



PHÂN TÍCH – BÌNH LUẬN – PHÁT TRIỂN
ĐỀ THI THỬ THPTQG LẦN 1 - 2018-2019
CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH

“Chân thành cảm ơn tập thể thầy cô Tổ 4 – Strong Team .

Tâm huyết tạo lên sản phẩm vì thế hệ học sinh thân yêu của chúng ta.”

- Admin Tổ 4 – Strong Team: Nguyễn Việt Hải – Hue Tran – Võ Minh Chung – Đỗ Thuận – Mê Kiểm Hiệp
- Thầy cô Tổ 4 – Strong Team

MÃ ĐỀ THI: 209

Câu 1. Số nghiệm âm của phương trình $\log|x^2 - 3| = 0$ là

- A. 2. B. 4. C. 1. D. 3.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ hình chữ nhật với $AB = 3a$, $BC = a$, cạnh bên $SD = 2a$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

- A. $3a^3$. B. a^3 . C. $2a^3$. D. $6a^3$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-3; 4; 0)$, $\vec{b} = (5; 0; 12)$. Côsin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

- A. $\frac{3}{13}$. B. $\frac{5}{6}$. C. $-\frac{5}{6}$. D. $-\frac{3}{13}$.

Câu 4. Giả sử a, b là các số thực dương bất kỳ. Biểu thức $\ln \frac{a}{b^2}$ bằng

- A. $\ln a - \frac{1}{2} \ln b$. B. $\ln a + \frac{1}{2} \ln b$. C. $\ln a + 2 \ln b$. D. $\ln a - 2 \ln b$.

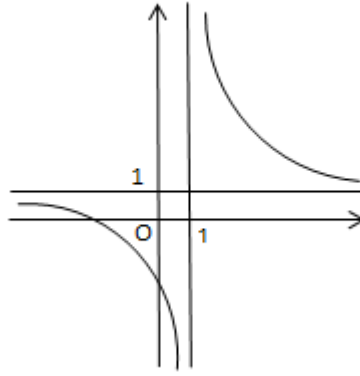
Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho $E(-1; 0; 2)$ và $F(2; 1; -5)$. Phương trình đường thẳng EF là

- A. $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-7}$. B. $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-7}$.
 C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-3}$. D. $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{3}$.

Câu 6. Cho cấp số nhân (u_n) , với $u_1 = -9, u_4 = \frac{1}{3}$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. -3 . C. 3 . D. $-\frac{1}{3}$.

Câu 7. Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây



- A. $y = -x^3 + 3x + 1$. B. $y = \frac{x+1}{x-1}$. C. $y = \frac{x-1}{x+1}$. D. $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

Câu 8. Trong không gian Oxyz, mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(3; -1; 4)$, đồng thời vuông góc với giá của vector $\vec{a}(1; -1; 2)$ có phương trình là

- A. $3x - y + 4z - 12 = 0$. B. $3x - y + 4z + 12 = 0$.
C. $x - y + 2z - 12 = 0$. D. $x - y + 2z + 12 = 0$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3; 3]$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên.

x	-3	-1	0	1	2	3	
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-

Mệnh đề nào sau đây **sai** về hàm số đó?

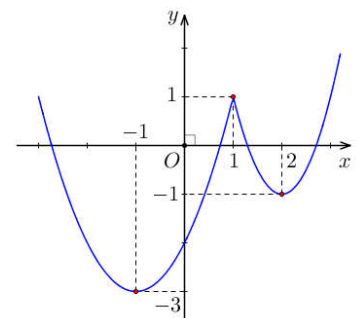
- A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$. B. Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.
C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$. D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Câu 10. Giả sử $f(x)$ là một hàm số bất kì liên tục trên khoảng $(\alpha; \beta)$ và $a, b, c, b+c \in (\alpha; \beta)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. B. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{b+c} f(x)dx - \int_a^c f(x)dx$.
C. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{b+c} f(x)dx + \int_{b+c}^b f(x)dx$. D. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng về hàm số đó?

- A. Nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.
B. Đồng biến trên khoảng $(-3; 1)$.
C. Đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.
D. Nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.



Câu 12. Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^{-x}$ là

A. $-\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C.$

B. $-3^{-x} + C.$

C. $3^{-x} \ln 3 + C.$

D. $\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C.$

Câu 13. Phương trình $\log(x+1) = 2$ có nghiệm là

A. 11.

B. 9.

C. 101.

D. 99.

Câu 14. Cho k, n ($k < n$) là các số nguyên dương bất kì. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $A_n^k = \frac{n!}{k!}.$

B. $A_n^k = k! \cdot C_n^k.$

C. $A_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$

D. $A_n^k = n! \cdot C_n^k.$

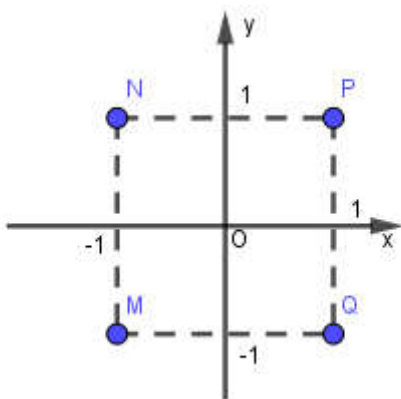
Câu 15. Cho các số phức $z = -1 + 2i$, $w = 2 - i$. Điểm nào trong hình bên biểu diễn số phức $z + w$?

A. N.

B. P.

C. Q.

D. M.



Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 1 = 0$, $(Q): x - z + 2 = 0$. Mặt phẳng (α) vuông góc với cả (P) và (Q) đồng thời cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 3. Phương trình của mp (α) là:

A. $x + y + z - 3 = 0.$

B. $x + y + z + 3 = 0.$

C. $-2x + z + 6 = 0.$

D. $-2x + z - 6 = 0.$

Câu 17. Cho số phức z thỏa mãn $(1 - \sqrt{3}i)^2 z = 4 - 3i$. Môđun của z bằng

A. $\frac{5}{4}.$

B. $\frac{5}{2}.$

C. $\frac{2}{5}.$

D. $\frac{4}{5}.$

Câu 18. Một hình trụ tròn xoay có độ dài đường sinh bằng đường kính đáy và thể tích của khối trụ bằng 16π . Diện tích toàn phần của khối trụ đã cho bằng

A. $16\pi.$

B. $12\pi.$

C. $8\pi.$

D. $24\pi.$

Câu 19. Biết rằng phương trình $\log_2^2 x - 7 \log_2 x + 9 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 . Giá trị $x_1 x_2$ bằng

A. 128.

B. 64.

C. 9.

D. 512.

Câu 20. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{3^x - 1}{3^x + 1}$ là:

A. $f'(x) = -\frac{2}{(3^x + 1)^2} \cdot 3^x.$

B. $f'(x) = \frac{2}{(3^x + 1)^2} \cdot 3^x.$

$$\text{C. } f'(x) = \frac{2}{(3^x + 1)^2} \cdot 3^x \ln 3.$$

$$\text{D. } f'(x) = -\frac{2}{(3^x + 1)^2} \cdot 3^x \ln 3.$$

Câu 21. Cho $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành. Mệnh đề nào sau đây **sai** ?

$$\text{A. } S = \int_{-2}^2 |f(x)| dx.$$

$$\text{B. } S = 2 \left| \int_0^1 f(x) dx \right| + 2 \left| \int_1^2 f(x) dx \right|.$$

$$\text{C. } S = 2 \int_0^2 |f(x)| dx.$$

$$\text{D. } S = 2 \left| \int_0^2 f(x) dx \right|.$$

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x^2 - 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = 2f(-x)$ đồng biến trên khoảng

$$\text{A. } (2; +\infty).$$

$$\text{B. } (-\infty; -1).$$

$$\text{C. } (-1; 1).$$

$$\text{D. } (0; 2).$$

Câu 23. Đồ thị hàm số $y = \frac{x^3 - 4x}{x^3 - 3x - 2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

$$\text{A. } 4.$$

$$\text{B. } 1.$$

$$\text{C. } 3.$$

$$\text{D. } 2.$$

Câu 24. Biết rằng α, β là các số thực thỏa mãn $2^\beta (2^\alpha + 2^\beta) = 8(2^{-\alpha} + 2^{-\beta})$. Giá trị của $\alpha + 2\beta$ bằng

$$\text{A. } 1.$$

$$\text{B. } 2.$$

$$\text{C. } 4.$$

$$\text{D. } 3.$$

Câu 25. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt đáy bằng 45° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

$$\text{A. } \frac{a^3 \sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{B. } \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{C. } \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}.$$

$$\text{D. } \frac{a^3 \sqrt{3}}{6}.$$

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f(x)$		1	-2	1	

Hàm số $y = f(2x)$ đạt cực đại tại

$$\text{A. } x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{B. } x = -1.$$

$$\text{C. } x = 1.$$

$$\text{D. } x = -2.$$

Câu 27. Cho hình nón tròn xoay có bán kính bằng 3 và diện tích xung quanh bằng $6\sqrt{3}\pi$. Góc ở đỉnh của hình nón đã cho bằng

$$\text{A. } 60^\circ.$$

$$\text{B. } 150^\circ.$$

$$\text{C. } 90^\circ.$$

$$\text{D. } 120^\circ.$$

Câu 28. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 + 4z + 7 = 0$. Số phức $\overline{z_1} z_2 + \overline{z_2} z_1$ bằng

A. 2.

B. 10.

C. $2i$.D. $10i$.

Câu 29. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \frac{9}{x}$ trên đoạn $[1; 4]$. Giá trị của $m + M$ bằng

A. $\frac{65}{4}$.

B. 16.

C. $\frac{49}{4}$.

D. 10.

Câu 30. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có I, J tương ứng là trung điểm của BC và BB' . Góc giữa hai đường thẳng AC và IJ bằng

A. 45° .B. 60° .C. 30° .D. 120° .

Câu 31. Giải bóng chuyền quốc tế VTV Cup có 8 đội tham gia, trong đó có hai đội Việt Nam. Ban tổ chức bốc thăm ngẫu nhiên để chia thành hai bảng đấu, mỗi bảng 4 đội. Xác suất để hai đội của Việt Nam nằm ở hai bảng khác nhau bằng

A. $\frac{2}{7}$.B. $\frac{5}{7}$.C. $\frac{3}{7}$.D. $\frac{4}{7}$.

Câu 32. Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0; \pi)$ là

A. $-x \cot x + \ln(\sin x) + C$.B. $x \cot x - \ln|\sin x| + C$.C. $x \cot x + \ln|\sin x| + C$.D. $-x \cot x - \ln(\sin x) + C$.

Câu 33. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A . Gọi E là trung điểm của AB . Cho biết $AB = 2a$, $BC = \sqrt{13}a$, $CC' = 4a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và CE bằng

A. $\frac{4a}{7}$.B. $\frac{12a}{7}$.C. $\frac{6a}{7}$.D. $\frac{3a}{7}$.

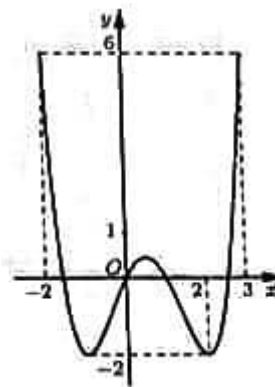
Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x^3 - 3x) = m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?

A. 3.

B. 2.

C. 6.

D. 7.



Câu 35. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z - 1|^2 + |z - \bar{z}|i + (z + \bar{z})i^{2019} = 1$?

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Câu 36. Cho $f(x)$ mà hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m + x^2 < f(x) + \frac{1}{3}x^3$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 3)$ là

- A. $m < f(0)$. B. $m \leq f(0)$. C. $m \leq f(3)$. D. $m < f(1) - \frac{2}{3}$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(2; 1; 4)$, $N(5; 0; 0)$, $P(1; -3; 1)$. Gọi $I(a; b; c)$ là tâm của mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) đồng thời đi qua các điểm M , N , P . Tìm c biết rằng $a + b + c < 5$.

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.

Câu 38. Biết rằng $\int_0^1 \frac{dx}{3x + 5\sqrt{3x+1} + 7} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$, với a, b, c là các số hữu tỉ.

Giá trị của $a + b + c$ bằng

- A. $-\frac{10}{3}$. B. $-\frac{5}{3}$. C. $\frac{10}{3}$. D. $\frac{5}{3}$.

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và hai điểm $A(-1; 3; 1)$ và $B(0; 2; -1)$. Gọi $C(m; n; p)$ là điểm thuộc đường thẳng d sao cho diện tích tam giác ABC bằng $2\sqrt{2}$. Giá trị của tổng $m + n + p$ bằng

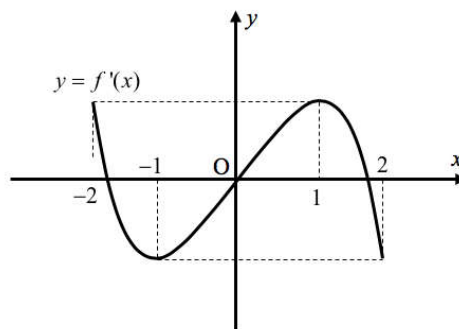
- A. -1. B. 2. C. 3. D. -5.

Câu 40. Bất phương trình $(x^3 - 9x) \ln(x + 5) \leq 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

- A. 4. B. 7. C. 6. D. Vô số.

Câu 41. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(\cos x) + x^2 - x$ đồng biến trên khoảng

- A. $(1; 2)$. B. $(-1; 0)$. C. $(0; 1)$. D. $(-2; -1)$.



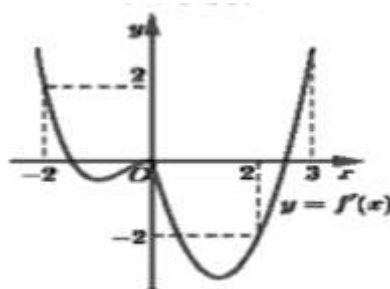
Câu 42. Cho hàm số $f(x) = 2^x - 2^{-x}$. Gọi m_0 là số lớn nhất trong các số nguyên m thỏa mãn $f(m) + f(2m - 2^{12}) < 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $m_0 \in [1513; 2019)$. B. $m_0 \in [1009; 1513)$. C. $m_0 \in [505; 1009)$. D. $m_0 \in [1; 505)$.

Câu 43. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)e^{2x}$ là

- A. $(x-2)e^x + e^x + C$. B. $(x+2)e^{2x} + e^x + C$. C. $(x-1)e^x + C$. D. $(x+1)e^x + C$.

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên.



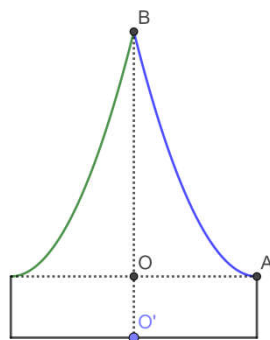
Hàm số $y = \left| f(x) + \frac{1}{2}x^2 - f(0) \right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị trong khoảng $(-2; 3)$.

- A. 6. B. 2. C. 5. D. 3

Câu 45. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = a\sqrt{11}$, cosin của góc hợp bởi hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng $\frac{1}{10}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

- A. $3a^3$. B. $9a^3$. C. $4a^3$. D. $12a^3$.

Câu 46. Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn An đã làm một chiếc mũ “cách điệu” cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO' = 5$ cm, $OA = 10$ cm, $OB = 20$ cm, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A . Thể tích của chiếc mũ bằng

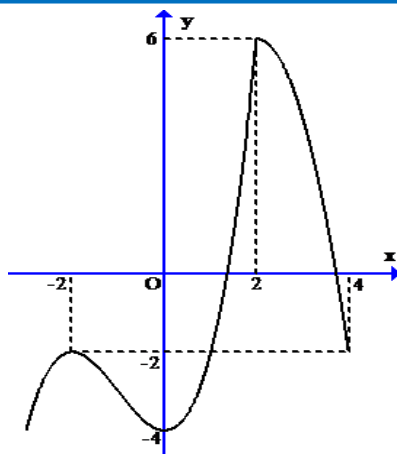


- A. $\frac{2750\pi}{3} (\text{cm}^3)$. B. $\frac{2500\pi}{3} (\text{cm}^3)$. C. $\frac{2050\pi}{3} (\text{cm}^3)$. D. $\frac{2250\pi}{3} (\text{cm}^3)$.

Câu 47. Giả sử z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $(z-6)(8+\overline{z}i)$ là số thực. Biết rằng $|z_1 - z_2| = 4$, giá trị nhỏ nhất của $|z_1 + 3z_2|$ bằng

- A. $5 - \sqrt{21}$. B. $20 - 4\sqrt{21}$. C. $20 - 4\sqrt{22}$. D. $5 - \sqrt{22}$.

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2}+1\right)+x=m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-2;2]$?

A. 11.

B. 9.

C. 8.

D. 10.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$ cho ba đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, $\Delta_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$, $\Delta_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1}$. Đường thẳng Δ vuông góc với d đồng thời cắt Δ_1, Δ_2 tương ứng

tại H, K sao cho độ dài HK nhỏ nhất. Biết rằng Δ có một vector chỉ phương $\vec{u}(h; k; 1)$. Giá trị $h-k$ bằng

A. 0.

B. 4.

C. 6.

D. -2.

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}(1; -1; 0)$ và hai điểm $A(-4; 7; 3)$, $B(4; 4; 5)$. Giả sử M, N là hai điểm thay đổi trong mặt phẳng (Oxy) sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{a}$ và $MN = 5\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng

A. $\sqrt{17}$.B. $\sqrt{77}$.C. $7\sqrt{2} - 3$.D. $\sqrt{82} - 5$.

PHÂN TÍCH – BÌNH LUẬN – PHÁT TRIỂN ĐỀ THI THỬ ĐẠI HỌC VINH LẦN 1
NĂM 2018 -2019

Câu 1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = AA' = 2a$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình hộp đã cho bằng

A. $9\pi a^2$.

B. $\frac{3\pi a^2}{4}$.

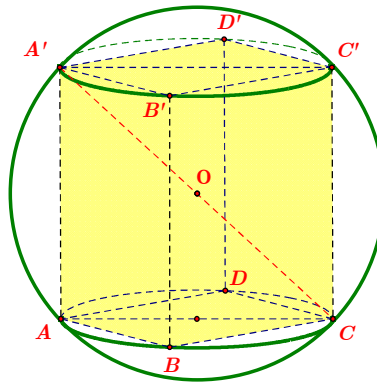
C. $\frac{9\pi a^2}{4}$.

D. $3\pi a^2$.

Lời giải

Tác giả: Đoàn Thị Hường; Fb: Đoàn Thị Hường

Chọn A



Mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm là O của hình hộp có bán kính $R = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + (2a)^2 + (2a)^2} = \frac{3a}{2}$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình hộp là $S = 4\pi \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = 9\pi a^2$.

Một số bài toán tương tự:

Câu 1.1. Cho hình lập phương cạnh a . Thể tích khối cầu nội tiếp hình lập phương là

A. $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{3}$.

B. $\frac{\pi a^3}{6}$.

C. $\frac{\pi a^3}{2}$.

D. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Tác giả: Đoàn Thị Hường; Fb: Đoàn Thị Hường

Chọn B

Khối cầu nội tiếp hình lập phương có bán kính $R = \frac{a}{2}$.

Vậy thể tích khối cầu nội tiếp hình lập phương là $V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi \left(\frac{a}{2}\right)^3}{3} = \frac{\pi a^3}{6}$.

Câu 1.2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2a$, $AA' = 3a$. Thể tích khối nón có đỉnh trùng với tâm của hình chữ nhật $ABCD$, đường tròn đáy ngoại tiếp $A'B'C'D'$ là

A. $\frac{15\pi a^3}{4}$.

B. $\frac{5\pi a^3}{4}$.

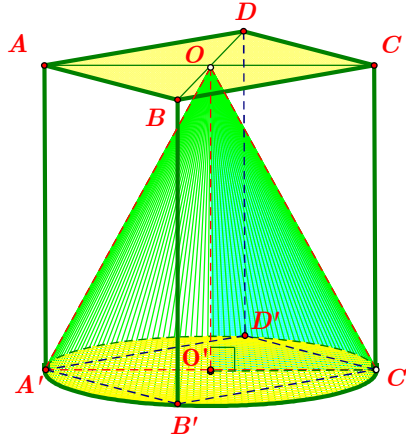
C. $15\pi a^3$.

D. $5\pi a^3$.

Lời giải

Tác giả: Đoàn Thị Hường; Fb: Đoàn Thị Hường

Chọn B



Gọi O, O' lần lượt là tâm hình chữ nhật $ABCD$ và hình chữ nhật $A'B'C'D'$.

Ta có đường cao khối nón $h = OO' = AA' = 3a$; bán kính $r = A'O' = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + (2a)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Vậy thể tích khối nón đã cho là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 3a = \frac{5\pi a^3}{4}$.

Một số bài toán tương tự trong các đề thi THPTQG:

Câu 1.3. (Mđ 104 –THPTQG 2017) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AD = 8$, $CD = 6$, $AC' = 12$. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ có hai đường tròn đáy là hai đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

A. $S_{tp} = 576\pi$.

B. $S_{tp} = 10(2\sqrt{11} + 5)\pi$.

C. $S_{tp} = 26\pi$.

D. $S_{tp} = 5(4\sqrt{11} + 5)\pi$.

Câu 1.4. (Mđ 110 –THPTQG 2017) Cho mặt cầu bán kính R ngoại tiếp một hình lập phương cạnh a . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$.

B. $a = 2R$.

C. $a = 2\sqrt{3}R$.

D. $a = \frac{\sqrt{3}R}{3}$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ hình chữ nhật với $AB = 3a$, $BC = a$, cạnh bên $SD = 2a$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $3a^3$.

B. a^3 .

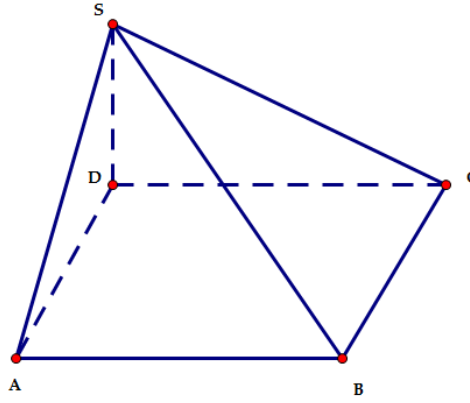
C. $2a^3$.

D. $6a^3$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Thơm; Fb: Thơm nguyên

Chọn C



Chiều cao của khối chóp là $SD = 2a$ và đáy là hình chữ nhật với $AB = 3a$, $BC = a$ nên ta có

$$V = \frac{1}{3} \cdot SD \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot 3a \cdot a = 2a^3.$$

Câu 2.1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ hình chữ nhật với $AB = 3a$, $BC = 2a$, cạnh bên $SA = 2a$ và (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $4a^3$.

B. a^3 .

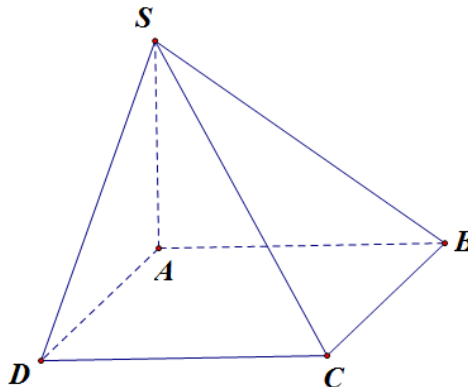
C. $12a^3$.

D. $6a^3$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Thơm; Fb: Thơm nguyên

Chọn A



Vì (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy nên $SA \perp (ABCD)$

$$V = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot 3a \cdot 2a = 4a^3.$$

Câu 2.2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ hình chữ nhật với $AB = 3a$, $AD = 4a$, cạnh bên $SC = a\sqrt{34}$ và (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $4a^3$.

B. a^3 .

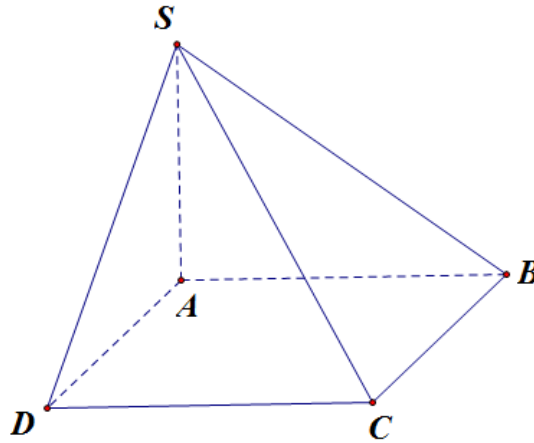
C. $12a^3$.

D. $6a^3$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Thơm; Fb: Thơm nguyên

Chọn D



Vì (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy nên $SA \perp (ABCD)$

Vì $ABCD$ hình chữ nhật nên $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 9a^2 + 16a^2 = 25a^2 \Rightarrow AC = 5a$

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC$ suy ra ΔSAC vuông tại A .

$$AC^2 + SA^2 = SC^2 \Rightarrow SA^2 = SC^2 - AC^2 = 34a^2 - 25a^2 = 9a^2 \Rightarrow SA = 3a$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{3} \cdot 3a \cdot 3a \cdot 4a = 12a^3.$$

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{a}(-3; 4; 0)$; $\vec{b}(5; 0; 12)$. Cosin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. $\frac{3}{13}$.

B. $\frac{5}{6}$.

C. $-\frac{5}{6}$.

D. $-\frac{3}{13}$.

Lời giải

Tác giả: Quỳnh Giao; Fb: QGiaoDo

Chọn D

$$\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{-15}{\sqrt{9+16} \cdot \sqrt{25+144}} = -\frac{3}{13}$$

Câu 3.1. Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{a}(-2; 3; -1)$; $\vec{b}(2; -1; 3)$. Sin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. $-\frac{2}{7}$.

B. $\frac{3\sqrt{5}}{7}$.

C. $-\frac{3\sqrt{5}}{7}$.

D. $\frac{2}{7}$.

Lời giải

Tác giả: Quỳnh Giao; Fb: QGiaoDo

Chọn D

$$\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{-4}{\sqrt{4+9+1} \cdot \sqrt{4+1+9}} = -\frac{2}{7}$$

$$\sin(\vec{a}; \vec{b}) = \sqrt{1 - \cos^2(\vec{a}; \vec{b})} = \frac{3\sqrt{5}}{7}$$

Câu 4. Giả sử a, b là các số thực dương bất kỳ. Biểu thức $\ln \frac{a}{b^2}$ bằng

A. $\ln a - \frac{1}{2} \ln b$.

B. $\ln a + \frac{1}{2} \ln b$.

C. $\ln a + 2 \ln b$.

D. $\ln a - 2 \ln b$.

Lời giải

Tác giả: Trần Thị Thơm; Fb: Tranthom

Chọn D

Với hai số thực dương a, b , ta có $\ln \frac{a}{b^2} = \ln a - \ln b^2 = \ln a - 2 \ln b$.

Phân tích:

*) Kiến thức trọng tâm liên quan đến bài toán: Sử dụng các tính chất của logarit, bao gồm:

1. Cho $a, b > 0, a \neq 1$, ta có:

$$+) \log_a a = 1, \log_a 1 = 0, a^{\log_a b} = b.$$

+) Công thức bay (bay mũ) :

$$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b;$$

$$\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b;$$

2. Logarit của tích, thương : Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có:

$$\log_a (b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$$

$$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$$

3. Công thức đổi cơ số: Với $a, b, c > 0, a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1$ ta có:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{1}{\log_b a};$$

*) Lỗi học sinh hay gặp:

+ Nhầm logarit của 1 tích bằng tích các logarit. Logarit của một thương bằng thương các logarit. Ngược lại tổng hai logarit cùng cơ số bằng logarit của tổng các biểu thức logarit, hiệu hai logarit cùng cơ số bằng logarit của một hiệu các biểu thức logarit...

