TÍCH PHÂN VẬN DỤNG CAO

Vấn đề 1. Tính tích phân theo định nghĩa

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^1 f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 0. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(0)=f(1)=1$. Biết rằng $\int\limits_0^1 e^x\left[f(x)+f'(x)\right]\mathrm{d}x=ae+b$. Tính $Q=a^{2018}+b^{2018}$.

A. $Q=2^{2017}+1$. **B.** $Q=2$. **C.** $Q=0$. **D.** $Q=2^{2017}-1$.

Câu 3. Cho các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$ và thỏa mãn $\int\limits_0^2 f'(x)g(x)\mathrm{d}x=2$, $\int\limits_0^2 f(x)g'(x)\mathrm{d}x=3$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2\left[f(x)g(x)\right]'\mathrm{d}x$.

A. $I=-1$. **B.** $I=1$. **C.** $I=5$. **D.** $I=6$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;+\infty)$ và thỏa $\int\limits_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t=x.\sin(\pi x)$. Tính $f\left(\frac{1}{4}\right)$.

A. $f\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}$. **B.** $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$. **C.** $f\left(\frac{1}{4}\right)=1$. **D.** $f\left(\frac{1}{4}\right)=1+\frac{\pi}{2}$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;+\infty)$ với $a>0$ và thỏa $\int\limits_a^x \frac{f(t)}{t^2}\mathrm{d}t+6=2\sqrt{x}$ với mọi $x>a$. Tính $f(4)$.

A. $f(4)=2$. **B.** $f(4)=4$. **C.** $f(4)=8$. **D.** $f(4)=16$.

Vấn đề 2. Kỹ thuật đổi biến

Câu 6. Cho $\int\limits_0^{2017} f(x)\mathrm{d}x=2$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\sqrt{e^{2017}-1}}\frac{x}{x^2+1}.f\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=2$. **C.** $I=4$. **D.** $I=5$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_1^9\frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=4$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x=2$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=2$. **B.** $I=6$. **C.** $I=4$. **D.** $I=10$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x=4$, $\int\limits_0^1\frac{x^2f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x=2$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=6$. **B.** $I=2$. **C.** $I=3$. **D.** $I=1$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f\left(\cos^2 x\right)\mathrm{d}x = 1$, $\int\limits_e^{e^2} \dfrac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}\mathrm{d}x = 1$. Tính tích phân $I = \int\limits_{\frac{1}{4}}^{2} \dfrac{f(2x)}{x}\mathrm{d}x$.

A. $I = 1$. **B.** $I = 2$. **C.** $I = 3$. **D.** $I = 4$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$, thỏa $f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2$. Tính tích phân $I = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \dfrac{f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{3}{2}$. **B.** $I = 2$. **C.** $I = \dfrac{5}{2}$. **D.** $I = 3$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 + 2\cos 2x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Tính $I = \int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = -6$. **B.** $I = 0$. **C.** $I = -2$. **D.** $I = 6$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa $f\left(x^5 + 4x + 3\right) = 2x + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tích phân $\int\limits_{-2}^{8} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** 10. **C.** $\dfrac{32}{3}$. **D.** 72.

Câu 13. Cho các hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $[0;1]$, thỏa $m.f(x) + n.f(1-x) = g(x)$ với m, n là số thực khác 0 và $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 1$. Tính $m + n$.

A. $m + n = 0$. **B.** $m + n = \dfrac{1}{2}$. **C.** $m + n = 1$. **D.** $m + n = 2$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f'(x) = f'(1-x)$ với mọi $x \in [0;1]$. Biết rằng $f(0) = 1, f(1) = 41$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = \sqrt{41}$. **B.** $I = 21$. **C.** $I = 41$. **D.** $I = 42$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f^3(x) + f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = -\dfrac{4}{5}$. **B.** $I = \dfrac{4}{5}$. **C.** $I = -\dfrac{5}{4}$. **D.** $I = \dfrac{5}{4}$.

Vấn đề 3. Kỹ thuật tích phân từng phần

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int\limits_0^3 x.f'(x).e^{f(x)}\mathrm{d}x = 8$ và $f(3) = \ln 3$. Tính $I = \int\limits_0^3 e^{f(x)}\mathrm{d}x$.

A. $I = 1$. **B.** $I = 11$. **C.** $I = 8 - \ln 3$. **D.** $I = 8 + \ln 3$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos^2 x\mathrm{d}x = 10$ và $f(0) = 3$. Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = -13$. **B.** $I = -7$. **C.** $I = 7$. **D.** $I = 13$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $\int\limits_1^2 f(x-1)\mathrm{d}x = 3$ và $f(1) = 4$. Tích phân $\int\limits_0^1 x^3 f'(x^2)\mathrm{d}x$ bằng

A. -1. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$. Biết $f(0) = 1$ và $f(x)f(2-x) = e^{2x^2-4x}$ với mọi $x \in [0;2]$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^2 \frac{(x^3 - 3x^2)f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$.

A. $I = -\frac{14}{3}$. **B.** $I = -\frac{32}{5}$. **C.** $I = -\frac{16}{3}$. **D.** $I = -\frac{16}{5}$.

Câu 20. Cho biểu thức $S = \ln\left(1 + \int\limits_{\frac{n}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 - \sin 2x)e^{2\cot x}\mathrm{d}x\right)$, với số thực $m \neq 0$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $S = 5$. **B.** $S = 9$.

C. $S = 2\cot\left(\frac{\pi}{4+m^2}\right) + 2\ln\left(\sin\frac{\pi}{4+m^2}\right)$. **D.** $S = 2\tan\left(\frac{\pi}{4+m^2}\right) + 2\ln\left(\frac{\pi}{4+m^2}\right)$.

Vấn đề 4. Tính a, b, c trong tích phân

Câu 21. Biết $\int\limits_1^2 \ln(9 - x^2)\mathrm{d}x = a\ln 5 + b\ln 2 + c$ với a, b, $c \in \mathbb{Z}$. Tính $P = |a| + |b| + |c|$.

A. $P = 13$. **B.** $P = 18$. **C.** $P = 26$. **D.** $P = 34$.

Câu 22. Biết $\int\limits_0^1 \frac{\pi x^3 + 2^x + ex^3 2^x}{\pi + e.2^x}\mathrm{d}x = \frac{1}{m} + \frac{1}{e\ln n}.\ln\left(p + \frac{e}{e+\pi}\right)$ với m, n, p là các số nguyên dương. Tính tổng $P = m + n + p$.

A. $P = 5$. **B.** $P = 6$. **C.** $P = 7$. **D.** $P = 8$.

Câu 23. Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 + (2x + \cos x)\cos x + 1 - \sin x}{x + \cos x}\mathrm{d}x = a\pi^2 + b - \ln\frac{c}{\pi}$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Tính $P = ac^3 + b$.

A. $P = \frac{5}{4}$. **B.** $P = \frac{3}{2}$. **C.** $P = 2$. **D.** $P = 3$.

Câu 24. Biết $\int\limits_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}} \frac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}-e^{x}}\mathrm{d}x = 1+\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}+a\sqrt{a}-\sqrt{b}$ với $a,\ b\in\mathbb{Z}^{+}$. Tính $P=a+b$.

A. $P=-1$. **B.** $P=1$. **C.** $P=3$. **D.** $P=5$.

Câu 25. Biết $\int\limits_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}-c$ với $a,\ b,\ c\in\mathbb{Z}^{+}$. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=12$. **B.** $P=18$. **C.** $P=24$. **D.** $P=46$.

Câu 26. Biết $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x}{\sqrt{\cos^2 x+1}+\sqrt{\sin^2 x+1}}\mathrm{d}x = \frac{a\sqrt{2}+b\sqrt{6}+c}{6}$ với $a,\ b,\ c\in\mathbb{Z}$. Tính $P=|a|+|b|+|c|$.

A. $P=10$. **B.** $P=12$. **C.** $P=14$. **D.** $P=36$.

Câu 27. Biết $\int\limits_{1}^{4} \sqrt{\frac{1}{4x}+\frac{\sqrt{x}+e^{x}}{\sqrt{x}e^{2x}}}\mathrm{d}x = a+e^{b}-e^{c}$ với $a,\ b,\ c\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=-5$. **B.** $P=-4$. **C.** $P=-3$. **D.** $P=3$.

Câu 28. Biết $\int\limits_{0}^{2} \sqrt{\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}}\mathrm{d}x = a\pi+b\sqrt{2}+c$ với $a,\ b,\ c\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=-1$. **B.** $P=2$. **C.** $P=3$. **D.** $P=4$.

Câu 29. Biết $I=\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln^2 x+\ln x}{(\ln x+x+1)^3}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}-\frac{b}{(e+2)^2}$ với $a,\ b\in\mathbb{Z}^{+}$. Tính $P=b-a$.

A. $P=-8$. **B.** $P=-6$. **C.** $P=6$. **D.** $P=10$.

Câu 30. Biết $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x = a+\frac{\pi^2}{b}+\frac{\sqrt{3}\pi}{c}$ với $a,\ b,\ c$ là các số nguyên. Tính $P=a-b+c$.

A. $P=-37$. **B.** $P=-35$. **C.** $P=35$. **D.** $P=41$.

Vấn đề 5. Tính tích phân hàm phân nhánh

Câu 31. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{khi } x\geq 0 \\ e^{2x} & \text{khi } x\leq 0 \end{cases}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{3e^2-1}{2e^2}$. **B.** $I=\frac{7e^2+1}{2e^2}$. **C.** $I=\frac{9e^2-1}{2e^2}$. **D.** $I=\frac{11e^2-11}{2e^2}$.

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$, thỏa $f'(x)=\frac{2}{2x-1}$, $f(0)=1$ và $f(1)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $\ln 15$. **B.** $2+\ln 15$. **C.** $3+\ln 15$. **D.** $4+\ln 15$.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$, thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2+x-2}$, $f(-3)-f(3)=0$ và $f(0)=\frac{1}{3}$. Giá trị biểu thức $f(-4)+f(-1)-f(4)$ bằng

A. $\frac{1}{3}\ln 20+\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}$. **C.** $\ln 80+1$. **D.** $\frac{1}{3}\ln\frac{8}{5}+1$.

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(0;+\infty)\setminus\{e\}$, thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x(\ln x-1)}$, $f\left(\frac{1}{e^2}\right)=\ln 6$ và $f(e^2)=3$. Giá trị biểu thức $f\left(\frac{1}{e}\right)+f(e^3)$ bằng

A. $3(\ln 2+1)$. **B.** $2\ln 2$. **C.** $3\ln 2+1$. **D.** $\ln 2+3$.

Câu 35. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\dfrac{1}{1+\sin 2x}$ với $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Biết $F(0)=1,\ F(\pi)=0$, tính giá trị biểu thức $P=F\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)-F\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$.

A. $P=0$. **B.** $P=2-\sqrt{3}$. **C.** $P=1$. **D.** Không tồn tại P.

Vấn đề 6. Tính tích phân dựa vào tính chất

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ, liên tục trên $[-4;4]$. Biết rằng $\int\limits_{-2}^{0}f(-x)\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_{1}^{2}f(-2x)\mathrm{d}x=4$. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{4}f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-10$. **B.** $I=-6$. **C.** $I=6$. **D.** $I=10$.

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $[-1;6]$. Biết rằng $\int\limits_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=8$ và $\int\limits_{1}^{3}f(-2x)\mathrm{d}x=3$. Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^{6}f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=2$. **B.** $I=5$. **C.** $I=11$. **D.** $I=14$.

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[3;7]$, thỏa mãn $f(x)=f(10-x)$ với mọi $x\in[3;7]$ và $\int\limits_{3}^{7}f(x)\mathrm{d}x=4$. Tính tích phân $I=\int\limits_{3}^{7}xf(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=20$. **B.** $I=40$. **C.** $I=60$. **D.** $I=80$.

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên đoạn $[-\pi;\pi]$, thỏa mãn $\int\limits_{0}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=2018$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\dfrac{f(x)}{2018^x+1}\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=0$. **B.** $I=\dfrac{1}{2018}$. **C.** $I=2018$. **D.** $I=4036$.

Câu 40. Biết $\int\limits_{0}^{\pi}\dfrac{x\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi^a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{Z}^+$. Tính $P=2a+b$.

A. $P=6$. **B.** $P=8$. **C.** $P=10$. **D.** $P=12$.

Vấn đề 7. Kỹ thuật phương trình hàm

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ và thỏa mãn $2f(x)+f(-x)=\cos x$. Tính tích phân $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-2$. **B.** $I=\dfrac{2}{3}$. **C.** $I=\dfrac{3}{2}$. **D.** $I=2$.

Câu 42. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-2;2]$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(-x)=\dfrac{1}{4+x^2}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{-2}^{2}f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-\dfrac{\pi}{10}$. **B.** $I=-\dfrac{\pi}{20}$. **C.** $I=\dfrac{\pi}{20}$. **D.** $I=\dfrac{\pi}{10}$.

Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $x^2f(x)+f(1-x)=2x-x^4$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{1}{2}$. **B.** $I=\frac{3}{5}$. **C.** $I=\frac{2}{3}$. **D.** $I=\frac{4}{3}$.

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{2};2\right]$ và thỏa mãn $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$. Tính tích phân $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{1}{2}$. **B.** $I=\frac{3}{2}$. **C.** $I=\frac{5}{2}$. **D.** $I=\frac{7}{2}$.

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{\pi}{20}$. **B.** $\frac{\pi}{16}$. **C.** $\frac{\pi}{6}$. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

Vấn đề 8. Kỹ thuật biến đổi

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ thỏa $f(x)f'(x)=3x^5+6x^2$. Biết rằng $f(0)=2$, tính $f^2(2)$.

A. $f^2(2)=64$. **B.** $f^2(2)=81$. **C.** $f^2(2)=100$. **D.** $f^2(2)=144$.

Câu 47. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên $[1;+\infty)$, thỏa $f(1)=0$, $e^{2f(x)}.\left[f'(x)\right]^2=4x^2-4x+1$ với mọi $x\in[1;+\infty)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $-1<f'(4)<0$. **B.** $0<f'(4)<1$. **C.** $1<f'(4)<2$. **D.** $2<f'(4)<3$.

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $f(x)>0, \forall x\in[1;2]$. Biết rằng $\int\limits_1^2 f'(x)\mathrm{d}x=10$ và $\int\limits_1^2\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\ln 2$. Tính $f(2)$.

A. $f(2)=-20$. **B.** $f(2)=-10$. **C.** $f(2)=10$. **D.** $f(2)=20$.

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-1;1]$, thỏa mãn $f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f'(x)+2f(x)=0$. Biết rằng $f(1)=1$, giá trị của $f(-1)$ bằng

A. e^{-2}. **B.** e^3. **C.** e^4. **D.** 3.

Câu 51. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời thỏa mãn

$$\begin{cases} f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R} \\ f'(x)=-e^x f^2(x),\ \forall x\in\mathbb{R}. \\ f(0)=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Tính giá trị của $f(\ln 2)$.

A. $f(\ln 2)=\frac{1}{4}$. **B.** $f(\ln 2)=\frac{1}{3}$.

C. $f(\ln 2)=\ln 2+\frac{1}{2}$. **D.** $f(\ln 2)=\ln^2 2+\frac{1}{2}$.

Câu 52. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$, biết $f'(x)+(2x+3)f^2(x)=0$, $f(x)>0$ với mọi $x>0$ và $f(1)=\frac{1}{6}$. Tính $P=1+f(1)+f(2)+...+f(2018)$.

A. $P=\frac{1009}{2020}$. **B.** $P=\frac{2019}{2020}$. **C.** $P=\frac{3029}{2020}$. **D.** $P=\frac{4039}{2020}$.

Câu 53. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[0;\sqrt{3}\right]$, thỏa mãn $f(x)>-1$, $f(0)=0$ và $f'(x)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1}$. Giá trị của $f\left(\sqrt{3}\right)$ bằng

A. 0. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 54. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $[1;4]$, đồng biến trên $[1;4]$, thoản mãn $x+2xf(x)=\left[f'(x)\right]^2$ với mọi $x\in[1;4]$. Biết rằng $f(1)=\frac{3}{2}$, tính tích phân $I=\int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{1186}{45}$. **B.** $I=\frac{1187}{45}$. **C.** $I=\frac{1188}{45}$. **D.** $I=\frac{9}{2}$.

Câu 55. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, thỏa $f(x).f'(x)=\cos x\sqrt{1+f^2(x)}$ với mọi $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ và $f(0)=\sqrt{3}$. Giá trị của $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 56. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên $[0;3]$, thỏa $f(x).f'(x)=2x\sqrt{f^2(x)+1}$ với mọi $x\in[0;3]$ và $f(0)=0$. Giá trị của $f(3)$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{11}$.

Câu 57. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm không âm trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(x)>0$ với mọi $x\in[0;1]$ và $\left[f(x)\right]^4.\left[f'(x)\right]^2.\left(x^2+1\right)=1+\left[f(x)\right]^3$. Biết $f(0)=2$, hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây.

A. $\frac{3}{2}<f(1)<2$. **B.** $2<f(1)<\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}<f(1)<3$. **D.** $3<f(1)<\frac{7}{2}$.

Câu 58. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{0;-1\}$, thỏa mãn $x(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x$ với mọi $x\in\mathbb{R}\backslash\{0;-1\}$ và $f(1)=-2\ln 2$. Biết $f(2)=a+b\ln 3$ với a, $b\in\mathbb{Q}$, tính $P=a^2+b^2$.

A. $P=\frac{1}{2}$. **B.** $P=\frac{3}{4}$. **C.** $P=\frac{13}{4}$. **D.** $P=\frac{9}{2}$.

Câu 59. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định, liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f'(0)=-1$ và $\begin{cases}\left[f'(x)\right]^2=f''(x)\\ f'(x)\neq 0\end{cases}$ với mọi $x\in[0;1]$. Đặt $P=f(1)-f(0)$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $-2\le P\le -1$. **B.** $-1\le P\le 0$. **C.** $0\le P\le 1$. **D.** $1\le P\le 2$.

Câu 60. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$, thỏa mãn $f'(0).f'(2)\neq 0$ và $g(x).f'(x)=x(x-2)e^x$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2 f(x).g'(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-4$. **B.** $I=4$. **C.** $I=e-2$. **D.** $I=2-e$.

Câu 61. Cho hàm số $f(x)>0$ xác định và có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $\begin{cases} g(x)=1+2018\int\limits_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ g(x)=f^2(x) \end{cases}$. Tính $I=\int\limits_0^1 \sqrt{g(x)}\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{1009}{2}$. **B.** $I=505$. **C.** $I=\frac{1011}{2}$. **D.** $I=\frac{2019}{2}$.

Câu 62. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;4]$, thỏa mãn $\begin{cases} f(1)+g(1)=4 \\ g(x)=-xf'(x) \\ f(x)=-xg'(x) \end{cases}$ với mọi $x\in[1;4]$. Tính tích phân $I=\int\limits_1^4 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. $I=3\ln 2$. **B.** $I=4\ln 2$. **C.** $I=6\ln 2$. **D.** $I=8\ln 2$.

Câu 63. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;2]$, thỏa mãn $f(1)=g(1)=0$ và

$$\begin{cases} \frac{x}{(x+1)^2}g(x)+2017x=(x+1)f'(x) \\ \frac{x^3}{x+1}g'(x)+f(x)=2018x^2 \end{cases}, \forall x\in[1;2].$$

Tính tích phân $I=\int\limits_1^2 \left[\frac{x}{x+1}g(x)-\frac{x+1}{x}f(x)\right]\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{1}{2}$. **B.** $I=1$. **C.** $I=\frac{3}{2}$. **D.** $I=2$.

Câu 64. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $[0;3]$, thỏa mãn $\begin{cases} f(3-x).f(x)=1 \\ f(x)\neq -1 \end{cases}$ với mọi $x\in[0;3]$ và $f(0)=\frac{1}{2}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^3 \frac{xf'(x)}{[1+f(3-x)]^2.f^2(x)}\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{1}{2}$. **B.** $I=1$. **C.** $I=\frac{3}{2}$. **D.** $I=\frac{5}{2}$.

Câu 65. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $af(b)+bf(a)=1$ với mọi $a,\ b\in[0;1]$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{1}{2}$. **B.** $I=\frac{1}{4}$. **C.** $I=\frac{\pi}{2}$. **D.** $I=\frac{\pi}{4}$.

Vấn đề 9. Kỹ thuật đạo hàm đúng

Câu 66. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thoả mãn $3f(x)+xf'(x)=x^{2018}$ với mọi $x\in[0;1]$. Tính $I=\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{1}{2018\times 2021}$. **B.** $I=\frac{1}{2019\times 2020}$. **C.** $I=\frac{1}{2019\times 2021}$. **D.** $I=\frac{1}{2018\times 2019}$.

Câu 67. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;4]$, thỏa mãn $f(x)+f'(x)=e^{-x}\sqrt{2x+1}$ với mọi $x\in[0;4]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $e^4 f(4)-f(0)=\frac{26}{3}$. **B.** $e^4 f(4)-f(0)=3e$.

C. $e^4 f(4)-f(0)=e^4-1$. **D.** $e^4 f(4)-f(0)=3$.

Câu 68. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x)-2018f(x)=2018x^{2017}e^{2018x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2018$. Tính giá trị $f(1)$.

A. $f(1)=2018e^{-2018}$. **B.** $f(1)=2017e^{2018}$. **C.** $f(1)=2018e^{2018}$. **D.** $f(1)=2019e^{2018}$.

Câu 69. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x)+xf(x)=2xe^{-x^2}$ và $f(0)=-2$. Tính $f(1)$.

A. $f(1)=e$. **B.** $f(1)=\dfrac{1}{e}$. **C.** $f(1)=\dfrac{2}{e}$. **D.** $f(1)=-\dfrac{2}{e}$.

Câu 70. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, thỏa mãn hệ thức $f(x)+\tan xf'(x)=\dfrac{x}{\cos^3 x}$. Biết rằng $\sqrt{3}f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=a\pi\sqrt{3}+b\ln 3$ trong đó $a,\ b\in\mathbb{Q}$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$.

A. $P=-\dfrac{4}{9}$. **B.** $P=-\dfrac{2}{9}$. **C.** $P=\dfrac{7}{9}$. **D.** $P=\dfrac{14}{9}$.

Vấn đề 10. Kỹ thuật đưa về bình phương loại 1

Câu 71. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, thỏa $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x=\dfrac{2-\pi}{2}$.

Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=0$. **B.** $I=\dfrac{\pi}{4}$. **C.** $I=1$. **D.** $I=\dfrac{\pi}{2}$.

Câu 72. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa $\displaystyle\int_0^1\left[f^2(x)+2\ln^2\dfrac{2}{e}\right]\mathrm{d}x=2\int_0^1\left[f(x)\ln(x+1)\right]\mathrm{d}x$.

Tích phân $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\ln\dfrac{e}{4}$. **B.** $I=\ln\dfrac{4}{e}$. **C.** $I=\ln\dfrac{e}{2}$. **D.** $I=\ln\dfrac{2}{e}$.

Câu 73. Cho hàm số $f(x)$ có đạo liên tục trên $[0;1]$, $f(x)$ và $f'(x)$ đều nhận giá trị dương trên $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0)=2$ và $\displaystyle\int_0^1\left[f'(x).[f(x)]^2+1\right]\mathrm{d}x=2\int_0^1\sqrt{f'(x)}.f(x)\mathrm{d}x$. Tính $I=\displaystyle\int_0^1[f(x)]^3\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{15}{4}$. **B.** $I=\dfrac{15}{2}$. **C.** $I=\dfrac{17}{2}$. **D.** $I=\dfrac{19}{2}$.

Câu 74. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương, liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0)=1$, $3\displaystyle\int_0^1\left[f'(x).[f(x)]^2+\dfrac{1}{9}\right]\mathrm{d}x=2\int_0^1\sqrt{f'(x)}.f(x)\mathrm{d}x$. Tính $I=\displaystyle\int_0^1[f(x)]^3\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{3}{2}$. **B.** $I=\dfrac{5}{4}$. **C.** $I=\dfrac{5}{6}$. **D.** $I=\dfrac{7}{6}$.

Câu 75. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm dương, liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa $f(1)-f(0)=1$ và $\int\limits_0^1 f'(x)\left[f^2(x)+1\right]\mathrm{d}x=2\int\limits_0^1 \sqrt{f'(x)}f(x)\mathrm{d}x$. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^1 \left[f(x)\right]^3\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{5\sqrt{33}-27}{18}$. **C.** $\frac{5\sqrt{33}}{18}$. **D.** $\frac{5\sqrt{33}+54}{18}$.

Vấn đề 11. Kỹ thuật đưa về bình phương loại 2 Kỹ thuật Holder

Câu 76. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=1$ và $\int\limits_0^1 \left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x=4$. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^1 \left[f(x)\right]^3\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 80.

Câu 77. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $\int\limits_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \sqrt{x}f(x)\mathrm{d}x=1$ và $\int\limits_0^1 \left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x=5$. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^1 \left[f(x)\right]^3\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{6}{5}$. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 78. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $\int\limits_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{16}$. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{5}$.

Câu 79. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;8]$ và thỏa mãn

$$\int\limits_1^2 \left[f\left(x^3\right)\right]^2\mathrm{d}x+2\int\limits_1^2 f\left(x^3\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int\limits_1^8 f(x)\mathrm{d}x-\frac{38}{15}.$$

Tích phân $\int\limits_1^8 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{8\ln 2}{27}$. **B.** $\frac{\ln 2}{27}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 80. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=0$, $\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=7$ và $\int\limits_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{7}{5}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** 4.

Câu 81. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=1$, $\int\limits_0^1 x^5f(x)\mathrm{d}x=\frac{11}{78}$ và $\int\limits_0^1 f'(x)\mathrm{d}\left(f(x)\right)=\frac{4}{13}$. Tính $f(2)$.

A. $f(2)=2$. **B.** $f(2)=\frac{251}{7}$. **C.** $f(2)=\frac{256}{7}$. **D.** $f(2)=\frac{261}{7}$.

Câu 82. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=2, f(0)=0$ và $\int_0^1 [f'(x)]^2\,dx=4.$. Tích phân $\int_0^1 [f^3(x)+2018x]dx.$ bằng

A. 0. **B.** 1011. **C.** 2018. **D.** 2022.

Câu 83. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$, thỏa mãn $\int_1^2 (x-1)^2 f(x)dx=-\frac{1}{3}$, $f(2)=0$ và $\int_1^2 [f'(x)]^2\,dx=7$. Tích phân $\int_1^2 f(x)dx$ bằng

A. $-\frac{7}{20}$. **B.** $\frac{7}{20}$. **C.** $-\frac{7}{5}$. **D.** $\frac{7}{5}$.

Câu 84. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1 [f'(x)]^2\,dx=\frac{9}{5}$ và $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx=\frac{2}{5}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $I=\frac{1}{5}$. **B.** $I=\frac{1}{4}$. **C.** $I=\frac{3}{5}$. **D.** $I=\frac{3}{4}$.

Câu 85. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(0)+f(1)=0$, $\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)dx=\frac{\pi}{2}$ và $\int_0^1 f^2(x)dx=\frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{1}{\pi}$. **B.** $\frac{2}{\pi}$. **C.** π. **D.** $\frac{3\pi}{2}$.

Câu 86. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;\pi]$, thỏa mãn $\int_0^\pi f'(x)\sin x dx=-1$ và $\int_0^\pi f^2(x)dx=\frac{2}{\pi}$. Tích phân $\int_0^\pi xf(x)dx$ bằng

A. $-\frac{6}{\pi}$. **B.** $-\frac{4}{\pi}$. **C.** $\frac{2}{\pi}$. **D.** $\frac{4}{\pi}$.

Câu 87. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa $f(1)=0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2\,dx=\frac{\pi^2}{8}$ và $\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)f(x)dx=\frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{1}{\pi}$. **B.** $\frac{2}{\pi}$. **C.** $\frac{\pi}{2}$. **D.** π.

Câu 88. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1 f'(x)\sin(\pi x)dx=\pi$ và $\int_0^1 f^2(x)dx=2$. Tích phân $\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$ bằng

A. $-\frac{6}{\pi}$. **B.** $-\frac{4}{\pi}$. **C.** $\frac{4}{\pi}$. **D.** $\frac{6}{\pi}$.

Câu 89. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, thỏa $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx=3\pi$ và $\int_0^\pi (\sin x-x)f'\left(\frac{x}{2}\right)dx=6\pi$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f''(x)]^3\,dx$ bằng

A. $-\dfrac{2}{\pi}$. **B.** 0. **C.** 3π. **D.** 9π.

Câu 90. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=0$ và $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,dx = \int\limits_0^1 (x+1)e^x f(x)\,dx = \dfrac{e^2-1}{4}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

A. $I=\dfrac{e-1}{2}$. **B.** $I=\dfrac{e^2}{4}$. **C.** $I=e-2$. **D.** $I=\dfrac{e}{2}$.

Câu 91. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(0)=0, f(1)=1$ và $\int\limits_0^1 \dfrac{[f'(x)]^2}{e^x}\,dx = \dfrac{1}{e-1}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ bằng

A. $\dfrac{e-2}{e-1}$. **B.** $\dfrac{e-1}{e-2}$. **D.** $\dfrac{1}{(e-1)(e-2)}$. **C.** 1.

Câu 92. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(0)=0, f(1)=1$ và $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^2}\,[f'(x)]^2\,dx = \dfrac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}$. Tích phân $\int\limits_0^1 \dfrac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}\ln^2\left(1+\sqrt{2}\right)$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\ln^2\left(1+\sqrt{2}\right)$. **C.** $\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. **D.** $\left(\sqrt{2}-1\right)\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Câu 93. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-1;1]$, thỏa mãn $f(-1)=0$, $\int\limits_{-1}^1 [f'(x)]^2\,dx = 112$ và $\int\limits_{-1}^1 x^2 f(x)\,dx = \dfrac{16}{3}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^1 f(x)\,dx$.

A. $I=\dfrac{84}{5}$. **B.** $I=\dfrac{35}{2}$. **C.** $I=\dfrac{35}{4}$. **D.** $I=\dfrac{168}{5}$.

Câu 94. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=0$, $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,dx = \dfrac{3}{2}-2\ln 2$ và $\int\limits_0^1 \dfrac{f(x)}{(x+1)^2}\,dx = 2\ln 2-\dfrac{3}{2}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ bằng

A. $\dfrac{1-\ln 2}{2}$. **B.** $\dfrac{1-2\ln 2}{2}$. **C.** $\dfrac{3-2\ln 2}{2}$. **D.** $\dfrac{3-4\ln 2}{2}$.

Câu 95. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$, đồng biến trên $[1;2]$, thỏa mãn $f(1)=0$, $\int\limits_1^2 [f'(x)]^2\,dx = 2$ và $\int\limits_1^2 f(x).f'(x)\,dx = 1$. Tích phân $\int\limits_1^2 f(x)\,dx$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 96. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=0$, $\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx = 1$ và $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2 f^2(x)\,dx = \dfrac{3}{4}$. Giá trị của $f^2\left(\sqrt{2}\right)$ bằng

A. $-\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{3\left(1-\sqrt{2}\right)}{2}$. **D.** $-\dfrac{3\left(1-\sqrt{2}\right)}{2}$.

Câu 97. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$, thỏa mãn $f(2)=1$, $\int\limits_0^2 x^2 f(x)\,dx = \dfrac{8}{15}$ và $\int\limits_0^2 [f'(x)]^4\,dx = \dfrac{32}{5}$. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^2 f(x)\,dx$ bằng

A. $-\dfrac{3}{2}$. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** $-\dfrac{7}{3}$. **D.** $\dfrac{7}{3}$.

Vấn đề 12. Kỹ thuật đánh giá AM-GM

Câu 98. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=ef(0)$ và $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f^2(x)}+\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x \le 2$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $f(1)=\sqrt{\frac{2e}{e-1}}$. **B.** $f(1)=\frac{2(e-2)}{e-1}$. **C.** $f(1)=\sqrt{\frac{2e^2}{e^2-1}}$. **D.** $f(1)=\sqrt{\frac{2(e-2)}{e-1}}$.

Câu 99. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên $[0;1]$, có đạo hàm dương và liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(0)=1$ và $\int_0^1 \left[f^3(x)+4[f'(x)]^3\right]\mathrm{d}x \le 3\int_0^1 f'(x)f^2(x)\,\mathrm{d}x$. Tính $I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=2\left(\sqrt{e}-1\right)$. **B.** $I=2\left(e^2-1\right)$. **C.** $I=\frac{\sqrt{e}-1}{2}$. **D.** $I=\frac{e^2-1}{2}$.

Câu 100. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên $[0;1]$, có đạo hàm dương liên và tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}\,\mathrm{d}x \ge 1$ và $f(0)=1$, $f(1)=e^2$. Tính giá trị của $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

A. $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$. **B.** $f\left(\frac{1}{2}\right)=4$. **C.** $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}$. **D.** $f\left(\frac{1}{2}\right)=e$.

Câu 101. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1 [f(x)f'(x)]^2\,\mathrm{d}x \le 1$ và $f(0)=1$, $f(1)=\sqrt{3}$. Tính giá trị của $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

A. $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}$. **B.** $f\left(\frac{1}{2}\right)=3$. **C.** $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}$. **D.** $f\left(\frac{1}{2}\right)=e$.

Câu 102. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[1;2]$, thỏa mãn $\int_1^2 \frac{[f'(x)]^2}{xf(x)}\,\mathrm{d}x \le 24$ và $f(1)=1$, $f(2)=16$. Tính giá trị của $f\left(\sqrt{2}\right)$.

A. $f\left(\sqrt{2}\right)=1$. **B.** $f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}$. **C.** $f\left(\sqrt{2}\right)=2$. **D.** $f\left(\sqrt{2}\right)=4$.

Vấn đề 13. Tìm GTLN-GTNN của tích phân

Câu 103. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm cấp hai thỏa mãn $x.f''(x)\ge e^x+x$ và $f'(2)=2e$, $f(0)=e^2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $f(2)\le 4e-1$. **B.** $f(2)\le 2e+e^2$. **C.** $f(2)\le e^2-2e$. **D.** $f(2)>12$.

Câu 104. Cho hàm số $f(x)$ dương và liên tục trên $[1;3]$, thỏa $\max\limits_{[1;3]} f(x)=2$, $\min\limits_{[1;3]} f(x)=\frac{1}{2}$ và biểu thức $S=\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x.\int_1^3 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ đạt giá trị lớn nhất, khi đó hãy tính $I=\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{7}{5}$. **C.** $\frac{7}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Câu 105. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(x)+f'(x)\le 1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Giá trị lớn nhất của $f(1)$ bằng

A. $e-1$. **B.** $\frac{e-1}{e}$. **C.** $\frac{e}{e-1}$. **D.** e.

Câu 106. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=2018f(0)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\int_0^1 \frac{1}{[f(x)]^2}dx+\int_0^1 [f'(x)]^2 dx$ bằng

A. $\ln 2018$. **B.** $2\ln 2018$. **C.** $m=2e$. **D.** $m=2018e$.

Câu 107. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và $\int_0^1 (1-x)^2 f'(x)dx=-\frac{1}{3}$. Giá trị nhỏ nhật của biểu thức $\int_0^1 [f(x)]^2 dx-f(0)$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $-\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{2}{3}$.

Câu 108. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;\,1]$ thỏa mãn $\int_0^1 xf(x)dx=0$ và $\max\limits_{[0;\,1]}|f(x)|=1$. Tích phân $\int_0^1 e^x f(x)dx$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $\left(-\infty;-\frac{5}{4}\right)$. **B.** $\left(\frac{3}{2};\,e-1\right)$. **C.** $\left(-\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right)$. **D.** $(e-1;\,+\infty)$.

Câu 109. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên $[0;1]$. Đặt $g(x)=1+\int_0^x f(t)dt$. Biết $g(x)\le\sqrt{f(x)}$ với mọi $x\in[0;1]$, tích phân $\int_0^1 \frac{1}{g(x)}dx$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** 1.

Câu 110. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $f^2(x)\le 1+3\int_0^x f(t)dt=g(x)$ với mọi $x\in[0;1]$, tích phân $\int_0^1 \sqrt{g(x)}dx$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{7}{4}$. **C.** $\frac{9}{5}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Câu 111. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $f(x)\le 2018+2\int_0^x f(t)dt$ với mọi $x\in[0;1]$. Biết giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ có dạng ae^2+b với $a,\,b\in\mathbb{Z}$. Tính $a+b$.

A. 0. **B.** 1009. **C.** 2018. **D.** 2020.

Câu 112. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$. Đặt $g(x)=1+\int_0^{x^2} f(t)dt$. Biết $g(x)\ge 2xf(x^2)$ với mọi $x\in[0;1]$, tích phân $\int_0^1 g(x)dx$ có giá trị lớn nhất bằng

A. 1. **B.** $e-1$. **C.** 2. **D.** $e+1$.

Câu 113. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa $f'(x)\ge f(x)>0,\ \forall x\in[0;1]$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $f(0).\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{e-1}{e}$. **C.** $\frac{e+1}{e}$. **D.** $e-1$.

Câu 114. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;\pi]$, thỏa mãn $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos x f(x)\mathrm{d}x = 1$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^\pi f^2(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{2}{\pi}$. **B.** $\frac{3}{\pi}$. **C.** $\frac{4}{\pi}$. **D.** $\frac{3}{2\pi}$.

Câu 115. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;\pi]$, thỏa mãn $\int_0^\pi \sin x f(x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos x f(x)\mathrm{d}x = 1$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^\pi f^2(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{2}{\pi}$. **B.** $\frac{3}{\pi}$. **C.** $\frac{4}{\pi}$. **D.** $\frac{3}{2\pi}$.

Câu 116. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 e^x f(x)\mathrm{d}x = 1$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $0 < m < 1$. **B.** $1 < m < 2$. **C.** $2 < m < 3$. **D.** $3 < m < 4$.

Câu 117. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{x} f(x)\mathrm{d}x = 1$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** 1. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** 3.

Câu 118. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$, thỏa $\int_1^2 x^3 f(x)\mathrm{d}x = 31$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_1^2 f^4(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 961. **B.** 3875. **C.** 148955. **D.** 923521.

Câu 119. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm đến cấp 2 trên $[0;2]$ thỏa $f(0) - 2f(1) + f(2) = 1$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^2 [f''(x)]^2\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{4}{5}$. **D.** $\frac{5}{4}$.

Câu 120. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[1;3]$ và $f(1) = 0$, $\max\limits_{[1;3]} |f(x)| = \sqrt{10}$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_1^3 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 20.

TÍCH PHÂN VẬN DỤNG CAO

Mục lục

Vấn đề 1. Tính tích phân theo định nghĩa

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^1 f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 0. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải. Ta có $\int\limits_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = f(x)\Big|_0^1 = f(1)-f(0)$.

Từ $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2} \longrightarrow \begin{cases} 2f(0)+3f(1)=1 \\ 2f(1)+3f(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0)=-\frac{2}{5} \\ f(1)=\frac{3}{5} \end{cases}$.

Vậy $I=\int\limits_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = f(1)-f(0)=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=1$. **Chọn C.**

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(0)=f(1)=1$. Biết rằng $\int\limits_0^1 e^x\left[f(x)+f'(x)\right]\mathrm{d}x = ae+b$. Tính $Q=a^{2018}+b^{2018}$.

A. $Q=2^{2017}+1$. **B.** $Q=2$. **C.** $Q=0$. **D.** $Q=2^{2017}-1$.

Lời giải. Ta có $\int\limits_0^1 e^x\left[f(x)+f'(x)\right]\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left[e^x f(x)\right]' \mathrm{d}x = \left[e^x f(x)\right]\Big|_0^1 = ef(1)-f(0) \overset{f(0)=f(1)=1}{=} e-1$.

Suy ra $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases} \longrightarrow Q=a^{2018}+b^{2018}=1^{2018}+(-1)^{2018}=2$. **Chọn B.**

Câu 3. Cho các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$ và thỏa mãn $\int\limits_0^2 f'(x)g(x)\mathrm{d}x=2$, $\int\limits_0^2 f(x)g'(x)\mathrm{d}x=3$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2 \left[f(x)g(x)\right]' \mathrm{d}x$.

A. $I=-1$. **B.** $I=1$. **C.** $I=5$. **D.** $I=6$.

Lời giải. Ta có $I=\int\limits_0^2 \left[f(x)g(x)\right]' \mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \left[f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\right]\mathrm{d}x$

$=\int\limits_0^2 f'(x)g(x)\mathrm{d}x + \int\limits_0^2 f(x)g'(x)\mathrm{d}x = 2+3=5$. **Chọn C.**

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;+\infty)$ và thỏa $\int\limits_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t = x.\sin(\pi x)$. Tính $f\left(\frac{1}{4}\right)$.

A. $f\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}$. **B.** $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$. **C.** $f\left(\frac{1}{4}\right)=1$. **D.** $f\left(\frac{1}{4}\right)=1+\frac{\pi}{2}$.

Lời giải. Từ $\int\limits_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t = x.\sin(\pi x)$, đạo hàm hai vế ta được $2xf\left(x^2\right)=\sin(\pi x)+\pi x\cos(\pi x)$.

Cho $x=\frac{1}{2}$ ta được $2.\frac{1}{2}.f\left(\frac{1}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}=1 \longrightarrow f\left(\frac{1}{4}\right)=1$. **Chọn C.**

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;+\infty)$ với $a>0$ và thỏa $\int\limits_a^x \frac{f(t)}{t^2}\mathrm{d}t+6=2\sqrt{x}$ với mọi $x>a$. Tính $f(4)$.

A. $f(4)=2$. **B.** $f(4)=4$. **C.** $f(4)=8$. **D.** $f(4)=16$.

Lời giải. Từ $\int\limits_a^x \frac{f(t)}{t^2}\mathrm{d}t+6=2\sqrt{x}$, đạo hàm hai vế ta được $\frac{f(x)}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Suy ra $f(x)=x\sqrt{x}\longrightarrow f(4)=4\sqrt{4}=8.$ **Chọn C.**

Vấn đề 2. Kỹ thuật đổi biến

Câu 6. Cho $\int\limits_0^{2017} f(x)\mathrm{d}x=2$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\sqrt{e^{2017}-1}} \frac{x}{x^2+1}.f\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]\mathrm{d}x.$

A. $I=1.$ **B.** $I=2.$ **C.** $I=4.$ **D.** $I=5.$

Lời giải. Đặt $t=\ln\left(x^2+1\right)$, suy ra $\mathrm{d}t=\frac{2x\mathrm{d}x}{x^2+1}\longrightarrow\frac{x\mathrm{d}x}{x^2+1}=\frac{\mathrm{d}t}{2}.$

Đổi cận: $\begin{cases} x=0\to t=0 \\ x=\sqrt{e^{2017}-1}\to t=2017 \end{cases}.$

Khi đó $I=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2017} f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2017} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.2=1.$ **Chọn A.**

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_1^9 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=4$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x=2.$ Tính tích phân $I=\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x.$

A. $I=2.$ **B.** $I=6.$ **C.** $I=4.$ **D.** $I=10.$

Lời giải. ● Xét $\int\limits_1^9 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=4.$ Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow t^2=x$, suy ra $2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x.$

Đổi cận $\begin{cases} x=1\to t=1 \\ x=9\to t=3 \end{cases}.$ Suy ra $4=\int\limits_1^9 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int\limits_1^3 f(t)2\mathrm{d}t\longrightarrow\int\limits_1^3 f(t)\mathrm{d}t=2.$

● Xét $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x=2.$ Đặt $u=\sin x$, suy ra $\mathrm{d}u=\cos x\mathrm{d}x.$

Đổi cận $\begin{cases} x=0\to u=0 \\ x=\frac{\pi}{2}\to u=1 \end{cases}.$ Suy ra $2=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$

Vậy $I=\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=4.$ **Chọn C.**

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x=4$, $\int\limits_0^1 \frac{x^2f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x=2.$ Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$

A. $I=6.$ **B.** $I=2.$ **C.** $I=3.$ **D.** $I=1.$

Lời giải. Xét $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x=4.$

Đặt $t=\tan x$, suy ra $\mathrm{d}t=\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\left(\tan^2 x+1\right)\mathrm{d}x\longrightarrow\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$

Đổi cận: $\begin{cases} x=0\to t=0 \\ x=\frac{\pi}{4}\to t=1 \end{cases}.$ Khi đó $4=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \frac{f(t)}{t^2+1}\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x.$

Từ đó suy ra $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{x^2f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x=4+2=6.$ **Chọn A.**

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x.f\left(\cos^2 x\right)\mathrm{d}x=1,$ $\int_e^{e^2}\frac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}\mathrm{d}x=1.$ Tính tích phân $I=\int_{\frac{1}{4}}^{2}\frac{f(2x)}{x}\mathrm{d}x.$

A. $I=1.$ **B.** $I=2.$ **C.** $I=3.$ **D.** $I=4.$

Lời giải. • Xét $A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x.f\left(\cos^2 x\right)\mathrm{d}x=1$. Đặt $t=\cos^2 x$.

Suy ra $\mathrm{d}t=-2\sin x\cos x\mathrm{d}x=-2\cos^2 x\tan x\mathrm{d}x=-2t.\tan x\mathrm{d}x\longrightarrow\tan x\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}t}{2t}.$

Đổi cận: $\begin{cases}x=0\longrightarrow t=1\\ x=\frac{\pi}{4}\longrightarrow t=\frac{1}{2}\end{cases}.$

Khi đó $1=A=-\frac{1}{2}\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\longrightarrow\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=2.$

• Xét $B=\int_e^{e^2}\frac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}\mathrm{d}x=1.$ Đặt $u=\ln^2 x.$

Suy ra $\mathrm{d}u=\frac{2\ln x}{x}\mathrm{d}x=\frac{2\ln^2 x}{x\ln x}\mathrm{d}x=\frac{2u}{x\ln x}\mathrm{d}x\longrightarrow\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\frac{\mathrm{d}u}{2u}.$

Đổi cận: $\begin{cases}x=e\longrightarrow u=1\\ x=e^2\longrightarrow u=4\end{cases}.$

Khi đó $1=B=\frac{1}{2}\int_1^4\frac{f(u)}{u}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_1^4\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\longrightarrow\int_1^4\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=2.$

• Xét tích phân cần tính $I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(2x)}{x}\mathrm{d}x.$

Đặt $v=2x,$ suy ra $\begin{cases}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}v\\ x=\frac{v}{2}\end{cases}$. Đổi cận: $\begin{cases}x=\frac{1}{4}\longrightarrow v=\frac{1}{2}\\ x=2\longrightarrow v=4\end{cases}.$

Khi đó $I=\int_{\frac{1}{2}}^{4}\frac{f(v)}{v}\mathrm{d}v=\int_{\frac{1}{2}}^{4}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x+\int_1^4\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=2+2=4.$ **Chọn D.**

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\left[\frac{1}{2};2\right]$, thỏa $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+2.$ Tính tích phân $I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x.$

A. $I=\frac{3}{2}.$ **B.** $I=2.$ **C.** $I=\frac{5}{2}.$ **D.** $I=3.$

Lời giải. Đặt $x=\frac{1}{t}$, suy ra $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$. Đổi cận: $\begin{cases} x=\frac{1}{2}\longrightarrow t=2 \\ x=2\longrightarrow t=\frac{1}{2} \end{cases}$.

Khi đó $I=\int_2^{\frac{1}{2}} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t^2}+1}.\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2+1}\mathrm{d}t=\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+1}\mathrm{d}x.$

Suy ra $2I=\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{x^2+\frac{1}{x^2}+2}{x^2+1}\mathrm{d}x$

$=\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{x^2+1}{x^2}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\left.\left(x-\frac{1}{x}\right)\right|_{\frac{1}{2}}^{2}=3\longrightarrow I=\frac{3}{2}$. **Chọn A.**

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa $f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Tính $I=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-6$. **B.** $I=0$. **C.** $I=-2$. **D.** $I=6$.

Lời giải. Đặt $t=-x\longrightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Đổi cận: $\begin{cases} x=-\frac{3\pi}{2}\rightarrow t=\frac{3\pi}{2} \\ x=\frac{3\pi}{2}\rightarrow t=-\frac{3\pi}{2} \end{cases}$.

