

## Định hướng ôn thi tốt nghiệp THPT

*Phân tích, định hướng tìm lời giải, xây dựng các bài tương tự các câu VD – VDE*

### ĐỀ THI THAM KHẢO TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2021

Ngày 31/3/2021 Bộ GD&ĐT chính thức công bố đề thi tham khảo, tạo điều kiện thuận lợi cho giáo viên và các em học sinh ôn tập. Trên cơ sở đó, các trường THPT, các Sở GD &ĐT cũng tổ chức ra các đề thi thử tốt nghiệp THPT nhằm đánh giá năng lực của các em học sinh và cũng là dịp để các em được làm quen với các dạng toán trắc nghiệm.

Kỳ thi tốt nghiệp THPT năm 2021 đã đến gần, để tạo điều kiện cho quý thầy cô cùng các em có tài liệu ôn tập trong thời gian gấp rút này Nhóm Giáo viên Toán Việt Nam xin gửi tới quý thầy cô và các em bài viết “*Phân tích, định hướng tìm lời giải, xây dựng các bài tương tự các câu VD – VDE Đề thi tham khảo tốt nghiệp THPT Năm 2021*”

Hวัง vọng bài viết sẽ giúp quý thầy cô có thêm tài liệu tham khảo; các em học sinh nắm chắc các kiến thức trong chương trình THPT; tiếp cận được với các bài toán mới, hay và lạ. Đặc biệt, rèn luyện tốt kỹ năng thi trắc nghiệm môn Toán.

**Câu 41**

Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khí } x \geq 2 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{khí } x < 2 \end{cases}$ . Tích phân  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2 \sin x + 1) \cos x dx$  bằng:

A.  $\frac{23}{3}$ .      B.  $\frac{23}{6}$ .      C.  $\frac{17}{6}$ .      D.  $\frac{17}{3}$ .

Facebook: Nam Phương – Thủy Dao – Trần Chinh

**Phân tích định hướng tìm lời giải:**

- Đây là bài toán tính tích phân của hàm hợp.
- Để tính được tích phân trên ta phải thực hiện phép đổi biến để đưa về hàm đã cho.
- Cụ thể các bước thực hiện như sau:
- + B1: Đặt  $2 \sin x + 1 = t$ .
- + B2: Biểu thị  $\cos x dx$  theo  $tdt$ .
- + B3: Đổi cận, và tính tích phân  $\int_a^b f(t) dt$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Xét } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2 \sin x + 1) \cos x dx$$

$$\text{Đặt } 2 \sin x + 1 = t \Rightarrow 2 \cos x dx = dt \Rightarrow \cos x dx = \frac{1}{2} dt$$

$$\text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 1; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 3.$$

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 f(t) \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int_1^3 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_1^2 (t^2 - 2t + 3) dt + \frac{1}{2} \int_2^3 (t^2 - 1) dt \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{t^3}{3} - t^2 + 3t \right) \Big|_1^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_2^3 = \frac{23}{6}. \end{aligned}$$

**Bình luận:**

+ Đây là dạng toán thuộc mức độ vận dụng, việc nhận ra hướng giải đòi hỏi học sinh phải nắm chắc các khái niệm và tính chất của tích phân cũng như các phương pháp tính tích phân.

+ Học sinh thường lúng túng, và dễ mắc sai lầm khi tách cận hoặc quên nhân thêm phân số  $\frac{1}{2}$  để tính  $I = \frac{1}{2} \int_1^3 f(t) dt$  dẫn đến có thể chọn các đáp án nhiễu

$$I = \int_1^3 f(t) dt = \int_1^2 (t^2 - 2t + 3) dt + \int_2^3 (t^2 - 1) dt = \frac{20}{3}$$

$$\text{hoặc } I = \frac{1}{2} \int_1^3 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_1^2 (t^2 - 2t + 3) dt - \frac{1}{2} \int_2^3 (t^2 - 1) dt = \frac{17}{6}$$

$$\text{hoặc } I = \int_1^3 f(t) dt = \int_1^2 (t^2 - 2t + 3) dt - \int_2^3 (t^2 - 1) dt = \frac{17}{3}.$$

**Hướng phát triển:**

**Hướng phát triển 1:** Biểu thức có chứa tham số. Sử dụng tính liên tục để tìm tham số.

**Hướng phát triển 2:** Sử dụng diện tích hình phẳng để tính tích phân.

**Hướng phát triển 3:** Tích phân có chứa dấu giá trị tuyệt đối.

**Hướng phát triển 4:** Sử dụng quy tắc tính tích phân.

**Bài tập tương tự**

**Câu 1:** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 2ax + b & \text{khi } x < 0 \end{cases}$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos x + \sin x) f(-\cos x + 2 \sin x) dx = -2. \text{ Giá trị của biểu thức } P = 2a - b \text{ bằng}$$

A. -8.

B. 33.

C. 25.

D. 11.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có:  $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 2ax + b & \text{khi } x < 0 \end{cases}$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  khi hàm số liên tục tại  $x = 0$

hay  $b = 1$ .

$$\text{Xét: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos x + \sin x) f(-\cos x + 2 \sin x) dx = -2.$$

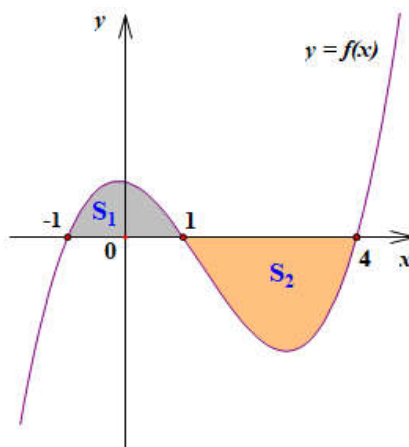
$$\text{Đặt } -\cos x + 2 \sin x = t \Rightarrow (\sin x + 2 \cos x) dx = dt.$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos x + \sin x) f(-\cos x + 2 \sin x) dx &= \int_{-1}^2 f(t) dt = \int_{-1}^0 f(t) dt + \int_0^2 f(t) dt \\ &= \int_{-1}^0 (2ax + 1) dt + \int_0^2 (3x^2 + 2x + 1) dt = -2 \Rightarrow a = 17. \end{aligned}$$

**Câu 2:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi  $S_1$  và  $S_2$  lần lượt là diện tích của hai hình phẳng trong hình, biết  $S_1 = 3$  và  $S_2 = 7$ . Tích phân

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(5 \sin x - 1) dx \text{ bằng}$$



A.  $-\frac{4}{5}$ .

B.  $\frac{4}{5}$ .

C. -2.

D. 2.

**Chọn A**

Xét  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(5 \sin x - 1) dx$ .

Đặt  $5 \sin x - 1 = t \Rightarrow \cos x dx = \frac{1}{5} dt$ .

Với  $x = 0 \Rightarrow t = -1$

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 4$

$\Rightarrow I = \int_{-1}^4 f(t) \frac{1}{5} dt = \frac{1}{5} \int_{-1}^4 f(x) dx = \frac{1}{5} \int_{-1}^1 f(x) dx + \frac{1}{5} \int_1^4 f(x) dx = \frac{1}{5} S_1 + \frac{1}{5} (-S_2) = -\frac{4}{5}$ .

**Câu 3:** Cho hàm số  $y = f(x) = \begin{cases} x^2 - m, & x \geq 0 \\ 2 \cos x - 3, & x < 0 \end{cases}$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Giá trị

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|2 \cos x - 1|) \sin x dx$  bằng

A. 0.

B.  $\frac{1}{3}$ .

**C.  $-\frac{2}{3}$ .**

D.  $\frac{-1}{3}$ .

Lời giải

**Chọn C**

Hàm số liên tục trên  $\mathbb{R}$  nên ta có:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow -m = -1 \Leftrightarrow m = 1$ .

Đặt  $t = 2 \cos x - 1 \Rightarrow \frac{-1}{2} dt = \sin x dx$ . Đổi cận:  $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 1 \\ x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = -1 \end{cases}$ .

Khi đó:  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|2 \cos x - 1|) \sin x dx = \frac{-1}{2} \int_1^{-1} f(|t|) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(|x|) dx = \frac{1}{2} \left[ \int_{-1}^0 f(-x) dx + \int_0^1 f(x) dx \right]$

Xét  $\int_{-1}^0 f(-x) dx$ . Đặt  $u = -x \Rightarrow -du = dx$ . Đổi cận:  $\begin{cases} x = -1 \rightarrow u = 1 \\ x = 0 \rightarrow u = 0 \end{cases}$ .

Suy ra  $\int_{-1}^0 f(-x) dx = -\int_1^0 f(u) du = \int_0^1 f(x) dx$ .

Vậy  $I = \frac{1}{2} \left[ \int_{-1}^0 f(-x) dx + \int_0^1 f(x) dx \right] = \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 - 1) dx = -\frac{2}{3}$ .

**Câu 4:** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2 & \text{khi } 0 \leq x < 2 \\ -x + 5 & \text{khi } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$ . Khi đó  $\int_1^{e^2} \frac{f(\ln x)}{x} dx + \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{6}} xf(\sqrt{x^2 + 1}) dx$  bằng

A.  $\frac{19}{2}$ .

**B.  $\frac{37}{2}$ .**

C.  $\frac{27}{2}$ .

D. 5.

Lời giải

**Chọn B**

Xét  $I_1 = \int_1^{e^2} \frac{f(\ln x)}{x} dx$ . Đặt  $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=1 \Rightarrow t=0 \\ x=e^2 \Rightarrow t=2 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I_1 = \int_1^{e^2} \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_0^2 f(t) dt = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \left( \frac{1}{2}x + 2 \right) dx = \left( \frac{x^2}{4} + 2x \right) \Big|_0^2 = 5.$$

$$\text{Xét } I_2 = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{6}} xf(\sqrt{x^2+1}) dx \text{ Đặt } t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow tdt = xdx.$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=\sqrt{3} \Rightarrow t=2 \\ x=2\sqrt{6} \Rightarrow t=5 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I_2 = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{6}} xf(\sqrt{x^2+1}) dx = \int_2^5 f(t) t dt = \int_2^5 f(x) x dx = \int_2^5 (-x+5) x dx = \frac{27}{2}.$$

$$\text{Vậy } \int_1^{e^2} \frac{f(\ln x)}{x} dx + \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{6}} xf(\sqrt{x^2+1}) dx = 5 + \frac{27}{2} = \frac{37}{2}.$$

**Câu 42**

Có bao nhiêu số phức  $z$  thỏa mãn  $|z| = \sqrt{2}$  và  $(z+2i)(\bar{z}-2)$  là số thuần ảo?

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 4.

Facebook: Phong Do – Hương Dương

**Phân tích định hướng tìm lời giải:**

- Đây là dạng toán tìm số phức thỏa mãn điều kiện cho trước, một bài toán ở mức độ vận dụng
- Từ điều kiện cho trước thiết lập hệ phương trình liên quan đến  $x, y$  của số phức  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ )
- Xác định  $(x, y)$  từ hệ đã cho hoặc chuyển về phương pháp hình học để giải quyết bài toán.