+ Công thức bay mũ: Học sinh hay mắc sai lầm

$$\text{Với } a, b > 0, a \neq 1 \text{ thì } (\log_a b^\alpha)^2 = \alpha \log_a^2 b.$$

$$\text{Với } a > 0, a \neq 1, b \neq 0 \text{ thì } \log_a b^\alpha = \alpha \log_a |b| \text{ (với số mũ } \alpha \text{ là số tự nhiên chẵn)}$$

*) Các bài toán tương tự:

Mức độ nhận biết, thông hiểu

Câu 4.1 Với a là số thực dương tùy ý, $\log(8a) - \log(5a)$ bằng

A. $\frac{\log(8a)}{\log(5a)}$.

B. $\log(3a)$.

C. $\log \frac{8}{5}$.

D. $\frac{\log 8}{\log 5}$.

Lời giải

Chọn C

$$\log(8a) - \log(5a) = \log \frac{8a}{5a} = \log \frac{8}{5}.$$

Câu 4.2 Với a là số thực dương tùy ý, $\log_7 \left(\frac{a^2}{7} \right)$ bằng

- A.** $2\log_7 a - 1$. **B.** $\ln(7a^2)$. **C.** $1 + 2\log_7 a$. **D.** $\frac{1}{2\log_7 a}$.

Lời giải

Tác giả: Trần Thị Thơm ; Fb: Tranthom

Chọn A

$$\log_7 \left(\frac{a^2}{7} \right) = \log_7 a^2 - \log_7 7 = 2\log_7 a - 1.$$

Câu 4.3 Mệnh đề nào dưới đây đúng với mọi số dương x, y ?

- A.** $\log_2 \frac{4x}{y} = \frac{2 + \log_2 x}{\log_2 y}$. **B.** $\log_2 \frac{4x}{y} = \log_2 (4x - y)$.
C. $\log_2 \frac{4x}{y} = 2 + \log_2 x + \log_2 y$. **D.** $\log_2 \frac{4x}{y} = 2 + \log_2 x - \log_2 y$.

Lời giải

Tác giả: Trần Thị Thơm ; Fb: Tranthom

Chọn D

$$\log_2 \frac{4x}{y} = \log_2 (4x) - \log_2 y = 2 + \log_2 x - \log_2 y.$$

Câu 4.4 Với a là số thực dương tùy ý, $\log_4 (16a)$ bằng

- A.** $2 + \log_4 a$. **B.** $16\log_4 a$. **C.** $16 + \log_4 a$. **D.** $2 - \log_4 a$.

Lời giải

Tác giả: Trần Thị Thơm ; Fb: Tranthom

Chọn A

$$\log_4 (16a) = \log_4 16 + \log_4 a = 2 + \log_4 a.$$

Câu 4.5 Cho $\log_a b = 4$ và $\log_a c = 5$. Tính $P = \log_a (a^2 b^3 c^4)$.

- A.** $P = 480$. **B.** $P = 34$. **C.** $P = 691$. **D.** $P = 40000$.

Lời giải

Tác giả: Trần Thị Thơm ; Fb: Tranthom

Chọn B

Ta có: $P = \log_a (a^2 b^3 c^4) = \log_a a^2 + \log_a b^3 + \log_a c^4$
 $= 2\log_a a + 3\log_a b + 4\log_a c = 2 + 3.4 + 4.5 = 34.$

Câu 4.6 Cho a là số thực dương tùy ý khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_9 a = 2\log_a 3.$ B. $\log_9 a = \frac{2}{\log_3 a}.$ **C. $\log_9 a = \frac{1}{2\log_a 3}.$** D. $\log_9 a = -2\log_a 3.$

Lời giải

Tác giả: Trần Thị Thơm ; Fb: Tranthom

Chọn C

$$\log_9 a = \frac{1}{\log_a 3^2} = \frac{1}{2\log_a 3}.$$

Câu 4.7 Với a, b là các số thực dương tùy ý và a khác 1, biết $\log_a b = -2$. Tính $P = \log_{\sqrt{a}}^2 b + \log_{a^3} b^6$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P = -6.$ B. $P = -2.$ C. $P = -20.$ **D. $P = 12.$**

Lời giải

Tác giả: Trần Thị Thơm ; Fb: Tranthom

Chọn D

$$P = \log_{\sqrt{a}}^2 b + \log_{a^3} b^6 = 4\log_a^2 b + 2\log_a b = 4(-2)^2 + 2(-2) = 12.$$

Câu 4.8 Cho hai số thực a, b , trong đó $a > 0, a \neq 1, b \neq 0$. Khi đó $\log_a (ab^5)$ bằng

A. $1 + 5\log_a b.$ B. 6. **C. $1 + 5\log_a |b|.$** D. 5.

Lời giải

Tác giả: Trần Thị Thơm ; Fb: Tranthom

Chọn C

Ta có $\log_a (ab^5) = \log_a a + \log_a b^5 = 1 + 5\log_a |b|.$

Câu 4.9 Cho a, b là các số thực dương tùy ý. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $\log(10ab^2)^2 = 2(1 + \log a + 2\log b).$ B. $\log(10ab^2)^2 = (1 + \log a + 2\log b)^2.$
 C. $\log(10ab^2)^2 = 100 + \log a^2 + \log b^4.$ D. $\log(10ab^2)^2 = 1 + \log a + 2\log b.$

Lời giải

Tác giả: Trần Thị Thơm ; Fb: Tranthom

Chọn A

Ta có $\log(10ab^2)^2 = 2\log(10ab^2) = 2(1 + \log a + 2\log b).$

Câu 4.10 Cho các số thực $a, b > 0$ với $a \neq 1$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\log_{a^2} (ab) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_a b.$ B. $\log_{a^2} (ab) = \frac{1}{2}\log_a b.$

C. $\log_{a^2}(ab) = 2 + 2\log_a b.$

D. $\log_{a^2}(ab) = \log_{a^2} a \cdot \log_{a^2} b.$

Lời giải

Tác giả: Trần Thị Thơm ; Fb: Tranthom

Chọn A

Ta có: $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2}\log_a(ab) = \frac{1}{2}(\log_a a + \log_a b) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_a b.$

MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

Câu 4.11 Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\ln^2 x + 4\ln^2 y = 4\ln x \cdot \ln y.$

Tính $M = \frac{1 + \log x + 2\log y}{-2 + 4\log(x + 9y^2)}.$

A. $M = -\frac{1}{2}.$

B. $M = 2.$

C. $M = \frac{1}{4}.$

D. $M = \frac{1}{2}.$

Lời giải

Tác giả: Trần Thị Thơm ; Fb: Tranthom

Chọn D

Ta có $\ln^2 x + 4\ln^2 y = 4\ln x \cdot \ln y$

$$\Leftrightarrow (\ln x)^2 + (2\ln y)^2 - 4\ln x \cdot \ln y = 0$$

$$\Leftrightarrow (\ln x - 2\ln y)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x = 2\ln y \Leftrightarrow x = y^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } M &= \frac{1 + \log x + 2\log y}{-2 + 4\log(x + 9y^2)} = \frac{1 + \log x + \log y^2}{-2 + 4\log(x + 9x)} \\ &= \frac{1 + 2\log x}{-2 + 4\log(10x)} = \frac{1 + 2\log x}{-2 + 4 + 4\log x} = \frac{1 + 2\log x}{2(1 + 2\log x)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho $E(-1;0;2)$ và $F(2;1;-5)$. Phương trình đường thẳng EF là

A. $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-7}.$

B. $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-7}.$

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-3}.$

D. $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{3}.$

Lời giải

Tác giả: Vũ Danh Được ; Fb: Danh Được Vũ

Chọn B

Đường thẳng EF có véc tơ chỉ phương là $\overrightarrow{EF} = (3;1;-7).$ Đường thẳng EF đi qua điểm $E(-1;0;2)$, có véc tơ chỉ phương $(3;1;-7)$ nên phương trình

$$EF \text{ là } \frac{x+1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-7}.$$

Tổng quát: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(x_1; y_1; z_1)$ và $B(x_2; y_2; z_2)$. Khi đó đường thẳng AB có một phương trình dạng $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

Câu 6. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -9; u_4 = \frac{1}{3}$. Tìm công bội của cấp số nhân đã cho.

A. $\frac{1}{3}$.

B. -3 .

C. 3 .

D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Tác giả: Văn Bùi Vũ; Fb: Van Tuan Vu

Chọn D

$$(u_n) \text{ là cấp số nhân nên ta có: } u_4 = u_1 \cdot q^3 \Rightarrow q = \sqrt[3]{\frac{u_4}{u_1}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}.$$

Vậy công bội của cấp số nhân đã cho: $q = -\frac{1}{3}$

Phân tích và bình luận:

Bài toán khai thác kiến thức cơ bản công thức số hạng tổng quát của cấp số nhân học sinh cần ghi nhớ: $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} (\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N})$.

Câu hỏi tương tự:

Câu 6.1. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -\frac{1}{2}; u_7 = -32$. Tìm công bội của cấp số nhân đã cho.

A. $q = \pm \frac{1}{2}$

B. $q = \pm 2$

C. $q = \pm 4$

D. $q = \pm 1$

Lời giải

Tác giả: Văn Bùi Vũ ; Fb: Van Tuan Vu

Chọn B

$$(u_n) \text{ là cấp số nhân nên ta có: } u_7 = u_1 \cdot q^6 \Rightarrow q^6 = \frac{u_7}{u_1} = 64$$

$$\Rightarrow q = \pm 2.$$

Vậy công bội của cấp số nhân đã cho: $q = \pm 2$.

Câu 6.2. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3, q = -2$. Số 192 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân đã cho?

A. Số hạng thứ 5.

B. Số hạng thứ 6.

C. Số hạng thứ 7.

D. Không phải số hạng của (u_n) .

Lời giải

Tác giả: Văn Bùi Vũ ; Fb: Van Tuan Vu

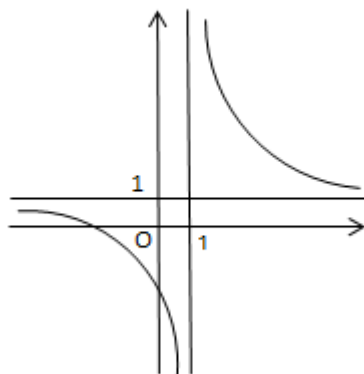
Chọn C

Giả sử $u_n = 192$ là số hạng thứ n ($n \in \mathbb{N}$) của cấp số nhân (u_n) .

Lúc đó: $192 = 3 \cdot (-2)^{n-1} \Rightarrow (-2)^{n-1} = 64 \Rightarrow n = 7$.

Vậy số 192 là số hạng thứ 7 của cấp số nhân đã cho.

Câu 7. Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây



A. $y = -x^3 + 3x + 1$.

B. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

C. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

D. $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

Lời giải

Tác giả: Vũ Nga; Fb: Nga Vu

Chọn B

Từ hình dáng đồ thị của hàm số ta có đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$ nên loại phương án A, C, D.

Vậy chọn B.

BÀI TOÁN TỔNG QUÁT

❖ **Bài toán:** Xác định hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$ và $ad - bc \neq 0$) khi biết đồ thị hàm số hoặc bảng biến thiên của hàm số.

❖ **Kiến thức cần nhớ để vận dụng vào bài tập**

• **Tập xác định:** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$.

• **Sự biến thiên:**

$$y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}.$$

Bảng biến thiên

$ad - bc > 0$	$ad - bc < 0$
---------------	---------------

x	$-\infty$		$-\frac{d}{c}$		$+\infty$
y'		+		+	
y	$\frac{a}{c}$		$+\infty$	$-\infty$	$\frac{a}{c}$

x	$-\infty$		$-\frac{d}{c}$		$+\infty$
$f'(x)$		-		-	
$f(x)$	$\frac{a}{c}$		$-\infty$	$+\infty$	$\frac{a}{c}$

• **Đồ thị**

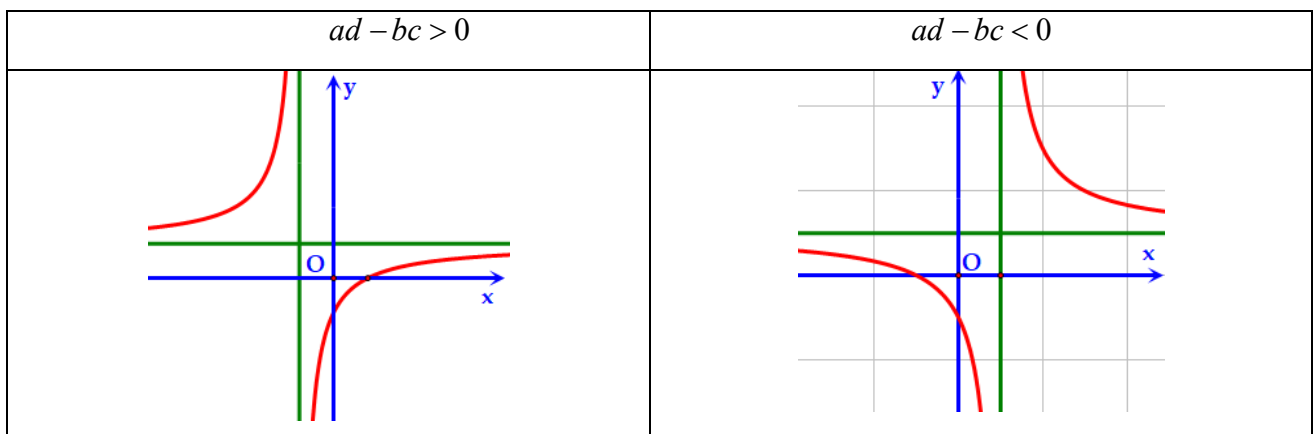
- Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -\frac{d}{c}$ và tiệm cận ngang là

đường thẳng $y = \frac{a}{c}$.

- Đồ thị cắt trục Ox tại điểm $\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ (nếu $a \neq 0$) và cắt trục Oy tại điểm

$\left(0; \frac{b}{d}\right)$ (nếu $d \neq 0$).

- Đồ thị



❖ **Phương pháp giải**

- Nhận dạng đồ thị, từ đồ thị xác định được các yếu tố: đường tiệm cận đứng, đường tiệm cận ngang của đồ thị, chiều biến thiên của hàm số, giao của đồ thị hàm số với các trục tọa độ... từ đó sẽ xác định được hàm số tương ứng.

BÀI TOÁN TƯƠNG TỰ CÙNG MỨC ĐỘ

Xác định hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$ và $ad - bc \neq 0$) dựa vào hình dáng đồ thị hàm số và khai thác thêm **một** trong các yếu tố đọc được từ đồ thị hoặc bảng biến thiên: tiệm cận, tính đơn điệu, giao điểm với các trục tọa độ...

Câu 7.1 Bảng biến thiên ở hình dưới đây là bảng biến thiên của hàm số nào trong các hàm số sau ?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'			
y	1	$+\infty$	1

- A. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. B. $y = x^4 + 2x^2 + 1$. C. $y = \frac{x+3}{x-2}$. D. $y = \frac{x-3}{2-x}$.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên của hàm số ta thấy: đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$ nên loại các đáp án A, B, D, vậy chọn C.

BÀI TOÁN TƯƠNG TỰ MỨC ĐỘ CAO HƠN

Xác định hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$ và $ad-bc \neq 0$) dựa vào hình dáng đồ thị hàm số và khai thác **nhều** yếu tố đọc được từ đồ thị hoặc bảng biến thiên: tiệm cận, tính đơn điệu, giao điểm với các trục tọa độ...

Câu 7.2 Bảng biến thiên ở hình dưới đây là bảng biến thiên của hàm số nào trong các hàm số sau ?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'			
y	1	$+\infty$	1

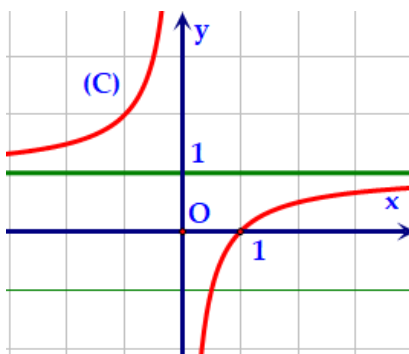
- A. $y = \frac{2x-7}{x-2}$. B. $y = \frac{2x+3}{x-2}$. C. $y = \frac{x+3}{x-2}$. D. $y = \frac{x-3}{x-2}$.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên của hàm số ta thấy: đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$ nên loại đáp án A và B, hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$ nên $y' < 0$ với $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \Rightarrow$ loại đáp án D, vậy chọn C.

Câu 7.3 Đường cong ở hình vẽ sau là đồ thị của hàm số nào dưới đây



A. $y = \frac{x+1}{x}$.

B. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

C. $y = \frac{2x-2}{x}$.

D. $y = \frac{x-1}{x}$.

Chọn D

Từ bảng biến thiên của hàm số ta thấy:

- Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là trục Oy nên ta loại được đáp án B do đồ thị hàm số

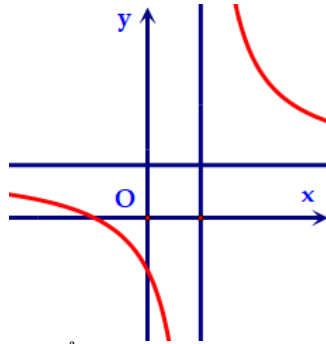
$y = \frac{x-1}{x+1}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$.

- Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$ nên ta loại được đáp án C do đồ thị hàm số $y = \frac{2x-2}{x}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.

- Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1;0)$ nên loại đáp án A.

Vậy chọn D.

Câu 7.4 Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $a > 0$ có đồ thị như hình vẽ



Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $b > 0, c < 0, d < 0$.

B. $b > 0, c > 0, d < 0$.

C. $b < 0, c > 0, d < 0$.

D. $b < 0, c < 0, d < 0$.

Lời giải

Chọn B

Do đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -\frac{d}{c}$ và tiệm cận ngang là đường thẳng

$y = \frac{a}{c}$. Đồ thị cắt trục Ox tại điểm $\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ và cắt trục Oy tại điểm $\left(0; \frac{b}{d}\right)$ nên ta có:

$$\begin{cases} -\frac{d}{c} > 0 \\ \frac{a}{c} > 0 \\ -\frac{b}{a} < 0 \\ \frac{b}{d} < 0 \end{cases} \text{ . Mà } a > 0 \text{ nên } \begin{cases} c > 0 \\ b > 0 \\ d < 0 \end{cases} \text{ . Vậy chọn B.}$$

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(3; -1; 4)$, đồng thời vuông góc với giá của vectơ $\vec{a}(1; -1; 2)$ có phương trình là

A. $3x - y + 4z - 12 = 0$.

B. $3x - y + 4z + 12 = 0$.

C. $x - y + 2z - 12 = 0$.

D. $x - y + 2z + 12 = 0$.

Lời giải

Tác giả: Phạm Thị Thu Trang; Fb: Trang Phạm

Chọn C

Do mặt phẳng (P) vuông góc với giá của vector $\vec{a}(1; -1; 2)$ nên mặt phẳng (P) nhận vector $\vec{a}(1; -1; 2)$ làm vector pháp tuyến và đi qua điểm $M(3; -1; 4)$ nên có phương trình:

$$1(x-3) - 1(y+1) + 2(z-4) = 0 \Leftrightarrow x - y + 2z - 12 = 0.$$

Câu 8.1. Trong không gian Oxyz, mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1; -1; 2)$, đồng thời song song với mặt phẳng $(Q): 2x + 3y - z + 5 = 0$ có phương trình là

A. $2x + 3y - z - 3 = 0$.

B. $x - y + 2z + 3 = 0$.

C. $2x + 3y - z + 3 = 0$.

D. $x - y + 2z - 3 = 0$.

Lời giải

Tác giả: Phạm Thị Thu Trang; Fb: Trang Phạm

Chọn C

Do mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q): 2x + 3y - z + 5 = 0$ nên mặt phẳng (P) nhận vector pháp tuyến $\vec{n}_{(Q)}(2; 3; -1)$ làm vector pháp tuyến và đi qua điểm $M(1; -1; 2)$ nên có phương trình: $2(x-1) + 3(y+1) - (z-2) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - z + 3 = 0$.

Nhân Xét: Đây là bài toán ở mức độ nhận biết của phần phương trình mặt phẳng. Giả thiết đã cho 1 điểm thuộc mặt phẳng và VTPT của mặt phẳng. VTPT có thể cho trực tiếp, cho bằng định nghĩa hoặc cho thông qua mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3; 3]$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên.

x	-3	-1	0	1	2	3	
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-

Mệnh đề nào sau đây **sai** về hàm số đó?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.B. Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Lời giải

Tác giả: Lê Thị Phương Liên; Fb: Phuonglien Le

Chọn D

Dựa vào bảng xét dấu của đạo hàm đã cho ta thấy $f'(0) = 0$ và đạo hàm không đổi dấu khi x qua $x_0 = 0$ nên hàm số đã cho không đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Bài toán tương tự

Câu 9.1 Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2; 4]$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-

Mệnh đề nào sau đây **sai** về hàm số đó?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

B. Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng xét dấu của đạo hàm đã cho ta thấy $f'(1) = 0$ và đạo hàm không đổi dấu khi x qua $x_0 = 1$ nên hàm số đã cho không đạt cực đại tại $x = 1$.

Câu 10. Giả sử $f(x)$ là hàm số bất kỳ liên tục trên khoảng $(\alpha; \beta)$ và $a, b, c, b+c \in (\alpha; \beta)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

B. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^{b+c} f(x) dx - \int_a^c f(x) dx.$

C. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^{b+c} f(x) dx + \int_{b+c}^b f(x) dx.$

D. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx.$

Lời giải

Tác giả: Lê Hữu Đức ; Fb: Le Huu Duc

Chọn B

Đáp án A, C, D đúng vì theo tính chất tích phân.

Đáp án B sai vì $\int_a^{b+c} f(x) dx - \int_a^c f(x) dx = \int_a^{b+c} f(x) dx + \int_c^a f(x) dx = \int_c^{b+c} f(x) dx.$

Bài tương tự

Câu 10. Giả sử $f(x)$ là hàm số bất kỳ liên tục trên khoảng $(\alpha; \beta)$ và $a, b, c \in (\alpha; \beta)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\int_a^b f(x) dx = \int_c^b f(x) dx - \int_c^a f(x) dx.$

B. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

C. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx.$

D. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^c f(x) dx - \int_c^a f(x) dx.$

Lời giải

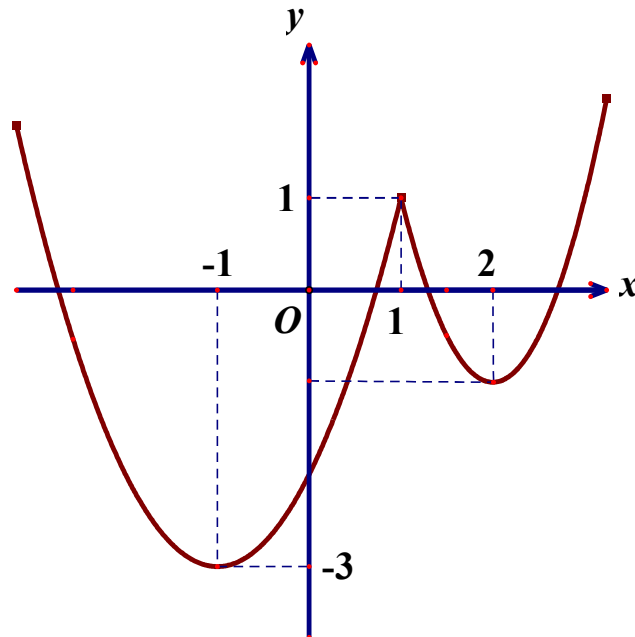
Tác giả: Lê Hữu Đức ; Fb: Le Huu Duc

Chọn C

Đáp án A, B, D đúng vì theo tính chất tích phân.

Đáp án C sai.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng về hàm số đó



A. Nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.

B. Đồng biến trên khoảng $(-3; 1)$.

C. Đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

D. Nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Lời giải

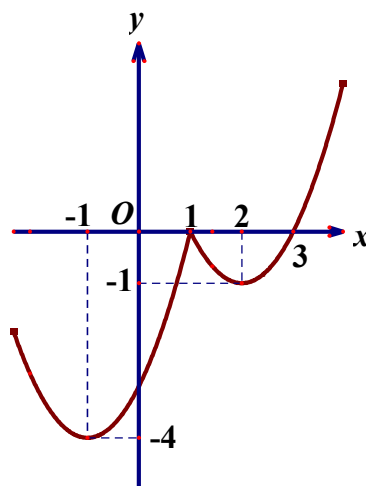
Tác giả: Trần Mạnh Tường ; Fb: Trần Tuệ Minh

Chọn C

Trên khoảng $(0; 1)$ đồ thị có hướng đi lên nên hàm số đồng biến ứng với khoảng này.

Bài tương tự

Câu 11.1 Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng về hàm số đó



A. Nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.

B. Đồng biến trên khoảng $(-4; -1)$.

C. Đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

D. Nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$.

Lời giải

Tác giả: Trần Mạnh Tường ; Fb: Trần Tuệ Minh

Chọn C

Trên khoảng $(-1;0)$ đồ thị có hướng đi lên nên hàm số đồng biến ứng với khoảng này.

Câu 12. Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^{-x}$ là

A. $-\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$.

B. $-3^{-x} + C$.

C. $3^{-x} \ln 3 + C$.

D. $\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Thu Trang; Fb: Trang nguyên

Chọn A

Bài toán tương tự

Câu 12.1 Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = e^x - x$ biết $F(0) = 2$

A. $F(x) = e^x + \frac{x^2}{2} + 1$.

B. $F(x) = e^x - \frac{x^2}{2} + 1$.

C. $F(x) = e^x + \frac{x^2}{2} - 1$.

D. $F(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - 1$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Thu Trang; Fb: Trang nguyên

Chọn B

Ta có $F(x) = \int (e^x - x) dx = e^x - \frac{x^2}{2} + C$

Theo bài ra $F(0) = 2 \Rightarrow 1 + C = 2 \Rightarrow C = 1$

Vậy $F(x) = e^x - \frac{x^2}{2} + 1$.

Câu 13. Phương trình $\log(x+1) = 2$ có nghiệm là

A. 11.

B. 9.

C. 101.

D. 99.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Mạnh Dũng ; Fb: Mạnh Dũng

Chọn D

Ta có : $\log(x+1) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 10^2 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 99 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 99$.

Bài toán tương tự.

Câu 13.1. Phương trình $\log(x+9) = 3$ có nghiệm là

A. 91.

B. 9991.

C. 1009.

D. 991.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Mạnh Dũng ; Fb: Mạnh Dũng

Chọn D

$$\text{Ta có : } \log(x+9)=3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+9=10^3 \\ x+9>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=991 \\ x>-9 \end{cases} \Leftrightarrow x=991.$$

Câu 14. Cho k, n ($k < n$) là các số nguyên dương bất kì. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $A_n^k = \frac{n!}{k!}.$

B. $A_n^k = k! \cdot C_n^k.$

C. $A_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$

D. $A_n^k = n! \cdot C_n^k.$

Lời giải

Tác giả: Trần Thị Thanh Thủy; Fb: Song tử mắt nâu

Chọn B

$$\text{Ta có } A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = k! \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = k! \cdot C_n^k \text{ nên B đúng.}$$

** Phát triển câu mức độ tương tự*

Câu 14.1. Tìm công thức tính số các tổ hợp chập k của một tập có n phần tử.

A. $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$

B. $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$

C. $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$

D. $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$

Lời giải

Tác giả: Trần Thị Thanh Thủy; Fb: Song tử mắt nâu

Chọn B

$$\text{Số các tổ hợp chập } k \text{ của một tập có } n \text{ phần tử phần tử, kí hiệu là: } C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Câu 14.2. Trong mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $C_{14}^3 = C_{14}^{11}.$

B. $C_{10}^3 + C_{10}^4 = C_{11}^4.$

C. $C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 16.$

D. $C_{10}^4 + C_{11}^4 = C_{11}^5.$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Áp dụng công thức: } C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1} \text{ suy ra đáp án sai là } C_{10}^4 + C_{11}^4 = C_{11}^5.$$

** Phát triển câu mức độ cao hơn*

Câu 14.3. Cho số tự nhiên n thỏa mãn $C_n^2 + A_n^2 = 9n$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $n:5.$

B. $n:3.$

C. $n:7.$

D. $n:2.$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Phương pháp: Sử dụng các công thức } C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}; A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

$$\text{Giải: Điều kiện: } n \geq 2.$$

$$C_n^2 + A_n^2 = 9n \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!2!} + \frac{n!}{(n-2)!} = 9n \Leftrightarrow \frac{3}{2}n(n-1) = 9n \Leftrightarrow n-1 = 6 \Leftrightarrow n = 7.$$

Câu 14.4. Có tất cả 120 cách chọn 3 học sinh từ nhóm n (chưa biết) học sinh. Số n là nghiệm của phương trình nào sau đây?