Khi đó $I=-\int_{\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}} f(-t)\mathrm{d}t=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-t)\mathrm{d}t=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)\mathrm{d}x.$

Suy ra $2I=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left[f(t)+f(-t)\right]\mathrm{d}t=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2+2\cos 2t}\,\mathrm{d}t=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}2|\cos t|\mathrm{d}t\overset{\text{CASIO}}{=}12\longrightarrow I=6$. **Chọn D.**

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa $f\left(x^5+4x+3\right)=2x+1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int_{-2}^{8} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** 10. **C.** $\frac{32}{3}$. **D.** 72.

Lời giải. Đặt $x=t^5+4t+3$, suy ra $\mathrm{d}x=\left(5t^4+4\right)\mathrm{d}t$. Đổi cận $\begin{cases} x=-2\rightarrow t=-1 \\ x=8\rightarrow t=1 \end{cases}$.

Khi đó $\int_{-2}^{8} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1} f\left(t^5+4t+3\right)\left(5t^4+4\right)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}(2t+1)\left(5t^4+4\right)\mathrm{d}t=10$. **Chọn B.**

Câu 13. Cho các hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $[0;1]$, thỏa $m.f(x)+n.f(1-x)=g(x)$ với m, n là số thực khác 0 và $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=1$. Tính $m+n$.

A. $m+n=0$. **B.** $m+n=\frac{1}{2}$. **C.** $m+n=1$. **D.** $m+n=2$.

Lời giải. Từ giả thiết $m.f(x)+n.f(1-x)=g(x)$, lấy tích phân hai vế ta được

$$\int_0^1 [m.f(x)+n.f(1-x)]\mathrm{d}x=\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$$

Suy ra $m+n\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=1$ (do $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=1$). (1)

Xét tích phân $\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x$. Đặt $t=1-x$, suy ra $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases} x=0\to t=1 \\ x=1\to t=0 \end{cases}$.

Khi đó $\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=-\int_1^0 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $m+n=1$. **Chọn C.**

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f'(x)=f'(1-x)$ với mọi $x\in[0;1]$. Biết rằng $f(0)=1, f(1)=41$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\sqrt{41}$. **B.** $I=21$. **C.** $I=41$. **D.** $I=42$.

Lời giải. Ta có $f'(x)=f'(1-x)\longrightarrow f(x)=-f(1-x)+C$.

Suy ra $f(0)=-f(1)+C\xrightarrow{f(0)=1,\, f(1)=41.} C=42$.

Suy ra $f(x)=-f(1-x)+42\longrightarrow f(x)+f(1-x)=42$

$\longrightarrow \int_0^1 [f(x)+f(1-x)]\mathrm{d}x=\int_0^1 42\mathrm{d}x=42.$ (1)

Vì $f'(x)=f'(1-x)\longrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=21$. **Chọn B.**

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f^3(x)+f(x)=x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-\frac{4}{5}$. **B.** $I=\frac{4}{5}$. **C.** $I=-\frac{5}{4}$. **D.** $I=\frac{5}{4}$.

Lời giải. Đặt $u=f(x)$, ta thu được $u^3+u=x$. Suy ra $(3u^2+1)\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$.

Từ $u^3+u=x$, ta đổi cận $\begin{cases} x=0\to u=0 \\ x=2\to u=1 \end{cases}$. Khi đó $I=\int_0^1 u(3u^2+1)\mathrm{d}u=\frac{5}{4}$. **Chọn D.**

Cách khác. Nếu bài toán cho $f(x)$ có đạo hàm liên tục thì ta làm như sau:

Từ giả thiết $f^3(x)+f(x)=x\longrightarrow \begin{cases} f^3(0)+f(0)=0 \\ f^3(2)+f(2)=2 \end{cases}\to \begin{cases} f(0)=0 \\ f(2)=1 \end{cases}$. (*)

Cũng từ giả thiết $f^3(x)+f(x)=x$, ta có $f'(x).f^3(x)+f'(x).f(x)=x.f'(x)$.

Lấy tích phân hai vế $\int_0^2 [f'(x).f^3(x)+f'(x).f(x)]\mathrm{d}x=\int_0^2 x.f'(x)\mathrm{d}x$

$$\longrightarrow \left(\frac{[f(x)]^4}{4}+\frac{[f(x)]^2}{2}\right)\Bigg|_0^2=xf(x)\Big|_0^2-\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\xrightarrow{(*)}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{5}{4}.$$

Vấn đề 3. Kỹ thuật tích phân từng phần

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^3 x.f'(x).e^{f(x)}\mathrm{d}x=8$ và $f(3)=\ln 3$. Tính $I=\int_0^3 e^{f(x)}\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=11$. **C.** $I=8-\ln 3$. **D.** $I=8+\ln 3$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=f'(x).e^{f(x)}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=e^{f(x)} \end{cases}$. Khi đó $\int_0^3 x.f'(x).e^{f(x)}\mathrm{d}x = x.e^{f(x)}\Big|_0^3 - \int_0^3 e^{f(x)}\mathrm{d}x$.

Suy ra $8=3.e^{f(3)}-\int_0^3 e^{f(x)}\mathrm{d}x \longrightarrow \int_0^3 e^{f(x)}\mathrm{d}x=9-8=1$. **Chọn A.**

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos^2 x\mathrm{d}x=10$ và $f(0)=3$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=-13$. **B.** $I=-7$. **C.** $I=7$. **D.** $I=13$.

Lời giải. Xét $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos^2 x\mathrm{d}x=10$, đặt $\begin{cases} u=\cos^2 x \\ \mathrm{d}v=f'(x)\cos^2 x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=-\sin 2x\mathrm{d}x \\ v=f(x) \end{cases}$.

Khi đó $10=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos^2 x\mathrm{d}x=\cos^2 x f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow 10=-f(0)+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x\mathrm{d}x \longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x\mathrm{d}x=10+f(0)=13$. **Chọn D.**

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $\int_1^2 f(x-1)\mathrm{d}x=3$ và $f(1)=4$. Tích phân $\int_0^1 x^3 f'(x^2)\mathrm{d}x$ bằng

A. -1. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

Lời giải. Ta có $\int_1^2 f(x-1)\mathrm{d}x=3 \xrightarrow{t=x-1} \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=3$ hay $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=3$.

Xét $\int_0^1 x^3 f'(x^2)\mathrm{d}x \xrightarrow{t=x^2} \frac{1}{2}\int_0^1 tf'(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=f(x) \end{cases}$.

Khi đó $\int_0^1 x^3 f'(x^2)\mathrm{d}x \xrightarrow{t=x^2} \frac{1}{2}\int_0^1 tf'(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{2}[4-3]=\frac{1}{2}$. **Chọn C.**

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$. Biết $f(0)=1$ và $f(x)f(2-x)=e^{2x^2-4x}$ với mọi $x\in[0;2]$. Tính tích phân $I=\int_0^2 \frac{(x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$.

A. $I=-\frac{14}{3}$. **B.** $I=-\frac{32}{5}$. **C.** $I=-\frac{16}{3}$. **D.** $I=-\frac{16}{5}$.

Lời giải. Từ giả thiết $f(x)f(2-x)=e^{2x^2-4x} \xrightarrow{x=2} f(2)=1$.

Ta có $I=\int\limits_0^2 \dfrac{\left(x^3-3x^2\right)f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u=x^3-3x^2 \\ \mathrm{d}v=\dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\left(3x^2-6x\right)\mathrm{d}x \\ v=\ln\left|f(x)\right| \end{cases}$.

Khi đó $I=\left(x^3-3x^2\right)\ln\left|f(x)\right|\Big|_0^2-\int\limits_0^2\left(3x^2-6x\right)\ln\left|f(x)\right|\mathrm{d}x \overset{f(2)=1}{=} -3\int\limits_0^2\left(x^2-2x\right)\ln\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=-3J.$

Ta có $J=\int\limits_0^2\left(x^2-2x\right)\ln\left|f(x)\right|\mathrm{d}x \overset{x=2-t}{=} \int\limits_2^0\left[(2-t)^2-2(2-t)\right]\ln\left|f(2-t)\right|\mathrm{d}(2-t)$

$=\int\limits_2^0\left[(2-x)^2-2(2-x)\right]\ln\left|f(2-x)\right|\mathrm{d}(2-x)=\int\limits_0^2\left(x^2-2x\right)\ln\left|f(2-x)\right|\mathrm{d}x.$

Suy ra $2J=\int\limits_0^2\left(x^2-2x\right)\ln\left|f(x)\right|\mathrm{d}x+\int\limits_0^2\left(x^2-2x\right)\ln\left|f(2-x)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\left(x^2-2x\right)\ln\left|f(x)f(2-x)\right|\mathrm{d}x$

$=\int\limits_0^2\left(x^2-2x\right)\ln e^{2x^2-4x}\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\left(x^2-2x\right)\left(2x^2-4x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{32}{15}\longrightarrow J=\dfrac{16}{15}.$

Vậy $I=-3J=-\dfrac{16}{5}$. **Chọn D.**

Câu 20. Cho biểu thức $S=\ln\left(1+\int\limits_{\frac{n}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}(2-\sin 2x)e^{2\cot x}\mathrm{d}x\right)$, với số thực $m\neq 0$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $S=5$.

B. $S=9$.

C. $S=2\cot\left(\dfrac{\pi}{4+m^2}\right)+2\ln\left(\sin\dfrac{\pi}{4+m^2}\right)$.

D. $S=2\tan\left(\dfrac{\pi}{4+m^2}\right)+2\ln\left(\dfrac{\pi}{4+m^2}\right)$.

Lời giải. Ta có $\int\limits_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}(2-\sin 2x)e^{2\cot x}\mathrm{d}x=2\int\limits_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{2\cot x}\mathrm{d}x-\int\limits_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xe^{2\cot x}\mathrm{d}x.\quad (1)$

Xét $\int\limits_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xe^{2\cot x}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{2\cot x}\mathrm{d}\left(\sin^2 x\right)=\sin^2 x.e^{2\cot x}\Big|_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\left(-\dfrac{2}{\sin^2 x}\right)e^{2\cot x}\mathrm{d}x$

$=\sin^2 x.e^{2\cot x}\Big|_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}+2\int\limits_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{2\cot x}\mathrm{d}x.\qquad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $I=\sin^2 x.e^{2\cot x}\Big|_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}=-1+\sin^2\dfrac{\pi}{4+m^2}.e^{2\cot\frac{\pi}{4+m^2}}$.

$\longrightarrow S=\ln\left(\sin^2\dfrac{\pi}{4+m^2}.e^{2\cot\frac{\pi}{4+m^2}}\right)=2\cot\left(\dfrac{\pi}{4+m^2}\right)+2\ln\left(\sin\dfrac{\pi}{4+m^2}\right)$. **Chọn C.**

Vấn đề 4. Tính a, b, c trong tích phân

Câu 21. Biết $\int\limits_1^2 \ln\left(9-x^2\right)\mathrm{d}x = a\ln 5 + b\ln 2 + c$ với $a,\ b,\ c \in \mathbb{Z}$. Tính $P = |a| + |b| + |c|$.

A. $P = 13.$ **B.** $P = 18.$ **C.** $P = 26.$ **D.** $P = 34.$

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = \ln\left(9-x^2\right) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{-2x}{9-x^2}dx \\ v = x+3 \end{cases}.$

Khi đó $I = (x+3)\ln\left(9-x^2\right)\Big|_1^2 + 2\int\limits_1^2 \dfrac{x(x+3)}{9-x^2}\mathrm{d}x = 5\ln 5 - 4\ln 8 + 2\int\limits_1^2 \left(-1 + \dfrac{3}{3-x}\right)\mathrm{d}x$

$= 5\ln 5 - 12\ln 2 - 2\left(x + 3\ln|3-x|\right)\Big|_1^2 = 5\ln 5 - 6\ln 2 - 2 \longrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -6 \\ c = -2 \end{cases} \rightarrow P = 13.$ **Chọn A.**

Nhận xét. Ở đây chọn $v = x+3$ thay bởi x để rút gọn cho $9-x^2$, giảm thiểu biến đổi.

Câu 22. Biết $\int\limits_0^1 \dfrac{\pi x^3 + 2^x + ex^3 2^x}{\pi + e.2^x}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{e\ln n}.\ln\left(p + \dfrac{e}{e+\pi}\right)$ với $m,\ n,\ p$ là các số nguyên dương. Tính tổng $P = m+n+p.$

A. $P = 5.$ **B.** $P = 6.$ **C.** $P = 7.$ **D.** $P = 8.$

Lời giải. Ta có $I = \int\limits_0^1 \dfrac{\pi x^3 + 2^x + ex^3 2^x}{\pi + e.2^x}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(x^3 + \dfrac{2^x}{\pi + e.2^x}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}x^4\Big|_0^1 + A = \dfrac{1}{4} + A.$

Tính $A = \int\limits_0^1 \dfrac{2^x}{\pi + e.2^x}\mathrm{d}x.$ Đặt $t = \pi + e.2^x \longrightarrow \mathrm{d}t = e.\ln 2.2^x\,\mathrm{d}x \longrightarrow 2^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{e\ln 2}\mathrm{d}t.$

Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = \pi + e \\ x = 1 \rightarrow t = \pi + 2e \end{cases}.$

Khi đó $A = \dfrac{1}{e.\ln 2}.\int\limits_{\pi+e}^{\pi+2e} \dfrac{\mathrm{d}t}{t} = \dfrac{1}{e.\ln 2}\ln|t|\Big|_{\pi+e}^{\pi+2e} = \dfrac{1}{e\ln 2}\ln\dfrac{\pi+2e}{\pi+e} = \dfrac{1}{e\ln 2}\ln\left(1 + \dfrac{e}{e+\pi}\right).$

Vậy $I = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{e\ln 2}\ln\left(1 + \dfrac{e}{e+\pi}\right) \longrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ n = 2 \\ p = 1 \end{cases} \Rightarrow P = m+n+p = 7.$ **Chọn C.**

Câu 23. Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{x^2 + (2x + \cos x)\cos x + 1 - \sin x}{x + \cos x}\mathrm{d}x = a\pi^2 + b - \ln\dfrac{c}{\pi}$ với $a,\ b,\ c$ là các số hữu tỉ. Tính $P = ac^3 + b.$

A. $P = \dfrac{5}{4}.$ **B.** $P = \dfrac{3}{2}.$ **C.** $P = 2.$ **D.** $P = 3.$

Lời giải. Ta có $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\left(x^2 + 2x\cos x + \cos^2 x\right) + (1 - \sin x)}{x + \cos x}\mathrm{d}x$

$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{(x+\cos x)^2}{x+\cos x}\mathrm{d}x + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{x+\cos x}\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x+\cos x)\mathrm{d}x + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\mathrm{d}(x+\cos x)}{x+\cos x}$

$= \left(\dfrac{1}{2}x^2 + \sin x + \ln|x+\cos x|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{8}\pi^2 + 1 + \ln\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{1}{8}\pi^2 + 1 - \ln\dfrac{2}{\pi}$

$$\longrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{8} \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases} \longrightarrow P = ac^3 + b = 2.$$ **Chọn C.**

Câu 24. Biết $\displaystyle\int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}} \frac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}-e^x}\mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{b}{a} + a\sqrt{a} - \sqrt{b}$ với $a,\ b \in \mathbb{Z}^+$. Tính $P = a + b$.

A. $P = -1$. **B.** $P = 1$. **C.** $P = 3$. **D.** $P = 5$.

Lời giải. Ta có $\displaystyle I = \int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}} \frac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}-e^x}\mathrm{d}x = \int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}} \left(\sqrt{e^{2x}+1}+e^x\right)\mathrm{d}x = \int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}} \sqrt{e^{2x}+1}\mathrm{d}x + \int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}} e^x\mathrm{d}x.$

- $\displaystyle\int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}} e^x\mathrm{d}x = e^x\Big|_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}} = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}.$
- $\displaystyle\int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}} \sqrt{e^{2x}+1}\mathrm{d}x$. Đặt $t = \sqrt{e^{2x}+1} \Leftrightarrow t^2 = e^{2x}+1$, suy ra $2t\mathrm{d}t = 2e^{2x}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{t\mathrm{d}t}{e^{2x}} = \dfrac{t\mathrm{d}t}{t^2-1}$.

Đổi cận: $\begin{cases} x = \ln\sqrt{3} \to t = 2 \\ x = \ln\sqrt{8} \to t = 3 \end{cases}.$

Khi đó $\displaystyle\int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}} \sqrt{e^{2x}+1}\mathrm{d}x = \int_2^3 \frac{t^2\mathrm{d}t}{t^2-1}dt = \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t = \left(t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_2^3 = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$

Vậy $I = 1 + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2} + 2\sqrt{2} - \sqrt{3} \longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \longrightarrow P = a + b = 5.$ **Chọn D.**

Câu 25. Biết $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - c$ với $a,\ b,\ c \in \mathbb{Z}^+$. Tính $P = a + b + c$.

A. $P = 12$. **B.** $P = 18$. **C.** $P = 24$. **D.** $P = 46$.

Lời giải. Ta có $\displaystyle I = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)} = \int_1^2 \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^2}\mathrm{d}x.$

Đặt $u = \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$, suy ra $\mathrm{d}u = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x \longrightarrow 2\mathrm{d}u = \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x(x+1)}}\mathrm{d}x.$

Đổi cận $\begin{cases} x = 2 \to u = \sqrt{3}+\sqrt{2} \\ x = 1 \to u = \sqrt{2}+1 \end{cases}$. Khi đó $\displaystyle I = 2\int_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\frac{2}{u}\Big|_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = -2\left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)$

$$= -2\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} - \frac{\sqrt{2}-1}{2-1}\right) = \sqrt{32} - \sqrt{12} - 2 \longrightarrow \begin{cases} a = 32 \\ b = 12 \\ c = 2 \end{cases} \longrightarrow P = 46.$$ **Chọn D.**

Câu 26. Biết $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x}{\sqrt{\cos^2 x+1}+\sqrt{\sin^2 x+1}}\mathrm{d}x = \frac{a\sqrt{2}+b\sqrt{6}+c}{6}$ với $a,\ b,\ c \in \mathbb{Z}$. Tính $P = |a| + |b| + |c|$.

A. $P = 10$. **B.** $P = 12$. **C.** $P = 14$. **D.** $P = 36$.

Lời giải. Ta có $\displaystyle I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x}{\sqrt{\cos^2 x+1}+\sqrt{\sin^2 x+1}}\mathrm{d}x = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin 2x\cos 2x}{\sqrt{3+\cos 2x}+\sqrt{3-\cos 2x}}\mathrm{d}x.$

Đặt $t = \cos 2x \longrightarrow \mathrm{d}t = -2\sin 2x\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \to t = 1 \\ x = \dfrac{\pi}{4} \to t = 0 \end{cases}.$

Khi đó $\displaystyle I = -\sqrt{2}\int_1^0 \frac{t}{\sqrt{3+t}+\sqrt{3-t}}\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{3+t}+\sqrt{3-t}}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \left(\sqrt{3+t} - \sqrt{3-t}\right)\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{2}{3}\sqrt{(3+t)^3}+\frac{2}{3}\sqrt{(3-t)^3}\right]\Bigg|_0^1=\frac{16\sqrt{2}-12\sqrt{6}+8}{6}\longrightarrow\begin{cases}a=16\\b=-12\\c=8\end{cases}\to P=36.$$ **Chọn D.**

Câu 27. Biết $\int\limits_1^4\sqrt{\frac{1}{4x}+\frac{\sqrt{x}+e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}}\text{d}x=a+e^b-e^c$ với $a,\ b,\ c\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=-5$. **B.** $P=-4$. **C.** $P=-3$. **D.** $P=3$.

Lời giải. Ta có $\int\limits_1^4\sqrt{\frac{1}{4x}+\frac{\sqrt{x}+e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}}\text{d}x=\int\limits_1^4\sqrt{\frac{e^{2x}+4x+4e^x\sqrt{x}}{4xe^{2x}}}\text{d}x=\int\limits_1^4\sqrt{\frac{\left(e^x+2\sqrt{x}\right)^2}{\left(2e^x\sqrt{x}\right)^2}}\text{d}x$

$$=\int\limits_1^4\frac{e^x+2\sqrt{x}}{2e^x\sqrt{x}}\text{d}x=\int\limits_1^4\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{e^x}\right)\text{d}x=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{e^x}\right)\Bigg|_1^4=1-\frac{1}{e^4}+\frac{1}{e}=1+e^{-1}-e^{-4}$$

$$\longrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\\c=-4\end{cases}\longrightarrow P=a+b+c=-4.$$ **Chọn B.**

Câu 28. Biết $\int\limits_0^2\sqrt{\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}}\text{d}x=a\pi+b\sqrt{2}+c$ với $a,\ b,\ c\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=-1$. **B.** $P=2$. **C.** $P=3$. **D.** $P=4$.

Lời giải. Đặt $\sqrt{x}=2\cos u$ với $u\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Suy ra $x=4\cos^2u\longrightarrow\text{d}x=-4\sin 2u\text{d}u$.

Đổi cận $\begin{cases}x=0\longrightarrow u=\frac{\pi}{2}\\x=2\longrightarrow u=\frac{\pi}{4}\end{cases}$. Khi đó $I=4\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{2+2\cos u}{2-2\cos u}}\sin 2u\text{d}u=8\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}.\sin u.\cos u\text{d}u$

$$=16\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\frac{u}{2}.\cos u\text{d}u=8\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos u).\cos u\text{d}u=8\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos u\text{d}u+4\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2u)\text{d}u$$

$$=8\sin u\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+(4x+2.\sin 2u)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\pi-4\sqrt{2}+6\longrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-4\\c=6\end{cases}\longrightarrow P=3.$$ **Chọn C.**

Câu 29. Biết $I=\int\limits_1^e\frac{\ln^2x+\ln x}{(\ln x+x+1)^3}\text{d}x=\frac{1}{a}-\frac{b}{(e+2)^2}$ với $a,\ b\in\mathbb{Z}^+$. Tính $P=b-a$.

A. $P=-8$. **B.** $P=-6$. **C.** $P=6$. **D.** $P=10$.

Lời giải. Ta có $\int\limits_1^e\frac{\ln^2x+\ln x}{(\ln x+x+1)^3}\text{d}x=\int\limits_1^e\frac{\ln x+1}{\ln x+x+1}.\frac{\ln x}{(\ln x+x+1)^2}\text{d}x.$

Đặt $t=\frac{\ln x+1}{\ln x+x+1}\longrightarrow\text{d}t=\left(\frac{\ln x+1}{\ln x+x+1}\right)'\text{d}x=-\frac{\ln x}{(\ln x+x+1)^2}\text{d}x.$

Đổi cận: $\begin{cases}x=1\to t=\frac{1}{2}\\x=e\to t=\frac{2}{e+2}\end{cases}$. Khi đó $I=-\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{e+2}}t\text{d}t=-\frac{1}{2}t^2\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{e+2}}=\frac{1}{8}-\frac{2}{(e+2)^2}$. **Chọn B.**

Câu 30. Biết $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\text{d}x=a+\frac{\pi^2}{b}+\frac{\sqrt{3}\pi}{c}$ với $a,\ b,\ c$ là các số nguyên. Tính $P=a-b+c$.

A. $P=-37$. **B.** $P=-35$. **C.** $P=35$. **D.** $P=41$.

Lời giải. Ta có $I=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}x\cos x\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}x\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\cos x\mathrm{d}x.$

Lại có $I=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x\overset{x=-t}{=}\int_{\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}}\frac{(-t)\cos(-t)}{\sqrt{1+(-t)^2}-t}\mathrm{d}(-t)=\int_{\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}}\frac{t\cos t}{\sqrt{1+t^2}-t}\mathrm{d}t$

$=-\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}t\left(\sqrt{1+t^2}+t\right)\cos t\mathrm{d}t=-\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}x\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\cos x\mathrm{d}x.$

Suy ra $2I=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}x\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\cos x\mathrm{d}x-\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}x\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\cos x\mathrm{d}x=-2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}x^2\cos x\mathrm{d}x$

$\longrightarrow I=-\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}x^2\cos x\mathrm{d}x.$ Tích phân từng phần hai lần ta được $I=2+\frac{\pi^2}{-36}+\frac{\sqrt{3}\pi}{-3}$

$\longrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-36\\c=-3\end{cases}\longrightarrow P=a-b+c=35.$ **Chọn C.**

Vấn đề 5. Tính tích phân hàm phân nhánh

Câu 31. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{khi }\ x\geq 0\\e^{2x} & \text{khi }\ x\leq 0\end{cases}$. Tính tích phân $I=\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x.$

A. $I=\frac{3e^2-1}{2e^2}.$ **B.** $I=\frac{7e^2+1}{2e^2}.$ **C.** $I=\frac{9e^2-1}{2e^2}.$ **D.** $I=\frac{11e^2-11}{2e^2}.$

Lời giải. Ta có $I=\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}e^{2x}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}(x+1)\mathrm{d}x=\frac{9e^2-1}{2e^2}.$ **Chọn C.**

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$, thỏa $f'(x)=\frac{2}{2x-1}$, $f(0)=1$ và $f(1)=2.$ Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $\ln 15.$ **B.** $2+\ln 15.$ **C.** $3+\ln 15.$ **D.** $4+\ln 15.$

Lời giải. Ta có $f'(x)=\frac{2}{2x-1}$

$\longrightarrow f(x)=\int\frac{2}{2x-1}\mathrm{d}x=\ln|2x-1|+C=\begin{cases}\ln(1-2x)+C_1 & ;x<\frac{1}{2}\\\ln(2x-1)+C_2 & ;x>\frac{1}{2}\end{cases}.$

- $f(0)=1\longrightarrow\ln(1-2.0)+C_1=1\to C_1=1.$
- $f(1)=2\longrightarrow\ln(2.1-1)+C_2=2\to C_2=2.$

Do đó $f(x)=\begin{cases}\ln(1-2x)+1 \text{ khi } x<\frac{1}{2}\\\ln(2x-1)+2\text{ khi } x>\frac{1}{2}\end{cases}\to\begin{cases}f(-1)=\ln 3+1\\f(3)=\ln 5+2\end{cases}$

$\longrightarrow f(-1)+f(3)=3+\ln 5+\ln 3=3+\ln 15.$ **Chọn C.**

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{-2;1\}$, thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2}$, $f(-3)-f(3)=0$ và $f(0)=\dfrac{1}{3}$. Giá trị biểu thức $f(-4)+f(-1)-f(4)$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}\ln 20+\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}$. **C.** $\ln 80+1$. **D.** $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{8}{5}+1$.

Lời giải. Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}\right)$

$$\longrightarrow f(x)=\int\frac{1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{3}\left[\ln(1-x)-\ln(-x-2)\right]+C_1 & ;x<-2\\ \frac{1}{3}\left[\ln(1-x)-\ln(x+2)\right]+C_2 & ;-2<x<1\\ \frac{1}{3}\left[\ln(x-1)-\ln(x+2)\right]+C_3 & ;x>1\end{cases}.$$

- $f(0)=\dfrac{1}{3}\longrightarrow\dfrac{1}{3}\left[\ln(1-0)-\ln(0+2)\right]+C_2=\dfrac{1}{3}\longrightarrow C_2=\dfrac{1}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}$.
- $f(-3)-f(3)=0\longrightarrow C_1-C_3=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1}{10}$.

Ta có $f(-4)+f(-1)-f(4)=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{3}\ln 2-\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1}{2}+C_2+C_1-C_3=\dfrac{1}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}$. **Chọn B.**

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(0;+\infty)\backslash\{e\}$, thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x(\ln x-1)}$, $f\left(\dfrac{1}{e^2}\right)=\ln 6$ và $f\left(e^2\right)=3$. Giá trị biểu thức $f\left(\dfrac{1}{e}\right)+f\left(e^3\right)$ bằng

A. $3(\ln 2+1)$. **B.** $2\ln 2$. **C.** $3\ln 2+1$. **D.** $\ln 2+3$.

Lời giải. Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{x(\ln x-1)}$

$$\longrightarrow f(x)=\int\frac{1}{x(\ln x-1)}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(\ln x-1)}{(\ln x-1)}=\ln|\ln x-1|+C=\begin{cases}\ln(1-\ln x)+C_1 \text{ khi } x\in(0;e)\\ \ln(\ln x-1)+C_2 \text{ khi } x\in(e;+\infty)\end{cases}.$$

- $f\left(\dfrac{1}{e^2}\right)=\ln 6\longrightarrow\ln\left(1-\ln\dfrac{1}{e^2}\right)+C_1=\ln 6\to C_1=\ln 2$.
- $f\left(e^2\right)=3\longrightarrow\ln\left(\ln e^2-1\right)+C_2=3\to C_2=3$.

Do đó $f(x)=\begin{cases}\ln(1-\ln x)+\ln 2 \text{ khi } x\in(0;e)\\ \ln(\ln x-1)+3 \text{ khi } x\in(e;+\infty)\end{cases}\to\begin{cases}f\left(\frac{1}{e}\right)=\ln 2+\ln 2\\ f\left(e^3\right)=\ln 2+3\end{cases}$

$\longrightarrow f\left(\dfrac{1}{e}\right)+f\left(e^3\right)=3(\ln 2+1)$. **Chọn C.**

Câu 35. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\dfrac{1}{1+\sin 2x}$ với $x\in\mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$. Biết $F(0)=1$, $F(\pi)=0$, tính giá trị biểu thức $P=F\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)-F\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$.

A. $P=0$. **B.** $P=2-\sqrt{3}$. **C.** $P=1$. **D.** Không tồn tại P.

Lời giải. Với x thuộc vào mỗi khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{4}+k\pi;-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$ ta có

$$F(x)=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin 2x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(\sin x+\cos x)^2}=\int\frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2}\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+C.$$

- $0;-\dfrac{\pi}{12}\in\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$ nên $F(0)-F\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{1}{2}\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{12}}^{0}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\xrightarrow{F(0)=1}F\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$
- $\pi;\dfrac{11\pi}{12}\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{5\pi}{4}\right)$ nên $F(\pi)-F\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)=\dfrac{1}{2}\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\Bigg|_{\frac{11\pi}{12}}^{\pi}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\xrightarrow{F(\pi)=0}F\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Vậy $P=F\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)-F\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)=1.$ **Chọn C.**

Vấn đề 6. Tính tích phân dựa vào tính chất

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ, liên tục trên $[-4;4]$. Biết rằng $\int\limits_{-2}^{0}f(-x)\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_{1}^{2}f(-2x)\mathrm{d}x=4.$ Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{4}f(x)\mathrm{d}x.$

A. $I=-10.$ **B.** $I=-6.$ **C.** $I=6.$ **D.** $I=10.$

Lời giải. Do $f(x)$ là hàm lẻ nên $f(-x)=-f(x).$

- Xét $A=\int\limits_{-2}^{0}f(-x)\mathrm{d}x=2.$ Đặt $t=-x\longrightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x.$ Đổi cận: $\begin{cases}x=-2\to t=2\\x=0\to t=0\end{cases}.$

Khi đó $A=-\int\limits_{2}^{0}f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{2}f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x.$

- Xét $B=\int\limits_{1}^{2}f(-2x)\mathrm{d}x=-\int\limits_{1}^{2}f(2x)\mathrm{d}x.$ Đặt $u=2x\longrightarrow \mathrm{d}u=2\mathrm{d}x.$ Đổi cận: $\begin{cases}x=1\to u=2\\x=2\to u=4\end{cases}.$

Khi đó $B=-\dfrac{1}{2}\int\limits_{2}^{4}f(u)\mathrm{d}u=-\dfrac{1}{2}\int\limits_{2}^{4}f(x)\mathrm{d}x\longrightarrow\int\limits_{2}^{4}f(x)\mathrm{d}x=-2B=-2.4=-8.$

Vậy $I=\int\limits_{0}^{4}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{4}f(x)\mathrm{d}x=2-8=-6.$ **Chọn B.**

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $[-1;6]$. Biết rằng $\int\limits_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=8$ và $\int\limits_{1}^{3}f(-2x)\mathrm{d}x=3.$ Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^{6}f(x)\mathrm{d}x.$

A. $I=2.$ **B.** $I=5.$ **C.** $I=11.$ **D.** $I=14.$

Lời giải. Vì $f(x)$ là hàm số chẵn nên $\int\limits_{1}^{3}f(-2x)\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{3}f(2x)\mathrm{d}x=3.$

Xét $K=\int\limits_{1}^{3}f(2x)\mathrm{d}x=3.$ Đặt $t=2x\longrightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x.$ Đổi cận: $\begin{cases}x=1\to t=2\\x=3\to t=6\end{cases}.$

Khi đó $K=\dfrac{1}{2}\int\limits_{2}^{6}f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int\limits_{2}^{6}f(x)\mathrm{d}x\longrightarrow\int\limits_{2}^{6}f(x)\mathrm{d}x=2K=6.$

Vậy $I=\int\limits_{-1}^{6}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{6}f(x)\mathrm{d}x=8+6=14.$ **Chọn D.**

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[3;7]$, thỏa mãn $f(x)=f(10-x)$ với mọi $x\in[3;7]$ và $\int\limits_{3}^{7}f(x)\mathrm{d}x=4.$ Tính tích phân $I=\int\limits_{3}^{7}xf(x)\mathrm{d}x.$

A. $I=20.$ **B.** $I=40.$ **C.** $I=60.$ **D.** $I=80.$

Lời giải. Đặt $t=(3+7)-x\longrightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x.$ Đổi cận $\begin{cases}x=7\to t=3\\x=3\to t=7\end{cases}.$

Khi đó $I=-\int\limits_{7}^{3}(10-t)f(10-t)\mathrm{d}t=\int\limits_{3}^{7}(10-t)f(10-t)\mathrm{d}t=\int\limits_{3}^{7}(10-x)f(10-x)\mathrm{d}x$

$$\overset{f(x)=f(10-x)}{=}\int_3^7(10-x)f(x)\mathrm{d}x=10\int_3^7 f(x)\mathrm{d}x-\int_3^7 xf(x)\mathrm{d}x=10\int_3^7 f(x)\mathrm{d}x-I.$$

Suy ra $2I=10\int_3^7 f(x)\mathrm{d}x=10.4=40\longrightarrow I=20$. **Chọn A.**

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên đoạn $[-\pi;\pi]$, thỏa mãn $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=2018$. Giá trị của tích phân $I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x)}{2018^x+1}\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=0$. **B.** $I=\frac{1}{2018}$. **C.** $I=2018$. **D.** $I=4036$.

Lời giải. Đặt $x=-t\longrightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Đổi cận $\begin{cases}x=-\pi\to t=\pi\\ x=\pi\to t=-\pi\end{cases}$.

Khi đó $I=-\int_{\pi}^{-\pi}\frac{f(-t)}{2018^{-t}+1}\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(-t)}{2018^{-t}+1}\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2018^t f(-t)}{1+2018^t}\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2018^x f(-x)}{1+2018^x}\mathrm{d}x.$

Vì $y=f(x)$ là hàm số chẵn trên đoạn $[-\pi;\pi]$ nên $f(-x)=f(x)\longrightarrow I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2018^x f(x)}{2018^x+1}\mathrm{d}x.$

Vậy $2I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x)}{2018^x+1}\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2018^x f(x)}{2018^x+1}\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=2.2018\to I=2018$. **Chọn C.**

Câu 40. Biết $\int_0^\pi\frac{x\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x=\frac{\pi^a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{Z}^+$. Tính $P=2a+b$.

A. $P=6$. **B.** $P=8$. **C.** $P=10$. **D.** $P=12$.

Lời giải. Gọi $I=\int_0^\pi\frac{x\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x$

Đặt $t=\pi-x\longrightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$. Đổi cận $\begin{cases}x=0\to t=\pi\\ x=\pi\to t=0\end{cases}$.

Khi đó $I=-\int_\pi^0\frac{(\pi-t)\sin^{2018}(\pi-t)}{\sin^{2018}(\pi-t)+\cos^{2018}(\pi-t)}\mathrm{d}t=\int_0^\pi\frac{(\pi-t)\sin^{2018}t}{\sin^{2018}t+\cos^{2018}t}\mathrm{d}t=\int_0^\pi\frac{(\pi-x)\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x.$

Suy ra $2I=\int_0^\pi\frac{x\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x+\int_0^\pi\frac{(\pi-x)\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x=\int_0^\pi\frac{\pi\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x$

$$\longrightarrow I=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x\right].$$

Đặt $x=u+\frac{\pi}{2}$ ta suy ra $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2018}u}{\sin^{2018}u+\cos^{2018}u}\mathrm{d}u=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x.$

Vậy $I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4}\longrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=4\end{cases}\longrightarrow P=8$. **Chọn B.**

Vấn đề 7. Kỹ thuật phương trình hàm

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ và thỏa mãn $2f(x)+f(-x)=\cos x$. Tính tích phân $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-2$. **B.** $I=\frac{2}{3}$. **C.** $I=\frac{3}{2}$. **D.** $I=2$.

Lời giải. Từ giả thiết, thay x bằng $-x$ ta được $2f(-x)+f(x)=\cos x$.

Do đó ta có hệ $\begin{cases}2f(x)+f(-x)=\cos x\\2f(-x)+f(x)=\cos x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4f(x)+2f(-x)=2\cos x\\f(x)+2f(-x)=\cos x\end{cases}\longrightarrow f(x)=\dfrac{1}{3}\cos x.$

Khi đó $I=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}.$ **Chọn B.**

Câu 42. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-2;2]$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(-x)=\dfrac{1}{4+x^2}$.

Tính tích phân $I=\displaystyle\int_{-2}^{2}f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-\dfrac{\pi}{10}$. **B.** $I=-\dfrac{\pi}{20}$. **C.** $I=\dfrac{\pi}{20}$. **D.** $I=\dfrac{\pi}{10}$.

Lời giải. Từ giả thiết, thay x bằng $-x$ ta được $2f(-x)+3f(x)=\dfrac{1}{4+x^2}$.

Do đó ta có hệ $\begin{cases}2f(x)+3f(-x)=\dfrac{1}{4+x^2}\\2f(-x)+3f(x)=\dfrac{1}{4+x^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4f(x)+6f(-x)=\dfrac{2}{4+x^2}\\9f(x)+6f(-x)=\dfrac{3}{4+x^2}\end{cases}\longrightarrow f(x)=\dfrac{1}{5\left(4+x^2\right)}.$

Khi đó $I=\displaystyle\int_{-2}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\int_{-2}^{2}\frac{1}{4+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{20}.$ **Chọn C.**

Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $x^2f(x)+f(1-x)=2x-x^4$.

Tính tích phân $I=\displaystyle\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{1}{2}$. **B.** $I=\dfrac{3}{5}$. **C.** $I=\dfrac{2}{3}$. **D.** $I=\dfrac{4}{3}$.

Lời giải. Từ giả thiết, thay x bằng $1-x$ ta được $(1-x)^2f(1-x)+f(x)=2(1-x)-(1-x)^4$

$\Leftrightarrow\left(x^2-2x+1\right)f(1-x)+f(x)=1+2x-6x^2+4x^3-x^4.\qquad(1)$

Ta có $x^2f(x)+f(1-x)=2x-x^4\longrightarrow f(1-x)=2x-x^4-x^2f(x)$. Thay vào (1) ta được

$\left(x^2-2x+1\right)\left[2x-x^4-x^2f(x)\right]+f(x)=1+2x-6x^2+4x^3-x^4$

$\Leftrightarrow\left(1-x^2+2x^3-x^4\right)f(x)=x^6-2x^5+2x^3-2x^2+1$

$\Leftrightarrow\left(1-x^2+2x^3-x^4\right)f(x)=\left(1-x^2\right)\left(1-x^2+2x^3-x^4\right)$

$\longrightarrow f(x)=1-x^2.$

Vậy $I=\displaystyle\int_0^1f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x=\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}.$ **Chọn C.**

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$ và thỏa mãn $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{1}{2}$. **B.** $I=\dfrac{3}{2}$. **C.** $I=\dfrac{5}{2}$. **D.** $I=\dfrac{7}{2}$.

Lời giải. Từ giả thiết, thay x bằng $\dfrac{1}{x}$ ta được $f\left(\dfrac{1}{x}\right)+2f(x)=\dfrac{3}{x}$.

Do đó ta có hệ $\begin{cases} f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x \\ f\left(\dfrac{1}{x}\right)+2f(x)=\dfrac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x \\ 4f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{6}{x} \end{cases} \longrightarrow f(x)=\dfrac{2}{x}-x.$

Khi đó $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\dfrac{f(x)}{x}dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\dfrac{2}{x^2}-1\right)dx=\left(-\dfrac{2}{x}-x\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2}=\dfrac{3}{2}$. **Chọn B.**

Cách khác. Từ $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x\longrightarrow f(x)=3x-2f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Khi đó $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\dfrac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(3-2\dfrac{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x}\right)\mathrm{d}x=3\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x-2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\dfrac{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x}\mathrm{d}x.$

Xét $J=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\dfrac{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x}\mathrm{d}x$. Đặt $t=\dfrac{1}{x}$, suy ra $\mathrm{d}t=-\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-t^2\mathrm{d}x\longrightarrow \mathrm{d}x=-\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t.$

Đổi cận: $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\rightarrow t=2 \\ x=2\rightarrow t=\dfrac{1}{2} \end{cases}$. Khi đó $J=\int\limits_{2}^{\frac{1}{2}}tf(t)\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\dfrac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\dfrac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=I.$

Vậy $I=3\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x-2I\longrightarrow I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x=\dfrac{3}{2}.$

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$

A. $\dfrac{\pi}{20}$. **B.** $\dfrac{\pi}{16}$. **C.** $\dfrac{\pi}{6}$. **D.** $\dfrac{\pi}{4}$.

Lời giải. Từ giả thiết, thay x bằng $1-x$ ta được $2f(1-x)+3f(x)=\sqrt{2x-x^2}$.

Do đó ta có hệ $\begin{cases} 2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2} \\ 2f(1-x)+3f(x)=\sqrt{2x-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4f(x)+6f(1-x)=2\sqrt{1-x^2} \\ 9f(x)+6f(1-x)=3\sqrt{2x-x^2} \end{cases}$

$\longrightarrow f(x)=\dfrac{3\sqrt{2x-x^2}-2\sqrt{1-x^2}}{5}.$

Vậy $I=\dfrac{1}{5}\int\limits_0^1\left(3\sqrt{2x-x^2}-2\sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{20}$. **Chọn A.**

Cách khác. Từ $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}\longrightarrow f(x)=\dfrac{1}{2}\left[\sqrt{1-x^2}-3f(1-x)\right].$

Khi đó $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\left[\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x-3\int\limits_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x\right].$

Xét $J=\int\limits_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x$. Đặt $t=1-x\longrightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x.$

Đổi cận: $\begin{cases} x=0\rightarrow t=1 \\ x=1\rightarrow t=0 \end{cases}$. Khi đó $J=-\int\limits_1^0 f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=I.$

Vậy $I=\dfrac{1}{2}\left[\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x-3I\right]\longrightarrow I=\dfrac{1}{5}\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{20}.$

Vấn đề 8. Kỹ thuật biến đổi

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ thỏa $f(x)f'(x)=3x^5+6x^2$. Biết rằng $f(0)=2$, tính $f^2(2)$.

A. $f^2(2)=64$. **B.** $f^2(2)=81$. **C.** $f^2(2)=100$. **D.** $f^2(2)=144$.

Lời giải. Từ giả thiết ta có $\int f(x).f'(x)\mathrm{d}x=\int(3x^5+6x^2)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \dfrac{f^2(x)}{2}=\dfrac{x^6}{2}+2x^3+C.$

Thay $x=0$ vào hai vế, ta được $\dfrac{f^2(0)}{2}=C\Rightarrow C=2.$

Suy ra $f^2(x)=x^6+4x^3+4 \longrightarrow f^2(2)=2^6+4.2^3+4=100.$ **Chọn C.**

Câu 47. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên $[1;+\infty)$, thỏa $f(1)=0$, $e^{2f(x)}.[f'(x)]^2=4x^2-4x+1$ với mọi $x\in[1;+\infty)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $-1<f'(4)<0$. **B.** $0<f'(4)<1$. **C.** $1<f'(4)<2$. **D.** $2<f'(4)<3$.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $e^{f(x)}f'(x)=2x-1$ (do $f'(x)$ không âm trên $[1;+\infty)$)

$\longrightarrow \int e^{f(x)}f'(x)\mathrm{d}x=\int(2x-1)\mathrm{d}x \Leftrightarrow e^{f(x)}=x^2-x+C.$

Thay $x=1$ vào hai vế, ta được $e^{f(1)}=1^2-1+C\Rightarrow C=1.$

Suy ra $e^{f(x)}=x^2-x+1\Rightarrow f(x)=\ln(x^2-x+1)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}\longrightarrow f'(4)=\dfrac{7}{13}.$ **Chọn B.**

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải. Nhận thấy được $[f'(x)]^2+f(x).f''(x)=[f(x).f'(x)]'$.

Do đó giả thiết tương đương với $[f(x).f'(x)]'=15x^4+12x.$

Suy ra $f(x).f'(x)=\int(15x^4+12x)\mathrm{d}x=3x^5+6x^2+C\xrightarrow{f(0)=f'(0)=1.}C=1$

$\longrightarrow f(x).f'(x)=3x^5+6x^2+1$

$\longrightarrow \int f(x).f'(x)\mathrm{d}x=\int(3x^5+6x^2+1)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\dfrac{f^2(x)}{2}=\dfrac{x^6}{2}+2x^3+x+C'.$

Thay $x=0$ vào hai vế ta được $\dfrac{f^2(0)}{2}=C'\Rightarrow C'=\dfrac{1}{2}.$

Vậy $f^2(x)=x^6+4x^3+2x+1\longrightarrow f^2(1)=8.$ **Chọn C.**

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $f(x)>0,\forall x\in[1;2]$. Biết rằng $\int_1^2 f'(x)\mathrm{d}x=10$ và $\int_1^2\dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\ln 2$. Tính $f(2)$.

A. $f(2)=-20$. **B.** $f(2)=-10$. **C.** $f(2)=10$. **D.** $f(2)=20$.

Lời giải. Ta có $\int_1^2 f'(x)\mathrm{d}x=10\Leftrightarrow f(x)\Big|_1^2=10\Leftrightarrow f(2)-f(1)=10.$ (1)

Lại có $\int_1^2\dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\ln 2\Leftrightarrow \ln|f(x)|\Big|_1^2=\ln 2\Leftrightarrow \ln[f(x)]\Big|_1^2=\ln 2$ (do $f(x)>0,\forall x\in[1;2]$)

$\Leftrightarrow \ln f(2)-\ln f(1)=\ln 2\Leftrightarrow \ln\dfrac{f(2)}{f(1)}=\ln 2\Leftrightarrow\dfrac{f(2)}{f(1)}=2.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $f(2)=20$. **Chọn B.**

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-1;1]$, thỏa mãn $f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f'(x)+2f(x)=0$. Biết rằng $f(1)=1$, giá trị của $f(-1)$ bằng

A. e^{-2}. **B.** e^{3}. **C.** e^{4}. **D.** 3.

Lời giải. Ta có $f'(x)+2f(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=-2f(x)\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=-2$ (do $f(x)>0$)

$$\longrightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int -2\mathrm{d}x\Leftrightarrow \ln f(x)=-2x+C \text{ (do } f(x)>0\text{)}.$$

Mà $f(1)=1\Rightarrow C=2\Rightarrow \ln f(x)=-2x+2\longrightarrow f(x)=e^{-2x+2}\longrightarrow f(-1)=e^{4}$. **Chọn C.**

Câu 51. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời thỏa mãn

$$\begin{cases} f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R} \\ f'(x)=-e^{x}f^{2}(x),\ \forall x\in\mathbb{R}. \\ f(0)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Tính giá trị của $f(\ln 2)$.

A. $f(\ln 2)=\dfrac{1}{4}$. **B.** $f(\ln 2)=\dfrac{1}{3}$.

C. $f(\ln 2)=\ln 2+\dfrac{1}{2}$. **D.** $f(\ln 2)=\ln^{2}2+\dfrac{1}{2}$.

Lời giải. Ta có $f'(x)=-e^{x}f^{2}(x)\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f^{2}(x)}=-e^{x}$ (do $f(x)>0$)

$$\longrightarrow \int \frac{f'(x)}{f^{2}(x)}\mathrm{d}x=\int -e^{x}\mathrm{d}x\Rightarrow -\frac{1}{f(x)}=-e^{x}+C\Rightarrow f(x)=\frac{1}{e^{x}-C}.$$

Thay $x=0$ ta được $f(0)=\dfrac{1}{e^{0}-C}\xrightarrow{f(0)=\frac{1}{2}}C=-1$.

