

Câu 1. (2,0 điểm) Giải phương trình $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$.

Câu 2. (2, 0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A . Trên hai cạnh AB và AC lần lượt lấy hai điểm B' và C' sao cho $AB \cdot AB' = AC \cdot AC'$. Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng $AM \perp B'C'$.

Câu 3. (3,0 điểm) Cho phương trình $\cos 2x + \sin x + m - 3 = 0$.

a. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

b. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0; \pi)$.

Câu 4. (4,0 điểm) Cho $f(x) = mx^2 + 4(m-1)x + m-1$ (m là tham số).

a. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $f(x) < 0$ với mọi $x \in (0; 2)$.

Câu 5. (4,0 điểm) Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+2} = m \\ x + y = 3m \end{cases} \quad (m \text{ là tham số}).$$

a. Giải hệ phương trình khi $m = 4$.

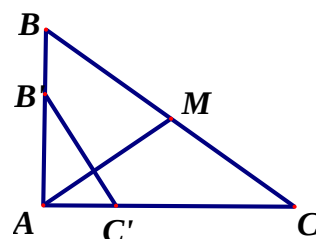
b. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ phương trình có nghiệm.

Câu 6. (2,0 điểm) Cho tam giác ABC . Gọi O là điểm tùy ý nằm trong tam giác. Kẻ OM, ON và OP lần lượt vuông góc với các cạnh BC, AC và AB . Chứng minh $\frac{BC}{OM} + \frac{AC}{ON} + \frac{AB}{OP} \geq \frac{2p}{r}$ trong đó p là nửa chu vi của tam giác ABC và r là bán kính của đường tròn nội tiếp của tam giác ABC .

Câu 7. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại B . Kéo dài AC về phía C một đoạn $CD = AB = 1$; $\widehat{CBD} = 30^\circ$. Tính độ dài đoạn AC .

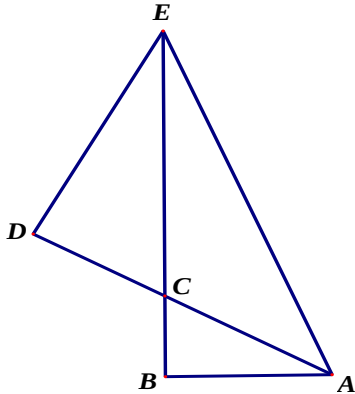
----- HẾT -----

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1 (2,0 điểm)	Đặt: $y = \sqrt[3]{2x-1}$. Ta có: $\begin{cases} x^3+1=2y \\ y^3+1=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+1=2y \\ x^3-y^3=2(y-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+1=2y \\ (x-y)(x^2-xy+y^2+2)=0 \end{cases}$	1,0
	Do $x^2-xy+y^2+2 = \left(x-\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 2 > 0 \forall x, y$	0,25
	Nên ta có hệ: $\begin{cases} x^3+1=2y \\ x=y \end{cases} \Rightarrow x^3+1=2x \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-1)=0$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$	0,25
Câu 2 (2,0 điểm)	Vì M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$	0,5
	Ta có: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B'C'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB'}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB'} = 0$ Vậy: $AM \perp B'C'$	1,5
Câu 3 (3,0 điểm)	a. (1,5 điểm) $\cos 2x + \sin x + m - 3 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x = m - 2$	0,25
	Đặt: $t = \sin x, t \in [-1; 1]$	
	Phương trình trở thành $2t^2 - t = m - 2$	0,5
	Xét hàm số $y = 2t^2 - t$ với $t \in [-1; 1]$	
	Để phương trình có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m - 2 = 1 \Leftrightarrow m = 3$	0,75



	b. (1,5 điểm) $x \in (0; \pi) \Rightarrow t \in (0; 1]$ Xét hàm số $y = 2t^2 - t$ trên nửa khoảng $(0; 1]$ Đề phương trình có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -\frac{1}{8} < m - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{15}{8} < m < 2$	1,0 0,5
Câu 4 (4,0 điểm)	a. (1,5 điểm) + Khi $m = 0$ thì $f(x) > 0 \Leftrightarrow -4x - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{4}$ (loại)	0,5
	+ Khi $m \neq 0$ đề $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ (m-1)(3m-4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \frac{4}{3}$	1,0
	b. (2,5 điểm) + Khi $m = 0$ thì $f(x) < 0 \Leftrightarrow -4x - 1 < 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{4}$ (thỏa mãn)	0,5
	+ $\begin{cases} m < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ (m-1)(3m-4) < 0 \end{cases} \Rightarrow VN$	0,5
	+ Khi $m > 0$ đề $f(x) < 0 \forall x \in (0; 2)$ thì $f(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 \leq 0 < 2 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \leq 0 < x_2 \quad (1) \\ x_1 < 2 \leq x_2 \quad (2) \end{cases}$	0,5
	$(1) \Leftrightarrow \frac{m-1}{m} \leq 0 \Leftrightarrow 0 < m \leq 1$	0,5
	$(2) \Leftrightarrow (x_1 - 2)(x_2 - 2) \leq 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 0 < m \leq \frac{13}{10}$	0,5
	Vậy: $0 \leq m \leq \frac{13}{10}$.	
Câu 5 (4,0 điểm)	a. (1,5 điểm) Khi $m = 4$ ta có $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+2} = 4 \\ x + y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12 - x \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{14-x} = 4 \end{cases}$ $(-1 \leq x \leq 14; -2 \leq y \leq 13)$	1,0