A. $n(n+1)(n+2) = 120.$

B. $n(n+1)(n+2) = 720.$

C. $n(n-1)(n-2) = 120.$

D. $n(n-1)(n-2) = 720.$

Lời giải

Chọn D

Số cách chọn 3 trong n học sinh có $C_n^3 = \frac{n!}{(n-3)!3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$

Khi đó $C_n^3 = 120 \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) = 720.$

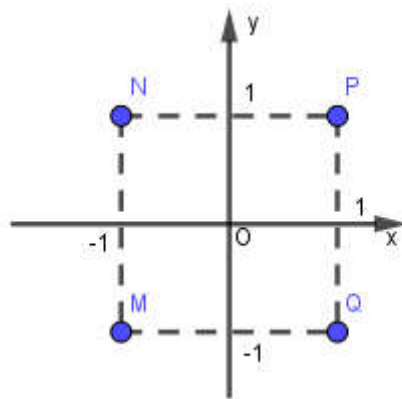
Câu 15. Cho các số phức $z = -1 + 2i$, $w = 2 - i$. Điểm nào trong hình bên biểu diễn số phức $z + w$?

A. $N.$

B. $P.$

C. $Q.$

D. $M.$



Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Nghĩa ; Fb: Nghĩa Văn Nguyễn

Chọn B

+ Tính $z + w = -1 + 2i + 2 - i = 1 + i$. Suy ra điểm biểu diễn là điểm có tọa độ $(1;1)$ là điểm P .

Bài toán tương tự

Câu 15.1 Cho các số phức $z = a + bi$, $w = x + yi$, với $a, b, x, y \in \mathbb{R}$. Điểm M biểu diễn số phức $z - w$ có tọa độ là

A. $(a + x; b + y).$

B. $(a - x; b - y).$

C. $(a + b; x + y).$

D. $(a - b; x - y).$

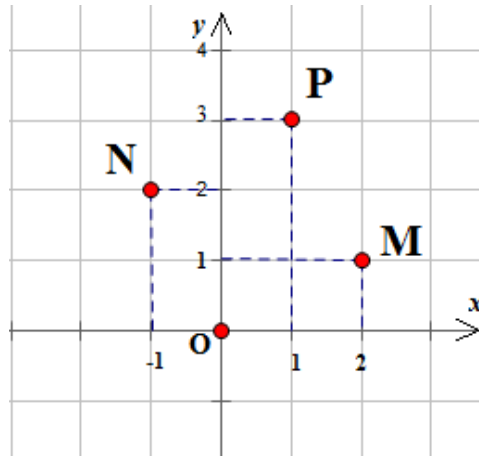
Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Nghĩa ; Fb: Nghĩa Văn Nguyễn

Chọn B

+ Theo quy tắc trừ số phức thì $z - w = (a + bi) - (x + yi) = (a - x) + (b - y)i$. Suy ra điểm biểu diễn là điểm có tọa độ $(a - x; b - y)$.

Câu 15.2 Gọi các số phức $z_1; z_2; z_3$ lần lượt có điểm biểu diễn trong hệ tọa độ Oxy là M, N, P (như hình vẽ bên dưới). Mệnh đề nào sau đây là đúng.



A. $z_1 = z_2 + z_3$.

B. $z_2 = z_1 - z_3$.

C. $z_3 = z_2 + z_1$.

D. $z_1 = z_2 - z_3$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Nghĩa ; Fb: Nghĩa Văn Nguyễn

Chọn C

+ Dựa vào hình vẽ ta suy ra tọa độ $M(2;1), N(-1;2), P(1;3)$ nên

$$z_1 = 2 + i; z_2 = -1 + 2i; z_3 = 1 + 3i.$$

+ Theo quy tắc cộng số phức ta được $z_3 = z_2 + z_1$.

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 1 = 0$, $(Q): x - z + 2 = 0$. Mặt phẳng (α) vuông góc với cả (P) và (Q) đồng thời cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 3. Phương trình của mp (α) là:

A. $x + y + z - 3 = 0$.

B. $x + y + z + 3 = 0$.

C. $-2x + z + 6 = 0$.

D. $-2x + z - 6 = 0$.

Lời giải

Tác giả: Đồng Quang Phúc ; Fb: Đồng Quang Phúc

Chọn A.

(P) có vector pháp tuyến $\vec{n}_P = (1; -3; 2)$, (Q) có vector pháp tuyến $\vec{n}_Q = (1; 0; -1)$.

Vì mặt phẳng (α) vuông góc với cả (P) và (Q) nên (α) có một vector pháp tuyến là

$$[\vec{n}_P; \vec{n}_Q] = (3; 3; 3) = 3(1; 1; 1).$$

Vì mặt phẳng (α) cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 3 nên (α) đi qua điểm $M(3; 0; 0)$.

Vậy (α) đi qua điểm $M(3; 0; 0)$ và có vector pháp tuyến $\vec{n}_\alpha = (1; 1; 1)$ nên (α) có phương trình:

$$x + y + z - 3 = 0.$$

Câu 16.1 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x - 2y + 3z - 2 = 0$, $(Q): x - y + 3 = 0$. Mặt phẳng (α) vuông góc với cả (P) và (Q) đồng thời cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 5. Phương trình của mp (α) là:

- A.** $3x + 3y + z - 15 = 0$. **B.** $x + y + z + 3 = 0$. **C.** $-2x + z + 6 = 0$. **D.** $-2x + z - 6 = 0$.

Lời giải

Tác giả: Phạm Hoài Trung ; Fb: Phạm Hoài Trung

Chọn A.

(P) có vector pháp tuyến $\vec{n}_P = (1; -2; 3)$, (Q) có vector pháp tuyến $\vec{n}_Q = (1; -1; 0)$.

Vì mặt phẳng (α) vuông góc với cả (P) và (Q) nên (α) có một vector pháp tuyến là

$$\vec{n}_\alpha = [\vec{n}_P; \vec{n}_Q] = (3; 3; 1).$$

Vì mặt phẳng (α) cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 3 nên (α) đi qua điểm $M(5; 0; 0)$.

Vậy (α) đi qua điểm $M(5; 0; 0)$ và có vector pháp tuyến $\vec{n}_\alpha = (3; 3; 1)$ nên (α) có phương trình: $3x + 3y + z - 15 = 0$.

Câu 17. Cho số phức z thỏa mãn $(1 - \sqrt{3}i)^2 z = 3 - 4i$. Mô đun của z bằng

- A.** $\frac{5}{4}$ **B.** $\frac{5}{2}$ **C.** $\frac{2}{5}$ **D.** $\frac{4}{5}$

Lời giải

Tác giả: Phạm Ngọc Huệ; Fb: Phạm Ngọc Huệ

Chọn A

Phân tích: giả thiết là một phương trình bậc nhất với ẩn z , thực hiện phép toán thích hợp để tìm z , nên sử dụng máy tính để tính cho nhanh và chính xác.

$$z = \frac{3 - 4i}{(1 - \sqrt{3}i)^2} = \frac{-3 + 4\sqrt{3}}{8} + \frac{4 + 3\sqrt{3}}{8}i$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{-3 + 4\sqrt{3}}{8}\right)^2 + \left(\frac{4 + 3\sqrt{3}}{8}\right)^2} = \frac{5}{4}$$

Bài tập tương tự:

Câu 17.1 Cho số phức z thỏa mãn $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2019} z = (3-4i)i$. Mô đun của z bằng

- A.** 5 **B.** $\frac{1}{5}$ **C.** $\frac{2}{5}$ **D.** $\frac{5}{2}$

Lời giải

Tác giả: Phạm Ngọc Huệ; Fb: Phạm Ngọc Huệ

Chọn A

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2019} z = (3-4i)i \Leftrightarrow i.z = (3-4i)i \Leftrightarrow z = 3-4i. \text{ Vậy } |z| = 5$$

Câu 18. Cho hình trụ tròn xoay có độ dài đường sinh bằng đường kính đáy và thể tích khối trụ bằng 16π . Diện tích toàn phần của khối trụ đã cho bằng

A. 16π .

B. 12π .

C. 8π .

D. 24π .

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Thu Trang; **Fb:** Trang nguyên

Chọn A

Theo bài ra ta có $r = l = h$

$$\Rightarrow V = \pi r^2 h = \pi r^3 = 16\pi \Rightarrow r = 2$$

Diện tích toàn phần của khối trụ đã cho là :

$$S_{tp} = 2\pi r(r+l) = 4\pi r^2 = 16\pi.$$

Câu 18.1 Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng 8π và có chiều cao bằng đường kính đáy. Thể tích khối trụ tương ứng bằng

A. 32π .

B. 16π .

C. 8π .

D. 4π .

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Thu Trang; **Fb:** Trang nguyên

Chọn C

Theo bài ra ta có $r = l = h$

$$\Rightarrow S_{xq} = 2\pi r l = 2\pi r^2 = 8\pi \Rightarrow r = 2$$

Thể tích của khối trụ đã cho là :

$$V = \pi r^2 h = \pi r^3 = 8\pi.$$

Câu 19. Biết rằng phương trình $\log_2 x - 7\log_2 x + 9 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Giá trị của $x_1 x_2$ bằng

A. 128.

B. 64.

C. 9.

D. 512.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Thu Trang; **Fb:** Trang nguyên

Chọn A

Điều kiện $x > 0$

Với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho, áp dụng định lý Vi – ét, ta có

$$\log_2 x_1 + \log_2 x_2 = 7 \Leftrightarrow \log_2 (x_1 x_2) = 7 \Leftrightarrow x_1 x_2 = 2^7 \Leftrightarrow x_1 x_2 = 128.$$

Câu 19.1 Biết rằng phương trình $\log_2 x - 15\log_x 2 = 2$ có hai nghiệm x_1, x_2 ($x_1 > x_2$). Giá trị của $x_1 - 16x_2$ bằng

A. $-\frac{4095}{8}$.

B. 30.

C. 34.

D. $\frac{4097}{8}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Thu Trang; Fb: Trang nguyên

Chọn B

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_2 x - 15 \log_x 2 = 2 \Leftrightarrow \log_2 x - \frac{15}{\log_2 x} = 2 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 2 \log_2 x - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 5 \\ \log_2 x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 32 \\ x = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 32 \\ x_2 = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow x_1 - 16x_2 = 30.$$

Câu 20. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{3^x - 1}{3^x + 1}$ là:

A. $f'(x) = -\frac{2}{(3^x + 1)^2} \cdot 3^x.$

B. $f'(x) = \frac{2}{(3^x + 1)^2} \cdot 3^x$

C. $f'(x) = \frac{2}{(3^x + 1)^2} \cdot 3^x \ln 3$

D. $f'(x) = -\frac{2}{(3^x + 1)^2} \cdot 3^x \ln 3$

Lời giải

Tác giả: Phạm Ngọc Huệ; Fb: Phạm Ngọc Huệ

Chọn C

Áp dụng công thức:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3^x - 1)'(3^x + 1) - (3^x - 1)(3^x + 1)'}{(3^x + 1)^2} \\ &= \frac{3^x \ln 3 (3^x + 1) - (3^x - 1)3^x \ln 3}{(3^x + 1)^2} = \frac{2}{(3^x + 1)^2} \cdot 3^x \ln 3 \end{aligned}$$

Câu tương tự.

Câu 20.1. Đạo hàm của hàm số $f(x) = 3^{\frac{2x-5}{x+7}}$ là:

A. $f'(x) = \frac{19 \ln 3}{(x+7)^2} 3^{\frac{2x-5}{x+7}}.$

B. $f'(x) = \frac{19}{(x+7)^2} 3^{\frac{2x-5}{x+7}}$

C. $f'(x) = \frac{-19}{(x+7)^2} 3^{\frac{2x-5}{x+7}}$

D. $f'(x) = \frac{-19 \ln 3}{(x+7)^2} 3^{\frac{2x-5}{x+7}}$

Lời giải

Tác giả: Phạm Ngọc Huệ; Fb: Phạm Ngọc Huệ

Chọn A**Áp dụng công thức:**

$$f(x) = 3^{\frac{2x-5}{x+7}} \Rightarrow f'(x) = \left(3^{\frac{2x-5}{x+7}} \right)' = 3^{\frac{2x-5}{x+7}} \ln 3 \cdot \left(\frac{2x-5}{x+7} \right)' = \frac{19 \ln 3}{(x+7)^2} 3^{\frac{2x-5}{x+7}}$$

Chú ý áp dụng công thức tính nhanh $\left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

Câu 21. Cho $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành. Mệnh đề nào sau đây **sai** ?

A. $S = \int_{-2}^2 |f(x)| dx$.

B. $S = 2 \left| \int_0^1 f(x) dx \right| + 2 \left| \int_1^2 f(x) dx \right|$.

C. $S = 2 \int_0^2 |f(x)| dx$.

D. $S = 2 \left| \int_0^2 f(x) dx \right|$.

Lời giải*Tác giả: Nguyễn Ngọc Minh ; Fb: Minh Nguyen***Chọn D**

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ và trục hoành:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 |f(x)| dx \quad (1) \\ &= 2 \int_0^2 |f(x)| dx \quad (2) \text{ (do } f(x) \text{ là hàm số chẵn)} \\ &= 2 \int_0^1 |f(x)| dx + 2 \int_1^2 |f(x)| dx \\ &= 2 \left| \int_0^1 f(x) dx \right| + 2 \left| \int_1^2 f(x) dx \right| \quad (3) \text{ (do trong các khoảng } (0;1), (1;2) \text{ phương trình } f(x) = 0 \text{ vô nghiệm)} \end{aligned}$$

Từ (1), (2), (3) suy ra các đáp án A, B, C là đúng, đáp án D là sai.

Máy tính: Bấm máy tính kiểm tra, ba kết quả đều bằng nhau nên đáp án sai là đáp án D.

Câu 21.1 Cho $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8$. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành. Mệnh đề nào sau đây **sai** ?

$$\text{A. } S = \int_{-2}^2 |f(x)| dx.$$

$$\text{B. } S = 2 \left| \int_0^{\sqrt{2}} f(x) dx \right| + 2 \left| \int_{\sqrt{2}}^2 f(x) dx \right|.$$

$$\text{C. } S = 2 \int_0^2 |f(x)| dx.$$

$$\text{D. } S = 2 \left| \int_0^2 f(x) dx \right|.$$

Lời giải

Tác giả: Phạm Hoài Trung; Fb: Phạm Hoài Trung

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8$ và trục hoành:

$$x^4 - 6x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 |f(x)| dx \quad (1) \\ &= 2 \int_0^2 |f(x)| dx \quad (2) \quad (\text{do } f(x) \text{ là hàm số chẵn}) \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{2}} |f(x)| dx + 2 \int_{\sqrt{2}}^2 |f(x)| dx \\ &= 2 \left| \int_0^{\sqrt{2}} f(x) dx \right| + 2 \left| \int_{\sqrt{2}}^2 f(x) dx \right| \quad (3) \quad (\text{do trong các khoảng } (0; \sqrt{2}), (\sqrt{2}; 2) \text{ phương trình } f(x) = 0 \text{ vô nghiệm}) \end{aligned}$$

Từ (1), (2), (3) suy ra các đáp án A, B, C là đúng, đáp án D là sai.

Máy tính: Bấm máy tính kiểm tra, ba kết quả đều bằng nhau nên đáp án sai là đáp án D.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x^2 - 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = 2f(-x)$ đồng biến trên khoảng

$$\text{A. } (2; +\infty).$$

$$\text{B. } (-\infty; -1).$$

$$\text{C. } (-1; 1).$$

$$\text{D. } (0; 2).$$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Nghĩa ; Fb: Nghĩa Văn Nguyễn

Chọn C

$$+ \text{Ta có } f'(x) = x^2(x^2 - 1) \text{ suy ra } f(x) = \int f'(x) dx = \int x^2(x^2 - 1) dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + C$$

$$+ \text{Suy ra } y = g(x) = 2f(-x) = \frac{2(-x)^5}{5} - \frac{2(-x)^3}{3} + 2C = -\frac{2x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + 2C$$

$$+ \text{Tính } g'(x) = -2f'(-x) = \left(-\frac{2x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + 2C \right)' = -2x^4 + 2x^2 = -2x^2(x^2 - 1)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}.$$

+ Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	-

+ Hàm số $y = g(x) = 2f(-x)$ đồng biến trên $(-1; 1)$. Chọn C.

Bài toán tương tự

Câu 22.1 Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^3 - 2x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(2; +\infty)$.

B. $(-\infty; 2)$.

C. $(-4; 2)$.

D. $\mathbb{R}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Nghĩa ; Fb: Nghĩa Văn Nguyễn

Chọn A

$$+ \text{Ta có } f'(x) = x^3 - 2x^2 \text{ suy ra } f(x) = \int f'(x) dx = \int (x^3 - 2x^2) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + C$$

$$+ \text{Suy ra } y = g(x) = f(2-x) = \frac{(2-x)^4}{4} - \frac{2(2-x)^3}{3} + C$$

$$+ \text{Tính } g'(x) = f'(2-x) = \left(\frac{(2-x)^4}{4} - \frac{2(2-x)^3}{3} + C \right)' = -(2-x)^3 + 2(2-x)^2 = (2-x)^2 x$$

+ Hàm số đồng biến suy ra $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Chọn A..

Câu 22.2 Cho hàm số $y = f(x)$ nghịch biến $\forall x \in (a; b)$. Hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(2-b; 2-a)$.

B. $(-\infty; 2-a)$.

C. $(a; b)$.

D. $(2-b; +\infty)$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Nghĩa ; Fb: Nghĩa Văn Nguyễn

Chọn A

+ Vì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến $\forall x \in (a; b)$ nên $f'(x) < 0; \forall x \in (a; b)$.

+ Xét $y = g(x) = f(2-x)$ có $g'(x) = -f'(2-x)$

+ Hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến thì $g'(x) > 0 \Leftrightarrow -f'(2-x) > 0 \Leftrightarrow f'(2-x) < 0$

Suy ra $a < 2 - x < b \Leftrightarrow 2 - b < x < 2 - a$. Chọn A.

Câu 23. Đồ thị hàm số $y = \frac{x^3 - 4x}{x^3 - 3x - 2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Tác giả: Trần Thị Thanh Thủy; Fb: Song tử mắt nâu

Chọn D

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 4x}{x^3 - 3x - 2} = 1$. Suy ra, đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

Lại có:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 4x}{x^3 - 3x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x(x-2)(x+2)}{(x+1)^2(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} = \frac{8}{9}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 4x}{x^3 - 3x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x(x-2)(x+2)}{(x+1)^2(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} = \frac{8}{9}.$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^3 - 4x}{x^3 - 3x - 2} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x(x-2)(x+2)}{(x+1)^2(x-2)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} = -\infty.$$

Suy ra, đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

ADMIN LƯU Ý NHẬN XÉT CHÍNH CON ĐƯỜNG GIẢI BÀI TOÁN NÀY

*** Phát triển câu mức độ tương tự**

Câu 23.1. Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x^2-9}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 1$.

B. Đồ thị hàm số chỉ có 1 tiệm cận đứng là $x = -3$.

C. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

D. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là $x = 3; x = -3$.

Lời giải

Tác giả: Trần Thị Thanh Thủy; Fb: Song tử mắt nâu

Chọn B

$$\text{Điều kiện xác định: } x^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq -3 \end{cases}.$$

A sai vì: Hàm phân thức, có bậc tử (bậc 1) nhỏ hơn bậc mẫu (bậc 2) nên đồ thị có 1 tiệm cận ngang $y = 0$.

Giải phương trình: $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

(Học sinh dễ mắc sai lầm khi kết luận đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng)

Kiểm tra giới hạn:

$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{6}$ (học sinh có thể dùng máy tính kiểm tra), suy ra, $x = 3$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x-3}{x^2-9} = -\infty$ (học sinh có thể dùng máy tính kiểm tra), suy ra $x = -3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 23.2. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+2}$ là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Giải nhanh:

Điều kiện xác định: $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

Tập xác định của hàm số không chứa ∞ suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$.

Thay $x=-2$ lên tử số ta được: $\sqrt{1-(-2)^2}$ không xác định, suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Giải bản chất:

Điều kiện xác định: $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

Tập xác định của hàm số không chứa ∞ , suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Xét tiệm cận đứng:

$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+2}$; $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+2}$ không có giới hạn, suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận.

*** Phát triển câu mức độ cao hơn**

Câu 23.3. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang.

A. $m < 0$.

B. $m = 0$.

C. $m > 0$.

D. Không có giá trị thực của m

Lời giải

Chọn C

Ta thấy khi $m \geq 0$ thì tập xác định của hàm số mới chứa ∞ .

Nếu $m = 0$ thì hàm số $y = x + 1$ không có đường tiệm cận ngang.

Nếu $m > 0$ thì ta có $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\left(\frac{1}{x} + 1\right)}{|x|\sqrt{m + \frac{1}{x^2}}} = \pm \frac{1}{\sqrt{m}}$, suy ra đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang

$$\text{là } y = \frac{1}{\sqrt{m}}, y = \frac{-1}{\sqrt{m}}.$$

Câu 23.4. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2 - mx + m}$ có đúng một tiệm cận đứng.

A. 1.

B. 2.

C. 3. D. 4.

Lời giải

Tác giả: Trần Thị Thanh Thủy; Fb: Song tử mắt nâu

Chọn B

Để thấy tử số có một nghiệm $x = 2$. Do đó để đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2 - mx + m}$ có đúng một tiệm cận đứng thì cần xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $x^2 - mx + m = 0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 4 \end{cases}$.

Trường hợp 2: $x^2 - mx + m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt, trong đó có 1 nghiệm bằng 2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4m > 0 \\ 4 - 2m + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

Câu 23.5 (Nguyễn Việt Hải) Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+m} - 12}{x^3 - 50x + 500}$ có đúng một đường tiệm cận.

Câu 24. Biết rằng α, β là các số thực thỏa mãn $2^\beta (2^\alpha + 2^\beta) = 8(2^{-\alpha} + 2^{-\beta})$. Giá trị của $\alpha + 2\beta$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Mạnh Dũng ; Fb: Mạnh Dũng

Chọn D

$$\text{Ta có: } 2^\beta (2^\alpha + 2^\beta) = 8(2^{-\alpha} + 2^{-\beta}) \Leftrightarrow 2^\beta (2^\alpha + 2^\beta) = 8\left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\beta}\right).$$

$$\Leftrightarrow 2^\beta (2^\alpha + 2^\beta) = 8\left(\frac{2^\alpha + 2^\beta}{2^{\alpha+\beta}}\right) \Leftrightarrow (2^\alpha + 2^\beta)\left(2^\beta - \frac{8}{2^{\alpha+\beta}}\right) = 0.$$

$$\Leftrightarrow 2^\beta - \frac{8}{2^{\alpha+\beta}} = 0 \text{ (do } 2^\alpha + 2^\beta > 0).$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{\alpha+2\beta}-8}{2^{\alpha+\beta}}=0 \Leftrightarrow 2^{\alpha+2\beta}-8=0 \text{ (do } 2^{\alpha+\beta}>0).$$

$$\Leftrightarrow 2^{\alpha+2\beta}=8 \Leftrightarrow 2^{\alpha+2\beta}=2^3 \Leftrightarrow \alpha+2\beta=3.$$

Bài toán tổng quát

Câu 24.1. Biết rằng $a, b > 0 (a \neq 1), \alpha, \beta, m, n, p$ là các số thực thỏa mãn $a^{p\beta}(a^{m\alpha} + a^{n\beta}) = b(a^{-m\alpha} + a^{-n\beta})$. Giá trị của $m\alpha + (n+p)\beta$ bằng

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Mạnh Dũng ; Fb: Mạnh Dũng

$$\text{Ta có: } a^{p\beta}(a^{m\alpha} + a^{n\beta}) = b(a^{-m\alpha} + a^{-n\beta}) \Leftrightarrow a^{p\beta}(a^{m\alpha} + a^{n\beta}) = b\left(\frac{1}{a^{m\alpha}} + \frac{1}{a^{n\beta}}\right).$$

$$\Leftrightarrow a^{p\beta}(a^{m\alpha} + a^{n\beta}) = b\left(\frac{a^{m\alpha} + a^{n\beta}}{a^{m\alpha+n\beta}}\right) \Leftrightarrow (a^{m\alpha} + a^{n\beta})\left(a^{p\beta} - \frac{b}{a^{m\alpha+n\beta}}\right) = 0.$$

$$\Leftrightarrow a^{p\beta} - \frac{b}{a^{m\alpha+n\beta}} = 0 \text{ (do } a^{m\alpha} + a^{n\beta} > 0).$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^{m\alpha+(n+p)\beta} - b}{a^{m\alpha+n\beta}} = 0 \Leftrightarrow a^{m\alpha+(n+p)\beta} - b = 0 \text{ (do } a^{m\alpha+n\beta} > 0).$$

$$\Leftrightarrow a^{m\alpha+(n+p)\beta} = b \Leftrightarrow a^{m\alpha+(n+p)\beta} = a^{\log_a b} \Leftrightarrow m\alpha + (n+p)\beta = \log_a b.$$

Bài toán đặc biệt hóa.

Với $a=3, b=81, m=1, n=4, p=2$ ta có bài toán sau:

Câu 24.2 Biết rằng α, β là các số thực thỏa mãn $3^{2\beta}(3^\alpha + 3^{4\beta}) = 81(3^{-\alpha} + 3^{-4\beta})$. Giá trị của $\alpha + 6\beta$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Mạnh Dũng ; Fb: Mạnh Dũng

Chọn C

$$\text{Ta có: } 3^{2\beta}(3^\alpha + 3^{4\beta}) = 81(3^{-\alpha} + 3^{-4\beta}) \Leftrightarrow 3^{2\beta}(3^\alpha + 3^{4\beta}) = 81\left(\frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{3^{4\beta}}\right).$$

$$\Leftrightarrow 3^{2\beta}(3^\alpha + 3^{4\beta}) = 81\left(\frac{3^\alpha + 3^{4\beta}}{3^{\alpha+4\beta}}\right) \Leftrightarrow (3^\alpha + 3^{4\beta})\left(3^{2\beta} - \frac{81}{3^{\alpha+4\beta}}\right) = 0.$$

$$\Leftrightarrow 3^{2\beta} - \frac{81}{3^{\alpha+4\beta}} = 0 \text{ (do } 3^\alpha + 3^{4\beta} > 0).$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^{\alpha+6\beta} - 81}{3^{\alpha+4\beta}} = 0 \Leftrightarrow 3^{\alpha+6\beta} - 81 = 0 \text{ (do } 3^{\alpha+4\beta} > 0).$$

$$\Leftrightarrow 3^{\alpha+6\beta} = 81 \Leftrightarrow 3^{\alpha+6\beta} = 3^4 \Leftrightarrow \alpha + 6\beta = 4.$$

Câu 25. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng 45° . Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

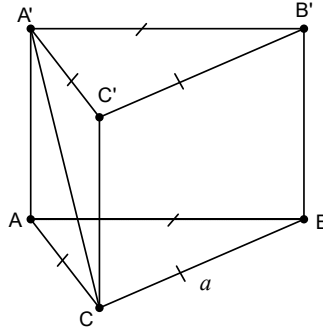
C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Thu Trang; **Fb:** Trang nguyên

Chọn A



Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) chính là góc giữa hai đường thẳng $A'C$ và AC suy ra $\widehat{A'CA} = 45^\circ$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Tam giác vuông $A'AC$ cân suy ra $AA' = AC = a$

Thể tích khối chóp $ABC.A'B'C'$ là : $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot AA' = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Bài toán tương tự

Câu 25.1 Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$. Mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 30° . Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

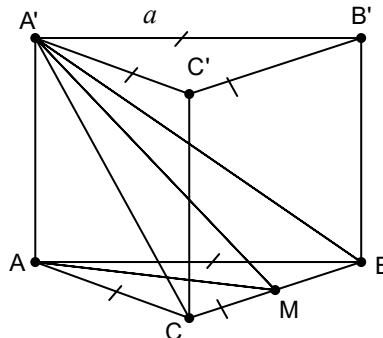
C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Thu Trang; **Fb:** Trang nguyên

Chọn C



Gọi M là trung điểm đoạn BC suy ra $AM \perp BC$, $A'M \perp BC$

Góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt phẳng (ABC) chính là góc giữa hai đường thẳng $A'M$ và AM suy ra $\widehat{A'MA} = 30^\circ$

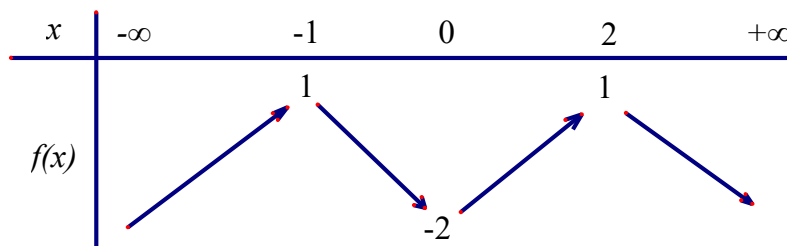
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Tam giác vuông $A'AM$ có $AA' = AM \tan 30^\circ = \frac{a}{2}$

$$\text{Thể tích khối chóp } ABC.A'B'C' \text{ là: } V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot AA' = \frac{a^3 \sqrt{3}}{8}.$$

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(2x)$ đạt cực đại tại



A. $x = \frac{1}{2}$.

B. $x = -1$.

C. $x = 1$.

D. $x = -2$.

Lời giải

Tác giả: Trần Mạnh Tường ; Fb: Trần Tuệ Minh

Chọn C

Đặt $2x = t$.