**Lời giải**

**Cách 1:** Giả sử  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ )  $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$

Ta có:

$$(z+2i)(\bar{z}-2) = [x+(y+2)i](x-2-yi) = x(x-2) + y(y+2) + [-xy + (x-2)(y+2)]i$$

$$\text{Do đó yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2} \\ x(y-2) + x(y+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 2 \\ x^2+y^2-2x+2y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 2 \\ 2-2x+2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2+y^2 = 2 \\ x = y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2+2y-1 = 0 \\ x = y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Vậy có 2 số phức  $z$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

## Bình luận:

- Vì bài toán hỏi có bao nhiêu số phức thỏa mãn điều kiện nên có thể dùng phương pháp hình học dựa vào vị trí tương đối để tìm số giao điểm.
- HS phải nhận ra điểm mấu chốt của bài toán này là số điểm biểu diễn của số phức  $z$  chính là số điểm chung của đường tròn và đường thẳng (hoặc đường tròn); và được xác định dựa vào xét vị trí tương đối giữa đường thẳng và đường tròn hoặc vị trí tương đối của hai đường tròn. Đây là câu hỏi kiểm tra kiến thức ở mức độ VD.
- Từ đó ta có cách giải khác như sau:

## Cách 2: Đưa về tương giao của hai đường tròn

Giả sử  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ )  $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$

Ta có:

$$(z + 2i)(\bar{z} - 2) = [x + (y + 2)i](x - 2 - yi) = x(x - 2) + y(y + 2) + [-xy + (x - 2)(y + 2)]i$$

$$\text{Do đó yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2} \\ x(y - 2) + x(y + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & (1) \\ x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0 & (2) \end{cases}$$

**Nhận xét:** (1) là phương trình của đường tròn tâm  $O$  bán kính  $R_1 = \sqrt{2}$

(2) là phương trình của đường tròn tâm  $I(1; -1)$  bán kính  $R_2 = \sqrt{2}$

Ta có:  $0 = |R_1 - R_2| < OI = \sqrt{2} < R_1 + R_2 = 2\sqrt{2}$  nên hai đường tròn cắt nhau.

Vậy có 2 số phức  $z$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

## Cách 3: Đưa về tương giao giữa đường thẳng và đường tròn

$$\text{Biến đổi đưa về hệ} \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & (3) \\ x - y - 1 = 0 & (4) \end{cases}$$

**Nhận xét:** (3) là phương trình của đường tròn tâm  $O$  bán kính  $R = \sqrt{2}$

(4) là phương trình của đường thẳng  $d: x - y - 1 = 0$ .

Ta có:  $d(O, d) = \frac{|-1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < R = \sqrt{2}$ , suy ra đường thẳng cắt đường tròn tại hai điểm

Vậy có 2 số phức  $z$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

## Hướng phát triển:

### Hướng phát triển 1:

Xét các số phức thỏa mãn điều kiện (cho một giả thiết về modun, một giả thiết về số thuần ảo/ số thực) đưa về phương trình hoặc hệ phương trình.

Nếu cho giả thiết số thuần ảo thì chỉ cần xác định phần thực và cho bằng 0.

Nếu cho giả thiết là số thực thì chỉ cần xác định phần ảo và cho bằng 0.

### Hướng phát triển 2:

Tìm các số phức thỏa mãn điều kiện bằng phương pháp modun hai vế

### Hướng phát triển 3:

Xét các số phức thỏa mãn điều kiện đưa về phương trình hoặc hệ phương trình chứa tham số

### Hướng phát triển 4:

Tìm số các số phức  $z = x + yi$ , ( $x, y \in \mathbb{Z}$ ) thỏa mãn điều kiện đưa về được hệ bất phương trình. Ta tìm quỹ tích các điểm biểu diễn số phức là miền hình phẳng giới hạn nào. Từ đó đếm số điểm có tọa độ nguyên thỏa mãn.

Bài tập tương tự

**Câu 1.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z-3i|=|z-1|$  và  $(z+1)(\overline{z-2i})$  là số thực. Tính  $|z|$ .

A.  $|z|=\sqrt{10}$ .

B.  $|z|=2\sqrt{10}$ .

C.  $|z|=\frac{\sqrt{10}}{5}$ .

**D.  $|z|=\frac{2\sqrt{10}}{5}$ .**

**Lời giải**

Giả sử  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ).

$$|z-3i|=|z-1| \Leftrightarrow |x+(y-3)i|=|x-1+yi| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow x-3y+4=0 \quad (1)$$

$$(z+1)(\overline{z-2i})=(x^2+y^2+x-2y)+(2x-y+2)i \text{ là số thực } \Leftrightarrow 2x-y+2=0 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1),(2) ta có } \begin{cases} x-3y+4=0 \\ 2x-y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{2}{5} \\ y=\frac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow z=-\frac{2}{5}+\frac{6}{5}i \text{ có } |z|=\frac{2\sqrt{10}}{5}.$$

**Câu 2.** Có bao nhiêu số phức  $z$  thỏa mãn  $|z+3-2i|=2\sqrt{2}$  và  $(z-i)^2$  là số thuần ảo?

A. 0.

B. 4.

**C. 3.**

D. 2.

**Lời giải**

**Chọn C**

Giả sử  $z = x + yi$ , ( $x, y \in \mathbb{R}$ )

$$|z+3-2i|=2\sqrt{2} \Leftrightarrow (x+3)^2+(y-2)^2=8 \quad (1)$$

$$(z-i)^2=x^2-(y-1)^2+2x(y-1)i \text{ là số thuần ảo } \Leftrightarrow x^2-(y-1)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-1 & (2) \\ x=1-y & (3) \end{cases}$$

$$\text{TH1: Từ (1),(2) ta có: } \begin{cases} x=y-1 \\ (x+3)^2+(y-2)^2=8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (y+2)^2+(y-2)^2=8 \Leftrightarrow y=0 \Rightarrow x=-1$$

$$\text{TH2: Từ (1),(3) ta có: } \begin{cases} x=1-y \\ (x+3)^2+(y-2)^2=8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (y-4)^2+(y-2)^2=8 \Leftrightarrow y^2-6y+6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=3+\sqrt{3} \\ y=3-\sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy có 3 số phức thỏa mãn.

**Câu 3.** Có bao nhiêu số phức  $z$  thỏa mãn  $|z-3i|=|1-i\bar{z}|$  và  $z-i-\frac{5}{z-i}$  là số thuần ảo?

A. 1.

B. 2.

**C. 3.**

D. 4.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện:  $z \neq i$

$$\text{Đặt } z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow 1-i\bar{z}=1-i(x-yi)=1-y-xi$$

$$|z-3i|=|1-i\bar{z}| \Leftrightarrow |x+(y-3)i|=|(1-y)-xi| \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=(1-y)^2+x^2$$

$$\Leftrightarrow (y-3)^2=(1-y)^2 \Rightarrow y=2.$$

$$\text{Do đó } z = x + 2i \Rightarrow z-i = x+i.$$

Ta có

$$z - i - \frac{5}{z - i} = x + i - \frac{5}{x + i} = x + i - \frac{5(x - i)}{x^2 + 1} = \left(x - \frac{5x}{x^2 + 1}\right) + \left(1 + \frac{5}{x^2 + 1}\right)i$$

(Chú ý: Ta tìm phần thực, cho bằng 0 nên phần ảo không cần tính)

$$z - i - \frac{5}{z - i} \text{ là số thuần ảo } \Leftrightarrow x - \frac{5x}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Vậy tìm được 3 số phức thỏa mãn.

**Câu 4.** Có bao nhiêu số phức  $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$  thỏa mãn  $1 - \frac{i}{z} + \frac{i}{z} = 0$  và  $|z - \bar{z}| \cdot |z + \bar{z}| = 4$ ?

A. 2.

B. 1.

C. 0.

**D. 4.**

Lời giải

**Chọn D**

Điều kiện:  $z \neq 0$

$$1 - \frac{i}{z} + \frac{i}{z} = 0 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} - i(z - \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y = 0 \quad (1)$$

$$-|z - \bar{z}| \cdot |z + \bar{z}| = 4 \Leftrightarrow |x \cdot y| = 1 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) ta có: } \begin{cases} x^2 \cdot y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{y^2} \\ y^4 + 2y^3 + 1 = 0 \end{cases}$$

Nhận xét: Vì  $y^4 + 2y^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(y^3 - y^2 - y - 1) = 0 \Rightarrow$  có 2 nghiệm  $y$  khác 0 nên có 4 giá trị của  $x$ . Vậy có 4 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 5.** Có bao nhiêu số phức  $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$  thỏa mãn  $|z + 1 + i| = \sqrt{10}$  và  $\frac{z}{z - 2}$  là một số thuần ảo?

A. 2.

**B. 1.**

C. 0.

D. 4.

Lời giải

**Chọn B**

$z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$ . Điều kiện  $z \neq 2$

$$|z + 1 + i| = \sqrt{10} \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 10 \quad (1)$$

$$\frac{z}{z - 2} = \frac{x^2 + y^2 - 2x - 2yi}{(x - 2)^2 + y^2} \text{ là số thuần ảo khi } x^2 + y^2 - 2x = 0 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) ta có hệ: } \begin{cases} (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 10 \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 4 \\ 5x^2 - 18x + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; y = 0 \\ x = \frac{8}{5}; y = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Vì  $z \neq 2$  nên có 1 số phức thỏa mãn

**Câu 6.** Có bao nhiêu số phức  $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$  thỏa mãn  $z^3 + 2i|z|^2 = 0$ ?

A. 1.

B. 2.

C. 0.

**D. 4.**

Lời giải

**Chọn D**

Cách 1: Lấy modun hai vế

$$\text{Ta có: } z^3 + 2i|z|^2 = 0 \Leftrightarrow |z|^3 = 2|z|^2 \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 0 \\ |z| = 2 \end{cases}$$



TH1:  $|z| = 0 \Rightarrow z^3 = 0 \Leftrightarrow z = 0$ .

TH2:  $|z| = 2$

$$\Rightarrow z^3 + 2i|z|^2 = 0 \Leftrightarrow z^3 + 8i = 0 \Leftrightarrow (z - 2i)(z^2 + 2iz - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2i \\ z = \sqrt{3} - i \\ z = -\sqrt{3} - i \end{cases}$$

Vậy có 4 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán

**Cách 2:** Sử dụng hai số phức bằng nhau

$$z^3 + 2i|z|^2 = 0 \Leftrightarrow z^3 + 2i.z.\bar{z} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z^2 + 2i\bar{z} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Xét: } z^2 + 2i\bar{z} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2y = 0 \\ 2x(y+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; y = 0 \\ x = 0; y = 2 \\ x = \sqrt{3}; y = -1 \\ x = -\sqrt{3}; y = -1 \end{cases}$$

Vậy có 4 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 7.** Có bao nhiêu số phức  $z = \frac{m}{2} + 1 + (3-m)i, (m \in \mathbb{R})$  có phần thực, phần ảo là những giá trị nguyên và  $|z-i| \leq \sqrt{10}$ ?

A. 1.

**B. 2.**

C. 5.

D. 4.

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Với } z = \frac{m}{2} + 1 + (3-m)i, (m \in \mathbb{R}) \Rightarrow |z-i| \leq \sqrt{10} \Leftrightarrow \left(\frac{m}{2} + 1\right)^2 + (2-m)^2 \leq 10$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 - 12m - 20 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{6-2\sqrt{34}}{5} \leq m \leq \frac{6+2\sqrt{34}}{5}$$

Vì số phức  $z$  có phần thực, phần ảo là những giá trị nguyên nên

$$\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m:2 \\ \frac{6-2\sqrt{34}}{5} \leq m \leq \frac{6+2\sqrt{34}}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

Vậy có 2 số phức  $z$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 8.** Gọi  $S$  là tập hợp các số thực  $m$  sao cho với mỗi  $m \in S$  có đúng một số phức thỏa mãn  $|z-m|=9$  và  $\frac{z}{z-6}$  là số thuần ảo. Tính tổng của các phần tử của tập  $S$ .

