 1$

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến, ta có $f'(x_0)=\pm 1$

Với $f'(x_0)=1 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{(2x_0+3)^2}=1$ (phương trình vô nghiệm).

Với $f'(x_0)=-1 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{(2x_0+3)^2}=-1 \Leftrightarrow (2x_0+3)^2=1 \Leftrightarrow x_0=-1 \vee x_0=-2$

Với $x_0=-1 \Rightarrow y_0=1$, phương trình tiếp tuyến tại điểm này $y=-1(x+1)+1 \Leftrightarrow y=-x$. Tiếp tuyến này loại vì đường thẳng này đi qua gốc tọa độ nên không tạo thành được tam giác.

Với $x_0=-2 \Rightarrow y_0=0$, phương trình tiếp tuyến tại điểm này $y=-1(x+2) \Leftrightarrow y=-x-2$

Ví dụ 7: Cho hàm số $y=x^3+3mx^2+(m+1)x+1\quad(1)$, m là tham số thực. Tìm các giá trị của m để tiếp tuyến của đồ thị của hàm số (1) tại điểm có hoành độ $x=-1$ đi qua điểm $A(1;2)$.

Tập xác định $D=R$

$y'=f'(x)=3x^2+6mx+m+1$

Với $x_0=-1 \Rightarrow y_0=2m-1,\ f'(-1)=-5m+4$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(-1;2m-1)$: $y=(-5m+4)(x+1)+2m-1$ (d).

Ta có $A(1;2)\in(d) \Leftrightarrow (-5m+4).2+2m-1=2 \Leftrightarrow m=\dfrac{5}{8}$.

Ví dụ 8: Cho hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x+1}\quad(1)$. Tính diện tích của tam giác tạo bởi các trục tọa độ và tiếp tuyến của đồ thị của hàm số (1) tại điểm $M(-2;5)$.

Tập xác định $D=R\setminus\{-1\}$. Có $y'=\dfrac{2}{(x+1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến (d) tại điểm $M(-2;5)$: $y=2(x+2)+5 \Leftrightarrow y=2x+9$

Gọi A là giao điểm của d và trục hoành $\Rightarrow y_A=0 \Rightarrow x_A=-\dfrac{9}{2}$, vậy $A\left(-\dfrac{9}{2};0\right)$

Gọi B là giao điểm của d và trục tung $\Rightarrow x_B=0 \Rightarrow y_B=9$, vậy $B(0;9)$.

Ta có tam giác OAB vuông tại O nên $S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}OA.OB=\dfrac{1}{2}\left|-\dfrac{9}{2}\right||9|=\dfrac{81}{4}$

Ví dụ 9: Cho hàm số $y=\sqrt{3}x^3+4$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng $(d):-x+\sqrt{3}y+6=0$ góc 30^0 .

Tập xác định $D=R$. Ta có $y'=3\sqrt{3}x^2$

$(d):\sqrt{3}y-x+6=0\Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2\sqrt{3}\Rightarrow k_d=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Vì tiếp tuyến tạo với đường thẳng d một góc 30^0 nên thỏa $\left|\frac{k_{tt}-k_d}{1+k_{tt}k_d}\right|=\tan 30^0$

$$\left|\frac{k_{tt}-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}k_{tt}}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow 3\left(k_{tt}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}k_{tt}\right)^2\Leftrightarrow k_{tt}^2-\sqrt{3}k_{tt}=0\Leftrightarrow k_{tt}=0\vee k_{tt}=\sqrt{3}$$

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm

Với $k_{tt}=0\Leftrightarrow 3\sqrt{3}x_0^2=0\Leftrightarrow x_0=0\Rightarrow y_0=4$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm (0 ; 4): $y=4$.

Với $k_{tt}=\sqrt{3}\Leftrightarrow 3\sqrt{3}x_0^2=\sqrt{3}\Leftrightarrow x_0^2=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x_0=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Với $x_0=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow y_0=\frac{13}{3}$, phương trình tiếp tuyến $y=\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{13}{3}\Leftrightarrow y=\sqrt{3}x+\frac{10}{3}$.

Với $x_0=-\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow y_0=\frac{11}{3}$, phương trình tiếp tuyến $y=\sqrt{3}\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{11}{3}\Leftrightarrow y=\sqrt{3}x+\frac{14}{3}$.

Ví dụ 10: Cho hàm số $y=-x^3-3x^2+9x-5$ (C). Trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị (C), hãy tìm tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất.

Tập xác định $D=R$. Ta có $y'=-3x^2-6x+9$

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến, ta có $f'(x_0)=-3x_0^2-6x_0+9$

$\Leftrightarrow f'(x_0)=-3(x_0^2+2x_0+1)+12=-3(x_0+1)^2+12\le 12$

Từ đó suy ra $\max f'(x_0)=12$ tại $x_0=-1$.

Với $x_0=-1\Rightarrow y_0=-16$, phương trình tiếp tuyến cần tìm: $y=12(x+1)-16\Leftrightarrow y=12x-4$

Ví dụ 11: Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ (C) . Gọi $I(1\,;2)$. Tìm điểm $M\in(C)$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng IM **.**

Tập xác định $D=R$. Ta có $y'=\frac{-1}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0,y_0)\in(C)\Rightarrow y_0=\frac{2x_0-1}{x_0-1}$

Ta có $\overrightarrow{IM}=\left(x_0-1;\frac{2x_0-1}{x_0-1}-2\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{IM}=\left(x_0-1;\frac{1}{x_0-1}\right)\Rightarrow k_{IM}=\frac{1}{(x_0-1)^2}$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại M $k_{tt} = f'(x_0) = -\dfrac{1}{(x_0-1)^2}$

Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng IM nên có $k_{tt}.k_{IM} = -1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x_0-1)^4} = 1 \Leftrightarrow x_0 - 1 = \pm 1 \Leftrightarrow x_0 = 0 \vee x_0 = 2$$

Vậy có 2 điểm $M_1(0;1), M_2(2;3)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 12: Cho hàm số $y = \dfrac{2x}{x+1}$ (C). Tìm điểm $M \in (C)$, biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai trục tọa độ tại A, B và tam giác OAB có diện tích bằng $\dfrac{1}{4}$.

Tập xác định $D = R \setminus \{-1\}$. Ta có $y' = \dfrac{2}{(x+1)^2}$

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow y_0 = \dfrac{2x_0}{x_0+1}$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2}{(x_0+1)^2}(x - x_0) + \frac{2x_0}{x_0+1} \Leftrightarrow y = \frac{2}{(x_0+1)^2}x + \frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2} \quad (d)$$

Gọi A là giao điểm của d và trục Ox, có $y_A = 0 \Rightarrow x = -x_0^2$. Vậy $A(-x_0^2; 0)$

Gọi B là giao điểm của d và trục Oy, có $x_B = 0 \Rightarrow y_B = \dfrac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}$. Vậy $B\left(0; \dfrac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}\right)$

Ta có tam giác OAB cân tại O, theo giả thiết ta có: $S_{\Delta OAB} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} OA.OB = \dfrac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \left|-x_0^2\right| . \left|\frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}\right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x_0^2 = (x_0+1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x_0^2 = x_0 + 1 \\ 2x_0^2 = -x_0 - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x_0^2 - x_0 - 1 = 0 \\ 2x_0^2 + x_0 + 1 = 0 \end{array}\right.$$

Với $2x_0^2 + x_0 + 1 = 0$ phương trình vô nghiệm.

Với $2x_0^2 - x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1 \vee x_0 = -\dfrac{1}{2}$

Với $x_0 = 1$ ta có $M(1;1)$. Với $x_0 = -\dfrac{1}{2}$ ta có $M\left(-\dfrac{1}{2}; -2\right)$

Vậy có hai điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán là $M(1;1)$, $M\left(-\dfrac{1}{2}; -2\right)$

KĨ THUẬT LẬP PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẰNG MÁY TÍNH CASIO - VINACAL

Phương pháp : Phương trình tiếp có dạng $d: y = kx + m$.

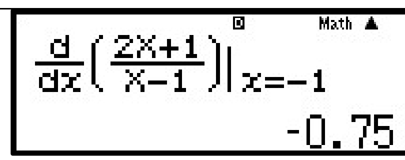
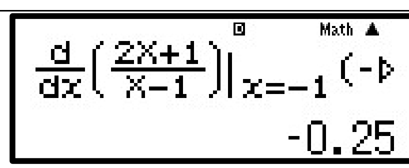
+ Đầu tiên tìm hệ số góc tiếp tuyến $k = y'(x_0)$.

Bấm [SHIFT] [∫□] và nhập $\frac{d}{dx}\left(f(X)\right)\Big|_{x=x_0}$, sau đó bấm = ta được k.

+ Tiếp theo: Bấm phím ! để sửa lại thành $\frac{d}{dx}\left(f(X)\right)\Big|_{x=x_0}$ x $(-X)+f(X)$, sau đó bấm phím r với $X = x_0$ và bấm phím = ta được m.

Ví dụ 1: Cho điểm M thuộc đồ thị $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$ và có hoành độ bằng -1. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M là:

A. $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$. **B.** $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$. **C.** $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$. **D.** $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$.