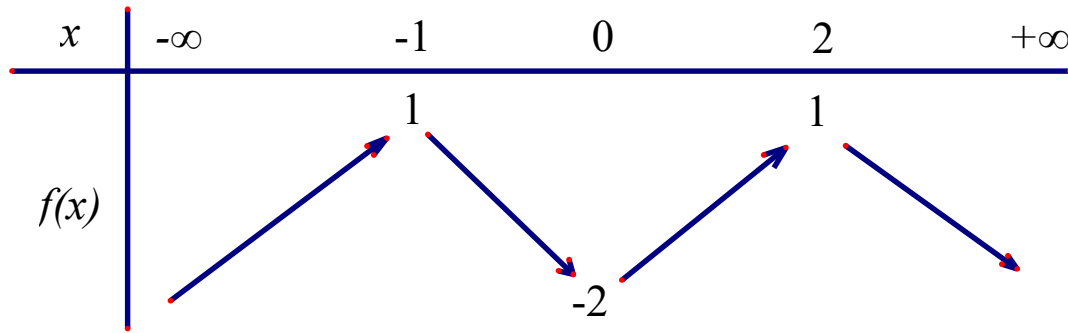
Ta thấy $[f(2x)]' = 2f'(2x) = 2f'(t)$ nên để hàm số $y = f(2x)$ đạt cực đại thì hàm số $y = f(t)$ phải đạt cực đại

Theo bảng biến thiên thì hàm số $y = f(t)$ đạt cực đại tại $t = -1$ và $t = 2$

Suy ra hàm số $y = f(2x)$ đạt cực đại tại $2x = -1$ và $2x = 2$ hay $x = -\frac{1}{2}$ và $x = 1$

Bài tương tự

Câu 26.1 Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(-x+3)$ đạt cực đại tại

A. $x = -1$ B. $x = 2$.C. $x = 0$.D. $x = 3$.

Lời giải

Tác giả: Trần Mạnh Tường ; Fb: Trần Tuệ Minh

Chọn D

Đặt $-x + 3 = t$.

Ta thấy $[f(-x+3)]' = -f'(-x+3) = -f'(t)$ nên để hàm số $y = f(-x+3)$ đạt cực đại thì hàm số $y = f(t)$ phải đạt cực tiểu

Theo bảng biến thiên thì hàm số $y = f(t)$ đạt cực tiểu tại $t = 0$

Suy ra hàm số $y = f(-x+3)$ đạt cực đại tại $-x+3 = 0$ hay $x = 3$

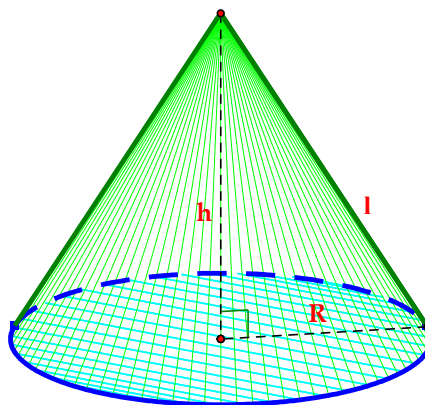
Câu 27. Cho hình nón tròn xoay có bán kính đáy bằng 3 và diện tích xung quanh bằng $6\sqrt{3}\pi$. Góc ở đỉnh của hình nón đã cho bằng

A. 60° .B. 150° .C. 90° .D. 120° .

Lời giải

Tác giả: Lê Hữu Đức ; Fb: Le Huu Duc

Chọn D



Gọi góc ở đỉnh của hình nón bằng 2α .

Ta có: $S_{xq} = 6\sqrt{3}\pi \Leftrightarrow \pi Rl = 6\sqrt{3}\pi \Rightarrow l = 2\sqrt{3}$

Nên $\sin \alpha = \frac{R}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$

Vậy góc ở đỉnh của hình nón bằng 120° .

Bài tương tự

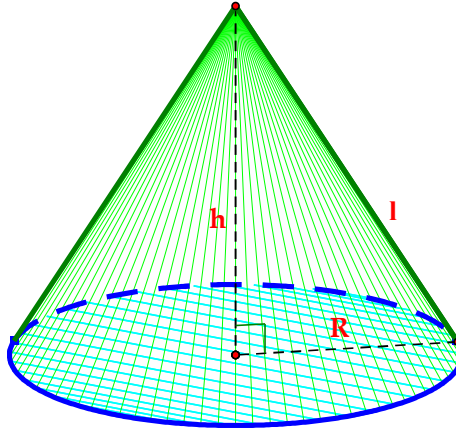
Câu 27.1 Cho hình nón tròn xoay có bán kính đáy bằng 2 và diện tích xung quanh bằng $4\sqrt{2}\pi$. Góc ở đỉnh của hình nón đã cho bằng

A. 60° .B. 150° .C. 90° .D. 120° .

Lời giải

Tác giả: Lê Hữu Đức ; Fb: Le Huu Duc

Chọn C



Gọi góc ở đỉnh của hình nón bằng 2α .

Ta có: $S_{xq} = 4\sqrt{2}\pi \Leftrightarrow \pi Rl = 4\sqrt{2}\pi \Rightarrow l = 2\sqrt{2}$

Nên $\sin \alpha = \frac{R}{l} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$

Vậy góc ở đỉnh của hình nón bằng 90° .

Câu 28. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 + 4z + 7 = 0$. Số phức $z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2$ bằng

A. 2.

B. 10.

C. $2i$.D. $10i$.

Lời giải

Tác giả: Lê Thị Phương Liên; Fb: Phuonglien Le

Chọn A

$$z^2 + 4z + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2 + \sqrt{3}i \\ z = -2 - \sqrt{3}i \end{cases}$$

$$z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 = (-2 + \sqrt{3}i)(-2 + \sqrt{3}i) + (-2 - \sqrt{3}i)(-2 - \sqrt{3}i) = 2.$$

$$\text{Vậy } z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 = 2.$$

Cách 2: Phương trình bậc hai $z^2 + 4z + 7 = 0$ có $\Delta' = -3$ là số nguyên âm nên phương trình có hai nghiệm phức z_1, z_2 và $\overline{z_1} = z_2, \overline{z_2} = z_1$.

$$\text{Áp dụng định lý Viét, ta có: } \begin{cases} z_1 + z_2 = -4 \\ z_1 \cdot z_2 = 7 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 = z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2 = 16 - 14 = 2.$$

Bài toán tương tự

Câu 28.1 Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 3 = 0$. Số phức $z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2$ bằng

A. 2.

B. 5.

C. -2 .D. $5i$.

Lời giải

Chọn D

$$z^2 + 2z + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 + \sqrt{2}i \\ z = -1 - \sqrt{2}i \end{cases}$$

$$z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 = (-1 + \sqrt{2}i)(-1 - \sqrt{2}i) + (-1 - \sqrt{2}i)(-1 + \sqrt{2}i) = -2.$$

$$\text{Vậy } z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 = -2.$$

Cách 2: Phương trình bậc hai $z^2 + 2z + 3 = 0$ có $\Delta' = -2$ là số nguyên âm nên phương trình có hai nghiệm phức z_1, z_2 và $\overline{z_1} = z_2, \overline{z_2} = z_1$.

$$\text{Áp dụng định lý Viét, ta có: } \begin{cases} z_1 + z_2 = -2 \\ z_1 \cdot z_2 = 3 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 = z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 \cdot z_2 = 4 - 6 = -2.$$

Câu 29. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \frac{9}{x}$ trên đoạn $[1; 4]$. Giá trị của $m + M$ bằng

A. $\frac{65}{4}$.

B. 16.

C. $\frac{49}{4}$.

D. 10.

Lời giải

Tác giả: Phạm Thị Thu Trang; Fb: Trang Phạm

Chọn B

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[1; 4]$. Đặt $y = f(x)$

$$\text{Ta có: } f'(x) = \left(x + \frac{9}{x}\right)' = 1 - \frac{9}{x^2}.$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{9}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \in (1; 4) \\ x = -3 \notin (1; 4) \end{cases}.$$

$$\text{Có } f(1) = 10; f(3) = 6; f(4) = \frac{25}{4} \Rightarrow m = \min_{[1; 4]} y = 6 \text{ và } M = \max_{[1; 4]} y = 10.$$

$$\text{Vậy } m + M = 16.$$

Câu 29.1 Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = 2x + \sqrt{5 - x^2}$. Giá trị của $m^2 + M$ bằng

A. 5.

B. 25.

C. $5 + 2\sqrt{5}$.

D. 45.

Lời giải

Tác giả: Phạm Thị Thu Trang; Fb: Trang Phạm

Chọn B

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$.

$$\text{Ta có } f'(x) = 2 - \frac{x}{\sqrt{5-x^2}} = \frac{2\sqrt{5-x^2} - x}{\sqrt{5-x^2}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{5-x^2} - x = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{5-x^2} = x.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4(5-x^2) = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 5x^2 - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \in (-\sqrt{5}; \sqrt{5}).$$

$$\text{Ta có: } f(-\sqrt{5}) = -2\sqrt{5}; f(2) = 5; f(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}.$$

$$\text{Suy ra } M = \max_{[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]} f(x) = 5 \text{ và } m = \min_{[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]} f(x) = -2\sqrt{5}.$$

$$\text{Vậy } m^2 + M = (-2\sqrt{5})^2 + 5 = 25.$$

Câu 30. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có I, J tương ứng là trung điểm của BC và BB' . Góc giữa hai đường thẳng AC và IJ bằng

A. 45° .

B. 60° .

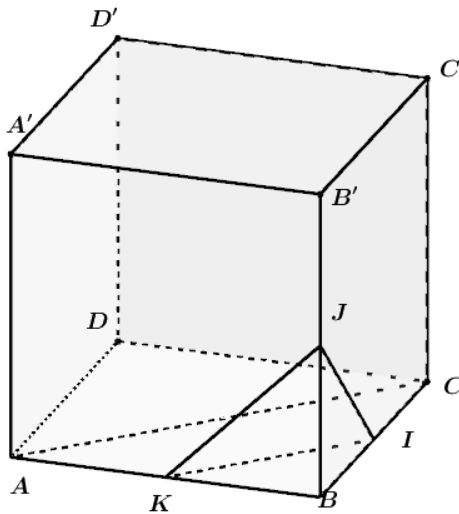
C. 30° .

D. 120° .

Lời giải

Tác giả: Phan Chí Dũng ; Fb: Phan Chí Dũng

Chọn B



Gọi K là trung điểm của AB vì $ABCD$ là hình vuông nên $KI \parallel AC$, suy ra góc giữa AC và IJ bằng góc giữa KI và IJ .

Ta có $IK = \frac{1}{2}AC$; $IJ = \frac{1}{2}B'C$; $KJ = \frac{1}{2}AB'$ vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên

$AC = B'C = AB'$ suy ra $KI = IJ = JK$ suy ra tam giác IJK là tam giác đều, suy ra $\widehat{KIJ} = 60^\circ$.

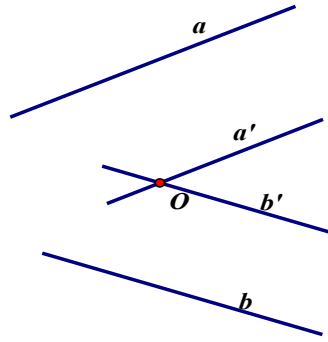
Vậy góc giữa AC và IJ bằng 60° .

BÀI TOÁN TỔNG QUÁT

- ❖ **Bài toán:** Xác định góc giữa hai đường thẳng trong không gian.
- ❖ **Kiến thức cần nhớ để vận dụng vào bài tập**

- **Định nghĩa góc giữa hai đường thẳng**

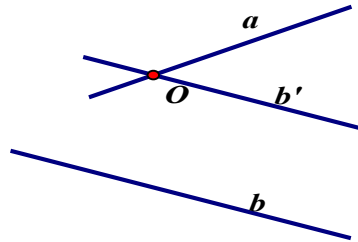
Góc giữa hai đường thẳng a và b là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song (hoặc trùng) với a và b .



❖ **Phương pháp giải**

- **Cách 1: Sử dụng định nghĩa**

Tìm hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm O và lần lượt song song (hoặc trùng) với a và b , thông thường ta chọn O thuận lợi thuộc đường thẳng a , b' đi qua O và song song với b . Khi đó góc giữa a và b là góc giữa a và b' .



- **Cách 2: Sử dụng véc tơ**

Gọi α là góc hai đường thẳng a và b .

$\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ lần lượt là các véc tơ chỉ phương của a và b .

- Nếu $(\vec{u}_1; \vec{u}_2) \leq 90^\circ$ thì: $\alpha = (\vec{u}_1; \vec{u}_2)$.

- Nếu $(\vec{u}_1; \vec{u}_2) > 90^\circ$ thì: $\alpha = 180^\circ - (\vec{u}_1; \vec{u}_2)$.

BÀI TOÁN TƯƠNG TỰ CÙNG MỨC ĐỘ

Tác giả: Vũ Nga; Fb: Nga Vu

Câu 30.1 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'B$ bằng

A. 45° .

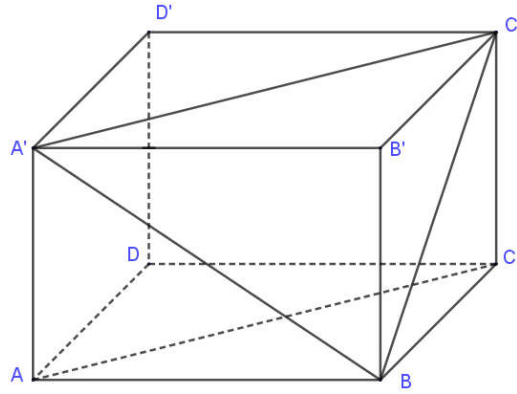
B. 60° .

C. 30° .

D. 120° .

Lời giải

Chọn B



Do $AC \parallel A'C'$ nên góc giữa hai đường thẳng AC và $A'B$ là góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và $A'B$. Ta có $A'C' = A'B = BC' = a\sqrt{2}$ (với a là độ dài cạnh của hình lập phương)
 $\Rightarrow \triangle A'BC'$ đều $\Rightarrow \widehat{BA'C'} = 60^\circ \Rightarrow$ góc giữa hai đường thẳng AC và $A'B$ là 60° .

Câu 30.2 Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên là a . I, J tương ứng là trung điểm của BC và BB' . Góc giữa hai đường thẳng AC và IJ bằng α . Tính $\cos \alpha$?

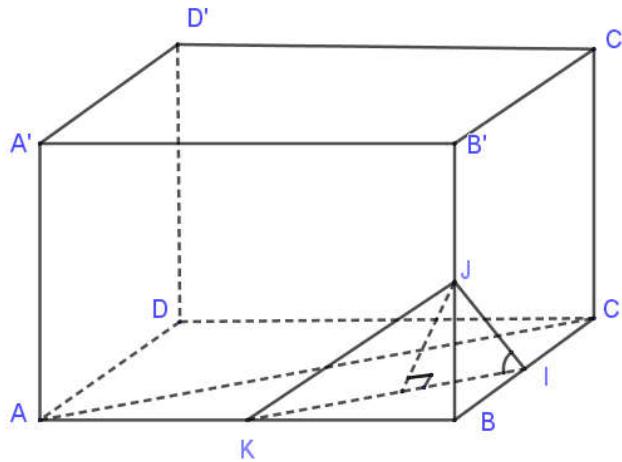
A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

C. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.

D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Gọi K là trung điểm của AB vì $ABCD$ là hình vuông nên $KI \parallel AC$, suy ra góc giữa AC và IJ bằng góc giữa KI và IJ .

Ta có $IK = a\sqrt{2}$, $JK = JI = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \cos \widehat{JIK} = \frac{KI}{2IJ} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

Câu 31. Giải bóng chuyền quốc tế VTV Cup có 8 đội tham gia, trong đó có hai đội Việt Nam. Ban tổ chức bốc thăm ngẫu nhiên để chia thành hai bảng đấu, mỗi bảng 4 đội. Xác suất để hai đội của Việt Nam nằm ở hai bảng khác nhau bằng

A. $\frac{2}{7}$.

B. $\frac{5}{7}$.

C. $\frac{3}{7}$.

D. $\frac{4}{7}$.

Lời giải

Tác giả: Phạm Văn Tuấn; Fb: Phạm Tuấn

Chọn D**Nhận định bài toán:**

- 1) Đây là dạng bài toán phân chia một tập hợp ra thành các nhóm có số lượng bằng nhau.
- 2) Phương pháp:

Dạng bài toán này được phân chia làm 2 loại đó là:

- Các nhóm có thứ tự A, B, C, D...
- Các nhóm không phân biệt thứ tự.

Nếu không phân biệt rõ ràng 2 bài toán này thì rất dễ dẫn đến nhầm lẫn và sai kết quả.

Ví dụ: Có bao nhiêu cách chia 20 người thành 4 nhóm, mỗi nhóm có 5 người trong các trường hợp sau:

- a) Các nhóm được đánh tên theo thứ tự A, B, C, D.
- b) Không phân biệt thứ tự nhóm.

Lời giải

a) Số cách chọn 5 người cho nhóm A là C_{20}^5 . Ứng với mỗi cách chọn trên, ta có số cách chọn 5 người cho nhóm B là C_{15}^5 , nhóm C là C_{10}^5 và 5 người còn lại vào nhóm D.

Theo quy tắc nhân, ta được số cách chia nhóm là: $C_{20}^5 \cdot C_{15}^5 \cdot C_{10}^5 \cdot 1$ (cách).

b) Vì các nhóm không phân biệt thứ tự nên khi ta hoán vị 4 nhóm trên sẽ cho cùng một kết quả. Do đó số cách chia trong trường hợp này là

$$\frac{C_{20}^5 \cdot C_{15}^5 \cdot C_{10}^5 \cdot 1}{4!} \text{ (cách)}$$

3) Phân tích bài toán và lời giải.

Chia 8 đội thành hai bảng đấu, do đó hai bảng đấu này sẽ có thứ tự rõ ràng cho nên bài toán của chúng ta thuộc loại chia nhóm có thứ tự.

Gọi hai bảng đấu là bảng A và bảng B.

Chọn 4 đội vào bảng A ta có C_8^4 cách, bốn đội còn lại vào bảng B có 1 cách.

Theo quy tắc nhân, ta có số cách chia 8 đội vào hai bảng đấu là:

$$n(\Omega) = C_8^4 \cdot 1 = 70 \text{ (cách)}$$

Gọi A là biến cố “Hai đội Việt Nam nằm ở hai bảng khác nhau”.

Bảng A: Có 3 đội nước ngoài và 1 đội Việt Nam. Số cách chọn là $C_6^3 \cdot C_2^1$.

Bảng B: Chỉ còn 1 cách chọn duy nhất cho 3 đội nước ngoài và 1 đội Việt Nam còn lại vào bảng B.

Do đó số cách chia 8 đội thành 2 bảng mỗi bảng có 1 đội Việt Nam là :

$$n(A) = C_6^3 \cdot C_2^1 \cdot 1 = 40 \text{ (cách)}$$

Vậy xác suất của biến cố A là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{40}{70} = \frac{4}{7}$.

Bài toán tương tự

Câu 31.1 Giải bóng chuyền quốc tế VTV Cup có 12 đội tham gia, trong đó có 3 đội Việt Nam. Ban tổ chức bốc thăm ngẫu nhiên để chia thành 3 bảng đấu, mỗi bảng 4 đội. Tính xác suất để 3 đội của Việt Nam cùng nằm ở một bảng đấu.

A. $\frac{3}{55}$.

B. $\frac{1}{330}$.

C. $\frac{1}{110}$.

D. $\frac{6}{55}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi ba bảng đấu có tên là A, B, C.

Chọn 4 đội cho bảng A có C_{12}^4 cách, chọn 4 đội cho bảng B có C_8^4 cách và 4 đội còn lại vào bảng C có 1 cách.

Theo quy tắc nhân, số cách chia 12 đội thành 3 bảng đấu là: $n(\Omega) = C_{12}^4 \cdot C_8^4 \cdot 1 = 34650$ (cách)

Gọi A là biến cố “3 đội Việt Nam cùng nằm ở một bảng đấu.

Giả sử 3 đội Việt Nam cùng nằm ở bảng A.

Khi đó bảng A sẽ chọn 1 đội trong 9 đội nước ngoài và 3 đội Việt Nam, 8 đội còn lại chia vào bảng B và C. Trong trường hợp này ta có số cách chọn là $C_9^1 \cdot 1 \cdot C_8^4 \cdot 1 = 630$ (cách)

Vì vai trò của các bảng là như nhau nên trường hợp 3 đội Việt Nam ở bảng B hay bảng C đều cho kết quả như nhau.

Vậy số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $n(A) = C_9^1 \cdot C_8^4 \cdot 3 = 1890$ (cách)

Xác suất của biến cố A là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1890}{34650} = \frac{3}{55}$.

Câu 32. Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0; \pi)$ là

A. $-x \cot x + \ln(\sin x) + C$.

B. $x \cot x - \ln|\sin x| + C$.

C. $x \cot x + \ln|\sin x| + C$. **D.** $-x \cot x - \ln(\sin x) + C$.

Lời giải

Tác giả: Văn Bùi Vũ ; Fb: Van Tuan Vu

Chọn A

Gọi $F(x) = \int \frac{x}{\sin^2 x} dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{\sin^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cot x \end{cases}$

Khi đó: $F(x) = \int \frac{x}{\sin^2 x} dx = -x \cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$

$= -x \cot x + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = -x \cot x + \ln|\sin x| + C$.

Vì $x \in (0; \pi)$ nên $\sin x > 0$, suy ra $\ln|\sin x| = \ln(\sin x)$.

Vậy: $F(x) = -x \cot x + \ln(\sin x) + C$.

Phân tích và bình luận:

Bài toán sử dụng nguyên hàm từng phần dạng đặc biệt kết hợp giữa đa thức và lượng giác: $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$; $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$; $\int x \tan^2 x dx$; $\int x \cot^2 x dx$ và xét dấu hàm lượng giác.

Bài toán tương tự

Câu 32.1 Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là

A. $F(x) = x \tan x + \ln(\cos x) + C.$

B. $F(x) = -x \tan x + \ln(\cos x) + C.$

C. $F(x) = x \tan x - \ln(\cos x) + C.$

D. $F(x) = x \tan x - \ln|\cos x| + C.$

Lời giải

Tác giả: Văn Bùi Vũ ; Fb: Van Tuan Vu

Chọn A

Gọi $F(x) = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}$

Khi đó: $F(x) = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

$= x \tan x + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = x \tan x + \ln|\cos x| + C.$

Vì $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $\cos x > 0$, suy ra $\ln|\cos x| = \ln(\cos x)$.

Vậy: $F(x) = x \tan x + \ln(\cos x) + C.$

Câu 32.2 Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \tan^2 x$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ là

A. $F(x) = x \tan x + \ln(\cos x) - \frac{x^2}{2} + C.$

B. $F(x) = -x \tan x + \ln(\cos x) - \frac{x^2}{2} + C.$

C. $F(x) = x \tan x - \ln(\cos x) - \frac{x^2}{2} + C.$

D. $F(x) = x \tan x - \ln|\cos x| - \frac{x^2}{2} + C.$

Lời giải

Tác giả: Văn Bùi Vũ ; Fb: Van Tuan Vu

Chọn A

Gọi

$F(x) = \int x \tan^2 x dx = \int x(\tan^2 x + 1 - 1) dx = \int x(\tan^2 x + 1) dx - \int x dx = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx - \int x dx.$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}$

$$\begin{aligned}\text{Khi đó: } F(x) &= \int \frac{x}{\cos^2 x} dx - \int x dx = x \tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx - \frac{x^2}{2} \\ &= x \tan x + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} - \frac{x^2}{2} = x \tan x + \ln|\cos x| - \frac{x^2}{2} + C.\end{aligned}$$

Vì $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ nên $\cos x > 0$, suy ra $\ln|\cos x| = \ln(\cos x)$.

$$\text{Vậy: } F(x) = x \tan x + \ln(\cos x) - \frac{x^2}{2} + C.$$

Câu 33. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A . Gọi E là trung điểm AB . Biết $AB = 2a$, $BC = a\sqrt{13}$, $CC' = 4a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và CE bằng

A. $\frac{4a}{7}$.

B. $\frac{12a}{7}$.

C. $\frac{6a}{7}$.

D. $\frac{3a}{7}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Bảo Mai; Fb: Bao An

Chọn C

Phân tích:

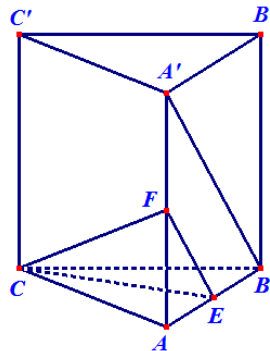
* Kiến thức trọng tâm: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

* Hướng giải bài toán:

+ Dựng mặt phẳng đi qua một đường thẳng và song song với đường còn lại

+ Dùng tỉ số khoảng cách để đưa việc tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng thành tính khoảng cách từ một điểm khác đến mặt phẳng thuận lợi hơn.

+ Tính chiều cao của một tứ diện vuông



* Giải: Lấy trung điểm F của AA' được EF song song với $\Rightarrow (CEF)$ đi qua CE và song song với $A'B \Rightarrow d(A'B, CE) = d(B, (CEF)) = d(A, (CEF))$.

Mặt khác $ACEF$ là tứ diện vuông tại A nên $\frac{1}{d^2(A, (CEF))} = \frac{1}{AF^2} + \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AC^2}$.

Ta có $AA' = CC' = 4a \Rightarrow AF = 2a$

$AB = 2a \Rightarrow AE = a$

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{13a^2 - 4a^2} = 3a$$

$$\Rightarrow \frac{1}{d^2(A, (CEF))} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{9a^2} = \frac{49}{36a^2} \Rightarrow d(A, (CEF)) = \frac{6a}{7} \Rightarrow d(CE, A'B) = \frac{6a}{7}.$$

Bài toán tương tự

Câu 33.1 Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Gọi E là trung điểm AB . Biết góc giữa CB' và $(BCC'B')$ bằng 30° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và CE bằng

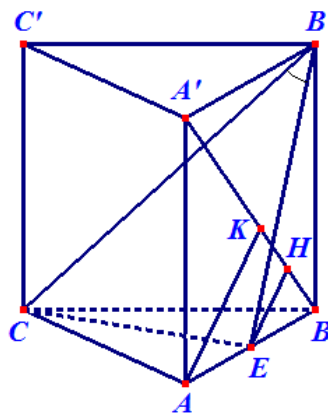
A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

B. $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

D. $\frac{2a\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải



Thấy $CE \perp AB$, $CE \perp AA' \Rightarrow CE \perp (AA'B'B)$ hay $(AA'B'B)$ chính là mặt phẳng qua $A'B$, vuông góc với CE . Gọi H là hình chiếu của E trên $A'B \Rightarrow EH$ chính là đoạn vuông góc chung của $A'B$ và $CE \Rightarrow d(CE, A'B) = EH$.