A. 6.

B. 12.

**C. 0.**

D. 24.

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi  $z = x+iy$  với  $x, y \in \mathbb{R}$ . Điều kiện  $z \neq 6$ .

$$\text{Ta có } \frac{z}{z-6} = \frac{x+iy}{x-6+iy} = \frac{(x+iy)(x-6-iy)}{(x-6)^2 + y^2} = \frac{x(x-6) + y^2 - 6iy}{(x-6)^2 + y^2}.$$

$$\text{Do đó } \frac{z}{z-6} \text{ là số thuần ảo khi } x(x-6) + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 9.$$

Mặt khác  $|z-m|=9 \Leftrightarrow (x-m)^2 + y^2 = 81$

Để có đúng một số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán thì hệ phương trình

$$\begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = 9 \\ (x-m)^2 + y^2 = 81 \end{cases} \text{ có đúng một nghiệm hoặc hai nghiệm trong đó có một nghiệm } (6;0)$$

Xét trường hợp hệ có nghiệm  $(6;0)$

Ta có:  $(6-m)^2 = 81 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = 15 \end{cases}$  không thỏa mãn vì hai đường tròn trên tiếp xúc nhau tại  $(6;0)$

Xét TH  $\begin{cases} m \neq -3 \\ m \neq 15 \end{cases}$

Nghĩa là hai đường tròn  $(C_1): (x-3)^2 + y^2 = 9$  và  $(C_2): (x-m)^2 + y^2 = 81$  tiếp xúc nhau.

Xét  $(C_1)$  có tâm  $I_1(3;0)$  bán kính  $R_1=3$  và  $(C_2)$  có tâm  $I_2(m;0)$  bán kính  $R_2=9$ .

$$\text{Cần có } \begin{cases} I_1I_2 = |R_1 - R_2| \\ I_1I_2 = R_1 + R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m-3| = 6 \\ |m-3| = 12 \end{cases} \Rightarrow m \in \{9; -9\}.$$

Vậy tổng là  $9 + (-9) = 0$ .

**Câu 9.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in [10;100]$  để tồn tại số phức  $z$  đồng thời thỏa mãn  $|z-2-4i| = |\bar{z}+2i|$  và  $|z-2+i|^2 + |\bar{z}+3i|^2 = m$ ?

A. 68.

B. 78.

C. 86.

**D. 87.**

**Lời giải**

**Chọn D**

Gọi  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ).

Ta có:  $|z-2-4i| = |\bar{z}+2i| \Leftrightarrow |x-2+(y-4)i| = |x+(2-y)i|$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-4)^2 = x^2 + (2-y)^2 \Leftrightarrow x+y=4.$$

Mặt khác  $|z-2+i|^2 + |\bar{z}+3i|^2 = m \Leftrightarrow |x-2+(y+1)i|^2 + |x+(3-y)i|^2 = m$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 + x^2 + (3-y)^2 = m$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + x^2 + 9 - 6y + y^2 = m$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 - 2x - 2y + 7) = m$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) = m + 2 \quad (\text{do } x+y=4)$$

Để tồn tại số phức  $z$  thỏa mãn yêu cầu  $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ 2(x^2+y^2)=m+2 \end{cases}$  có nghiệm thực

$$\Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) = m + 2 \geq (x+y)^2 = 16 \Leftrightarrow m \geq 14.$$

Vì  $m \in \mathbb{Z} \& m \in [10;100] \Rightarrow m \in \{14;15;\dots;100\}$ .

Vậy có 87 giá trị  $m$  nguyên thỏa mãn.

**Câu 10.** Có bao nhiêu số phức  $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{Z})$  thỏa mãn:  $|\bar{z}-2-3i| \leq |z+i-2| \leq 3$

**A. 11.**

B. 5.

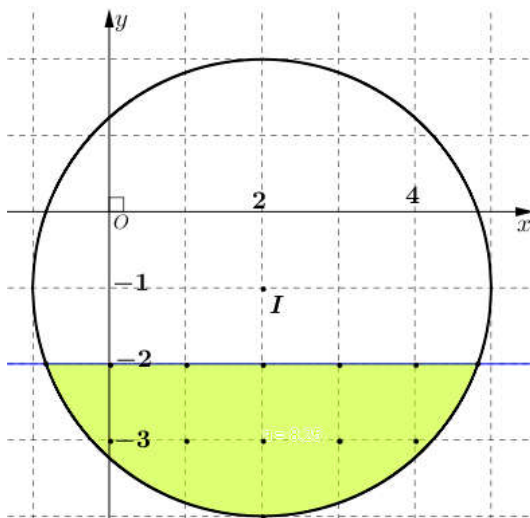
C. 10.

D. 9.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$|\bar{z} - 2 - 3i| \leq |z + i - 2| \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} |\bar{z} - 2 - 3i| \leq |z + i - 2| \\ |z + i - 2| \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 2 \leq 0 \\ (x - 2)^2 + (y + 1)^2 \leq 9 \end{cases}$$



Dựa vào miền phẳng giới hạn bởi hệ có 11 số phức thỏa mãn

**Câu 11.** Có bao nhiêu số phức  $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{Z})$  thỏa mãn  $2|z - i| \leq |z - \bar{z} - 3i|$  và  $z - \bar{z}$  có phần ảo không âm?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

**D. 4.**

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Ta có: } 2|z - i| \leq |z - \bar{z} - 3i| \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \leq \sqrt{(2y - 3)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4[x^2 + (y - 1)^2] \leq (2y - 3)^2$$

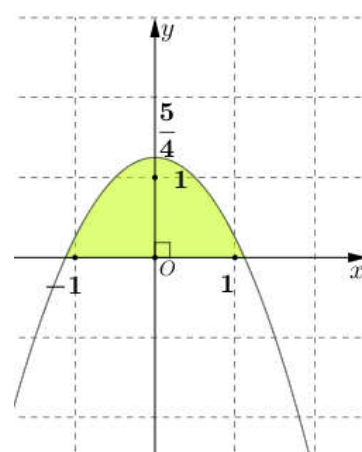
$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 - 8y + 4 \leq 4y^2 - 12y + 9.$$

$$\Leftrightarrow 4y \leq -4x^2 + 5 \Leftrightarrow y \leq -x^2 + \frac{5}{4} \quad (1)$$

$$\text{Số phức } z - \bar{z} = 2yi \text{ có phần ảo không âm} \Leftrightarrow y \geq 0 \quad (2).$$

$$\text{Từ (1), (2) ta có hệ } \begin{cases} y \leq -x^2 + \frac{5}{4} \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Dựa vào miền phẳng giới hạn bởi hệ có 4 số phức thỏa mãn.



**Câu 43**

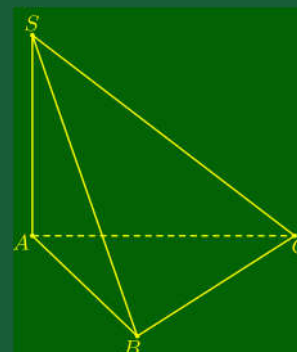
Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $a$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa  $SA$  và mặt phẳng  $(SBC)$  bằng  $45^\circ$  (tham khảo hình vẽ). Thể tích của khối chóp  $S.ABC$  bằng

A.  $\frac{a^3}{8}$ .

B.  $\frac{3a^3}{8}$ .

C.  $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$ .

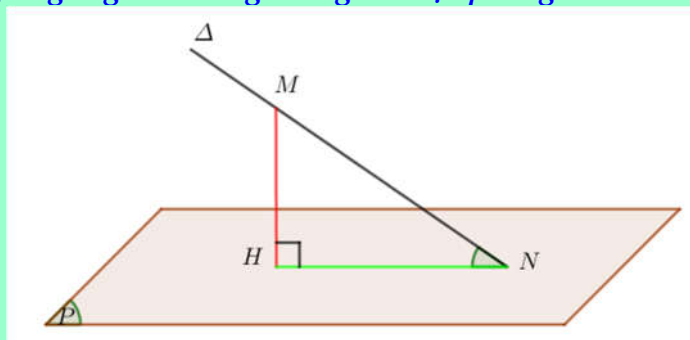
D.  $\frac{a^3}{4}$ .



**Phân tích định hướng tìm lời giải:**

Bài toán trên là bài toán về tính thể tích khối chóp liên quan góc giữa một đường thẳng và mặt phẳng. Thông thường đề bài hay cho góc giữa một cạnh bên và mặt đáy của hình chóp liên quan đến chân đường cao của hình chóp, tức hình chiếu của đường thẳng lên mặt phẳng tương đối dễ xác định, thì dạng bài này để lại cho góc giữa một đường thẳng và mặt phẳng mà tương đối khó xác định hình chiếu của đường lên mặt hơn. Khi xác định được góc giữa đường thẳng và mặt phẳng suy ra độ dài đường cao, từ đó tính thể tích khối chóp. Để làm tốt được bài tập dạng này các em cần nắm chắc phương pháp xác định góc giữa đường thẳng và mặt phẳng sau đây.

**Phương pháp xác định góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:**

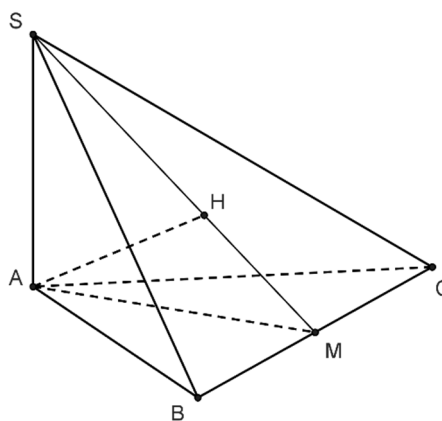


- **Bước 1:** Xác định giao điểm  $N = \Delta \cap (P) \rightarrow$  Giao điểm tại đâu đỉnh của góc tại đó.
- **Bước 2:** Lấy điểm  $M \in \Delta$  sao cho  $M \neq N$ , sau đó hạ  $MH$  vuông góc mặt phẳng  $(P)$  tại  $H$ . (Bước này là bước khó xác định nhất khi làm bài).

**Bước 3:** Nối  $H$  với  $N$  suy ra  $(\Delta; (P)) = \widehat{MNH} = \alpha$ .

**Lời giải**

**Chọn A**



Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Ta có  $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow (SBC) \perp (SAM)$

Dựng  $AH$  vuông góc với  $SM$ . Do  $(SBC) \perp (SAM) \Rightarrow AH \perp (SBC)$ .

Góc giữa  $SA$  và mặt phẳng  $(SBC)$  là góc  $\widehat{ASH}$  hay  $\widehat{ASM}$

Theo giả thiết ta có  $\widehat{ASM} = 45^\circ$  vì vậy tam giác  $SAM$  vuông cân tại  $A$ .

Ta có  $SA = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

$$\text{Thể tích khối chóp } S.ABC \text{ bằng } V = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{8}.$$

**Bình luận:**

- Bài toán trên ở mức vận dụng (mức 3), kết hợp hai đơn vị kiến thức là xác định góc giữa đường với mặt (yếu tố then chốt) và tính thể tích khối chóp. Học sinh cần nắm rõ và vận dụng được chương góc – khoảng cách trong chương trình lớp 11 để có thể giải quyết được dạng toán này.

**Hướng phát triển:**

**Hướng 1:** Xây dựng bài toán tính góc giữa một cạnh bên với một mặt bên chứa đường cao.

**Hướng 2:** Xây dựng các bài toán tính góc giữa một cạnh đáy và một mặt bên không chứa đường cao.

**Bài tập tương tự**

**Câu 1:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a$ . Cạnh bên  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy, cạnh bên  $SC$  tạo với mặt phẳng  $(SAB)$  một góc  $30^\circ$ . Thể tích của khối chóp đó bằng

A.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ .

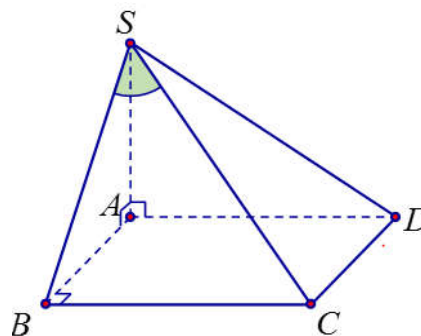
B.  $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$ .

C.  $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ .

**D.  $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ .**

**Lời giải**

**Chọn D**



Ta có:  $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow SB \text{ là hình chiếu của } SC \text{ lên mặt phẳng } (SAB).$

$$\Rightarrow \widehat{(SC, (SAB))} = \widehat{(SC, SB)} = \widehat{CSB} = 30^\circ.$$

Xét tam giác  $SBC$  vuông tại  $B$  có  $SB = BC \cdot \cot 30^\circ = a\sqrt{3}$ .

Xét tam giác  $SAB$  vuông tại  $A$  có  $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - a^2} = a\sqrt{2}$ .

$$\text{Mà } S_{ABCD} = AB \cdot BC = a^2. \text{ Vậy } V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

## NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM

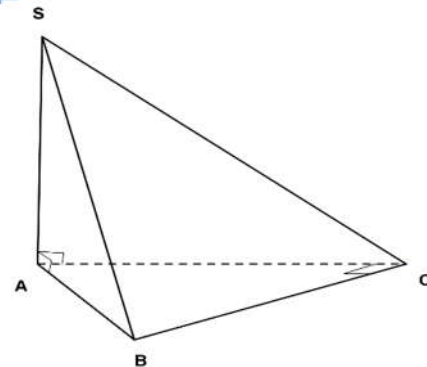
**Câu 2:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác vuông cân đỉnh  $C$ ,  $AB = 2a$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa  $SC$  và mặt phẳng  $(SAB)$  bằng  $30^\circ$  (tham khảo hình vẽ). Thể tích của khối chóp  $S.ABC$  bằng

A.  $\frac{a^3}{3}$ .

B.  $\frac{\sqrt{2}.a^3}{3}$ .

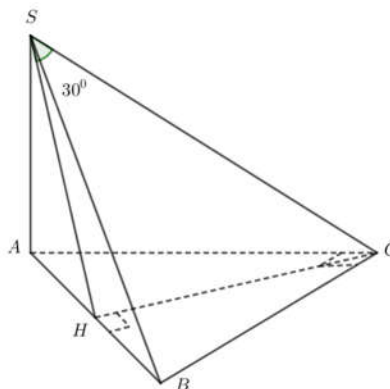
C.  $\frac{\sqrt{6}.a^3}{3}$ .

D.  $\sqrt{6}.a^3$ .



Lời giải

**Chọn B**



Gọi  $H$  là trung điểm  $AB \Rightarrow AH = BH = a$ . Khi đó  $CH \perp AB$  (do  $\triangle ABC$  cân tại  $C$ )

Ta có:

$$\begin{cases} CH \perp AB \\ CH \perp SA \\ AB \cap SA = A \\ AB, SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow CH \perp (SAB)$$

hay  $SH$  là hình chiếu vuông góc của  $SC$  lên mặt phẳng  $(SAB)$ .

Suy ra  $(\widehat{SC, (SAB)}) = \widehat{CSH} = 30^\circ$ .

Tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$  nên ta có:

$$CH = \frac{AB}{2} = \frac{2a}{2} = a \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} CH \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a = a^2$$

Tam giác  $SHC$  vuông tại  $H$  nên ta có:  $SH = CH \cdot \cot 30^\circ = a\sqrt{3}$ .

Tam giác  $SAH$  vuông tại  $A$  nên ta có:  $SA = \sqrt{SH^2 - AH^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - a^2} = a\sqrt{2}$ .

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

**Câu 3:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $AC = a$ ,  $BC = 2a$ ,  $\widehat{ACB} = 120^\circ$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy. Đường thẳng  $SC$  tạo với mặt phẳng  $(SAB)$  góc  $30^\circ$ . Tính thể tích của khối chóp  $S.ABC$

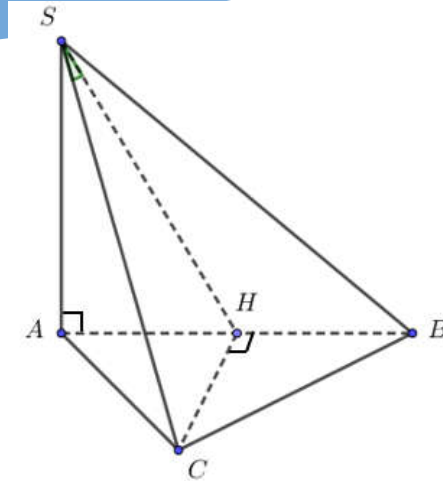
A.  $\frac{a^3\sqrt{105}}{7}$ .

B.  $\frac{a^3\sqrt{105}}{28}$ .

C.  $\frac{a^3\sqrt{105}}{21}$ .

D.  $\frac{a^3\sqrt{105}}{42}$ .

Chọn D



$$\text{Ta } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Xét tam giác } \triangle ABC \text{ ta có } AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \widehat{ACB} = 7a^2$$

Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $C$  lên  $AB$  khi đó do đường thẳng  $SC$  tạo với mặt phẳng  $(SAB)$  góc  $30^\circ$  nên  $\widehat{CSH} = 30^\circ$ .

$$\text{Xét } \triangle ABC \text{ ta có } \frac{1}{2} \cdot CH \cdot AB = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

$$\text{Xét } \triangle SCH \text{ vuông tại } H \text{ ta có } SC = \frac{CH}{\sin 30^\circ} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}.$$

$$\text{Xét } \triangle SAC \text{ vuông tại } A \text{ ta có } SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \frac{a\sqrt{35}}{7}.$$

$$\text{Vậy } V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{35}}{7} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{105}}{42}.$$

**Câu 4:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật với  $AB = a$ ,  $BC = a\sqrt{3}$ . Cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy và đường thẳng  $SC$  tạo với mặt phẳng  $(SAB)$  một góc  $30^\circ$ . Tính thể tích  $V$  của khối chóp  $S.ABCD$  theo  $a$ .

**A.**  $V = \frac{2\sqrt{6}a^3}{3}$ .

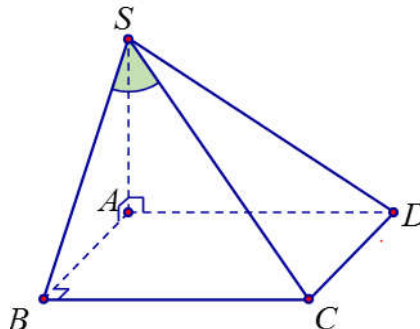
**B.**  $V = \frac{2a^3}{3}$ .

**C.**  $V = \sqrt{3}a^3$ .

**D.**  $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$ .

Lời giải

Chọn A



Ta có:  $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow SB$  là hình chiếu của  $SC$  lên mặt phẳng  $(SAB)$ .

$$\Rightarrow \widehat{(SC, (SAB))} = \widehat{(SC, SB)} = \widehat{CSB} = 30^\circ.$$

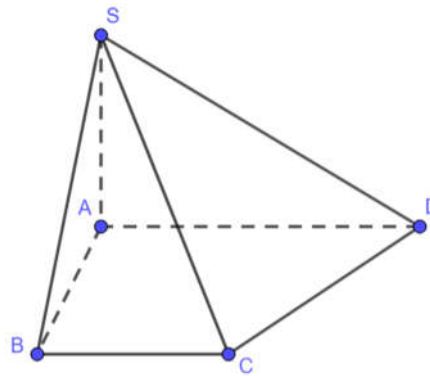
Xét tam giác  $SBC$  vuông tại  $B$  có  $\tan 30^\circ = \frac{BC}{SB} \Rightarrow SB = 3a$ .

Xét tam giác  $SAB$  vuông tại  $A$  có  $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = 2a\sqrt{2}$ .

Mà  $S_{ABCD} = AB \cdot BC = a^2\sqrt{3}$ .

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{2a^3\sqrt{6}}{3}.$$

**Câu 5:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang vuông tại  $A$  và  $B$ .  $AB = BC = a$ ,  $AD = 2a$ ; cạnh bên  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$  (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng  $SC$  và mặt phẳng  $(SAD)$  bằng  $30^\circ$ . Tính thể tích khối chóp  $S.ABCD$ .



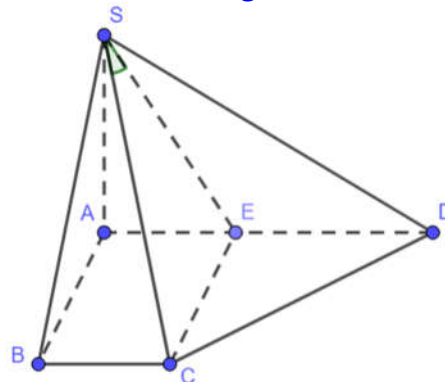
A.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ .

B.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ .

C.  $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ .

**D.  $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ .**

. **Lời giải**



**Chọn D**

Gọi  $E$  là trung điểm của  $AD$  thì ta dễ dàng chứng minh  $ABCE$  là hình vuông

$$\Rightarrow CE = AB = a$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} CE \perp AD \\ CE \perp SA \end{cases} \Rightarrow CE \perp (SAD) \Rightarrow \widehat{(SC, (SAD))} = \widehat{CSE} = 30^\circ.$$

$$\text{Diện tích mặt đáy là: } S_{ABCD} = \frac{(AD + BC) \cdot AB}{2} = \frac{(2a + a) \cdot a}{2} = \frac{3a^2}{2}.$$

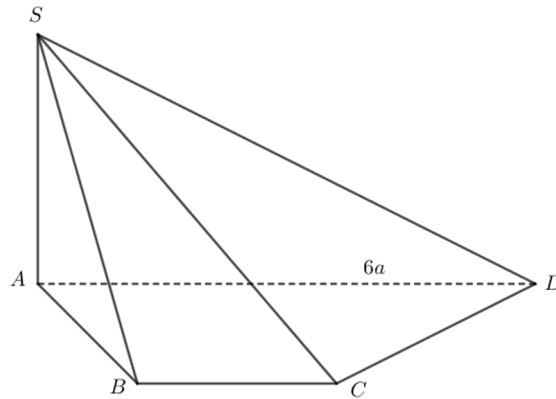
$$\text{Tam giác } SCE \text{ vuông tại } E \text{ nên ta có: } SE = CE \cdot \cot 30^\circ = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Tam giác } SAE \text{ vuông tại } A \text{ nên ta có: } SA = \sqrt{SE^2 - AE^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - a^2} = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{3a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}.$$



**Câu 6:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là nửa lục giác đều với đáy lớn  $AD = 6a$ .  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết góc giữa  $SD$  và mặt phẳng  $(SAB)$  bằng  $45^\circ$ . Thể tích khối chóp  $S.ABCD$  bằng



A.  $\frac{27a^3\sqrt{6}}{4}$ .

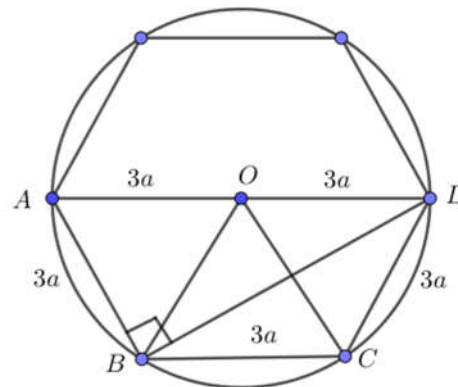
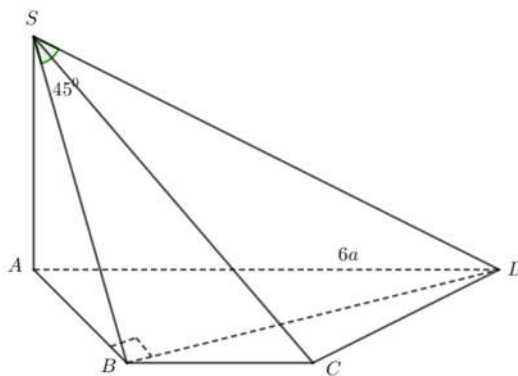
B.  $\frac{9a^3\sqrt{3}}{4}$ .