Phép tính	Quy trình bấm máy	Màn hình hiển thị
$\frac{d}{dx}\left(\frac{2X+1}{X-1}\right)\Big\|_{x=-1}$	[SHIFT] [∫□] [▭] [2] [ALPHA] [)] [+] [1] [▼] [ALPHA] [)] [−] [1] [▶] [▶] [−] [1] [=]	
Bấm phím ◀ để sửa lại thành: $\frac{d}{dx}\left(\frac{2X+1}{X-1}\right)\Big\|_{x=-1}$ x $(-X)+\frac{2X+1}{X-1}$ sau đó bấm phím r với $X=-1$ và bấm phím = ta được kết quả		
[=] [◀] [(] [−] [ALPHA] [)] [)] [+] [▭] [2] [ALPHA] [)] [+] [1] [▼] [ALPHA] [)] [−] [1] [=]		

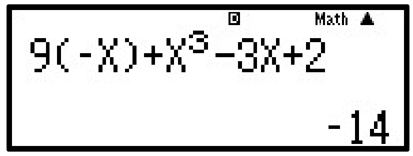
Vậy phương trình tiếp tuyến tại M **là:** $y = -\frac{3x}{4} - \frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ **Chọn B.**

Ví dụ 2: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = x^3 - 3x + 2$ có hệ số góc bằng 9 là:

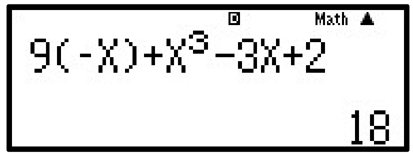
A. $y = 9x - 18$; $y = 9x + 22$. **B.** $y = 9x - 14$; $y = 9x + 18$.

C. $y=9x+18;\ y=9x+22.$ **D.** $y=9x-14;\ y=9x-18.$

Với $x_0=2$ ta nhập $9\left(-X\right)+X^3-3X+2$ r với $X=2$ rồi bấm = ta được kết quả là $\boxed{-14}$ $\Rightarrow d_1: y=9x-14.$



Với $x_0=-2$ ta nhập $9\left(-X\right)+X^3-3X+2$ r với $X=-2$ rồi bấm = ta được kết quả là $\boxed{18} \Rightarrow d_2: y=9x+18.$



$\Rightarrow$ ***Chọn B.***

Ví dụ 3: Tiếp tuyến của đồ thị $\left(C\right): y=-4x^3+3x+1$ đi qua điểm $A\left(-1;2\right)$ có phương trình là

A. $y=-9x+7;\ y=-x+2.$ **B.** $y=-9x-11;\ y=-x+2.$

C. $y=-9x+11;\ y=2.$ **D.** $y=-9x-7;\ y=2.$

\+ *Cho $f\left(x\right)$ bằng kết quả các đáp án, từ đó ta thu được các phương trình.*

\+ *Sử dụng chức năng giải phương trình bậc ba của máy tính bỏ túi bằng cách bấm tổ hợp phím* w 5 4 *và nhập hệ số phương trình.*

Thông thường máy tính cho số nghiệm thực nhỏ hơn số bậc của phương trình là 1 thì ta chọn đáp án đó.

+ Đầu tiên thử với đáp án A, ta cho:

$$-4x^3+3x+1=-9x+7 \Leftrightarrow -4x^3+12x-6=0.$$

Máy tính cho 3 nghiệm $\Rightarrow$ Loại A.

\+ *Thử với đáp án B, ta cho:* $-4x^3+3x+1=-x+2 \Leftrightarrow -4x^3+4x-1=0.$

Máy tính cho 3 nghiệm $\Rightarrow$ Loại B.

\+ *Thử với đáp án B, ta cho:*

$$-4x^3+3x+1=-9x+11 \Leftrightarrow -4x^3+12x-10=0.$$

Máy tính hiển thị 1 nghiệm thực và 2 nghiệm phức (phương trình có số nghiệm thực là một nhỏ hơn bậc của phương trình là 2)$\Rightarrow$ Loại C.

\+ *Thử với đáp án :* $-4x^3+3x+1=-9x-7 \Leftrightarrow -4x^3+12x+8=0$

máy tính hiển thị 2 nghiệm $x=-1;\ \ x=2$ (nhận).

$$-4x^3+3x+1=2 \Leftrightarrow -4x^3+3x-1=0$$

máy tính hiển thị 2 nghiệm $x=-1;\ x=\dfrac{1}{2}$ (nhận).

$\Rightarrow$ ***Chọn D.***

PHẦN 5. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

DẠNG 1: CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC MẶT PHẲNG

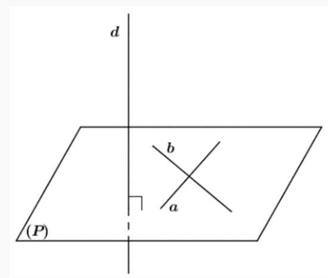
1. Định nghĩa

$d \perp (P) \Leftrightarrow \left(d;(P)\right) = 90^0$

2. Tính chất

- **Định lý 1:** Nếu một đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (P) thì d vuông góc với (P).

$$\begin{cases} a \cap b = M \in (P) \\ d \perp a \\ d \perp b \end{cases} \Rightarrow d \perp (P)$$



- **Định lý 2:** Nếu đường thẳng d vuông góc với (P) thì d vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (P).

$$\begin{cases} d \perp (P) \\ \forall c \subset (P) \end{cases} \Rightarrow d \perp c$$

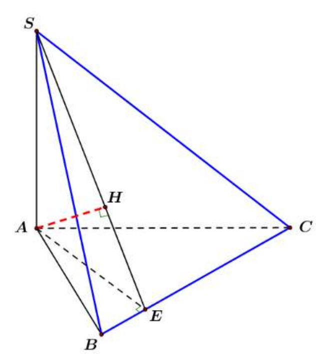
Chú ý

- Trong không gian, hai đường thẳng vuông góc không nhất thiết phải cắt nhau.
- Trong không gian bảo toàn quan hệ vuông góc.

3. Phương pháp chứng minh $d \perp (P)$

- Có sẵn $d \perp a \subset (P)$
- Phải chứng minh $d \perp b \subset (P)$?
- Chứng minh b vuông góc với một mặt chứa d

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC), \triangle ABC$ không vuông ở B và C. Vẽ $AE \perp BC$, $AH \perp SE$. Chứng minh $AH \perp (SBC)$?



Có sẵn $AH \perp SE$ (1)

Phải chứng minh $AH \perp BC$

Ta chứng minh $BC \perp (SAE)$

$$\begin{cases} BC \perp AE \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAE) \Rightarrow BC \perp AH \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AH \perp (SBC)$.

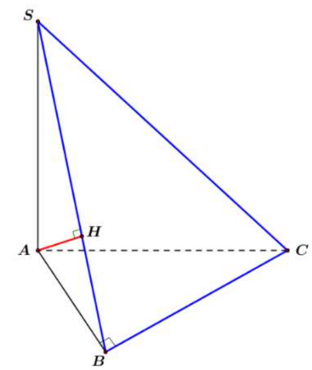
Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC), \triangle ABC$ vuông ở B. Vẽ $AH \perp SB$. Chứng minh $AH \perp (SBC)$.

Có sẵn $AH \perp SB$ (1)

Phải chứng minh $AH \perp BC$

Ta chứng minh $BC \perp (SAB)$

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH \ (2)$$



Từ (1) và (2) $\Rightarrow AH \perp (SBC)$.

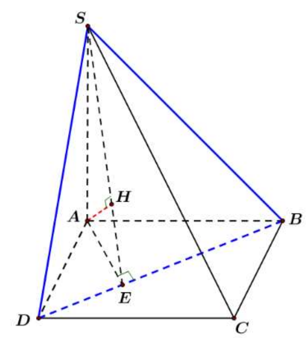
Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$, $ABCD$ là hình chữ nhật. Vẽ $AE \perp BD$, $AE \perp SE$. Chứng minh $AH \perp (SBD)$?

Có sẵn $AH \perp SE$ (1)

Phải chứng minh $AH \perp BD$

$$\begin{cases} BD \perp AE \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAE) \Rightarrow BD \perp AH \ (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AH \perp (SBD)$.



DẠNG 2: CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC ĐƯỜNG THẲNG

1. Định nghĩa

$d \perp a \Leftrightarrow (d;a) = 90^0$

2. Tính chất

- **Định lý 1:**
$$\begin{cases} a \cap b = M \in (P) \\ d \perp a \\ d \perp b \end{cases} \Rightarrow d \perp (P)$$
- **Định lý 2:**
$$\begin{cases} d \perp (P) \\ \forall c \subset (P) \end{cases} \Rightarrow d \perp c$$

Chú ý

- Trong không gian, hai đường thẳng vuông góc không nhất thiết phải cắt nhau.
- Trong không gian bảo toàn quan hệ vuông góc.

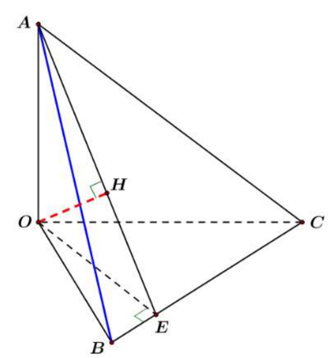
3. Phương pháp chứng minh $d \perp c$

Phương pháp không gian: d chéo c

- Chứng minh $d \perp c \Leftrightarrow d \perp (P) \supset c$
- Phải chứng minh $d \perp b \subset (P)$?
- Chứng minh ngược lại b vuông góc với một mặt phẳng chứa d

Ví dụ 4: Cho tứ diện OABC đôi một vuông góc. Vẽ $OE \perp BC, OH \perp AE$. Chứng minh $OH \perp AB$.