Vậy $f(x)=\dfrac{1}{e^{x}+1}\longrightarrow f(\ln 2)=\dfrac{1}{e^{\ln 2}+1}=\dfrac{1}{2+1}=\dfrac{1}{3}$. **Chọn B.**

Câu 52. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$, biết $f'(x)+(2x+3)f^{2}(x)=0$, $f(x)>0$ với mọi $x>0$ và $f(1)=\dfrac{1}{6}$. Tính $P=1+f(1)+f(2)+...+f(2018)$.

A. $P=\dfrac{1009}{2020}$. **B.** $P=\dfrac{2019}{2020}$. **C.** $P=\dfrac{3029}{2020}$. **D.** $P=\dfrac{4039}{2020}$.

Lời giải. Ta có $f'(x)+(2x+3)f^{2}(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f^{2}(x)}=-(2x+3)$ (do $f(x)>0$)

$$\longrightarrow \int \frac{f'(x)}{f^{2}(x)}\mathrm{d}x=-\int (2x+3)\mathrm{d}x\Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)}=-x^{2}-3x+C\longrightarrow f(x)=\frac{1}{x^{2}+3x-C}.$$

Mà $f(1)=\dfrac{1}{6}\longrightarrow \dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{1^{2}+3.1-C}\Leftrightarrow C=-2\longrightarrow f(x)=\dfrac{1}{x^{2}+3x+2}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$.

Suy ra $P=1+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+...+\left(\dfrac{1}{2019}-\dfrac{1}{2020}\right)=\dfrac{3029}{2020}$. **Chọn C.**

Câu 53. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[0;\sqrt{3}\right]$, thỏa mãn $f(x)>-1$, $f(0)=0$ và $f'(x)\sqrt{x^{2}+1}=2x\sqrt{f(x)+1}$. Giá trị của $f\left(\sqrt{3}\right)$ bằng

A. 0. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}}=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\longrightarrow\int\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}}\mathrm{d}x=\int\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow 2\int\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)+1}}\mathrm{d}x=2\int\dfrac{\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x\Leftrightarrow 2\sqrt{f(x)+1}=2\sqrt{x^2+1}+C$

Mà $f(0)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=x^2\longrightarrow f\left(\sqrt{3}\right)=3$. **Chọn B.**

Câu 54. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $[1;4]$, đồng biến trên $[1;4]$, thoản mãn $x+2xf(x)=\left[f'(x)\right]^2$ với mọi $x\in[1;4]$. Biết rằng $f(1)=\dfrac{3}{2}$, tính tích phân $I=\int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{1186}{45}$. **B.** $I=\dfrac{1187}{45}$. **C.** $I=\dfrac{1188}{45}$. **D.** $I=\dfrac{9}{2}$.

Lời giải. Nhận xét: Do $f(x)$ đồng biến trên $[1;4]$ nên $f'(x)\ge 0,\ \forall x\in[1;4]$.

Từ giả thiết ta có $x\left[1+2f(x)\right]=\left[f'(x)\right]^2\longrightarrow f'(x)=\sqrt{x}.\sqrt{1+2f(x)},\ \forall x\in[1;4]$

$\longrightarrow\dfrac{2f'(x)}{2\sqrt{1+2f(x)}}=\sqrt{x}\longrightarrow\int\dfrac{2f'(x)}{2\sqrt{1+2f(x)}}\mathrm{d}x=\int\sqrt{x}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\sqrt{1+2f(x)}=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+C.$

Mà $f(1)=\dfrac{3}{2}\Rightarrow C=\dfrac{4}{3}\longrightarrow f(x)=\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+\dfrac{4}{3}\right)^2-1}{2}=\dfrac{2}{9}x^3+\dfrac{8}{9}x\sqrt{x}+\dfrac{7}{18}$

$\longrightarrow\int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1186}{45}$. **Chọn A.**

Câu 55. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, thỏa $f(x).f'(x)=\cos x\sqrt{1+f^2(x)}$ với mọi $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ và $f(0)=\sqrt{3}$. Giá trị của $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải. Từ giả thiết ta có $\dfrac{2f(x).f'(x)}{2\sqrt{1+f^2(x)}}=\cos x,\ \forall x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

$\longrightarrow\int\dfrac{2f(x).f'(x)}{2\sqrt{1+f^2(x)}}\mathrm{d}x=\int\cos x\mathrm{d}x\Leftrightarrow\sqrt{1+f^2(x)}=\sin x+C.$

Mà $f(0)=\sqrt{3}\Rightarrow C=2\longrightarrow f(x)=\sqrt{(\sin x+2)^2-1}=\sqrt{\sin^2 x+4\sin x+3},\ \forall x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

$\longrightarrow f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2\sqrt{2}$. **Chọn D.**

Câu 56. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên $[0;3]$, thỏa $f(x).f'(x)=2x\sqrt{f^2(x)+1}$ với mọi $x\in[0;3]$ và $f(0)=0$. Giá trị của $f(3)$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{11}$.

Lời giải. Từ giả thiết ta có $\dfrac{2f(x).f'(x)}{2\sqrt{1+f^2(x)}}=2x,\ \forall x\in[0;3]$

$\longrightarrow\int\dfrac{2f(x).f'(x)}{2\sqrt{1+f^2(x)}}\mathrm{d}x=\int 2x\mathrm{d}x\Leftrightarrow\sqrt{1+f^2(x)}=x^2+C.$

Mà $f(0)=0\Rightarrow C=1\longrightarrow f(x)=\sqrt{\left(x^2+1\right)^2-1}=\sqrt{x^4+2x^2},\ \forall x\in[0;3]$

$\longrightarrow f(3)=3\sqrt{11}$. **Chọn D.**

Câu 57. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm không âm trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(x)>0$ với mọi $x\in[0;1]$ và $[f(x)]^4.[f'(x)]^2.(x^2+1)=1+[f(x)]^3$. Biết $f(0)=2$, hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây.

A. $\frac{3}{2}<f(1)<2.$ **B.** $2<f(1)<\frac{5}{2}.$ **C.** $\frac{5}{2}<f(1)<3.$ **D.** $3<f(1)<\frac{7}{2}.$

Lời giải. Từ giả thiết ta có $[f(x)]^2.f'(x).\sqrt{x^2+1}=\sqrt{1+[f(x)]^3}\Leftrightarrow\frac{[f(x)]^2.f'(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^3}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\longrightarrow\int_0^1\frac{[f(x)]^2.f'(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^3}}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\frac{2}{3}\times\int_0^1\frac{\mathrm{d}\left(1+[f(x)]^3\right)}{2\sqrt{1+[f(x)]^3}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$$

$\Leftrightarrow\frac{2}{3}\times\sqrt{1+[f(x)]^3}\Big|_0^1=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big|_0^1\xrightarrow{f(0)=2}f(1)\approx2,605.$ **Chọn C.**

Câu 58. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$, thỏa mãn $x(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x$ với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$ và $f(1)=-2\ln2$. Biết $f(2)=a+b\ln3$ với $a,\ b\in\mathbb{Q}$, tính $P=a^2+b^2$.

A. $P=\frac{1}{2}.$ **B.** $P=\frac{3}{4}.$ **C.** $P=\frac{13}{4}.$ **D.** $P=\frac{9}{2}.$

Lời giải. Từ giả thiết ta có $\frac{x}{x+1}f'(x)+\frac{1}{(x+1)^2}f(x)=\frac{x}{x+1},\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}.$

Nhận thấy $\frac{x}{x+1}f'(x)+\frac{1}{(x+1)^2}f(x)=\left[f(x).\frac{x}{x+1}\right]'$. Do đó giả thiết tương đương với

$$\left[f(x).\frac{x}{x+1}\right]'=\frac{x}{x+1},\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}.$$

Suy ra $f(x).\frac{x}{x+1}=\int\frac{x}{x+1}\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{}{x+1}\right)\mathrm{d}x=x-\ln|x+1|+C.$

Mà $f(1)=-2\ln2\Rightarrow C=-1\longrightarrow f(x).\frac{x}{x+1}=x-\ln|x+1|-1.$

Cho $x=2$ ta được $f(2).\frac{2}{3}=2-\ln3-1\Rightarrow f(2)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\ln3\longrightarrow\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\ b=-\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow P=\frac{9}{2}.$ **Chọn D.**

Câu 59. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định, liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f'(0)=-1$ và $\begin{cases}[f'(x)]^2=f''(x)\\ f'(x)\neq0\end{cases}$ với mọi $x\in[0;1]$. Đặt $P=f(1)-f(0)$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $-2\le P\le-1.$ **B.** $-1\le P\le0.$ **C.** $0\le P\le1.$ **D.** $1\le P\le2.$

Lời giải. Nhận thấy $P=f(1)-f(0)=\int_0^1f'(x)\mathrm{d}x$ nên ta cần tìm $f'(x)$.

Từ giả thiết ta có $\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}=1\longrightarrow\int\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}\mathrm{d}x=\int1\mathrm{d}x\Leftrightarrow-\frac{1}{f'(x)}=x+C\Leftrightarrow f'(x)=-\frac{1}{x+C}.$

Mà $f'(0)=-1\Rightarrow C=1\longrightarrow f'(x)=-\frac{1}{x+1}.$

Vậy $P=\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=-\ln 2\approx -0,69$. **Chọn B.**

Câu 60. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$, thỏa mãn $f'(0).f'(2)\neq 0$ và $g(x).f'(x)=x(x-2)e^x$. Tính tích phân $I=\int_0^2 f(x).g'(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-4$. **B.** $I=4$. **C.** $I=e-2$. **D.** $I=2-e$.

Lời giải. Từ giả thiết $f'(0).f'(2)\neq 0 \longrightarrow \begin{cases} f'(0)\neq 0 \\ f'(2)\neq 0 \end{cases}$.

Do đó từ $g(x).f'(x)=x(x-2)e^x$, suy ra $\begin{cases} g(2)=\dfrac{2(2-2)e^x}{f'(2)}=0 \\ g(0)=\dfrac{0(0-2)e^x}{f'(0)}=0 \end{cases}$.

Tích phân từng phần ta được $I=\left[f(x).g(x)\right]\Big|_0^2-\int_0^2 g(x).f'(x)\mathrm{d}x$

$=f(2).g(2)-f(0).g(0)-\int_0^2 x(x-2)e^x\mathrm{d}x=-\int_0^2 x(x-2)e^x\mathrm{d}x=4$. **Chọn B.**

Câu 61. Cho hàm số $f(x)>0$ xác định và có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $\begin{cases} g(x)=1+2018\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \\ g(x)=f^2(x) \end{cases}$. Tính $I=\int_0^1 \sqrt{g(x)}\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{1009}{2}$. **B.** $I=505$. **C.** $I=\frac{1011}{2}$. **D.** $I=\frac{2019}{2}$.

Lời giải. Từ giả thiết, ta có $\begin{cases} g'(x)=2018f(x) \\ g'(x)=2f'(x).f(x) \end{cases} \longrightarrow 2018f(x)=2f'(x).f(x)$

$\Leftrightarrow 2f(x)\left[1009-f'(x)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \text{ (loại)} \\ f'(x)=1009 \longrightarrow f(x)=1009x+C \end{array}\right.$.

Thay ngược lại, ta được $1+2018\int_0^x\left[1009t+C\right]\mathrm{d}t=(1009x+C)^2$

$$\Leftrightarrow 1+2018\left(\frac{1009}{2}t^2+Ct\right)\Big|_0^x=(1009x+C)^2 \Leftrightarrow C^2=1.$$

Suy ra $f(x)=1009x+1$ hoặc $f(x)=1009x-1$ (loại vì $f(x)>0\ \forall x\in[0;1]$).

Khi đó $I=\int_0^1\sqrt{g(x)}\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(1009x+1)\mathrm{d}x=\frac{1011}{2}$. **Chọn C.**

Câu 62. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;4]$, thỏa mãn $\begin{cases} f(1)+g(1)=4 \\ g(x)=-xf'(x) \\ f(x)=-xg'(x) \end{cases}$ với mọi $x\in[1;4]$. Tính tích phân $I=\int_1^4\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$.

A. $I=3\ln 2$. **B.** $I=4\ln 2$. **C.** $I=6\ln 2$. **D.** $I=8\ln 2$.

Lời giải. Từ giả thiết ta có $f(x)+g(x)=-x.f'(x)-x.g'(x)$

$\Leftrightarrow\left[f(x)+x.f'(x)\right]+\left[g(x)+x.g'(x)\right]=0\Leftrightarrow\left[x.f(x)\right]'+\left[x.g(x)\right]'=0$

$\longrightarrow x.f(x)+x.g(x)=C \Rightarrow f(x)+g(x)=\dfrac{C}{x}.$

Mà $f(1)+g(1)=4 \Rightarrow C=4 \longrightarrow I=\int_1^4 [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int_1^4 \dfrac{4}{x}\mathrm{d}x=8\ln 2.$ **Chọn A.**

Câu 63. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;2]$, thỏa mãn $f(1)=g(1)=0$ và

$$\begin{cases} \dfrac{x}{(x+1)^2}g(x)+2017x=(x+1)f'(x) \\ \dfrac{x^3}{x+1}g'(x)+f(x)=2018x^2 \end{cases}, \ \forall x\in[1;2].$$

Tính tích phân $I=\int_1^2 \left[\dfrac{x}{x+1}g(x)-\dfrac{x+1}{x}f(x)\right]\mathrm{d}x.$

A. $I=\dfrac{1}{2}.$ **B.** $I=1.$ **C.** $I=\dfrac{3}{2}.$ **D.** $I=2.$

Lời giải. Từ giả thiết ta có $\begin{cases} \dfrac{1}{(x+1)^2}g(x)-\dfrac{(x+1)}{x}f'(x)=-2017 \\ \dfrac{x}{x+1}g'(x)+\dfrac{1}{x^2}f(x)=2018 \end{cases}, \ \forall x\in[1;2].$

Suy ra $\left[\dfrac{1}{(x+1)^2}g(x)+\dfrac{x}{x+1}g'(x)\right]-\left[\dfrac{(x+1)}{x}f'(x)-\dfrac{1}{x^2}f(x)\right]=1 \Leftrightarrow \left[\dfrac{x}{x+1}g(x)\right]'-\left[\dfrac{(x+1)}{x}f(x)\right]'=1$

$\longrightarrow \dfrac{x}{x+1}g(x)-\dfrac{(x+1)}{x}f(x)=x+C.$

Mà $f(1)=g(1)=0 \Rightarrow C=-1 \longrightarrow I=\int_1^2 \left[\dfrac{x}{x+1}g(x)-\dfrac{x+1}{x}f(x)\right]\mathrm{d}x=\int_1^2 (x-1)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}.$ **Chọn A.**

Câu 64. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $[0;3]$, thỏa mãn $\begin{cases} f(3-x).f(x)=1 \\ f(x)\neq -1 \end{cases}$ với mọi $x\in[0;3]$ và $f(0)=\dfrac{1}{2}$. Tính tích phân $I=\int_0^3 \dfrac{xf'(x)}{[1+f(3-x)]^2.f^2(x)}\mathrm{d}x.$

A. $I=\dfrac{1}{2}.$ **B.** $I=1.$ **C.** $I=\dfrac{3}{2}.$ **D.** $I=\dfrac{5}{2}.$

Lời giải. Từ giả thiết $\begin{cases} f(3-x).f(x)=1 \\ f(0)=\dfrac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{x=3} f(3)=2.$

Ta có $[1+f(3-x)]^2.f^2(x) \overset{f(3-x).f(x)=1}{=} [1+f(x)]^2.$

Tích phân $I=\int_0^3 \dfrac{xf'(x)}{[1+f(x)]^2}\mathrm{d}x=-\int_0^3 x\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{1+f(x)}\right)=-\dfrac{x}{1+f(x)}\Bigg|_0^3+\int_0^3 \dfrac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x=-1+J.$

Tính $J=\int_0^3 \dfrac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x \overset{t=3-x}{=} -\int_3^0 \dfrac{1}{1+f(3-t)}\mathrm{d}t=\int_0^3 \dfrac{1}{1+f(3-t)}\mathrm{d}t=\int_0^3 \dfrac{1}{1+f(3-x)}\mathrm{d}x.$

Suy ra $2J=\int_0^3 \dfrac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x+\int_0^3 \dfrac{1}{1+f(3-x)}\mathrm{d}x \overset{f(3-x).f(x)=1}{=} \int_0^3 1.\mathrm{d}x=3 \Rightarrow J=\dfrac{3}{2}.$ Vậy $I=\dfrac{1}{2}.$ **Chọn A.**

Câu 65. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $af(b)+bf(a)=1$ với mọi $a,\ b\in[0;1]$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$

A. $I=\dfrac{1}{2}.$ **B.** $I=\dfrac{1}{4}.$ **C.** $I=\dfrac{\pi}{2}.$ **D.** $I=\dfrac{\pi}{4}.$

Lời giải. Đặt $a=\sin x,\ b=\cos x$ với $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Từ giả thiết, suy ra $\sin xf(\cos x)+\cos xf(\sin x)=1$

$$\longrightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xf(\cos x)\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xf(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

Ta có $\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xf(\cos x)\mathrm{d}x\overset{t=\cos x}{=}-\int_1^0 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xf(\sin x)\mathrm{d}x\overset{t=\sin x}{=}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\end{cases}$. Do đó $(1)\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$. **Chọn D.**

Vấn đề 9. Kỹ thuật đạo hàm đúng

Câu 66. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thoả mãn $3f(x)+xf'(x)=x^{2018}$ với mọi $x\in[0;1]$. Tính $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{1}{2018\times2021}$. **B.** $I=\frac{1}{2019\times2020}$. **C.** $I=\frac{1}{2019\times2021}$. **D.** $I=\frac{1}{2018\times2019}$.

Lời giải. Từ giả thiết $3f(x)+xf'(x)=x^{2018}$, nhân hai vế cho x^2 ta được

$$3x^2f(x)+x^3f'(x)=x^{2020}\longleftrightarrow\left[x^3f(x)\right]'=x^{2020}.$$

Suy ra $x^3f(x)=\int x^{2020}\mathrm{d}x=\frac{x^{2021}}{2021}+C.$

Thay $x=0$ vào hai vế ta được $C=0\longrightarrow f(x)=\frac{x^{2018}}{2021}$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{2021}x^{2018}\mathrm{d}x=\frac{1}{2021}.\frac{1}{2019}x^{2019}\Big|_0^1=\frac{1}{2021\times2019}$. **Chọn C.**

Nhận xét: Ý tưởng nhân hai vế cho x^2 là để thu được đạo hàm đúng dạng $(uv)'=u'v+uv'$.

Câu 67. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;4]$, thỏa mãn $f(x)+f'(x)=e^{-x}\sqrt{2x+1}$ với mọi $x\in[0;4]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $e^4f(4)-f(0)=\frac{26}{3}$. **B.** $e^4f(4)-f(0)=3e$.

C. $e^4f(4)-f(0)=e^4-1$. **D.** $e^4f(4)-f(0)=3$.

Lời giải. Nhân hai vế cho e^x để thu được đạo hàm đúng, ta được

$$e^xf(x)+e^xf'(x)=\sqrt{2x+1}\Leftrightarrow\left[e^xf(x)\right]'=\sqrt{2x+1}.$$

Suy ra $e^xf(x)=\int\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}+C.$

Vậy $e^4f(4)-f(0)=\frac{26}{3}$. **Chọn A.**

Câu 68. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x)-2018f(x)=2018x^{2017}e^{2018x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2018$. Tính giá trị $f(1)$.

A. $f(1)=2018e^{-2018}$. **B.** $f(1)=2017e^{2018}$. **C.** $f(1)=2018e^{2018}$. **D.** $f(1)=2019e^{2018}$.

Lời giải. Nhân hai vế cho e^{-2018x} để thu được đạo hàm đúng, ta được

$$f'(x)e^{-2018x}-2018f(x)e^{-2018x}=2018x^{2017}\Leftrightarrow\left[f(x)e^{-2018x}\right]'=2018x^{2017}.$$

Suy ra $f(x)e^{-2018x}=\int 2018x^{2017}\mathrm{d}x=x^{2018}+C.$

Thay $x=0$ vào hai vế ta được $C=2018\longrightarrow f(x)=\left(x^{2018}+2018\right)e^{2018x}.$

Vậy $f(1)=2019e^{2018}$. **Chọn D.**

Câu 69. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x)+xf(x)=2xe^{-x^2}$ và $f(0)=-2$. Tính $f(1)$.

A. $f(1)=e.$ **B.** $f(1)=\frac{1}{e}.$ **C.** $f(1)=\frac{2}{e}.$ **D.** $f(1)=-\frac{2}{e}.$

Lời giải. Nhân hai vế cho $e^{\frac{x^2}{2}}$ để thu được đạo hàm đúng, ta được

$$f'(x)e^{\frac{x^2}{2}}+f(x)xe^{\frac{x^2}{2}}=2xe^{-\frac{x^2}{2}}\Leftrightarrow\left[e^{\frac{x^2}{2}}f(x)\right]'=2xe^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Suy ra $e^{\frac{x^2}{2}}f(x)=\int 2xe^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=-2e^{-\frac{x^2}{2}}+C.$

Thay $x=0$ vào hai vế ta được $C=0\longrightarrow f(x)=-2e^{-x^2}.$

Vậy $f(1)=-2e^{-1}=-\frac{2}{e}$. **Chọn D.**

Câu 70. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, thỏa mãn hệ thức $f(x)+\tan xf'(x)=\frac{x}{\cos^3 x}$. Biết rằng $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)=a\pi\sqrt{3}+b\ln 3$ trong đó $a,\ b\in\mathbb{Q}$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$.

A. $P=-\frac{4}{9}.$ **B.** $P=-\frac{2}{9}.$ **C.** $P=\frac{7}{9}.$ **D.** $P=\frac{14}{9}.$

Lời giải. Từ giả thiết, ta có $\cos xf(x)+\sin xf'(x)=\frac{x}{\cos^2 x}\Leftrightarrow\left[\sin xf(x)\right]'=\frac{x}{\cos^2 x}.$

Suy ra $\sin xf(x)=\int\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=x\tan x+\ln|\cos x|+C.$

- Với $x=\frac{\pi}{3}\longrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}.\sqrt{3}-\ln 2\longrightarrow\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{3}.\pi\sqrt{3}-2\ln 2+2C.$
- Với $x=\frac{\pi}{6}\longrightarrow\frac{1}{2}f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}.\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\ln 3-\ln 2+C\longrightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{9}.\pi\sqrt{3}+\ln 3-2\ln 2+2C.$

Suy ra $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5}{9}\pi\sqrt{3}-\ln 3\longrightarrow\begin{cases}a=\frac{5}{9}\\ b=-1\end{cases}\longrightarrow P=a+b=-\frac{4}{9}$. **Chọn A.**

Vấn đề 10. Kỹ thuật đưa về bình phương loại 1

Câu 71. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, thỏa $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x=\frac{2-\pi}{2}.$

Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x.$

A. $I=0.$ **B.** $I=\frac{\pi}{4}.$ **C.** $I=1.$ **D.** $I=\frac{\pi}{2}.$

Lời giải. Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x = -\frac{2-\pi}{2}$.

Do đó giả thiết tương đương với $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x=0$

$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]^2\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow f(x)-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0,\ \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Suy ra $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\longrightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x=0$. **Chọn A.**

Câu 72. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa $\int_0^1\left[f^2(x)+2\ln^2\frac{2}{e}\right]\mathrm{d}x=2\int_0^1\left[f(x)\ln(x+1)\right]\mathrm{d}x$.

Tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\ln\frac{e}{4}$. **B.** $I=\ln\frac{4}{e}$. **C.** $I=\ln\frac{e}{2}$. **D.** $I=\ln\frac{2}{e}$.

Lời giải. Bằng phương pháp tích phân từng phần ta tính được

$$\int_0^1 \ln^2(x+1)\mathrm{d}x=2\ln^2\frac{2}{e}=\int_0^1 2\ln^2\frac{2}{e}\mathrm{d}x.$$

Do đó giả thiết tương đương với $\int_0^1\left[f(x)-\ln(1+x)\right]^2\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow f(x)\equiv\ln(1+x),\ \forall x\in[0;1]$.

Suy ra $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x=\ln\frac{4}{e}$. **Chọn B.**

Câu 73. Cho hàm số $f(x)$ có đạo liên tục trên $[0;1]$, $f(x)$ và $f'(x)$ đều nhận giá trị dương trên $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0)=2$ và $\int_0^1\left[f'(x).[f(x)]^2+1\right]\mathrm{d}x=2\int_0^1\sqrt{f'(x)}.f(x)\mathrm{d}x$. Tính $I=\int_0^1[f(x)]^3\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{15}{4}$. **B.** $I=\frac{15}{2}$. **C.** $I=\frac{17}{2}$. **D.** $I=\frac{19}{2}$.

Lời giải. Giả thiết tương đương với $\int_0^1\left[\sqrt{f'(x)}.f(x)-1\right]^2\mathrm{d}x=0$

$\longrightarrow\sqrt{f'(x)}.f(x)=1,\ \forall x\in[0;1]\longrightarrow f'(x)f^2(x)=1\longrightarrow\int f'(x)f^2(x)\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x$

$\longrightarrow\frac{f^3(x)}{3}=x+C\xrightarrow{f(0)=2}C=\frac{8}{3}$.

Vậy $f^3(x)=3x+8\longrightarrow I=\int_0^1[f(x)]^3\mathrm{d}x=\frac{19}{2}$. **Chọn D.**

Câu 74. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương, liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0)=1$, $3\int_0^1\left[f'(x).[f(x)]^2+\frac{1}{9}\right]\mathrm{d}x=2\int_0^1\sqrt{f'(x)}.f(x)\mathrm{d}x$. Tính $I=\int_0^1[f(x)]^3\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{3}{2}$. **B.** $I=\frac{5}{4}$. **C.** $I=\frac{5}{6}$. **D.** $I=\frac{7}{6}$.

Lời giải. Giả thiết $\Leftrightarrow 3\int_0^1 \left[\sqrt{f'(x)}.f(x)\right]^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{3} = 2\int_0^1 \sqrt{f'(x)}.f(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int_0^1 \left[3\sqrt{f'(x)}.f(x)\right]^2 \mathrm{d}x - 2\int_0^1 3\sqrt{f'(x)}.f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[3\sqrt{f'(x)}.f(x) - 1\right]^2 \mathrm{d}x = 0$

$\longrightarrow 3\sqrt{f'(x)}.f(x) - 1 = 0,\ \forall x \in [0;1] \longrightarrow 9f'(x).f^2(x) = 1 \longrightarrow \int 9f'(x).f^2(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x$

$\longrightarrow 9.\frac{f^3(x)}{3} = x + C \xrightarrow{f(0)=1} C = 3.$

Vậy $f^3(x) = \frac{1}{3}x + 1 \longrightarrow \int_0^1 [f(x)]^3 \mathrm{d}x = \frac{7}{6}$. **Chọn D.**

Câu 75. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm dương, liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa $f(1) - f(0) = 1$ và $\int_0^1 f'(x)\left[f^2(x) + 1\right]\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \sqrt{f'(x)}f(x)\mathrm{d}x$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 [f(x)]^3 \mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{5\sqrt{33}-27}{18}$. **C.** $\frac{5\sqrt{33}}{18}$. **D.** $\frac{5\sqrt{33}+54}{18}$.

Lời giải. Nhóm hằng đẳng thức ta có $\int_0^1 f'(x)\left[f^2(x)+1\right]\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \sqrt{f'(x)}f(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x)f^2(x) + f'(x)\right]\mathrm{d}x - 2\int_0^1 \sqrt{f'(x)}f(x)\mathrm{d}x = 0$

$\Leftrightarrow \int_0^1 \left[\sqrt{f'(x)}f(x) - 1\right]^2 \mathrm{d}x + \underbrace{\int_0^1 \left[f'(x) - 1\right]\mathrm{d}x}_{=0 \text{ vì } f(1)-f(0)=1} = 0$

$\longrightarrow \sqrt{f'(x)}.f(x) = 1,\ \forall x \in [0;1] \longrightarrow f'(x)f^2(x) = 1 \longrightarrow \int f'(x)f^2(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x$

$\longrightarrow \frac{f^3(x)}{3} = x + C \longrightarrow f^3(x) = 3x + 3C \xrightarrow{f(1)-f(0)=1} C = \frac{5\sqrt{33}-27}{54}.$

Vậy $f^3(x) = 3x + \frac{5\sqrt{33}-27}{18} \longrightarrow \int_0^1 [f(x)]^3 \mathrm{d}x = \frac{5\sqrt{33}}{18}$. **Chọn C.**

Vấn đề 11. Kỹ thuật đưa về bình phương loại 2 Kỹ thuật Holder

Câu 76. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = 1$ và $\int_0^1 [f(x)]^2 \mathrm{d}x = 4$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 [f(x)]^3 \mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 80.

Lời giải. Ở đây các hàm xuất hiện dưới dấu tích phân là $[f(x)]^2$, $xf(x)$, $f(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $\left[f(x) + \alpha x + \beta\right]^2$.

Với mỗi số thực α, β ta có $\int_0^1 \left[f(x) + \alpha x + \beta\right]^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 [f(x)]^2 \mathrm{d}x + 2\int_0^1 (\alpha x + \beta)f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 (\alpha x + \beta)^2 \mathrm{d}x$

$$= 4 + 2(\alpha + \beta) + \frac{\alpha^2}{3} + \alpha\beta + \beta^2.$$

Ta cần tìm α, β sao cho $\int_0^1 \left[f(x) + \alpha x + \beta\right]^2 \mathrm{d}x = 0$ hay $4 + 2(\alpha + \beta) + \frac{\alpha^2}{3} + \alpha\beta + \beta^2 = 0$

$\Leftrightarrow \alpha^2+(3\beta+6)\alpha+3\beta^2+6\beta+12=0$. Để tồn tại α thì $\Delta=(3\beta+6)^2-4(3\beta^2+6\beta+12)\geq 0$

$\Leftrightarrow -3\beta^2+12\beta-12\geq 0 \Leftrightarrow -3(\beta-2)^2\geq 0 \Leftrightarrow \beta=2 \longrightarrow \alpha=-6$.

Vậy $\int_0^1 [f(x)-6x+2]^2\,dx=0 \longrightarrow f(x)=6x-2,\ \forall x\in[0;1] \longrightarrow \int_0^1 [f(x)]^3\,dx=10$. **Chọn C.**

Câu 77. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1 xf(x)\,dx=\int_0^1 \sqrt{x}f(x)\,dx=1$ và $\int_0^1 [f(x)]^2\,dx=5$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 [f(x)]^3\,dx$ bằng

A. $\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{6}{5}$. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải. Ở đây các hàm xuất hiện dưới dấu tích phân là $[f(x)]^2$, $xf(x)$, $\sqrt{x}f(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $\left[f(x)+\alpha x+\beta\sqrt{x}\right]^2$.

Với mỗi số thực $\alpha,\ \beta$ ta có

$$\int_0^1 \left[f(x)+\alpha x+\beta\sqrt{x}\right]^2 dx=\int_0^1 [f(x)]^2\,dx+2\int_0^1 \left(\alpha x+\beta\sqrt{x}\right)f(x)\,dx+\int_0^1 \left(\alpha x+\beta\sqrt{x}\right)^2 dx$$
$$=5+2(\alpha+\beta)+\frac{\alpha^2}{3}+\frac{4\alpha\beta}{5}+\frac{\beta^2}{2}.$$

Ta cần tìm $\alpha,\ \beta$ sao cho $\int_0^1 \left[f(x)+\alpha x+\beta\sqrt{x}\right]^2 dx=0$ hay $5+2(\alpha+\beta)+\frac{\alpha^2}{3}+\frac{4\alpha\beta}{5}+\frac{\beta^2}{2}=0$.

Tương tự như bài trước, ta tìm được $\alpha=-15,\ \beta=10$.

Vậy $\int_0^1 \left[f(x)-15x+10\sqrt{x}\right]^2 dx=0 \longrightarrow f(x)=15x-10\sqrt{x},\ \forall x\in[0;1] \longrightarrow \int_0^1 [f(x)]^3\,dx=\frac{5}{6}$. **Chọn A.**

Câu 78. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1 xf^2(x)\,dx=\int_0^1 x^2f(x)\,dx-\frac{1}{16}$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 f(x)\,dx$ bằng

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{5}$.

Lời giải. Hàm bình phương không như thông thường là $[f(x)]^2$ hoặc $[f'(x)]^2$.

Ở đây các hàm xuất hiện dưới dấu tích phân là $\left[\sqrt{x}f(x)\right]^2$, $x^2f(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $\left[\sqrt{x}f(x)+???\right]^2=xf^2(x)+2???\sqrt{x}f(x)+(???)^2$. So sánh ta thấy được $???=\frac{x\sqrt{x}}{2}$.

Do đó giả thiết được viết lại $\int_0^1 \left(\sqrt{x}f(x)-\frac{x\sqrt{x}}{2}\right)^2 dx=\int_0^1 \left(\frac{x\sqrt{x}}{2}\right)^2 dx-\frac{1}{16}=0$.

Suy ra $\sqrt{x}f(x)=\frac{x\sqrt{x}}{2},\ \forall x\in[0;1] \longrightarrow f(x)=\frac{x}{2} \longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{4}$. **Chọn B.**

Câu 79. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;8]$ và thỏa mãn

$$\int_1^2 \left[f\left(x^3\right)\right]^2 dx+2\int_1^2 f\left(x^3\right)dx=\frac{2}{3}\int_1^8 f(x)\,dx-\frac{38}{15}.$$

Tích phân $\int_1^8 f(x)\,dx$ bằng

A. $\frac{8\ln 2}{27}$. **B.** $\frac{\ln 2}{27}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải. Nhận thấy có một tích phân khác cận là $\int_1^8 f(x)\mathrm{d}x$. Bằng cách đổi biến $x = t^3$ ta thu được tích phân $3\int_1^2 t^2 f(t^3)\mathrm{d}t = 3\int_1^2 x^2 f(x^3)\mathrm{d}x$.

Do đó giả thiết được viết lại $\int_1^2 \left[f(x^3)\right]^2\mathrm{d}x + 2\int_1^2 f(x^3)\mathrm{d}x = 2\int_1^2 x^2 f(x^3)\mathrm{d}x - \frac{38}{15}$. $\quad (*)$

Ở đây các hàm xuất hiện dưới dấu tích phân là $\left[f(x^3)\right]^2, f(x^3), x^2 f(x^3)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $\left[f(x^3) + \alpha x^2 + \beta\right]^2$.

Tương tự như các bài trên ta tìm được $\alpha = -1,\ \beta = 1$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow \int_1^2 \left[f(x^3) - x^2 + 1\right]^2\mathrm{d}x = -\frac{38}{15} + \int_1^2 (1 - x^2)^2\mathrm{d}x = 0$

$\longrightarrow f(x^3) = x^2 - 1,\ \forall x \in [1;2] \longrightarrow f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1,\ \forall x \in [1;8] \longrightarrow \int_1^8 f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}$. **Chọn D.**

Câu 80. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1) = 0$, $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x = 7$ và $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{7}{5}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** 4.

Lời giải. Hàm dưới dấu tích phân là $\left[f'(x)\right]^2$, $x^2 f(x)$ không có mối liên hệ với nhau.

Dùng tích phân từng phần ta có $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x$. Kết hợp với giả thiết $f(1) = 0$, ta suy ra $\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x = -1$.

Bây giờ giả thiết được đưa về $\begin{cases} \int_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x = 7 \\ \int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x = -1 \end{cases}$. Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là $\left[f'(x)\right]^2$, $x^3 f'(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $\left[f'(x) + \alpha x^3\right]^2$.

Với mỗi số thực α ta có $\int_0^1 \left[f'(x) + \alpha x^3\right]^2\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x + 2\alpha\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x + \alpha^2\int_0^1 x^6\mathrm{d}x$

$$= 7 - 2\alpha + \frac{\alpha^2}{7} = \frac{1}{7}(\alpha - 7)^2.$$

Ta cần tìm α sao cho $\int_0^1 \left[f'(x) + \alpha x^3\right]^2\mathrm{d}x = 0$ hay $\frac{1}{7}(\alpha - 7)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 7$.

Vậy $\int_0^1 \left[f'(x) + 7x^3\right]^2\mathrm{d}x = 0 \longrightarrow f'(x) = -7x^3, \forall x \in [0;1] \longrightarrow f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + C$

$\xrightarrow{f(1)=0} C = \frac{7}{4} \longrightarrow f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + \frac{7}{4} \longrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{7}{5}$. **Chọn B.**

Cách 2. Dùng tích phân từng phần ta có $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x$. Kết hợp với giả thiết $f(1) = 0$, ta suy ra $\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x = -1$.

Theo Holder

$$(-1)^2=\left(\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\int_0^1 x^6\mathrm{d}x.\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\left.\frac{x^7}{7}\right|_0^1.7=1.$$

Vậy đẳng thức xảy ra nên ta có $f'(x)=kx^3$, thay vào $\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x=-1$ ta được $k=-7$.

Suy ra $f'(x)=-7x^3$ (làm tiếp như trên)

Câu 81. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1 x^5 f(x)\mathrm{d}x=\frac{11}{78}$ và $\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}\left(f(x)\right)=\frac{4}{13}$. Tính $f(2)$.

A. $f(2)=2$. **B.** $f(2)=\frac{251}{7}$. **C.** $f(2)=\frac{256}{7}$. **D.** $f(2)=\frac{261}{7}$.

Lời giải. Viết lại $\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}\left(f(x)\right)=\frac{4}{13}\Leftrightarrow\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{4}{13}$.

Dùng tích phân từng phần ta có $\int_0^1 x^5 f(x)\mathrm{d}x=\left.\frac{x^6}{6}f(x)\right|_0^1-\frac{1}{6}\int_0^1 x^6 f'(x)\mathrm{d}x$. Kết hợp với giả thiết $f(1)=1$, ta suy ra $\int_0^1 x^6 f'(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{13}$.

Bây giờ giả thiết được đưa về $\begin{cases}\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{4}{13}\\ \int_0^1 x^6 f'(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{13}\end{cases}$. Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là $\left[f'(x)\right]^2$, $x^6 f'(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $\left[f'(x)+\alpha x^6\right]^2$. Tương tự như bài trên ta tìm được $\alpha=-2\longrightarrow f'(x)=2x^6\longrightarrow f(x)=\frac{2}{7}x^7+C\xrightarrow{f(1)=1}C=\frac{5}{7}$.

Vậy $f(x)=\frac{2}{7}x^7+\frac{5}{7}\longrightarrow f(2)=\frac{261}{7}$. **Chọn D.**

Cách 2. Theo Holder

$$\left(\frac{2}{13}\right)^2=\left(\int_0^1 x^6 f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\int_0^1 x^{12}dx.\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{1}{13}.\frac{4}{13}=\frac{4}{169}.$$

Câu 82. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=2, f(0)=0$ và $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=4.$. Tích phân $\int_0^1\left[f^3(x)+2018x\right]\mathrm{d}x.$ bằng

A. 0. **B.** 1011. **C.** 2018. **D.** 2022.

Lời giải. Từ giả thiết $f(1)=2, f(0)=0$ suy ra $\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=\left.f(x)\right|_0^1=2$.

Hàm dưới dấu tích phân là $\left[f'(x)\right]^2$, $f'(x)$ nên sẽ liên kết với bình phương $\left[f'(x)+\alpha\right]^2$.

Ta tìm được $\alpha=-2\longrightarrow f'(x)=2\longrightarrow f(x)=2x+C\xrightarrow{f(0)=0}C=0$.

Vậy $f(x)=2x\longrightarrow\int_0^1\left[f^3(x)+2018x\right]\mathrm{d}x=1011$. **Chọn B.**

Cách 2. Theo Holder

$$2^2=\left(\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\int_0^1\mathrm{d}x.\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=1.4=4.$$

Câu 83. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$, thỏa mãn $\int_1^2 (x-1)^2 f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}$, $f(2)=0$ và $\int_1^2 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x = 7$. Tích phân $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{7}{20}$. **B.** $\frac{7}{20}$. **C.** $-\frac{7}{5}$. **D.** $\frac{7}{5}$.

Lời giải. Chuyển thông tin $\int_1^2 (x-1)^2 f(x)\mathrm{d}x$ sang $f'(x)$ bằng cách tích phân từng phần, ta được $\int_1^2 (x-1)^3 f'(x)\mathrm{d}x = 1$.

Hàm dưới dấu tích phân là $[f'(x)]^2$, $(x-1)^3 f'(x)$ nên liên kết với $\left[f'(x)+\alpha(x-1)^3\right]^2$.

Ta tìm được $\alpha=-7 \longrightarrow f'(x)=7(x-1)^3 \longrightarrow f(x)=\frac{7}{4}(x-1)^4+C \xrightarrow{f(2)=0} C=-\frac{7}{4}$.

Vậy $f(x)=\frac{7}{4}(x-1)^4-\frac{7}{4} \longrightarrow \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = -\frac{7}{5}$. **Chọn C.**

Cách 2. Theo Holder

$$1^1 = \left[\int_1^2 (x-1)^3 f'(x)\mathrm{d}x\right]^2 \le \int_1^2 (x-1)^6\,\mathrm{d}x \int_1^2 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{7}.7 = 1.$$

Câu 84. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x = \frac{9}{5}$ và $\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{5}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=\frac{1}{5}$. **B.** $I=\frac{1}{4}$. **C.** $I=\frac{3}{5}$. **D.** $I=\frac{3}{4}$.

Lời giải. Chuyển thông tin $\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$ sang $f'(x)$ bằng cách:

- Đặt $t=\sqrt{x} \longrightarrow \int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{5}$ hay $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{5}$.
- Tích phân từng phần $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$, ta được $\int_0^1 x^2 f'(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{5}$.

Hàm dưới dấu tích phân là $[f'(x)]^2$, $x^2 f'(x)$ nên liên kết với $\left[f'(x)+\alpha x^2\right]^2$.

Ta tìm được $\alpha=-3 \longrightarrow f'(x)=3x^2 \longrightarrow f(x)=x^3+C \xrightarrow{f(1)=1} C=0$.

Vậy $f(x)=x^3 \longrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$. **Chọn B.**

Cách 2. Theo Holder

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left[\int_0^1 x^2 f'(x)\mathrm{d}x\right]^2 \le \int_0^1 x^4\mathrm{d}x \int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}.\frac{9}{5} = \frac{9}{25}.$$

Câu 85. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(0)+f(1)=0$, $\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ và $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{\pi}$. **B.** $\frac{2}{\pi}$. **C.** π. **D.** $\frac{3\pi}{2}$.

Lời giải. Hàm dưới dấu tích phân là $f^2(x)$ và $f'(x)\cos(\pi x)$, không thấy liên kết.

Do đó ta chuyển thông tin của $f'(x)\cos(\pi x)$ về $f(x)$ bằng cách tích phân từng phần của $\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$ cùng với kết hợp $f(0)+f(1)=0,$ ta được $\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$

Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là $f^2(x)$ và $f(x)\sin(\pi x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $\left[f(x)+\alpha\sin(\pi x)\right]^2$.

Ta tìm được $\alpha=-1\longrightarrow f(x)=\sin(\pi x)\longrightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}.$ **Chọn B.**

Cách 2. Theo Holder

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x\right)^2\le\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x.\int_0^1\left[\sin(\pi x)\right]^2 dx=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.$$

Câu 86. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;\pi]$, thỏa mãn $\int_0^\pi f'(x)\sin x\mathrm{d}x=-1$ và $\int_0^\pi f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}.$ Tích phân $\int_0^\pi xf(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{6}{\pi}.$ **B.** $-\frac{4}{\pi}.$ **C.** $\frac{2}{\pi}.$ **D.** $\frac{4}{\pi}.$

Lời giải. Hàm dưới dấu tích phân là $f^2(x)$ và $f'(x)\sin x$, không thấy liên kết.

Do đó ta chuyển thông tin của $f'(x)\sin x$ về $f(x)$ bằng cách tích phân từng phần của $\int_0^\pi f'(x)\sin x\mathrm{d}x=-1,$ ta được $\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=1.$

Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là $f^2(x)$ và $f(x)\cos x$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $\left[f(x)+\alpha\cos x\right]^2$.

Ta tìm được $\alpha=-\frac{2}{\pi}\longrightarrow f(x)=\frac{2}{\pi}\cos x\longrightarrow\int_0^\pi xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^\pi\frac{2x\cos x}{\pi}\mathrm{d}x=-\frac{4}{\pi}.$ **Chọn B.**

Cách 2. Theo Holder

$$(1)^2=\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x^{\,2}\le\int_0^\pi f^2(x)\mathrm{d}x\int_0^\pi\cos^2 x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}.\frac{\pi}{2}=1.$$

Câu 87. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa $f(1)=0,$ $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{8}$ và $\int_0^1\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$ Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{\pi}.$ **B.** $\frac{2}{\pi}.$ **C.** $\frac{\pi}{2}.$ **D.** $\pi.$

Lời giải. Hàm dưới dấu tích phân là $\left[f'(x)\right]^2$ và $\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)f(x)$, không thấy liên kết.

Do đó ta chuyển thông tin của $\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)f(x)$ về $f'(x)$ bằng cách tích phân từng phần của $\int_0^1\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$ cùng với kết hợp $f(1)=0,$ ta được $\int_0^1\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}.$

Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là $\left[f'(x)\right]^2$ và $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)f'(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $\left[f'(x)+\alpha\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]^2$.

Ta tìm được $\alpha = \frac{\pi}{2} \longrightarrow f'(x) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \longrightarrow f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + C \xrightarrow{f(1)=0} C = 0.$

Vậy $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \longrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}.$ **Chọn B.**

Cách 2. Theo Holder

$$\left(-\frac{\pi}{4}\right)^2 = \left(\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\mathrm{d}x.\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}.\frac{\pi^2}{8}.$$

Câu 88. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1 f'(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x = \pi$ và $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x = 2.$ Tích phân $\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{6}{\pi}.$ **B.** $-\frac{4}{\pi}.$ **C.** $\frac{4}{\pi}.$ **D.** $\frac{6}{\pi}.$

Lời giải. Chuyển thông tin của $f'(x)\sin(\pi x)$ về $f(x)$ bằng cách tích phân từng phần của $\int_0^1 f'(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x = \pi,$ ta được $\int_0^1 f(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x = -1.$

Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là $f^2(x)$ và $\cos(\pi x)f(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $\left[f(x) + \alpha\cos(\pi x)\right]^2.$

Ta tìm được $\alpha = 2 \longrightarrow f(x) = -2\cos(\pi x) \longrightarrow \int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = -2\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\mathrm{d}x = -\frac{4}{\pi}.$ **Chọn B.**

Cách 2. Theo Holder

$$(-1)^2 = \left[\int_0^1 f(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x\right]^2 \le \int_0^1 \cos^2(\pi x)\mathrm{d}x\int_0^1 \left[f(x)\right]^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}.2.$$

Câu 89. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, thỏa $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)\mathrm{d}x = 3\pi$ và $\int_0^{\pi} (\sin x - x) f'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = 6\pi.$ Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f''(x)\right]^3 \mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{2}{\pi}.$ **B.** $0.$ **C.** $3\pi.$ **D.** $9\pi.$

Lời giải. Tích phân từng phần của $\int_0^{\pi} (\sin x - x) f'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = 6\pi,$ kết hợp với $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ta được

ta được $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x f(x)\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4}.$

Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là $f^2(x)$ và $\sin^2 x f(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $\left[f(x) + \alpha\sin^2 x\right]^2.$

Ta tìm được $\alpha = -4 \longrightarrow f(x) = 4\sin^2 x \Rightarrow f'(x) = 4\sin 2x \Rightarrow f''(x) = 8\cos 2x.$

Vậy $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f''(x)\right]^3 \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[8\cos 2x\right]^3 \mathrm{d}x = 0.$ **Chọn B.**

Cách 2. Theo Holder

$$\left(\frac{3\pi}{4}\right)^2=\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xf(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}f^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{16}.3\pi.$$

Câu 90. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=0$ và $\int_0^1[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x=\int_0^1(x+1)e^x f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{e^2-1}{4}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{e-1}{2}$. **B.** $I=\frac{e^2}{4}$. **C.** $I=e-2$. **D.** $I=\frac{e}{2}$.