Mặt khác CB' có hình chiếu là EB' trên $(BCC'B')$ là EB'

$$\Rightarrow (CB', (BCC'B')) = (CB', EB') = \widehat{CB'E} \Rightarrow \widehat{CB'E} = 30^\circ \Rightarrow CB' = 2CE = 2a\sqrt{3}$$

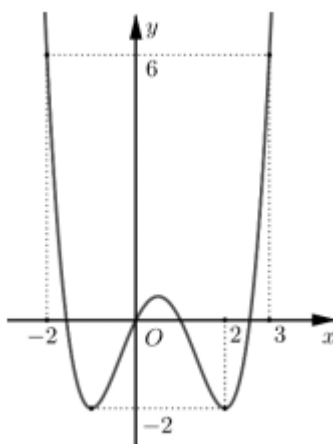
$$\Rightarrow CC' = \sqrt{CB'^2 - C'B'^2} = \sqrt{12a^2 - 4a^2} = 2a\sqrt{2}.$$

Gọi K là hình chiếu của A trên $A'B$.

$$\text{Ta có } EH = \frac{1}{2}AK \text{ và } \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{8a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{3}{8a^2} \Rightarrow AK = \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow EH = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \text{ hay } d(CE, A'B) = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x^3 - 3x) = m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?



A. 3.

B. 2.

C. 6.

D. 7.

Lời giải*Tác giả: Vũ Danh Được; Fb: Danh Được Vũ***Chọn B**

Đặt $t = x^3 - 3x$, xét hàm số $t = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-1; 2]$.

$$\text{Ta có } t' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 2 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $t = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-1; 2]$.

x	-1	1	2
t'	-	0	+
t	2	-2	2

Từ đó bảng biến thiên trên ta thấy:

+) Nếu $t = -2$ thì $x = 1 \in [-1; 2]$.

+) Nếu $t \in (-2; 2]$ thì có hai nghiệm phân biệt $x \in [-1; 2]$.

Do đó phương trình $f(x^3 - 3x) = m$ có 6 nghiệm x phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$ khi phương trình $f(t) = m$ có 3 nghiệm t phân biệt thuộc khoảng $(-2; 2]$ (*).

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ đã cho và m là số nguyên ta thấy $m = 0$ hoặc $m = -1$ thỏa mãn (*).

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán tổng quát:

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị cho trước là (C) (hoặc cho trước bảng biến thiên). Biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình $f[n.g(x) + p] = h(m)$ trên tập D cho trước ($D \subseteq \mathbb{R}$); trong đó n, p là các số thực; $h(m)$ là biểu thức với tham số m .

Cách giải:

Bước 1: Đặt $t = n.g(x) + p$. Khi đó $f[n.g(x) + p] = h(m) \Rightarrow f(t) = h(m)$.

Bước 2:

+) Tìm miền giá trị D' của t ứng với $x \in D$.

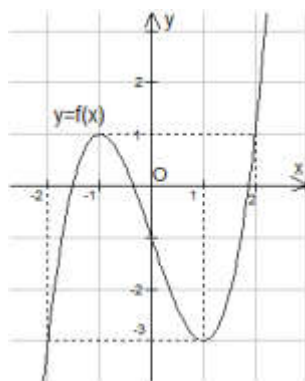
+) Chỉ ra mối quan hệ giá trị tương ứng giữa $t \in D'$ và $x \in D$.

Bước 3: Dựa vào đồ thị (C) (hoặc bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$), biện luận theo m số nghiệm $t \in D'$ của phương trình $f(t) = h(m)$.

Bước 4: Dựa vào mối quan hệ giữa x và t ở Bước 2 ta có biện luận số nghiệm $x \in D$ của phương trình $f[n.g(x) + p] = h(m)$.

Bài toán tương tự

Câu 34.1. (Thi thử chuyên Sư Phạm HN lần 1 năm 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Phương trình $f(2\sin x) = m$ có đúng ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi; \pi]$ khi và chỉ khi



A. $m \in \{-3; 1\}$.

B. $m \in (-3; 1)$.

C. $m \in [-3; 1)$.

D. $m \in (-3; 1]$.

Lời giải

Tác giả: Vũ Danh Được; Fb: Danh Được Vũ

Chọn A

Đặt $t = 2\sin x \Leftrightarrow \sin x = \frac{t}{2}$.

Với $x \in [-\pi; \pi]$ thì $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow t \in [-2; 2]$.

+) Với $t = 2$ thì có 1 nghiệm x thuộc $[-\pi; \pi]$ là $x = \frac{\pi}{2}$.

+) Với $t = -2$ thì có 1 nghiệm x thuộc $[-\pi; \pi]$ là $x = -\frac{\pi}{2}$.

+) Với $t=0$ thì có 3 nghiệm x thuộc $[-\pi; \pi]$ là $x \in \{0; \pm\pi\}$.

+) Với $t \in (-2; 2) \setminus \{0\}$ thì có 2 nghiệm phân biệt x thuộc $[-\pi; \pi]$.

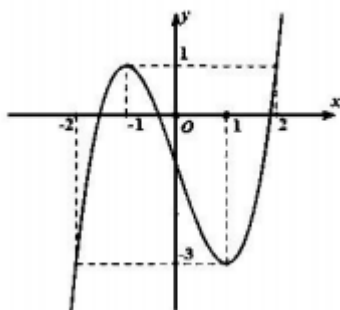
Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f(x)$ đã cho, để phương trình $f(2\sin x) = m$ có đúng ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi; \pi]$ thì phương trình $f(t) = m$ (*) trên $[-2; 2]$ xảy ra các trường hợp sau:

TH1: $m = 1$ thì (*) có hai nghiệm là $t \in \{-1; 2\}$ nên thỏa mãn yêu cầu.

TH2: $m = -3$ thì (*) có hai nghiệm là $t \in \{1; -2\}$ nên thỏa mãn yêu cầu.

Vậy $m \in \{-3; 1\}$ thì thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 34.2. (Thi thử chuyên Lam Sơn lần 2 năm 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $f(f(x) - 1) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 6.

B. 5.

C. 7.

D. 4.

Lời giải

Tác giả: Vũ Danh Được; Fb: Danh Được Vũ

Chọn C

Đặt $t = f(x) - 1 \Leftrightarrow f(x) = t + 1$.

Từ đồ thị của hàm số đã cho, phương trình $f(t) = 0$ có ba nghiệm phân biệt: $t_1 \in (-2; -1)$, $t_2 \in (-1; 0)$, $t_3 \in (1; 2)$.

+) Với $t_1 \in (-2; -1) \Rightarrow -1 < t_1 + 1 < 0$, dựa vào đồ thị đã cho phương trình $f(x) = t_1 + 1$ có 3 nghiệm thực x phân biệt.

+) Với $t_2 \in (-1; 0) \Rightarrow 0 < t_2 + 1 < 1$, dựa vào đồ thị đã cho phương trình $f(x) = t_2 + 1$ có 3 nghiệm thực x phân biệt.

+) Với $t_3 \in (1; 2) \Rightarrow 2 < t_3 + 1 < 3$, dựa vào đồ thị đã cho phương trình $f(x) = t_3 + 1$ có 1 nghiệm x .

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm thực phân biệt.

Câu 35. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z - 1|^2 + |z - \bar{z}|i + (z + \bar{z})i^{2019} = 1$?

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Tác giả: Trần Thị Thơm ; Fb: Tranthom

Chọn D

Giả sử $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = a - bi$.

Ta có: $z - 1 = a - 1 + bi$, $z - \bar{z} = 2bi$, $z + \bar{z} = 2a$.

$$i^{2019} = (i^2)^{1009} i = (-1)^{1009} i = -i.$$

$$\text{Do đó } |z - 1|^2 + |z - \bar{z}|^2 + (z + \bar{z})i^{2019} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(a-1)^2 + b^2} \right)^2 + \sqrt{(2b)^2} \cdot i + 2a(-i) = 1$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 + b^2 + 2|b|i - 2ai = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + b^2 = 1 \\ 2|b| - 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2a + b^2 = 0 \\ a = |b| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2|b|^2 - 2|b| = 0 \\ a = |b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |b| = 0 \\ |b| = 1 \\ a = |b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy có 3 số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Phân tích:

***) Kiến thức trọng tâm liên quan đến bài toán:** Sử dụng các kiến thức về số phức liên hợp, modun của số phức, hai số phức bằng nhau, các phép toán trên số phức. Cụ thể:

1.1. Số phức liên hợp

Số phức liên hợp của $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là $\bar{z} = a - bi$. (Đổi dấu phần ảo của z).

$$1.2. \text{ Hai số phức bằng nhau: } a + bi = a' + b'i \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases} \quad (a, b, a', b' \in \mathbb{R}).$$

$$1.3. \text{ Môđun của số phức: } |z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$1.4. \text{ Tính } i^n : i^n = \begin{cases} i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k \\ i^{2k+1} = (i^2)^k i = (-1)^k i \end{cases}$$

***) Lỗi học sinh hay gặp:**

+ Khi lấy modđun: $|z| = a^2 + b^2$

+ Nhầm lẫn phần thực, phần ảo.

*) **Lưu ý với lớp bài toán tìm z** : Khi tìm z mà trong giả thiết bài toán ngoài việc cho z , còn có cả $\bar{z}$, $|z|$,... thì ta thường sử dụng phép thay trực tiếp $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) và các yếu tố liên quan để tìm được mối liên hệ giữa phần thực, phần ảo của z .

*) **Các bài toán tương tự:**

Mức độ vận dụng

Câu 35.1 Cho các số phức z thỏa mãn $|z - 2i^{2020}| = |\bar{z} - 1 + 2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = 2\bar{z} - 1 + 4i$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Khoảng cách từ $I(2; -3)$ đến đường thẳng đó bằng

A. $\frac{18\sqrt{5}}{5}$.

B. $\frac{18\sqrt{13}}{13}$.

C. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{10\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Tác giả: Trần Thị Thơm ; Fb: Tranthom

Chọn D

Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) và $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có } |z - 2i^{2020}| = |\bar{z} - 1 + 2i| \Leftrightarrow |a + bi - 2(i^2)^{1010}| = |a - bi - 1 + 2i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a-2)^2 + b^2} = \sqrt{(a-1)^2 + (2-b)^2} \Leftrightarrow 2a - 4b + 1 = 0 \quad (1).$$

$$\text{Theo giả thiết: } w = 2\bar{z} - 1 + 4i \Leftrightarrow x + yi = 2(a - bi) - 1 + 4i \Leftrightarrow x + yi = 2a - 1 + (4 - 2b)i.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a - 1 \\ y = 4 - 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x+1}{2} \\ b = \frac{4-y}{2} \end{cases} \quad (2).$$

$$\text{Thay (2) vào (1) ta được: } 2 \cdot \frac{x+1}{2} - 4 \cdot \frac{4-y}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 6 = 0 \quad (\Delta).$$

$$\text{Vậy: } d(I, \Delta) = \frac{10\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 35.2 Cho các số phức z thỏa mãn $|2iz - 2i^{2021}| = |3\bar{z} - 1|$ và $|z| = 1$. Điểm biểu diễn cho số phức z có hoành độ bằng

A. -4 .

B. 4 .

C. -1 .

D. 1 .

Lời giải

Tác giả: Trần Thị Thơm ; Fb: Tranthom

Chọn C

Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có } |2iz - 2i^{2021}| = |3\bar{z} - 1| \Leftrightarrow |2i(a + bi) - 2(i^2)^{1010}i| = |3(a - bi) - 1|$$

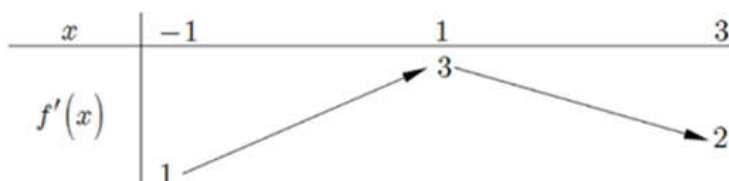
$$\Leftrightarrow |(2a - 2)i - 2b| = |(3a - 1) - 3bi| \Leftrightarrow \sqrt{(2a - 2)^2 + 4b^2} = \sqrt{(3a - 1)^2 + 9b^2}$$

$$\Leftrightarrow 5(a^2 + b^2) + 2a - 3 = 0 \quad (1).$$

Mặt khác : $\left| \overline{z} \right| = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1 \quad (2).$

Thay (2) vào (1) được $5.1 + 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = -1.$

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như hình dưới



Tìm m để bất phương trình $m + x^2 \leq f(x) + \frac{1}{3}x^3$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 3)$.

A. $m < f(0).$

B. $m \leq f(0).$

C. $m \leq f(3).$

D. $m < f(1) - \frac{2}{3}.$

Lời giải

Tác giả : Võ Thị Ngọc Ánh ; Fb: Võ Ánh

Chọn B.

Ta có $m + x^2 \leq f(x) + \frac{1}{3}x^3 \Leftrightarrow m \leq f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x^2.$

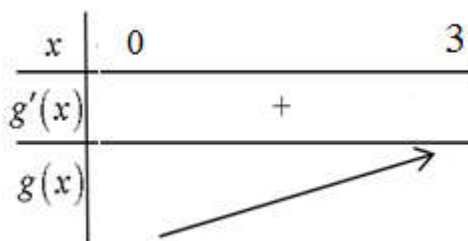
Đặt $g(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x^2.$

Ta có $g'(x) = f'(x) + x^2 - 2x = f'(x) - (-x^2 + 2x).$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x^2 + 2x.$

Mà $f'(x) > 1, \forall x \in (0; 3)$ và $-x^2 + 2x = 1 - (x-1)^2 \leq 1, \forall x \in (0; 3)$ nên $g'(x) > 0, \forall x \in (0; 3).$

Từ đó ta có bảng biến thiên của $g(x)$:



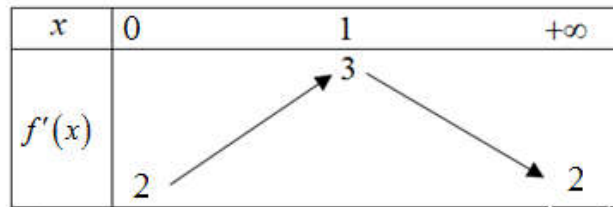
Bất phương trình $m \leq f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x^2$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 3)$

$\Leftrightarrow m \leq g(0) \Leftrightarrow m \leq f(0).$

NHẬN XÉT: (Võ Thị Ngọc Ánh) Bài toán xây dựng dựa trên ý tưởng mối quan hệ giữa bảng biến thiên của $f'(x)$ hoặc đồ thị của $f'(x)$ so sánh với $h'(x)$ để suy ra sự biến thiên của hàm số có dạng $g(x) = f(x) - h(x).$

Bài toán tương tự

Câu 36.1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như hình dưới



Tìm m để bất phương trình $m + 2 \sin x \leq f(x)$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; +\infty)$.

A. $m \geq f(0)$.

B. $m \leq f(1) - 2 \sin 1$.

C. $m \leq f(0)$.

D. $m \geq f(1) - 2 \sin 1$.

Tác giả : Võ Thị Ngọc Ánh ; Fb: Võ Ánh

Lời giải

Chọn C.

Ta có $m + 2 \sin x \leq f(x) \Leftrightarrow m \leq f(x) - 2 \sin x$.

Đặt $g(x) = f(x) - 2 \sin x$.

Ta có $g'(x) = f'(x) - 2 \cos x$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2 \cos x.$$

Mà $f'(x) \geq 2, \forall x \in (0; +\infty)$ và $2 \cos x \leq 2, \forall x \in (0; +\infty)$ nên $g'(x) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 2 \\ 2 \cos x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Từ đó ta có bảng biến thiên của $g(x)$:

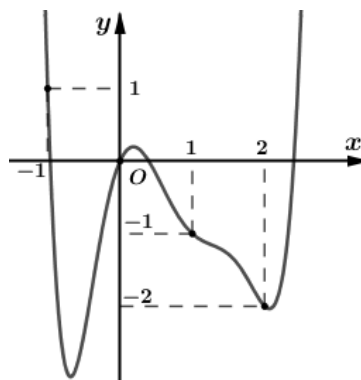
x	0	$+\infty$
$g'(x)$	0	+
$g(x)$		

Bất phương trình $m \leq 2f(x+2) + (x+1)(x+3)$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-3; +\infty)$

$$\Leftrightarrow m \leq g(0) \Leftrightarrow m \leq f(0).$$

Câu 36.2. (Phát triển từ câu 50 đề liên trường Nghệ An) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Tìm m để bất phương trình $m - x^2 \leq 2f(x+2) + 4x + 3$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-3; +\infty)$.

A. $m \geq 2f(0) - 1$.

B. $m \leq 2f(0) - 1$.

C. $m \leq 2f(-1)$.

D. $m \geq 2f(-1)$.

Lời giải

Tác giả : Võ Thị Ngọc Ánh ; Fb: Võ Ánh

Chọn B.

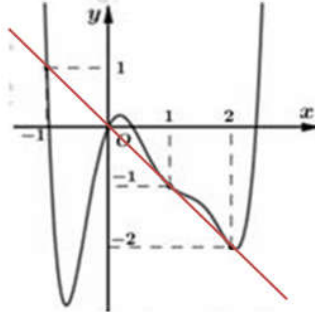
Ta có $m - x^2 \leq 2f(x+2) + 4x + 3 \Leftrightarrow m \leq 2f(x+2) + x^2 + 4x + 3$.

Đặt $g(x) = 2f(x+2) + x^2 + 4x + 3$. Ta có $g'(x) = 2f'(x+2) + 2x + 4$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x+2) = -(x+2).$$

Đặt $t = x + 2$ ta được $f'(t) = -t$. (1)

(1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f'(t)$ và đường thẳng $d : y = -t$ (hình vẽ)



Dựa vào đồ thị của $f'(t)$ và đường thẳng $y = -t$ ta có

$$\text{ta có } f'(t) = -t \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -3 \\ x = -2 \\ x = -1 \\ x = 0 \end{cases}.$$

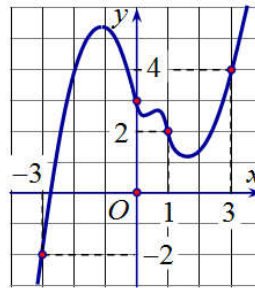
Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$.

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$g(x)$		$\nearrow$	$\searrow$		$\nearrow$	

Bất phương trình $m \leq 2f(x+2) + (x+1)(x+3)$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-3; +\infty)$

$$\Leftrightarrow m \leq g(-2) \Leftrightarrow m \leq 2f(0) - 1.$$

Câu 36.3. (Phát triển từ đề thi đại học 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình dưới



Tìm m để bất phương trình $m + x^2 + 4 \geq 2(f(x+1) - 2x)$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-4; 2]$.

A. $m \geq 2f(0) - 1$. **B.** $m \geq 2f(-3) - 4$. **C.** $m \geq 2f(3) - 16$. **D.** $m \geq 2f(1) - 4$.

Tác giả : Võ Thị Ngọc Ánh ; Fb: Võ Ánh

Lời giải

Chọn D.

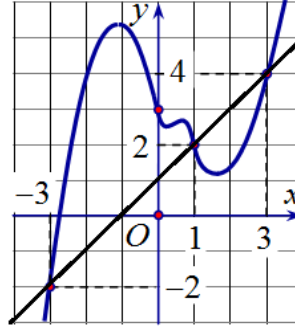
$$m + x^2 + 4 \geq 2(f(x+1) - 2x) \Leftrightarrow m \geq 2f(x+1) - (x+2)^2$$

Đặt $g(x) = 2f(x+1) - (x+2)^2$

Ta có $g'(x) = 2f'(x+1) - 2(x+2) = 2(f'(x+1) - (x+2))$. $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x+1) = x+2$

Đặt $t = x+1$ ta được $f'(t) = t+1$ (1)

(1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f'(t)$ và đường thẳng $d : y = t+1$ (hình vẽ)



Dựa vào đồ thị của $f'(t)$ và đường thẳng $y = t+1$ ta có

ta có (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = 1 \\ t = 3 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -4 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Xét hàm $t = t(x) = x+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ suy ra bảng biến thiên của hàm số $g(x)$:

x	-4	0	2		
$g'(x)$	0	+	0	-	0
$g(x)$					

Bất phương trình $m + x^2 + 4 \geq 2(f(x+1) - 2x)$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-4; 2]$.

$\Leftrightarrow m \geq g(0) \Leftrightarrow m \geq 2f(1) - 4$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$ cho $M(2;1;4)$; $N(5;0;0)$; $P(1;-3;1)$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) đồng thời đi qua các điểm M, N, P . Tìm c biết $a+b+c < 5$

A. 3 .

B. 2 .

C. 4 .

D. 1 .

Lời giải

Tác giả: Quỳnh Giao; Fb: QGiaoDo

Chọn C

Mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) đồng thời đi qua các điểm M, N, P nên

$d(I; (Oyz)) = IM = IN = IP$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d(I; (Oyz)) = IM \\ IN = IM \\ IN = IP \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = (a-2)^2 + (b-1)^2 + (c-4)^2 \\ (a-5)^2 + b^2 + c^2 = (a-2)^2 + (b-1)^2 + (c-4)^2 \\ (a-5)^2 + b^2 + c^2 = (a-1)^2 + (b+3)^2 + (c-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = (a-2)^2 + (b-1)^2 + (c-4)^2 \\ 3a - b - 4c = 2 \\ 4a + 3b - c = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \text{ hoặc } \\ c = 2 \end{cases} \begin{cases} a = 5 \\ b = -3 \\ c = 4 \end{cases}$$

So sánh với điều kiện $a + b + c < 5$ ta có $c = 2$

Bài toán tương tự

Câu 37.1. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(-2;0;0)$; $B(0;-2;0)$; $C(0;0;-2)$. D là điểm khác O sao cho DA , DB , DC đôi một vuông góc. $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Tính $S = a + b + c$

A. -4 .

B. -1 .

C. -2 .

D. -3 .

Lời giải

Tác giả: Quỳnh Giao; Fb: QGiaoDo

Chọn B

Gọi $D(x; y; z) \Rightarrow \overrightarrow{DA} = (x+2; y; z)$; $\overrightarrow{DB} = (x; y+2; z)$; $\overrightarrow{DC} = (x; y; z+2)$

Vì DA , DB , DC đôi một vuông góc nên

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \\ \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \\ \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+2) + y(y+2) + z^2 = 0 \\ x(x+2) + y^2 + z(z+2) = 0 \\ x^2 + y(y+2) + z(z+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = -\frac{4}{3}$$

$I(a;b;c)$ là tâm mặt

Câu 38. Biết rằng $\int_0^1 \frac{dx}{3x+5\sqrt{3x+1}+7} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$, với a, b, c là các số hữu tỉ.

Giá trị của $a + b + c$ bằng

A. $-\frac{10}{3}$.

B. $-\frac{5}{3}$.

C. $\frac{10}{3}$.

D. $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Thanh Vân; Fb: Thanh Van

Chọn A

Đặt $t = \sqrt{3x+1} \Rightarrow t^2 = 3x+1 \Rightarrow 2tdt = 3dx$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 1 \Rightarrow t = 2$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \int_0^1 \frac{dx}{3x+5\sqrt{3x+1}+7} &= \int_1^2 \frac{dx}{3x+1+5\sqrt{3x+1}+6} = \frac{2}{3} \int_1^2 \frac{tdt}{t^2+5t+6} = \frac{2}{3} \int_1^2 \left(\frac{3}{t+3} - \frac{2}{t+2} \right) dt \\ &= \frac{2}{3} \left(3 \ln |t+3| \Big|_1^2 - 2 \ln |t+2| \Big|_1^2 \right) = \frac{2}{3} (3 \ln 5 - 3 \ln 4 - 2 \ln 4 + 2 \ln 3) = \frac{2}{3} (-10 \ln 2 + 2 \ln 3 + 3 \ln 5) = \\ &= \frac{-20}{3} \ln 2 + \frac{4}{3} \ln 3 + 2 \ln 5 \end{aligned}$$

Suy ra: $a = -\frac{20}{3}, b = \frac{4}{3}, c = 2$.

Vậy $a + b + c = -\frac{10}{3}$.

Bài toán tương tự

Câu 38.1 .Biết rằng $\int_{-2}^1 \frac{dx}{x+5\sqrt{x+3}+9} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$, với a, b, c là các số hữu tỉ.

Giá trị của $a + b + c$ bằng

A. -10 .

B. -5 .

C. 10 .

D. 5 .

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Thanh Vân; Fb: Thanh Van

Chọn A

Đặt $t = \sqrt{x+3} \Rightarrow t^2 = x+3 \Rightarrow 2tdt = dx$

Đổi cận: $x = -2 \Rightarrow t = 1; x = 1 \Rightarrow t = 2$.

Ta có:
$$\int_{-2}^1 \frac{dx}{x+5\sqrt{x+3}+9} = \int_{-2}^1 \frac{dx}{x+3+5\sqrt{3x+1}+6} = 2 \int_1^2 \frac{tdt}{t^2+5t+6} = 2 \int_1^2 \left(\frac{3}{t+3} - \frac{2}{t+2} \right) dt$$
$$= 2 \left(3 \ln |t+3| \Big|_1^2 - 2 \ln |t+2| \Big|_1^2 \right) = 2(-5 \ln 4 + 2 \ln 3 + 3 \ln 5) = -20 \ln 2 + 4 \ln 3 + 6 \ln 5$$

Suy ra: $a = -20, b = 4, c = 6$. Vậy $a + b + c = -10$

Câu 38.2 .Biết rằng $\int_0^4 \frac{dx}{4(x+1)+5\sqrt{2x+1}} = a \ln 3 + b \ln 5 + c \ln 7$, với a, b, c là các số hữu tỉ.

Giá trị của $a + b + c$ bằng

A. 0 .

B. $-\frac{4}{3}$.

C. 1 .

D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Thanh Vân; Fb: Thanh Van

Chọn A

Đặt $t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow t^2 = 2x+1 \Rightarrow tdt = dx$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 4 \Rightarrow t = 3$.

Ta có:

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{dx}{4(x+1)+5\sqrt{2x+1}} &= \int_0^4 \frac{dx}{4x+2+5\sqrt{2x+1}+2} = \int_1^3 \frac{tdt}{2t^2+5t+2} = \frac{1}{3} \int_1^3 \frac{2(2t+1)-(t+2)}{(2t+1)(t+2)} dt \\ &= \frac{1}{3} \int_1^3 \left(\frac{2}{t+2} - \frac{1}{2t+1} \right) dt = \frac{1}{3} \left(2 \ln |t+2| - \frac{1}{2} \ln |2t+1| \right) \Big|_1^3 = \frac{1}{3} \left(2 \ln 5 - 2 \ln 3 - \frac{1}{2} \ln 7 + \frac{1}{2} \ln 3 \right) \\ &= -\frac{1}{2} \ln 3 + \frac{2}{3} \ln 5 - \frac{1}{6} \ln 7 \end{aligned}$$

Suy ra: $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{2}{3}, c = -\frac{1}{6} \Rightarrow a + b + c = 0$.

- Câu 39.** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và hai điểm $A(-1;3;1)$ và $B(0;2;-1)$. Gọi $C(m;n;p)$ là điểm thuộc đường thẳng d sao cho diện tích tam giác ABC bằng $2\sqrt{2}$. Giá trị của tổng $m+n+p$ bằng
- A.** -1 . **B.** 2 . **C.** 3 . **D.** -5 .

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Thơm; Fb: Thơm nguyên

Chọn C

Phương trình tham số của đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$.

Vì C thuộc d nên tọa độ của C có dạng $C(-1+2t; t; 2-t)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}(1; -1; -2)$ và $\overrightarrow{AC}(2t; t-3; 1-t)$.

Suy ra $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (3t-7; -3t-1; 3t-3)$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{(3t-7)^2 + (-3t-1)^2 + (3t-3)^2}$.

Theo bài ra ta có $S_{\triangle ABC} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sqrt{27t^2 - 54t + 59} = 2\sqrt{2}$.

$\Leftrightarrow 27t^2 - 54t + 59 = 32 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Với $t = 1$ thì $C(1; 1; 1)$ nên $m = 1; n = 1; p = 1$.

Vậy giá trị của tổng $m+n+p = 3$

Bài toán tương tự

- Câu 39.1.** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và hai điểm $A(-1;3;1)$ và $B(0;2;-1)$. Gọi $C(m;n;p)$ là điểm thuộc đường thẳng d sao cho tam giác ABC vuông tại A. Giá trị của tổng $m+2n+p$ bằng

- A.** 0 . **B.** 2 . **C.** 3 . **D.** -5 .