- Chứng minh $OH \perp AB \Leftrightarrow$ Chứng minh $OH \perp (ABC)$.
- Có sẵn $OH \perp AE$ (1)
- Phải chứng minh $OH \perp BC$
$$\begin{cases} BC \perp OE \\ BC \perp OA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (OAE) \Rightarrow BC \perp OH \quad (2)$$



Từ (1) và (2) $\Rightarrow OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp AB$.

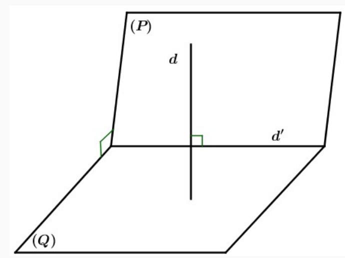
DẠNG 3: CHỨNG MINH MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

1. Định nghĩa

Hai mặt phẳng $(P)\perp(Q)\Leftrightarrow\left((P);(Q)\right)=90^0$

2. Tính chất

- **Định lý 3:**
$\begin{cases} d\subset(P) \\ d\perp(P) \end{cases}\Rightarrow(P)\perp(Q)$
- **Định lý 4:** Hai mặt phẳng vuông góc với nhau, đường thẳng d nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì sẽ vuông góc với mặt phẳng còn lại.
$\begin{cases} (P)\perp(Q) \\ d\subset(P), d'\perp d \end{cases}\Rightarrow d\perp(Q)$



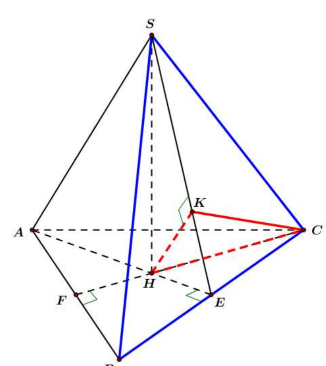
- **Định lý 5:** Hai mặt phẳn cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của nó cũng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.
$\begin{cases} (Q)\perp(P), (R)\perp(P) \\ (Q)\cap(R)=d \end{cases}\Rightarrow d\perp(P)$

3. Phương pháp chứng minh $(P)\perp(Q)$

- Chứng minh $d\perp(P), d\subset(Q)$
- Có sẵn $d\perp a\subset(P)$?
- Phải chứng minh $d\perp b\subset(P)$

Ví dụ 5: Cho hình chóp đều S.ABC, H là tâm đáy, E là trung điểm BC. Vẽ $HK\perp SE$. Chứng minh $(CHK)\perp(SBC)$.

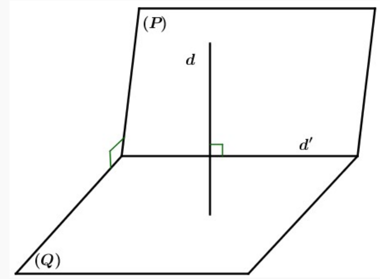
- Chứng minh $(CHK)\perp(SBC)\Leftrightarrow$ Chứng minh $HK\perp(SBC)$.
- Có sẵn $HK\perp SE$ (1)
- Phải chứng minh $HK\perp BC$ (Chứng minh BC vuông góc với một mặt chứa HK)
$\begin{cases} BC\perp HE \\ BC\perp SH \end{cases}\Rightarrow BC\perp(SHE)\Rightarrow BC\perp HK$ (2)



Từ (1) và (2) $\Rightarrow(CHK)\perp(SBC)$.

Phương pháp sử dụng định lý 4:

- Tìm giao tuyến của (P) và (Q)
- Vẽ đường thẳng d vuông góc với giao tuyến. Nếu $d \subset (P) \Rightarrow d \perp (Q)$
- Suy ra các kết quả tiếp theo.



Ví dụ 6: Cho hình chóp S.ABC có $(SAC) \perp (ABC)$. $\triangle ABC$ vuông ở C, M là trung điểm của SC. Chứng minh:

a) $(SAC) \perp (SBC)$.

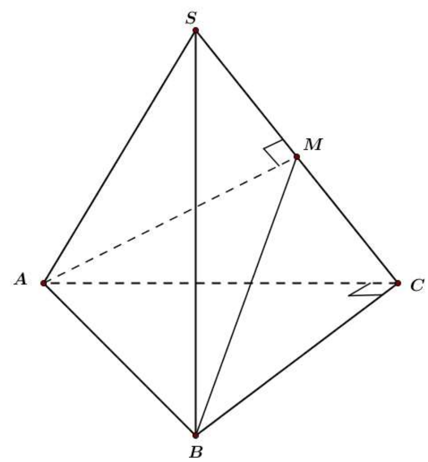
b) $(SBC) \perp (ABM)$.

a) Ta có $(SAC) \perp (ABC)$

Sử dụng định lý 4:

$$\begin{cases} (SAC) \cap (ABC) = AC \\ BC \perp AC \\ BC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \text{ (Kết quả ĐL 4)}$$

Mặt khác $BC \subset (SBC) \Rightarrow (SAC) \perp (SBC)$ (ĐL 3)



b) Ta có $(SAC) \perp (SBC)$

Sử dụng định lý 4:

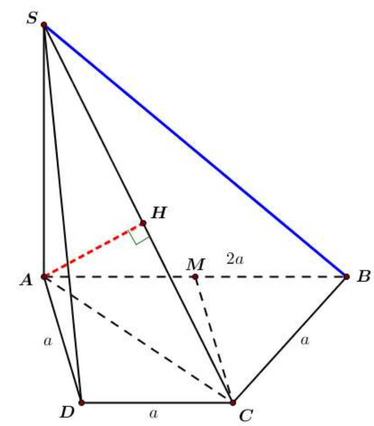
$$\begin{cases} (SAC) \cap (SBC) = SC \\ AM \perp SC \\ AM \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBC) \text{ (Kết quả ĐL 4)}$$

Mặt khác $AM \subset (ABM) \Rightarrow (ABM) \perp (SBC)$ (ĐL 3)

Ví dụ 7: Cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD), ABCD$ là $\frac{1}{2}$ là hình thang vuông ở A, D, $AD = DC = \frac{AB}{2} = a$. Vẽ $AH \perp SC$. Chứng minh $AH \perp SB$.

Gọi M là trung điểm của AB $\Rightarrow$ Tứ giác ADCM là hình vuông

$\Rightarrow CM = a = \frac{AB}{2} \Rightarrow \triangle ACB$ vuông ở C.



- Chứng minh $AH \perp SB \Leftrightarrow$ Chứng minh $AH \perp (SBC)$.
- Có sẵn $AH \perp SC$ (1)
- Phải chứng minh $AH \perp BC$

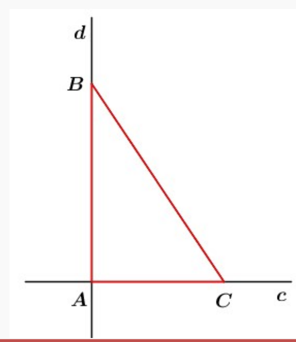
$\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AH$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SB.$

Sử dụng PITAGO đảo

Bước 1: Đưa d, c vào tam giác ABC. Tính ba cạnh của tam giác ABC.

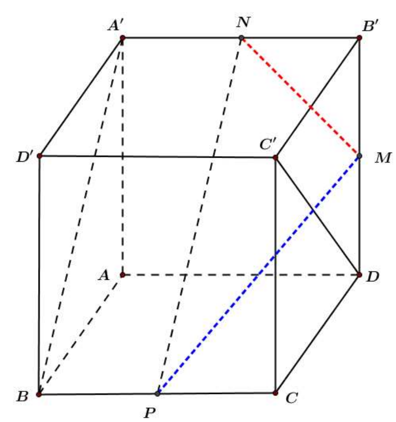
Bước 2: Thử $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại A. $\Rightarrow d \perp c$



Ví dụ 8: Hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có $AB = a$. M, N, P là trung điểm của BB', A'B', CD. Chứng minh $MN \perp MP$.

- Tính MN: $\triangle A'B'B$ có MN là đường trung bình

  $\Rightarrow MN = \frac{A'B}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$



- Tính PN: Tứ giác A'DPN là hình bình hành $\Rightarrow PN = DA' = a\sqrt{2}$
- Tính MP:

  Trong tam giác vuông BCP: $BP = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

  Trong tam giác vuông MBP: $PM = \sqrt{\frac{5a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

- Thử tam giác MNP: $MN^2 + MP^2 = \frac{2a^2}{4} + \frac{6a^2}{4} = 2a^2 = PN^2$

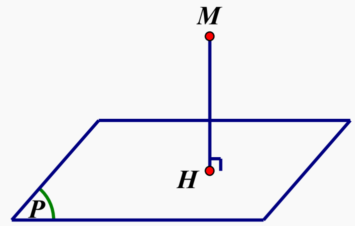
  $\Rightarrow \triangle MNP$ vuông tại M $\Rightarrow MN \perp MP$

DẠNG 4: KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

1. Định nghĩa

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) là MH, với H là hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng (P).

$$\left.\begin{matrix} MH \perp (P) \\ H \in (P) \end{matrix}\right\} \Rightarrow d\left(M;(P)\right) = MH$$

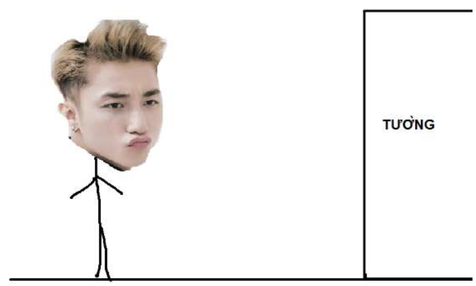


2. Phương pháp tính trực tiếp khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Phương pháp chung: Muốn tìm khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, trước hết ta phải tìm hình chiếu vuông góc của điểm đó trên mặt phẳng. Việc xác định hình chiếu của điểm trên mặt phẳng ta thường dùng một trong các cách sau:

CẤP ĐỘ 1: KHOẢNG CÁCH TỪ ĐIỂM Ở ĐÁY ĐẾN MẶT ĐỨNG.