C.  $\frac{27a^3\sqrt{2}}{4}$ .

D.  $\frac{9a^3\sqrt{2}}{4}$ .

Lời giải

**Chọn A**



Do đáy  $ABCD$  là nửa lục giác đều nên  $\widehat{ABD} = 90^\circ$  (góc chắn nửa đường tròn).

Ta có:  $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AB \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAB)$ . Suy ra  $SB$  là hình chiếu vuông góc của  $SD$  lên mặt phẳng  $(SAB)$  nên  $(SD, (SAB)) = \widehat{DSB} = 45^\circ$ .

Diện tích mặt đáy là:  $S_{ABCD} = 3 \cdot S_{\triangle OAB} = 3 \cdot (3a)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{27a^2\sqrt{3}}{4}$ .

Tam giác  $ABD$  vuông tại  $B$  nên ta có:  $BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = \sqrt{(6a)^2 - (3a)^2} = 3a\sqrt{3}$ .

Tam giác  $SBD$  vuông cân tại  $B$  nên ta có:  $SB = BD = 3a\sqrt{3}$ .

Tam giác  $SAB$  vuông tại  $A$  nên ta có:  $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{(3a\sqrt{3})^2 - (3a)^2} = 3a\sqrt{2}$ .

Vậy  $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 3a\sqrt{2} \cdot \frac{27a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{27a^3\sqrt{6}}{4}$

**Câu 7:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a$ ,  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết góc giữa  $AC$  và mặt phẳng  $(SCD)$  bằng  $30^\circ$ . Thể tích khối chóp  $S.ABCD$  bằng

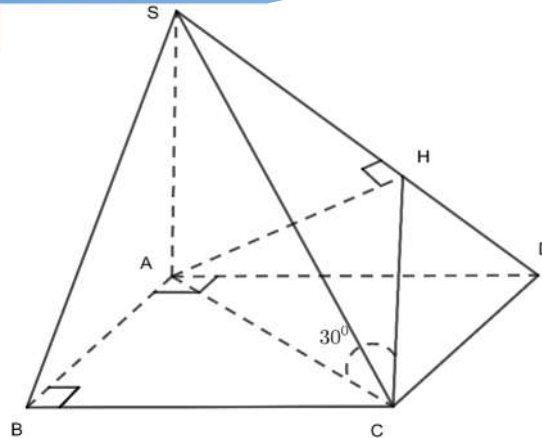
A.  $\frac{a^3}{3}$ .

B.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ .

C.  $a^3\sqrt{3}$ .

D.  $a^3$ .

Chọn A



Gọi  $H$  là hình chiếu của  $A$  trên cạnh  $SD$ .

Ta có  $\begin{cases} CD \perp AD \text{ (} ABCD \text{ là h.vuông)} \\ CD \perp SA \text{ (} SA \perp (ABCD) \text{)} \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$ .

Do đó  $\begin{cases} AH \perp CD \\ AH \perp SD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD)$ . Vậy hình chiếu vuông góc của  $AC$  trên mặt phẳng

$(SCD)$  là  $HC$ . Suy ra góc giữa  $AC$  và  $(SCD)$  là  $\widehat{ACH}$ . Theo giả thiết ta có  $\widehat{ACH} = 30^\circ$ .

Vì  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$  nên  $AC = a\sqrt{2}$ .

Xét tam giác  $AHC$  vuông tại  $H$  (vì  $AH \perp (SCD)$ ) có:

$$\sin \widehat{ACH} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = AC \cdot \sin \widehat{ACH} = a\sqrt{2} \cdot \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Xét tam giác  $SAD$  vuông tại  $A$  có chiều cao  $AH$  nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AD^2} = \frac{2}{a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow SA = a.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot a^2 = \frac{a^3}{3}.$$

**Câu 8:** [THI-THU-SỞ HÒA BÌNH-2020-2021] Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a$ . Hình chiếu vuông góc của  $S$  lên mặt phẳng  $(ABCD)$  trùng với trung điểm của cạnh  $AB$ . Góc giữa  $SC$  và  $(SAB)$  bằng  $30^\circ$ . Thể tích của khối chóp  $S.ABCD$  bằng

A.  $\frac{a^3\sqrt{11}}{2}$ .

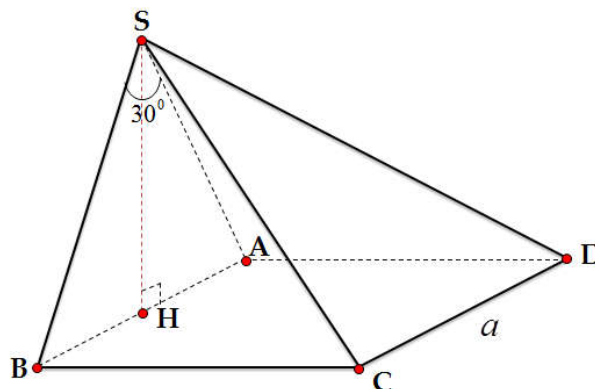
B.  $\frac{a^3\sqrt{11}}{4}$ .

C.  $\frac{a^3\sqrt{11}}{3}$ .

**D.  $\frac{a^3\sqrt{11}}{6}$ .**

Lời giải

Chọn D



Gọi  $H$  là trung điểm của  $AB$ . Từ giả thiết suy ra  $SH \perp (ABCD)$ .

Ta có:  $\left. \begin{array}{l} CB \perp BA \\ CB \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABCD)) \end{array} \right\} \Rightarrow CB \perp (SAB) \Rightarrow SB$  là hình chiếu của  $SC$  trên

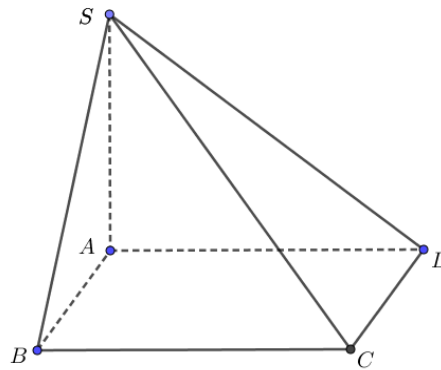
$(SAB)$ . Suy ra  $\widehat{(SC, (SAB))} = \widehat{(SC, SB)} = \widehat{BSC} = 30^\circ$ .

Trong tam giác vuông  $SBC$  có:  $\tan 30^\circ = \frac{BC}{SB} \Rightarrow SB = \frac{BC}{\tan 30^\circ} = a\sqrt{3}$ .

Trong tam giác vuông  $SBH$  có:  $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{11}}{2}$ .

Thể tích của khối chóp  $S.ABCD$ :  $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{11}}{2} = \frac{a^3\sqrt{11}}{6}$ .

**Câu 9:** [Sở-GDĐT-Thái-Nguyên-L2-NH-2020-2021] Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $a$ ,  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa  $SA$  và mặt phẳng  $(SCD)$  bằng  $45^\circ$  (tham khảo hình vẽ). Thể tích của khối chóp  $S.ABCD$  bằng



A.  $\frac{a^3}{8}$ .

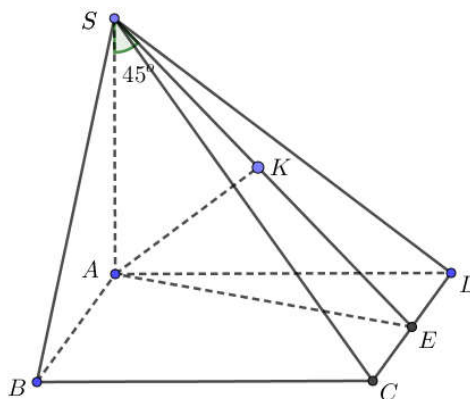
B.  $\frac{3a^3}{4}$ .

C.  $\frac{a^3}{4}$ .

D.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ .

Lời giải

Chọn C



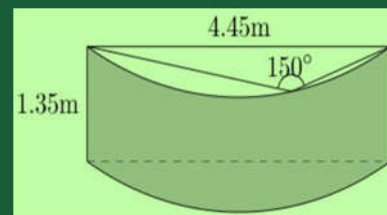
Ta có tam giác  $ACD$  đều cạnh  $a$ . Gọi  $E$  là trung điểm  $CD$ .

Kẻ  $AK \perp SE$ . Do  $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AE \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAE) \Rightarrow \begin{cases} AK \perp CD \\ AK \perp SE \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow 45^\circ = \widehat{ASK}$ .

$\Rightarrow SA = AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Vậy  $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{4}$ .

**Câu 44**

Ông Bình làm lan can ban công ngôi nhà của mình bằng một tấm kính cường lực. Tấm kính đó là một phần của mặt xung quanh của một hình trụ như hình bên. Biết giá tiền của  $1\text{m}^2$  kính như trên là 1.500.000 đồng. Hỏi số tiền (làm tròn đến hàng nghìn) mà ông Bình mua tấm kính trên là bao nhiêu?



- A. 23.591.000 đồng.                      B. 36.173.000 đồng.  
C. 9.437.000 đồng.                      D. 4.718.000 đồng.

Facebook: Huỳnh Văn Ánh – Phong Do

**Phân tích và định hướng tìm lời giải:**

- Đây là tình huống liên quan đến kiến thức mà các em đã được học về vấn đề diện tích của mặt tròn xoay;

- Để giải quyết được tình huống trên các em phải thực hiện thông qua các bước sau:

**Bước 1.** Xác định yêu cầu của bài toán thực tiễn;

**Bước 2.** Tổ chức cho học sinh phân tích và làm rõ các “cụm từ” có nghĩa trong bài toán thực tiễn trong mô hình Toán học;

**Bước 3.** Đề xuất giải pháp giải quyết bài toán thực tiễn (trong mô hình Toán học);

**Bước 4.** Thực hiện giải pháp (trong mô hình Toán học);

**Bước 5.** Chuyển kết quả trong mô hình toán học sang lời giải của bài toán thực tiễn.

**Lời giải**

**Chọn C**

Bán kính của đường tròn đáy là  $R = \frac{4,45}{2 \sin 150^\circ} = 4,45\text{m}$ .

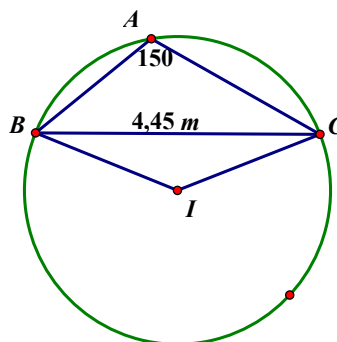
Vì đây cung bằng bán kính nên mép trên của tấm kính là cung tròn có số đo  $60^\circ$  của đường tròn đáy.

Do đó diện tích tấm kính bằng  $\frac{1}{6}$  diện tích xung quanh của hình trụ có chiều cao 1,35m và bán kính đáy  $R = 4,45\text{m}$ .