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Thơm; Fb: Thơm nguyên

Chọn A

Vì $C \in d$ nên tọa độ của C có dạng $C(-1+2t; t; 2-t)$

Ta có $\overrightarrow{AB}(1; -1; -2)$ và $\overrightarrow{AC}(2t; t-3; 1-t)$

Vì ΔABC vuông tại A nên $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow 2t - t + 3 - 2 + 2t = 0 \Leftrightarrow 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}$.

$$C\left(-\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{5}{3} \\ n = -\frac{1}{3} \\ p = \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow m + 2n + p = -\frac{5}{3} + \frac{-2}{3} + \frac{7}{3} = 0.$$

Câu 39.2. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{3}$ và mặt phẳng

$(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$. Gọi M là điểm thuộc đường thẳng d sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng 2. Nếu M có hoành độ âm thì tung độ của M bằng.

A. -3.

B. -21.

C. 3. **D.** -1.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Thơm; Fb: Thơm nguyên

Chọn A

Phương trình tham số của đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$

Vì $M \in d$ nên tọa độ của M có dạng $M(t; -1 + 2t; -2 + 3t)$.

Vì khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng 2 nên

$$\frac{|t + 2(-1 + 2t) - 2(-2 + 3t) + 3|}{\sqrt{1 + 2^2 + (-2)^2}} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{|t - 2 + 4t + 4 - 6t + 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{|5 - t|}{3} = 2 \Leftrightarrow |5 - t| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - t = 6 \\ 5 - t = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \Rightarrow M(-1; -3; -5) \\ t = 11 \Rightarrow M(11; 21; 31) \end{cases}$$

Vì M có tung độ âm nên $M(-1; -3; -5)$

Câu 40. Bất phương trình $(x^3 - 9x) \ln(x + 5) \leq 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên ?

A. 4.

B. 7.

C. 6.

D. Vô số.

Lời giải

Tác giả: Đoàn Thị Hường; Fb: Đoàn Thị Hường

Chọn C

Cách 1.

$$\text{Ta có: } (x^3 - 9x)\ln(x+5) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 9x \geq 0 \\ \ln(x+5) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ -3 \leq x \leq 0 \\ 0 < x+5 \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ -3 \leq x \leq 0 \text{ (vn)} \\ -5 < x \leq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ -4 \leq x \leq -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ 0 \leq x \leq 3 \\ x \geq -4 \end{cases}$$

Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-4; -3; 0; 1; 2; 3\}$. Vậy có 6 nghiệm nguyên.

Cách 2.

Điều kiện: $x > -5$ (*).

$$\text{Xét } (x^3 - 9x)\ln(x+5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 9x = 0 \\ \ln(x+5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ x = -3 \\ x = -4 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện (*)).}$$

Bảng đan xen dấu của biểu thức $f(x) = (x^3 - 9x)\ln(x+5)$ trên khoảng $(-5; +\infty)$.

x	-5	-4	-3	0	3	$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+

$$\text{Khi đó } f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq -3 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}.$$

Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-4; -3; 0; 1; 2; 3\}$, Vậy có 6 nghiệm nguyên.

Bài toán tương tự:

Câu 40.1. Bất phương trình $(x^2 - 3x)\sqrt{\ln(x+2)} \leq 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. Vô số.

Lời giải

Tác giả: Đoàn Thị Hương; Fb: Đoàn Thị Hương

Chọn A

$$\text{Ta có: } (x^2 - 3x)\sqrt{\ln(x+2)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x+2) = 0 \\ x^2 - 3x \leq 0 \\ \ln(x+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 1 \\ 0 \leq x \leq 3 \\ x+2 > 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 0 \leq x \leq 3 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}.$$

Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}$. Vậy có 5 nghiệm.

Câu 40.2. Bất phương trình $(x^2 - 4(x-1)) \log_{\frac{1}{e}}(-x^2 + 4x + 1) < 0$ có tổng tất cả các nghiệm nguyên là?

A. 6.

B. 8.

C. 4.

D. 10.

Lời giải*Tác giả: Đoàn Thị Hường; Fb: Đoàn Thị Hường***Chọn C**

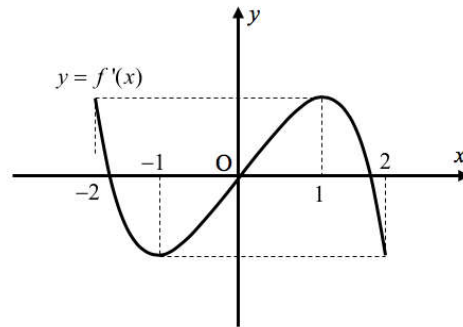
Ta có:

$$(x^2 - 4(x-1)) \log_{\frac{1}{e}}(-x^2 + 4x + 1) < 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \log_{\frac{1}{e}}(-x^2 + 4x + 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \neq 0 \\ \log_{\frac{1}{e}}(-x^2 + 4x + 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ -x^2 + 4x + 1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ -x^2 + 4x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ 0 < x < 4 \end{cases}.$$

Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{1; 3\}$. Vậy tổng tất cả các nghiệm nguyên bằng 4.

Câu 41. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(\cos x) + x^2 - x$ đồng biến trên khoảng

A. (1; 2).B. $(-1; 0)$.C. $(0; 1)$.D. $(-2; -1)$.**Lời giải***Tác giả: Nguyễn Việt Hải. FB: <https://www.facebook.com/nvhaicqt>***Chọn A****Phân tích:**

Bản chất dạng toán này thường là đặc điểm: Tổng hai hàm dương (hàm đồng biến), tổng hai hàm âm (hàm nghịch biến)

Tính chất:

Cho hàm số $y = f(x)$ tăng trên khoảng D_1 , hàm số $y = g(x)$ tăng trên khoảng D_2 . Khi đó ta có hàm số $y = f(x) + g(x)$ tăng trên khoảng $D = D_1 \cap D_2$

+ Quan sát bài toán: $y = x^2 - x \Rightarrow y' = 2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$, nếu trắc nghiệm thấy ngay đáp án A.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $y' = -\sin x \cdot f'(\cos x) + 2x - 1$

+ Vì $\cos x \in [-1; 1] \Rightarrow -\sin x \cdot f'(\cos x) \in [-1; 1]$ mà $2x - 1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$

+ Suy ra $y' = -\sin x \cdot f'(\cos x) + 2x - 1 \geq 0, \forall x \geq 1$ hay hàm số tăng trên $[1; +\infty)$

Câu 41.1 (Đề minh họa THPT QG 2018 – 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	+	0	-	0	+	

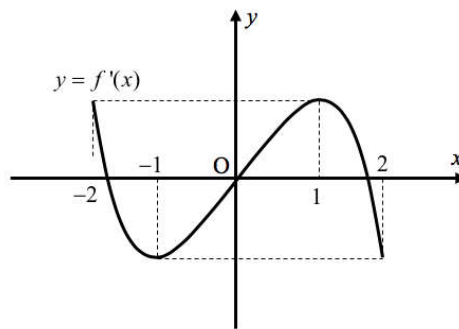
Hàm số $y = 3f(x+2) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-\infty; -1)$. **C. $(-1; 0)$.** D. $(0; 2)$.

Câu 41.2 (Nguyễn Việt Hải) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số

$y = f\left(\frac{3\cos x + 4\sin x}{5}\right) + x^4 - 3x + 2019$ đồng biến trên khoảng

- A. $(1; 2)$.** B. $(-1; 0)$. C. $(0; 1)$. D. $(-2; -1)$.



Câu 42. Cho hàm số $f(x) = 2^x - 2^{-x}$. Gọi m_0 là số lớn nhất trong các số nguyên m thỏa mãn $f(m) + f(2m - 2^{12}) < 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $m_0 \in [1513; 2019)$. **B. $m_0 \in [1009; 1513)$.** C. $m_0 \in [505; 1009)$. D. $m_0 \in [1; 505)$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Việt Hải. FB: <https://www.facebook.com/nvhaicqt>

Chọn B

Phân tích:

+ Bài toán nếu thế vào: $P(m) = 2^m - 2^{-m} + 2^{2m-2^{12}} - 2^{-2m+2^{12}} < 0$

+ Biểu thức $P(m)$ khá phức tạp. Điều này chứng tỏ bài toán cho hàm số $y = f(x)$ chắc chắn có tính chất đặc biệt.

+ Nhìn yếu tố xuất hiện hàm số $y = f(x) = 2^x - 2^{-x}$. Ta có hàm số lẻ và tăng trên $\mathbb{R}$. Đây chính là chìa khóa ta giải quyết bài toán.

Hướng dẫn giải:

Ta có hàm số $y = f(x) = 2^x - 2^{-x}$ hàm số lẻ và tăng trên $\mathbb{R}$

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow f(2m - 2^{12}) < -f(m) = f(-m) \Leftrightarrow 2m - 2^{12} < m \Leftrightarrow m < \frac{2^{12}}{3}$$

$$m \text{ nguyên lớn nhất là: } m = \left\lfloor \frac{2^{12}}{3} \right\rfloor = 1365$$

Bài toán tổng quát:

$$\text{Giải bất phương trình: } f(u(x, m)) + f(v(x, m)) < 0 \quad (*)$$

Với $f(x)$ là hàm số lẻ và tăng (hoặc giảm) trên tập D_f

Con đường sáng tạo bài toán: (VD: Một vài hàm đặc trưng f)

- $f(x) = a^x - a^{-x}, 0 < a \neq 1$
- $f(x) = x^3 + ax, a > 0$
- $f(x) = \sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}$

.....

$$\text{Ta có } (*) \Leftrightarrow u(x, m) < -v(x, m)$$

Đây là nguồn gốc chúng ta tạo lớp bài toán này.

Câu 42.1 (Nguyễn Việt Hải) Cho hàm số $f(x) = x^{2019} + x^3 + 12x$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-12; 12]$ thỏa

$$f(m^3 + 2019m^2) + f(-2019m^2 - 70m - 300) < 0$$

Câu 42.2 (Nguyễn Việt Hải) Cho hàm số $f(x) = \sqrt[3]{12+x} - \sqrt[3]{12-x} + x$. Tìm giá trị m nguyên lớn nhất thỏa

$$f(8^{2m-12^5}) + f\left(\frac{-1}{2^{m-6}}\right) < 0$$

Câu 42.3 (Nguyễn Việt Hải) Cho hàm số $f(x) = 12^x - 12^{-x} + 2019x$. S là tập các phân tử m nguyên, $m \in [-2019; 2019]$ thỏa

$$f(x^3 - mx^2 + 2x^2) + f((m^2 - 4)x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Hỏi tập } S \text{ có bao nhiêu phần tử.}$$

Nhận xét: Câu 42.3 tôi lấy thêm ý tưởng câu 49 đề minh họa THPT QG 2018 – 2019

Mỗi bài toán đều có nguồn gốc rõ ràng, xuất phát từ bài toán kiến thức cơ bản. Dạy toán: Chúng ta không thể dạy học sinh dựa vào ngân hàng đề Toán, cũng không thể dạy học sinh đếm hết lá

cây trong một rừng cây, nhưng chúng ta dạy học sinh kiểm soát được bản chất nguồn gốc của lớp bài toán cũng như đếm được gốc cây trong một rừng cây.

Câu 43. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)e^{2x}$ là

A. $(x-2)e^x + e^x + C$.

B. $(x+2)e^{2x} + e^x + C$.

C. $(x-1)e^x + C$.

D. $(x+1)e^x + C$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Đình Hải ; Fb: Nguyen Dinh Hai

Chọn D

$$\text{Ta có } f(x) + f'(x) = e^{-x} \Leftrightarrow f(x)e^x + f'(x)e^x = 1 \Leftrightarrow (f(x)e^x)' = 1 \Leftrightarrow f(x)e^x = x + C.$$

$$\text{Vì } f(0) = 2 \Leftrightarrow 2 \cdot e^0 = C \Leftrightarrow C = 2 \Rightarrow f(x)e^{2x} = (x+2)e^x.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \int f(x)e^{2x} dx &= \int (x+2)e^x dx = \int (x+2)d(e^x) = (x+2)e^x - \int e^x d(x+2) \\ &= (x+2)e^x - \int e^x dx = (x+2)e^x - e^x + C = (x+1)e^x + C. \end{aligned}$$

Phân tích: Bài toán cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn điều kiện chứa tổng của $f(x)$ và $f'(x)$ đưa ta tới công thức đạo hàm của tích $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ với $u = f(x)$. Từ đó ta cần chọn hàm v cho phù hợp

Tổng quát: Cho hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên K , thỏa mãn $f'(x) + g(x)f(x) = k(x)$ (Chọn $v = e^{G(x)}$).

$$\text{Ta có } f'(x) + g(x)f(x) = k(x) \Leftrightarrow e^{G(x)}f'(x) + g(x)e^{G(x)}f(x) = k(x)e^{G(x)}.$$

$$\Leftrightarrow (e^{G(x)}f(x))' = k(x)e^{G(x)} \Rightarrow e^{G(x)}f(x) = \int k(x)e^{G(x)} dx \Leftrightarrow f(x) = e^{-G(x)} \int k(x)e^{G(x)} dx.$$

Với $G(x)$ là một nguyên hàm của $g(x)$.

Admin tổ 4 – Strong team : Bản chất của bài toán là cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn điều kiện chứa tổng của $f(x)$ và $f'(x)$ liên quan tới công thức đạo hàm của tích

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ với $u = f(x)$. Khi đó ta cần chọn hàm v thích hợp. Cụ thể, với bài toán tổng quát :

Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$, $y = k(x)$ liên tục trên K , $g(x) \neq 0$ với $\forall x \in K$ và thỏa mãn $g(x) \cdot f'(x) + h(x) \cdot f(x) = k(x)$

$$\text{Ta sẽ đi tìm } v \text{ như sau : } \frac{v'}{v} = \frac{h(x)}{g(x)} \Rightarrow \int \frac{v'}{v} dx = \int \frac{h(x)}{g(x)} dx$$

$$\text{Khi đó : } \ln|v| = \int \frac{h(x)}{g(x)} dx \Leftrightarrow |v| = e^{\int \frac{h(x)}{g(x)} dx}$$

Câu tương tự:

Câu 43.1 Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) + 2xf(x) = 2xe^{-x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1$. Tất cả các nguyên hàm của $x.f(x)e^{x^2}$ là

- A. $(x^2 + 1)^2 + C$. B. $\frac{1}{2}(x^2 + 1)^2 e^{-x^2} + C$. C. $(x^2 + 1)^2 e^{-x^2} + C$. **D. $\frac{1}{2}(x^2 + 1)^2 + C$.**

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Đình Hải ; Fb: Nguyen Dinh Hai

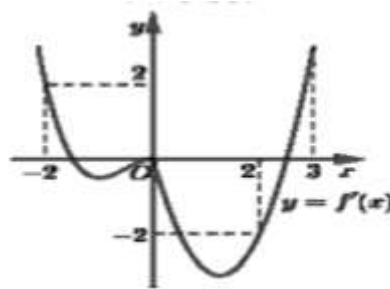
Chọn D

Ta có $f'(x) + 2xf(x) = 2xe^{-x^2} \Leftrightarrow e^{x^2} (f'(x) + 2xf(x)) = e^{x^2} \cdot 2xe^{-x^2} \Leftrightarrow (e^{x^2} f(x))' = 2x$
 $\Rightarrow e^{x^2} f(x) = \int 2x dx = x^2 + C$.

Vì $f(0) = 1 \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = (x^2 + 1)e^{-x^2}$.

Vậy $\int xf(x)e^{x^2} dx = \int x(x^2 + 1) dx = \frac{1}{2} \int (x^2 + 1) d(x^2 + 1) = \frac{1}{2} (x^2 + 1)^2 + C$.

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên.



Hàm số $y = \left| f(x) + \frac{1}{2}x^2 - f(0) \right|$ có nhiều nhất bao nhiêu cực trị trong khoảng $(-2; 3)$.

- A. 6. B. 2. C. 5. **D. 3**

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Huỳnh Tấn Trung ; Fb: Nguyễn Huỳnh Tấn Trung

Chọn D

Xét hàm số: $h(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^2 - f(0)$.

Ta có $h'(x) = f'(x) + x$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x$

Nghiệm phương trình trên là hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y = -x$ và $y = f'(x)$

Dựa vào đồ thị suy ra phương trình: $f'(x) = -x$ có ba nghiệm $\begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Trên khoảng $(-2;3)$, hàm số $h(x)$ có một điểm cực trị là $x=2$, (do qua nghiệm $x=0$, $h'(x)$ không đổi dấu). Do đó đồ thị hàm số $y=h(x)$ cắt trục hoành tại tối đa 2 điểm.

Suy ra hàm số $y=|h(x)|$ có tối đa $2+1=3$ điểm cực trị trong khoảng $(-2;3)$.

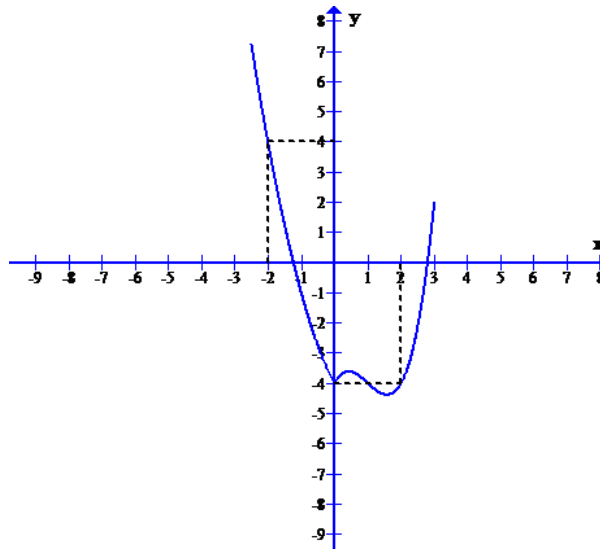
PHÂN TÍCH VÀ PHÁT TRIỂN CÂU 44

Tác giả: Nguyễn Huỳnh Tấn Trung ; Fb: Nguyễn Huỳnh Tấn Trung

- Đây là bài toán hàm số có chứa dấu trị tuyệt đối.
- Đầu tiên, ta xét hàm số không chứa dấu trị tuyệt đối, và khảo sát hàm số đó.
- Sau đó, ta dựa vào sự tương giao với trục hoành, suy ra hàm số có chứa dấu trị tuyệt đối có tối đa bao nhiêu cực trị.

Bài toán tương tự

Câu 44.1. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên.



Hàm số $y=|f(x)+x^2-f(0)|$ có nhiều nhất bao nhiêu cực trị trong khoảng $(-3;3)$.

A.6.

B.2.

C.5.

D.3

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Huỳnh Tấn Trung ; Fb: Nguyễn Huỳnh Tấn Trung

Chọn C

Xét hàm số: $g(x)=f(x)+x^2-f(0)$.

Ta có $g'(x)=f'(x)+2x$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-2x$

Nghiệm phương trình trên là hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y=-2x$ và $y=f'(x)$

Dựa vào đồ thị suy ra phương trình: $f'(x)=-2x$ có hai nghiệm $\begin{cases} x=-2 \\ x=2 \end{cases}$

Trên khoảng $(-3;3)$, hàm số $g(x)$ có hai điểm cực trị là $x=2, x=-2$. Do đó đồ thị hàm số $y=g(x)$ cắt trục hoành tại tối đa 3 điểm.

Suy ra hàm số $y=|g(x)|$ có tối đa $3+2=5$ điểm cực trị trong khoảng $(-3;3)$.

Câu 45 . Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = a\sqrt{11}$, cosin góc hợp bởi hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng $\frac{1}{10}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $3a^3$.

B. $9a^3$.

C. $4a^3$.

D. $12a^3$.

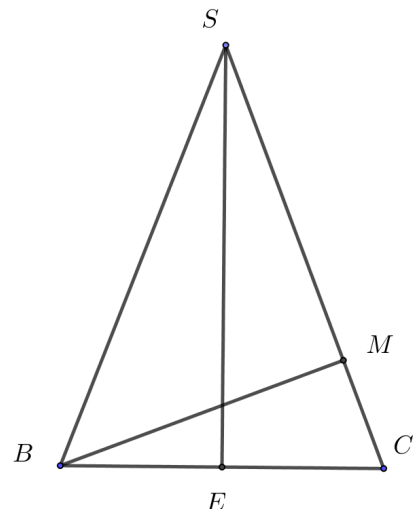
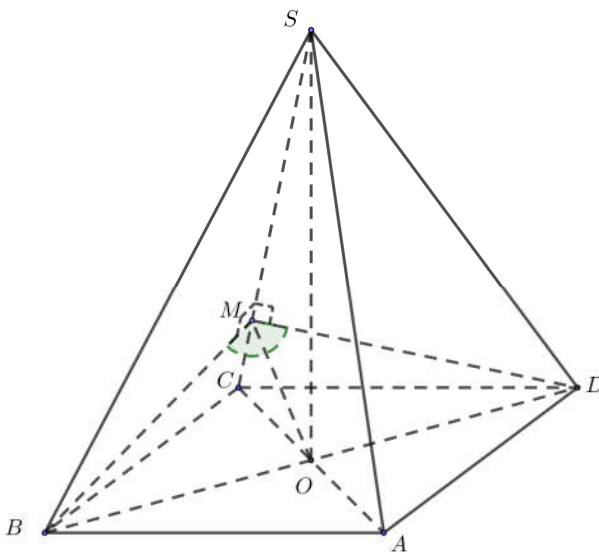
Tác giả: Nguyễn Thị Thu Hằng ; Fb: Nguyễn Thu Hằng.

A. Phân tích bài toán:

- Hình chóp $S.ABCD$ đều nên đáy $ABCD$ là hình vuông và $SO \perp (ABCD)$ với $O = AC \cap BD$. Suy ra hình vẽ đã được xác định.
 - Theo tính chất hình chóp đều, các cạnh bên $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{11}$. Từ đó các dữ kiện tính toán có mối quan hệ với nhau.
 - Góc giữa hai mặt phẳng là **góc không tù**, cách xác định góc giữa hai mặt phẳng. Tận dụng đặc điểm của hình chóp đều có $BD \perp (SAC)$, kẻ hai đường thẳng lần lượt nằm trong 2 mặt phẳng (SBC) và (SCD) và vuông góc với giao tuyến SC . Khi đó học sinh sẽ dễ ngộ nhận góc giữa hai mặt phẳng là góc $\widehat{BMD}$, không phải góc $\widehat{BMD}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là góc bù với góc $\widehat{BMD}$. Vì góc $\widehat{BMD}$ là góc tù.
 - Định lí cosin trong tam giác ABC với $a = BC$; $b = AC$; $c = AB$ suy ra $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{BMD}$.
- Áp dụng định lí cosin trong tam giác BMD ta sẽ tìm được cạnh của hình vuông đáy. Dễ dàng suy ra chiều cao SO của hình chóp. Thể tích đã được tính.

B. Lời giải

Chọn C



Có $BD \perp AC$; $BD \perp SO \Rightarrow BD \perp SC$. Trong tam giác SBC kẻ đường cao $BM \Rightarrow DM \perp SC$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) chính là góc giữa hai đường thẳng MB và MD .

Trong tam giác vuông OMC có

$$OM < OC = OB \Rightarrow 2OM < BD \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{D} < \widehat{M} \Rightarrow 180^\circ - \widehat{M} < \widehat{M} \Rightarrow \widehat{M} > 90^\circ. \text{ Hay góc } \widehat{BMD}$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{BMD} = -\frac{1}{10}.$$

Đặt $AB = x$, SE là đường cao trong tam giác SBC nên

$$SE \cdot BC = BM \cdot SC \Leftrightarrow \sqrt{11a^2 - \frac{x^2}{4}} \cdot x = BM \cdot a\sqrt{11} \Leftrightarrow BM = \frac{x}{a\sqrt{11}} \cdot \sqrt{11a^2 - \frac{x^2}{4}}.$$

Áp dụng định lí cosin trong tam giác BMD có

$$BD^2 = BM^2 + DM^2 - 2BM \cdot DM \cdot \cos \widehat{BMD} \Leftrightarrow BD^2 = 2BM^2 - 2BM^2 \cos \widehat{BMD}$$

$$\Leftrightarrow BD^2 = 2BM^2 (1 - \cos \widehat{BMD}) \Leftrightarrow (x\sqrt{2})^2 = 2 \left(\frac{x}{a\sqrt{11}} \cdot \sqrt{11a^2 - \frac{x^2}{4}} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{10} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = \frac{2x^2}{11a^2} \left(11a^2 - \frac{x^2}{4} \right) \frac{11}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{10} = \frac{x^2}{40a^2} \Leftrightarrow x = 2a.$$

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

$$V = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \sqrt{SC^2 - OC^2} \cdot (4a)^2 = \frac{\sqrt{11a^2 - 2a^2}}{3} \cdot 4a^2 = 4a^3.$$

Cách 2. (Nguyễn Việt Hải): Cách nhìn khác tìm yếu tố cạnh đáy.

$$\text{Đặt } x = OB, 2\alpha = \widehat{BMD}$$

Ta có

$$\frac{-1}{10} = \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{20} \Leftrightarrow \frac{OM^2}{OM^2 + OB^2} = \frac{9}{20} \Leftrightarrow \frac{11}{9} = \frac{x^2}{OM^2} = x^2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{11a^2 - x^2} \right)$$

$$\text{Hay } \frac{2}{9} = \frac{x^2}{11a^2 - x^2} \text{ đến đây OK.}$$

C. Sai lầm học sinh hay mắc phải:

Xác định góc giữa hai mặt phẳng chính là góc $\widehat{BMD}$ suy ra $\cos \widehat{BMD} = \frac{1}{10}$. Và bài toán sẽ không giải được. Hoặc xét hai trường hợp sẽ mất thời gian cho bài toán:

$$\cos \widehat{BMD} = \frac{1}{10} \vee \cos \widehat{BMD} = -\frac{1}{10}$$

D. Khai thác bài toán:

Từ hình chóp đều ta có thể sáng tạo ra các bài toán tương tự câu 45 khi ta biết hai dữ liệu:

Độ dài cạnh bên và 1 góc (có thể là góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, góc giữa hai mặt phẳng, góc giữa hai đường thẳng).

Độ dài cạnh bên và khoảng cách (Đề thi học sinh giỏi tỉnh Đà Nẵng).

Và còn nhiều bài toán khác liên quan đến hình chóp đều khi các bạn biết hai dữ kiện.

E. Sau đây là một vài bài tập tương tự.

Câu 45.1 . Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = a\sqrt{21}$, cosin góc hợp bởi hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ bằng $\frac{1}{10}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{\sqrt{19}}{3}a^3$.

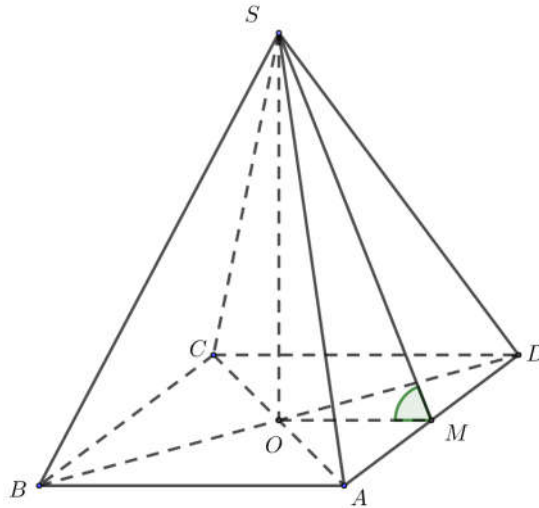
B. $\frac{2\sqrt{19}}{3}a^3$.

C. $\frac{4\sqrt{19}}{3}a^3$.

D. $4\sqrt{19}a^3$.

Lời giải

Chọn C



Gọi cạnh hình vuông đáy là x , góc hợp bởi hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ là góc nhọn

$$\widehat{SMO} \Rightarrow \cos \widehat{SMO} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{OM}{SM} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{x}{2\sqrt{21a^2 - \frac{1}{4}x^2}} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{21}{4}x^2 = 21a^2 \Leftrightarrow x = 2a.$$

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

$$V = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}\sqrt{SC^2 - OC^2} \cdot (4a)^2 = \frac{\sqrt{21a^2 - 2a^2}}{3} \cdot 4a^2 = \frac{4\sqrt{19}}{3}a^3.$$

Câu 45.2 . Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = a\sqrt{11}$, cosin góc hợp bởi cạnh SB và $(ABCD)$ bằng $\frac{1}{10}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{121}{150}a^3$.