Ví dụ: Làm sao để tìm khoảng cách từ Sơn Tùng đến bức tường?
À, quá dễ, từ Tùng kẻ 1 đường thẳng vuông góc vào tường!
Ta để ý: tường và mặt đất đang vuông góc với nhau thì ta mới có thể kẻ vuông góc vào tường.

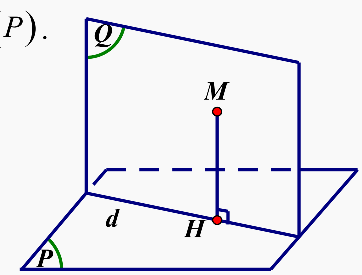


Ta có phương pháp như sau:

Bước 1. Tìm một mặt phẳng (Q) chứa M và vuông góc với (P).

Bước 2. Xác định giao tuyến: $d = (P) \cap (Q)$.

Bước 3. Trong (Q), dựng $MH \perp d\,(H \in d)$.



$$\left.\begin{matrix} (P) \perp (Q) \\ d = (P) \cap (Q) \\ (Q) \supset MH \end{matrix}\right\} \Rightarrow MH \perp (P) \Rightarrow d\left(M;(P)\right) = MH$$

(Chú ý: Mặt đứng thường chứa đường cao)

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. SA vuông góc với đáy. Tìm khoảng cách

a) Từ C đến (SAB)

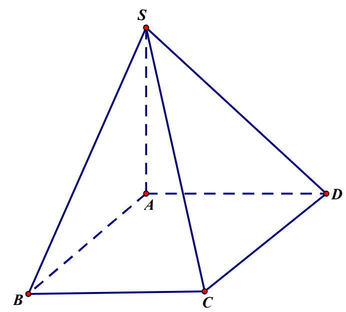
b) Từ B đến (SAD)

c) Từ B đến (SAC)

d) Từ D đến (SAM), M là trung điểm CD

a) Nhận xét:

(SAB) là mặt đứng (do chứa đường cao SA). **Dùng cấp độ 1**



- Nên theo phương pháp:

Bước 1: Ta xem có mặt phẳng nào chứa C và vuông góc với (SAB)? Đó chính là (ABCD).

Bước 2: Mà giao tuyến chung của (SAB) và (ABCD) là AB

Bước 3.Nên từ C ta kẻ 1 đường thẳng vuông góc với AB là xong. Mà ta có ngay đó chính là BC.

Từ đó $\Rightarrow d\left(C,\left(SAB\right)\right) = BC = a$

b) Nhận xét:

(SAD) là mặt đứng (do chứa đường cao SA) -> **Dùng cấp độ 1**

- Nên theo phương pháp:

Bước 1: Ta xem có mặt phẳng nào chứa B và vuông góc với (SAD)? Đó chính là (ABCD).

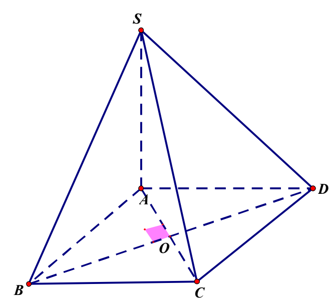
Bước 2: Mà giao tuyến chung của (SAD) và (ABCD) là AD

Bước 3.Nên từ B ta kẻ 1 đường thẳng vuông góc với AD là xong. Mà ta có ngay đó chính là BA.

Từ đó $\Rightarrow d\left(B,\left(SAD\right)\right) = BA = a$

c) Nhận xét:

(SAC) là mặt đứng (do chứa đường cao SA) -> **Dùng cấp độ 1**



- Nên theo phương pháp:

Bước 1: Ta xem có mặt phẳng nào chứa B và vuông góc với (SAC)? Đó chính là (ABCD).

Bước 2: Mà giao tuyến chung của (SAC) và (ABCD) là AC

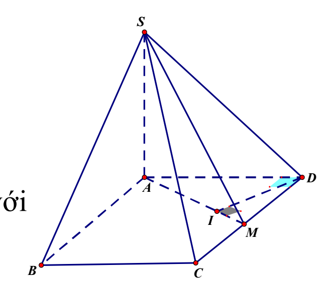
Bước 3.Nên từ B ta kẻ 1 đường thẳng vuông góc với AC là xong. Mà ta có ngay đó chính là BO. (do 2 đường chéo hình vuông sẽ vuông góc với nhau)

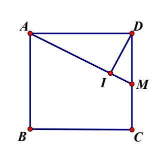
Từ đó $\Rightarrow d\left(B,\left(SAC\right)\right) = BO = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

d) Nhận xét:

(SAM) là mặt đứng (do chứa đường cao SA)

-> **Dùng cấp độ 1**





- Nên theo phương pháp:

Bước 1: Ta xem có mặt phẳng nào chứa D và vuông góc với (SAM)? Đó chính là (ABCD).

Bước 2: Mà giao tuyến chung của (SAM) và (ABCD) là AM

Bước 3.Nên từ D ta kẻ 1 đường thẳng vuông góc với AM là xong.

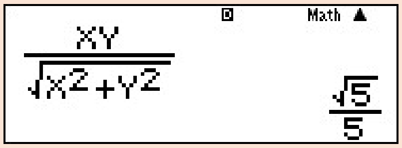
Ta kẻ DI vuông góc với AM

Từ đó $\Rightarrow d\left(D,\left(SAM\right)\right) = DI$

Ta có $\frac{1}{DI^2}=\frac{1}{DA^2}+\frac{1}{DM^2}\Rightarrow DI=\frac{DA.DM}{\sqrt{DA^2+DM^2}}=\frac{a.\frac{a}{2}}{\sqrt{a^2+(\frac{a}{2})^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}a$

MẸO NHỎ

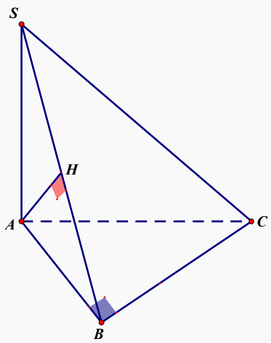
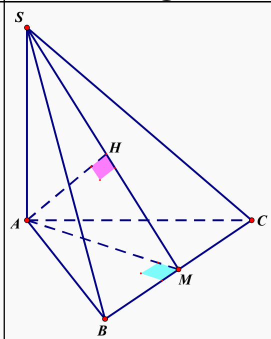
Ta có thể bấm máy nhanh như sau:



ấn CALC X=1; Y = 0,5

Cách này nhanh hơn việc các em nhập từng số vào để bấm

CẤP ĐỘ 2: KHOẢNG CÁCH TỪ CHÂN ĐƯỜNG CAO TỚI MẶT BÊN

BÀI TOÁN GỐC SỐ 1: **Cho hình chóp SABC, SA vuông góc (ABC).** **Tam giác ABC vuông tại B (hoặc C).** **Tìm khoảng cách từ A đến (SBC)**	**BÀI TOÁN GỐC SỐ 2** **Cho hình chóp SABC, SA vuông góc (ABC).** **Tam giác ABC không có góc vuông tại B và C.** **Tìm khoảng cách từ A đến (SBC)**
 **Phương pháp:** **(Giả sử tam giác ABC vuông tại B)** **Kẻ AH vuông góc SB.** $\Rightarrow d(A;(SBC)) = AH$ $Co' \ \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2}$ $\Rightarrow AH = \frac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}}$ **(Mẹo nhớ: Có góc vuông, kẻ 1 đường)**	 **Phương pháp:** **Kẻ AM vuông góc BC.** **Kẻ AH vuông góc SM** $\Rightarrow d(A;(SBC)) = AH$ $Co' \ \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2}$ $\Rightarrow AH = \frac{SA.AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}}$ **(Mẹo nhớ: không có góc vuông, kẻ 2 đường, bản chất của bài toán gốc số 2 là đưa về bài toán gốc số 1)**
Chứng minh: $\left.\begin{matrix} Co' \ BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{matrix}\right\} \to BC \perp (SAB)$ $\left.\begin{matrix} Ma` \ AH \subset (SAB) \to BC \perp AH \\ Co' \ AH \perp SB \end{matrix}\right\} \to AH \perp (SBC)$ $\to d(A;(SBC)) = AH$	**Chứng minh:** $\left.\begin{matrix} Co' \ BC \perp SA \\ BC \perp AM \end{matrix}\right\} \to BC \perp (SAM)$ $\left.\begin{matrix} Ma` \ AH \subset (SAM) \to BC \perp AH \\ Co' \ AH \perp SM \end{matrix}\right\} \to AH \perp (SBC)$ $\to d(A;(SBC)) = AH$

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC vuông cân tại B, AB= a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC). Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** a. **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Phân tích: Bài toán hỏi khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

1) A là chân đường cao, (SBC) là mặt bên -> **CẤP ĐỘ 2**

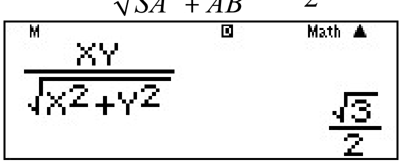
2) Tam giác ABC (đáy) có góc vuông ở B -> **BÀI TOÁN GỐC SỐ 1 (kẻ 1 đường)**

Kẻ AH vuông góc SB.