Số tiền mà ông Bình mua tấm kính trên là

$$T = \frac{1}{6} \cdot 2\pi R h \cdot 1500000 = \frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot 4,45 \cdot 1,35 \cdot 1500000 \approx 9437000 \text{ đồng.}$$

**Cách 2:**



Gọi đường tròn tâm  $I$  bán kính  $R$  (như hình vẽ). Ta sẽ tính độ dài cung nhỏ  $BC$ .

Áp dụng định lý sin trong tam giác  $ABC$  ta có  $R = \frac{BC}{2 \sin 150^\circ} = \frac{89}{20}$ .

Trong tam giác  $IBC$  có  $\cos \hat{I} = \frac{IB^2 + IC^2 - BC^2}{2IB \cdot IC} = \frac{R^2 + R^2 - BC^2}{2R^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{I} = \frac{\pi}{3}$ .

Độ dài cung nhỏ  $BC$  là  $l = \frac{\pi}{3} \cdot R = \frac{89}{60} \pi (m)$ .

Diện tích phần kính là  $l \cdot 1,35 = \frac{801}{400} \pi$ .

Số tiền mua tấm kính là  $\frac{801}{400} \pi \cdot 1.500.000 = 9436558,933$ .

**Bình luận:**

- Đây là một tình huống xảy ra trong thực tiễn, để giải quyết tình huống này đòi hỏi các em phải có năng lực mô hình hóa toán học. Nghĩa là, các em phải lựa chọn mô hình toán đã học phù hợp với tình huống thực tiễn để phát biểu tình huống xảy ra thành bài toán trong mô hình toán học; giải quyết bài toán toán học. Từ đó, chuyển kết quả trong mô hình toán học sang lời giải bài toán thực tiễn. Đây là bài toán kiểm tra mức độ VDC

**Hướng phát triển bài toán**

**Hướng 1.** Sử dụng mô hình toán học các kiến thức liên quan đến mặt trụ, mặt cầu;

**Hướng 2.** Sử dụng mô hình toán học các kiến thức liên quan đến khối trụ, khối chóp;

**Bài tập tương tự**

**Câu 1:** Ông A được nhà nước cho thuê 100 ha đất trồng rừng Thông với thời gian 10 năm thu hoạch. Biết sau 10 năm cây trưởng thành với chiều cao khoảng 15 m và khi thu hoạch thì với mỗi cây Thông đạt chuẩn thu hoạch được 1 khối gỗ loại I hình trụ có chiều cao 5 m chu vi vòng tròn thân 2 m và được 1 khối gỗ loại II hình trụ có chiều cao 4 m chu vi vòng tròn thân 1,4 m. Với mỗi 1 m<sup>3</sup> gỗ thu hoạch loại I, loại II lần lượt tương ứng được 150 và 100 ngàn đồng. Biết 1 ha trung bình có 100 cây thu hoạch. Hỏi sau khi thu hoạch ông A lãi với số tiền gần bằng:

- A. 2.500.000.000.      B. 3.000.000.000.      C. 3.500.000.000.      D. 4.000.000.000

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi  $R_1, R_2$  lần lượt là bán kính khối gỗ loại I và loại II

Ta có:  $\begin{cases} 2\pi R_1 = 2 \\ 2\pi R_2 = 1,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_1 = \frac{1}{\pi} \\ R_2 = \frac{0,7}{\pi} \end{cases}$

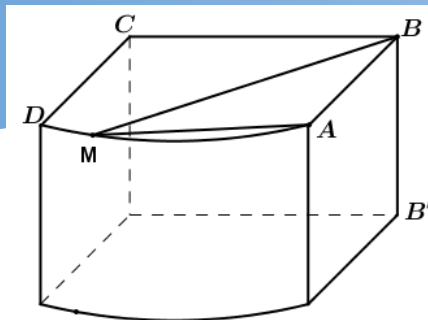
Vậy mỗi cây thu hoạch được  $V_1 = \pi R_1^2 \cdot 5 = \frac{5}{\pi} (m^3)$  gỗ loại I và

$V_2 = \pi R_2^2 \cdot 4 = \frac{(0,7)^2 \cdot 4}{\pi} (m^3)$  gỗ loại II

Vậy: tổng số tiền thu sau thu hoạch là:

$T = V_1 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 150000 + V_2 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 100000 \approx 3011211600$ .

**Câu 2:** Một cơ sở sản xuất bể cá không nắp với chiều cao  $BB'$  bằng cạnh bên  $BA$  bằng 0,7 m như hình vẽ. Biết 3 mặt xung quanh và mặt đáy được được đúc bằng nhựa cao cấp với chi phí 100000 / m<sup>2</sup>, mặt cong phía trước dùng chất liệu kính dẻo cao cấp với giá 200000 / m<sup>2</sup>. Với thiết kế sao cho cung  $DM$  là một phần của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật  $ABCD$  và  $M$  thuộc cung  $AD$ ,  $\widehat{AMB} = 30^\circ$ . Hỏi cơ sở sản xuất được tối đa bao nhiêu bể cá với số tiền 200000000 đồng



A. 620.

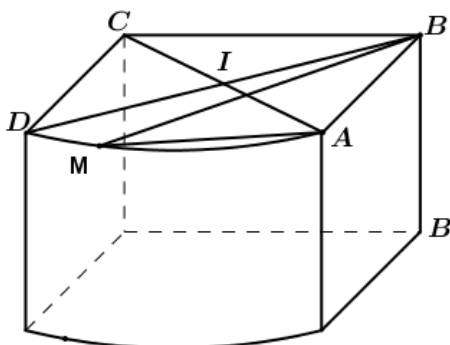
**B. 624.**

C. 628.

D. 608

Lời giải

**Chọn B**



Ta có:  $\widehat{AMB} = 30^\circ = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{DCA} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{DIA} = 120^\circ$

Xét  $\triangle BAM$  ta có:  $\frac{AB}{\sin M} = 2R \Rightarrow R = AB = 0,7 \Rightarrow BC = AB\sqrt{3} = (0,7) \cdot \sqrt{3}$

Diện tích mặt đáy:  $S_d = \frac{\pi}{3} R^2 + \frac{3}{4} S_{ABCD} = \frac{\pi}{3} (0,7)^2 + \frac{3}{4} (0,7)^2 \sqrt{3}$

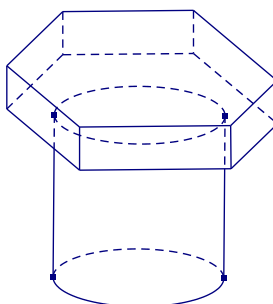
Diện tích phần nhưa là  $S_1 = 2 \cdot (0,7)^2 + (0,7)^2 \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} (0,7)^2 + \frac{3}{4} (0,7)^2 \sqrt{3}$

Diện tích phần kính  $S_2 = \frac{2\pi}{3} R \cdot h = \frac{2\pi}{3} \cdot (0,7)^2$

Vậy tổng số tiền cho một sản phẩm là  $T = S_1 \cdot 100000 + S_2 \cdot 200000 \approx 320216$

Vậy với số tiền 200000000 thì cơ sở sản xuất tối đa được  $\frac{200000000}{320216} \approx 624$  cái.

**Câu 3:** [THPT-THỊ-XÃ-QUẢNG-TRỊ-2021] Để chế tạo ra một cái đỉnh ốc, người ta đúc một vật bằng thép có dạng như hình vẽ bên. Trong đó, phần phía trên có dạng là một hình lăng trụ lục giác đều có chiều cao bằng  $3cm$  và độ dài cạnh đáy bằng  $4cm$ ; phần phía dưới có dạng một hình trụ có trục trùng với trục của lăng trụ đều phía trên, chiều cao bằng  $12cm$  và chu vi đường tròn đáy bằng một nửa chu vi đáy của lăng trụ. Biết mỗi  $m^3$  thép có giá là  $m$  triệu đồng. Khi đó, giá nguyên liệu để làm một vật như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?



**A. 262,2m** đồng.

B. 537,2m đồng.

C. 26,22m đồng.

D. 53,72m đồng.

**Chọn A**

Gọi  $V, V_1, V_2$  lần lượt là thể tích của vật thể, thể tích của hình lăng trụ phía trên và thể tích hình trụ phía dưới. Ta có:  $V_1 = h_{LT} \cdot S = 3.6 \cdot \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} = 72\sqrt{3} (cm^3)$ .

Chu vi lục giác đều là:  $6.4 = 24cm$ .

Suy ra chu vi của đường tròn đáy là  $C = 12cm = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{6}{\pi}$  ( $R$  bán kính đường tròn đáy).

Do đó:  $V_2 = \pi R^2 \cdot h_T = \pi \left(\frac{6}{\pi}\right)^2 \cdot 12 = \frac{432}{\pi} (cm^3)$ .

Khi đó:  $V = V_1 + V_2 = 72\sqrt{3} + \frac{432}{\pi} (cm^3)$ .

Giá nguyên liệu để làm vật thể là:  $T = V \cdot m = \left(72\sqrt{3} + \frac{432}{\pi}\right)m \approx 262,2m$  đồng.

**Câu 4:** **[ĐỀ-THI-CHINH-PHỤC-MÔN-TOÁN-VTV7-LẦN-1-2021]** Để chuẩn bị cổ vũ cho đội tuyển Việt Nam tham dự vòng loại thứ ba World Cup 2022. Một hội cổ động viên dự định trang trí 1000 chiếc nón là với cách sơn như sau: Tính theo độ dài đường sinh của chiếc nón lá là 40cm, kể từ đỉnh nón cứ 8cm thì sơn màu đỏ, màu vàng xen kẽ nhau như hình minh họa, sau đó dán 20 ngôi sao vàng vào mỗi chiếc nón.



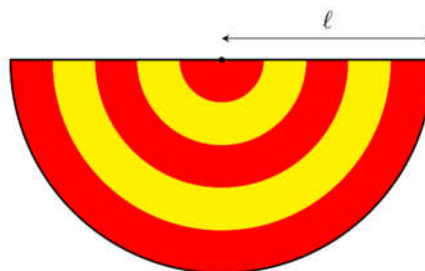
Biết rằng đường kính của đường tròn đáy nón 40 cm, mỗi ngôi sao vàng giá 200 đồng, sơn màu vàng giá 5000 đồng/ $m^2$ , sơn màu đỏ giá 4000 đồng/ $m^2$ . Hỏi giá thành để trang trí 1000 chiếc nón lá đó gần với số tiền nào sau đây?

**A.** 5105840 đồng. **B.** 5105841 đồng. **C.** 5156106 đồng. **D.** 5156107 đồng.

**Lời giải**

**Chọn B**

Hình nón đã cho có độ dài đường sinh là  $\ell = 0,4$  m và bán kính đường tròn đáy là  $r = 0,2$  m. Khi đó cắt hình nón theo một đường sinh rồi trải phẳng, ta được một hình quạt có bán kính  $\ell$  và độ dài cung tròn tương ứng là  $2\pi r = \pi \ell$ , hay ta được một nửa hình tròn bán kính  $\ell$ .





Khi đó, trên bán kính của nửa hình tròn, mỗi dải màu có độ dài  $\frac{\ell}{5}$ . Suy ra tổng diện tích

phần màu vàng là:  $\frac{1}{2}\pi\ell^2\left[\left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2\right] = \frac{\pi\ell^2}{5}$ .

Tổng diện tích phần màu đỏ là:  $\frac{1}{2}\pi\ell^2\left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2\right] = \frac{3\pi\ell^2}{10}$ .