	$\Rightarrow 2\sqrt{(x+1)(14-x)} = 1 \Leftrightarrow -4x^2 + 52x + 55 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13+4\sqrt{14}}{2} \\ x = \frac{13-4\sqrt{14}}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} y = \frac{11-4\sqrt{14}}{2} \\ y = \frac{11+4\sqrt{14}}{2} \end{cases}$ Vậy: hệ có hai nghiệm $\left(\frac{13+4\sqrt{14}}{2}; \frac{11-4\sqrt{14}}{2}\right)$ và $\left(\frac{13-4\sqrt{14}}{2}; \frac{11+4\sqrt{14}}{2}\right)$	0,5
	b. (2,5 điểm) Đặt: $a = \sqrt{x+1}$ và $b = \sqrt{y+2}$. Hệ trở thành $\begin{cases} a+b=m \\ a^2+b^2=3m+3 \\ a \geq 0, b \geq 0 \end{cases}$	0,5
	Đề hệ có nghiệm khi và chỉ khi đường thẳng $a+b=m$ có điểm chung với đường tròn $a^2+b^2=3m+3$ trong đó $a \geq 0$ và $b \geq 0$	1,0
	$\sqrt{3m+3} \leq m \leq \sqrt{6m+6} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-6m-6 \leq 0 \\ m^2-3m-3 \geq 0 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3+\sqrt{21}}{2} \leq m \leq 3+\sqrt{15}$	1,0
	Vậy: $\frac{3+\sqrt{21}}{2} \leq m \leq 3+\sqrt{15}$	
Câu 6 (2,0 điểm)	Theo BĐT Bunhiacopski, ta có $\left(\sqrt{\frac{BC}{OM}} \cdot \sqrt{BC \cdot OM} + \sqrt{\frac{AC}{ON}} \cdot \sqrt{AC \cdot ON} + \sqrt{\frac{AB}{OP}} \cdot \sqrt{AB \cdot OP} \right)^2$ $\leq \left(\frac{BC}{OM} + \frac{AC}{ON} + \frac{AB}{OP} \right) (BC \cdot OM + AC \cdot ON + AB \cdot OP)$ $\Leftrightarrow (BC + AC + AB)^2 \leq \left(\frac{BC}{OM} + \frac{AC}{ON} + \frac{AB}{OP} \right) (BC \cdot OM + AC \cdot ON + AB \cdot OP)$	1,0
	$\Leftrightarrow \left(\frac{BC}{OM} + \frac{AC}{ON} + \frac{AB}{OP} \right) \cdot 2S_{ABC} \geq 4p^2 \Leftrightarrow \frac{BC}{OM} + \frac{AC}{ON} + \frac{AB}{OP} \geq \frac{2p}{r} \text{ (do } S_{ABC} = pr)$	0,5

	Dấu bằng xảy ra $OM = ON + OP \Leftrightarrow O$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC	0,5
Câu 7 (3,0 điểm)	Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với CD cắt BC tại E Tứ giác $ABDE$ nội tiếp $\angle DBC = \angle DAE$	1,0
		
	Đặt $AC = x > 1 \Rightarrow AD = x + 1$ $DE = AD \cdot \tan \frac{\pi}{6} = \frac{x+1}{\sqrt{3}}; BC = \sqrt{x^2 - 1}$	0,5
	$\triangle CDE \sim \triangle CBA \Rightarrow \frac{CD}{ED} = \frac{BC}{BA} \Leftrightarrow \sqrt{3} = (x+1)\sqrt{x^2 - 1}$	1,0
	$\Leftrightarrow x(x^3 - 2) + 2(x^3 - 2) = 0 \Leftrightarrow (x^3 - 2)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$ Vậy: $AC = \sqrt[3]{2}$.	0,5