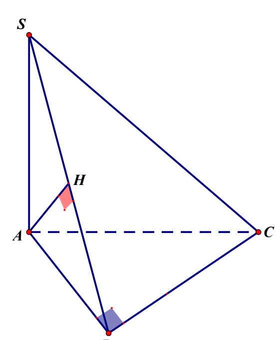
$\Rightarrow d(A;(SBC)) = AH$

$Co' \ \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2}$

$\Rightarrow AH = \frac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$



(calc x $x = \sqrt{3}; y = 1$)



Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC). Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. **B.** a. **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Phân tích: Bài toán hỏi khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).
1) A là chân đường cao, (SBC) là mặt bên -> **CẤP ĐỘ 2**
2) Tam giác ABC (đáy) không có góc vuông ở B hoặc C -> **BÀI TOÁN GỐC SỐ 2 (kẻ 2 đường)**

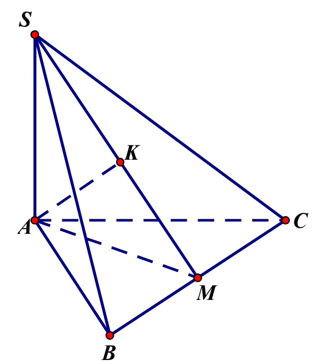
Kẻ $AM \perp BC$ => M là trung điểm BC (t/c tam giác đều) và $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Kẻ AK vuông góc SM.

suy ra $d\left(A,(SBC)\right) = AK$.

Trong ΔSAM, có $AK = \frac{SA.AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{3a}{\sqrt{15}} = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Vậy $d\left(A,(SBC)\right) = AK = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.



Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD).

A. a. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Phân tích: Bài toán hỏi khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).
1) A là chân đường cao, (SCD) là mặt bên -> **CẤP ĐỘ 2**
2) Tam giác ACD (đáy) có góc vuông ở D -> **BÀI TOÁN GỐC SỐ 1 (kẻ 1 đường)**

Do $AB \parallel CD$ nên $d\left(B,(SCD)\right) = d\left(A,(SCD)\right)$.

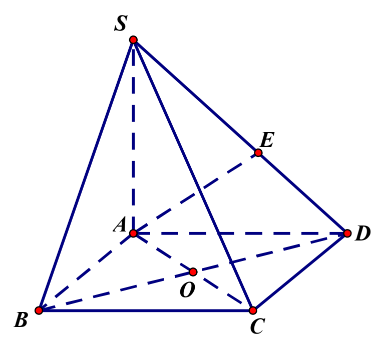
Kẻ $AE \perp SD$ tại E.

Khi đó $d\left[A,(SCD)\right] = AE$.

Trong tam giác vuông SAD, ta có:

$AE = \frac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $d\left(B,(SCD)\right) = AE = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.



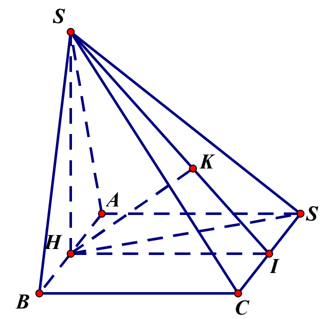
Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a; $SD = \frac{3a}{2}$; hình chiếu vuông góc của S trên $(ABCD)$ trùng với trung điểm H của cạnh AB. Khi đó, tỉ số $\frac{d\left(H;(SCD)\right)}{a}$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Phân tích: Bài toán hỏi khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).
1) H là chân đường cao, (SCD) là mặt bên -> **CẤP ĐỘ 2**
2) Tam giác HCD (đáy) không góc vuông ở C và D -> **BÀI TOÁN GỐC SỐ 2 (kẻ 2 đường)**

Kẻ $HI \perp CD\left(I \in CD\right)$

Kẻ $HK \perp SI\left(K \in SI\right)$



$$\Rightarrow d\left(H,\left(SCD\right)\right) = HK = \frac{SH.HI}{\sqrt{SH^2 + HI^2}}$$

$$HD = \sqrt{AH^2 + AD^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}; SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = a$$

$$\Rightarrow d\left(H,\left(SCD\right)\right) = \frac{SH.HI}{\sqrt{SH^2 + HI^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{d\left(H,\left(SCD\right)\right)}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $\left(SCD\right)$.

A. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $2a$.

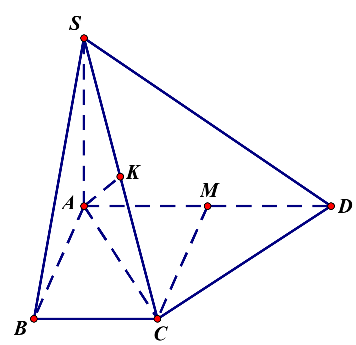
Gọi M là trung điểm AD, suy ra $ABCM$ là hình vuông.

Do đó $CM = MA = \frac{AD}{2}$ nên tam gác ACD vuông tại C.

Phân tích: Bài toán hỏi khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).
1) A là chân đường cao, (SCD) là mặt bên -> **CẤP ĐỘ 2**
2) Tam giác ACD (đáy) có góc vuông ở C -> **BÀI TOÁN GỐC SỐ 1 (kẻ 1 đường)**

Kẻ $AK \perp SC$. Khi đó:

$$d\left[A,\left(SCD\right)\right] = AK = \frac{SA.AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$



CẤP ĐỘ 3: KHOẢNG CÁCH TỪ 1 ĐIỂM KHÔNG PHẢI CHÂN ĐƯỜNG CAO TỚI MẶT BÊN (PP ĐỔI ĐIỂM)

Giả sử ta ta muốn dựng trực tiếp khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (P) mà không thực hiện được. Đồng thời từ điểm B ta lại dựng được trực tiếp khoảng cách tới (P) khi đó ta sẽ thực hiện tính khoảng cách gián tiếp.

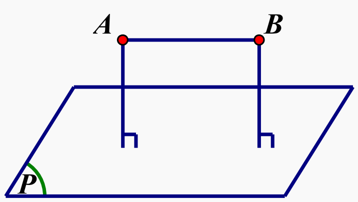
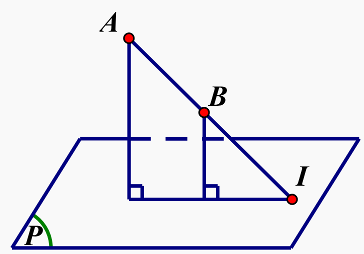
PHƯƠNG PHÁP ĐỔI ĐIỂM

Bài toán Giả sử điểm A là chân đường cao Điểm B không phải là chân đường cao. (P) là mặt bên (nghiêng) Tìm khoảng cách từ B đến (P)?

Phương pháp:

Bước 1. Ta tìm khoảng cách từ điểm A đến (P).

Bước 2. Nối A và B. Đổi điểm dựa vào 1 trong 2 loại sau

LOẠI 1. $AB \parallel (P)$	**LOẠI 2.** $AB \cap (P) = I$
$\Rightarrow d(A,(P)) = d(B,(P))$  	$\Rightarrow \dfrac{d(A,(P))}{d(B,(P))} = \dfrac{AI}{BI}$ $\Rightarrow d(B;(P)) = \dfrac{BI}{AI}.d(A;(P))$ 

Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a,\ AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc giữa SD với đáy bằng 60^0. Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) theo a.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Phân tích: Bài toán hỏi khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SCD).
1) C không là chân đường cao, (SBD) là mặt bên -> **CẤP ĐỘ 3 (ĐỔI ĐIỂM VỀ A)**
2) Nối AC, ta thấy AC cắt (SBD) => **LOẠI 2**

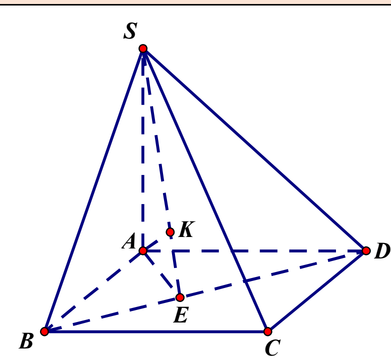
Bước 1: Tìm khoảng cách từ chân đường cao đến (SBD)

$60^0 = (SD,(ABCD)) = (SD, AD) = \widehat{SDA}; SA = AD.\tan\widehat{SDA} = 2a\sqrt{3}$

Ta có $d(C,(SBD)) = d(A,(SBD))$.