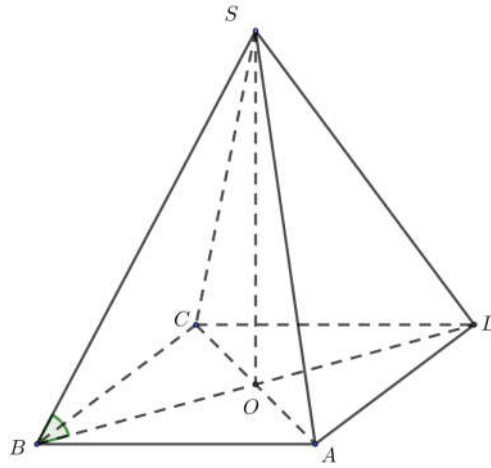
B. $\frac{121}{50}a^3$.

C. $\frac{121}{500}a^3$.

D. $\frac{11}{500}a^3$.

Lời giải

Chọn C



Gọi cạnh hình vuông đáy là x , góc hợp bởi cạnh SB và $(ABCD)$ là góc nhọn

$$\widehat{SBO} \Rightarrow \cos \widehat{SMO} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{OB}{SB} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{x\sqrt{2}}{2a\sqrt{11}} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{11}}{5\sqrt{2}}a.$$

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

$$V = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}\sqrt{SC^2 - OC^2} \cdot \left(\sqrt{\frac{11}{25.2}}a\right)^2 = \frac{\sqrt{11a^2 - \frac{11}{100}a^2}}{3} \cdot \frac{11}{50}a^2 = \frac{121}{500}a^3.$$

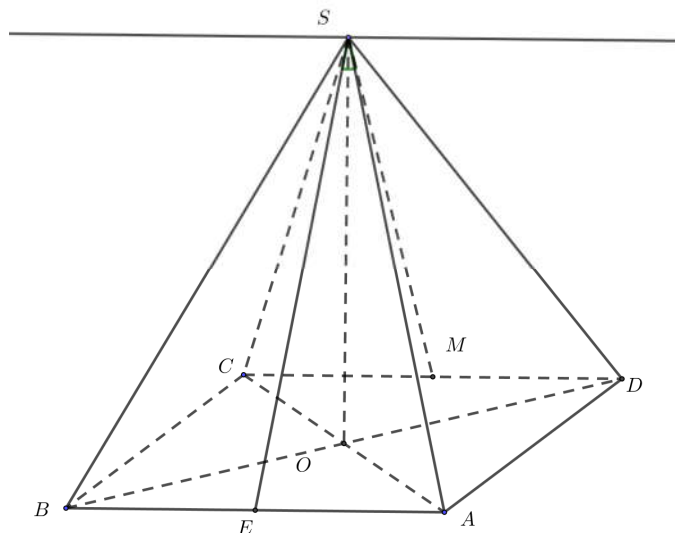
Câu 45.3 . Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = a\sqrt{11}$, cosin góc hợp bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng $\frac{1}{10}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $3a^3$.

B. $9a^3$.

C. $4a^3$.

D. $12a^3$.



Gọi cạnh hình vuông đáy là x , góc hợp bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là góc nhọn

$$\widehat{ESM} \Rightarrow \cos \widehat{ESM} = \frac{1}{10}$$

Áp dụng định lí cosin trong tam giác BMD có

$$EM^2 = SE^2 + SM^2 - 2SE \cdot SM \cdot \cos \widehat{ESM}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2SE^2 \left(1 - \cos \widehat{BMD}\right) \Leftrightarrow x^2 = 2 \left(\sqrt{11a^2 - \frac{x^2}{4}} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{10}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \left(11a^2 - \frac{x^2}{4}\right) \frac{9}{5} \Leftrightarrow \frac{49}{40}x^2 = \frac{99a^2}{10} \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{99}}{7}a.$$

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

$$V = \frac{1}{3}SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3}\sqrt{SC^2 - OC^2} \cdot (4a)^2.$$

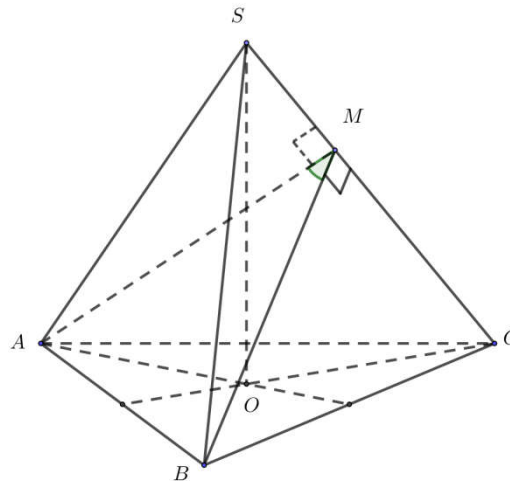
Câu 45.4 . Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA = a\sqrt{11}$, cosin góc hợp bởi hai mặt phẳng (SBC) và (SAC) bằng $\frac{1}{10}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $3a^3$.

B. $9a^3$.

C. $4a^3$.

D. $12a^3$.



Câu 45.5 . Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA = a\sqrt{11}$, cosin góc hợp bởi hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng $\frac{1}{10}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $3a^3$.

B. $9a^3$.

C. $4a^3$.

D. $12a^3$.

Câu 45.6 . Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA = a\sqrt{11}$, cosin góc hợp bởi đường thẳng SB và (ABC) bằng $\frac{1}{10}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $3a^3$.

B. $9a^3$.

C. $4a^3$.

D. $12a^3$.

Câu 45.7 . (Đề thi học sinh giỏi Đà Nẵng 2019). Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có góc giữa mặt bên và mặt đáy (ABC) bằng 60° . Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $\frac{3a\sqrt{7}}{14}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

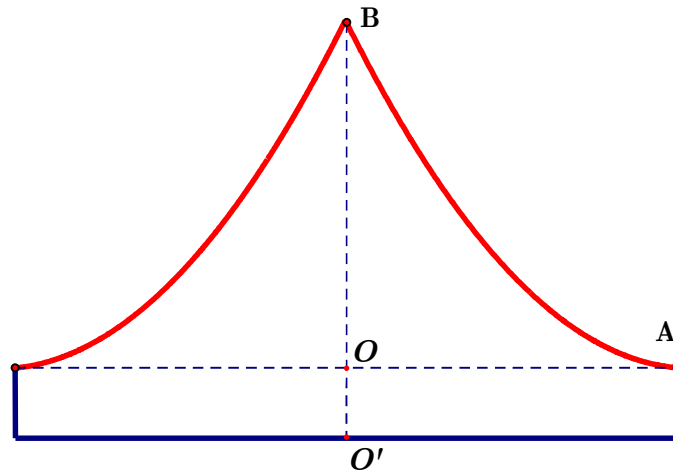
A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Câu 46. Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn An đã làm một chiếc mũ “cách điệu” cho Ông già Noel có hình dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên. Biết rằng $OO' = 5\text{ cm}$, $OA = 10\text{ cm}$, $OB = 20\text{ cm}$, đường cong AB là một phần của một parabol có đỉnh là điểm A . Thể tích của chiếc mũ bằng



A. $\frac{2750\pi}{3}(\text{cm}^3)$.

B. $\frac{2500\pi}{3}(\text{cm}^3)$.

C. $\frac{2050\pi}{3}(\text{cm}^3)$.

D. $\frac{2250\pi}{3}(\text{cm}^3)$.

Lời giải

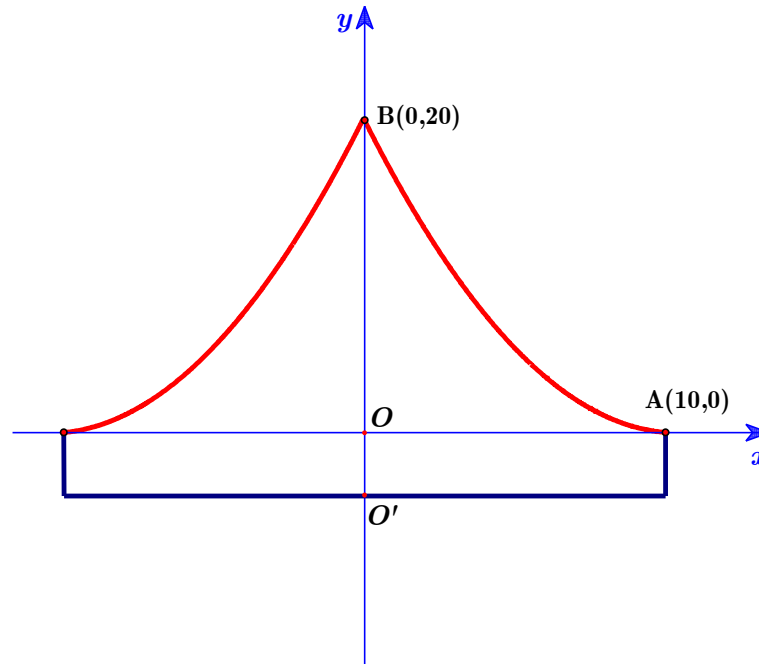
Tác giả: Nguyễn Thị Nguyệt Cẩm; Fb: Nguyệt Cam Nguyễn

Chọn B

Gọi V là thể tích của nón, V_1 là thể tích khối trụ có chiều cao OO' , bán kính đáy OA , nên $V_1 = 5 \cdot 10^2 \cdot \pi = 500\pi$.

Gọi V_2 là thể tích phần còn lại của nón.

Cách 1: chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Khi đó, V_2 là thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi nhánh parabol AB và hai trục tọa độ quanh trục Oy .

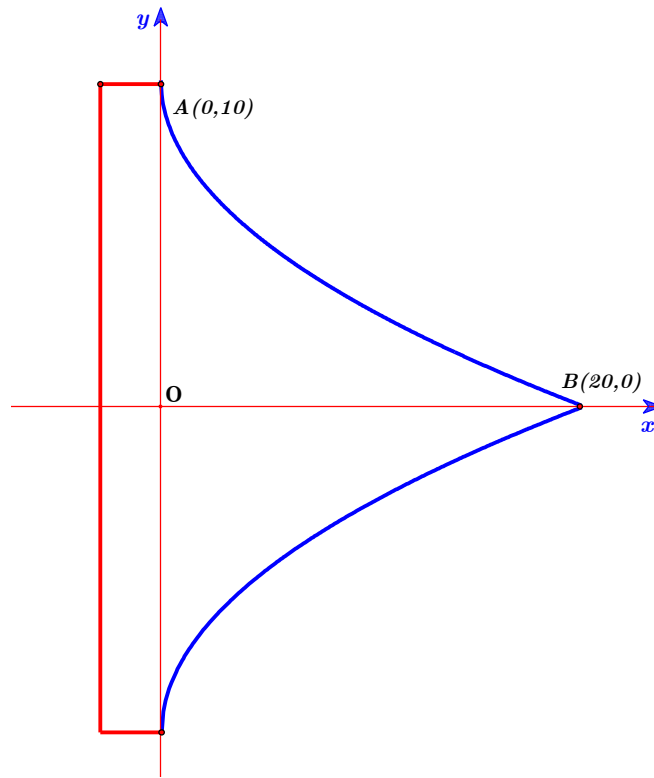
Phương trình parabol (P) chứa nhánh AB có dạng $y = a(x - 10)^2$.

Vì (P) đi qua điểm $B(0; 20)$ nên $a = \frac{1}{5}$; do đó (P): $y = \frac{1}{5}(x - 10)^2$.

Suy ra $x = -\sqrt{5y} + 10$ (do $x < 10$). Vậy, $V_2 = \pi \int_0^{20} (-\sqrt{5y} + 10)^2 dy = \frac{1000\pi}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$

Đáp số: $V = V_1 + V_2 = \frac{2500\pi}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$.

Cách 2: chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Khi đó, V_2 là thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi nhánh parabol AB và hai trục tọa độ quanh trục Ox .

Phương trình parabol (P) chứa nhánh AB có dạng $y = a\sqrt{x} + 10$.

Vì (P) đi qua điểm $B(20; 0)$ nên $a = -\sqrt{5}$; do đó (P): $y = -\sqrt{5x} + 10$.

$$\text{Vậy } V_2 = \pi \int_0^{20} (-\sqrt{5x} + 10)^2 dx = \frac{1000\pi}{3} (\text{cm}^3).$$

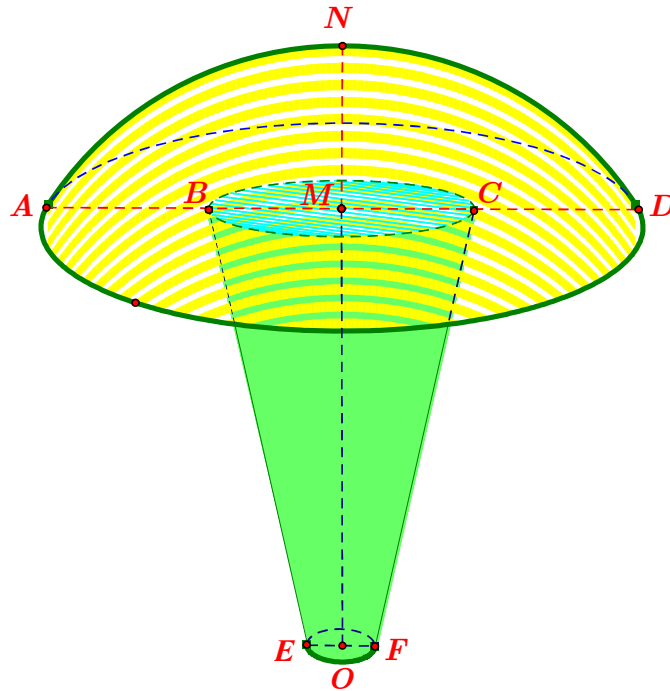
$$\text{Đáp số: } V = V_1 + V_2 = \frac{2500\pi}{3} (\text{cm}^3).$$

Dạng toán: Tính thể tích khối tròn xoay.

Phương pháp: dùng ứng dụng của tích phân để tính khối tròn xoay, có thể dùng trực tiếp các công thức tính thể tích chỏm cầu, chảo parabol, hình nêm, phiến trụ, nón cụt...

Bài toán tương tự

Câu 46.1 Cây dù ở khu vui chơi “công viên nước” của trẻ em có phần trên là một chỏm cầu, phần thân là một khối nón cụt như hình vẽ. Biết $ON = OD = 2m$; $MN = 40cm$; $BC = 40cm$; $EF = 20cm$. Tính thể tích của cây dù



A. $336000\pi(\text{cm}^3) - \frac{2750\pi}{3}(\text{cm}^3)$.

B. $\frac{896000\pi}{3}(\text{cm}^3)$.

C. $112000\pi(\text{cm}^3) - \frac{2050\pi}{3}(\text{cm}^3)$.

D. $896000\pi(\text{cm}^3) - \frac{2250\pi}{3}(\text{cm}^3)$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Nguyệt Cẩm; Fb: Nguyệt Cam Nguyen

Chọn A

Thể tích phần trên của cây dù là thể tích của khối chỏm cầu:

$$V_1 = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) = \pi \cdot MN^2 \cdot \left(ON - \frac{MN}{3} \right) = \pi \cdot 40^2 \left(200 - \frac{40}{3} \right) = \frac{896000}{3} \pi (\text{cm}^3).$$

Thể tích phần thân của cây dù là thể tích của khối nón cụt:

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi \cdot h \cdot (R_1^2 + R_2^2 + R_1 \cdot R_2) = \frac{1}{3} \pi \cdot OM \cdot (MB^2 + OE^2 + MB \cdot OE) = \frac{1}{3} \pi \cdot 160 \cdot (400 + 100 + 200) = \frac{112000}{3} \pi (\text{cm}^3).$$

$$\text{Vậy thể tích của cây dù: } V = V_1 + V_2 = \frac{896000}{3} \pi + \frac{112000}{3} \pi = 336000\pi (\text{cm}^3).$$

Câu 47. Giả sử z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $(z-6)(8+\overline{z}i)$ là số thực. Biết rằng $|z_1 - z_2| = 4$, giá trị nhỏ nhất của $|z_1 + 3z_2|$ bằng

A. $5 - \sqrt{21}$.

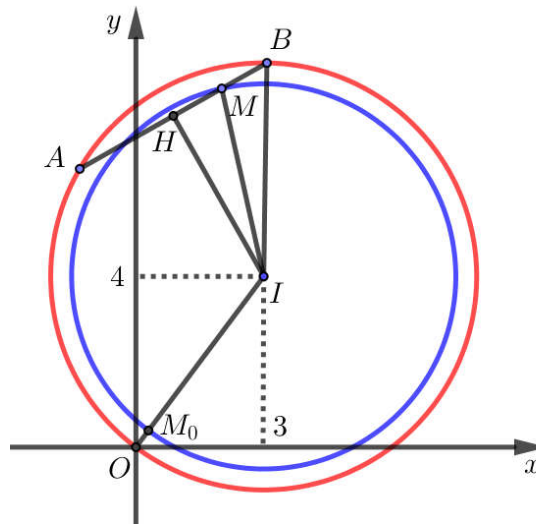
B. $20 - 4\sqrt{21}$.

C. $20 - 4\sqrt{22}$.

D. $5 - \sqrt{22}$.

Lời giải

Chọn C



Giả sử $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức z_1, z_2 . Suy ra $AB = |z_1 - z_2| = 4$.

* Ta có $(z-6)(8+\bar{z}i) = [(x-6)+yi] \cdot [(8-y)-xi] = (8x+6y-48) - (x^2+y^2-6x-8y)i$.

Theo giả thiết $(z-6)(8+\bar{z}i)$ là số thực nên ta suy ra $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$. Tức là các điểm A, B thuộc đường tròn (C) tâm $I(3;4)$, bán kính $R=5$.

* Xét điểm M thuộc đoạn AB thỏa $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} = 4\overrightarrow{OM}$. Gọi H là trung điểm AB . Ta tính được $HI^2 = R^2 - HB^2 = 21$; $IM = \sqrt{HI^2 + HM^2} = \sqrt{22}$, suy ra điểm M thuộc đường tròn (C') tâm $I(3;4)$, bán kính $r = \sqrt{22}$.

* Ta có $|z_1 + 3z_2| = |\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}| = |4\overrightarrow{OM}| = 4OM$, do đó $|z_1 + 3z_2|$ nhỏ nhất khi OM nhỏ nhất.

Ta có $(OM)_{\min} = OM_0 = |OI - r| = 5 - \sqrt{22}$.

Vậy $|z_1 + 3z_2|_{\min} = 4OM_0 = 20 - 4\sqrt{22}$.

Phân tích : Kiến thức cần nắm vững :

- Quỹ tích điểm biểu diễn số phức.
- Modun số phức
- Bài toán liên quan tâm tỉ cự trong hình học.
- Sai sót dễ gặp, không để ý đường tròn C đi qua gốc tọa độ.

Bài toán tương tự

Câu 47.1 Giả sử z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $(z+1)(\bar{z}-2i)$ là một số thuần ảo. Biết rằng $|z_1 - z_2| = 2$, giá trị nhỏ nhất của $|z_1 + 5z_2|$ bằng

- A. $\sqrt{13} - \sqrt{5}$. B. $3\sqrt{5} - \sqrt{13}$. C. $3\sqrt{5} - 2\sqrt{13}$. D. $5 - \sqrt{22}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow (z+1)(\bar{z}-2i) = x^2 + y^2 + x + 2y - (2x + y + 2)i$.

Theo giả thiết $(z+1)(\bar{z}-2i)$ là số thuần ảo, suy ra

$$x^2 + y^2 + x + 2y = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 + 2y + 1 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{5}{4}.$$

$\Rightarrow$ tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn (C_1) tâm $I\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$, $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Giả sử $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức z_1, z_2 . Suy ra $|z_1 - z_2| = 2 \Leftrightarrow AB = 2$.

Gọi M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB} = 6\overrightarrow{OM}$.

Gọi H là trung điểm AB ta có
$$\begin{cases} IH^2 = IA^2 - HA^2 \\ IH^2 = IM^2 - HM^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IH^2 = \frac{1}{4} \\ IM^2 = \frac{13}{36} \end{cases}.$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn (C_2) tâm $I\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$, $r = \frac{\sqrt{13}}{6}$.

Ta có $|z_1 + 5z_2| = |\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB}| = 6|\overrightarrow{OM}| = 6OM$.

Do $(C_1), (C_2)$ là hai đường tròn đồng tâm và $O \in (C_1)$

Từ đó suy ra $|z_1 + 5z_2|_{\min} = 6OM_{\min} = 6|R - r| = 6\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{13}}{6}\right) = 3\sqrt{5} - \sqrt{13}$

Câu 47.2 Giả sử z_1, z_2 là hai trong số các số phức z thỏa mãn $|iz + \sqrt{2} - i| = 1$ và $|z_1 - z_2| = 2$ Giá trị lớn nhất của $|z_1| + |z_2|$ bằng

A. 4.

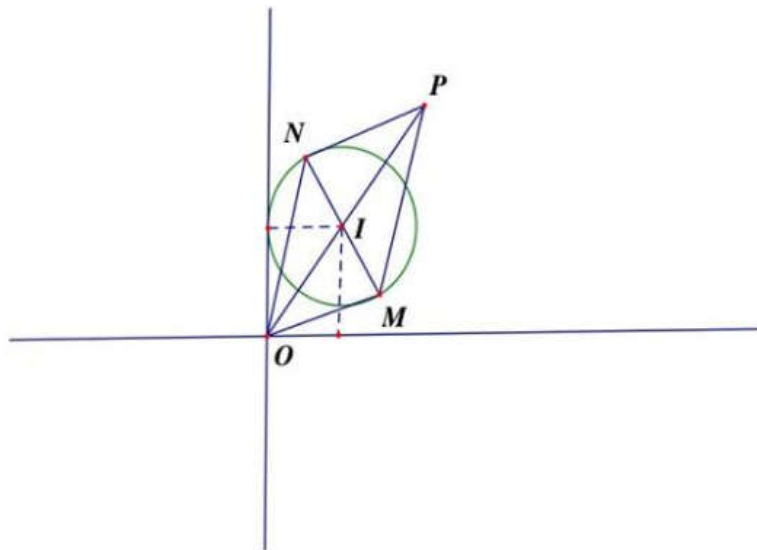
B. $2\sqrt{3}$.

C. $3\sqrt{2}$.

D. 3..

Lời giải

Chọn A.



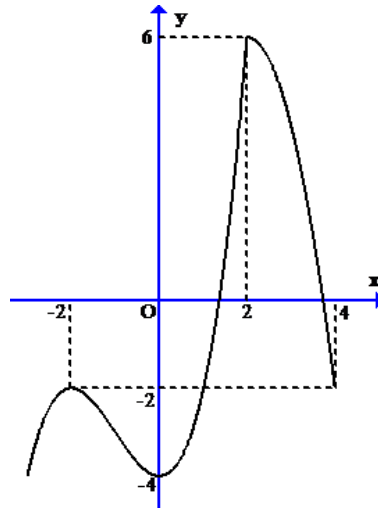
Ta có $|iz + \sqrt{2} - i| = 1 \Leftrightarrow |i||z - i\sqrt{2} - 1| = 1 \Leftrightarrow |z - 1 - i\sqrt{2}| = 1$.

Điểm biểu diễn z thuộc đường tròn tâm $I(1; \sqrt{2})$, $R = 1$.

Gọi M, N là điểm biểu diễn z_1, z_2 nên $MN = 2$ là đường kính. Dựng hình bình hành $OMPN$ ta có $|z_1 + z_2| = OP = 2\sqrt{3}$.

Ta có $(|z_1| + |z_2|)^2 \leq 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) = |z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 16 \Rightarrow |z_1| + |z_2| \leq 4$. Dấu bằng xảy ra khi $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow MN \perp OI$ ($OMPN$ là hình thoi)

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2}+1\right) + x = m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-2; 2]$?

A. 11.

B. 9.

C. 8.

D. 10.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Việt Hải; Fb: Nguyễn Việt Hải

Chọn C

$$\text{Ta có } \frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2}+1\right) + x = m \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2}+1\right) + 6\left(\frac{x}{2}+1\right) = 3m + 6 \Leftrightarrow f(t) + 6t = 3m + 6$$

Với $t = \frac{x}{2} + 1$ và $x \in [-2; 2]$ nên ta có $t \in [0; 2]$.

Xét hàm số $y = f(t) + 6t$ trên $[0; 2]$.

Ta có $y' = f'(t) + 6 > 0, \forall t \in [0; 2]$.

Phương trình có nghiệm

$$\Leftrightarrow \min_{[0;2]} (f'(t) + 6t) \leq 3m + 6 \leq \max_{[0;2]} (f'(t) + 6t) \Leftrightarrow f(0) \leq 3m + 6 \leq f(2) + 12$$

$$\Leftrightarrow -4 \leq 3m + 6 \leq 6 + 12$$

$$\Leftrightarrow -\frac{10}{3} \leq m \leq 4.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

Phân tích:

Bản chất bài toán: Bài toán đã cho là giải phương trình hay bất phương trình bằng phương pháp tương giao giữa hai đồ thị $y = g(x)$ và $y = h(m)$

- Đồ thị hàm số $y = h(m)$ bản chất là một đường thẳng song song hoặc trùng với trục Ox và đi qua điểm có tung độ có giá trị là $h(m)$.
- Đồ thị hàm số $y = g(x)$ xác định được tính chất dựa vào các dữ kiện đã cho hàm số $y = f(x)$ ban đầu; hàm số $y = f(x)$ có thể cho bằng công thức, bằng đồ thị, bằng hàm đạo hàm của nó, đồ thị của đạo hàm.

Vì đây là phần kiến thức tương đối rộng nên tôi xin chỉ khai thác ở một góc độ nào đó của bài toán.

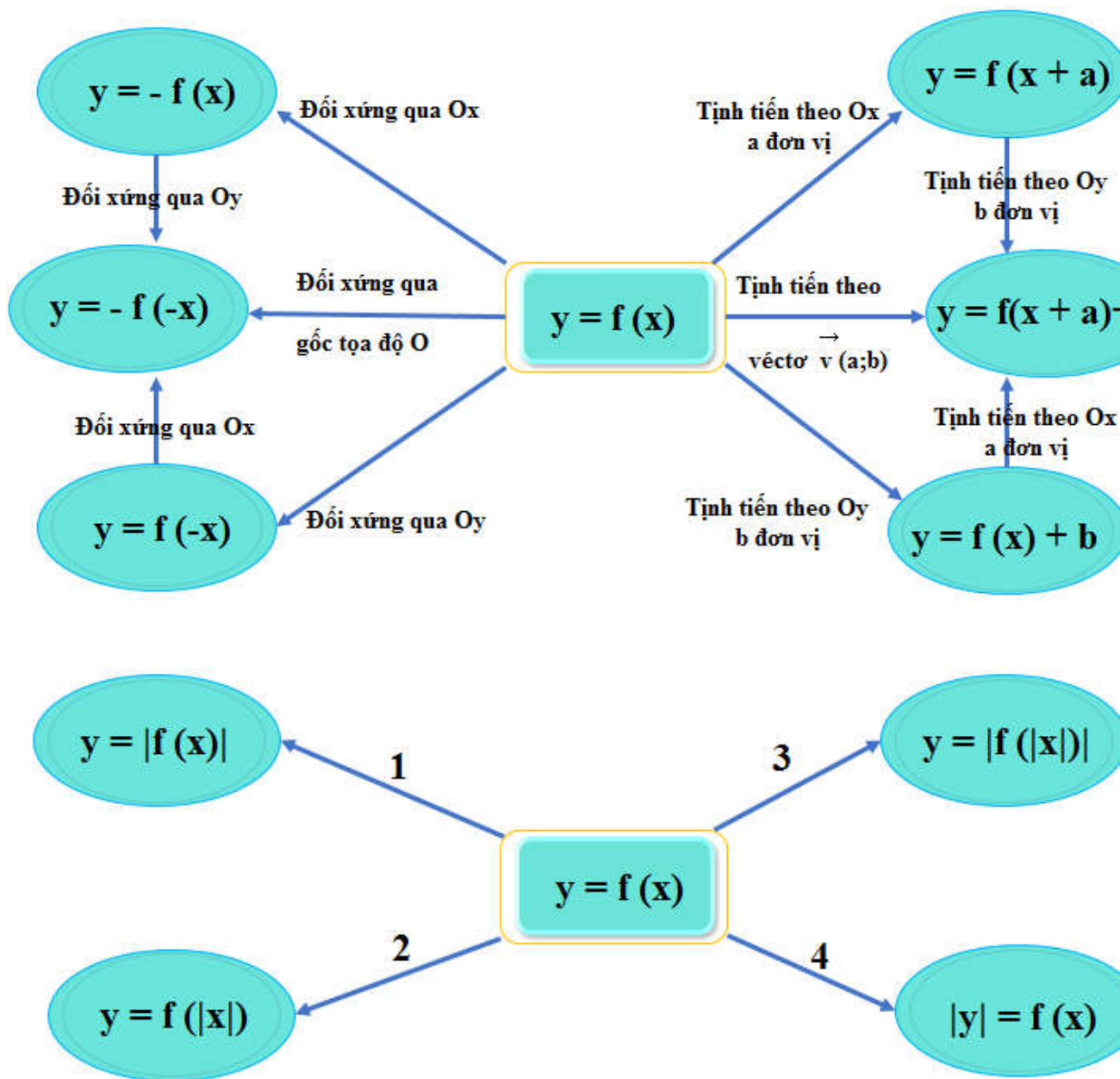
Khó khăn đối với học sinh:

- Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $y = g(x)$.
- Trong trường hợp không thể dùng đồ thị hàm số thì học sinh khó khăn trong việc kiểm soát đặc điểm của hàm số $y = g(x)$ do hàm số $y = g(x)$ có chứa biểu thức hàm hợp phức tạp của hàm $y = f(x)$.
- Phần lớn học sinh chưa phân biệt được kiến thức: “Số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của đồ thị hai hàm số” và “Nghiệm của phương trình chính là hoành độ của giao điểm”.