Lời giải. Tích phân từng phần của $\int_0^1(x+1)e^x f(x)\,\mathrm{d}x$, kết hợp với $f(1)=0$ ta được

$$\int_0^1 xe^x f'(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{e^2-1}{4}.$$

Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là $[f'(x)]^2$ và $xe^x f'(x)$ nên ta sẽ liên kết với $[f(x)+\alpha xe^x]^2$.

Ta tìm được $\alpha=1\longrightarrow f'(x)=-xe^x\longrightarrow f(x)=-\int xe^x\mathrm{d}x=(1-x)e^x+C\xrightarrow{f(1)=0}C=0.$

Vậy $f(x)=(1-x)e^x\longrightarrow\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1(1-x)e^x\mathrm{d}x=e-2.$ **Chọn C.**

Cách 2. Theo Holder

$$\left(-\frac{e^2-1}{4}\right)^2=\left(\int_0^1 xe^x f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\le\int_0^1 x^2e^{2x}\mathrm{d}x.\int_0^1[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x=\frac{e^2-1}{4}.\frac{e^2-1}{4}.$$

Câu 91. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(0)=0, f(1)=1$ và $\int_0^1\frac{[f'(x)]^2}{e^x}\mathrm{d}x=\frac{1}{e-1}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{e-2}{e-1}$. **B.** $\frac{e-1}{e-2}$. **D.** $\frac{1}{(e-1)(e-2)}$. **C.** 1.

Lời giải. Hàm dưới dấu tích phân là $\frac{[f'(x)]^2}{e^x}$ nên ta cần tìm một thông tin liên quan $f'(x)$.

Từ giả thiết $f(0)=0, f(1)=1$ ta nghĩ đến $\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=f(x)\Big|_0^1=f(1)-f(0)=1.$

Do đó ta có hàm dưới dấu tích phân là $\frac{[f'(x)]^2}{e^x}$ và $f'(x)$ nên sẽ liên kết với bình phương $\left[\frac{f'(x)}{\sqrt{e^x}}+\alpha\sqrt{e^x}\right]^2$. Với mỗi số thực α ta có

$$\int_0^1\left[\frac{f'(x)}{\sqrt{e^x}}+\alpha\sqrt{e^x}\right]^2\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{[f'(x)]^2}{e^x}\mathrm{d}x+2\alpha\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x+\alpha^2\int_0^1 e^x\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{e-1}+2\alpha+\alpha^2(e-1)=\frac{1}{e-1}[(e-1)\alpha+1]^2.$$

Ta cần tìm α sao cho $\int_0^1\left[\frac{f'(x)}{\sqrt{e^x}}+\alpha\sqrt{e^x}\right]^2\mathrm{d}x=0$ hay $\frac{1}{e-1}[(e-1)\alpha+1]^2=0\Leftrightarrow\alpha=-\frac{1}{e-1}.$

Với $\alpha=-\frac{1}{e-1}$ thì $\int_0^1\left[\frac{f'(x)}{\sqrt{e^x}}-\frac{1}{e-1}\sqrt{e^x}\right]^2\mathrm{d}x=0\Rightarrow\frac{f'(x)}{\sqrt{e^x}}\equiv\frac{1}{e-1}\sqrt{e^x},\ \forall x\in[0;1].$

Suy ra $f'(x)=\frac{e^x}{e-1}\longrightarrow f(x)=\int\frac{e^x}{e-1}\mathrm{d}x=\frac{e^x}{e-1}+C\xrightarrow{f(0)=0,\,f(1)=1}C=-\frac{1}{e-1}.$

Vậy $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e-1}\longrightarrow\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{e-2}{e-1}$. **Chọn A.**

Cách 2. Theo Holder

$$1^2=\left[\int\limits_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x\right]^2=\left[\int\limits_0^1 \frac{f'(x)}{\sqrt{e^x}}.\sqrt{e^x}\,\mathrm{d}x\right]^2\le\int\limits_0^1\frac{\left[f'(x)\right]^2}{e^x}\mathrm{d}x\int\limits_0^1 e^x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{e-1}.(e-1)=1.$$

Câu 92. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(0)=0, f(1)=1$ và $\int\limits_0^1\sqrt{1+x^2}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}$. Tích phân $\int\limits_0^1\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}\ln^2\left(1+\sqrt{2}\right)$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\ln^2\left(1+\sqrt{2}\right)$. **C.** $\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. **D.** $\left(\sqrt{2}-1\right)\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Lời giải. Tương tự bài trước, ta có $\int\limits_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)\Big|_0^1=f(1)-f(0)=1$.

Do đó ta có hàm dưới dấu tích phân là $\sqrt{1+x^2}\left[f'(x)\right]^2$ và $f'(x)$ nên sẽ liên kết với bình phương $\left[\sqrt[4]{1+x^2}\,f'(x)+\dfrac{\alpha}{\sqrt[4]{1+x^2}}\right]^2$.

Ta tìm được $\alpha=-\dfrac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\longrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}.\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\longrightarrow f(x)=\frac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}.\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C.$$

Mà $f(0)=0, f(1)=1\Rightarrow C=0\longrightarrow f(x)=\dfrac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}$.

Vậy $\int\limits_0^1\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\int\limits_0^1\dfrac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\int\limits_0^1\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}\left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]$

$$=\frac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}.\frac{\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{2}\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$ Chọn C.

Cách 2. Theo Holder

$$1^2=\left(\int\limits_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2=\int\limits_0^1\sqrt[4]{1+x^2}\,f'(x).\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^2}}\mathrm{d}x\le\int\limits_0^1\sqrt{1+x^2}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x.\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}.\ln\left(1+\sqrt{2}\right)=1.$$

Câu 93. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-1;1]$, thỏa mãn $f(-1)=0$, $\int\limits_{-1}^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=112$ và $\int\limits_{-1}^1 x^2f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{16}{3}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{84}{5}$. **B.** $I=\dfrac{35}{2}$. **C.** $I=\dfrac{35}{4}$. **D.** $I=\dfrac{168}{5}$.

Lời giải. Như các bài trước, ta chuyển $\int\limits_{-1}^1 x^2f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{16}{3}$ về thông tin của $f'(x)$ bằng cách tích phân từng phần. Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=x^2\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\,\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{x^3}{3}\end{cases}$.

Khi đó $\int\limits_{-1}^{1} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} f(x)\Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{1} x^3 f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}f(1) + \frac{1}{3}f(-1) - \frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{1} x^3 f'(x)\mathrm{d}x$. Tới đây ta bị vướng $f(1)$ vì giả thiết không cho. Do đó ta điều chỉnh lại như sau

$$\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = x^2\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^3}{3} + k \end{cases} \text{ với } k \text{ là hằng số.}$$

Khi đó $\int\limits_{-1}^{1} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} + k\right) f(x)\Big|_{-1}^{1} - \int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{x^3}{3} + k\right) f'(x)\mathrm{d}x$

$$= \left(\frac{1}{3} + k\right) f(1) - \underbrace{\left(-\frac{1}{3} + k\right) f(-1)}_{=0 \text{ do } f(-1)=0} - \int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{x^3}{3} + k\right) f'(x)\mathrm{d}x.$$

Ta chọn k sao cho $\frac{1}{3} + k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{3}$.

Khi đó $\frac{16}{3} = \int\limits_{-1}^{1} x^2 f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{1}\left(x^3 - 1\right) f'(x)\mathrm{d}x \longrightarrow \int\limits_{-1}^{1}\left(x^3 - 1\right) f'(x)\mathrm{d}x = -16$.

Hàm dưới dấu tích phân là $\left[f'(x)\right]^2$, $\left(x^3 - 1\right) f'(x)$ nên ta liên kết với $\left[f'(x) + \alpha\left(x^3 - 1\right)\right]^2$.

Ta tìm được $\alpha = 7 \longrightarrow f'(x) = -7\left(x^3 - 1\right) \Rightarrow f(x) = -7\int\left(x^3 - 1\right)\mathrm{d}x = -\frac{7}{4}x^4 + 7x + C$

$\xrightarrow{f(-1)=0} C = \frac{35}{4} \longrightarrow f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + 7x + \frac{35}{4}$. Vậy $I = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{84}{5}$.

Cách 2. Theo Holder

$$(-16)^2 = \left(\int\limits_{-1}^{1}\left(x^3 - 1\right) f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \int\limits_{-1}^{1}\left(x^3 - 1\right)^2 \mathrm{d}x.\int\limits_{-1}^{1}\left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = \frac{16}{7}.112 = 256.$$

Câu 94. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1) = 0$, $\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = \frac{3}{2} - 2\ln 2$ và $\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = 2\ln 2 - \frac{3}{2}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1 - \ln 2}{2}$. **B.** $\frac{1 - 2\ln 2}{2}$. **C.** $\frac{3 - 2\ln 2}{2}$. **D.** $\frac{3 - 4\ln 2}{2}$.

Lời giải. Như các bài trước, ta chuyển $\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = 2\ln 2 - \frac{3}{2}$ về thông tin của $f'(x)$ bằng cách tích phân từng phần. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ v = -\dfrac{1}{x+1} \end{cases}$.

Khi đó $\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = -\frac{f(x)}{x+1}\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 \frac{f'(x)}{x+1}\mathrm{d}x = -\frac{f(1)}{2} + \frac{f(0)}{1} + \int\limits_0^1 \frac{f'(x)}{x+1}\mathrm{d}x$. Tới đây ta bị vướng $f(0)$ vì giả thiết không cho. Do đó ta điều chỉnh lại như sau

$$\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ v = -\dfrac{1}{x+1} + k \end{cases} \text{ với } k \text{ là hằng số.}$$

Khi đó $\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{x+1} + k\right) f(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1\left(-\frac{1}{x+1} + k\right) f'(x)\mathrm{d}x =$

$$\overset{f(1)=0}{=} -(-1 + k) f(0) - \int\limits_0^1\left(-\frac{1}{x+1} + k\right) f'(x)\mathrm{d}x.$$

Ta chọn k sao cho $-1 + k = 0 \Leftrightarrow k = 1$.

Khi đó $2\ln 2-\dfrac{3}{2}=\int\limits_0^1 \dfrac{f(x)}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=-\int\limits_0^1 \dfrac{x}{x+1}f'(x)\mathrm{d}x \longrightarrow \int\limits_0^1 \dfrac{x}{x+1}f'(x)\mathrm{d}x=\dfrac{3}{2}-2\ln 2.$

Hàm dưới dấu tích phân là $\left[f'(x)\right]^2$, $\dfrac{x}{x+1}f'(x)$ nên ta liên kết với $\left[f'(x)+\alpha\dfrac{x}{x+1}\right]^2$.

Ta tìm được $\alpha=-1 \longrightarrow f'(x)=\dfrac{x}{x+1} \Rightarrow f(x)=\int \dfrac{x}{x+1}\mathrm{d}x=x-\ln|x+1|+C$

$\xrightarrow{f(1)=0} C=\ln 2-1 \longrightarrow f(x)=x-\ln(x+1)+\ln 2-1$. Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1-2\ln 2}{2}$. **Chọn B.**

Cách 2. Theo Holder

$$\left(\frac{3}{2}-2\ln 2\right)^2=\left[\int\limits_0^1 \frac{x}{x+1}f'(x)\mathrm{d}x\right]^2 \le \int\limits_0^1\left(\frac{x}{x+1}\right)^2\mathrm{d}x\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\left(\frac{3}{2}-2\ln 2\right)\left(\frac{3}{2}-2\ln 2\right).$$

Câu 95. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$, đồng biến trên $[1;2]$, thỏa mãn $f(1)=0$, $\int\limits_1^2\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_1^2 f(x).f'(x)\mathrm{d}x=1$. Tích phân $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải. Hàm dưới dấu tích phân là $\left[f'(x)\right]^2$, $f(x).f'(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $\left[f'(x)+\alpha f(x)\right]^2$. Nhưng khi khai triển thì vướng $\int\limits_1^2\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x$ nên hướng này không khả thi.

Ta có $1=\int\limits_1^2 f(x).f'(x)\mathrm{d}x=\left.\dfrac{f^2(x)}{2}\right|_1^2=\dfrac{f^2(2)-f^2(1)}{2}=\dfrac{f^2(2)-0}{2}\longrightarrow f(2)=\sqrt{2}$ (do đồng biến trên $[1;2]$ nên $f(2)>f(1)=0$)

Từ $f(1)=0$ và $f(2)=\sqrt{2}$ ta nghĩ đến $\int\limits_1^2 f'(x)\mathrm{d}x=\left.f(x)\right|_1^2=f(2)-f(1)=\sqrt{2}-0=\sqrt{2}.$

Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là $\left[f'(x)\right]^2$, $f'(x)$ nên ta sẽ liên kết với $\left[f'(x)+\alpha\right]^2$.

Ta tìm được $\alpha=-\sqrt{2} \longrightarrow f'(x)=\sqrt{2} \longrightarrow f(x)=\sqrt{2}x+C \xrightarrow{f(1)=0} C=-\sqrt{2}$.

Vậy $f(x)=\sqrt{2}x-\sqrt{2} \longrightarrow \int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **Chọn A.**

Câu 96. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=0$, $\int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=1$ và $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2 f^2(x)\mathrm{d}x=\dfrac{3}{4}$. Giá trị của $f^2\left(\sqrt{2}\right)$ bằng

A. $-\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{3\left(1-\sqrt{2}\right)}{2}$. **D.** $-\dfrac{3\left(1-\sqrt{2}\right)}{2}$.

Lời giải. Hàm dưới dấu tích phân là $\left[f'(x)\right]^2 f^2(x)$ và $f^2(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $\left[f'(x)f(x)+\alpha f(x)\right]^2$. Nhưng khi khai triển thì vướng $\int\limits_0^1 f^2(x)f'(x)\mathrm{d}x$ nên hướng này không khả thi.

Tích phân từng phần $\int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=1$ kết hợp với $f(1)=0$, ta được $\int\limits_0^1 xf(x)f'(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}$.

Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là $\left[f'(x)\right]^2 f^2(x)$ và $xf(x)f'(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $\left[f(x)f'(x)+\alpha x\right]^2$.

Ta tìm được $\alpha=\dfrac{3}{2}\longrightarrow f(x)f'(x)=-\dfrac{3}{2}x\Rightarrow\int f(x)f'(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{3}{2}\int x\mathrm{d}x\Rightarrow\dfrac{f^2(x)}{2}=-\dfrac{3}{4}x^2+C$

$\xrightarrow{f(1)=0}C=\dfrac{3}{4}\longrightarrow f^2(x)=\dfrac{3}{2}\left(1-x^2\right)\longrightarrow f^2\left(\sqrt{2}\right)=-\dfrac{3}{2}$. **Chọn A.**

Câu 97. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$, thỏa mãn $f(2)=1$, $\int_0^2 x^2 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{8}{15}$ và $\int_0^2\left[f'(x)\right]^4\mathrm{d}x=\dfrac{32}{5}$. Giá trị của tích phân $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\dfrac{3}{2}$. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** $-\dfrac{7}{3}$. **D.** $\dfrac{7}{3}$.

Lời giải. Hàm dưới dấu tích phân $\left[f'(x)\right]^4$ và $x^2 f(x)$. Lời khuyên là đừng có cố liên kết với bình phương nào, vì có tìm cũng không ra.

Tích phân từng phần $\int_0^2 x^2 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{8}{15}$ kết hợp với $f(2)=1$, ta được $\int_0^2 x^3 f'(x)\mathrm{d}x=\dfrac{32}{5}$.

Áp dụng Holder 2 lần ta được

$$\left(\frac{32}{5}\right)^4=\left(\int_0^2 x^3 f'(x)\mathrm{d}x\right)^4=\left(\int_0^2 x^2.xf'(x)\mathrm{d}x\right)^4\le\left(\int_0^2 x^4\mathrm{d}x\right)^2\left(\int_0^2 x^2\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x\right)^2$$
$$\le\left(\int_0^2 x^4\mathrm{d}x\right)^2\times\left(\int_0^2 x^4\mathrm{d}x.\int_0^2\left[f'(x)\right]^4\mathrm{d}x\right)$$
$$=\left(\int_0^2 x^4\mathrm{d}x\right)^3\times\int_0^2\left[f'(x)\right]^4\mathrm{d}x=\frac{1048576}{625}=\left(\frac{32}{5}\right)^4.$$

Dấu "=" xảy ra, tức là $xf'(x)=kx^2\Rightarrow f'(x)=kx$ thay vào $\int_0^2\left[f'(x)\right]^4\mathrm{d}x=\dfrac{32}{5}$ tìm được $k=1$

$\longrightarrow f'(x)=x\Rightarrow f(x)=\int x\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}+C\xrightarrow{f(2)=1}C=-1$.

Vậy $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-1\longrightarrow\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{2}{3}$. **Chọn B.**

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\left[f'(x)\right]^4+x^4+x^4+x^4\ge 4x^3 f'(x).$$

Do vậy $\int_0^2\left[f'(x)\right]^4\mathrm{d}x+3\int_0^2 x^4\mathrm{d}x\ge 4\int_0^2 x^3 f'(x)\mathrm{d}x$. Mà giá trị của hai vế bằng nhau, có nghĩa là dấu "=" xảy ra nên $f'(x)=x$. (Làm tiếp như trên).

Vấn đề 12. Kỹ thuật đánh giá AM-GM

Câu 98. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=ef(0)$ và $\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{f^2(x)}+\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x\le 2$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $f(1)=\sqrt{\dfrac{2e}{e-1}}$. **B.** $f(1)=\dfrac{2(e-2)}{e-1}$. **C.** $f(1)=\sqrt{\dfrac{2e^2}{e^2-1}}$. **D.** $f(1)=\sqrt{\dfrac{2(e-2)}{e-1}}$.

Lời giải. Ta có $\int_0^1 \frac{dx}{f^2(x)}+\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{f^2(x)}+[f'(x)]^2\right]dx \overset{\text{AM-GM}}{\geq} 2\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx$

$= 2\ln|f(x)|\Big|_0^1 = 2\ln|f(1)| - 2\ln|f(0)| = 2\ln\left|\frac{f(1)}{f(0)}\right| = 2\ln e = 2.$

Mà $\int_0^1 \frac{dx}{f^2(x)}+\int_0^1 [f'(x)]^2 dx \leq 2$ nên dấu "=" xảy ra, tức là $f'(x) = \frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x)f'(x) = 1$

$\longrightarrow \int f(x)f'(x)dx = \int x dx \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} = x + C \longrightarrow f(x) = \sqrt{2x+2C}.$

Theo giả thiết $f(1) = ef(0)$ nên ta có $\sqrt{2+2C} = e\sqrt{2C} \Leftrightarrow 2+2C = e^2 2C \Leftrightarrow C = \frac{1}{e^2-1}$

$\longrightarrow f(x) = \sqrt{2x+\frac{2}{e^2-1}} \Rightarrow f(1) = \sqrt{2+\frac{2}{e^2-1}} = \sqrt{\frac{2e^2}{e^2-1}}$. **Chọn C.**

Câu 99. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên $[0;1]$, có đạo hàm dương và liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(0)=1$ và $\int_0^1 \left[f^3(x)+4[f'(x)]^3\right]dx \leq 3\int_0^1 f'(x)f^2(x)dx$. Tính $I = \int_0^1 f(x)dx$.

A. $I = 2(\sqrt{e}-1)$. **B.** $I = 2(e^2-1)$. **C.** $I = \frac{\sqrt{e}-1}{2}$. **D.** $I = \frac{e^2-1}{2}$.

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho ba số dương ta có

$$f^3(x)+4[f'(x)]^3 = 4[f'(x)]^3 + \frac{f^3(x)}{2} + \frac{f^3(x)}{2} \geq 3\sqrt[3]{4[f'(x)]^3 . \frac{f^3(x)}{2} . \frac{f^3(x)}{2}} = 3f'(x)f^2(x).$$

Suy ra $\int_0^1 \left[f^3(x)+4[f'(x)]^3\right]dx \geq 3\int_0^1 f'(x)f^2(x)dx.$

Mà $\int_0^1 \left[f^3(x)+4[f'(x)]^3\right]dx \leq 3\int_0^1 f'(x)f^2(x)dx$ nên dấu "=" xảy ra, tức là

$$4[f'(x)]^3 = \frac{f^3(x)}{2} = \frac{f^3(x)}{2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}f(x)$$

$\longrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \frac{1}{2}\int dx \Rightarrow \ln|f(x)| = \frac{1}{2}x + C \longrightarrow f(x) = e^{\frac{1}{2}x+C}.$

Theo giả thiết $f(0) = 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = e^{\frac{1}{2}x} \longrightarrow \int_0^1 f(x)dx = 2(\sqrt{e}-1)$. **Chọn A.**

Câu 100. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên $[0;1]$, có đạo hàm dương liên và tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}dx \geq 1$ và $f(0)=1$, $f(1)=e^2$. Tính giá trị của $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

A. $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. **B.** $f\left(\frac{1}{2}\right) = 4$. **C.** $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}$. **D.** $f\left(\frac{1}{2}\right) = e$.

Lời giải. Hàm dưới dấu tích phân là $\sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}} = \sqrt{x}.\sqrt{\frac{f'(x)}{f(x)}}$, $\forall x \in [0;1]$. Điều này làm ta liên tưởng đến đạo hàm đúng $\frac{f'(x)}{f(x)}$, muốn vậy ta phải đánh giá theo AM – GM như sau:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + mx \geq 2\sqrt{m}.\sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}} \text{ với } m \geq 0 \text{ và } x \in [0;1].$$

Do đó ta cần tìm tham số $m \geq 0$ sao cho

$$\int_0^1 \left[\frac{f'(x)}{f(x)} + mx\right]dx \geq 2\sqrt{m}.\int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}dx$$

hay

$$\ln\left|f(x)\right|\Big|_0^1 + m\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 \ge 2\sqrt{m}.1 \Leftrightarrow \ln\left|f(1)\right| - \ln\left|f(0)\right| + \frac{m}{2} \ge 2\sqrt{m} \Leftrightarrow 2 - 0 + \frac{m}{2} \ge 2\sqrt{m}.$$

Để dấu "$=$" xảy ra thì ta cần có $2 - 0 + \frac{m}{2} = 2\sqrt{m} \Leftrightarrow m = 4.$

Với $m = 4$ thì đẳng thức xảy ra nên $\frac{f'(x)}{f(x)} = 4x$

$$\longrightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \int 4x\mathrm{d}x \Leftrightarrow \ln\left|f(x)\right| = 2x^2 + C \Rightarrow f(x) = e^{2x^2+C}.$$

Theo giả thiết $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = e^2 \end{cases} \Rightarrow C = 0 \longrightarrow f(x) = e^{2x^2} \longrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}.$ **Chọn C.**

Cách 2. Theo Holder

$$1^2 \le \left(\int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_0^1 \sqrt{x}.\sqrt{\frac{f'(x)}{f(x)}}\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_0^1 x\mathrm{d}x.\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.\ln\frac{f(1)}{f(0)} = 1.$$

Vậy đẳng thức xảy ra nên ta có $\frac{f'(x)}{f(x)} = kx,$ thay vào $\int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}\mathrm{d}x = 1$ ta được $k = 4.$

Suy ra $\frac{f'(x)}{f(x)} = 4x.$ (làm tiếp như trên)

Câu 101. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1],$ thỏa mãn $\int_0^1 \left[f(x)f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x \le 1$ và $f(0) = 1,$ $f(1) = \sqrt{3}.$ Tính giá trị của $f\left(\frac{1}{2}\right).$

A. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}.$ **B.** $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3.$ **C.** $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}.$ **D.** $f\left(\frac{1}{2}\right) = e.$

Lời giải. Nhận thấy bài này ngược dấu bất đẳng thức với bài trên.

Hàm dưới dấu tích phân là $\left[f(x)f'(x)\right]^2.$ Điều này làm ta liên tưởng đến đạo hàm đúng $f(x)f'(x)$, muốn vậy ta phải đánh giá theo $\mathrm{AM-GM}$ như sau:

$$\left[f(x)f'(x)\right]^2 + m \ge 2\sqrt{m}.f(x)f'(x) \text{ với } m \ge 0.$$

Do đó ta cần tìm tham số $m \ge 0$ sao cho

$$\int_0^1 \left(\left[f(x)f'(x)\right]^2 + m\right)\mathrm{d}x \ge 2\sqrt{m}\int_0^1 f(x)f'(x)\mathrm{d}x.$$

hay

$$1 + m \ge 2\sqrt{m}.\frac{f^2(x)}{2}\Big|_0^1 \Leftrightarrow 1 + m \ge 2\sqrt{m}.$$

Để dấu "$=$" xảy ra thì ta cần có $1 + m = 2\sqrt{m} \Leftrightarrow m = 1.$

Với $m = 1$ thì đẳng thức xảy ra nên $\left[f(x)f'(x)\right]^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)f'(x) = 1 \\ f(x)f'(x) = -1 \end{array}\right.$.

- $f(x)f'(x) = -1 \longrightarrow \int_0^1 f(x)f'(x)\mathrm{d}x = -\int_0^1 \mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2}\Big|_0^1 = -x\Big|_0^1 \Leftrightarrow 1 = -1.$ (vô lý)
- $f(x)f'(x) = 1 \longrightarrow \int f(x)f'(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} = x + C \longrightarrow f(x) = \sqrt{2x + 2C}.$

Theo giả thiết $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow C = \frac{1}{2} \longrightarrow f(x) = \sqrt{2x + 1} \longrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}.$ **Chọn A.**

Cách 2. Ta có $\int\limits_0^1 f(x)f'(x)\mathrm{d}x=\left.\dfrac{f^2(x)}{2}\right|_0^1=\dfrac{1}{2}\left[f^2(1)-f^2(0)\right]=1.$

Theo Holder

$$1^2=\left(\int\limits_0^1 1.f(x)f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\int\limits_0^1 1^2\mathrm{d}x.\int\limits_0^1\left[f(x)f'(x)\right]^2\mathrm{d}x\le 1.1=1.$$

Vậy đẳng thức xảy ra nên ta có $f'(x)f(x)=k,$ thay vào $\int\limits_0^1 f(x)f'(x)\mathrm{d}x=1$ ta được $k=1.$

Suy ra $f'(x)f(x)=1.$ (làm tiếp như trên)

Câu 102. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[1;2],$ thỏa mãn $\int\limits_1^2\dfrac{\left[f'(x)\right]^2}{xf(x)}\mathrm{d}x\le 24$ và $f(1)=1,$ $f(2)=16.$ Tính giá trị của $f\left(\sqrt{2}\right).$

A. $f\left(\sqrt{2}\right)=1.$ **B.** $f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}.$ **C.** $f\left(\sqrt{2}\right)=2.$ **D.** $f\left(\sqrt{2}\right)=4.$

Lời giải. Hàm dưới dấu tích phân là $\dfrac{\left[f'(x)\right]^2}{xf(x)}=\dfrac{1}{x}.\dfrac{\left[f'(x)\right]^2}{f(x)}.$ Điều này làm ta liên tưởng đến đạo hàm đúng $\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$, muốn vậy ta phải đánh giá theo $\mathrm{AM-GM}$ như sau:

$$\frac{\left[f'(x)\right]^2}{xf(x)}+mx\ge 2\sqrt{m}\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\ \text{ với } m\ge 0 \text{ và } x\in[1;2].$$

Do đó ta cần tìm tham số $m\ge 0$ sao cho

$$\int\limits_1^2\left(\frac{\left[f'(x)\right]^2}{xf(x)}+mx\right)\mathrm{d}x\ge 2\sqrt{m}\int\limits_1^2\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x$$

hay

$$24+\frac{2m}{3}\ge 4\sqrt{m}\left.\sqrt{f(x)}\right|_1^2\Leftrightarrow 24+\frac{2m}{3}\ge 4\sqrt{m}\left[\sqrt{f(2)}-\sqrt{f(1)}\right]\Leftrightarrow 24+\frac{2m}{3}\ge 12\sqrt{m}\Leftrightarrow m=16.$$

Để dấu $"="$ xảy ra thì ta cần có $24+\dfrac{2m}{3}=12\sqrt{m}\Leftrightarrow m=16.$

Với $m=16$ thì đẳng thức xảy ra nên $\dfrac{\left[f'(x)\right]^2}{xf(x)}=16x\Rightarrow\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=2x$

$$\longrightarrow\int\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x=\int 2x\mathrm{d}x\Leftrightarrow\sqrt{f(x)}=x^2+C\longrightarrow f(x)=\left(x^2+C\right)^2.$$

Theo giả thiết $\begin{cases}f(1)=1\\ f(2)=16\end{cases}\Rightarrow C=0\longrightarrow f(x)=x^4\longrightarrow f\left(\sqrt{2}\right)=4.$ **Chọn D.**

Cách 2. Ta có $\int\limits_1^2\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x=2.\int\limits_1^2\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x=2\left.\sqrt{f(x)}\right|_1^2=2\left[\sqrt{f(2)}-\sqrt{f(1)}\right]=6.$

Theo Holder

$$6^2=\left(\int\limits_1^2\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x\right)^2=\left(\int\limits_1^1\sqrt{x}.\frac{f'(x)}{\sqrt{xf(x)}}\mathrm{d}x\right)^2\le\int\limits_1^2 x\mathrm{d}x.\int\limits_1^2\frac{\left[f'(x)\right]^2}{xf(x)}\mathrm{d}x\le\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2.24=36.$$

Vậy đẳng thức xảy ra nên ta có $\dfrac{f'(x)}{\sqrt{xf(x)}}=k\sqrt{x}\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}=kx,$ thay vào $\int\limits_1^2\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x=6$ ta được $k=4.$ Suy ra $\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}=4x.$ (làm tiếp như trên)

Vấn đề 13. Tìm GTLN-GTNN của tích phân

Câu 103. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm cấp hai thỏa mãn $x.f''(x) \ge e^x + x$ và $f'(2) = 2e$, $f(0) = e^2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $f(2) \le 4e - 1$. **B.** $f(2) \le 2e + e^2$. **C.** $f(2) \le e^2 - 2e$. **D.** $f(2) > 12$.

Lời giải. Từ giả thiết $x.f''(x) \ge e^x + x$ ta có $\int_0^2 x.f''(x)\mathrm{d}x \ge \int_0^2 (e^x + x)\mathrm{d}x$. (1)

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = f''(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = f'(x) \end{cases}$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow x.f'(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 f'(x)\mathrm{d}x \ge \left(e^x + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2$

$\Leftrightarrow x.f'(x)\Big|_0^2 - f(x)\Big|_0^2 \ge \left(e^x + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2$

$\Leftrightarrow [2.f'(2) - 0.f'(0)] - [f(2) - f(0)] \ge e^2 + 2 - 1$

$\Leftrightarrow f(2) \le 4e - 1$ (do $f'(2) = 2e$, $f(0) = e^2$). **Chọn A**

Câu 104. Cho hàm số $f(x)$ dương và liên tục trên $[1;3]$, thỏa $\max\limits_{[1;3]} f(x) = 2$, $\min\limits_{[1;3]} f(x) = \frac{1}{2}$ và biểu thức $S = \int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x.\int\limits_1^3 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$ đạt giá trị lớn nhất, khi đó hãy tính $I = \int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{7}{5}$. **C.** $\frac{7}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải. Từ giả thiết ta có $\frac{1}{2} \le f(x) \le 2$, suy ra $f(x) + \frac{1}{f(x)} \le \frac{5}{2}$.

Suy ra $\int\limits_1^3 \left[f(x) + \frac{1}{f(x)}\right]\mathrm{d}x \le \int\limits_1^3 \frac{5}{2}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_1^3 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \le 5 \Leftrightarrow \int\limits_1^3 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \le 5 - \int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

Khi đó $S = \int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x.\int\limits_1^3 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \le \int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x.\left(5 - \int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x\right) \le \frac{25}{4}$.

(dạng $t(5-t) = -t^2 + 5t = -\left(t - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \le \frac{25}{4}$)

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x = \frac{5}{2}$. **Chọn D.**

Câu 105. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(x) + f'(x) \le 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Giá trị lớn nhất của $f(1)$ bằng

A. $e - 1$. **B.** $\frac{e-1}{e}$. **C.** $\frac{e}{e-1}$. **D.** e.

Lời giải. Từ giả thiết $f(x) + f'(x) \le 1$, nhân thêm hai vế cho e^x để thu được đạo hàm đúng là $e^x f(x) + e^x f'(x) \le e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\left[e^x f(x)\right]' \le e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $\int\limits_0^1 \left[e^x f(x)\right]' \mathrm{d}x \le \int\limits_0^1 e^x \mathrm{d}x \Leftrightarrow \left[e^x f(x)\right]\Big|_0^1 \le e - 1 \Leftrightarrow \left[ef(1) - 1.f(0)\right]\Big|_0^1 \le e - 1$

$\xrightarrow{f(0)=0} f(1) \le \frac{e-1}{e}$. **Chọn B.**

Câu 106. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=2018f(0)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\int_0^1 \frac{1}{[f(x)]^2}dx+\int_0^1 [f'(x)]^2 dx$ bằng

A. $\ln 2018$. **B.** $2\ln 2018$. **C.** $m=2e$. **D.** $m=2018e$.

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta được

$$M=\int_0^1 \frac{1}{[f(x)]^2}dx+\int_0^1 [f'(x)]^2 dx \ge 2\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = 2\ln f(x)\Big|_0^1 = 2\ln\frac{f(1)}{f(0)}=2\ln 2018.$$ **Chọn B.**

Câu 107. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và $\int_0^1 (1-x)^2 f'(x)dx=-\frac{1}{3}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\int_0^1 [f(x)]^2 dx - f(0)$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $-\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{2}{3}$.

Lời giải. Tích phân từng phần $\int_0^1 (1-x)^2 f'(x)dx=-\frac{1}{3}$, ta được $f(0)-\frac{1}{3}=2\int_0^1 (1-x)f(x)dx$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta được

$$2\int_0^1 (1-x)f(x)dx \le \int_0^1 (1-x)^2 dx + \int_0^1 [f(x)]^2 dx.$$

Từ đó suy ra $\int_0^1 [f(x)]^2 dx \ge 2\int_0^1 (1-x)f(x)dx - \int_0^1 (1-x)^2 dx$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 [f(x)]^2 dx \ge f(0)-\frac{1}{3}+\frac{(1-x)^3}{3}\Big|_0^1.$$

Vậy $\int_0^1 [f(x)]^2 dx - f(0) \ge -\frac{2}{3}$. **Chọn D.**

Câu 108. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;\,1]$ thỏa mãn $\int_0^1 xf(x)dx=0$ và $\max\limits_{[0;\,1]}|f(x)|=1$. Tích phân $\int_0^1 e^x f(x)dx$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $\left(-\infty;\,-\frac{5}{4}\right)$. **B.** $\left(\frac{3}{2};\,e-1\right)$. **C.** $\left(-\frac{5}{4};\,\frac{3}{2}\right)$. **D.** $(e-1;\,+\infty)$.

Lời giải. Với mỗi số thực $\alpha\in\mathbb{R}$ ta có $\left|\int_0^1 e^x f(x)dx\right| = \left|\int_0^1 e^x f(x)dx - \int_0^1 \alpha x f(x)dx\right|$

$$=\left|\int_0^1 f(x)\left(e^x-\alpha x\right)dx\right| \le \int_0^1 |f(x)|.\left|e^x-\alpha x\right|dx \le \int_0^1 \left|e^x-\alpha x\right|dx.$$

Suy ra $\left|\int_0^1 e^x f(x)dx\right| \le \min\limits_{\alpha\in\mathbb{R}} \int_0^1 \left|e^x-\alpha x\right|dx \le \min\limits_{\alpha\in[0;1]} \int_0^1 \left|e^x-\alpha x\right|dx = \min\limits_{\alpha\in[0;1]}\left\{e-1-\frac{\alpha}{2}\right\} = e-\frac{3}{2}$. **Chọn C.**

Câu 109. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên $[0;1]$. Đặt $g(x)=1+\int_0^x f(t)dt$. Biết $g(x)\le\sqrt{f(x)}$ với mọi $x\in[0;1]$, tích phân $\int_0^1 \frac{1}{g(x)}dx$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** 1.

Lời giải. Từ giả thiết $g(x)=1+\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, ta có $\begin{cases} g(0)=1 \\ g'(x)=f(x) \end{cases}$ và $g(x)>0,\ \forall x\in[0;1]$.

Theo giả thiết $g(x)\le\sqrt{f(x)}\longrightarrow g(x)\le\sqrt{g'(x)}\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{g'(x)}}{g(x)}\ge 1\Leftrightarrow\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}\ge 1.$

Suy ra $\int_0^t\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}\mathrm{d}x\ge\int_0^t 1\mathrm{d}x,\ \forall t\in[0;1]\longleftrightarrow -\dfrac{1}{g(x)}\Big|_0^t\ge x\Big|_0^t\Leftrightarrow -\dfrac{1}{g(t)}+\dfrac{1}{g(0)}\ge t\Leftrightarrow\dfrac{1}{g(t)}\le 1-t.$

Do đó $\int_0^1\dfrac{1}{g(x)}\mathrm{d}x\le\int_0^1(1-x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}.$ **Chọn B.**

Câu 110. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $f^2(x)\le 1+3\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=g(x)$ với mọi $x\in[0;1]$, tích phân $\int_0^1\sqrt{g(x)}\mathrm{d}x$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** $\dfrac{7}{4}$. **C.** $\dfrac{9}{5}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải. Từ giả thiết $g(x)=1+3\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, ta có $\begin{cases} g(0)=1 \\ g'(x)=3f(x) \end{cases}$ và $g(x)>0,\ \forall x\in[0;1]$.

Theo giả thiết $g(x)\ge f^2(x)\longrightarrow g(x)\ge\dfrac{[g'(x)]^2}{9}\Leftrightarrow\dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}\le\dfrac{3}{2}.$

Suy ra $\int_0^t\dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}\mathrm{d}x\le\int_0^t\dfrac{3}{2}\mathrm{d}x,\ \forall t\in[0;1]\longleftrightarrow\sqrt{g(x)}\Big|_0^t\le\dfrac{3}{2}x\Big|_0^t\Leftrightarrow\sqrt{g(t)}-\sqrt{g(0)}\le\dfrac{3}{2}t\Leftrightarrow\sqrt{g(t)}\le\dfrac{3}{2}t+1.$

Do đó $\int_0^1\sqrt{g(x)}\mathrm{d}x\le\int_0^1\left(\dfrac{3}{2}x+1\right)\mathrm{d}x=\dfrac{7}{4}.$ **Chọn B.**

Câu 111. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $f(x)\le 2018+2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ với mọi $x\in[0;1]$. Biết giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ có dạng ae^2+b với $a,\ b\in\mathbb{Z}$. Tính $a+b$.

A. 0. **B.** 1009. **C.** 2018. **D.** 2020.

Lời giải. Đặt $g(x)=2018+2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, ta có $\begin{cases} g(0)=2018 \\ g'(x)=2f(x) \end{cases}$ và $g(x)>0,\ \forall x\in[0;1]$.

Theo giả thiết $g(x)\ge f(x)\longrightarrow g(x)\ge\dfrac{g'(x)}{2}\Leftrightarrow\dfrac{g'(x)}{g(x)}\le 2.$

Suy ra $\int_0^t\dfrac{g'(x)}{g(x)}\mathrm{d}x\le\int_0^t 2\mathrm{d}x,\ \forall t\in[0;1]\longleftrightarrow\ln|g(x)|\Big|_0^t\le 2x\Big|_0^t$

$\Leftrightarrow\ln g(t)-\ln g(0)\le 2t\Leftrightarrow\ln g(t)\le 2t+\ln 2018\Leftrightarrow g(t)\le 2018.e^{2t}$

Do đó $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\le\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\le 2018\int_0^1 e^{2x}\mathrm{d}x=1009e^{2x}\Big|_0^1=1009e^2-1009.$ **Chọn A.**

Câu 112. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$. Đặt $g(x)=1+\int_0^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$. Biết $g(x)\ge 2xf(x^2)$ với mọi $x\in[0;1]$, tích phân $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ có giá trị lớn nhất bằng

A. 1. **B.** $e-1$. **C.** 2. **D.** $e+1$.

Lời giải. Từ giả thiết $g(x)=1+\int_0^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$, ta có $\begin{cases} g(0)=1 \\ g'(x)=2xf(x^2) \end{cases}$ và $g(x)>0,\ \forall x\in[0;1]$.

Theo giả thiết $g(x) \geq 2xf(x^2) \longrightarrow g(x) \geq g'(x) \Leftrightarrow \dfrac{g'(x)}{g(x)} \leq 1$.

Suy ra $\displaystyle\int_0^t \frac{g'(x)}{g(x)}\mathrm{d}x \leq \int_0^t 1\mathrm{d}x,\ \forall t \in [0;1] \longleftrightarrow \ln g(x)\Big|_0^t \leq x\Big|_0^t$

$$\Leftrightarrow \ln g(t) - \ln g(0) \leq t \Leftrightarrow \ln g(t) \leq t \Leftrightarrow g(t) \leq e^t.$$

Do đó $\displaystyle\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x \leq \int_0^1 e^x \mathrm{d}x = e-1$. **Chọn B.**

Nhận xét. Gọi $F(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(t)$ trên đoạn $[0;x^2]$.

Khi đó $g(x) = 1 + F(t)\Big|_0^{x^2} = 1 + F(x^2) - F(0) \longrightarrow g'(x) = [F(x^2)]' = (x^2)' F'(x^2) = 2xf(x^2)$.

Câu 113. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa $f'(x) \geq f(x) > 0,\ \forall x \in [0;1]$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $f(0).\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{e-1}{e}$. **C.** $\dfrac{e+1}{e}$. **D.** $e-1$.

Lời giải. Từ giả thiết $f'(x) \geq f(x) > 0,\ \forall x \in [0;1]$ ta có $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \geq 1,\ \forall x \in [0;1]$.

Suy ra $\displaystyle\int_0^t \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x \geq \int_0^t 1\mathrm{d}x,\ \forall t \in [0;1] \longleftrightarrow \ln f(x)\Big|_0^t \geq x\Big|_0^t \Leftrightarrow \ln f(t) - \ln f(0) \geq t \Leftrightarrow f(t) \geq f(0)e^t$.

Do đó $f(0).\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{1}{e^x}\mathrm{d}x = \frac{e-1}{e}$. **Chọn B.**

Câu 114. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;\pi]$, thỏa mãn $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos x f(x)\mathrm{d}x = 1$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\displaystyle\int_0^\pi f^2(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{2}{\pi}$. **B.** $\dfrac{3}{\pi}$. **C.** $\dfrac{4}{\pi}$. **D.** $\dfrac{3}{2\pi}$.

Lời giải. Theo Holder

$$(1)^2 = \left[\int_0^\pi \cos x f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leq \int_0^\pi \cos^2 x\mathrm{d}x.\int_0^\pi f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.\int_0^\pi f^2(x)\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\displaystyle\int_0^\pi f^2(x)\mathrm{d}x \geq \frac{2}{\pi}$. (Đến đây bạn đọc có thể chọn A)

Dấu "=" xảy ra khi $f(x) = k\cos x$ thay vào $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x = 1$ ta được

$$1 = \int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x = k\int_0^\pi \cos x\mathrm{d}x = k.\sin x\Big|_0^\pi = 0.$$

Điều này hoàn toàn vô lý.

Lời giải đúng. Ta có $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos x f(x)\mathrm{d}x = 1 \longrightarrow \begin{cases} a = \displaystyle\int_0^\pi a\cos x f(x)\mathrm{d}x \\ b = \displaystyle\int_0^\pi bf(x)\mathrm{d}x \end{cases}$ với $\begin{cases} a,\ b \in \mathbb{R} \\ a^2 + b^2 > 0 \end{cases}$.

Theo Holder

$$(a+b)^2=\left[\int_0^{\pi}(a\cos x+b)f(x)\mathrm{d}x\right]^2\le\int_0^{\pi}(a\cos x+b)^2\,\mathrm{d}x\int_0^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x.$$

Lại có

$$\int_0^{\pi}(a\cos x+b)^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi\left(a^2+2b^2\right).$$

Từ đó suy ra $\int_0^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x\ge\dfrac{2(a+b)^2}{\pi\left(a^2+2b^2\right)}$ với mọi $a,\ b\in\mathbb{R}$ và $a^2+b^2>0.$

Do đó $\int_0^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x\ge\dfrac{2}{\pi}.\max\left\{\dfrac{(a+b)^2}{a^2+2b^2}\right\}=\dfrac{3}{\pi}.$ **Chọn B.**

Nhận xét: ● Ta nhân thêm $a,\ b$ vào giả thiết được gọi là phương pháp biến thiên hằng số.

● Cách tìm giá trị lớn nhất của $P=\dfrac{(a+b)^2}{a^2+2b^2}$ ta làm như sau:

Nếu $b=0\longrightarrow P=1.$ (chính là đáp án sai mà mình đã làm ở trên)

Nếu $b\ne0\longrightarrow P=\dfrac{(a+b)^2}{a^2+2b^2}=\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+2\dfrac{a}{b}+1}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+2}\overset{t=\frac{a}{b}}{=}\dfrac{t^2+2t+1}{t^2+2}.$ Tới đây ta khảo sát hàm số hoặc dùng MODE 7 dò tìm. Kết quả thu được GTLN của P bằng $\dfrac{3}{2}$ khi $t=2\longrightarrow\dfrac{a}{b}=2\Leftrightarrow a=2b.$

Vậy dấu "$=$" để bài toán xảy ra khi $\begin{cases}a=2b\\ f(x)=b(2\cos x+1)\end{cases}$ thay ngược lại điều kiện, ta được

$$\int_0^{\pi}b(2\cos x+1)\mathrm{d}x=1\Leftrightarrow b=\frac{1}{\pi}\longrightarrow f(x)=\frac{2\cos x+1}{\pi}.$$

Lúc này $\int_0^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\left(\dfrac{2\cos x+1}{\pi}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{3}{\pi}.$

Cách khác. Đưa về bình phương

Hàm dưới dấu tích phân là $f^2(x), f(x),\ \cos xf(x)$ nên ta liến kết với $\left[f(x)+\alpha\cos x+\beta\right]^2.$

Với mỗi số thực $\alpha,\ \beta$ ta có

$$\int_0^{\pi}\left[f(x)+\alpha\cos x+\beta\right]^2=\int_0^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x+2\int_0^{\pi}(\alpha\cos x+\beta)f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}(\alpha\cos x+\beta)^2\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x+2(\alpha+\beta)+\frac{\pi}{2}\alpha^2+\pi\beta^2.$$

Ta cần tìm $\alpha,\ \beta$ sao cho $2(\alpha+\beta)+\dfrac{\pi}{2}\alpha^2+\pi\beta^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Ta có

$$2(\alpha+\beta)+\frac{\pi}{2}\alpha^2+\pi\beta^2=\frac{\pi}{2}\left(\alpha+\frac{2}{\pi}\right)^2+\pi\left(\beta+\frac{1}{\pi}\right)^2-\frac{3}{\pi}\ge-\frac{3}{\pi}.$$

Vậy với $\alpha=-\dfrac{2}{\pi};\ \beta=-\dfrac{1}{\pi}$ thì ta có

$$\int_0^{\pi}\left[f(x)-\frac{2}{\pi}\cos x-\frac{1}{\pi}\right]^2=\int_0^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-\frac{3}{\pi}.$$

Suy ra $\int_0^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\left[f(x)-\dfrac{2}{\pi}\cos x-\dfrac{1}{\pi}\right]^2+\dfrac{3}{\pi}\ge\dfrac{3}{\pi}.$ Dấu "$=$" xảy ra khi $f(x)=\dfrac{2\cos x+1}{\pi}.$

Câu 115. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;\pi]$, thỏa mãn $\int_0^{\pi} \sin x f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \cos x f(x)\mathrm{d}x = 1$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{2}{\pi}$. **B.** $\frac{3}{\pi}$. **C.** $\frac{4}{\pi}$. **D.** $\frac{3}{2\pi}$.

Lời giải. Liên kết với bình phương $\left[f(x)+\alpha\sin x+\beta\cos x\right]^2$.