Vậy tổng số tiền trang trí 1000 chiếc nón là

$$1000\left(5000 \cdot \frac{\pi\ell^2}{5} + 4000 \cdot \frac{3\pi\ell^2}{10} + 20 \cdot 200\right) \approx 5105841 \text{ đồng.}$$

**Câu 45**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$  và hai đường thẳng  $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$ ,  $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$ . Đường thẳng vuông góc với  $(P)$ , đồng thời cắt cả  $d_1$  và  $d_2$  có phương trình là

A.  $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-1}$ .

B.  $\frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-2}$ .

C.  $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{-1}$ .

D.  $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$ .

Facebook: Nguyễn Khắc Thành – Nguyễn Văn Viễn – Uyên Hoang

**Phân tích và định hướng tìm lời giải:**

- Đây là bài toán lập phương trình đường thẳng thỏa mãn điều kiện cho trước.
- Để lập phương trình đường thẳng chúng ta cần xác định một điểm nó đi qua và một vectơ chỉ phương. Để xác định hai yếu tố trên chúng ta thực hiện thông qua các bước sau:

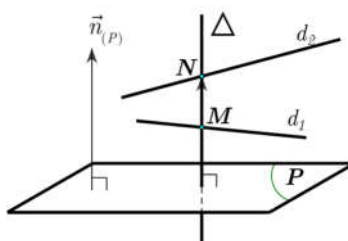
**Bước 1:** Giả sử  $\Delta$  cắt  $d_1$ ,  $d_2$  lần lượt tại  $M$  và  $N$ . Khi đó tọa độ của các điểm  $M$  và  $N$  theo thứ tự thỏa mãn phương trình tham số của  $d_1$  và  $d_2$ .

**Bước 2:** Đường thẳng  $\Delta \perp (P)$  dẫn đến VTCP của  $\Delta$  và VTPT của  $(P)$  cùng phương. Dựa vào điều kiện cùng phương của hai vectơ ta tìm được tọa độ các điểm  $M, N$ .

**Bước 3:** Đường thẳng  $\Delta$  đi qua hai điểm  $M$  và  $N$ .

**Lời giải**

**Chọn A**



Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là giao điểm của  $\Delta$  với  $d_1$  và  $d_2$ .

Vì  $M \in d_1 \Rightarrow M(2m+1; m; -2m-1)$  và  $N \in d_2 \Rightarrow N(n+2; 2n; -n-1)$ .



Ta có  $\overrightarrow{MN} = (n-2m+1; 2n-m; -n+2m)$ .

Vì  $\Delta \perp (P)$  nên  $\overrightarrow{MN}$  cùng phương với  $\vec{n}_{(P)} = (2; 2; -1)$ .

$$\text{Do đó } \frac{n-2m+1}{2} = \frac{2n-m}{2} = \frac{-n+2m}{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} m+n=1 \\ 2m-n=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ n=1 \end{cases}.$$

Đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $M(1;0;-1)$ ,  $N(3;2;-2)$  và có vectơ chỉ phương là  $\overrightarrow{MN} = (2;2;-1)$  nên

$$\text{có phương trình là } \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-1}.$$

#### Bình luận:

- Đây là câu hỏi ở mức độ **vận dụng** nội dung xoay quanh các kiến thức về điểm, đường thẳng, mặt phẳng.

- Để giải tốt được các câu hỏi về dạng này người học cần nắm vững được các kiến thức liên quan đến hệ tọa độ trong không gian như : Tọa độ của điểm, tọa độ của véc tơ, các véc tơ cùng phương, vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng, vị trí tương đối giữa hai đường thẳng. Ngoài ra người học cần có được các kỹ năng như : Kỹ năng tham số hóa tọa độ của một điểm khi biết điểm đó thuộc đường thẳng có phương trình tham số (hoặc chính tắc) cho trước ; kỹ năng sử dụng các phép toán cơ bản của véc tơ ; kỹ năng sử dụng các công thức liên quan đến khoảng cách ; ...

- Người học cần nắm vững được cách giải các dạng toán cơ bản như : Viết phương trình đường thẳng **đi qua một điểm** đồng thời cắt hai đường thẳng phân biệt cho trước ; viết phương trình đường thẳng **song song với một đường thẳng cho trước** đồng thời cắt hai đường thẳng phân biệt cho trước ; viết phương trình đường thẳng **đi qua một điểm** đồng thời vuông góc với hai đường thẳng phân biệt cho trước ; ...

#### Hướng phát triển:

**Hướng 1:** Viết phương trình đường thẳng **song song với một đường thẳng cho trước** đồng thời cắt hai đường thẳng phân biệt cho trước.

**Hướng 2:** Viết phương trình đường thẳng **vuông góc với một đường thẳng cho trước** đồng thời cắt hai đường thẳng phân biệt cho trước

**Hướng 3:** Viết phương trình đường thẳng **đi qua 1 điểm** đồng thời cắt hai đường thẳng phân biệt cho trước

**Hướng 4:** Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm  $A$  đồng thời cắt  $d_1$  và vuông góc với đường thẳng  $d_2$ .

#### Bài tập tương tự

**Câu 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các đường thẳng  $d_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}$ ,  $d_2: \begin{cases} x = -1+3t \\ y = -2t \\ z = -4-t \end{cases}$ ,

$d_3: \frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{6}$ . Đường thẳng song song với  $d_3$  và cắt đồng thời  $d_1, d_2$  có phương trình là

**A.**  $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{6}$ .

**B.**  $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+4}{6}$ .

C.  $\frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{6}$ .

D.  $\frac{x-3}{-4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-6}$ .

Lời giải

**Chọn D**

Gọi  $\Delta$  là đường thẳng cần tìm.  $\Delta$  cắt  $d_1$  và  $d_2$  lần lượt tại  $A, B$

$$A(3+2a; -1+a; 2-2a), B(-1+3b; -2b; -4-b), \overrightarrow{AB} = (-4-2a+3b; 1-a-2b; -6+2a-b)$$

$$d_3 \text{ có VTCP là } \vec{u} = (4; -1; 6)$$

$$\Delta // d_3 \Rightarrow \frac{-4-2a+3b}{4} = \frac{1-a-2b}{-1} = \frac{-6+2a-b}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$$

Vậy  $\Delta$  đi qua  $A(3; -1; 2)$  và có VTCP  $\overrightarrow{AB} = (-4; 1; -6)$

$$\text{Phương trình } \Delta : \frac{x-3}{-4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-6}.$$

**Câu 2:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho các đường thẳng  $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$ ,  $\Delta_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ ,  $\Delta_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1}$ . Đường thẳng  $\Delta$  vuông góc với  $d$  đồng thời cắt  $\Delta_1, \Delta_2$  tương ứng tại  $A, B$  sao cho độ dài đoạn thẳng  $AB$  nhỏ nhất. Biết rằng  $\Delta$  có một vectơ chỉ phương là  $\vec{u}(a; b; 3)$ . Giá trị  $2a+3b$  bằng

A. 15.

B. -15

C. 0.

D. 9.

Lời giải

**Chọn A**

$$A(3+2a; a; 1+a), B(1+b; 2+2b; b), \overrightarrow{AB} = (-2-2a+b; 2-a+2b; -1-a+b)$$

$$d \text{ có VTCP là } \vec{u}_d = (1; 1; -2)$$

$$\Delta \perp d \Leftrightarrow \vec{u}_d \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow a = b + 2$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-6-b; b; -3) \Rightarrow AB^2 = 2b^2 + 12b + 45 = 2(b+3)^2 + 27 \geq 27$$

$$\text{Vậy } AB_{\min} = 3\sqrt{3} \text{ xảy ra khi } \begin{cases} a=-1 \\ b=-3 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-3; -3; -3)$$

$$\Delta \text{ có một VTCP là } \vec{u}(3; 3; 3). \text{ Vậy } a=b=3 \Rightarrow 2a+3b=15.$$

**Câu 3:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho các đường thẳng  $\Delta_1: \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1}$ ,  $\Delta_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}$ . Gọi  $\Delta$  là đường thẳng đi qua điểm  $A(-4; -5; 3)$  và đồng thời cắt  $\Delta_1, \Delta_2$ . Đường thẳng  $\Delta$  có một vectơ chỉ phương là

A.  $\vec{u} = (3; 2; -1)$ .

B.  $\vec{u} = (3; -2; -1)$

C.  $\vec{u} = (-3; 2; 1)$ .

D.  $\vec{u} = (3; 2; 1)$ .

Lời giải

**Chọn A**

Giả sử  $\Delta$  cắt  $\Delta_1, \Delta_2$  lần lượt tại  $M, N$ .

$$M(-1+3a; -3-2a; 2-a), N(2+2b; -1+3b; 1-5b)$$

$$\overrightarrow{MN} = (3-3a+2b; 2+2a+3b; -1+a-5b)$$

$$\overrightarrow{AM} = (3+3a; 2-2a; -1-a)$$

$$A, M, N \text{ thẳng hàng } \overrightarrow{MN} = k \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-3a+2b = k(3+3a) \\ 2+2a+3b = k(2-2a) \\ -1+a-5b = k(-1-a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ a=0 \\ b=0 \end{cases}$$

Vậy ta được:  $M(-1; -3; 2), N(2; -1; 1), \overrightarrow{MN} = (3; 2; -1)$

**Câu 4:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $A(1; 2; 3)$  và hai đường thẳng  $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}, d_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$ . Phương trình đường thẳng  $\Delta$  qua  $A$ , vuông góc với  $d_1$  và cắt  $d_2$  là

**A.**  $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{5}$ .

**B.**  $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+3}{-5}$ .

**C.**  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+5}{3}$ .

**D.**  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{5}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi  $M$  là giao điểm của  $\Delta$  với  $d_2$ . Vì  $M \in d_2$  nên  $M(1-t; 1+2t; -1+t)$ .

Ta có  $\overrightarrow{AM} = (-t; -1+2t; -4+t)$  là véc tơ chỉ phương của  $\Delta$  và  $\vec{u}_1 = (2; -1; 1)$  là véc tơ chỉ phương của  $d_1$ .

Vì  $\Delta \perp d_1$  nên  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}_1 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (-t) - 1 \cdot (-1+2t) + 1 \cdot (-4+t) = 0 \Leftrightarrow t = -1$ .

Khi đó,  $\Delta$  đi qua  $A(1; 2; 3)$  và có véc tơ chỉ phương  $\vec{u} = \overrightarrow{AM} = (1; -3; -5)$  nên có phương trình là  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$ .

Để ý rằng, điểm  $B(2; -1; -2) \in \Delta$  và  $-\vec{u} = (-1; 3; 5)$  cũng là một véc tơ chỉ phương của  $\Delta$  nên phương trình  $\Delta$  là  $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{5}$ .

**Một số hướng phát triển khác:**

**Câu 5:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 1; 1), B(2; 0; 1)$  và mặt phẳng  $(P): x + y + 2z + 2 = 0$ . Viết phương trình chính tắc của đường thẳng  $d$  đi qua  $A$ , song song với mặt phẳng  $(P)$  sao cho khoảng cách từ  $B$  đến  $d$  lớn nhất.

**A.**  $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}$ .

**B.**  $d: \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-2}$ .

**C.**  $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$ .

**D.**  $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-1}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:  $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 0)$

$(P)$  có một VTPT là  $\vec{n}(1; 1; 2)$

Gọi VTCP của  $d$  là  $\vec{u}$

Kẻ  $BH \perp d \Rightarrow \Delta ABH$  vuông tại  $H \Rightarrow BH \leq AB \Leftrightarrow d(B, d) \leq AB \Leftrightarrow d(B, d)_{\max} = AB$

Xảy ra khi  $H \equiv A \Rightarrow d \perp AB \Rightarrow \vec{u} \perp \overrightarrow{AB}$

Lại có  $d // (P) \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{n}$ . Suy ra  $\vec{u} = \frac{1}{2} \cdot [\vec{n}; \overrightarrow{AB}] = (1; 1; -1)$

Phương trình  $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$ . Suy ra, chọn C.