Kẻ $AE \perp BD$ và kẻ $AK \perp SE$. Khi đó $d(A,(SBD)) = AK$.

Trong tam giác vuông BAD, ta có $AE = \dfrac{AB.AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.



Trong tam giác vuông SAE, ta có $AK=\dfrac{SA.AE}{\sqrt{SA^2+AE^2}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Bước 2. Đổi điểm về C
Ta nối A và C thấy AC cắt B tại trung điểm I mỗi đường (Tính chất 2 đường chéo)
Theo công thức đổi điểm LOẠI 2:
$\dfrac{d(A;(P))}{d(C;(P))}=\dfrac{AI}{CI}=1\Rightarrow d(C;(P))=d(A;(P))$

Vậy $d\left(C,(SBD)\right)=AK=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

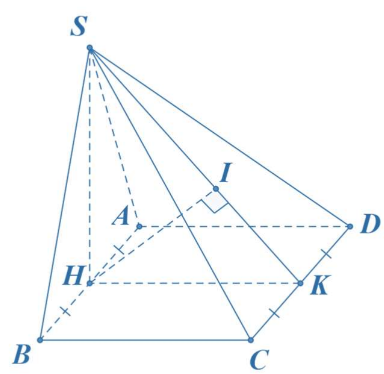
Ví dụ 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khi đó, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{21}$.

Phân tích: Bài toán hỏi khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).

1) A là không chân đường cao, (SCD) là mặt bên -> **CẤP ĐỘ 3 -> Đổi điểm về H**

2) Nối AH, ta thấy AH // (SCD) (Do AG//CD) -> **CẤP ĐỘ 3: Loại 1**



Gọi H là trung điểm của $AB\Rightarrow SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vì $\begin{cases}AB\,//\,(SCD)\\ H\in AB\end{cases}\Rightarrow d\left(A,(SCD)\right)=d\left(H,(SCD)\right)$.

Gọi K là trung điểm của $CD\Rightarrow HK=a$.
Kẻ $HI\perp SK,\ (I\in SK)$.

Khi đó: $d\left(H,(SCD)\right)=HI=\dfrac{SH.HK}{\sqrt{SH^2+HK^2}}=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

Nối AH, ta thấy AH // (SCD) (Do AG//CD)

Vậy $d\left(A,(SCD)\right)=d\left(H,(SCD)\right)=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Ví dụ 9. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật AD=2AB=2a. SA vuông góc với đáy. Góc giữa (SCD) và (ABCD) là 30°. Gọi M là trung điểm SB. Tìm khoảng cách từ M đến (SCD)

A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{21}$.

Phân tích: Bài toán hỏi khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SCD).

1) M là không chân đường cao, (SCD) là mặt bên -> **CẤP ĐỘ 3 -> Đổi điểm**

2) Nối MA, nhưng ta không thể biết AM cắt (SCD) hay AM//(SCD)

Ố la la. Vậy đối với những bài toán tìm khoảng cách từ những điểm **LƠ LỬNG ta sẽ đổi điểm 2 lần.**

Lần 1: Ta đổi M về B. (Loại 2: Do BM cắt (SCD) tại S)

$$\frac{d(M;(SCD))}{d(B;(SCD))}=\frac{MS}{BS}=\frac{1}{2}\Rightarrow d(M;(SCD))=\frac{1}{2}d(B;(SCD))=???$$

Lần 2: Ta đổi B về A. (Loại 1: Do AB // (SCD)

$d(B;(SCD))=d(A;(SCD))=???$

=> **Để tìm** $d(M;(SCD))$**, ta phải tìm** $d(A;(SCD))$

Bước 1: Tìm khoảng cách từ chân đường cao A đến (SCD)

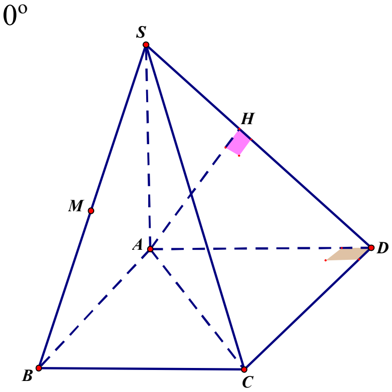
Phân tích: Bài toán hỏi khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).

1) A là chân đường cao, (SCD) là mặt bên -> **CẤP ĐỘ 2**

2) Tam giác ACD (đáy) có góc vuông ở D -> **BÀI TOÁN GỐC SỐ 1 (kẻ 1 đường)**

Kẻ AH vuông góc SD .Khi đó $d\left(A,\left(SBD\right)\right)=AH=\dfrac{SA.AD}{\sqrt{SA^2+AD^2}}=???$.

- **Tìm SA:** Ta có Góc giữa $\widehat{\left(\left(SCD\right);\left(ABCD\right)\right)}=\widehat{SDA}=30^{o}$



(Nhắc lại **Phương pháp tìm góc:** từ chân đường cao A, kẻ 1 đường vuông góc vào giao tuyến chung CD, sau đó nối lên đỉnh S)

$$\Rightarrow SA=\tan(\widehat{SDA}).AD=\tan 30^o.2a=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$$

$$\rightarrow d\left(A,\left(SCD\right)\right)=AH=\frac{SA.AD}{\sqrt{SA^2+AD^2}}=a$$

$AB//(SCD)$

$\rightarrow d\left(B,\left(SCD\right)\right)=\left(A,\left(SCD\right)\right)=a$

$BM\cap(SCD)=S$

$$\rightarrow\frac{d(M;(SCD))}{d(B;(SCD))}=\frac{MS}{BS}=\frac{1}{2}\Rightarrow d(M;(SCD))=\frac{1}{2}d(B;(SCD))=\frac{a}{2}$$

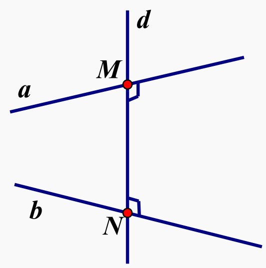
DẠNG 5: KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

1. Định nghĩa

- Đường thẳng d cắt hai đường thẳng chéo nhau a và b và cùng vuông góc với mỗi đường thẳng ấy được gọi là đường vuông góc chung của a và b.

- Nếu đường vuông góc chung d cắt hai đường thẳng chéo nhau a và b lần lượt tại M, N thì độ dài đoạn thẳng MN là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.

2. Phương pháp tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

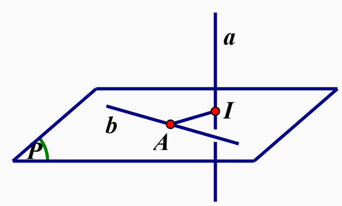


Cách 1: Dựng đường vuông góc chung (nếu đã biết a và b vuông góc)

Bước 1. Xác định mặt phẳng (P) chứa b mà (P) vuông góc với a.

Bước 2. Tìm giao điểm $I = (P) \cap a$.

Bước 3. Kẻ $IA \perp b \left(A \in b\right)$, chứng minh $IA \perp a$. Khi đó $d(a,b) = IA$.



Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng $6\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

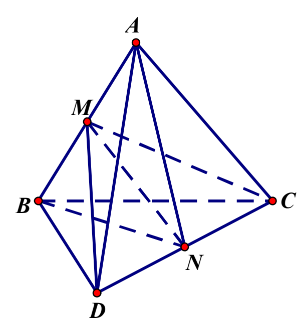
Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,CD.

Ta có: ACD và BCD là các tam giác đều

$$\Rightarrow CD \perp AN, CD \perp BN \Rightarrow CD \perp (ABN) \Rightarrow CD \perp MN$$

$$AN = 3\sqrt{6} \Rightarrow AB \perp MN$$

$$\Rightarrow d(AB,CD) = MN = \sqrt{AN^2 - AM^2} = 6$$

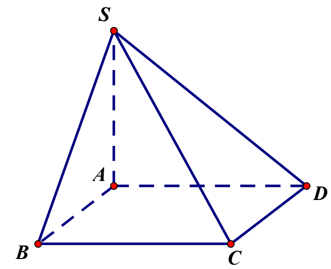


Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = 2a$. SA vuông góc với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD.

A. $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **B.** $2a$. **C.** a. **D.** $a\sqrt{3}$.

$$\left.\begin{array}{l} AB\perp BC \\ SA\perp\left(ABCD\right)\Rightarrow SA\perp BC \end{array}\right\}\Rightarrow BC\perp\left(SAB\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow BC\perp SB \\ BC\perp CD \end{array}\right\}\Rightarrow d\left(SB,CD\right)=BC=2a$$

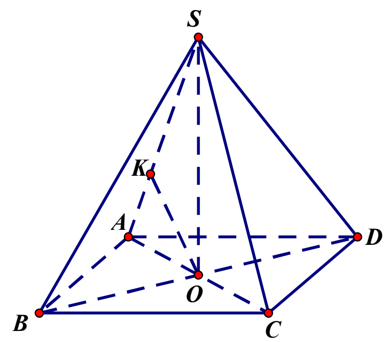


Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng 2. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $\left(ABCD\right)$ và $SO = \sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD.

A. 2. **B.** $\dfrac{\sqrt{30}}{5}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Ta có $BD\perp\left(SAC\right)$. Kẻ $OK\perp SA$.