Ta có $\int_0^{\pi}\left[f(x)+\alpha\sin x+\beta\cos x\right]^2\mathrm{d}x$

$$= \int_0^{\pi}\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x + 2\int_0^{\pi}(\alpha\sin x+\beta\cos x)f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{\pi}(\alpha\sin x+\beta\cos x)^2\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\pi}\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x + 2(\alpha+\beta) + \frac{\pi\alpha^2}{2} + \frac{\pi\beta^2}{2}.$$

Phân tích $2(\alpha+\beta)+\frac{\pi\alpha^2}{2}+\frac{\pi\beta^2}{2} = \frac{\pi}{2}\left(\alpha+\frac{2}{\pi}\right)^2 + \frac{\pi}{2}\left(\beta+\frac{2}{\pi}\right)^2 - \frac{4}{\pi}$. **Chọn C.**

Câu 116. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 e^x f(x)\mathrm{d}x = 1$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $0 < m < 1$. **B.** $1 < m < 2$. **C.** $2 < m < 3$. **D.** $3 < m < 4$.

Lời giải. Từ giả thiết, ta có $\begin{cases} a = \int_0^1 ae^x f(x)\mathrm{d}x \\ b = \int_0^1 bf(x)\mathrm{d}x \end{cases}$.

Theo Holder

$$(a+b)^2 = \left[\int_0^1\left(ae^x+b\right)f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \le \int_0^1\left(ae^x+b\right)^2\mathrm{d}x\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x.$$

Lại có

$$\int_0^1\left(ae^x+b\right)^2\mathrm{d}x = \int_0^1\left(a^2e^{2x}+2abe^x+b^2\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(e^2-1\right)a^2+2(e-1)ab+b^2.$$

Suy ra $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \ge \dfrac{(a+b)^2}{\frac{1}{2}\left(e^2-1\right)a^2+2(e-1)ab+b^2}$ với mọi a, $b\in\mathbb{R}$ và $a^2+b^2>0$.

Do đó $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \ge \max\left\{\dfrac{(a+b)^2}{\frac{1}{2}\left(e^2-1\right)a^2+2(e-1)ab+b^2}\right\} = -1+\dfrac{1}{3-e}+\dfrac{1}{e-1}\approx 3{,}1316$. **Chọn D.**

Câu 117. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1\sqrt{x}f(x)\mathrm{d}x = 1$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** 1. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** 3.

Lời giải. Từ giả thiết, ta có $\begin{cases} a=\displaystyle\int_0^1 a\sqrt{x}f(x)\,\mathrm{d}x \\ b=\displaystyle\int_0^1 bf(x)\,\mathrm{d}x \end{cases}$.

Theo Holder

$$(a+b)^2=\left(\int_0^1\left(a\sqrt{x}+b\right)f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\le\int_0^1\left(a\sqrt{x}+b\right)^2\mathrm{d}x.\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lại có

$$\int_0^1\left(a\sqrt{x}+b\right)^2\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}+\frac{4ab}{3}+b^2.$$

Suy ra $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\ge\frac{(a+b)^2}{\frac{a^2}{2}+\frac{4ab}{3}+b^2}$ với mọi $a,\ b\in\mathbb{R}$ và $a^2+b^2>0$.

Do đó $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\ge\max\left\{\frac{(a+b)^2}{\frac{a^2}{2}+\frac{4ab}{3}+b^2}\right\}=3$. **Chọn D.**

Cách 2. Liên kết với bình phương $\left[f(x)+\alpha\sqrt{x}+\beta\right]^2$.

Ta có $\displaystyle\int_0^\pi\left[f(x)+\alpha\sqrt{x}+\beta\right]^2\mathrm{d}x$

$$=\int_0^\pi\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x+2\int_0^\pi\left(\alpha\sqrt{x}+\beta\right)f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^\pi\left(\alpha\sqrt{x}+\beta\right)^2\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^\pi\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x+2(\alpha+\beta)+\frac{\alpha^2}{2}+\frac{4}{3}\alpha\beta+\beta^2.$$

Phân tích $2(\alpha+\beta)+\dfrac{\alpha^2}{2}+\dfrac{4}{3}\alpha\beta+\beta^2=\left(\beta+\dfrac{2}{3}\alpha+1\right)^2+\dfrac{1}{18}(\alpha+6)^2-3.$

Câu 118. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$, thỏa $\displaystyle\int_1^2 x^3f(x)\,\mathrm{d}x=31$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\displaystyle\int_1^2 f^4(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 961. **B.** 3875. **C.** 148955. **D.** 923521.

Lời giải. Ta có áp dụng hai lần liên tiếp bất đẳng thức Holder ta được

$$31^4=\left(\int_1^2 x^3f(x)\,\mathrm{d}x\right)^4=\left(\left[\int_1^2 x^2.xf(x)\,\mathrm{d}x\right]^2\right)^2\le\left(\int_1^2 x^4\mathrm{d}x\right)^2\left(\int_1^2 x^2f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\le\left(\int_1^2 x^4\mathrm{d}x\right)^3\int_1^2 f^4(x)\,\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\displaystyle\int_1^2 f^4(x)\,\mathrm{d}x\ge\frac{31^4}{\left(\int_1^2 x^4\mathrm{d}x\right)^3}=3875.$

Dấu "=" xảy ra khi $f(x)=kx$ nên $k\displaystyle\int_1^2 x^4\mathrm{d}x=31\Leftrightarrow k=5\longrightarrow f(x)=5x^2$. **Chọn B.**

Câu 119. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm đến cấp 2 trên $[0;2]$ thỏa $f(0)-2f(1)+f(2)=1$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^2 [f''(x)]^2\,dx$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{4}{5}$. **D.** $\frac{5}{4}$.

Lời giải. Ta có $\int_0^1 [f''(x)]^2\,dx = 3\int_0^1 x^2dx.\int_0^1 [f''(x)]^2\,dx \overset{\text{Holder}}{\geq} 3\left(\int_0^1 x.f''(x)dx\right)^2$

$$\overset{\begin{cases}u=x\\dv=f''(x)dx\end{cases}}{=} 3[f'(1)+f(0)-f(1)]^2;$$

$$\int_1^2 [f''(x)]^2\,dx = 3\int_1^2 (x-2)^2\,dx.\int_1^2 [f''(x)]^2\,dx \overset{\text{Holder}}{\geq} 3\left(\int_1^2 (x-2).f''(x)dx\right)2$$

$$\overset{\begin{cases}u=x-2\\dv=f''(x)dx\end{cases}}{=} 3[-f'(1)+f(2)-f(1)]^2.$$

Suy ra $\int_0^2 [f''(x)]^2\,dx \geq 3[f'(1)+f(0)-f(1)]^2 + 3[-f'(1)+f(2)-f(1)]^2$

$$\geq 3.\frac{[f(0)-2f(1)+f(2)]^2}{2} = \frac{3}{2}.$$ **Chọn B.**

Nhận xét: Lời giải trên sử dụng bất đẳng thức ở bước cuối là $a^2+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$.

Câu 120. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[1;3]$ và $f(1)=0$, $\max_{[1;3]}|f(x)|=\sqrt{10}$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_1^3 [f'(x)]^2\,dx$ bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 20.

Lời giải. Vì $\max_{[1;3]}|f(x)|=\sqrt{10} \longrightarrow \exists x_0 \in [1;3]$ sao cho $|f(x_0)|=\sqrt{10}$

$$\xrightarrow{f(1)=0} \exists x_0 \in (1;3] \text{ sao cho } |f(x_0)|=\sqrt{10}.$$

Theo Holder

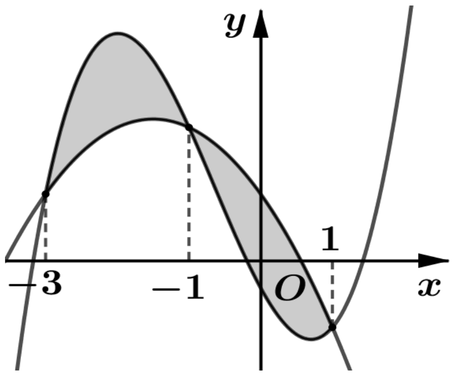
$$\left(\int_1^{x_0} f'(x)dx\right)^2 \leq \int_1^{x_0} 1^2\,dx.\int_1^{x_0} [f'(x)]^2\,dx = (x_0-1).\int_1^{x_0} [f'(x)]^2\,dx.$$

Mà $\left(\int_1^{x_0} f'(x)dx\right)^2 = \left(f(x)\Big|_1^{x_0}\right)^2 = (f(x_0)-f(1))^2 = 10.$

Từ đó suy ra $\int_1^{x_0} [f'(x)]^2\,dx \geq \frac{10}{x_0-1}$

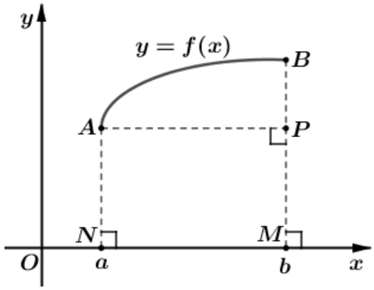
$\longrightarrow \int_1^3 [f'(x)]^2\,dx \geq \int_1^{x_0} [f'(x)]^2\,dx \geq \frac{10}{x_0-1} \geq \frac{10}{3-1}$. **Chọn B.**

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN



Phần 1. Áp dụng công thức

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



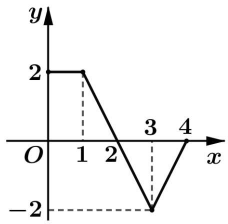
A. $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x$ là độ dài đoạn thẳng NM.

B. $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x$ là độ dài đường cong AB.

C. $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x$ là độ dài đoạn thẳng BP.

D. $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x$ là diện tích hình thang cong $ABMN$.

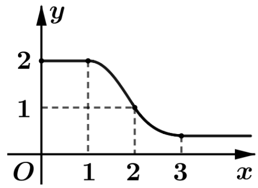
Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;4]$ và có đồ thị như hình bên. Tích phân $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$ bằng



A. 0. **B.** 1.

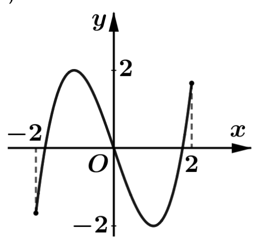
C. 5. **D.** 8.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;3]$ và có đồ thị như hình bên. Biết $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=2{,}3$ và $F'(x)=f(x),\ \forall x\in[0;4]$. Hiệu $F(3)-F(0)$ bằng



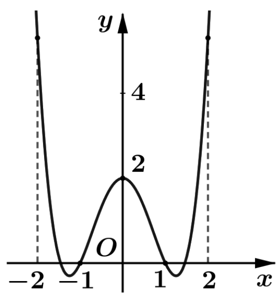
A. $0,3$. **B.** $1,3$. **C.** $3,3$. **D.** $4,3$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-2;2]$ và có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ như hình bên. Biết $\int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x=2$. Tích phân $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng



A. -2. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

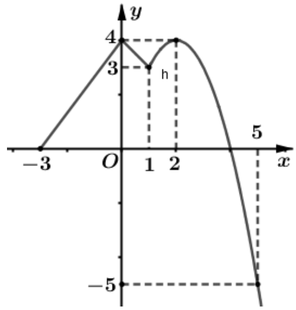
Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-2;2]$ và có đồ thị đối xứng qua trục tung như hình bên. Biết $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{12}{5}$. Tích phân $\int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ bằng



A. $\frac{12}{5}$. **B.** $\frac{24}{5}$.

C. $\frac{5}{12}$. D. $I=0$.

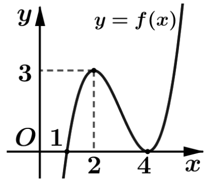
Câu 6. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[-3;5\right]$ và có đồ thị như hình bên (phần cong của đồ thị là một phần của Parabol $y=ax^2+bx+c$). Tích phân $\int\limits_{-2}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng



A. $\frac{43}{2}$. B. $\frac{53}{3}$.

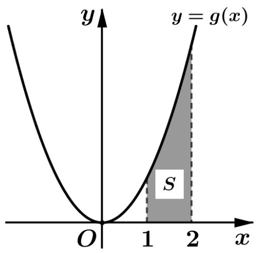
C. $\frac{95}{6}$. D. $\frac{97}{6}$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[1;4\right]$ và có đồ thị như hình bên. Tích phân $\int\limits_{1}^{4}\left|f'\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$ bằng



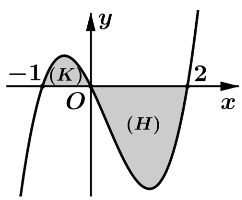
A. 0. B. 2. C. 4. D. 6.

Câu 8. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=g\left(x\right)=x.f\left(x^2\right)$ có đồ thị trên đoạn $\left[1;2\right]$ như hình vẽ bên. Biết phần diện tích miền được tô màu là $S=\frac{5}{2}$, giá trị của tích phân $I=\int\limits_{1}^{4}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng



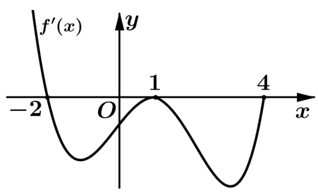
A. $\frac{5}{4}$. B. $\frac{5}{2}$. C. 5. D. 10.

Câu 9. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[-1;2\right]$. Đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ được cho như hình bên. Diện tích các hình phẳng $\left(K\right),\left(H\right)$ lần lượt là $\frac{5}{12}$ và $\frac{8}{3}$. Biết $f\left(-1\right)=\frac{19}{12}$, tính $f\left(2\right)$.



A. $f\left(2\right)=-\frac{2}{3}$. B. $f\left(2\right)=\frac{2}{3}$. C. $f\left(2\right)=\frac{11}{6}$. D. $f\left(2\right)=3$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[-2;4\right]$. Đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ được cho như hình bên. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục Ox và đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-2;1\right]$ và $\left[1;4\right]$ lần lượt bằng 9 và 12. Cho $f\left(1\right)=3$. Tổng $f\left(-2\right)+f\left(4\right)$ bằng

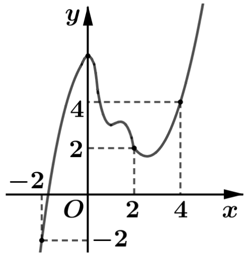


A. 2. B. 3. C. 9. D. 21.

Phần 2. Đồ thị hàm $f(x)$.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Giá trị của biểu thức

$$\int_0^4 f'(x-2)\mathrm{d}x+\int_0^2 f'(x+2)\mathrm{d}x \text{ bằng}$$



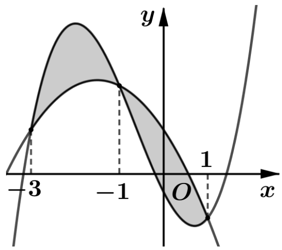
A. -2. **B.** 2.
C. 6. **D.** 10.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $[0;2]$ và có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để thỏa mãn điều kiện $\int_0^2 [f(x)-m]\mathrm{d}x=0$?

x	0		1		2
f'		$+$	0	$-$	
f	-5	$\nearrow$	7	$\searrow$	-3

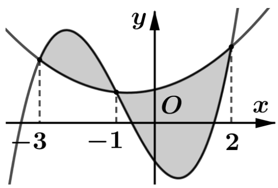
A. 11. **B.** 12. **C.** 13. **D.** 14.

Câu 3. Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-\dfrac{1}{2}$ và $g(x)=dx^2+ex+1$ $(a, b, c, d, e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-3; -1; 1$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



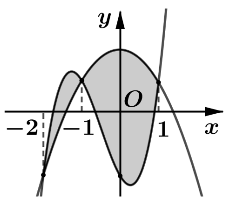
A. 4. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** 5. **D.** 8.

Câu 4. Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-1$ và $g(x)=dx^2+ex+\dfrac{1}{2}$ $(a, b, c, d, e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt $-3; -1; 2$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



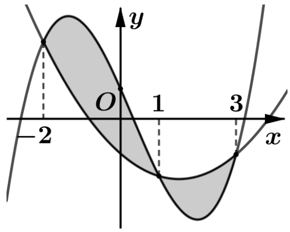
A. $\dfrac{125}{12}$. **B.** $\dfrac{253}{12}$. **C.** $\dfrac{125}{48}$. **D.** $\dfrac{253}{48}$.

Câu 5. Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-2$ và $g(x)=dx^2+ex+2$ $(a, b, c, d, e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-2; -1; 1$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** $\dfrac{13}{2}$. **C.** $\dfrac{37}{6}$. **D.** $\dfrac{37}{12}$.

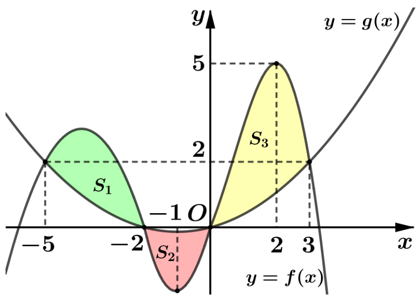
Câu 6. Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+\dfrac{3}{4}$ và $g(x)=dx^2+ex-\dfrac{3}{4}$ $(a,\,b,\,c,\,d,\,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-2;\,1;\,3$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. $\dfrac{125}{24}$. **B.** $\dfrac{253}{24}$. **C.** $\dfrac{125}{48}$. **D.** $\dfrac{253}{48}$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5;3]$ và có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng diện tích hình phẳng $S_1,\,S_2,\,S_3$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường cong $y=g(x)=ax^2+bx+c$ lần lượt là $m,\,n,\,p$.

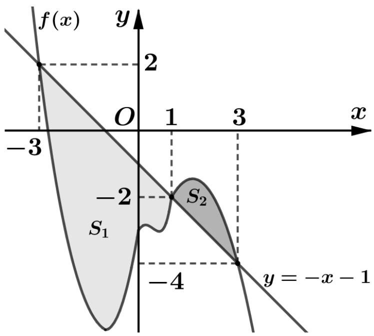
Tích phân $\displaystyle\int_{-5}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ bằng



A. $m-n+p-\dfrac{208}{45}$. **B.** $m-n+p+\dfrac{208}{45}$.

C. $-m+n-p-\dfrac{208}{45}$. **D.** $-m+n-p+\dfrac{208}{45}$.

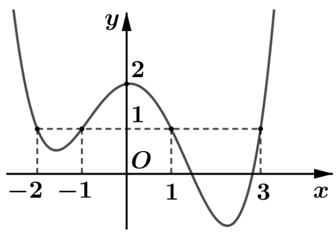
Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-3;3]$ và có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng diện tích hình phẳng $S_1,\,S_2$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=-x-1$ lần lượt là $M;\,m$. Tích phân $\displaystyle\int_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ bằng



A. $6+m-M$. **B.** $6-m-M$.

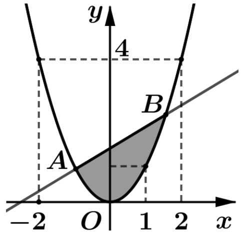
C. $M-m+6$. **D.** $m-M-6$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Đặt $K=\displaystyle\int_0^1 x.f(x).f'(x)\mathrm{d}x$, khi đó K thuộc khoảng nào sau đây?



A. $(-3;-2)$. **B.** $\left(-2;-\dfrac{3}{2}\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{2}{3}\right)$. **D.** $\left(-\dfrac{2}{3};0\right)$.

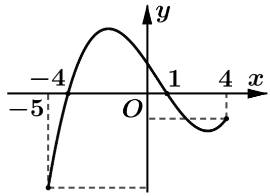
Câu 10*. Cho Parabol $(P): y = x^2$. Hai điểm A, B di động trên (P) sao cho $AB = 2$. Khi diện tích phần mặt phẳng giới hạn bởi (P) và cát tuyến AB đạt giá trị lớn nhất thì hai điểm A, B có tọa độ xác định $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$. Giá trị của biểu thức $T = x_A^2 x_B^2 + y_A^2 y_B^2$ bằng



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Phần 3. Đồ thị hàm $f'(x)$.

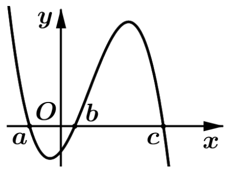
Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hình bên là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[-5;4]$. Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên $[-5;4]$ là



A. $f(-5)$. **B.** $f(-4)$.

C. $f(1)$. **D.** $f(4)$.

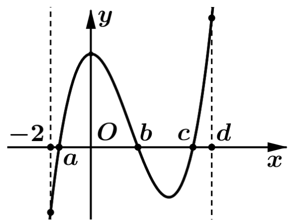
Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm có hoành độ a, b, c (hình bên). Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $f(c) > f(a) > f(b)$. **B.** $f(a) > f(c) > f(b)$.

C. $f(b) > f(c) > f(a)$. **D.** $f(a) > f(b) > f(c)$.

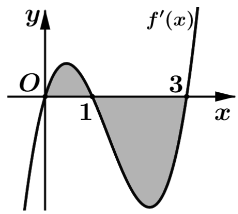
Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hình bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2;d]$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;d]$ lần lượt là



A. $f(a)$ và $f(b)$. **B.** $f(a)$ và $f(-2)$.

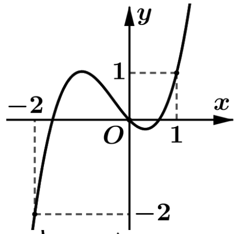
C. $f(c)$ và $f(b)$. **D.** $f(c)$ và $f(d)$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Miền hình phẳng trong hình vẽ được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và trục hoành đồng thời có diện tích $S = a$. Biết rằng $\int_0^1 (x+1) f'(x) \mathrm{d}x = b$ và $f(3) = c$. Tính $I = \int_0^1 f(x) \mathrm{d}x$.



A. $I = a - b + c$. **B.** $I = -a + b - c$. **C.** $I = -a + b + c$. **D.** $I = a - b - c$.

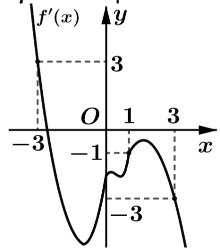
Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[-2;1]$. Hình bên là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$. Đặt



$g(x)=f(x)-\dfrac{x^2}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $g(-2)<g(1)<g(0)$. **B.** $g(1)<g(-2)<g(0)$.

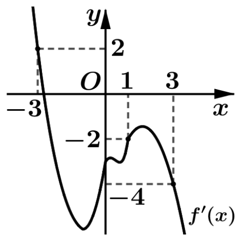
C. $g(0)<g(1)<g(-2)$. **D.** $g(0)<g(-2)<g(1)$.



Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[-3;3]$. Hình bên là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$. Đặt $g(x)=2f(x)+x^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $g(3)<g(-3)<g(1)$. **B.** $g(-3)<g(3)<g(1)$.

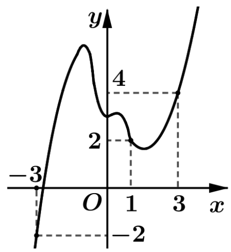
C. $g(1)<g(3)<g(-3)$. **D.** $g(1)<g(-3)<g(3)$.



Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[-3;3]$. Hình bên là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$. Đặt $g(x)=2f(x)+(x+1)^2$. Gọi m là số thực thỏa mãn $\int_{-3}^{3}\left[\dfrac{m}{3}-g(x)\right]dx=0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $6g(1)<m<g(-3)$. **B.** $6g(1)<m<6g(-3)$.

C. $3g(1)<m<3g(-3)$. **D.** $-3g(1)<m<3g(-3)$.



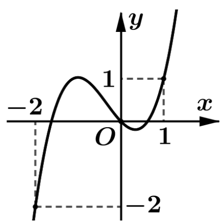
Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[-3;3]$. Hình bên là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$. Biết $f(1)=6$ và $g(x)=f(x)-\dfrac{(x+1)^2}{2}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Phương trình $g(x)=0$ không có nghiệm thuộc $[-3;3]$.

B. Phương trình $g(x)=0$ có đúng một nghiệm thuộc $[-3;3]$.

C. Phương trình $g(x)=0$ có đúng hai nghiệm thuộc $[-3;3]$.

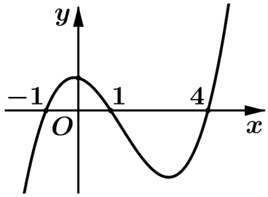
D. Phương trình $g(x)=0$ có đúng ba nghiệm thuộc $[-3;3]$.



Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[-2;1]$. Hình bên là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$. Đặt $g(x)=f(x)-\dfrac{x^2}{2}$. Điều kiện cần và đủ để phương trình $g(x)=0$ có bốn nghiệm phân biệt là

A. $\begin{cases} g(0)>0 \\ g(1)<0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} g(0)<0 \\ g(1)<0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} g(0)>0 \\ g(-2)<0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} g(0)>0 \\ g(1)>0 \\ g(-2)<0 \end{cases}$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(x^2)$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng

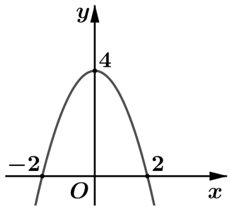


A. $f(1)+f(0)$. **B.** $f(4)+f(0)$.

C. $f(1)+f(4)$. **D.** $f(1)+f(0)-f(4)$.

Phần 4. Diện tích hình phẳng

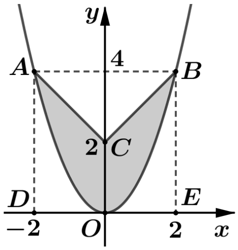
Câu 1. Cho Parabol như hình vẽ bên. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và trục hoành bằng



A. 16. **B.** $\frac{16}{3}$.

C. $\frac{28}{3}$. **D.** $\frac{32}{3}$.

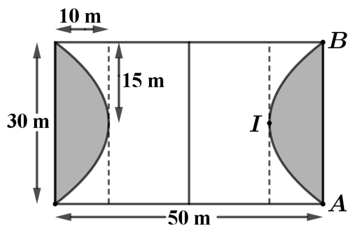
Câu 2. Tính diện tích hình phẳng được tô đậm ở hình bên.



A. $S=\frac{10}{3}$. **B.** $S=\frac{20}{3}$.

C. $S=\frac{25}{6}$. **D.** $S=9$.

Câu 3. Ông An xây dựng một sân bóng đá mini hình chữ nhật có chiều rộng 30 m và chiều dài 50 m. Để giảm bớt chi phí cho việc trồng cỏ nhân tạo, ông An chia sân bóng ra làm hai phần (tô đen và không tô đen) như hình bên. Phần tô đen gồm hai miền diện tích bằng nhau và đường cong AIB là một Parabol đỉnh I.

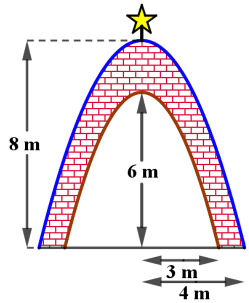


Phần tô đen được trồng cỏ nhân tạo với giá cỏ nhân tạo với giá 130000 đồng/m^2 và phần còn lại được trồng cỏ nhân tạo với giá 90000 đồng/m^2. Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền để trồng cỏ nhân tạo cho sân bóng?

A. 135 triệu đồng. **B.** 151 triệu đồng.

C. 165 triệu đồng. **D.** 195 triệu đồng.

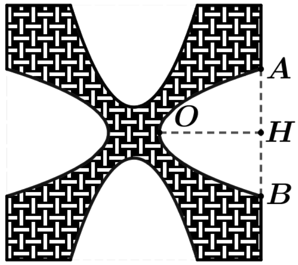
Câu 4. Nhà ông An cần sơn mặt trước của cổng có dạng như hình bên, các đường cong có dạng là Parabol với các kích thước được cho như hình. Biết giá thuê nhân công là 100.000 đồng/m^2. Hỏi ông An phải trả cho bên thi công bao nhiêu tiền để sơn cổng?



A. 2468650 đồng. **B.** 1866667 đồng.

C. 1775361 đồng. **D.** 1668653 đồng.

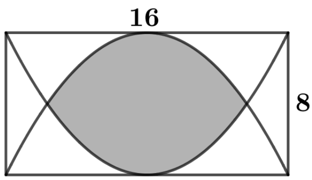
Câu 5. Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh 10 cm bằng cách khoét bỏ đi bốn phần bằng nhau có hình dạng Parabol (như hình vẽ). Biết $AB = 5$ cm, $OH = 4$ cm. Diện tích bề mặt hoa văn đó bằng



A. $\frac{40}{3}$ cm^2. **B.** $\frac{140}{3}$ cm^2.

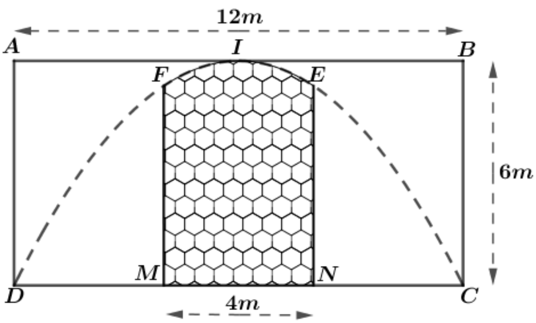
C. $\frac{160}{3}$ cm^2. **D.** 50 cm^2.

Câu 6. Một mảnh vườn toán học có dạng hình chữ nhật, chiều dài là 16 m và chiều rộng là 8 m. Các nhà Toán học dùng hai đường Parabol, mỗi Parabol có đỉnh là trung điểm của một cạnh dài và đi qua hai mút của cạnh đối diện, phần mảnh vườn nằm ở miền trong của cả hai Parabol (phần tô đậm như hình vẽ) được trồng hoa hồng. Biết chi phí để trồng hoa hồng là 45000 đồng/m^2. Hỏi các nhà Toán học phải chi bao nhiêu tiền để trồng hoa trên phần mảnh vườn đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



A. 1920000 đồng. **B.** 2159000 đồng. **C.** 2715000 đồng. **D.** 3322000 đồng.

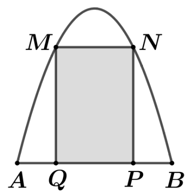
Câu 7. Một công ty quảng cáo muốn làm một bức tranh trang trí hình $MNEIF$ ở chính giữa của một bức tường hình chữ nhật $ABCD$ có chiều cao $BC = 6$ m, chiều dài $CD = 12$ m (hình vẽ bên). Cho biết $MNEF$ là hình chữ nhật có $MN = 4$ m; cung EIF có hình dạng là một phần của cung Parabol có đỉnh I là trung điểm của cạnh AB và đi qua hai điểm C, D. Kinh phí làm bức tranh là 900.000 đồng/m^2. Hỏi công ty cần bao nhiêu tiền để làm bức tranh đó?



A. 20.400.000 đồng. **B.** 20.600.000 đồng.

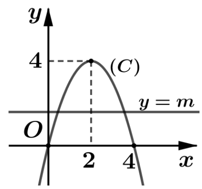
C. 20.800.000 đồng. **D.** 21.200.000 đồng.

Câu 8. Một chiếc cổng có hình dạng là một Parabol có khoảng cách giữa hai chân cổng là $AB = 8$ m. Người ra treo một tâm phông hình chữ nhật có hai đỉnh M, N nằm trên Parabol và hai đỉnh P, Q nằm trên mặt đất (như hình vẽ). Ở phần phía ngoài phông (phần không tô đen) người ta mua hoa để trang trí với chi phí cho 1 m^2 cần số tiền mua hoa là 200.000 đồng, biết $MN = 4$ m, $MQ = 6$ m. Hỏi số tiền dùng để mua hoa trang trí chiếc cổng gần với số tiền nào sau đây?



A. 3373400 đồng. **B.** 3434300 đồng. **C.** 3437300 đồng. **D.** 3733300 đồng.

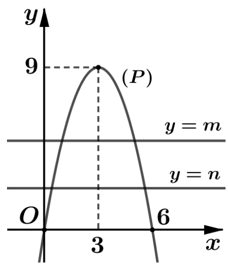
Câu 9. Cho $\mathscr{H}$ là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y = 4x - x^2$ và trục hoành (hình vẽ bên). Đường thẳng $y = m$ chia $\mathscr{H}$ thành hai phần có diện tích bằng nhau. Biết $m = a + \sqrt[3]{b}$ với a, b là các số hữu tỉ, tính $S = a.b$.



A. $S = -64$. **B.** $S = -32$. **C.** $S = 32$. **D.** $S = 64$.

Câu 10. Cho $\mathscr{H}$ là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (P) của hàm số $y = 6x - x^2$ và trục hoành. Hai đường thẳng $y = m$ và $y = n$ chia hình $\mathscr{H}$ thành ba phần có diện tích bằng nhau. Tính

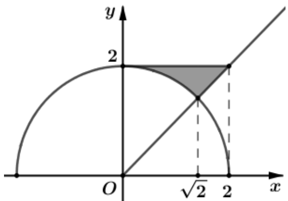
$$P = (9-m)^3 + (9-n)^3.$$



A. $P = 403$. **B.** $P = 405$.

C. $P = 407$. **D.** $P = 409$.

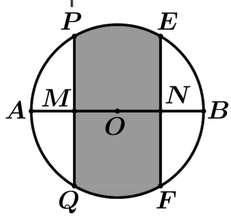
Câu 11. Cho hình phẳng $\mathscr{H}$ (phần tô đậm) được giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = x$ và $y = 2$ có diện tích là $S = a + b\pi$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $a + b < 1$. **B.** $a + 2b = 3$.

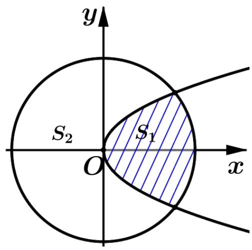
C. $a^2 + 4b^2 \geq 5$. **D.** $a > 1$ và $b > 1$.

Câu 12. Cho đường tròn tâm O đường kính $AB = 8$. Trên AB lấy hai điểm M, N đối xứng nhau qua O sao cho $MN = 4$. Qua M, N kẻ hai dây cung PQ và EF cùng vuông góc với AB. Diện tích phần giới hạn bởi đường tròn và hai dây cung PQ, EF (phần tô đậm như hình vẽ) bằng



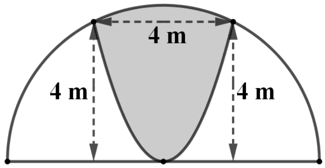
A. $5\pi + 5$. **B.** $6\pi + 8\sqrt{3}$. **C.** $12\pi - 7$. **D.** $\frac{16}{3}\pi + 8\sqrt{3}$.

Câu 13. Biết rằng đường Parabol $(P): y^2 = 2x$ chia đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 8$ thành hai phần lần lượt có diện tích là S_1, S_2 (hình bên). Khi đó $S_2 - S_1 = a\pi - \frac{b}{c}$ với a, b, c nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tổng $a + b + c$ bằng



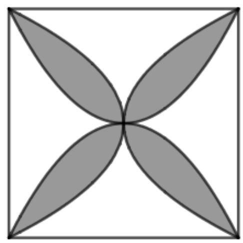
A. 13. **B.** 14. **C.** 15. **D.** 16.

Câu 14. Một khuôn viên dạng nửa hình tròn có đường kính bằng $4\sqrt{5}$ m. Trên đó người thiết kế hai phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình Parabol có đỉnh trùng với tâm nửa hình tròn và hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu), cách nhau một khoảng bằng 4 m, phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ và kinh phí để trồng cỏ Nhật Bản là 100 000 đồng/m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cỏ Nhật Bản trên phần đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



A. 1 194 000 đồng. **B.** 1 948 000 đồng. **C.** 2 388 000 đồng. **D.** 3 895 000 đồng.

Câu 15. Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40 cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường Parabol có chung đỉnh tại tâm của viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô màu như hình bên). Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng



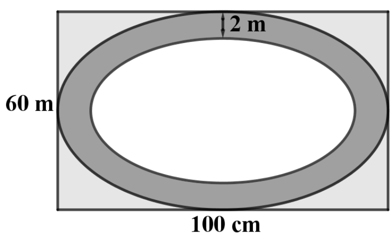
A. 250 cm^2. **B.** $\frac{400}{3}$ cm^2.

C. $\frac{800}{3}$ cm^2. **D.** $\frac{1600}{3}$ cm^2.

Câu 16. Gọi S_1 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi Elip $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$ và S_2 là diện tích của hình thoi có các đỉnh là đỉnh của Elip đó. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

A. π. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** $\frac{\pi}{3}$. **D.** $\frac{2\pi}{3}$.

Câu 17. Một sân chơi cho trẻ em hình chữ nhật có chiều dài 100 m và chiều rộng là 60 m người ta làm một con đường nằm trong sân (như hình vẽ). Biết rằng viền ngoài và viền trong của con đường là hai đường elip, Elip của đường viền ngoài có trục lớn và trục bé lần lượt song song với các cạnh hình chữ nhật và chiều rộng của mặt đường là 2 m. Kinh

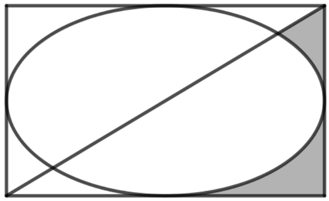


phí cho mỗi m^2 làm đường 600 000 đồng. Tính tổng số tiền làm con đường đó. (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).

A. 293 804 000 đồng. **B.** 293 904 000 đồng.

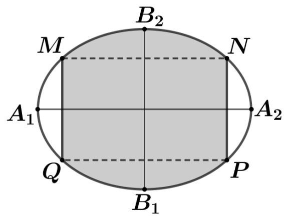
C. 294 053 000 đồng. **D.** 294 153 000 đồng.

Câu 18. Một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài 10 m và chiều rộng 6 m, được phân chia thành các phần bởi một đường chéo và một đường Elip nội tiếp bên trong như hình vẽ bên. Hãy tính diện tích phần tô đậm (theo đơn vị m^2)?



A. $5(\pi-2)$. **B.** $5(4-\pi)$. **C.** $\dfrac{45(4-\pi)}{7}$. **D.** $\dfrac{45(4-\pi)}{8}$.

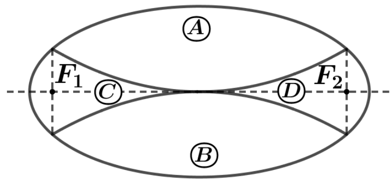
Câu 19. Một biển quảng cáo có dạng hình Elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí sơn phần tô đậm là 200 000 đồng/m^2 và phần còn lại là 100 000 đồng/m^2. Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8$ m, $B_1B_2 = 6$ m và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 3$ m?



A. 5.526.000 đồng. **B.** 5.782.000 đồng.

C. 7 213 000 đồng. **D.** 7 322 000 đồng.

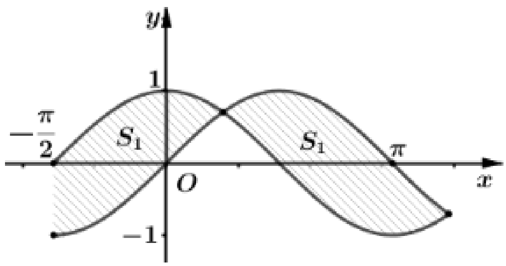
Câu 20. Nhà trường dự định làm một vườn hoa dạng hình Elip được chia ra làm bốn phần bởi hai đường Parabol có chung đỉnh, đối xứng với nhau qua trục của Elip như hình vẽ bên. Biết độ dài trục lớn, trục nhỏ của Elip lần lượt là 8 m và 4 m; F_1, F_2 là hai tiêu điểm của Elip. Phần A, B dùng để trồng hoa; phần C, D dùng để trồng cỏ. Kinh phí để trồng mỗi mét vuông trồng hoa và trồng cỏ lần lượt là 250 000 đồng và 150 000 đồng. Tính tổng tiền để hoàn thành vườn hoa trên (làm tròn đến hàng nghìn).



A. 4 656 000 đồng. **B.** 4 766 000 đồng.

C. 5 455 000 đồng. **D.** 5 676 000 đồng.

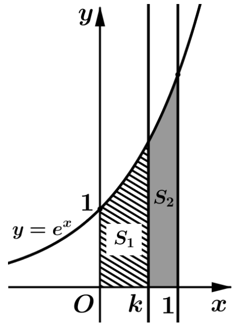
Câu 21. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sin x$, $y = \cos x$ và S_1, S_2 là diện tích của các phần được gạch chéo như hình vẽ. Tổng $S_1^2 + S_2^2$ bằng



A. $10-2\sqrt{2}$. **B.** $10+2\sqrt{2}$.

C. $11-12\sqrt{2}$. **D.** $11+2\sqrt{2}$.

Câu 22. Kí hiệu $\mathscr{H}$ là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0$, $x=0$ và $x=1$. Đường thẳng $x=k$ $(0<k<1)$ chia $\mathscr{H}$ thành hai phần có diện tích tương ứng S_1, S_2 như hình vẽ bên, biết $S_1>S_2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



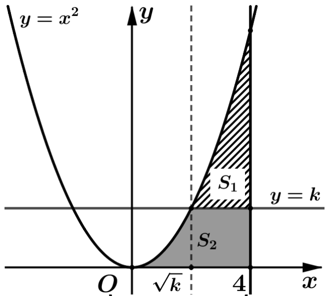
A. $e^k>\dfrac{e-1}{2}$.

B. $e^k>\dfrac{e+1}{2}$.

C. $e^k>\dfrac{e+2}{2}$.

D. $e^k>\dfrac{e+3}{2}$.

Câu 23. Cho hình phẳng $\mathscr{H}$ giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $y=0$, $x=0$, $x=4$. Đường thẳng $y=k$ $(0<k<16)$ chia hình $\mathscr{H}$ thành hai phần có diện tích S_1, S_2 (hình vẽ). Tìm k để $S_1=S_2$.



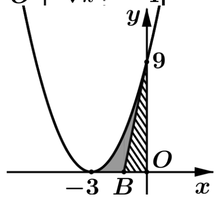
A. $k=3$.

B. $k=4$.

C. $k=5$.

D. $k=8$.

Câu 24. Xét hình phẳng $\mathscr{H}$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x+3)^2$, trục hoành và đường thẳng $x=0$. Gọi $A(0;9)$, $B(b;0)$ $(-3<b<0)$. Tìm giá trị của tham số b để đoạn thẳng AB chia $\mathscr{H}$ thành hai phần có diện tích bằng nhau.



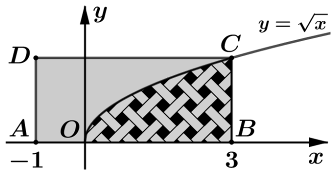
A. $b=-2$.

B. $b=-\dfrac{3}{2}$.

C. $b=-1$.

D. $b=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 25. Trong mặt phẳng tọa độ, cho hình chữ nhật $\mathscr{H}$ có một cạnh nằm trên trục hoành và có hai đỉnh trên một đường chéo là $A(-1;0)$ và $C(a;\sqrt{a})$ với $a>0$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ chia hình $\mathscr{H}$ thành hai phần có diện tích bằng nhau, tìm a.



A. $a=\dfrac{1}{2}$.

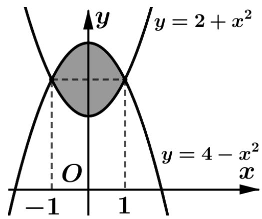
B. $a=3$.

C. $a=4$.

D. $a=9$.

Phần 5. Thể tích khối tròn xoay

Câu 1. Cho hình phẳng $\mathscr{H}$ giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=4-x^2$ và $y=2+x^2$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay $\mathscr{H}$ quanh trục hoành.



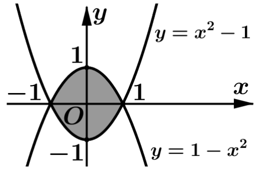
A. $V=10\pi$.

B. $V=12\pi$.

C. $V=14\pi$.

D. $V=16\pi$.

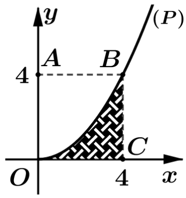
Câu 2. Thể tích V của khối tròn xoay khi cho hình phẳng $\mathscr{H}$ giới hạn bởi các đường $y = 1 - x^2$ và $y = x^2 - 1$ quay quanh trục Ox được xác định bởi công thức nào sau đây?



A. $V = \pi \int_{-1}^{1} \left| \left(1 - x^2\right)^2 - \left(x^2 - 1\right)^2 \right| \mathrm{d}x.$ **B.** $V = \pi \int_{-1}^{1} \left| \left(1 - x^2\right) - \left(x^2 - 1\right) \right| \mathrm{d}x.$

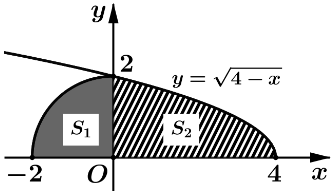
C. $V = \pi \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^2 \mathrm{d}x.$ **D.** $V = \int_{-1}^{1} \left[\left(x^2 - 1\right)^2 - \left(1 - x^2\right)^2 \right] \mathrm{d}x.$

Câu 3. Cho hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (P) có phương trình $y = \frac{1}{4}x^2$. Gọi S là hình phẳng không bị gạch (như hình vẽ). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi cho phần S qua quanh trục Ox.



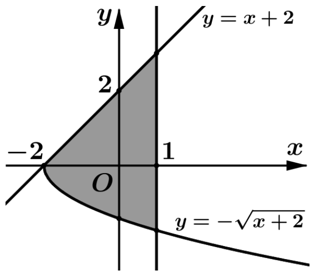
A. $V = \frac{64\pi}{5}.$ **B.** $V = \frac{128\pi}{3}.$ **C.** $V = \frac{128\pi}{5}.$ **D.** $V = \frac{256\pi}{5}.$

Câu 4. Cho hình phẳng $\mathscr{H}$ giới hạn bởi $\frac{1}{4}$ đường tròn có bán kính $R = 2$, đường cong $y = \sqrt{4 - x}$ và trục hoành (miền tô đậm như hình vẽ). Tính thể tích V của khối tạo thành khi cho hình $\mathscr{H}$ quay quanh trục Ox.



A. $V = \frac{40\pi}{3}\cdot$ **B.** $V = \frac{53\pi}{6}\cdot$ **C.** $V = \frac{67\pi}{6}\cdot$ **D.** $V = \frac{77\pi}{6}\cdot$

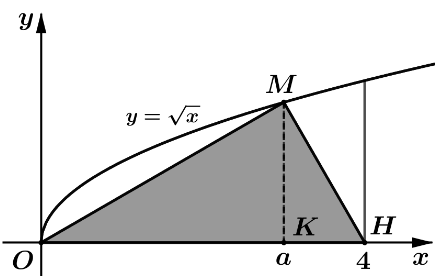
Câu 5. Cho hình phẳng $\mathscr{H}$ giới hạn bởi các đường $y = -\sqrt{x + 2}$, $y = x + 2$, $x = 1$. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng $\mathscr{H}$ quanh trục Ox.



A. $V = 9\pi.$ **B.** $V = \frac{9\pi}{2}.$

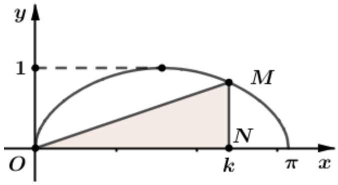
C. $V = \frac{25\pi}{3}.$ **D.** $V = \frac{55\pi}{6}.$

Câu 6. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ và $x = 4$ quanh trục Ox. Đường thẳng $x = a$ $(0 < a < 4)$ cắt đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại M (hình vẽ bên). Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox. Biết rằng $V = 2V_1$. Khi đó



A. $a = 2$. **B.** $a = \frac{5}{2}$. **C.** $a = 2\sqrt{2}$. **D.** $a = 3$.

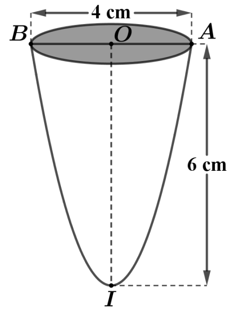
Câu 7. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{\sin x}$, hai trục tọa độ và $x=\pi$ quanh trục hoành. Đường thẳng $x=k$ $(0<k<\pi)$ cắt đồ thị hàm số $y=\sqrt{\sin x}$ tại điểm M và trục hoành tại điểm N (hình vẽ bên).



Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMN quanh trục Ox. Biết rằng $V=\dfrac{12}{k}V_1$. Khi đó

A. $k=\dfrac{\pi}{6}$. **B.** $k=\dfrac{\pi}{3}$. **C.** $k=2$. **D.** $k=3$.

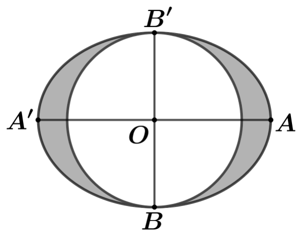
Câu 8. Có một vật thể là hình tròn xoay có dạng giống như một cái ly như hình vẽ bên. Người ta đo được đường kính của miệng ly là 4 cm và chiều cao là 6 cm. Biết rằng thiết diện của chiếc ly cắt bởi mặt phẳng đối xứng là một Parabol. Thể tích của vật thể đã cho bằng



A. $12\pi\ (\text{cm}^3)$. **B.** $12\ (\text{cm}^3)$.

C. $\dfrac{72}{5}\pi\ (\text{cm}^3)$. **D.** $\dfrac{72}{5}\ (\text{cm}^3)$.

Câu 9. Trong mặt phẳng cho đường Elip (E) có độ dài trục lớn là $AA'=8$ và độ dài trục nhỏ $BB'=6$; đường tròn tâm O đường kính BB' như hình vẽ. Tính thể tích V của khối tròn xoay có được bằng cách cho miền hình phẳng giới hạn bởi đường Elip và đường tròn (được tô đậm trên hình vẽ) quay xung quanh trục AA'.

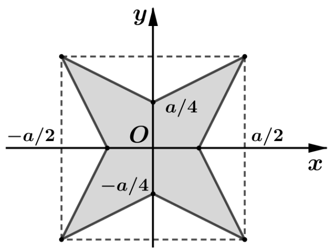


A. $V=12\pi$. **B.** $V=16\pi$. **C.** $V=28\pi$. **D.** $V=36\pi$.

Câu 10. Một thùng chứa rượu làm bằng gỗ là một hình tròn xoay như hình bên có hai đáy là hai hình tròn bằng nhau, khoảng cách giữa hai đáy bằng 8 dm. Đường cong mặt bên của thùng là một phần của đường Elip có độ dài trục lớn bằng 10 dm, độ dài trục bé bằng 6 dm. Hỏi chiếc thùng gỗ đó đựng được bao nhiêu lít rượu?

A. $\dfrac{1316\pi}{25}$ (lít). **B.** $\dfrac{1416\pi}{25}$ (lít). **C.** $\dfrac{1516\pi}{25}$ (lít). **D.** $\dfrac{1616\pi}{25}$ (lít).

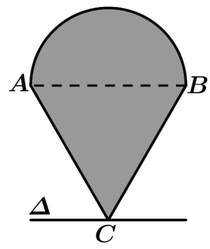
Câu 11. Bên trong hình vuông cạnh a, dựng hình sao bốn cánh đều như hình vẽ bên (các kích thước cần thiết cho như ở trong hình). Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình sao đó quanh trục Ox.



A. $V=\dfrac{\pi}{8}a^3$.　　**B.** $V=\dfrac{5\pi}{24}a^3$.

C. $V=\dfrac{5\pi}{48}a^3$.　　**D.** $V=\dfrac{5\pi}{96}a^3$.

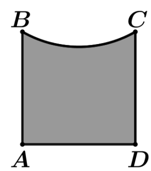
Câu 12. Cho hình phẳng $\mathscr{H}$ gồm nửa hình tròn đường kính AB và tam giác ABC đều (như hình vẽ). Gọi Δ là đường thẳng qua C và song song với AB. Biết $AB=2\sqrt{3}$ cm. Thể tích khối tròn xoay tạo bởi hình $\mathscr{H}$ quay quanh trục Δ bằng



A. $8\sqrt{3}\pi+9\pi^2\ \left(\text{cm}^3\right)$.　　**B.** $8\sqrt{3}\pi+\dfrac{9\pi^2}{2}\ \left(\text{cm}^3\right)$.

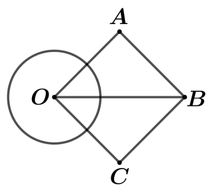
C. $32\sqrt{3}\pi+18\pi^2\ \left(\text{cm}^3\right)$.　　**D.** $16\sqrt{3}\pi+9\pi^2\ \left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 13. Cho hình vẽ bên, biết cung tròn BC nằm trên đường tròn bán kính $R=4$. Cạnh $AB=BC=CD=DA=4$. Thể tích vật tròn xoay tạo thành khi quay hình bên quanh trục AD nằm trong khoản nào sau đây?



A. $(165;170)$.　　**B.** $(160;165)$.　　**C.** $(155;160)$.　　**D.** $(150;155)$.

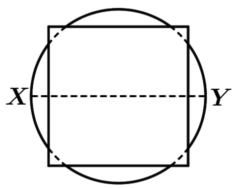
Câu 14. Cho hình tròn tâm O có bán kính $R=2$ và hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 (như hình vẽ bên). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình bên xung quanh trục là đường thẳng OB.



A. $V=\dfrac{8\left(3+4\sqrt{2}\right)\pi}{3}$.　　**B.** $V=\dfrac{8\left(2+5\sqrt{2}\right)\pi}{3}$.

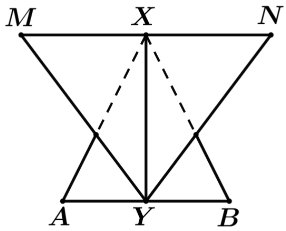
C. $V=\dfrac{8\left(3+5\sqrt{2}\right)\pi}{3}$.　　**D.** $V=\dfrac{32\left(1+\sqrt{2}\right)\pi}{3}$.

Câu 15. Cho hình vuông có độ dài cạnh bằng 8cm và một hình tròn có bán kính 5cm được xếp chồng lên nhau sao cho tâm của hình tròn trùng với tâm của hình vuông như hình vẽ bên. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay mô hình trên quanh trục XY.



A. $V=\dfrac{260\pi}{3}\text{cm}^3$. **B.** $V=\dfrac{290\pi}{3}\text{cm}^3$.　　**C.** $V=\dfrac{520\pi}{3}\text{cm}^3$.　　**D.** $V=\dfrac{580\pi}{3}\text{cm}^3$.

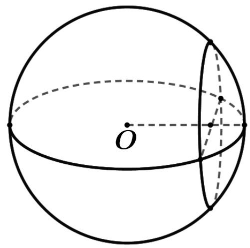
Câu 16. Cho hai tam giác cân có chung đường cao $XY = 40\text{cm}$ và cạnh đáy lần lượt là 40cm và 60cm, được xếp chồng lên nhau sao cho đỉnh của tam giác này là trung điểm cạnh đáy của tam giác kia như hình vẽ bên. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay mô hình trên quanh trục XY.



A. $V = \dfrac{40480\pi}{3}\text{cm}^3$. **B.** $V = \dfrac{52000\pi}{3}\text{cm}^3$.

C. $V = \dfrac{46240\pi}{3}\text{cm}^3$. **D.** $V = 1920\pi\text{cm}^3$.

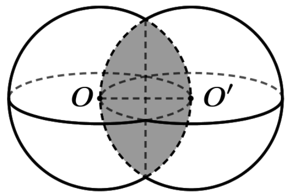
Câu 17. Cho khối cầu có bán kính R. Một mặt phẳng cắt khối cầu thành hai nửa. Nửa bé có khoảng cách từ đỉnh đến đáy bằng h (tham khảo hình vẽ bên). Tính thể tích nửa bé.



A. $V = \pi h^2\left(R - \dfrac{h}{2}\right)$. **B.** $V = \pi h^2\left(R - \dfrac{h}{3}\right)$.

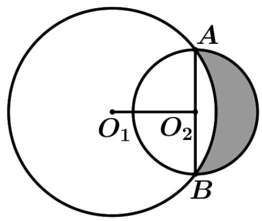
C. $V = \pi h^2\left(R - \dfrac{h}{4}\right)$. **D.** $V = \pi h^2\left(R + \dfrac{h}{3}\right)$.

Câu 18. Cho hai mặt cầu (S_1), (S_2) có cùng bán kính R thỏa mãn tính chất: tâm của (S_1) thuộc (S_2) và ngược lại. Tính thể tích phần chung V của hai khối cầu tạo bởi (S_1) và (S_2).



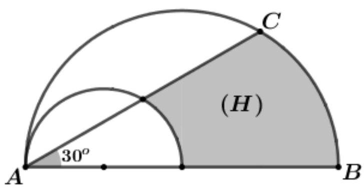
A. $V = \pi R^3$. **B.** $V = \dfrac{\pi R^3}{2}$. **C.** $V = \dfrac{2\pi R^3}{5}$. **D.** $V = \dfrac{5\pi R^3}{12}$.

Câu 19. Cho hai đường tròn $(O_1;5)$ và $(O_2;3)$ cắt nhau tại hai điểm A và B sao cho AB là một đường kính của đường tròn (O_2). Gọi $\mathscr{H}$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường tròn (ở ngoài đường tròn lớn, phần gạch chéo như hình vẽ). Quay hình $\mathscr{H}$ quanh trục O_1O_2, ta được một khối tròn xoay. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành bằng



A. $\dfrac{14\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{40\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{68\pi}{3}$. **D.** 36π.

Câu 20. Ta vẽ hai nửa đường tròn như hình vẽ bên, trong đó đường kính của nửa đường tròn lớn gấp đôi đường kính của nửa đường tròn nhỏ. Biết rằng nửa hình tròn đường kính AB có diện tích là 8π và $\widehat{BAC} = 30°$. Thể tích của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình $\mathscr{H}$ (phần tô đậm) xung quanh đường thẳng AB bằng



A. $4\pi^2$. **B.** $\frac{98}{3}\pi$. **C.** $\frac{220}{3}\pi$. **D.** $\frac{224}{3}\pi$.

Phần 6. Bài toán vận tốc

Câu 1. **(ĐỀ MINH HỌA 2016 – 2017)** Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+10(\text{m/s})$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. $0,2\text{m}$. **B.** 2m. **C.** 10m. **D.** 20m.

Câu 2. Một ô tô đang đi với vận tốc lớn hơn 72km/h, phía trước là đoạn đường chỉ cho phép chạy với tốc độ tối đa là 72km/h, vì thế người lái xe đạp phanh để ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=30-2t(\text{ m/s})$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc bắt đầu đạp phanh đến lúc đạt tốc độ 72km/h, ô tô đã di chuyển quãng đường là bao nhiêu mét?

A. 100m. **B.** 125m. **C.** 150m. **D.** 175m.

Câu 3. Hai viên đạn cùng rời khỏi nòng súng thời điểm $t=0$ với những vận tốc khác nhau: viên đạn thứ nhất có vận tốc $v_1(t)=3t^2+1\ (\text{m/s})$, viên đạn thứ hai có vận tốc $v_2(t)=2t+4\ (\text{m/s})$. Hỏi từ giây thứ mấy thì viên đạn thứ nhất xa điểm xuất phát hơn viên đạn thứ hai?

A. Giây thứ nhất. **B.** Giây thứ hai.

C. Giây thứ ba. **D.** Giây thứ tư.

Câu 4. Một ô tô đang chạy với vận tốc $10\ (\text{m/s})$ thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+10\ (\text{m/s})$, trong đó t là khoảng thời gian được tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quảng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng.

A. 16m. **B.** 25m. **C.** 50m. **D.** 55m.

Câu 5. Một vật đang chuyển động với vận tốc 6m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=\frac{3}{t+1}\text{m/s}^2$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc. Hỏi vận tốc của vật sau 10 giây gần nhất với kết quả nào sau đây?

A. $11\,\text{m/s}$. **B.** $12\,\text{m/s}$. **C.** $13\,\text{m/s}$. **D.** $14\,\text{m/s}$.

Câu 6. Một vật đang chuyển động với vận tốc 10m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=3t+t^2\left(\text{m/s}^2\right)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc. Hỏi quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc bằng bao nhiêu mét?

A. $\frac{1900}{3}\text{m}$. **B.** $\frac{2200}{3}\text{m}$. **C.** $\frac{4000}{3}\text{m}$. **D.** $\frac{4300}{3}\text{m}$.

Câu 7. Một ô tô đang chạy thẳng đều với vận tốc $v_0\,(\text{m/s})$ thì người đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + v_0\,(\text{m/s})$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn ô tô di chuyển được 40m thì vận tốc ban đầu v_0 bằng bao nhiêu?

A. $v_0 = 20\text{m/s}$. **B.** $v_0 = 25\text{m/s}$. **C.** $v_0 = 40\text{m/s}$. **D.** $v_0 = 80\text{m/s}$.

Câu 8. Tại một nơi không có gió, một chiếc khí cầu đang đứng yên ở độ cao 162m so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật $v(t) = 10t - t^2\,(\text{m/s})$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động. Hỏi lúc vừa tiếp đất, vận tốc v của khí cầu bằng bao nhiêu?

A. $v = 3\text{m/s}$. **B.** $v = 5\text{m/s}$. **C.** $v = 7\text{m/s}$. **D.** $v = 9\text{m/s}$.

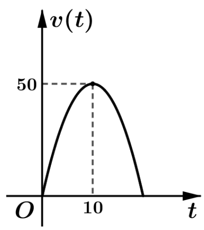
Câu 9. (ĐỀ THI CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 8 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 18m/s. **B.** 24m/s. **C.** 64m/s. **D.** 108m/s.

Câu 10. Một tàu lửa đang chạy với vận tốc $200\,\text{m/s}$ thì người lái tàu đạp phanh. Từ thời điểm đó, tàu chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(\text{t}) = 200 + at\,(\text{m/s})$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh và $a\left(\text{m/s}^2\right)$ là gia tốc. Biết rằng khi đi được 1500m thì tàu dừng, hỏi gia tốc của tàu bằng bao nhiêu?

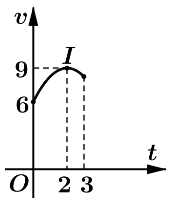
A. $a = -\frac{200}{13}\text{m/s}^2$. **B.** $a = -\frac{100}{13}\text{m/s}^2$. **C.** $a = -\frac{40}{3}\text{m/s}^2$. **D.** $a = \frac{40}{3}\left(\text{m/s}^2\right)$.

Câu 11. Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu tăng tốc với vận tốc tăng liên tục được biểu thị bằng đồ thị là đường cong Parabol có hình bên. Biết rằng sau 10s thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 50m/s và bắt đầu giảm tốc. Hỏi từ lúc bắt đầu tăng tốc đến lúc đạt vận tốc cao nhất thì xe đã đi được quãng đường bao nhiêu mét?



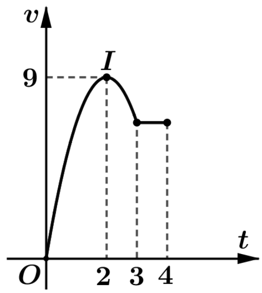
A. $\frac{1000}{3}\text{m}$. **B.** $\frac{1100}{3}\text{m}$. **C.** $\frac{1400}{3}\text{m}$. **D.** 300m.

Câu 12. Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị là một phần của đường Parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



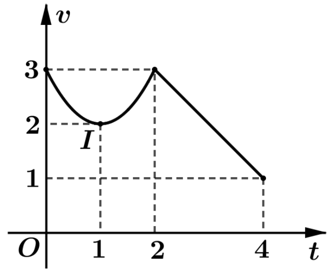
A. $s = 24,25\text{km}$. **B.** $s = 24,75\text{km}$. **C.** $s = 25,25\text{km}$. **D.** $s = 26,75\text{km}$.

Câu 13. Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường Parabol có đỉnh $I(2;9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật chuyển động trong 4 giờ đó.



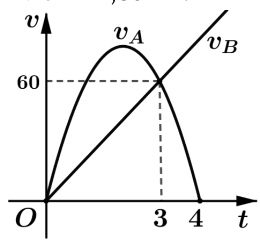
A. $s = 24\text{km}$. **B.** $s = 26,5\text{km}$. **C.** $s = 27\text{km}$. **D.** $s = 28,5\text{km}$.

Câu 14. Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc $v\ (\text{km/h})$ phụ thuộc thời gian $t\ (\text{h})$ có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 2 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường Parabol có đỉnh $I(1;2)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một phần đường thẳng. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



A. $s = 5,44\text{km}$. **B.** $s = 8,67\text{km}$. **C.** $s = 9,27\text{km}$. **D.** $s = 11,35\text{km}$.

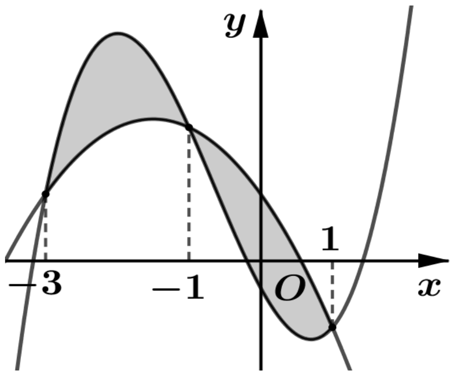
Câu 15. Cho đồ thị biểu diễn vận tốc của hai xe A và B khởi hành cùng một lúc, bên cạnh nhau và trên cùng một con đường. Biết đồ thị biểu diễn vận tốc của xe A là một đường Parabol, đồ thị biểu diễn vận tốc của xe B là một đường thẳng ở hình bên. Hỏi sau khi đi được 3 giây khoảng cách giữa hai xe là bao nhiêu mét?



A. $0\,\text{m}$. **B.** $60\,\text{m}$. **C.** $90\,\text{m}$. **D.** $270\,\text{m}$.

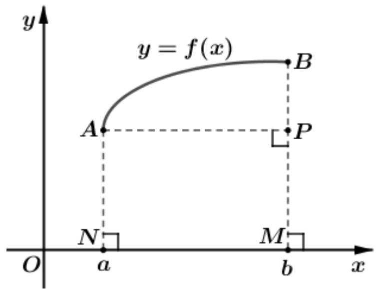
---------- **HẾT** ----------

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN



Phần 1. Áp dụng công thức

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $\int\limits_a^b f'(x)\mathrm{d}x$ là độ dài đoạn thẳng NM.

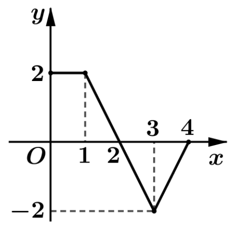
B. $\int\limits_a^b f'(x)\mathrm{d}x$ là độ dài đường cong AB.

C. $\int\limits_a^b f'(x)\mathrm{d}x$ là độ dài đoạn thẳng BP.

D. $\int\limits_a^b f'(x)\mathrm{d}x$ là diện tích hình thang cong $ABMN$.

Lời giải. Ta có $\int\limits_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(x)\Big|_a^b = f(b)-f(a) = BM - MP = BP$. **Chọn C.**

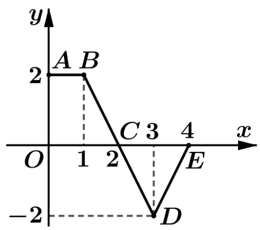
Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;4]$ và có đồ thị như hình bên. Tích phân $\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x$ bằng



A. 0. **B.** 1.

C. 5. **D.** 8.

Lời giải. Kí hiệu các điểm như trên hình vẽ.



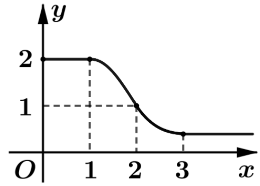
Ta có: $\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_2^4 f(x)\mathrm{d}x = S_{ABCO} - S_{CDE}$.

Diện tích hình thang $ABCO$ là: $S_{ABCO} = \dfrac{2.(1+2)}{2} = 3$.

Diện tích hình tam giác CDE là: $S_{CDE} = \dfrac{2.2}{2} = 2$

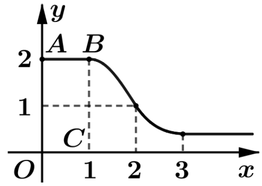
Vậy $\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x = S_{ABCO} - S_{CDE} = 3-2=1$. **Chọn B.**

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;3]$ và có đồ thị như hình bên. Biết $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 2,3$ và $F'(x)=f(x),\ \forall x\in[0;4]$. Hiệu $F(3)-F(0)$ bằng



A. 0,3. **B.** 1,3. **C.** 3,3. **D.** 4,3.

Lời giải. Kí hiệu các điểm như trên hình vẽ. Ta có

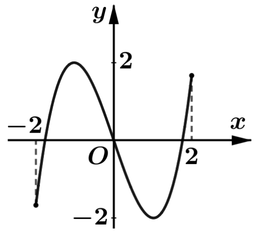


$\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x = S_{ABCO} + 2,3 = 2+2,3 = 4,3$.

Lại có $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^3 F'(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_0^3 = F(3)-F(0)$.

Suy ra $F(3)-F(0)=4{,}3$. **Chọn D.**

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-2;2]$ và có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ như hình bên. Biết $\int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x = 2$. Tích phân $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

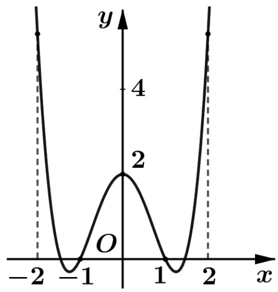


A. -2. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải. Vì đồ thị hàm số $y=f(x)$ đối xứng qua gốc tọa độ nên hàm số $y=f(x)$ là hàm số lẻ. Áp dụng tính chất hàm lẻ, ta có $\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Mà $\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 0$. Suy ra $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = -2$. **Chọn A.**

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-2;2]$ và có đồ thị đối xứng qua trục tung như hình bên. Biết $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{12}{5}$. Tích phân $\int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

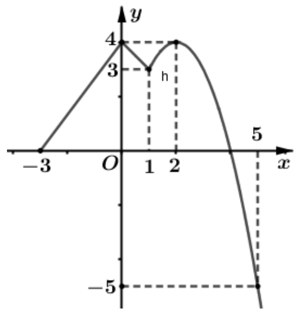


A. $\frac{12}{5}$. **B.** $\frac{24}{5}$.

C. $\frac{5}{12}$. **D.** $I=0$.

Lời giải. Vì đồ thị hàm số $y=f(x)$ đối xứng qua trục tung nên hàm số $y=f(x)$ là hàm số chẵn. Áp dụng tính chất hàm chẵn, ta có $\int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{12}{5}$. **Chọn A.**

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-3;5]$ và có đồ thị như hình bên (phần cong của đồ thị là một phần của Parabol $y=ax^2+bx+c$). Tích phân $\int_{-2}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ bằng



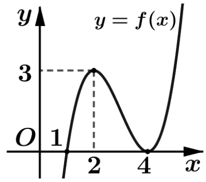
A. $\frac{43}{2}$. **B.** $\frac{53}{3}$.

C. $\frac{95}{6}$. **D.** $\frac{97}{6}$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị hàm số ta suy ra

$$\int_{-2}^{3} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0}\left(\frac{4}{3}x+4\right)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}(4-x)\mathrm{d}x + \int_{1}^{3}\left(4x-x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{97}{6}.$$ **Chọn D.**

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;4]$ và có đồ thị như hình bên. Tích phân $\int_1^4 \left|f'(x)\right|\mathrm{d}x$ bằng



A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải. Dựa vào đồ thị ta thấy:

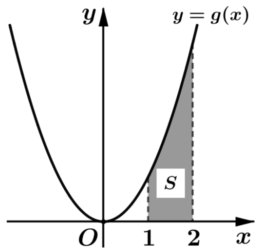
- $f(1)=f(4)=0$; $f(2)=3$.
- Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2;4)$

nên suy ra $\begin{cases} f'(x)>0 \text{ khi } 1<x<2 \\ f'(x)<0 \text{ khi } 2<x<4 \end{cases}$.

Do đó $\int_1^4 \left|f'(x)\right|\mathrm{d}x = \int_1^2 f'(x)\mathrm{d}x - \int_2^4 f'(x)\mathrm{d}x = f(x)\Big|_1^2 - f(x)\Big|_2^4$

$= f(2)-f(1)-\left[f(4)-f(2)\right]=6.$ **Chọn D.**

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=g(x)=x.f\left(x^2\right)$ có đồ thị trên đoạn $[1;2]$ như hình vẽ bên. Biết phần diện tích miền được tô màu là $S=\frac{5}{2}$, giá trị của tích phân $I=\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x$ bằng



A. $\frac{5}{4}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 5. **D.** 10.

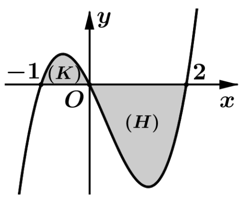
Lời giải. Diện tích phần tô màu là: $S=\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x$.

Theo giả thiết $S=\frac{5}{2} \Leftrightarrow \int_1^2 x.f\left(x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{5}{2}$.

Đặt $t=x^2 \longrightarrow \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases} x=1 \to t=1 \\ x=2 \to t=4 \end{cases}$.

Khi đó $\frac{5}{2}=\int_1^2 x.f\left(x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^4 f(t)\mathrm{d}t \longrightarrow \int_1^4 f(t)\mathrm{d}t=5$ hay $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x=5$. **Chọn C.**

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-1;2]$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình bên. Diện tích các hình phẳng $(K),(H)$ lần lượt là $\frac{5}{12}$ và $\frac{8}{3}$. Biết $f(-1)=\frac{19}{12}$, tính $f(2)$.



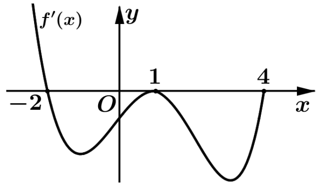
A. $f(2)=-\dfrac{2}{3}$. **B.** $f(2)=\dfrac{2}{3}$. **C.** $f(2)=\dfrac{11}{6}$. **D.** $f(2)=3$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị ta thấy: $\int\limits_{-1}^{2} f'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0} f'(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2} f'(x)\mathrm{d}x=\dfrac{5}{12}-\dfrac{8}{3}=-\dfrac{9}{4}$.

Mặt khác: $\int\limits_{-1}^{2} f'(x)\mathrm{d}x=f(x)\Big|_{-1}^{2}=f(2)-f(-1)=f(2)-\dfrac{19}{12}$.

Từ đó suy ra $f(2)-\dfrac{19}{12}=-\dfrac{9}{4}\longrightarrow f(2)=-\dfrac{9}{4}+\dfrac{19}{12}=-\dfrac{2}{3}$. **Chọn A.**

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-2;4]$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình bên. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục Ox và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ và $[1;4]$ lần lượt bằng 9 và 12. Cho $f(1)=3$. Tổng $f(-2)+f(4)$ bằng



A. 2. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 21.

Lời giải. Theo giả thiết, ta có $\int\limits_{-2}^{1} f'(x)\mathrm{d}x=-9$ và $\int\limits_{1}^{4} f'(x)\mathrm{d}x=-12$.

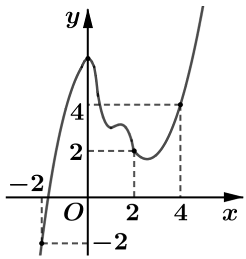
- $\int\limits_{-2}^{1} f'(x)\mathrm{d}x=-9\Leftrightarrow f(1)-f(-2)=-9\Leftrightarrow 3-f(-2)=-9\longrightarrow f(-2)=12$.
- $\int\limits_{1}^{4} f'(x)\mathrm{d}x=-12\Leftrightarrow f(4)-f(1)=-12\Leftrightarrow f(4)-3=-12\longrightarrow f(4)=-9$.

Vậy $f(-2)+f(4)=12+(-9)=3$. **Chọn B.**

Phần 2. Đồ thị hàm $f(x)$.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Giá trị của biểu thức

$$\int\limits_{0}^{4} f'(x-2)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2} f'(x+2)\mathrm{d}x \text{ bằng}$$



A. -2. **B.** 2.
C. 6. **D.** 10.

Lời giải. Ta có $\int\limits_{0}^{4} f'(x-2)\mathrm{d}x\overset{t=x-2}{=}\int\limits_{-2}^{2} f'(t)\mathrm{d}t$ và $\int\limits_{0}^{2} f'(x+2)\mathrm{d}x\overset{t=x+2}{=}\int\limits_{2}^{4} f'(t)\mathrm{d}t$.

Khi đó $\int\limits_{0}^{4} f'(x-2)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2} f'(x+2)\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{2} f'(t)\mathrm{d}t+\int\limits_{2}^{4} f'(t)\mathrm{d}t=\int\limits_{-2}^{4} f'(t)\mathrm{d}t$

$=f(t)\Big|_{-2}^{4}=f(4)-f(-2)=4-(-2)=6$. **Chọn C.**

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $[0;2]$ và có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để thỏa mãn điều kiện $\int_0^2 [f(x)-m]\,dx=0$?

x	0		1		2
f'		+	0	$-$	
f	-5	$\nearrow$	7	$\searrow$	-3

A. 11. **B.** 12. **C.** 13. **D.** 14.

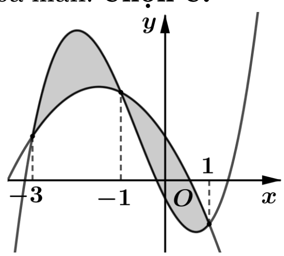
Lời giải: Dựa vào bảng biến thiên ta có

$$\begin{cases}\max\limits_{x\in[0;2]} f(x)=7\\ \min\limits_{x\in[0;2]} f(x)=-5\end{cases} \Rightarrow \int_0^2(-5)\,dx \le \int_0^2 f(x)\,dx \le \int_0^2 7\,dx \text{ hay } -10\le \int_0^2 f(x)\,dx \le 14.$$

Từ giả thiết $\int_0^2 [f(x)-m]\,dx=0 \Leftrightarrow 2m=\int_0^2 f(x)\,dx$. Do đó để phương trình có nghiệm

$\Leftrightarrow -10\le 2m\le 14 \Leftrightarrow -5\le m\le 7$. Vậy có 13 giá trị m nguyên thỏa mãn. **Chọn C.**

Câu 3. Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-\dfrac{1}{2}$ và $g(x)=dx^2+ex+1$ $(a,\,b,\,c,\,d,\,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-3;-1;1$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. 4. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** 5. **D.** 8.

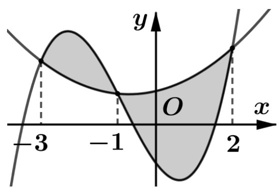
Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f(x)$ và $g(x)$ là

$$ax^3+bx^2+cx-\frac{1}{2}=dx^2+ex+1 \Leftrightarrow ax^3+(b-d)x^2+(c-d)x-\frac{3}{2}=0\ (*).$$

Do đồ thị của hai hàm số cắt nhau tại ba điểm suy ra phương trình $(*)$ có ba nghiệm là $-3;-1;1$. Ta được $a(x+3)(x+1)(x-1)=ax^3+(b-d)x^2+(c-d)x-\dfrac{3}{2}$. Đồng nhất hai vế ta suy ra $-3a=-\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$.

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $\displaystyle\int_{-3}^{1}\frac{1}{2}\left|(x+3)(x+1)(x-1)\right|dx=4$. **Chọn A.**

Câu 4. Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-1$ và $g(x)=dx^2+ex+\dfrac{1}{2}$ $(a,\,b,\,c,\,d,\,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt $-3;-1;2$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

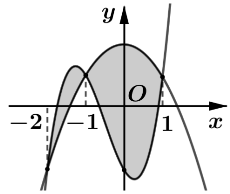


A. $\frac{125}{12}$. **B.** $\frac{253}{12}$. **C.** $\frac{125}{48}$. **D.** $\frac{253}{48}$.

Lời giải. Tương tự như bài trên ta được $a=\frac{1}{4}$.

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $\int\limits_{-3}^{2}\frac{1}{4}\left|(x+3)(x+1)(x-2)\right|\mathrm{d}x=\frac{253}{48}$. **Chọn D.**

Câu 5. Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-2$ và $g(x)=dx^2+ex+2$ $(a,\,b,\,c,\,d,\,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-2;-1;1$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

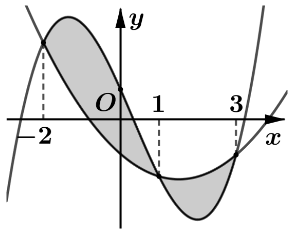


A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{13}{2}$. **C.** $\frac{37}{6}$. **D.** $\frac{37}{12}$.

Lời giải. Tương tự như bài trên ta được $a=2$.

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $\int\limits_{-2}^{1}\left|2(x+2)(x+1)(x-1)\right|\mathrm{d}x=\frac{37}{6}$. **Chọn C.**

Câu 6. Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+\frac{3}{4}$ và $g(x)=dx^2+ex-\frac{3}{4}$ $(a,\,b,\,c,\,d,\,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-2;1;3$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

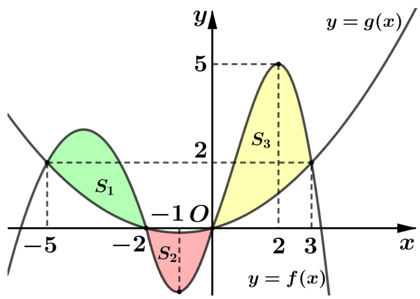


A. $\frac{125}{24}$. **B.** $\frac{253}{24}$. **C.** $\frac{125}{48}$. **D.** $\frac{253}{48}$.

Lời giải. Tương tự như bài trên ta được $a=\frac{1}{4}$.

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $\int\limits_{-2}^{3}\frac{1}{4}\left|(x+2)(x-1)(x-3)\right|\mathrm{d}x=\frac{253}{48}$. **Chọn D.**

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5;3]$ và có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng diện tích hình phẳng $S_1,\,S_2,\,S_3$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường cong $y=g(x)=ax^2+bx+c$ lần lượt là $m,\,n,\,p$.



Tích phân $\int\limits_{-5}^{3}f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $m-n+p-\frac{208}{45}$. **B.** $m-n+p+\frac{208}{45}$.

C. $-m+n-p-\dfrac{208}{45}$. **D.** $-m+n-p+\dfrac{208}{45}$.

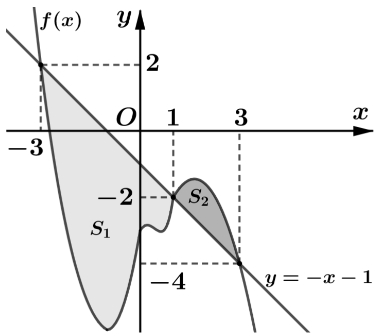
Lời giải. Đồ thị hàm $y=g(x)=ax^2+bx+c$ đi qua các điểm $O(0;0)$, $A(-2;0)$, $B(3;2)$ nên suy ra $g(x)=\dfrac{2}{15}x^2+\dfrac{4}{15}x$.

Dựa vào đồ thị, ta có

$$m-n+p=\int_{-5}^{-2}[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x-\int_{-2}^{0}[g(x)-f(x)]\mathrm{d}x+\int_{0}^{3}[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-5}^{3}f(x)\mathrm{d}x-\int_{-5}^{3}g(x)\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\displaystyle\int_{-5}^{3}f(x)\mathrm{d}x=m-n+p+\int_{-5}^{3}g(x)\mathrm{d}x=m-n+p+\frac{208}{45}$. **Chọn B.**

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-3;3]$ và có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2 giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=-x-1$ lần lượt là M; m. Tích phân $\displaystyle\int_{-3}^{3}f(x)\mathrm{d}x$ bằng



A. $6+m-M$. **B.** $6-m-M$.
C. $M-m+6$. **D.** $m-M-6$.

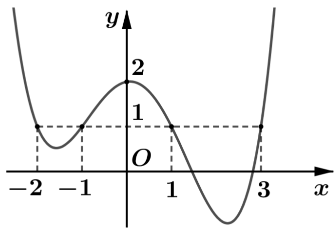
Lời giải. Ta có $\displaystyle M=\int_{-3}^{1}[-x-1-f(x)]\mathrm{d}x=\int_{-3}^{1}(-x-1)\mathrm{d}x-\int_{-3}^{1}f(x)\mathrm{d}x=0-\int_{-3}^{1}f(x)\mathrm{d}x$;

$$m=\int_{1}^{3}[f(x)-(-x-1)]\mathrm{d}x=\int_{1}^{3}f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}(x+1)\mathrm{d}x=\int_{1}^{3}f(x)\mathrm{d}x+6.$$

Suy ra $\displaystyle m-M=\int_{1}^{3}f(x)\mathrm{d}x+6+\int_{-3}^{1}f(x)\mathrm{d}x=6+\int_{-3}^{3}f(x)\mathrm{d}x$.

Suy ra $\displaystyle\int_{-3}^{3}f(x)\mathrm{d}x=m-M-6$. **Chọn D.**

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Đặt $\displaystyle K=\int_{0}^{1}x.f(x).f'(x)\mathrm{d}x$, khi đó K thuộc khoảng nào sau đây?



A. $(-3;-2)$. **B.** $\left(-2;-\dfrac{3}{2}\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{2}{3}\right)$. **D.** $\left(-\dfrac{2}{3};0\right)$.

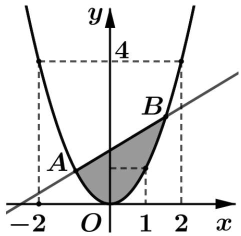
Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f(x).f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{f^2(x)}{2} \end{cases}$.

Khi đó $K = \int_0^1 x.f(x).f'(x)dx = \dfrac{xf^2(x)}{2}\Big|_0^1 - \dfrac{1}{2}\int_0^1 f^2(x)dx = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\int_0^1 f^2(x)dx.$

Từ đồ thị, ta thấy:

- $f(x) > 2 - x,\ \forall x \in [0;1] \Rightarrow \int_0^1 \dfrac{f^2(x)}{2}dx > \int_0^1 \dfrac{(2-x)^2}{2}dx = \dfrac{7}{6} \Rightarrow K = \dfrac{1}{2} - \int_0^1 \dfrac{f^2(x)}{2}dx < -\dfrac{2}{3}.$
- $f(x) < 2,\ \forall x \in [0;1] \Rightarrow \int_0^1 \dfrac{f^2(x)}{2}dx > \int_0^1 2\,dx = 2 \Rightarrow K = \dfrac{1}{2} - \int_0^1 \dfrac{f^2(x)}{2}dx > -\dfrac{3}{2}.$ **Chọn C.**

Câu 10*. Cho Parabol $(P): y = x^2$. Hai điểm A, B di động trên (P) sao cho $AB = 2$. Khi diện tích phần mặt phẳng giới hạn bởi (P) và cát tuyến AB đạt giá trị lớn nhất thì hai điểm A, B có tọa độ xác định $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$. Giá trị của biểu thức $T = x_A^2 x_B^2 + y_A^2 y_B^2$ bằng



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải. Do $A, B \in (P)$ nên giả sử $A(a;a^2)$, $B(b;b^2)$ với $b > a$.

Phương trình đường thẳng $AB: \dfrac{x-a}{b-a} = \dfrac{y-a^2}{b^2-a^2}$ hay $y = (a+b)x - ab$.

Ta có $AB = 2 \Leftrightarrow (b-a)^2 + (b^2-a^2)^2 = 4 \Leftrightarrow (b-a)^2\left[4 + (b+a)^2\right] = 4$

$$\Leftrightarrow (b-a)^2 = \frac{4}{1+(b+a)^2} \le 4. \text{ Suy ra } b - a \le 2.$$

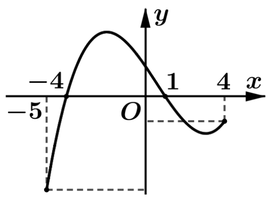
Ta có $S = \int_a^b \left[(a+b)x - ab - x^2\right]dx = \left[\dfrac{1}{2}(a+b)x^2 - abx - \dfrac{1}{3}x^3\right]\Big|_a^b$

$$= \left[\frac{1}{2}(a+b)b^2 - ab^2 - \frac{1}{3}b^3\right] - \left[\frac{1}{2}(a+b)a^2 - a^2b - \frac{1}{3}a^3\right] = \frac{1}{6}(b-a)^3 \le \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} b - a = 2 \\ b + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow A(-1;1), B(1;1) \Rightarrow T = 2.$ **Chọn B.**

Phần 3. Đồ thị hàm $f'(x)$.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hình bên là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[-5;4]$. Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên $[-5;4]$ là



A. $f(-5)$. **B.** $f(-4)$.

C. $f(1)$. **D.** $f(4)$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$, ta suy ra bảng biến thiên như hình bên. Khi đó:

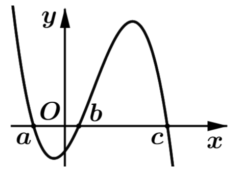
$$\min_{x\in[-5;4]} f(x)=\min\{f(-4);\, f(4)\}.$$

x	-5		-4		1		4
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$f(-5)$	↘		↗	$f(1)$	↘	
			$f(-4)$				$f(4)$

Dựa vào đồ thị $f'(x)$, ta có $\int\limits_{-4}^{4} f'(x)\mathrm{d}x>0$.

Suy ra $f(4)>f(-4)$. Vậy $\min\limits_{x\in[-5;4]} f(x)=f(-4)$. **Chọn B.**

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm có hoành độ $a,\, b,\, c$ (hình bên). Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $f(c)>f(a)>f(b)$. **B.** $f(a)>f(c)>f(b)$.

C. $f(b)>f(c)>f(a)$. **D.** $f(a)>f(b)>f(c)$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$, ta suy ra bảng biến thiên như hình bên. Khi đó:

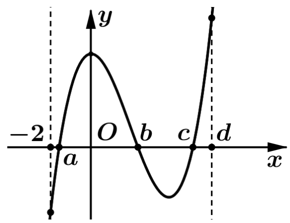
$$\min\{f(a);\, f(b);\, f(c)\}=f(b).$$

x	a		b		c
f'		$-$	0	$+$	
f	$f(a)$	↘		↗	$f(c)$
			$f(b)$		

Dựa vào đồ thị $f'(x)$, ta có $\int\limits_{a}^{c} f'(x)\mathrm{d}x>0$.

Suy ra $f(c)>f(a)$. Vậy $f(c)>f(a)>f(b)$. **Chọn A.**

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hình bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2;d]$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;d]$ lần lượt là



A. $f(a)$ và $f(b)$. **B.** $f(a)$ và $f(-2)$.

C. $f(c)$ và $f(b)$. **D.** $f(c)$ và $f(d)$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$, ta suy ra bảng biến thiên

x	-2		a		b		c		d
f'	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
f	$f(-2)$	↘		↗	$f(b)$	↘		↗	$f(d)$
			$f(a)$				$f(c)$		

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $m=\min\{f(a);f(c)\}$, $M=\max\{f(-2);f(b);f(d)\}$.

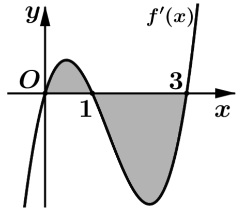
Dựa vào đồ thị $f'(x)$, ta có

- $\int\limits_{a}^{c} f'(x)\mathrm{d}x>0 \Leftrightarrow f(x)\Big|_{a}^{c}>0 \Leftrightarrow f(c)-f(a)>0 \Leftrightarrow f(c)>f(a)$.

- $\int_{-2}^{b} f'(x)\mathrm{d}x > 0 \longrightarrow f(b) > f(-2)$ và $\int_{b}^{d} f'(x)\mathrm{d}x < 0 \longrightarrow f(b) > f(d)$.

Vậy $m = f(a)$, $M = f(b)$. **Chọn A.**

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Miền hình phẳng trong hình vẽ được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và trục hoành đồng thời có diện tích $S = a$. Biết rằng $\int_0^1 (x+1)f'(x)\mathrm{d}x = b$ và $f(3) = c$. Tính $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.



A. $I = a - b + c$. **B.** $I = -a + b - c$. **C.** $I = -a + b + c$. **D.** $I = a - b - c$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$.

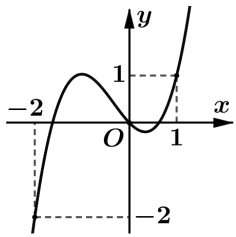
Khi đó $b = \int_0^1 (x+1)f'(x)\mathrm{d}x = (x+1)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2f(1) - f(0) - I$.

Mặt khác, ta có $a = S = \int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x - \int_1^3 f'(x)\mathrm{d}x = f(1) - f(0) - [f(3) - f(1)]$

$$= 2f(1) - f(0) - f(3) = 2f(1) - f(0) - c.$$

Suy ra $2f(1) - f(0) = a + c$. Vậy $I = 2f(1) - f(0) - b = a + c - b$. **Chọn A.**

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[-2;1]$. Hình bên là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$. Đặt $g(x) = f(x) - \dfrac{x^2}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

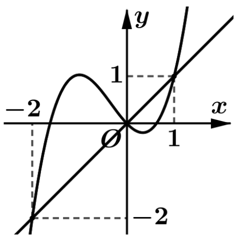


A. $g(-2) < g(1) < g(0)$. **B.** $g(1) < g(-2) < g(0)$.

C. $g(0) < g(1) < g(-2)$. **D.** $g(0) < g(-2) < g(1)$.

Lời giải. Ta có $g'(x) = f'(x) - x$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x$. Suy ra nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = x$. Dựa vào đồ thị ta thấy đường $y = x$ cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tại các điểm có hoành độ -2; 0; 1 (tham khảo hình vẽ)

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$g(-2)$	$\nearrow$	$g(0)$	$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	

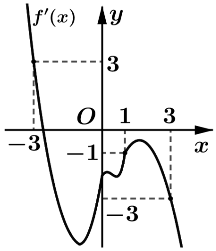


Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $\max\{g(-2);\ g(1);\ g(0)\} = g(0)$.

Dựa vào đồ thị, ta có $\int_{-2}^{0}[f'(x) - x]\mathrm{d}x > \int_0^1 [x - f'(x)]\mathrm{d}x$ hay $\int_{-2}^{0} g'(x)\mathrm{d}x > -\int_0^1 g'(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow g(0)-g(-2)>g(0)-g(1)\Leftrightarrow g(-2)<g(1)$. **Chọn A.**

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[-3;3]$. Hình bên là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$. Đặt $g(x)=2f(x)+x^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

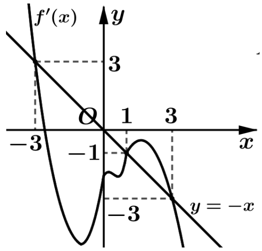


A. $g(3)<g(-3)<g(1)$. **B.** $g(-3)<g(3)<g(1)$.

C. $g(1)<g(3)<g(-3)$. **D.** $g(1)<g(-3)<g(3)$.

Lời giải. Ta có $g'(x)=2f'(x)+2x$; $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=-x$. Ta thấy đường thẳng $y=-x$ cắt đồ thị hàm số $y=f'(x)$ tại các điểm có hoành độ -3; 1; 3.

x	-3		1		3
g'		$-$	0	$+$	
g	$g(-3)$	$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	$g(3)$

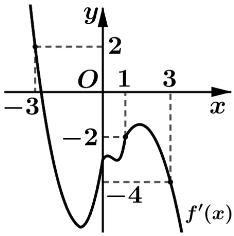


Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $\min\{g(-3);\, g(1);\, g(3)\}=g(1)$.

Dựa vào đồ thị, ta có $\int_{-3}^{3} g'(x)\mathrm{d}x=\int_{-3}^{3}[2f'(x)+2x]\mathrm{d}x<0$. Suy ra $g(3)<g(-3)$.

Vậy $g(1)<g(3)<g(-3)$. **Chọn C.**

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[-3;3]$. Hình bên là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$. Đặt $g(x)=2f(x)+(x+1)^2$. Gọi m là số thực thỏa mãn $\int_{-3}^{3}\left[\frac{m}{3}-g(x)\right]\mathrm{d}x=0$. Khẳng định nào sau đây đúng?



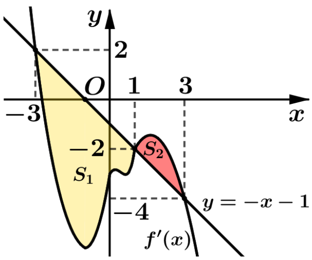
A. $6g(1)<m<g(-3)$. **B.** $6g(1)<m<6g(-3)$.

C. $3g(1)<m<3g(-3)$. **D.** $-3g(1)<m<3g(-3)$.

Lời giải. Từ giả thiết $\int_{-3}^{3}\left[\frac{m}{3}-g(x)\right]\mathrm{d}x=0$, suy ra $2m=\int_{-3}^{3} g(x)\mathrm{d}x$.