Giải pháp:

- Sử dụng một số phép biến đổi đồ thị cơ bản
- Sử dụng cách đặt ẩn phụ đưa về hàm số theo ẩn mới có chứa $y = f(t)$.

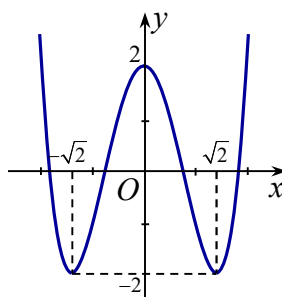
Kiểu 1: Sử dụng một số phép biến đổi đồ thị cơ bản.



Kiểu 2: Sử dụng cách đặt ẩn phụ đưa về hàm số theo ẩn mới có chứa $y = f(t)$.

Sau đây tôi xin đưa ra lớp bài toán sưu tầm theo mức độ để giúp học sinh có cách nhìn dễ dàng trong các bài thi trắc nghiệm:

Câu 48.1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới



Số nghiệm của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là

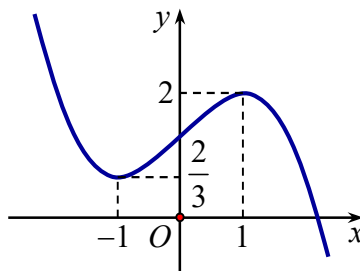
A. 4.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Câu 48.2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Tìm số nghiệm của phương trình $f(x + 2019) = 1$.



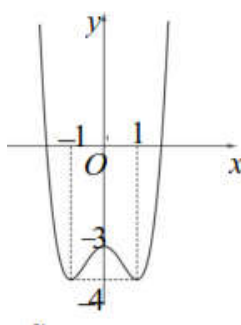
A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Câu 48.3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như đường cong trong hình vẽ dưới đây. Tìm giá trị của tham số m để phương trình $|f(x)| + 1 = m$ có 6 nghiệm phân biệt?

A. $-4 < m < -3$.B. $4 < m < 5$.C. $m > 5$.D. $0 < m < 4$.

Câu 48.4. Cho hàm số có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	-2	$+\infty$	

Số nghiệm của phương trình $|f(x - 1)| = 2$ là

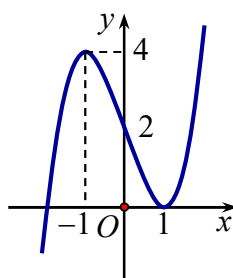
A. 5.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Câu 48.5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Phương trình $|f(x - 2) - 2| = \pi$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 4.

B. 2.

C. 6.

D. 3.

Câu 48.6. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|) + m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt?

A. 3.**B. 4.****C. 2.****D. 0.**

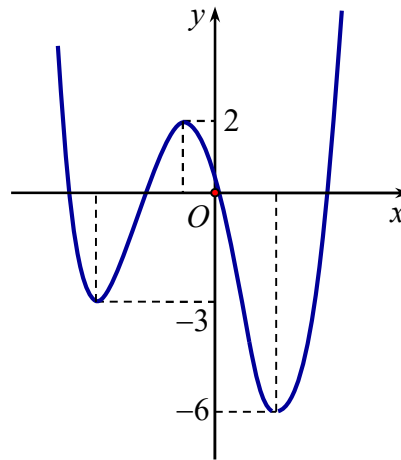
Câu 48.7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây.

x	$-\infty$	-1	0	2	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	-2	2	-2	2	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = f(m)$ có ba nghiệm phân biệt.

A. $m \in (-2; 2)$.**B. $m \in (-1; 3) \setminus \{0; 2\}$.****C. $m \in (-1; 3)$.****D. $m \in [-1; 3] \setminus \{0; 2\}$.**

Câu 48.8. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.



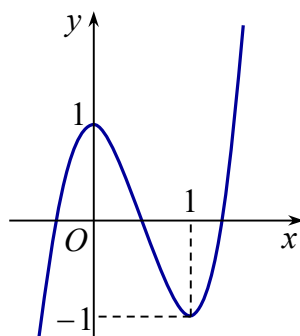
Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |f(x-1) + m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 12.**B. 15.****C. 18.****D. 9.**

Câu 48.9. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ biết $a > 0$, $c > 2017$ và $a + b + c < 2017$. Số cực trị của hàm số $y = |f(x) - 2017|$ là:

A. 1.**B. 7.****C. 5.****D. 3.**

Câu 48.10. Cho hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây. Khi đó phương trình $4(4x^3 - 6x^2 + 1)^3 - 6(4x^3 - 6x^2 + 1)^2 + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực.



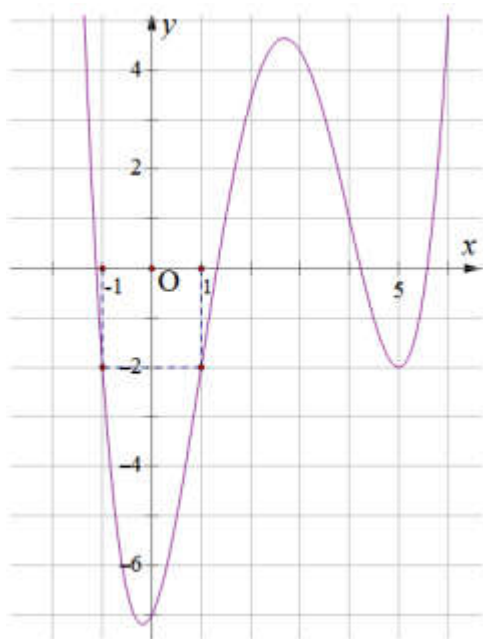
A. 3.

B. 6.

C. 7.

D. 9.

Câu 48.11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tồn tại bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x) = m$ có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $[0; \pi]$?



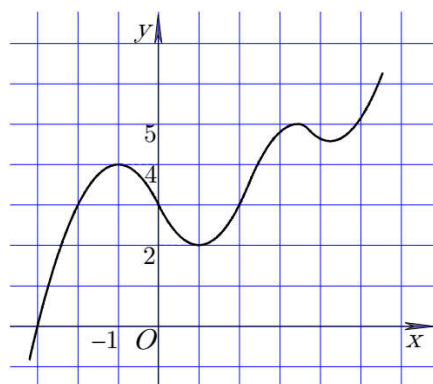
A. 4.

B. 7.

C. 5.

D. 6.

Câu 48.12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số giá trị nguyên của m để phương trình $f(x^2 - 2x) = m$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$.



A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Câu 48.13. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		$+\infty$		3		$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $3|f(2x-1)|-10=0$ là.

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$ cho ba đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, $\Delta_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$,

$\Delta_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1}$. Đường thẳng Δ vuông góc với d đồng thời cắt Δ_1, Δ_2 tương ứng tại H, K sao cho độ dài HK nhỏ nhất. Biết rằng Δ có một vectơ chỉ phương $\vec{u}(h; k; 1)$. Giá trị $h-k$ bằng

A. 0.

B. 4.

C. 6.

D. -2.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Việt Thảo ; FB: Việt Thảo

Chọn A

+ Gọi $H \in \Delta_1 \Rightarrow H(3+2t; t; 1+t)$.

+ Gọi $K \in \Delta_2 \Rightarrow K(1+m; 2+2m; m)$.

+ Tính được $\overrightarrow{HK} = (m-2t-2; 2m-t+2; m-t-1)$.

+ Đường thẳng d có một VTCP là $\vec{u}_d = (1; 1; -2)$.

+ Vì $\Delta \perp d \Leftrightarrow \vec{u}_d \cdot \overrightarrow{HK} = 0 \Leftrightarrow m-t+2=0 \Leftrightarrow m=t-2 \Rightarrow \overrightarrow{HK} = (-t-4; t-2; -3)$.

+ Tính được $HK^2 = (-t-4)^2 + (t-2)^2 + (-3)^2 = 2(t+1)^2 + 27 \geq 27, \forall t \in \mathbb{R}$

Suy ra $\min HK = \sqrt{27}$, đạt được khi $t = -1$.

+ Khi đó ta có $\overrightarrow{HK} = (-3; -3; -3)$, suy ra $\vec{u}(1; 1; 1) \Rightarrow h = k = 1 \Rightarrow h - k = 0$.

BÀI PHÁT TRIỂN CÂU 49

Câu 49.1 Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P): x+2y-z-1=0$, $(Q): 2x+y-z+2=0$, và hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$, $\Delta_2: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}$. Đường thẳng Δ song song với hai mặt phẳng $(P); (Q)$ và cắt Δ_1, Δ_2 tương ứng tại H, K . Độ dài đoạn HK bằng

A. $\frac{8\sqrt{11}}{7}$.B. $\sqrt{5}$

C. 6.

D. $\frac{\sqrt{11}}{7}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Việt Thảo ; FB: Việt Thảo

Chọn A

$$+ \text{Tính } \vec{u} = [\vec{n}_p, \vec{n}_q] = (-1; -1; -3)$$

$$+ \text{Gọi } H(2t; 1+t; -1+2t); K(m; 2-m; 1+2m) \text{ nên } \overline{HK} = (m-2; 1-m-t; 2+2m-2t)$$

$$+ \text{Vì song song với 2 mặt phẳng } (P); (Q) \text{ nên } \overline{HK} = k\vec{u} \text{ suy ra}$$

$$\frac{m-2}{1} = \frac{1-m-t}{1} = \frac{2+2m-2t}{3} \text{ tính ra được } m = \frac{2}{7}; t = \frac{-3}{7}.$$

$$+ \text{Suy ra } HK = \frac{8\sqrt{11}}{7}.$$

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1; -1; 0)$ và hai điểm $A(-4; 7; 3)$, $B(4; 4; 5)$. Giả sử M, N là hai điểm thay đổi trong mặt phẳng (Oxy) sao cho $\overline{MN}$ cùng hướng với $\vec{a}$ và $MN = 5\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng

A. $\sqrt{17}$.

B. $\sqrt{77}$.

C. $7\sqrt{2} - 3$.

D. $\sqrt{82} - 5$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Trung Thành; Fb: Thanh Nguyen.

Chọn A

Vì $\overline{MN}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nên $\exists t > 0: \overline{MN} = t\vec{a}$.

Hơn nữa, $MN = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow t|\vec{a}| = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow t = 5$. Suy ra $\overline{MN} = (5; -5; 0)$.

$$\text{Gọi } A'(x'; y'; z') \text{ là điểm sao cho } \overline{AA'} = \overline{MN} \Leftrightarrow \begin{cases} x' + 4 = 5 \\ y' - 7 = -5 \\ z' - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 2 \\ z' = 3 \end{cases} \Rightarrow A'(1; 2; 3).$$

Dễ thấy các điểm A', B đều nằm cùng phía so với mặt phẳng (Oxy) vì chúng đều có cao độ

dương. Hơn nữa vì cao độ của chúng khác nhau nên đường thẳng $A'B$ luôn cắt mặt phẳng

(Oxy) tại một điểm cố định.

Từ $\overline{AA'} = \overline{MN}$ suy ra $AM = A'N$ nên $|AM - BN| = |A'N - BN| \leq A'B$ dấu bằng xảy ra khi N

là giao điểm của đường thẳng $A'B$ với mặt phẳng (Oxy) .

Do đó $\max |AM - BN| = A'B = \sqrt{(4-1)^2 + (4-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{17}$, đạt được khi

$$N = A'B \cap (Oxy).$$

Nhận xét

Ý tưởng ra đề

Từ bất đẳng thức véc tơ

a) $||\vec{u}| - |\vec{v}|| \leq |\vec{u} - \vec{v}|$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi hai véc tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng chiều.

b) $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi hai véc tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng chiều.

c) $\|\vec{u} - \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi hai véc tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ ngược chiều.

Tác giả: Nguyễn Văn Hải, FB: <https://www.facebook.com/nguyenvan.hai.96387>

Bài trên xuất phát từ bất đẳng thức trên ta có bài toán gốc sau

Câu 50.1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(4;4;5)$. Giả sử M là điểm thay đổi trong mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z + 2019 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |AM - BM|$.

A. $\sqrt{17}$.

B. $\sqrt{77}$.

C. $7\sqrt{2} - 3$.

D. $\sqrt{82} - 5$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $(2x_A + 2y_A + z_A + 2019)(2x_B + 2y_B + z_B + 2019) > 0$ nên các điểm A, B đều nằm cùng phía so với mặt phẳng (P) và đường thẳng AB luôn cắt mặt phẳng (P) tại một điểm cố định.

Từ bất đẳng thức véc tơ $\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\|$. Ta có $|AM - BM| \leq AB$. Dấu bằng xảy ra khi M là giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (P) .

Do đó $|AM - BM|_{\max} = AB = \sqrt{(4-1)^2 + (4-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{17}$, đạt được khi $M = AB \cap (P)$.

Câu 50.2. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;1;0)$, $B(3;-1;4)$ và mặt phẳng $(\alpha): x - y + z + 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm $M \in (\alpha)$ sao cho $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $M(1;3;-1)$.

B. $M\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}; -\frac{1}{2}\right)$.

C. $M\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

D. $M(0;2;1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $(x_A - y_A + z_A + 1)(x_B - y_B + z_B + 1) = (1 - 1 + 0 + 1)(3 + 1 + 4 + 1) > 0$ nên hai điểm A và B cùng nằm về một phía của mặt phẳng (α) .

Ta có $|MA - MB| \leq AB = 2\sqrt{6}$, nên $|MA - MB|$ lớn nhất khi và chỉ khi $M = AB \cap (\alpha)$.

Phương trình đường thẳng $AB: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = 4t \end{cases}$, do đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương

$$\text{trình } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = 4t \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{8} \\ x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{5}{4} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ . Do đó } M\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}; -\frac{1}{2}\right).$$

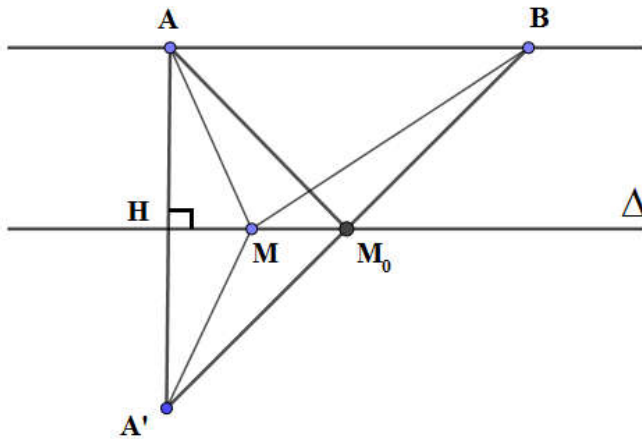
Câu 50.3. Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2}$ và $A(1;1;0), B(3;-1;4)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc Δ sao cho $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $M(-1;1;-2)$. B. $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right)$. C. $M\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -3\right)$. **D. $M(1;-1;2)$.**

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\overrightarrow{AB}(2;-2;4)$ cùng phương với $\vec{u}(1;-1;2)$ và $A(1;1;0) \notin \Delta$ (do $\frac{1+1}{1} \neq \frac{1-1}{-1}$)



$\Rightarrow AB \parallel \Delta \Rightarrow AB$ và Δ đồng phẳng.

* Xét mặt phẳng chứa AB và Δ :

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua Δ ; (α) là mặt phẳng qua A , vuông góc với Δ

Khi đó, giao điểm H của Δ với (α) là trung điểm của AA'

(α) có phương trình: $x - y + 2z = 0$

Giả sử $H(-1+t; 1-t; -2+2t)$, $H \in (\alpha) \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(0; 0; 0)$

H là trung điểm của $AA' \Rightarrow A'(-1; -1; 0)$

Ta có: $MA + MB = MA' + MB \geq A'B \Rightarrow (MA + MB)_{\min} = A'B$ khi và chỉ khi M trùng với M_0 là giao điểm của $A'B$ và Δ

Đường thẳng $A'B$ đi qua $A'(-1; -1; 0)$, có phương trình:
$$\begin{cases} x = -1 + t' \\ y = -1 \\ z = t' \end{cases}$$

Mà $\Delta: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 - t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} -1+t = -1+t' \\ 1-t = -1 \\ -2+2t = t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = t' \\ t = 2 \\ -2+2t = t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 2 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M_0(1; -1; 2)$$

Vậy, để $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $M(1; -1; 2)$.

Câu 50.4. Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2}$ và hai điểm $A(1; 1; 0)$, $B(-1; 0; 1)$. Biết điểm $M(a; b; c)$ thuộc Δ sao cho biểu thức $T = |MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó tổng $a - b + c$ bằng:

A. 8. B. $8 + \sqrt{33}$. C. $8 + \frac{\sqrt{33}}{3}$. **D. $8 + \frac{4\sqrt{33}}{3}$.**

Lời giải

Chọn D

Δ qua $C(-1; 1; -2)$, và có vector chỉ phương $\vec{u} = (1; -1; 2)$

$$\overrightarrow{AB} = (-2; -1; 1); \overrightarrow{AC} = (-2; 0; -2).$$

$[\overrightarrow{AB}; \vec{u}] \overrightarrow{AC} \neq 0$ nên $AB; \Delta$ không đồng phẳng

Vì điểm M thuộc Δ nên ta có $M(-1+t; 1-t; -2+2t)$, $t \in \mathbb{R}$. Lúc đó

$$\begin{aligned} P = |MA - MB| &= \left| \sqrt{(t-2)^2 + t^2 + (2t-2)^2} - \sqrt{(-t)^2 + (t-1)^2 + (2t-3)^2} \right| \\ &= \left| \sqrt{6t^2 - 12t + 8} - \sqrt{6t^2 - 14t + 10} \right|. \end{aligned}$$

$$P = \sqrt{6} \left| \sqrt{(t-1)^2 + \frac{1}{3}} - \sqrt{\left(t - \frac{7}{6}\right)^2 + \frac{11}{6}} \right|$$

$$\text{Đặt } \vec{u} = \left(t-1; \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \vec{v} = \left(t - \frac{7}{6}; \frac{\sqrt{11}}{6}\right). \text{ Ta có } \left| |\vec{u}| - |\vec{v}| \right| \leq |\vec{u} - \vec{v}|.$$

$$\text{Tức là } P \leq \sqrt{6} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \frac{t-1}{t - \frac{7}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{11}}{6}} \Leftrightarrow t = 3 + \frac{\sqrt{33}}{3}.$$

$$\text{Với ta có } a - b + c = 4t - 4 = 8 + \frac{4\sqrt{33}}{3}.$$

Câu 50.5. Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ và hai điểm $A(0;1;-3), B(-1;0;2)$. Biết điểm M thuộc Δ sao cho biểu thức $T = |MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất là $T_{\max}$. Khi đó, $T_{\max}$ bằng bao nhiêu?

A. $T_{\max} = \sqrt{3}$.

B. $T_{\max} = 2\sqrt{3}$.

C. $T_{\max} = 3\sqrt{3}$.

D. $T_{\max} = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; -1; 5)$, phương trình đường thẳng AB là $\begin{cases} x = -t \\ y = 1 - t \\ z = -3 + 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Xét vị trí tương đối giữa AB và Δ ta có AB cắt Δ tại $C\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{AC} = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow C$ là trung điểm AB .

$T = |MA - MB| \leq AB$. Dấu “=” xảy ra khi $M \equiv A$ hoặc $M \equiv B$.

Do đó $T_{\max} = AB = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

Câu 50.6. Cho mặt phẳng $(\alpha): x - y + 2z - 1 = 0$ và hai điểm $A(0;-1;1), B(1;1;-2)$. Biết $M \in (\alpha)$ sao cho $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, hoành độ x_M của điểm M là

A. $x_M = \frac{1}{3}$.

B. $x_M = -1$.

C. $x_M = -2$.

D. $x_M = \frac{2}{7}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $(x_A - y_A + 2z_A - 1)(x_B - y_B + 2z_B - 1) = (0 + 1 + 2 \cdot 1 - 1)(1 - 1 - 4 - 1) < 0$ nên hai điểm A và B nằm khác phía so với mặt phẳng (α) .

Nên $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $M = AB \cap (\alpha)$.

Phương trình đường thẳng $AB: \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$, do đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương

$$\text{trình } \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - 3t \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{7} \\ x = \frac{2}{7} \\ y = -\frac{3}{7} \\ z = \frac{1}{7} \end{cases}. \text{ Do đó } M\left(\frac{2}{7}; -\frac{3}{7}; \frac{1}{7}\right), x_M = \frac{2}{7}.$$

Câu 50.7. Cho mặt phẳng $(\alpha): x - y + z + 1 = 0$ và hai điểm $A(1; 1; 0), B(3; -1; 4)$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng (α) sao cho $P = MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của P là:

A. $P = 5$.B. $P = 6$.C. $P = 7$.D. $P = 8$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $(x_A - y_A + z_A + 1)(x_B - y_B + z_B + 1) = (1 - 1 + 0 + 1)(3 + 1 + 4 + 1) > 0$ nên hai điểm A và B cùng nằm về một phía của mặt phẳng (α) .

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (α) .

$$\text{Phương trình đường thẳng } AH: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$$

$$\text{Do đó tọa độ điểm } H \text{ là nghiệm của hệ phương trình } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = t \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{3} \\ x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{4}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } H\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right).$$

$$\text{Gọi } A' \text{ đối xứng với } A \text{ qua } (\alpha), \text{ suy ra } A'\left(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right).$$

$$\text{Ta có } MA + MB = MA' + MB \geq A'B \Rightarrow P = A'B = 6.$$

Câu 50.8. Cho mặt phẳng $(\alpha): x + y - 3z - 5 = 0$ và hai điểm $A(1; -1; 2), B(-5; -1; 0)$. Biết $M(a; b; c)$ thuộc mặt phẳng (α) sao cho $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, giá trị của biểu thức $T = a + 2b + 3c$ bằng bao nhiêu?

A. $T = 5$.B. $T = -3$.C. $T = -7$.D. $T = -9$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $(x_A + y_A - 3z_A - 5)(x_B + y_B - 3z_B - 5) = (1 - 1 - 3 \cdot 2 - 5)(-5 - 1 - 3 \cdot 0 - 5) > 0$ nên hai điểm A và B cùng nằm về một phía của mặt phẳng (α) .

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (α) .

$$\text{Phương trình đường thẳng } AH: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$$

Do đó tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+t \\ z = 2-3t \\ x+y-3z-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x = 2 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}.$$

Do đó $H(2;0;-1)$.

Gọi A' đối xứng với A qua (α) , suy ra $A'(3;1;-4)$.

Ta có $MA+MB = MA'+MB \geq A'B$ nên $MA+MB$ nhỏ nhất khi $M = A'B \cap (\alpha)$.

Phương trình đường thẳng $A'B$:
$$\begin{cases} x = 3-4t \\ y = 1-t \\ z = -4+3t \end{cases}.$$

Do đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} x = 3-4t \\ y = 1-t \\ z = -4+3t \\ x+y-3z-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{12}{11} \\ x = -\frac{15}{11} \\ y = -\frac{1}{11} \\ z = -\frac{20}{11} \end{cases}.$$

Do đó $M\left(-\frac{15}{11}; -\frac{1}{11}; -\frac{20}{11}\right)$, $T = a+2b+3c = -7$.

Câu 50.9. Cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 8$ và hai điểm $A(3;0;0), B(4;2;1)$. Gọi M là điểm thuộc mặt mặt cầu (S) . Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+2MB$.

A. $\sqrt{6}$.

B. $2\sqrt{6}$.

C. $6\sqrt{2}$.

D. $3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ý tưởng

Tìm điểm B' cố định sao cho $MA = 2MB'$ rồi áp dụng bất đẳng thức $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$.

Cách 1: Gọi $M(a;b;c) \in (S)$, ta có $(a+1)^2 + (b-4)^2 + c^2 = 8 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2a + 8b - 9$

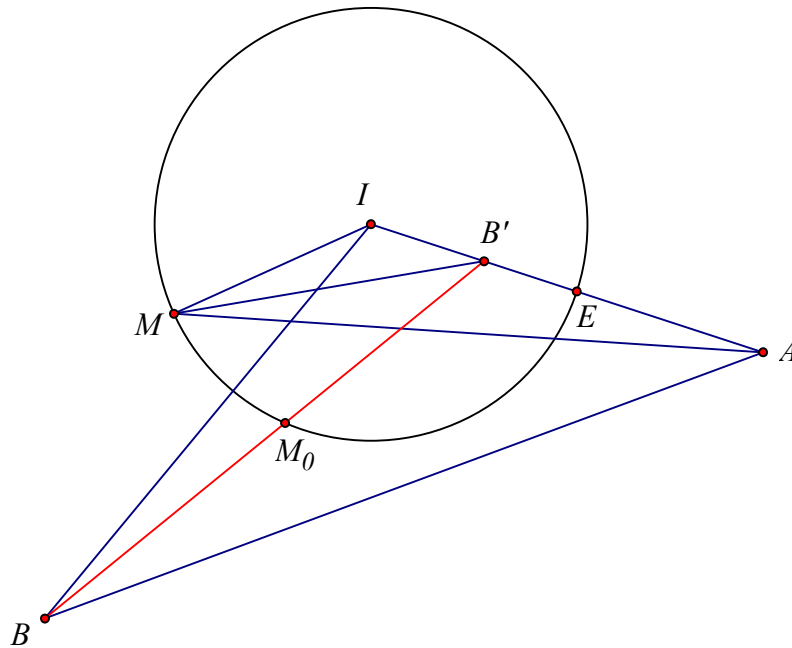
Do đó $MA = \sqrt{(a-3)^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{4(a^2 + b^2 + c^2) - 3(a^2 + b^2 + c^2) - 6a + 9}$

$2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 6b + 9} = 2\sqrt{a^2 + (b-3)^2 + c^2} = 2MB'$ với $B'(0;3;0)$.

Dễ thấy B' nằm trong mặt cầu, B nằm ngoài mặt cầu nên $MA+2MB = 2(MB'+MB)$ nhỏ nhất khi B', M, B thẳng hàng.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+2MB$ là $2BB' = 6\sqrt{2}$.

Cách 2:



Ta có $IA = 4\sqrt{2}$, với I là tâm mặt cầu.

Gọi $E(1; 2; 0), B'(0; 3; 0)$ lần lượt là trung điểm của IA và IE .

+ M là điểm nằm trên đường thẳng IA ta có $MB' = \frac{1}{2}MA$.

+ M là điểm không nằm trên đường thẳng IA ta có $\triangle IMB' \sim \triangle IAM$ nên $\frac{MB'}{MA} = \frac{IM}{IA} = \frac{1}{2}$,

ta có $MB' = \frac{1}{2}MA$.

Dễ thấy B' nằm trong mặt cầu, B nằm ngoài mặt cầu nên $MA + 2MB = 2(MB' + MB)$ nhỏ nhất khi B', M, B thẳng hàng. $M \equiv M_0$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA + 2MB$ là $2BB' = 6\sqrt{2}$.