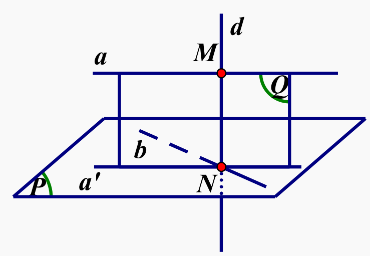
$$\Rightarrow d\left(SA,BD\right)=\frac{SO.OA}{\sqrt{SO^2+OA^2}}=\frac{\sqrt{30}}{5}$$



Cách 2: Dựng đường vuông góc chung (tổng quát)

Bước 1. Xác định mặt phẳng $\left(P\right)$ chứa b song song với a

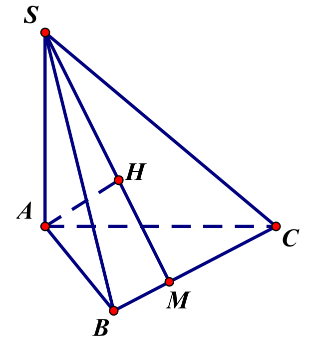
Bước 2. Gọi a' là hình chiếu của a lên $\left(P\right)$, $N = a'\cap b$, $\left(Q\right)$ là mặt phẳng chứa a và a', d là đường thẳng qua N và vuông góc với $\left(P\right)$, $M = d\cap a$. Khi đó $d\left(a,b\right)=MN$.



Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt bên $\left(SBC\right)$ là tam giác đều cạnh bằng a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $\left(ABC\right)$. Lấy điểm M trên cạnh BC sao cho $MC = 2MB$. Biết $\widehat{BAC}=120°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AC.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $a\sqrt{\dfrac{2}{7}}$. **D.** $a\sqrt{\dfrac{2}{21}}$.

Kẻ $AH \perp SM\ (H \in SM)$



$SB = SC \Rightarrow AB = AC \Rightarrow BC^2 = 2AB^2 - 2AB^2.\cos 120° \Leftrightarrow AB = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

$SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

$AM = \sqrt{AB^2 + MB^2 - 2AB.MB.\cos 120°} = \dfrac{a}{3} \Rightarrow AM = BM = \dfrac{a}{3}$

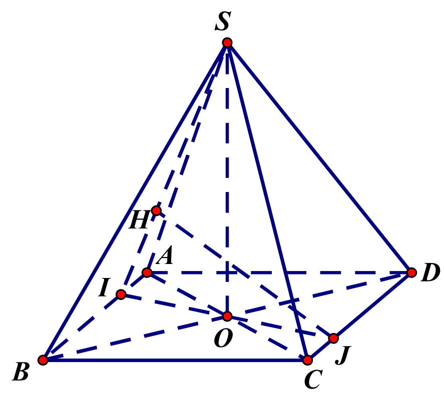
$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{ABM} = 30° \Rightarrow \widehat{MAC} = 90° \Rightarrow AM \perp AC \\ SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AC \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow AC \perp (SAM) \Rightarrow AC \perp AH \\ SM \perp AH \end{array}\right\} \Rightarrow d(AC, SM) = AH = \dfrac{SA.AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = a\sqrt{\dfrac{2}{21}}$

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a và $\widehat{ABC} = 60°$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy $(ABCD)$, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ bằng $30°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Gọi $O = AC \cap BD$. Kẻ $OI \perp AB$. Gọi $J = OI \cap CD$. Kẻ $JH \perp SI$.



$CD \parallel AB \Rightarrow CD \parallel (SAB)$

$\Rightarrow d(CD, SA) = d(CD, (SAB)) = d(J, (SAB)) = JH$

$\left.\begin{array}{l} SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp AB \\ OI \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp (SOI)$

$\Rightarrow ((SAB), (ABCD)) = (SI, OI) = \widehat{SIO} = 30°$

$OI = \dfrac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow IJ = 2OI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow d(CD, SA) = JH = IJ.\sin 30° \dfrac{a\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

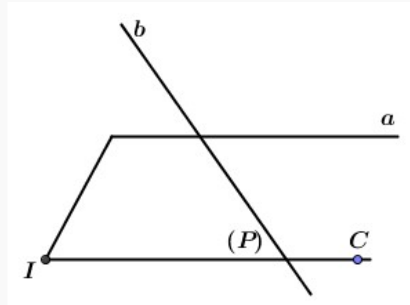
BÀI TOÁN TỔNG QUÁT 2 BƯỚC TÍNH KHOẢNG CÁCH TỪ A ĐẾN B

Bước 1: Dựng (P) chứa b và $\| a$

Vẽ d_5 thỏa mãn 5 điều:

- ✓ Qua C
- ✓ Thuộc đáy
- ✓ Song song với a
- ✓ Cắt 1 đườn thẳng dưới đáy tại I
- ✓ Chú ý: Góc vuông

$\Rightarrow (P) = (b, d_5)$



Bước 2: $M \in a; d(a,b) = d(M,(P))$

+ Mẫu

+ Đối đỉnh

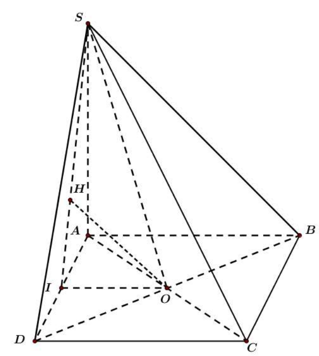
Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. $ABCD$ là hình vuông, $AB = a, AC \cap BD = O$. Tính $d(SO, AB)$?

Bước 1: Qua O vẽ $d \| AB, d \cap AD = I$

$\Rightarrow (AMI) \supset AM$ và song song với AB

Bước 2: $A \in AB, d(SO, AB) = d(A,(SOI)) = AH$

Tính $AH: \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{5}{a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$.



Ví dụ 7: Cho hình chóp $S.ABCD$, $SA \perp (ABCD), SA = 2a$, $ABCD$ là hình vuông, $AB = a$. Tính $d(SC, BD)$?

Bước 1: Qua C vẽ $d \| BD, d \cap AB = I$

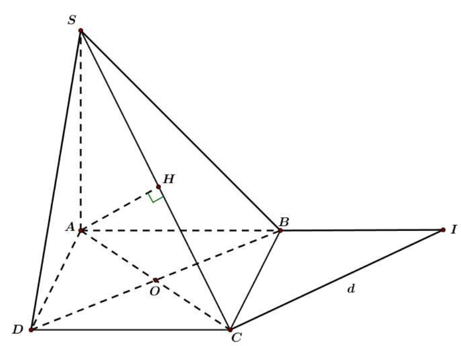
$\Rightarrow (AMI) \supset SC$ và song song với BD

Bước 2: $O \in BD, d(SC, DB) = d(O,(SCI))$

$$\frac{CO}{CA} = \frac{1}{2} = \frac{d\left(O,(SCI)\right)}{d\left(A,(SCI)\right)} \Rightarrow d\left(O,(SCI)\right) = \frac{1}{2} d\left(A,(SCI)\right) = \frac{1}{2} AH$$

Tính $AH: \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{1}{2a^2} = \dfrac{3}{4a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow d(SC, BD) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$



Ví dụ 8. **[Đề THPT Quốc Gia 2018]** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $BC=2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

A. $\frac{\sqrt{6}a}{2}$. **B.** $\frac{2a}{3}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a}{3}$.

Chọn B.

Dựng điểm E sao cho $ACBE$ là hình bình hành,

Khi đó: $AC//EB \Rightarrow AC//\left(SBE\right)$.

$\Rightarrow d\left(AC,SB\right)=d\left(AC,\left(SBE\right)\right)=d\left(A,\left(SBE\right)\right)$. (1)

Kẻ $AI\perp EB\left(I\in EB\right)$,

kẻ $AH\perp SI\left(H\in SI\right)\Rightarrow d\left(A,\left(SEB\right)\right)=AH$. (2)

Tam giác ABE vuông tại $\frac{1}{AI^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{5}{4a^2}$

Xét ΔSAI, ta có: $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AI^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{5}{4a^2}=\frac{9}{4a^2}\Rightarrow AH=\frac{2}{3}a$. (3)

Từ $(1),(2),(3)$ suy ra $h=d\left(AC,SB\right)=\frac{2a}{3}$.

DẠNG 6: GÓC TRONG KHÔNG GIAN

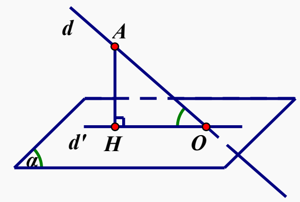
1. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

1. Định nghĩa

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α).

Trường hợp đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng $90°$.

Trường hợp đường thẳng d không vuông góc với mặt phẳng (α) góc giữa d và hình chiếu d' của nó trên (α) gọi là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α).



2. Nhận xét

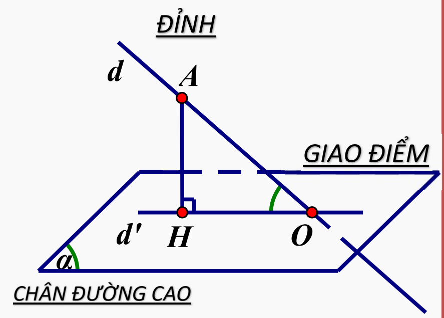
- Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng không vượt quá $90°$.