Ta có $g'(x)=2f'(x)+2x+2$; $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=-x-1$. Ta thấy đường $y=-x-1$ cắt đồ thị hàm số $y=f'(x)$ tại các điểm có hoành độ -3; 1; 3.

x	-3		1		3
g'		$-$	0	$+$	
g	$g(-3)$	$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	$g(3)$



Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $\min\{g(-3);\, g(1);\, g(3)\} = g(1)$.

Dựa vào đồ thị, ta có $S_1 > S_2 \Leftrightarrow \int\limits_{-3}^{1}\left[-x-1-f'(x)\right]\mathrm{d}x > \int\limits_{1}^{3}\left[f'(x)+x+1\right]\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow 2\int\limits_{-3}^{1}\left[-x-1-f'(x)\right]\mathrm{d}x > 2\int\limits_{1}^{3}\left[f'(x)+x+1\right]\mathrm{d}x$$

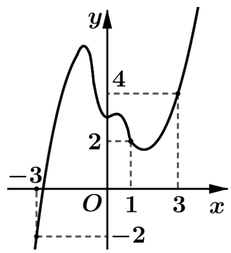
$$\Leftrightarrow -\int\limits_{-3}^{1} g'(x)\,\mathrm{d}x > \int\limits_{1}^{3} g'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow -\left[g(1)-g(-3)\right] > g(3)-g(1) \Leftrightarrow g(-3) > g(3).$$

Suy ra $\begin{cases} \min\limits_{[-3;3]} g(x) = g(1) \\ \max\limits_{[-3;3]} g(x) = g(-3) \end{cases} \longrightarrow g(1) \le g(x) \le g(-3),\ \forall x \in [-3;3]$.

Suy ra $6g(1) \le \int\limits_{-3}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x \le 6g(-3) \xrightarrow{2m=\int_{-3}^{3} g(x)\mathrm{d}x} 3g(1) \le m \le 3g(-3)$. **Chọn C.**

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[-3;3]$. Hình bên là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$. Biết $f(1)=6$ và $g(x)=f(x)-\dfrac{(x+1)^2}{2}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. Phương trình $g(x)=0$ không có nghiệm thuộc $[-3;3]$.

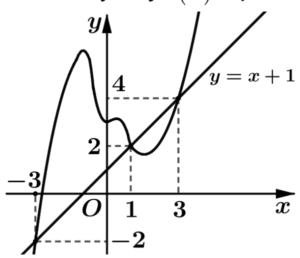
B. Phương trình $g(x)=0$ có đúng một nghiệm thuộc $[-3;3]$.

C. Phương trình $g(x)=0$ có đúng hai nghiệm thuộc $[-3;3]$.

D. Phương trình $g(x)=0$ có đúng ba nghiệm thuộc $[-3;3]$.

Lời giải. Từ giả thiết $f(1)=6 \longrightarrow g(1)=4$.

Ta có $g'(x)=f'(x)-(x+1)$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x+1$. Ta thấy đường thẳng $y=x+1$ cắt đồ thị hàm số $y=f'(x)$ tại các điểm có hoành độ $-3;\ 1;\ 3$.



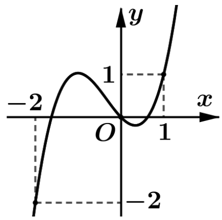
x	-3		1		3
g'		$+$	0	$-$	
g	$g(-3)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$g(3)$

Dựa vào đồ thị, ta có

- $\int\limits_{-3}^{1}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x > 4 \Leftrightarrow \int\limits_{-3}^{1} g'(x)\,\mathrm{d}x > 4 \Leftrightarrow g(1)-g(-3) > 4 \longrightarrow g(-3) < 0.$
- $\int\limits_{1}^{3}\left[(x+1)-f'(x)\right]\mathrm{d}x < 4 \Leftrightarrow -\int\limits_{1}^{3} g'(x)\,\mathrm{d}x < 4 \Leftrightarrow -\left[g(3)-g(1)\right] < 4 \longrightarrow g(3) > 0.$

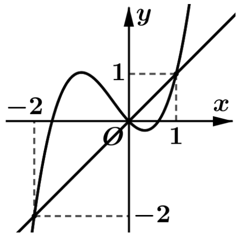
Từ BBT suy ra phương trình $g(x)=0$ có đúng một nghiệm thuộc $[-3;3]$. **Chọn B.**

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[-2;1]$. Hình bên là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$. Đặt $g(x)=f(x)-\frac{x^2}{2}$. Điều kiện cần và đủ để phương trình $g(x)=0$ có bốn nghiệm phân biệt là



A. $\begin{cases} g(0)>0 \\ g(1)<0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} g(0)<0 \\ g(1)<0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} g(0)>0 \\ g(-2)<0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} g(0)>0 \\ g(1)>0 \\ g(-2)<0 \end{cases}$.

Lời giải. Ta có $g'(x)=f'(x)-x$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x$. Ta thấy đường thẳng $y=x$ cắt đồ thị hàm số $y=f'(x)$ tại các điểm có hoành độ -2; 0; 1.



Dựa vào đồ thị, ta có $\int_{-2}^{0}[f'(x)-x]\mathrm{d}x > \int_{0}^{1}[x-f'(x)]\mathrm{d}x$

hay $\int_{-2}^{0} g'(x)\mathrm{d}x > -\int_{0}^{1} g'(x)\mathrm{d}x$

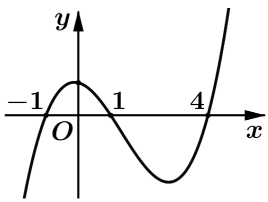
$$\Leftrightarrow g(0)-g(-2) > -[g(1)-g(0)] \Leftrightarrow g(-2)<g(1).$$

Từ đó ta có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		↘	$g(-2)$	↗	$g(0)$	↘	$g(1)$	↗	

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra đồ thị hàm số $y=g(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} g(0)>0 \\ g(1)<0 \end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(x^2)$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng



A. $f(1)+f(0)$. **B.** $f(4)+f(0)$.

C. $f(1)+f(4)$. **D.** $f(1)+f(0)-f(4)$.

Lời giải. Ta có $g'(x)=2xf'(x^2)$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2)=0 \end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị ta suy ra $f'(x^2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=-1 \\ x^2=1 \\ x^2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$.

x	-2		-1		0		1		2
g'	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
g	$f(4)$	↗	$f(1)$	↘	$f(0)$	↗	$f(1)$	↘	$f(4)$

• Dựa vào bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{[-2;2]} g(x) = f(1)$.

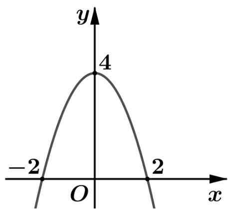
• Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$, ta thấy $\int\limits_0^4 f'(x)\mathrm{d}x < 0 \Leftrightarrow f(x)\Big|_0^4 < 0 \Leftrightarrow f(4) - f(0) < 0$

$\Leftrightarrow f(4) < f(0)$. Kết hợp với bảng biến thiên ta suy ra $\min\limits_{[-2;2]} g(x) = f(4)$.

Vậy $\max\limits_{[-2;2]} g(x) + \min\limits_{[-2;2]} g(x) = f(1) + f(4)$. **Chọn C.**

Phần 4. Diện tích hình phẳng

Câu 1. Cho Parabol như hình vẽ bên. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và trục hoành bằng



A. 16. **B.** $\dfrac{16}{3}$.

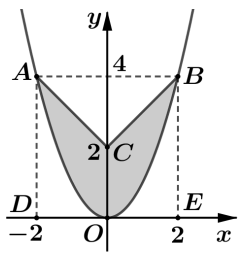
C. $\dfrac{28}{3}$. **D.** $\dfrac{32}{3}$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị, ta xác đinh được phương trình của $(P): y = -x^2 + 4$.

Khi đó diện tích hình phẳng cần tính bằng: $S = \int\limits_{-2}^{2} \left(-x^2 + 4\right)\mathrm{d}x = \dfrac{32}{3}$. **Chọn D.**

Cách 2. Áp dụng công tính nhanh $S = \dfrac{2}{3}Bh = \dfrac{2}{3}.4.4 = \dfrac{32}{3}$ (với $B = 4$ là chiều dài của đáy, $h = 4$ là chiều cao).

Câu 2. Tính diện tích hình phẳng được tô đậm ở hình bên.



A. $S = \dfrac{10}{3}$. **B.** $S = \dfrac{20}{3}$.

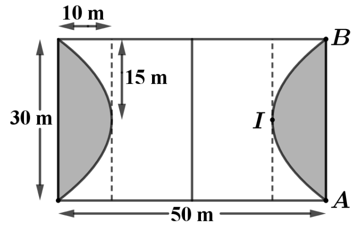
C. $S = \dfrac{25}{6}$. **D.** $S = 9$.

Lời giải. Áp dụng công thức tính nhanh, ta có diện tích miền khép kín giới hạn bởi Parabol và đường $y = 4$ là $S_{AOB} = \dfrac{2}{3}Bh = \dfrac{2}{3}.4.4 = \dfrac{32}{3}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = 4$.

Suy ra diện tích phần tô đậm $S = S_{AOB} - S_{\triangle ABC} = \dfrac{20}{3}$. **Chọn B.**

Câu 3. Ông An xây dựng một sân bóng đá mini hình chữ nhật có chiều rộng 30 m và chiều dài 50 m. Để giảm bớt chi phí cho việc trồng cỏ nhân tạo, ông An chia sân bóng ra làm hai phần (tô đen và không tô đen) như hình bên. Phần tô đen gồm hai miền diện tích bằng nhau và đường cong AIB là một Parabol đỉnh I.



Phần tô đen được trồng cỏ nhân tạo với giá cỏ nhân tạo với giá $130000\text{ đồng}/\text{m}^2$ và phần còn lại được trồng cỏ nhân tạo với giá $90000\text{ đồng}/\text{m}^2$. Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền để trồng cỏ nhân tạo cho sân bóng?

A. 135 triệu đồng. **B.** 151 triệu đồng.

C. 165 triệu đồng. **D.** 195 triệu đồng.

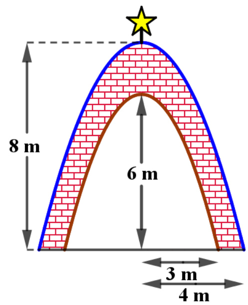
Lời giải. Diện tích hình chữ nhật: $S_0 = 30 \times 50 = 1500\text{ m}^2$.

Diện tích hai phần tô đen: $S_1 = 2 \times \frac{2}{3} Bh = 2 \times \frac{2}{3}.30.10 = 400\text{ m}^2$.

Suy ra diện tích phần không tô đen: $S_2 = S_0 - S_1 = 1100\text{ m}^2$.

Vậy tổng chi phí: $T = 130000.S_1 + 90000.S_2 = 151000000$ đồng. **Chọn B.**

Câu 4. Nhà ông An cần sơn mặt trước của cổng có dạng như hình bên, các đường cong có dạng là Parabol với các kích thước được cho như hình. Biết giá thuê nhân công là $100.000\text{ đồng}/\text{m}^2$. Hỏi ông An phải trả cho bên thi công bao nhiêu tiền để sơn cổng?



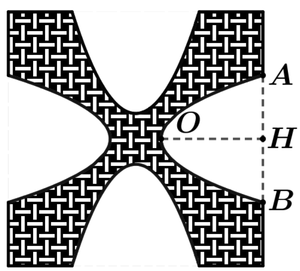
A. 2468650 đồng. **B.** 1866667 đồng.

C. 1775361 đồng. **D.** 1668653 đồng.

Lời giải. Công thức tính nhanh, ta có diện tích cần sơn: $S = \frac{2}{3}.(8.8 - 6.6) = \frac{56}{3}\text{ m}^2$.

Vậy số tiền cần phải trả: $100000.\frac{56}{3} \approx 1866667$ (đồng). **Chọn B.**

Câu 5. Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh 10 cm bằng cách khoét bỏ đi bốn phần bằng nhau có hình dạng Parabol (như hình vẽ). Biết $AB = 5\text{ cm}$, $OH = 4\text{ cm}$. Diện tích bề mặt hoa văn đó bằng



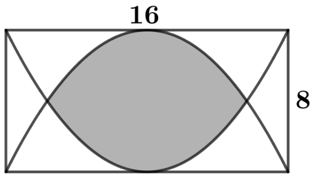
A. $\frac{40}{3}\text{ cm}^2$. **B.** $\frac{140}{3}\text{ cm}^2$.

C. $\frac{160}{3}\text{ cm}^2$. **D.** 50 cm^2.

Lời giải. Diện tích hình vuông: $S_0 = 10^2 = 100\text{ cm}^2$.

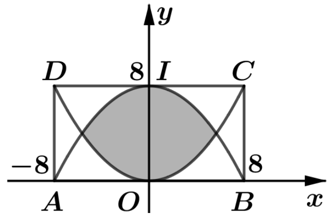
Diện tích của bốn hình Parabol được khoét bỏ là: $S_1 = 4\left(\frac{2}{3}Bh\right) = 4\left(\frac{2}{3}.5.4\right) = \frac{160}{3}\text{ cm}^2$.

Suy ra diện tích bề mặt hoa văn là: $S_2 = S_0 - S_1 = 100 - \dfrac{160}{3} = \dfrac{140}{3}\,\text{cm}^2$. **Chọn B.**



Câu 6. Một mảnh vườn toán học có dạng hình chữ nhật, chiều dài là 16 m và chiều rộng là 8 m. Các nhà Toán học dùng hai đường Parabol, mỗi Parabol có đỉnh là trung điểm của một cạnh dài và đi qua hai mút của cạnh đối diện, phần mảnh vườn nằm ở miền trong của cả hai Parabol (phần tô đậm như hình vẽ) được trồng hoa hồng. Biết chi phí để trồng hoa hồng là 45000 đồng/m^2. Hỏi các nhà Toán học phải chi bao nhiêu tiền để trồng hoa trên phần mảnh vườn đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).

A. 1920000 đồng. **B.** 2159000 đồng. **C.** 2715000 đồng. **D.** 3322000 đồng.



Lời giải. Chọn hệ trục tọa độ Oxy và gọi tên các đỉnh như hình vẽ bên. Dễ dàng xác định được

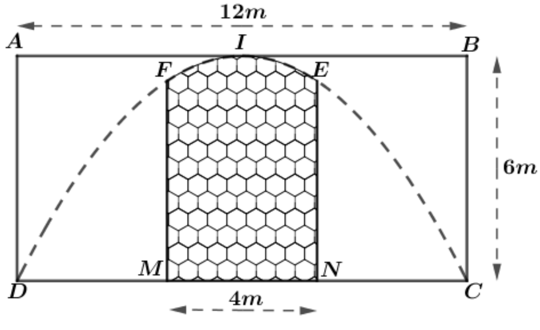
- Parabol đi qua ba điểm A, I, B là $(P): y = -\dfrac{1}{8}x^2 + 8$.
- Parabol đi qua ba điểm C, O, D là $(P'): y = \dfrac{1}{8}x^2$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $-\dfrac{1}{8}x^2 + 8 = \dfrac{1}{8}x^2 \Leftrightarrow x = \pm 4\sqrt{2}$.

Suy ra diện tích trồng hoa là: $S = \displaystyle\int_{-4\sqrt{2}}^{4\sqrt{2}} \left| -\dfrac{1}{8}x^2 + 8 - \dfrac{1}{8}x^2 \right| \mathrm{d}x = \dfrac{128\sqrt{2}}{3}\left(\text{m}^2\right)$.

Vậy chi phí trồng hoa là: $T = 45000.S = 45000.\dfrac{128\sqrt{2}}{3} \approx 2715000$ đồng. **Chọn C.**

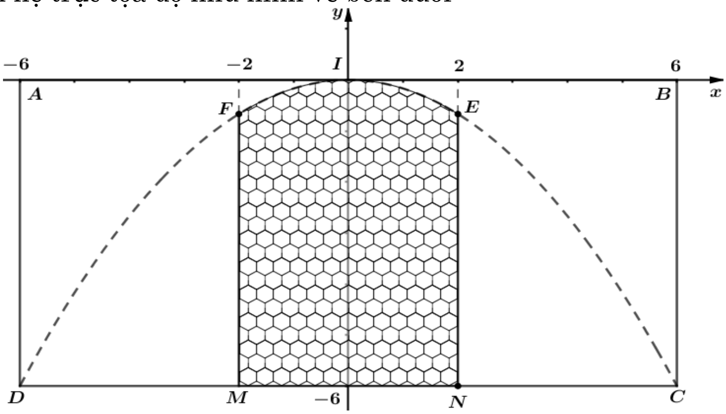
Câu 7. Một công ty quảng cáo muốn làm một bức tranh trang trí hình $MNEIF$ ở chính giữa của một bức tường hình chữ nhật $ABCD$ có chiều cao $BC = 6$ m, chiều dài $CD = 12$ m (hình vẽ bên). Cho biết $MNEF$ là hình chữ nhật có $MN = 4$ m; cung EIF có hình dạng là một phần của cung Parabol có đỉnh I là trung điểm của cạnh AB và đi qua hai điểm C, D. Kinh phí làm bức tranh là 900.000 đồng/m^2. Hỏi công ty cần bao nhiêu tiền để làm bức tranh đó?



A. $20.400.000$ đồng. **B.** $20.600.000$ đồng.

C. $20.800.000$ đồng. **D.** $21.200.000$ đồng.

Lời giải. Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ bên dưới



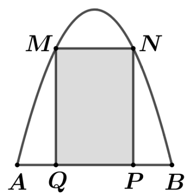
Dễ dàng xác định được Parabol đi qua ba điểm D, F, I, E, C là $(P): y=-\dfrac{x^2}{6}$.

Hai điểm M, F nằm trên đường thẳng $x=-2$; N, E nằm trên đường thẳng $x=2$.

Khi đó diện tích hình $MNEIF$ là: $S_{MNEIF}=\int\limits_{-2}^{2}\left(-\dfrac{x^2}{6}+6\right)\mathrm{d}x=\dfrac{208}{9}$ m^2.

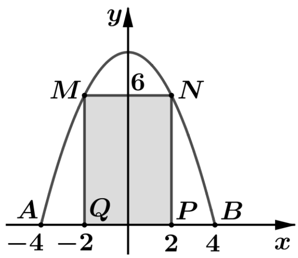
Kinh phí làm bức tranh: $900000.\dfrac{208}{9}=20800000$ (đồng). **Chọn C.**

Câu 8. Một chiếc cổng có hình dạng là một Parabol có khoảng cách giữa hai chân cổng là $AB=8$ m. Người ra treo một tâm phông hình chữ nhật có hai đỉnh M, N nằm trên Parabol và hai đỉnh P, Q nằm trên mặt đất (như hình vẽ). Ở phần phía ngoài phông (phần không tô đen) người ta mua hoa để trang trí với chi phí cho $1\ \mathrm{m}^2$ cần số tiền mua hoa là 200.000 đồng, biết $MN=4$ m, $MQ=6$ m. Hỏi số tiền dùng để mua hoa trang trí chiếc cổng gần với số tiền nào sau đây?



A. 3373400 đồng. **B.** 3434300 đồng. **C.** 3437300 đồng. **D.** 3733300 đồng.

Lời giải. Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Parabol đối xứng qua Oy nên có dạng $(P): y=ax^2+c$. Vì (P) đi qua $B(4;0)$ và $N(2;6)$ nên $(P): y=-\dfrac{1}{2}x^2+8$.

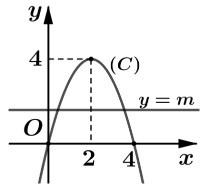
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và trục Ox là

$$S=2\int\limits_{0}^{4}\left(-\frac{1}{2}x^2+8\right)\mathrm{d}x=\frac{128}{3}\ \mathrm{m}^2.$$

Diện tích phần trồng hoa là $S=S_1-S_{MNPQ}=\dfrac{128}{3}-24=\dfrac{56}{3}$ m^2.

Do đó số tiền cần dùng để mua hoa là $\dfrac{56}{3}\times 200000=3733300$ đồng. **Chọn D.**

Câu 9. Cho $\mathscr{H}$ là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y = 4x - x^2$ và trục hoành (hình vẽ bên). Đường thẳng $y = m$ chia $\mathscr{H}$ thành hai phần có diện tích bằng nhau. Biết $m = a + \sqrt[3]{b}$ với a, b là các số hữu tỉ, tính $S = a.b$.

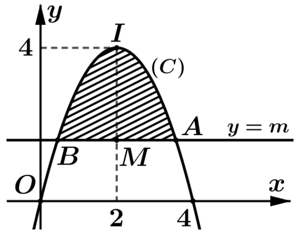


A. $S = -64$. **B.** $S = -32$. **C.** $S = 32$. **D.** $S = 64$.

Lời giải. Diện tích hình phẳng $\mathscr{H}$ là $S = \dfrac{2}{3}Bh = \dfrac{2}{3}.4.4 = \dfrac{32}{2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $4x - x^2 = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 + \sqrt{4-m} \\ x = 2 - \sqrt{4-m} \end{array}\right.$; $\forall m \in (0;4)$.

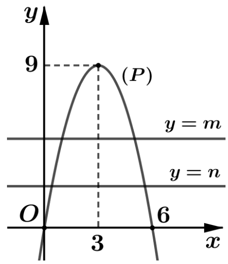
Suy ra $A\left(2+\sqrt{4-m};m\right)$, $B\left(2-\sqrt{4-m};m\right)$; $M(2;m)$ là trung điểm AB; $I(2;4)$ là đỉnh của (C). Khi đó diện tích miền khép kín giới hạn bởi Parabol và đường $y = m$ (phần gạch sọc) là $S_1 = \dfrac{2}{3}AB.IM = \dfrac{2}{3}.2\sqrt{4-m}.(4-m) = \dfrac{4\left(\sqrt{4-m}\right)^3}{3}$.



Theo giả thiết, ta có $S_1 = \dfrac{1}{2}S \Leftrightarrow \dfrac{4\left(\sqrt{4-m}\right)^3}{3} = \dfrac{16}{3} \Leftrightarrow m = 4 - \sqrt[3]{16} \longrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 16 \end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 10. Cho $\mathscr{H}$ là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (P) của hàm số $y = 6x - x^2$ và trục hoành. Hai đường thẳng $y = m$ và $y = n$ chia hình $\mathscr{H}$ thành ba phần có diện tích bằng nhau. Tính

$$P = (9-m)^3 + (9-n)^3.$$

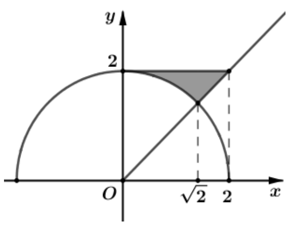


A. $P = 403$. **B.** $P = 405$.

C. $P = 407$. **D.** $P = 409$.

Lời giải. Như bài trên, ta được $\begin{cases} m = 9 - 3\sqrt[3]{3} \\ n = 9 - 3\sqrt[3]{12} \end{cases} \Rightarrow P = 405$. **Chọn B.**

Câu 11. Cho hình phẳng $\mathscr{H}$ (phần tô đậm) được giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{4-x^2}$, $y = x$ và $y = 2$ có diện tích là $S = a + b\pi$ với a, $b \in \mathbb{Q}$. Khẳng định nào sau đây đúng?



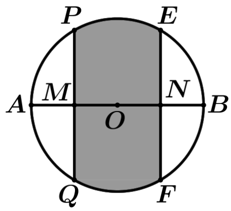
A. $a + b < 1$. **B.** $a + 2b = 3$.

C. $a^2 + 4b^2 \geq 5$. **D.** $a > 1$ và $b > 1$.

Lời giải. Dựa vào hình vẽ, ta có $S = \int\limits_0^{\sqrt{2}} \left(2 - \sqrt{4-x^2}\right)\mathrm{d}x + \int\limits_{\sqrt{2}}^{2} (2-x)\,\mathrm{d}x = 2 - \dfrac{\pi}{2}$.

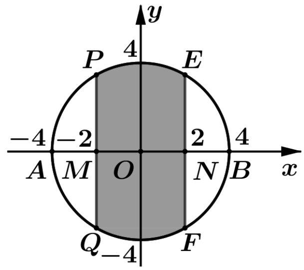
Suy ra $a = 2$, $b = -\dfrac{1}{2}$. **Chọn C.**

Câu 12. Cho đường tròn tâm O đường kính $AB=8$. Trên AB lấy hai điểm M, N đối xứng nhau qua O sao cho $MN=4$. Qua M, N kẻ hai dây cung PQ và EF cùng vuông góc với AB. Diện tích phần giới hạn bởi đường tròn và hai dây cung PQ, EF (phần tô đậm như hình vẽ) bằng



A. $5\pi+5$. **B.** $6\pi+8\sqrt{3}$. **C.** $12\pi-7$. **D.** $\dfrac{16}{3}\pi+8\sqrt{3}$.

Lời giải. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



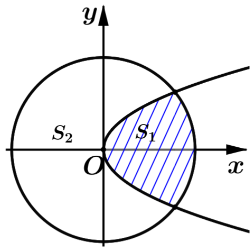
Dễ dàng xác định phương trình đường tròn là $x^2+y^2=16$.

Suy ra cung PE có phương trình $y=\sqrt{16-x^2}$.

Diện tích hình phẳng cần tính

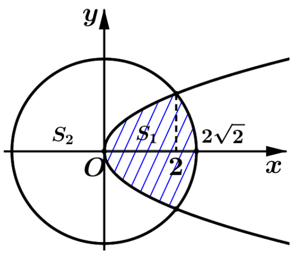
$$S=2\times\int_{-2}^{2}\sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{16}{3}\pi+8\sqrt{3}.$$ **Chọn D.**

Câu 13. Biết rằng đường Parabol $(P): y^2=2x$ chia đường tròn $(C): x^2+y^2=8$ thành hai phần lần lượt có diện tích là S_1, S_2 (hình bên). Khi đó $S_2-S_1=a\pi-\dfrac{b}{c}$ với a, b, c nguyên dương và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tổng $a+b+c$ bằng



A. 13. **B.** 14. **C.** 15. **D.** 16.

Lời giải. Diện tích hình tròn $S=8\pi$.



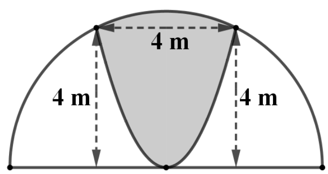
Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (C) là

$$\begin{cases} y^2=2x \\ x^2+y^2=8 \end{cases} \to \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2+2x=8 \end{cases} \leftrightarrow x=2.$$

Suy ra $S_1=2.\left(\displaystyle\int_0^2\sqrt{2x}\,\mathrm{d}x+\int_2^{2\sqrt{2}}\sqrt{8-x^2}\,\mathrm{d}x\right)=\dfrac{4}{3}+2\pi.$

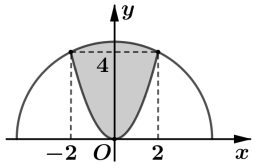
Suy ra $S_2=S-S_1=6\pi-\dfrac{4}{3}\longrightarrow S_2-S_1=4\pi-\dfrac{8}{3}\longrightarrow\begin{cases} a=4 \\ b=8 \\ c=3 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 14. Một khuôn viên dạng nửa hình tròn có đường kính bằng $4\sqrt{5}$ m. Trên đó người thiết kế hai phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình Parabol có đỉnh trùng với tâm nửa hình tròn và hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu), cách nhau một khoảng bằng 4 m, phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ và kinh phí để trồng cỏ Nhật Bản là 100000 đồng$/\mathrm{m}^2$.



Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cỏ Nhật Bản trên phần đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).

A. $1194\,000$ đồng. **B.** $1948\,000$ đồng. **C.** $2\,388\,000$ đồng. **D.** $3\,895\,000$ đồng.



Lời giải. Hình tròn có diện tích $S_1 = \pi\left(2\sqrt{5}\right)^2 = 20\pi$.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Khi đó phương trình nửa đường tròn là: $y = \sqrt{20 - x^2}$.

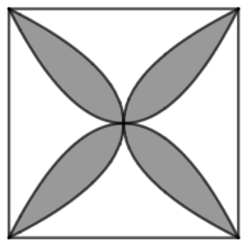
Parabol có đỉnh là gốc O và đi qua điểm $(2;4)$ nên có phương trình $(P): y = x^2$.

Khi đó diện tích phần tô đậm: $S_2 = \int\limits_{-2}^{2}\left(\sqrt{20-x^2} - x^2\right)dx \cong 11,94\ \text{m}^2$.

Diện tích phần trồng cỏ Nhật Bản (phần không tô màu): $S = \dfrac{S_1}{2} - S_2 \approx 19,47592654$.

Vậy số tiền cần dùng: $T = S \times 100\,000 \approx 1948\,000$ (đồng). **Chọn B.**

Câu 15. Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40 cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường Parabol có chung đỉnh tại tâm của viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô màu như hình bên). Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng



A. $250\ \text{cm}^2$. **B.** $\dfrac{400}{3}\ \text{cm}^2$.

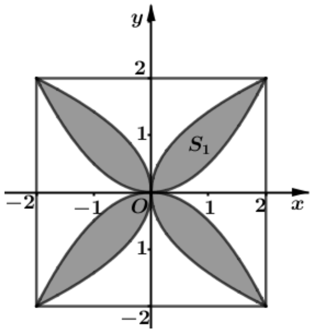
C. $\dfrac{800}{3}\ \text{cm}^2$. **D.** $\dfrac{1600}{3}\ \text{cm}^2$.

Lời giải. Gắn hệ trục tọa độ như hình bên (ta chuyển về đơn vị tính là dm)

Xét cánh hoa ở góc phần tư thứ nhất. Đường cong trên ứng với $y = \sqrt{2x}$, đường cong dưới ứng với $y = \dfrac{x^2}{2}$.

Khi đó diện tích cần tính

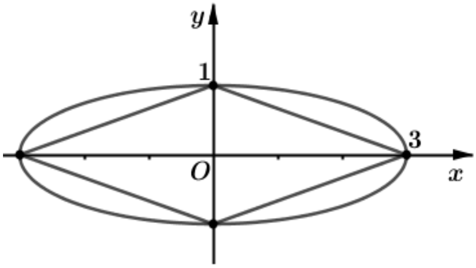
$$S = \int\limits_0^2\left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2}\right)\text{d}x = \frac{4}{3}\left(\text{dm}^2\right) = \frac{400}{3}\left(\text{cm}^2\right).$$ **Chọn B.**

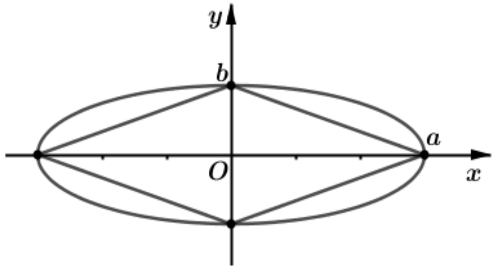


Câu 16. Gọi S_1 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi Elip $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{1} = 1$ và S_2 là diện tích của hình thoi có các đỉnh là đỉnh của Elip đó. Tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$ bằng

A. π. **B.** $\dfrac{\pi}{2}$. **C.** $\dfrac{\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{2\pi}{3}$.

Lời giải.





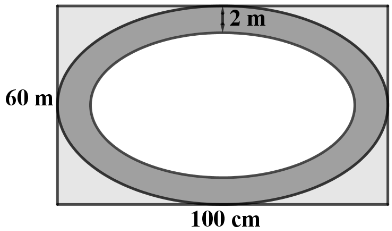
Từ phương trình Elip $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1,$ suy ra đường Elip nằm trong góc phần tư thứ nhất có phương trình $y=\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}.$ Suy ra diện tích Elip $S_1=4\times\int_0^3\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}dx=3\pi.$

Diện tích hình thoi có các đỉnh là đỉnh của elip: $S_2=\frac{1}{2}.6.2=6.$

Khi đó $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$. **Chọn B.**

Chú ý: Ta có công thức nhanh: $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ có diện tích $S=\pi ab.$

Câu 17. Một sân chơi cho trẻ em hình chữ nhật có chiều dài 100 m và chiều rộng là 60 m người ta làm một con đường nằm trong sân (như hình vẽ). Biết rằng viền ngoài và viền trong của con đường là hai đường elip, Elip của đường viền ngoài có trục lớn và trục bé lần lượt song song với các cạnh hình chữ nhật và chiều rộng của mặt đường là 2 m. Kinh phí cho mỗi m^2 làm đường 600000 đồng. Tính tổng số tiền làm con đường đó. (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



A. 293804000 đồng. **B.** 293904000 đồng.

C. 294053000 đồng. **D.** 294153000 đồng.

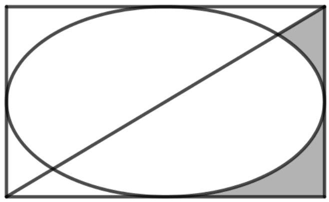
Lời giải. Diện tích Elip lớn là: $S_1=\pi 50.30=1500\pi$ m^2.

Diện tích Elip lớn là: $S_2=\pi 48.28=1344\pi$ m^2.

Suy ra diện tích cần trang trí là: $S_3=S_1-S_2=1500\pi-1344\pi=156\pi$ m^2.

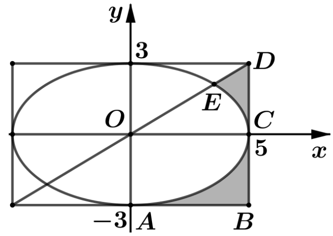
Vậy chi phí cần: $S_3\times 600000=156\pi\times 600000\approx 294053000$ đồng. **Chọn C.**

Câu 18. Một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài 10 m và chiều rộng 6 m, được phân chia thành các phần bởi một đường chéo và một đường Elip nội tiếp bên trong như hình vẽ bên. Hãy tính diện tích phần tô đậm (theo đơn vị m^2)?



A. $5(\pi-2)$. **B.** $5(4-\pi)$. **C.** $\frac{45(4-\pi)}{7}$. **D.** $\frac{45(4-\pi)}{8}$.

Lời giải. Chọn hệ trục tọa độ và gọi các điểm như hình.



Phương trình Elip là: $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$. Suy ra

- đường Elip nằm trên trục Ox là: $(E_1): y=\dfrac{3\sqrt{25-x^2}}{5}$;
- đường Elip nằm dưới trục Ox là: $(E_2): y=-\dfrac{3\sqrt{25-x^2}}{5}$.

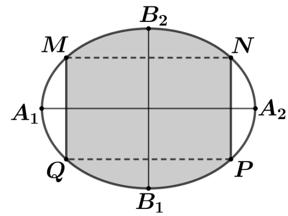
Phương trình đường thẳng $OD: y=\dfrac{3x}{5}$. Phường trình đường thẳng $AB: y=-3$.

Tọa độ giao điểm của (E_1) và OD là: $E\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2};\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

Do đó diện tích phần tô đậm là:

$$S=\int_{\frac{5\sqrt{2}}{3}}^{5}\left(\frac{3x}{5}-\frac{3\sqrt{25-x^2}}{5}\right)\mathrm{d}x+\int_0^5\left(-\frac{3\sqrt{25-x^2}}{5}+3\right)\mathrm{d}x=\frac{45(4-\pi)}{8}.$$ **Chọn D.**

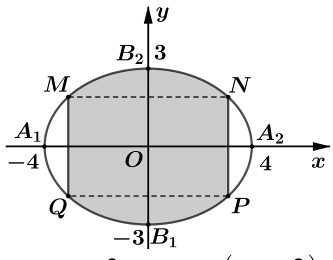
Câu 19. Một biển quảng cáo có dạng hình Elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí sơn phần tô đậm là $200\,000$ đồng/m^2 và phần còn lại là $100\,000$ đồng/m^2. Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2=8$ m, $B_1B_2=6$ m và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ=3$ m?



A. 5.526.000 đồng. **B.** 5.782.000 đồng.

C. 7213000 đồng. **D.** 7322000 đồng.

Lời giải. Chọn hệ trục tọa độ và gọi các điểm như hình.



Diện tích Elip: $S=\pi.4.3=12\pi$ m^2.

Phương trình Elip là: $(E): \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$. Suy ra đường Elip nằm trên trục Ox là: $y=\dfrac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$.

Từ giả thiết $MQ=3$ m suy ra M, N nằm trên đường thẳng $d: y=\dfrac{3}{2}\longrightarrow N\left(2\sqrt{3};\dfrac{3}{2}\right)$.

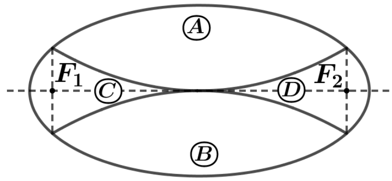
Diện tích phần tô màu: $S_1=4\times\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}}\left(\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\right)\mathrm{d}x=8\pi+6\sqrt{3}$ m^2.

Suy ra diện tích phần không tô màu: $S_2=S-S_2=4\pi-6\sqrt{3}$ m^2.

Vậy số tiền cần chi phí

$$T=200000\times\left(8\pi+6\sqrt{3}\right)+100000\times\left(4\pi-6\sqrt{3}\right)\approx 7322000 \text{ đồng}.$$ **Chọn D.**

Câu 20. Nhà trường dự định làm một vườn hoa dạng hình Elip được chia ra làm bốn phần bởi hai đường Parabol có chung đỉnh, đối xứng với nhau qua trục của Elip như hình vẽ bên. Biết độ dài trục lớn, trục nhỏ của Elip lần lượt là 8 m và 4 m; F_1, F_2



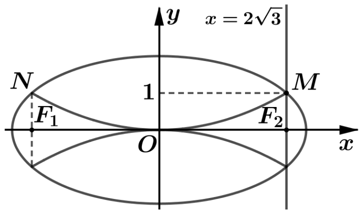
là hai tiêu điểm của Elip. Phần A, B dùng để trồng hoa; phần C, D dùng để trồng cỏ. Kinh phí để trồng mỗi mét vuông trồng hoa và trồng cỏ lần lượt là $250\,000$ đồng và $150\,000$ đồng. Tính tổng tiền để hoàn thành vườn hoa trên (làm tròn đến hàng nghìn).

A. $4\,656\,000$ đồng. **B.** $4\,766\,000$ đồng.

C. $5\,455\,000$ đồng. **D.** $5\,676\,000$ đồng.

Lời giải. Diện tích Elip: $S = \pi.4.2 = 8\pi$ m^2.

Chọn hệ trục tọa độ và gọi các điểm như hình.



Phương trình Elip là: $(E): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. Suy ra đường Elip nằm trên trục Ox là: $y = \dfrac{\sqrt{16 - x^2}}{2}$.

Giao điểm của đường thẳng $d: x = 2\sqrt{3}$ đi qua tiêu điểm F_2 và nửa Elip nằm bên trên trục Ox là $M\left(2\sqrt{3};1\right) \longrightarrow N\left(-2\sqrt{3};1\right)$.

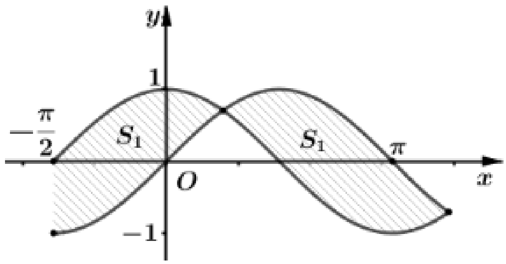
Parabol đi qua các điểm $M\left(2\sqrt{3};1\right)$, $O(0;0)$, $N\left(-2\sqrt{3};1\right)$ có phương trình $(P): y = \dfrac{x^2}{12}$.

Khi đó diện tích $S_A = \displaystyle\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{16 - x^2}}{2} - \frac{x^2}{12}\right) \mathrm{d}x = \frac{8\pi + 2\sqrt{3}}{3}$.

Vậy số tiền cần chi phí:

$$T = 2S_A \times 250000 \; + \; \left(S - 2S_A\right) \times 150000 \approx 5\,676\,000 \text{ đồng.}$$ **Chọn D.**

Câu 21. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sin x$, $y = \cos x$ và S_1, S_2 là diện tích của các phần được gạch chéo như hình vẽ. Tổng $S_1^2 + S_2^2$ bằng



A. $10 - 2\sqrt{2}$. **B.** $10 + 2\sqrt{2}$.

C. $11 - 12\sqrt{2}$. **D.** $11 + 2\sqrt{2}$.

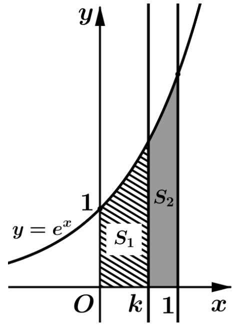
Lời giải. Ta có: $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

$$\sin x = \cos x \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

Dựa vào hình vẽ ta có $S_1 = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos x - \sin x\right) \mathrm{d}x = 1 + \sqrt{2}$; $S_2 = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(\sin x - \cos x\right) \mathrm{d}x = 2\sqrt{2}$.

Suy ra $S_1^2+S_2^2=\left(1+\sqrt{2}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2=11+2\sqrt{2}$. **Chọn D.**

Câu 22. Kí hiệu $\mathscr{H}$ là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0$, $x=0$ và $x=1$. Đường thẳng $x=k$ $(0<k<1)$ chia $\mathscr{H}$ thành hai phần có diện tích tương ứng S_1, S_2 như hình vẽ bên, biết $S_1>S_2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



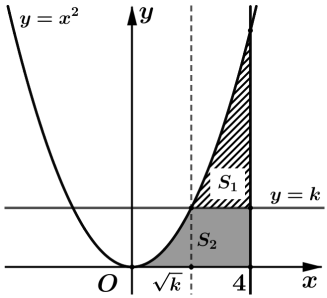
A. $e^k>\dfrac{e-1}{2}$. **B.** $e^k>\dfrac{e+1}{2}$.

C. $e^k>\dfrac{e+2}{2}$. **D.** $e^k>\dfrac{e+3}{2}$.

Lời giải. Ta có $S_1=\int\limits_0^k e^x\mathrm{d}x=e^x\Big|_0^k=e^k-1$ và $S_2=\int\limits_k^1 e^x\mathrm{d}x=e^x\Big|_k^1=e-e^k$.

Theo giả thiết $S_1>S_2\Leftrightarrow e^k-1>e-e^k\Leftrightarrow e^k>\dfrac{e+1}{2}$. **Chọn B.**

Câu 23. Cho hình phẳng $\mathscr{H}$ giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $y=0$, $x=0$, $x=4$. Đường thẳng $y=k$ $(0<k<16)$ chia hình $\mathscr{H}$ thành hai phần có diện tích S_1, S_2 (hình vẽ). Tìm k để $S_1=S_2$.



A. $k=3$. **B.** $k=4$.

C. $k=5$. **D.** $k=8$.

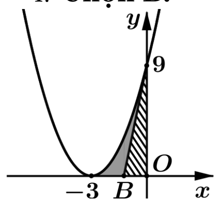
Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2=k\xrightarrow{x>0}x=\sqrt{k}$. Ta có:

- $S_1+S_2=\int\limits_0^4 x^2\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}\Big|_0^4=\dfrac{64}{3}$.
- $S_1=\int\limits_{\sqrt{k}}^4\left(x^2-k\right)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{x^3}{3}-kx\right)\Big|_{\sqrt{k}}^4=-4k+\dfrac{2k\sqrt{k}}{3}+\dfrac{64}{3}$.

Theo giả thiết $S_1=S_2\longrightarrow S_1=\dfrac{1}{2}\left(S_1+S_2\right)\Leftrightarrow -4k+\dfrac{2k\sqrt{k}}{3}+\dfrac{64}{3}=\dfrac{32}{3}$

$\Leftrightarrow 2k\sqrt{k}-12k+32=0\xrightarrow{t=\sqrt{k}\ (0<t<4)}2t^3-12t^2+32=0\rightarrow t=2\longrightarrow k=4$. **Chọn B.**

Câu 24. Xét hình phẳng $\mathscr{H}$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x+3)^2$, trục hoành và đường thẳng $x=0$. Gọi $A(0;9)$, $B(b;0)$ $(-3<b<0)$. Tìm giá trị của tham số b để đoạn thẳng AB chia $\mathscr{H}$ thành hai phần có diện tích bằng nhau.



A. $b=-2$. **B.** $b=-\dfrac{3}{2}$. **C.** $b=-1$. **D.** $b=-\dfrac{1}{2}$.

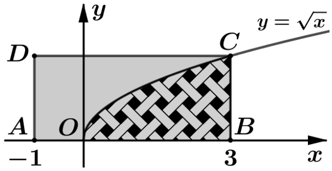
Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $(x+3)^2=0\Leftrightarrow x=-3$.

Do đó $S_{\mathscr{H}} = \int\limits_{-3}^{0} (x+3)^2 \, dx \overset{\text{CASIO}}{=} 9.$

Diện tích tam giác OAB bằng: $S_{OAB} = \frac{1}{2} OA.OB = \frac{9}{2}|b|.$

Ycbt $\Leftrightarrow S_{OAB} = \frac{1}{2} S_{(H)} \Leftrightarrow \frac{9}{2}|b| = \frac{9}{2} \xrightarrow{(-3<b<0)} b = -1.$ **Chọn C.**

Câu 25. Trong mặt phẳng tọa độ, cho hình chữ nhật $\mathscr{H}$ có một cạnh nằm trên trục hoành và có hai đỉnh trên một đường chéo là $A(-1;0)$ và $C(a;\sqrt{a})$ với $a > 0$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ chia hình $\mathscr{H}$ thành hai phần có diện tích bằng nhau, tìm a.



A. $a = \frac{1}{2}.$ **B.** $a = 3.$ **C.** $a = 4.$ **D.** $a = 9.$

Lời giải. Từ hình vẽ ta suy ra $B(a;0)$.

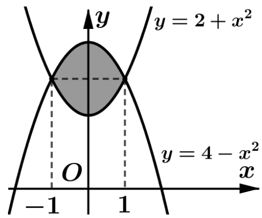
Hình chữ nhật $ACBD$ có $AB = a+1$ và $AD = \sqrt{a}$ nên có diện tích $S = \sqrt{a}(a+1)$.

Diện tích miền gạch sọc: $S' = \int\limits_{0}^{a} \sqrt{x} dx = \frac{2a\sqrt{a}}{3}.$

Theo giả thiết, ta có $S' = \frac{S}{2} \Leftrightarrow \frac{2a\sqrt{a}}{3} = \frac{\sqrt{a}(a+1)}{2} \xrightarrow{a>0} a = 3.$ **Chọn B.**

Phần 5. Thể tích khối tròn xoay

Câu 1. Cho hình phẳng $\mathscr{H}$ giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = 4 - x^2$ và $y = 2 + x^2$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay $\mathscr{H}$ quanh trục hoành.



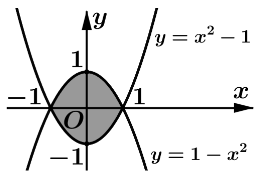
A. $V = 10\pi.$ **B.** $V = 12\pi.$

C. $V = 14\pi.$ **D.** $V = 16\pi.$

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $4 - x^2 = 2 + x^2 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Thể tích cần tính $V = \pi \int\limits_{-1}^{1} \left| (4-x^2)^2 - (2+x^2)^2 \right| dx = \pi \int\limits_{-1}^{1} \left| 12 - 12x^2 \right| dx \overset{\text{CASIO}}{=} 16\pi.$ **Chọn D.**

Câu 2. Thể tích V của khối tròn xoay khi cho hình phẳng $\mathscr{H}$ giới hạn bởi các đường $y = 1 - x^2$ và $y = x^2 - 1$ quay quanh trục Ox được xác định bởi công thức nào sau đây?



A. $V = \pi \int\limits_{-1}^{1} \left| (1-x^2)^2 - (x^2-1)^2 \right| dx.$ **B.** $V = \pi \int\limits_{-1}^{1} \left| (1-x^2) - (x^2-1) \right| dx.$

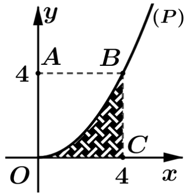
C. $V = \pi \int\limits_{-1}^{1} (1-x^2)^2 \, dx.$ **D.** $V = \int\limits_{-1}^{1} \left[(x^2-1)^2 - (1-x^2)^2 \right] dx.$

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $1-x^2=x^2-1 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Vì đồ thị hàm số $y=1-x^2$ đối xứng với đồ thị hàm số $y=x^2-1$ qua trục hoành nên thể tích khối tròn xoay cần tính bằng thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=1-x^2$, $y=0$, $x=-1$, $x=1$ quay quanh trục Ox.

Vậy công thức tính thể tích là $V=\pi\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^2\mathrm{d}x$. **Chọn C.**

Câu 3. Cho hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (P) có phương trình $y=\frac{1}{4}x^2$. Gọi S là hình phẳng không bị gạch (như hình vẽ). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi cho phần S qua quanh trục Ox.



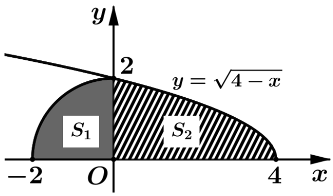
A. $V=\frac{64\pi}{5}$. **B.** $V=\frac{128\pi}{3}$. **C.** $V=\frac{128\pi}{5}$. **D.** $V=\frac{256\pi}{5}$.

Lời giải. Thể tích vật thể khi quay hình vuông $OABC$ quanh trục Ox là $\pi.4^2.4=64\pi$.

Thể tích vật thể khi quay phần gạch sọc quanh Ox là $\pi.\int_0^4\left(\frac{1}{4}x^2\right)^2\mathrm{d}x=\frac{64\pi}{5}$.

Vậy thể tích vật thể tròn xoay cần tính bằng $64\pi-\frac{64\pi}{5}=\frac{256\pi}{5}$. **Chọn D.**

Câu 4. Cho hình phẳng $\mathscr{H}$ giới hạn bởi $\frac{1}{4}$ đường tròn có bán kính $R=2$, đường cong $y=\sqrt{4-x}$ và trục hoành (miền tô đậm như hình vẽ). Tính thể tích V của khối tạo thành khi cho hình $\mathscr{H}$ quay quanh trục Ox.



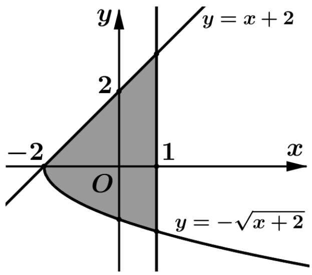
A. $V=\frac{40\pi}{3}$. **B.** $V=\frac{53\pi}{6}$. **C.** $V=\frac{67\pi}{6}$. **D.** $V=\frac{77\pi}{6}$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $\sqrt{4-x}=0 \Leftrightarrow x=4$.

- Thể tích vật thể khi quay phần S_1 quanh trục hoành là nửa khối cầu bán kính $R=2$ nên có thể tích bằng $\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{2}{3}\pi.2^3=\frac{16\pi}{3}$.
- Thể tích vật thể khi quay phần S_2 quanh trục hoành là $\pi\int_0^4(4-x)\mathrm{d}x=8\pi$.

Vậy thể tích cần tính $\frac{16\pi}{3}+8\pi=\frac{40\pi}{3}$. **Chọn A.**

Câu 5. Cho hình phẳng $\mathscr{H}$ giới hạn bởi các đường $y=-\sqrt{x+2}$, $y=x+2$, $x=1$. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng $\mathscr{H}$ quanh trục Ox.



A. $V=9\pi$.

B. $V=\dfrac{9\pi}{2}$.

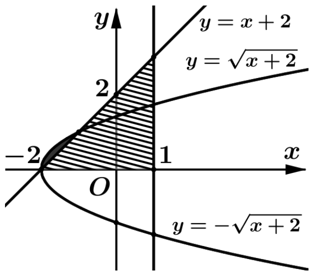
C. $V=\dfrac{25\pi}{3}$.

D. $V=\dfrac{55\pi}{6}$.

Lời giải. Sai lầm hay gặp là chúng ta sử dụng công thức

$$V=\pi\int_{-2}^{1}\left[(x+2)^2-\left(-\sqrt{x+2}\right)^2\right]\mathrm{d}x=\frac{9\pi}{2}.$$

Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y=-\sqrt{x+2}$ qua trục hoành ta được đồ thị hàm số $y=\sqrt{x+2}$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó thể tích cần tính bằng tổng của miền tô đậm và miền gạch sọc quay quanh trục Ox.



Thể tích vật thể khi quay miền

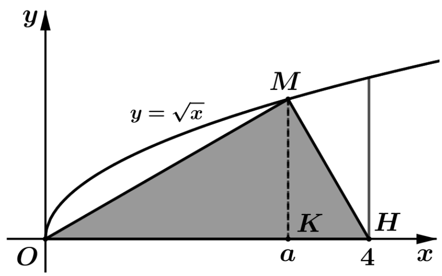
• Gạch sọc quanh Ox là $V_1=\pi\int_{-2}^{1}(x+2)^2\,\mathrm{d}x=9\pi$.

• Tô đậm quanh Ox là

$$V_2=\pi\int_{-2}^{-1}\left|\left(\sqrt{x+2}\right)^2-(x+2)^2\right|\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}.$$

Vậy thể tích cần tính $V=V_1+V_2=9\pi+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{55\pi}{6}$. **Chọn D.**

Câu 6. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, $y=0$ và $x=4$ quanh trục Ox. Đường thẳng $x=a$ $(0<a<4)$ cắt đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ tại M (hình vẽ bên). Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox. Biết rằng $V=2V_1$. Khi đó



A. $a=2$.

B. $a=\dfrac{5}{2}$.

C. $a=2\sqrt{2}$.

D. $a=3$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0$.

● Thể tích $V=\pi\int_0^4 x\mathrm{d}x=8\pi$.

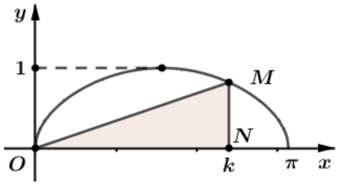
● Tính V_1: Gọi $M\left(a;\sqrt{a}\right)$. Khi quay tam giác OMH quanh trục Ox tạo thành hai hình nón có chung đáy:

ð Hình nón $(\mathscr{N}_1)$ có đỉnh là O, chiều cao $OK=a$, bán kính đáy $R=MK=\sqrt{a}$ nên có thể tích bằng $\dfrac{1}{3}\pi R^2.OK=\dfrac{1}{3}\pi\left(\sqrt{a}\right)^2.a=\dfrac{\pi a^2}{3}$.

ð Hình nón $(\mathcal{N}_2)$ có đỉnh là H, chiều cao $HK = 4 - a$, bán kính đáy $R = MK = \sqrt{a}$ nên có thể tích bằng $\frac{1}{3}\pi R^2 HK = \frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{a}\right)^2.(4-a) = \frac{4\pi a - \pi a^2}{3}$.

Suy ra $V_1 = \frac{\pi a^2}{3} + \frac{4\pi a - \pi a^2}{3} = \frac{4\pi a}{3}$. Theo giả thiết $V = 2V_1$ nên suy ra $a = 3$. **Chọn D.**

Câu 7. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{\sin x}$, hai trục tọa độ và $x = \pi$ quanh trục hoành. Đường thẳng $x = k$ $(0 < k < \pi)$ cắt đồ thị hàm số $y = \sqrt{\sin x}$ tại điểm M và trục hoành tại điểm N (hình vẽ bên).



Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMN quanh trục Ox. Biết rằng $V = \frac{12}{k}V_1$. Khi đó

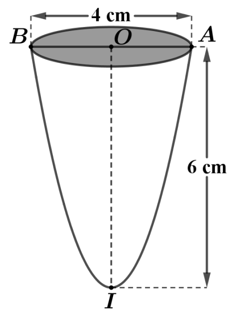
A. $k = \frac{\pi}{6}$. **B.** $k = \frac{\pi}{3}$. **C.** $k = 2$. **D.** $k = 3$.

Lời giải. Ta có $V = \pi\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x = -\pi\cos x\Big|_0^\pi = 2\pi$.

Khi quay tam giác OMN quanh trục Ox tạo thành hình nón có đỉnh là O, chiều cao $ON = k$, bán kính đáy $R = MN = \sqrt{\sin k}$ nên có thể tích bằng $\frac{1}{3}\pi R^2.ON = \frac{\pi k.\sin k}{3}$.

Theo giả thiết $V = \frac{12}{k}V_1$ nên suy ra $\sin k = \frac{1}{2} \longrightarrow k = \frac{\pi}{6}$ (vì $0 < k < \pi$). **Chọn A.**

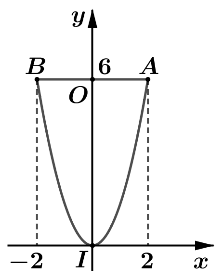
Câu 8. Có một vật thể là hình tròn xoay có dạng giống như một cái ly như hình vẽ bên. Người ta đo được đường kính của miệng ly là 4 cm và chiều cao là 6 cm. Biết rằng thiết diện của chiếc ly cắt bởi mặt phẳng đối xứng là một Parabol. Thể tích của vật thể đã cho bằng



A. $12\pi\ (\mathrm{cm}^3)$. **B.** $12\ (\mathrm{cm}^3)$.

C. $\frac{72}{5}\pi\ (\mathrm{cm}^3)$. **D.** $\frac{72}{5}\ (\mathrm{cm}^3)$.

Lời giải. Xét phần mặt cắt và chọn hệ trục Ixy như hình vẽ. (trong đó I là gốc tọa độ).

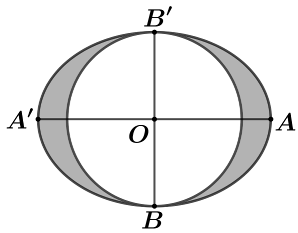


Khi đó Parabol (P) đi qua các điểm $A(-2;6)$, $B(2;6)$ và $I(0;0)$ nên Parabol (P) có phương trình: $y = \frac{3}{2}x^2 \longrightarrow x^2 = \frac{2y}{3}$.

Khi đó thể tích của vật thể đã cho là:

$$V = \pi\int_0^6 x^2\mathrm{d}y = \pi\int_0^6\left(\frac{2}{3}y\right)\mathrm{d}y = 12\pi\ (\mathrm{cm}^3).$$ **Chọn A.**

Câu 9. Trong mặt phẳng cho đường Elip (E) có độ dài trục lớn là $AA'=8$ và độ dài trục nhỏ $BB'=6$; đường tròn tâm O đường kính BB' như hình vẽ. Tính thể tích V của khối tròn xoay có được bằng cách cho miền hình phẳng giới hạn bởi đường Elip và đường tròn (được tô đậm trên hình vẽ) quay xung quanh trục AA'.



A. $V=12\pi$. **B.** $V=16\pi$. **C.** $V=28\pi$. **D.** $V=36\pi$.

Lời giải. Elip (E) có $a=4,\ b=3$. Suy ra $(E): \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

Thể tích khối elip (E) quay quanh trục AA' là: $V_1=\pi.\displaystyle\int_{-4}^{4} 9.\left(1-\dfrac{x^2}{16}\right)dx=48\pi$.

Thể tích khối cầu là: $V_2=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi.3^3=36\pi$.

Vậy thể tích cần tính $V=V_1-V_2=12\pi$. **Chọn A.**

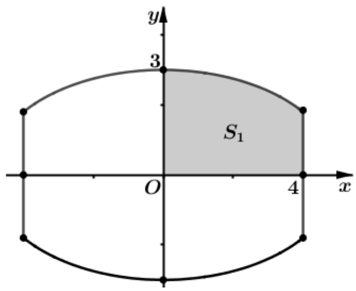
Câu 10. Một thùng chứa rượu làm bằng gỗ là một hình tròn xoay như hình bên có hai đáy là hai hình tròn bằng nhau, khoảng cách giữa hai đáy bằng 8 dm. Đường cong mặt bên của thùng là một phần của đường Elip có độ dài trục lớn bằng 10 dm, độ dài trục bé bằng 6 dm. Hỏi chiếc thùng gỗ đó đựng được bao nhiêu lít rượu?

A. $\dfrac{1316\pi}{25}$ (lít). **B.** $\dfrac{1416\pi}{25}$ (lít). **C.** $\dfrac{1516\pi}{25}$ (lít). **D.** $\dfrac{1616\pi}{25}$ (lít).

Lời giải. Elip có $a=5,\ b=3$. Suy ra $(E): \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

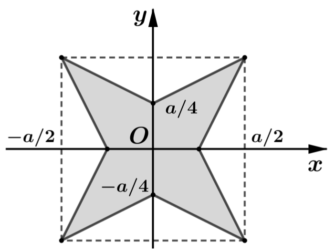
Chọn hệ trục tọa độ đi qua hai trục của thùng rượu như hình vẽ.

Vì thùng rượu có tính đối xứng nên thể tích thùng rượu gấp hai lần thể tích khối tròn xoay khi quay hình S_1 quanh trục Ox.



Thể tích cần tính: $V=2\times\pi\displaystyle\int_{0}^{4}\dfrac{225-9x^2}{25}dx=\dfrac{1416\pi}{25}$. **Chọn B.**

Câu 11. Bên trong hình vuông cạnh a, dựng hình sao bốn cánh đều như hình vẽ bên (các kích thước cần thiết cho như ở trong hình). Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình sao đó quanh trục Ox.



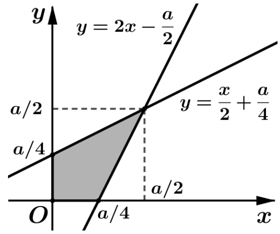
A. $V=\dfrac{\pi}{8}a^3$. **B.** $V=\dfrac{5\pi}{24}a^3$.

C. $V=\dfrac{5\pi}{48}a^3$. **D.** $V=\dfrac{5\pi}{96}a^3$.

Lời giải. Xét hình nằm ở góc phần tư thứ nhất.

Gọi V là thể tích khối tròn xoay cần tính.

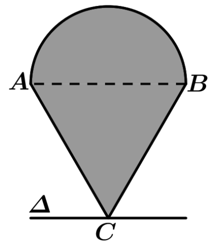
Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng được tô màu trong hình bên (chỉ xét ở góc phần tư thứ nhất) quanh trục hoành. Khi đó $V = 2V_1$.



Ta có $V_1 = \pi \int_0^{\frac{a}{2}} \left(\frac{x}{2} + \frac{a}{4}\right)^2 \mathrm{d}x - \pi \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{a}{2}} \left(2x - \frac{a}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{5\pi a^3}{96}$.

Suy ra thể tích cần tính $V = 2V_1 = \frac{5\pi a^3}{48}$. **Chọn C.**

Câu 12. Cho hình phẳng $\mathscr{H}$ gồm nửa hình tròn đường kính AB và tam giác ABC đều (như hình vẽ). Gọi Δ là đường thẳng qua C và song song với AB. Biết $AB = 2\sqrt{3}$ cm. Thể tích khối tròn xoay tạo bởi hình $\mathscr{H}$ quay quanh trục Δ bằng



A. $8\sqrt{3}\pi + 9\pi^2 \ (\text{cm}^3)$. **B.** $8\sqrt{3}\pi + \frac{9\pi^2}{2} \ (\text{cm}^3)$.

C. $32\sqrt{3}\pi + 18\pi^2 \ (\text{cm}^3)$. **D.** $16\sqrt{3}\pi + 9\pi^2 \ (\text{cm}^3)$.

Lời giải. Chọn $C \equiv O$, $\Delta \equiv Ox$ như hình vẽ.

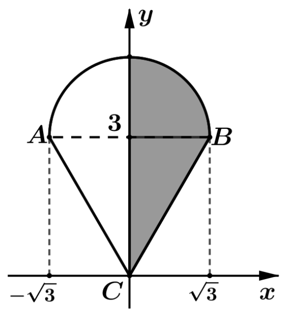
Khi đó $A\left(-\sqrt{3};3\right)$, $B\left(\sqrt{3};3\right)$. Suy ra $AC: y = -\sqrt{3}x$, $BC: y = \sqrt{3}x$.

Phương trình đường tròn đường kính AB là $x^2 + (y-3)^2 = 3$.

Suy ra phần phía trên của nửa đường tròn có phương trình $y = 3 + \sqrt{3 - x^2}$.

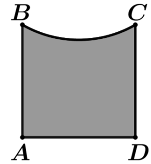
Thể tích khi quay phần tô đậm quanh trục hoành là

$$\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left| \left(3 + \sqrt{3 - x^2}\right)^2 - \left(\sqrt{3}x\right)^2 \right| \mathrm{d}x = 8\sqrt{3}\pi + \frac{9}{2}\pi^2.$$



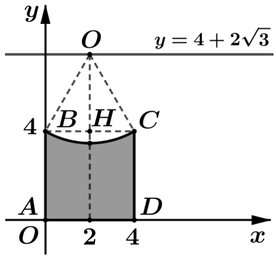
Suy ra thể tích cần tính $V = 2 \times \left(8\sqrt{3}\pi + \frac{9}{2}\pi^2\right)$. **Chọn D.**

Câu 13. Cho hình vẽ bên, biết cung tròn BC nằm trên đường tròn bán kính $R = 4$. Cạnh $AB = BC = CD = DA = 4$. Thể tích vật tròn xoay tạo thành khi quay hình bên quanh trục AD nằm trong khoản nào sau đây?



A. $(165;170)$. **B.** $(160;165)$. **C.** $(155;160)$. **D.** $(150;155)$.

Lời giải. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ bên.



Gọi O là tâm đường tròn (C) chứa cung BC. Khi đó O nằm trên đường thẳng $x=2$. Gọi H là trung điểm của BC.

Ta có ΔOBC là tam giác đều, nên $OH=\dfrac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.

Do đó O cách Ox là một khoảng $4+2\sqrt{3}\longrightarrow O\left(2;4+2\sqrt{3}\right)$.

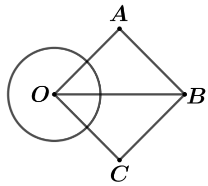
Phương trình đường tròn

$$(C):(x-2)^2+\left(y-4-2\sqrt{3}\right)^2=16\longrightarrow y=4+2\sqrt{3}\pm\sqrt{16-(x-2)^2}.$$

Dựa vào đồ thị ta thấy cung BC nằm bên dưới đường thẳng $y=4+2\sqrt{3}$, nên đường cong chứa cung BC có phương trình $y=4+2\sqrt{3}-\sqrt{16-(x-2)^2}$.

Khi đó thể tích vật tròn xoay: $V=\pi\displaystyle\int_0^4\left(4+2\sqrt{3}-\sqrt{16-(x-2)^2}\right)^2dx\approx 166,6$. **Chọn A.**

Câu 14. Cho hình tròn tâm O có bán kính $R=2$ và hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 (như hình vẽ bên). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình bên xung quanh trục là đường thẳng OB.



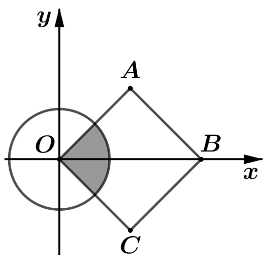
A. $V=\dfrac{8\left(3+4\sqrt{2}\right)\pi}{3}$.

B. $V=\dfrac{8\left(2+5\sqrt{2}\right)\pi}{3}$.

C. $V=\dfrac{8\left(3+5\sqrt{2}\right)\pi}{3}$.

D. $V=\dfrac{32\left(1+\sqrt{2}\right)\pi}{3}$.

Lời giải. Chọn hệ trục tọa độ Oxy có gốc tọa độ trùng O, tia Ox có giá là OB và tia Oy song song AC (như hình vẽ).



Khi đó đường tròn (O) có phương trình $x^2+y^2=4$ và đường thẳng OA có phương trình $y=x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng OA và đường tròn (C) là: $\sqrt{4-x^2}=x\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$.

Thể tích vật thể tròn xoay khi quay phần tô đen quanh Ox là:

$$V_1=\pi\int_0^{\sqrt{2}}x^2dx+\pi.\int_{\sqrt{2}}^2\left(4-x^2\right)=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}+\frac{\left(16-10\sqrt{2}\right)\pi}{3}=\frac{\left(16-8\sqrt{2}\right)\pi}{3}.$$

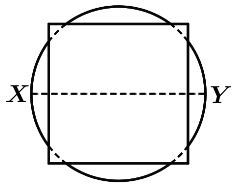
Thể tích khối tròn xoay khi quay (O) quanh Ox là khối cầu có $V_2=\dfrac{4}{3}\pi.2^3=\dfrac{32}{3}\pi$.

Thể tích khối tròn xoay khi quay $OABC$ quanh Ox là (tổng của hai khối nón)

$$V_3=2\times\left[\frac{1}{3}\pi.\left(2\sqrt{2}\right)^2.2\sqrt{2}\right]=\frac{32\sqrt{2}\pi}{3}.$$

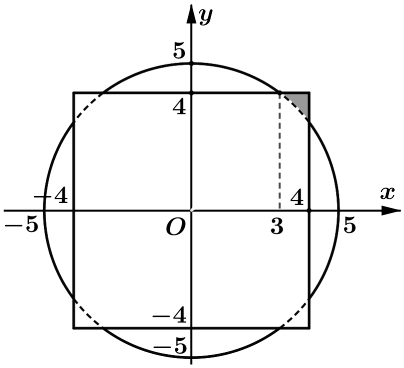
Vậy thể tích cần tính $V = V_2 + V_3 - V_1 = \dfrac{16+40\sqrt{2}}{3}\pi = \dfrac{8\pi\left(2+5\sqrt{2}\right)}{3}$. **Chọn B.**

Câu 15. Cho hình vuông có độ dài cạnh bằng 8cm và một hình tròn có bán kính 5cm được xếp chồng lên nhau sao cho tâm của hình tròn trùng với tâm của hình vuông như hình vẽ bên. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay mô hình trên quanh trục XY.



A. $V = \dfrac{260\pi}{3}\text{cm}^3$. **B.** $V = \dfrac{290\pi}{3}\text{cm}^3$. **C.** $V = \dfrac{520\pi}{3}\text{cm}^3$. **D.** $V = \dfrac{580\pi}{3}\text{cm}^3$.

Lời giải. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



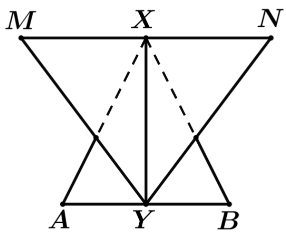
- Thể tích khối cầu $V_1 = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi 5^3 = \dfrac{500\pi}{3}$.

- Gọi V_2 là thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng $\mathscr{H}$ (phần tô màu) được giới hạn bởi đường thẳng $y=4$, đường tròn $y^2 = 25 - x^2$ và $x=4$ quanh trục hoành

$$\longrightarrow V_2 = \pi\int_3^4 \left|4^2 - \left(25-x^2\right)\right| dx = \frac{10\pi}{3}.$$

Vậy thể tích cần tính $V = V_1 + 2V_2 = \dfrac{520\pi}{3}\text{cm}^3$. **Chọn C.**

Câu 16. Cho hai tam giác cân có chung đường cao $XY = 40\text{cm}$ và cạnh đáy lần lượt là 40cm và 60cm, được xếp chồng lên nhau sao cho đỉnh của tam giác này là trung điểm cạnh đáy của tam giác kia như hình vẽ bên. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay mô hình trên quanh trục XY.

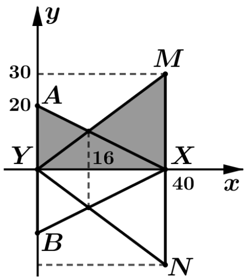


A. $V = \dfrac{40480\pi}{3}\text{cm}^3$. **B.** $V = \dfrac{52000\pi}{3}\text{cm}^3$.

C. $V = \dfrac{46240\pi}{3}\text{cm}^3$. **D.** $V = 1920\pi\text{cm}^3$.

Lời giải. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, khi đó:

$$Y \equiv O(0;0),\ X(40;0),\ A(0;20),\ M(40;30).$$



Phương trình đường $YM: 3x - 4y = 0 \to y = \dfrac{3x}{4}$.

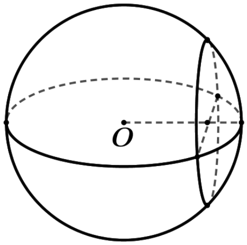
Phương trình $AX: x + 2y - 40 = 0 \to y = \dfrac{40-x}{2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường YM và AX là: $\dfrac{3x}{4} = \dfrac{40-x}{2} \leftrightarrow x = 16$.

Thể tích vật thể được tạo ra bằng cách quay hình phẳng (phần tô đậm như hình).

Thể tích vật thể cần tính $V=\pi\int\limits_0^{16}\left(\frac{40-x}{2}\right)^2\mathrm{d}x+\pi\int\limits_{16}^{40}\left(\frac{3x}{4}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{46240\pi}{3}\mathrm{cm}^3$. **Chọn C.**

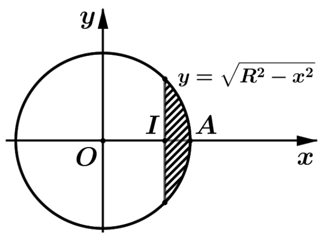
Câu 17. Cho khối cầu có bán kính R. Một mặt phẳng cắt khối cầu thành hai nửa. Nửa bé có khoảng cách từ đỉnh đến đáy bằng h (tham khảo hình vẽ bên). Tính thể tích nửa bé.



A. $V=\pi h^2\left(R-\frac{h}{2}\right)$. **B.** $V=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)$.

C. $V=\pi h^2\left(R-\frac{h}{4}\right)$. **D.** $V=\pi h^2\left(R+\frac{h}{3}\right)$.

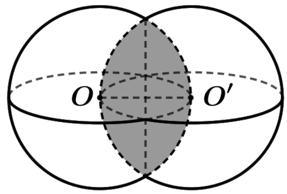
Lời giải. Xét phần mặt cắt và gắn tọa độ như hình vẽ



Khi đó $O(0;0)$, $A(R;0)$ và $I(R-h;0)$ là tâm của đường tròn thiết diện. Thể tích chỏm cầu bị cắt chính là vật thể tròn xoay tạo bởi phần đường tròn $y=\sqrt{R^2-x^2}$ quay xung quanh trục Ox từ $R-h$ đến R. Do đó

$$V=\pi\int\limits_{R-h}^{R}\left(R^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right).$$ **Chọn B.**

Câu 18. Cho hai mặt cầu (S_1), (S_2) có cùng bán kính R thỏa mãn tính chất: tâm của (S_1) thuộc (S_2) và ngược lại. Tính thể tích phần chung V của hai khối cầu tạo bởi (S_1) và (S_2).



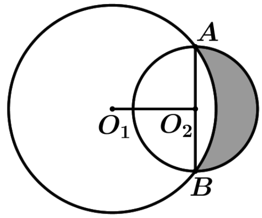
A. $V=\pi R^3$. **B.** $V=\frac{\pi R^3}{2}$. **C.** $V=\frac{2\pi R^3}{5}$. **D.** $V=\frac{5\pi R^3}{12}$.

Lời giải. Thể tích cần tính là tổng của hai chỏm cầu bằng nhau.

Áp dụng công thức bài trước, thể tích mỗi chỏm cầu bằng $\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)\overset{h=\frac{R}{2}}{=}\frac{5\pi R^3}{24}$.

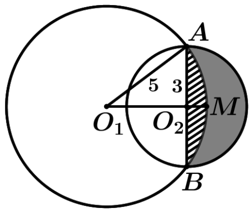
Vậy thể tích phần chung V của hai khối cầu là $V=2\times\frac{5\pi R^3}{24}=\frac{5\pi R^3}{12}$. **Chọn D.**

Câu 19. Cho hai đường tròn $(O_1;5)$ và $(O_2;3)$ cắt nhau tại hai điểm A và B sao cho AB là một đường kính của đường tròn (O_2). Gọi $\mathscr{H}$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường tròn (ở ngoài đường tròn lớn, phần gạch chéo như hình vẽ). Quay hình $\mathscr{H}$ quanh trục O_1O_2, ta được một khối tròn xoay. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành bằng



A. $\frac{14\pi}{3}$. **B.** $\frac{40\pi}{3}$. **C.** $\frac{68\pi}{3}$. **D.** 36π.

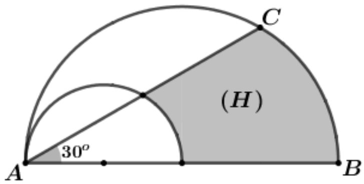
Lời giải. Xét phần mặt cắt như hình vẽ. Ta thấy thể tích cần tính bằng thể tích V_1 trừ đi thể tích V_2, trong đó



- V_1 là thể tích nửa khối cầu (O_2) nên $V_1 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{3}\pi.3^3\right) = 18\pi$.
- V_2 là thể tích của chỏm cầu (khi quay miền gạch sọc quanh trục O_1O_2). Áp dụng công thức bài trước, ta được $V_2 = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right) \xrightarrow[h=O_2M=1]{R=5} V_2 = \frac{14\pi}{3}$.

Vậy thể tích vật thể cần tính: $V = V_1 - V_2 = \frac{40}{3}\pi$. **Chọn B.**

Câu 20. Ta vẽ hai nửa đường tròn như hình vẽ bên, trong đó đường kính của nửa đường tròn lớn gấp đôi đường kính của nửa đường tròn nhỏ. Biết rằng nửa hình tròn đường kính AB có diện tích là 8π và $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Thể tích của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình $\mathscr{H}$ (phần tô đậm) xung quanh đường thẳng AB bằng

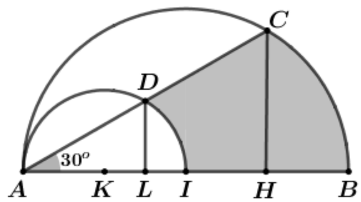


A. $4\pi^2$. **B.** $\frac{98}{3}\pi$. **C.** $\frac{220}{3}\pi$. **D.** $\frac{224}{3}\pi$.

Lời giải. Ta có: $2.8\pi = \pi R^2$ suy ra $R = 4$ và $r = 2$.

Vì ΔIHC vuông tại H, $\widehat{CIH} = 60^\circ$ nên ta có

$$\begin{cases} CH = IC\sin 60^\circ = 4.\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \\ IH = \sqrt{IC^2 - CH^2} = \sqrt{16-12} = 2. \\ AL = \frac{1}{2}AH = 3 \end{cases}$$



Cách 1. (Dùng công thức thuần túy)

- Thể tích khối nón đỉnh A, bán kính đáy HC là: $V_1 = \frac{1}{3}\pi HC^2.AH = 24\pi$.
- Thể tích chỏm cầu (hình cầu lớn) có $h = HB = 2$ là: $V_2 = \pi HB^2\left(R - \frac{HB}{3}\right) = \frac{40\pi}{3}$.
- Thể tích khối nón đỉnh A, bán kính đáy LD là: $V_3 = \frac{1}{3}\pi LD^2.AL = 3\pi$.
- Thể tích chỏm cầu (hình cầu nhỏ) có $h = LI = 1$ là: $V_4 = \pi LI^2\left(r - \frac{LI}{3}\right) = \frac{5\pi}{3}$.

Suy ra thể tích cần tìm $V = (V_1 + V_2) - (V_3 + V_4) = \frac{98}{3}\pi$. **Chọn B.**

Cách 2. (Dùng tích phân) Dễ dàng viết được phương trình $AC: y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ và hai phương trình đường tròn là $y = \sqrt{16-(x-4)^2}$ và $y = \sqrt{4-(x-2)^2}$.

Thể tích cần tìm $V = \pi.\left[\int_3^6 \frac{x^2}{3}\mathrm{d}x - \int_3^4 \left[4-(x-2)^2\right]\mathrm{d}x + \int_6^8 \left[16-(x-4)^2\right]\mathrm{d}x\right] = \frac{98\pi}{3}$.

Phần 6. Bài toán vận tốc

Giả sử $v(t)$ là vận tốc của vật M tại thời điểm t và $s(t)$ là quãng đường vật đi được sau khoảng thời gian t tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Ta có mối liên hệ giữa $s(t)$ và $v(t)$ như sau:

- Đạo hàm của quãng đường là vận tốc: $s'(t) = v(t)$.
- Nguyên hàm của vận tốc là quãng đường $s(t) = \int v(t)\mathrm{d}t$.

$\longrightarrow$ từ đây ta cũng có quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $t = [a;b]$ là

$$\boxed{\int_a^b v(t)\mathrm{d}t = s(b) - s(a)}.$$

Nếu gọi $a(t)$ là gia tốc của vật M thì ta có mối liên hệ giữa $v(t)$ và $a(t)$ như sau:

- Đạo hàm của vận tốc là gia tốc: $v'(t) = a(t)$.
- Nguyên hàm của gia tốc là vận tốc: $v(t) = \int a(t)\mathrm{d}t$.

Câu 1. **(ĐỀ MINH HỌA 2016 – 2017)** Một ô tô đang chạy với vận tốc $10\mathrm{m/s}$ thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10(\mathrm{m/s})$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. $0,2\mathrm{m}$. **B.** $2\mathrm{m}$. **C.** $10\mathrm{m}$. **D.** $20\mathrm{m}$.

Lời giải. Lúc dừng hẳn thì $v(t) = 0 \longrightarrow -5t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Vậy từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô đi được quãng đường là

$$s = \int_0^2 (-5t+10)\mathrm{d}t = \left(-\frac{5}{2}t^2 + 10t\right)\Big|_0^2 = 10\mathrm{m}.$$ **Chọn C.**

Câu 2. Một ô tô đang đi với vận tốc lớn hơn $72\mathrm{km/h}$, phía trước là đoạn đường chỉ cho phép chạy với tốc độ tối đa là $72\mathrm{km/h}$, vì thế người lái xe đạp phanh để ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 30 - 2t(\mathrm{m/s})$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc bắt đầu đạp phanh đến lúc đạt tốc độ $72\mathrm{km/h}$, ô tô đã di chuyển quãng đường là bao nhiêu mét?

A. $100\mathrm{m}$. **B.** $125\mathrm{m}$. **C.** $150\mathrm{m}$. **D.** $175\mathrm{m}$.

Lời giải. Ta có $72\mathrm{km/h} = 20\mathrm{m/s}$.

Từ lúc bắt đầu đạp phanh đến lúc đạt tốc độ $72\mathrm{km/h}$, ta có phương trình

$$30 - 2t = 20 \Leftrightarrow t = 5.$$

Vậy từ lúc đạp phanh đến khi ô tô đạt tốc độ $72\mathrm{km/h}$, ô tô đi được quãng đường là

$$s=\int_0^5 (30-2t)\mathrm{d}t=125\text{m}.$$ **Chọn B.**

Câu 3. Hai viên đạn cùng rời khỏi nòng súng thời điểm $t=0$ với những vận tốc khác nhau: viên đạn thứ nhất có vận tốc $v_1(t)=3t^2+1\,(\text{m/s})$, viên đạn thứ hai có vận tốc $v_2(t)=2t+4\,(\text{m/s})$. Hỏi từ giây thứ mấy thì viên đạn thứ nhất xa điểm xuất phát hơn viên đạn thứ hai?

A. Giây thứ nhất. **B.** Giây thứ hai.

C. Giây thứ ba. **D.** Giây thứ tư.

Lời giải. Quảng đường

$$s_1(t)=\int(3t^2+1)\mathrm{d}t=t^3+t+C_1\xrightarrow{s_1(0)=0}C_1=0.\text{ Do đó } s_1(t)=t^3+t.$$

$$s_2(t)=\int(2t+4)\mathrm{d}t=t+4t+C_2\xrightarrow{s_2(0)=0}C_2=0.\text{ Do đó } s_2(t)=t^2+4t.$$

Xét $s_1(t)=s_2(t)\Leftrightarrow t^3+t=t^2+4t\Leftrightarrow t^3-t^2-3t=0\xrightarrow{t>0}t=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\approx 2,3.$

Ta có $s_1(3)=30>s_2(3)=21\longrightarrow$ từ giây thứ ba trở đi thì viên đạn thứ nhất xa điểm xuất phát hơn viên đạn thứ hai. **Chọn C.**

Câu 4. Một ô tô đang chạy với vận tốc $10\ (\text{m/s})$ thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+10\ (\text{m/s})$, trong đó t là khoảng thời gian được tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quảng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng.

A. 16m. **B.** 25m. **C.** 50m. **D.** 55m.

Lời giải. Ta có phương trình: $-2t+10=0\Leftrightarrow t=5.$

Suy ra thời gian tính từ lúc bắt đầu đạp phanh đến khi dừng là 5 giây. Vậy trong 8 giây cuối cùng thì có 3 giây ô tô chuyển động với vận tốc 10m/s và 5 giây chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+10(\text{m/s})$. Suy ra quảng đường ô tô di chuyển là $s=3.10+\int_0^5(-2t+10)\mathrm{d}t=30+25=55$ m. **Chọn D.**

Câu 5. Một vật đang chuyển động với vận tốc 6m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=\dfrac{3}{t+1}\text{m/s}^2$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc. Hỏi vận tốc của vật sau 10 giây gần nhất với kết quả nào sau đây?

A. 11m/s. **B.** 12m/s. **C.** 13m/s. **D.** 14m/s.

Lời giải. Ta có $v(t)=\int\dfrac{3}{t+1}\mathrm{d}t=3\ln|t+1|+C.$

Tại thời điểm lúc bắt đầu tăng tốc $t=0$ thì $v=6\text{m/s}$ nên ta có $3\ln 1+C=6\Leftrightarrow C=6.$

Suy ra $v(t)=3\ln|t+1|+6(\text{m/s}).$

Tại thời điểm $t=10\,s\longrightarrow v(10)=3\ln 11+6\approx 13\text{m/s}.$ **Chọn C.**

Câu 6. Một vật đang chuyển động với vận tốc 10m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=3t+t^2\left(\text{m/s}^2\right)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc. Hỏi quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc bằng bao nhiêu mét?

A. $\dfrac{1900}{3}\text{m}.$ **B.** $\dfrac{2200}{3}\text{m}.$ **C.** $\dfrac{4000}{3}\text{m}.$ **D.** $\dfrac{4300}{3}\text{m}.$

Lời giải. Ta có $v(t)=\int\left(3t+t^2\right)\text{d}t=\dfrac{3t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}+C.$

Tại thời điểm lúc bắt đầu tăng tốc $t=0$ thì $v=10\text{m/s}$ nên suy ra $C=10.$

Suy ra $v(t)=\dfrac{3t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}+10(\text{m/s}).$

Vậy quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc bằng $s=\int\limits_0^{10}\left(\dfrac{3t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}+10\right)dt=\left.\left(\dfrac{t^3}{2}+\dfrac{t^4}{12}+10t\right)\right|_0^{10}=\dfrac{4300}{3}\text{m}.$ **Chọn D.**

Câu 7. Một ô tô đang chạy thẳng đều với vận tốc $v_0(\text{m/s})$ thì người đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+v_0(\text{m/s})$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn ô tô di chuyển được 40m thì vận tốc ban đầu v_0 bằng bao nhiêu?

A. $v_0=20\text{m/s}.$ **B.** $v_0=25\text{m/s}.$ **C.** $v_0=40\text{m/s}.$ **D.** $v_0=80\text{m/s}.$

Lời giải. Lúc dừng hẳn thì $v(t)=0\longrightarrow -5t+v_0=0\Leftrightarrow t=\dfrac{v_0}{5}.$

Theo giả thiết, ta có: $40\text{m}=\int\limits_0^{\frac{v_0}{5}}\left(-5t+v_0\right)\text{d}t=\left.\left(-\dfrac{5}{2}t^2+v_0t\right)\right|_0^{\frac{v_0}{5}}=-\dfrac{v_0^2}{10}+\dfrac{v_0^2}{5}=\dfrac{v_0^2}{10}$

$\longrightarrow 40\text{m}=\dfrac{v_0^2}{10}\longrightarrow v_0=20\text{m/s}.$ **Chọn A.**

Câu 8. Tại một nơi không có gió, một chiếc khí cầu đang đứng yên ở độ cao 162m so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật $v(t)=10t-t^2(\text{m/s})$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động. Hỏi lúc vừa tiếp đất, vận tốc v của khí cầu bằng bao nhiêu?

A. $v=3\text{m/s}.$ **B.** $v=5\text{m/s}.$ **C.** $v=7\text{m/s}.$ **D.** $v=9\text{m/s}.$

Lời giải. Do $v(t)=10t-t^2\longrightarrow 0<t<10.$

Giả sử chiếc khí cầu chạm đất kể từ lúc bắt đầu chuyển động là t_1 giây $\left(0<t_1<10\right)$.

Theo đề bài ta có phương trình $162=\int\limits_0^{t_1}\left(10t-t^2\right)\text{d}t=\left.\left(5t^2-\dfrac{t^3}{3}\right)\right|_0^{t_1}=5t_1^2-\dfrac{t_1^3}{3}$

$\Leftrightarrow -\frac{t_1^3}{3}+5t_1^2-162=0 \xrightarrow{0<t_1<10} t_1=9 \longrightarrow v(9)=9\text{m/s}.$ **Chọn D.**

Câu 9. (ĐỀ THI CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{2}t^3+6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 8 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. $18\text{m/s}.$ **B.** $24\text{m/s}.$ **C.** $64\text{m/s}.$ **D.** $108\text{m/s}.$

Lời giải. Vận tốc $v(t)=s'(t)=-\frac{3}{2}t^2+12t.$

Ycbt là đi tìm GTLN của hàm số $v(t)=-\frac{3}{2}t^2+12t$ với $0\le t\le 8.$

Đạo hàm và lập bảng biến thiên ta tìm được $\max\limits_{[0;8]} v(t)=v(4)=24\text{m/s}.$ **Chọn B.**

Câu 10. Một tàu lửa đang chạy với vận tốc $200\,\text{m/s}$ thì người lái tàu đạp phanh. Từ thời điểm đó, tàu chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(\text{t})=200+at\,(\text{m/s}),$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh và $a\left(\text{m/s}^2\right)$ là gia tốc. Biết rằng khi đi được 1500m thì tàu dừng, hỏi gia tốc của tàu bằng bao nhiêu?

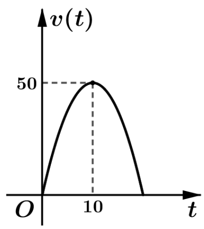
A. $a=-\frac{200}{13}\text{m/s}^2.$ **B.** $a=-\frac{100}{13}\text{m/s}^2.$ **C.** $a=-\frac{40}{3}\text{m/s}^2.$ **D.** $a=\frac{40}{3}\left(\text{m/s}^2\right).$

Lời giải. Khi tàu dừng hẳn thì $v=0\Leftrightarrow 200+at=0\longrightarrow t=-\frac{200}{a}(\text{m/s}).$

Theo đề bài, ta có: $1500=\int_0^{-\frac{200}{a}}(200+at)\,\text{d}t=\left(200t+\frac{at^2}{2}\right)\Big|_0^{-\frac{200}{a}}=-\frac{40000}{a}+\frac{40000}{2a}.$

Suy ra $a=-\frac{40}{3}\left(\text{m/s}^2\right).$ **Chọn C.**

Câu 11. Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu tăng tốc với vận tốc tăng liên tục được biểu thị bằng đồ thị là đường cong Parabol có hình bên. Biết rằng sau 10s thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 50m/s và bắt đầu giảm tốc. Hỏi từ lúc bắt đầu tăng tốc đến lúc đạt vận tốc cao nhất thì xe đã đi được quãng đường bao nhiêu mét?

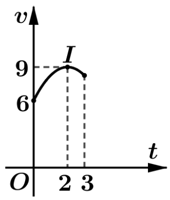


A. $\frac{1000}{3}\text{m}.$ **B.** $\frac{1100}{3}\text{m}.$ **C.** $\frac{1400}{3}\text{m}.$ **D.** $300\text{m}.$

Lời giải. Dựa vào đồ thị suy ra $v(t)=-\frac{1}{2}t^2+10t$ (m/s).

Quảng đường: $s=\int_0^{10}v(t)\,\text{d}t=\int_0^{10}\left(-\frac{1}{2}t^2+10t\right)\text{d}t=\frac{1000}{3}\text{m}.$ **Chọn A.**

Câu 12. Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị là một phần của đường Parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



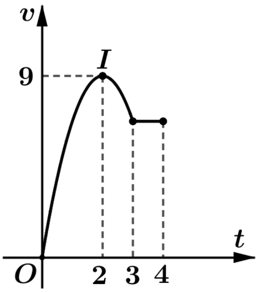
A. $s=24,25\text{km}$. **B.** $s=24,75\text{km}$. **C.** $s=25,25\text{km}$. **D.** $s=26,75\text{km}$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị suy ra $v(t)=-\frac{3}{4}t^2+3t+6\ (\text{m/s})$.

Quảng đường người đó đi được trong khoảng thời gian 3 giờ là:

$$s=\int_0^3\left(-\frac{3}{4}t^2+3t+6\right)dt=24,75\text{km}.$$ **Chọn B.**

Câu 13. Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường Parabol có đỉnh $I(2;9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật chuyển động trong 4 giờ đó.



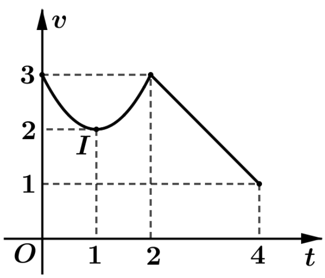
A. $s=24\text{km}$. **B.** $s=26,5\text{km}$. **C.** $s=27\text{km}$. **D.** $s=28,5\text{km}$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị suy ra $v(t)=\begin{cases}-\frac{9}{4}t^2+9t\ (\text{m/s}) & \text{khi } 0\le t\le 3\\ \frac{27}{4}\ (\text{m/s}) & \text{khi } 3\le t\le 4\end{cases}$.

Quảng đường người đó đi được trong khoảng thời gian 4 giờ là:

$$s=\int_0^3\left(-\frac{9}{4}t^2+9t\right)dt+\int_3^4\frac{27}{4}dt=27\text{km}.$$ **Chọn C.**

Câu 14. Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc $v\ (\text{km/h})$ phụ thuộc thời gian $t\ (\text{h})$ có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 2 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường Parabol có đỉnh $I(1;2)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một phần đường thẳng. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



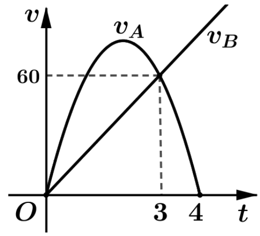
A. $s=5,44\text{km}$. **B.** $s=8,67\text{km}$. **C.** $s=9,27\text{km}$. **D.** $s=11,35\text{km}$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị suy ra $v(t)=\begin{cases}t^2-2t+3 & \text{khi } 0\le t\le 2\\ 5-t & \text{khi } 2\le t\le 4\end{cases}$.

Quảng đường người đó đi được trong khoảng thời gian 4 giờ là:

$$s=\int_0^2\left(t^2-2t+3\right)\mathrm{d}t+\int_2^4(5-t)\,\mathrm{d}t=\frac{26}{3}\approx 8,67\,\mathrm{km}.$$ **Chọn B.**

Câu 15. Cho đồ thị biểu diễn vận tốc của hai xe A và B khởi hành cùng một lúc, bên cạnh nhau và trên cùng một con đường. Biết đồ thị biểu diễn vận tốc của xe A là một đường Parabol, đồ thị biểu diễn vận tốc của xe B là một đường thẳng ở hình bên. Hỏi sau khi đi được 3 giây khoảng cách giữa hai xe là bao nhiêu mét?



A. $0\,\mathrm{m}$. **B.** $60\,\mathrm{m}$. **C.** $90\,\mathrm{m}$. **D.** $270\,\mathrm{m}$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị suy ra $\begin{cases} v_A(t)=-20t^2+80t\ \ (\mathrm{m/s}) \\ v_B(t)=20t\ \ (\mathrm{m/s}) \end{cases}$.

Quãng đường đi được sau 3 giây của xe A là: $s_A=\int_0^3\left(-20t^2+80t\right)\mathrm{d}t=180\mathrm{m}.$

Quãng đường đi được sau 3 giây của xe B là: $s_B=\int_0^3 20t\,\mathrm{d}t=90\mathrm{m}.$

Vậy khoảng cách giữa hai xe sau 3 giây sẽ bằng: $\left|s_A-s_B\right|=90\,\mathrm{m}.$ **Chọn C.**