1. Cách xác định góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

- **Bước 1:** Tìm điểm chung giữa đường thẳng và mặt phẳng.
- **Bước 2:** Tìm hình chiếu của đường thẳng lên mặt phẳng.
- **Bước 3:** Tính góc giữa đường thẳng và hình chiếu của nó trên mặt phẳng.

Từ đó ta có công thức góc theo thứ tự:

ĐỈNH – GIAO ĐIỂM – CHÂN ĐƯỜNG CAO



2. Cách tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

- Dựng tam giác chứa góc và sử dụng định lí hàm số côsin:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

- Sử dụng các hệ thức lượng trong tam giác vuông:

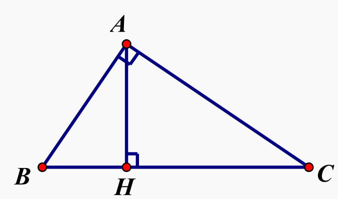
$(1)\ AB^2 = BH.BC; AC^2 = CH.BC$

$(2)\ AB^2 + AC^2 = BC^2$

$(3)\ AB.AC = BC.AH$

$(4)\ AH^2 = BH.CH$

$(5)\ \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$



Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có ΔSAB là tam giác đều cạnh a, ΔABC cân tại C. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt (ABC) là trung điểm của AB. Góc giữa SC và mặt đáy bằng $30°$. Tính độ dài đoạn SC.

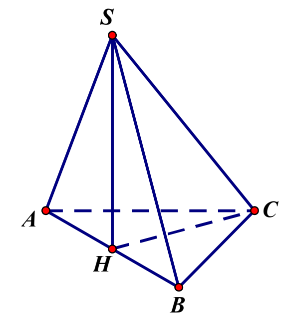
A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{3a}{4}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Gọi H là trung điểm của AB

$\Rightarrow SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp HC$

$\Rightarrow (SC,(ABC)) = (SC,CH) = \widehat{SCH} = 30^\circ$

$SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SC = \dfrac{SH}{\sin\widehat{SCH}} = a\sqrt{3}$



Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Tính sin của góc giữa đường thẳng SC với mặt phẳng (SAB).

A. $\dfrac{\sqrt{85}}{10}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{51}}{17}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{15}}{10}$.

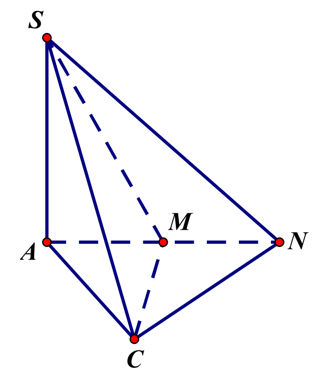
Gọi M là trung điểm AB

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow CM \perp AB \\ SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp CM \end{array}\right\} \Rightarrow CM \perp (SAB)$$

$\Rightarrow (SC,(SAB)) = (SC,SM) = \widehat{CSM}$

$CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; AM = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a}{2}; SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{5}$

$\Rightarrow \sin(SC,(SAB)) = \sin\widehat{CSM} = \dfrac{CM}{SC} = \dfrac{\sqrt{15}}{10}$



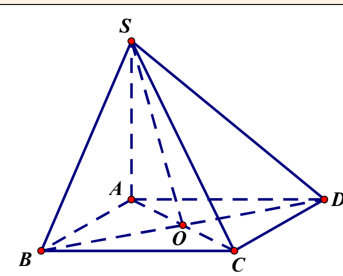
Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy. Tính tan của góc giữa SO và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 2. **D.** 1.

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SO,(ABCD)) = (SO,OA) = \widehat{SOA}$

$AC = a\sqrt{2} \Rightarrow OA = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \tan(SO,(ABCD)) = \tan\widehat{SOA} = \dfrac{SA}{OA} = 2\sqrt{2}$

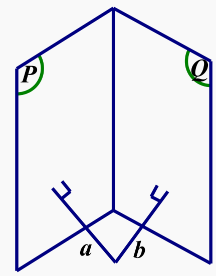


2. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

Để xác định góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q), ta có thể thực hiện theo một trong các cách sau:

1. Cách 1: Theo định nghĩa

$$\left.\begin{array}{l} a \perp (P) \\ b \perp (Q) \end{array}\right\} \Rightarrow ((P),(Q)) = (a,b)$$



Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC). Tính sin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

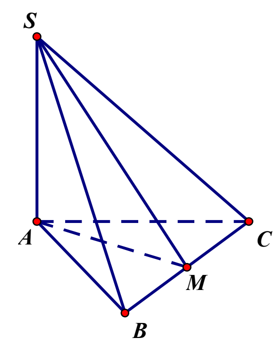
Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow AM \perp BC$

$$\left.\begin{array}{l} AM \perp BC \\ BC \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM$$

$$\Rightarrow ((SBC),(ABC)) = (SM, AM) = \widehat{SMA}$$

$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin((SBC),(ABC)) = \sin\widehat{SMA} = \frac{SA}{SM} = \frac{SA}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$



Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = AC = a$; cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy. Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC).

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Gọi H là trung điểm SC.

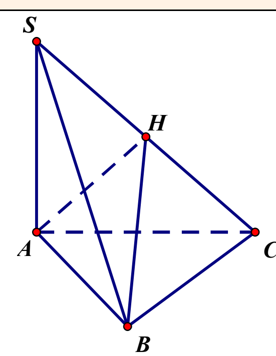
Tam giác SAC có $SA = AC = a \Rightarrow AH \perp SC$

Tam giác SBC có $SB = BC = a\sqrt{2} \Rightarrow BH \perp SC$

$$\Rightarrow ((SAC),(SBC)) = (AH, BH)$$

$$AH = \frac{SC}{2} = \frac{SA\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}; BH = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

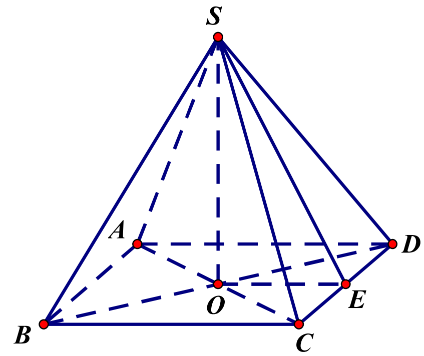
$$\cos((SAC),(SBC)) = \left|\cos\widehat{AHB}\right| = \left|\frac{HA^2 + HB^2 - AB^2}{2HA.HB}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



Ví dụ 6. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, chiều cao hình chóp bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc giữa mặt bên và mặt đáy là:

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $75°$.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và E là trung điểm của CD.



OE là đường trung bình của ΔACD

$$\Rightarrow \begin{cases} OE \,//\, AD \\ OE = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{a}{2} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} OE \,//\, AD \Rightarrow OE \perp CD \\ CD \perp SO \end{array}\right\} \Rightarrow CD \perp (SOE) \Rightarrow CD \perp SE$$

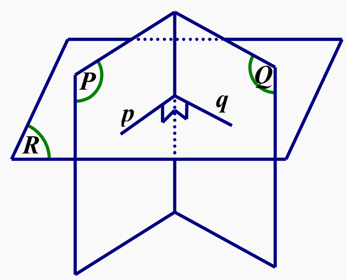
$$\left.\begin{array}{l} (ABCD) \cap (SCD) = CD \\ SE \perp CD, OE \perp CD \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow ((ABCD),(SCD)) = (SE,OE) = \widehat{SEO}$$

$$\tan\widehat{SEO} = \frac{SO}{OE} = \sqrt{3} \Rightarrow ((ABCD),(SCD)) = \widehat{SEO} = 60^\circ$$

2. Cách 2:

Khi xác định được $(P) \cap (Q) = c$ thì ta làm như sau:



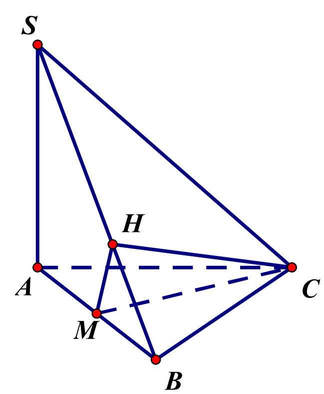
- **Bước 1.** Tìm mặt phẳng $(R) \supset c$.
- **Bước 2.** Tìm $\begin{cases} p = (R) \cap (P) \\ q = (R) \cap (Q) \end{cases}$. Khi đó $((P),(Q)) = (p,q)$

Đặc biệt: $\left.\begin{array}{l} (P) \supset p \perp c \\ (Q) \supset q \perp c \end{array}\right\} \Rightarrow ((P),(Q)) = (p,q)$.

Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $a, SA \perp (ABC), SA = a\sqrt{3}$. Côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAB) bằng:

A. $-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Gọi M là trung điểm của AB. Kẻ $MH \perp SB$



$$\left.\begin{array}{l} CM \perp AB \\ SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CM \end{array}\right\} \Rightarrow CM \perp (SAB)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow CM \perp SB \\ SB \perp MH \end{array}\right\} \Rightarrow SB \perp (MHC) \Rightarrow SB \perp CH$$

$$\Rightarrow ((SAB),(SBC)) = (MH,CH) = \widehat{CHM}$$

$$MH = \frac{1}{2}d(A,SB) = \frac{a\sqrt{3}}{4}; MC = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\widehat{BHD} = \frac{CM}{MH} = 2 \Rightarrow \cos((SAB),(SBC)) = \cos\widehat{CHM} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$