**Câu 6:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1;2;-3), B(-2;-2;1)$  và mặt phẳng  $(\alpha): 2x+2y-z+9=0$ . Gọi  $M$  là điểm thay đổi trên mặt phẳng  $(\alpha)$  sao cho  $M$  luôn nhìn đoạn  $AB$  dưới một góc vuông. Xác định phương trình đường thẳng  $MB$  khi  $MB$  đạt giá trị lớn nhất.

A.  $\begin{cases} x = -2 - t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

B.  $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

C.  $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

D.  $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 - t \\ z = 1 \end{cases}$

Lời giải

**Chọn C**

Nhận thấy  $B \in (\alpha)$

Ta có:  $\overrightarrow{AB} = (-3; -4; 4) \Rightarrow AB = \sqrt{41}$

Gọi  $d$  là đường thẳng qua A và  $d \perp (\alpha)$

Phương trình  $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-1}$

Gọi  $K = d \cap (\alpha) \Rightarrow K(-3; -2; -1)$

$M$  luôn nhìn đoạn  $AB$  dưới một góc vuông  $\Rightarrow M$  thuộc mặt cầu  $(S)$  đường kính  $AB$

Lại có  $M \in (\alpha) \Rightarrow M$  chạy trên đường tròn  $(C) = (S) \cap (\alpha)$

Lại có  $B \in (\alpha) \Rightarrow (C)$  có đường kính là  $BK \Rightarrow BM \leq BK$

$MB$  đạt giá trị lớn nhất khi  $M \equiv K$

$\overrightarrow{BK} = (-1; 0; -2)$

Vậy phương trình  $BM$  là:  $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ .

**Câu 46**

Cho  $f(x)$  là hàm số bậc bốn thỏa mãn  $f(0) = 0$ . Hàm số  $f'(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|         |           |      |                 |           |
|---------|-----------|------|-----------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-3$ | $-1$            | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-\infty$ | $-1$ | $-\frac{61}{3}$ | $+\infty$ |

Hàm số  $g(x) = |f(x^3) - 3x|$  có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 5.

C. 4.

D. 2.

Facebook: An Dinh – Hà Hoàng – Nguyễn Tất Thành

**Phân tích và định hướng tìm lời giải:**

- Đây là bài toán tìm cực trị của hàm số có dạng  $g(x) = |f(u(x)) - v(x)|$  khi biết bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm  $y = f'(x)$ .

- Để xác định số cực trị của hàm  $g(x) = |h(x)|$  với  $h(x) = f(u(x)) - v(x)$  ta cần lập bảng biến thiên của hàm số  $h(x) = f(u(x)) - v(x)$  nhờ giả thiết bài toán.

- Từ bảng biến thiên của hàm số  $h(x) = f(u(x)) - v(x)$  suy ra bảng biến thiên hàm số  $g(x) = |h(x)|$ . Từ đó, suy ra số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = |h(x)|$ .

- Để lập bảng biến thiên của hàm số  $h(x) = f(u(x)) - v(x)$  ta thực hiện các bước như sau:

**Bước 1.** Tìm tập xác định.

**Bước 2.** Tính đạo hàm  $h'(x)$ . Tìm các điểm  $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$  mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.

**Bước 3.** Sắp xếp các điểm  $x_i$  theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên của hàm số  $h(x)$ .

**Bước 4.** Từ bảng biến thiên của hàm số  $h(x)$ , suy ra bảng biến thiên của hàm số  $g(x) = |h(x)|$ . Từ đó, kết luận bài toán

### Lời giải

#### Chọn A

Ta có:  $f''(x) = a(x+1)(x+3) \Rightarrow f'(x) = \int f''(x)dx = a\left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x\right) + b$ .

$$\text{Do } \begin{cases} f'(-3) = -1 \\ f'(-1) = -\frac{61}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{29}{2} \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \frac{29}{2}\left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x\right) - 1.$$

Xét hàm số  $h(x) = f(x^3) - 3x$  có  $h'(x) = 3x^2 f'(x^3) - 3$ ,  $h'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 f'(x^3) - 3 = 0$ .

Nhận xét rằng,  $x = 0$  không phải là nghiệm của phương trình  $3x^2 f'(x^3) - 3 = 0$  nên

$$3x^2 f'(x^3) - 3 = 0 \Leftrightarrow f'(x^3) = \frac{1}{x^2} \quad (*)$$

Nếu  $x \in (-\infty; 0)$  thì  $f'(x) < 0 \Rightarrow f'(x^3) < 0$  mà  $\frac{1}{x^2} > 0$  nên  $(*)$  vô nghiệm trên  $(-\infty; 0)$ .

Nếu  $x \in (0; +\infty)$  thì  $f'(x)$  đồng biến nên  $f'(x^3)$  đồng biến, mà hàm số  $\frac{1}{x^2}$  nghịch biến nên phương trình  $(*)$  không có quá 1 nghiệm. (1)

Mặt khác  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ f'(x^3) - \frac{1}{x^2} \right] = -\infty$  và  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f'(x^3) - \frac{1}{x^2} \right] = +\infty$  nên phương trình  $(*)$  có ít nhất một nghiệm dương. (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $f'(x^3) = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x = x_0 (x_0 > 0)$

Ta có bảng biến thiên của hàm số  $h(x)$

|         |           |     |          |           |
|---------|-----------|-----|----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $x_0$    | $+\infty$ |
| $h'(x)$ |           | -   | - 0 +    |           |
| $h(x)$  | $+\infty$ |     | $h(x_0)$ | $+\infty$ |

Biểu đồ minh họa: Một trục hoành với các điểm  $-\infty, 0, x_0, +\infty$ . Tại  $x=0$ , hàm  $h(x)$  tiến tới  $+\infty$ . Tại  $x=x_0$ , hàm  $h(x)$  đạt giá trị  $h(x_0)$ . Từ  $x=0$  đến  $x=x_0$ , hàm  $h(x)$  giảm từ  $+\infty$  xuống  $h(x_0)$ . Từ  $x=x_0$  đến  $x=+\infty$ , hàm  $h(x)$  tăng từ  $h(x_0)$  lên  $+\infty$ . Các phần của trục nằm ngoài khoảng  $(0, x_0)$  và  $(x_0, +\infty)$  được gạch chéo.

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số  $g(x) = |f(x^3) - 3x|$  có ba điểm cực trị.

**Bình luận:**

- Đây là bài toán lập tìm cực trị của hàm trị tuyệt đối của hàm hợp. Để làm được bài toán này đòi hỏi các em phải nắm vững và sử dụng thành thạo bài toán tìm điểm cực trị của hàm số, hàm hợp; áp dụng vào hàm trị tuyệt đối của hàm hợp. Đây là câu hỏi kiểm tra kiến thức tổng hợp ở mức độ VDC.

**Hướng phát triển:**

**Hướng phát triển 1:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên hàm số  $f'(x)$ . Tìm số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = f(u(x)) + h(x)$

**Hướng phát triển 2:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị hàm số  $f'(x)$ . Tìm số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = f(u(x)) + h(x)$ .

**Hướng phát triển 3:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị hàm số  $f'(x)$ . Tìm số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = |f(u(x)) + h(x)|$ .

**Bài tập tương tự**

**Câu 1:** Cho  $f(x)$  là hàm bậc bốn thỏa mãn  $f(0) = \frac{1}{2}$ . Hàm số  $f'(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|         |           |      |      |           |
|---------|-----------|------|------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $-1$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+\infty$ | $1$  | $3$  | $-\infty$ |

Hàm số  $g(x) = |f(x^5) + 5x + 2021|$  có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

**B. 2.**

C. 1.

D. 4.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt  $h(x) = f(x^5) + 5x + 2021$ , ta có  $h'(x) = 5x^4 f'(x^5) + 5$ .

Xét  $h'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^4 f'(x^5) + 5 = 0$  (\*).

Nhận xét rằng,  $x = 0$  không phải là nghiệm của phương trình (\*).

Với  $x < 0$ , từ bảng biến thiên ta thấy  $f'(x) > 0$  nên  $f'(x^5) > 0$  nên (\*) vô nghiệm.

Với  $x > 0$ , ta có (\*)  $\Leftrightarrow f'(x^5) = -\frac{1}{x^4}$ .

Khi đó, vì  $f'(x)$  nghịch biến nên  $f'(x^5)$  cũng nghịch biến, mà  $-\frac{1}{x^4}$  đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$  nên phương trình (\*) có tối đa 1 nghiệm trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

Ta lại có  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ f'(x^5) + \frac{1}{x^4} \right] = +\infty$  và  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f'(x^5) + \frac{1}{x^4} \right] = -\infty$  nên (\*) có đúng 1 nghiệm  $x = x_0 \in (0; +\infty)$ .

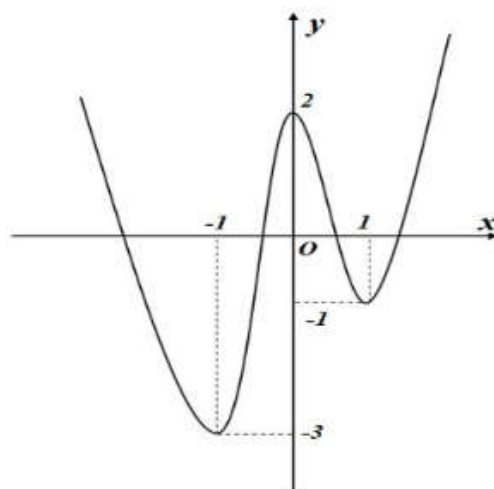
Xét bảng biến thiên của  $h(x)$  :

|         |                  |          |           |
|---------|------------------|----------|-----------|
| $x$     | 0                | $x_0$    | $+\infty$ |
| $h'(x)$ | +                | 0        | -         |
| $h(x)$  | $\frac{4043}{2}$ | $h(x_0)$ | $-\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình  $h(x) = 0$  có nghiệm duy nhất  $x_1 > x_0$ .

Vậy hàm số  $g(x) = |h(x)|$  có 2 điểm cực trị.

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Biết đồ thị của  $y = f'(x)$  như hình vẽ dưới đây.



Số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = f(x^2 - 2x) - \frac{x^4}{2} + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 2$  là

A. 6.

B. 8.

C. 9.

**D. 7.**

Lời giải

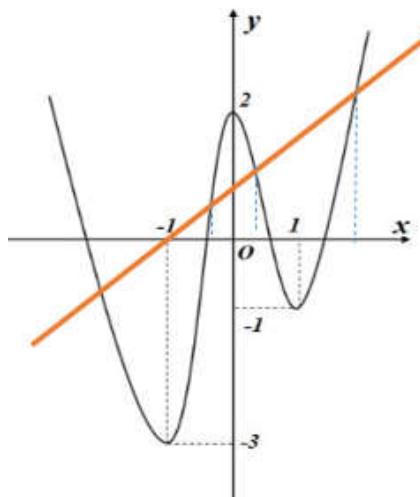
**Chọn D**

Ta có:

$$g'(x) = 2(x-1)f'(x^2-2x) - (2x^3 - 6x^2 + 6x - 2) = 2(x-1)[f'(x^2-2x) - (x^2-2x+1)]$$

Với  $u = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \geq -1, \forall x$

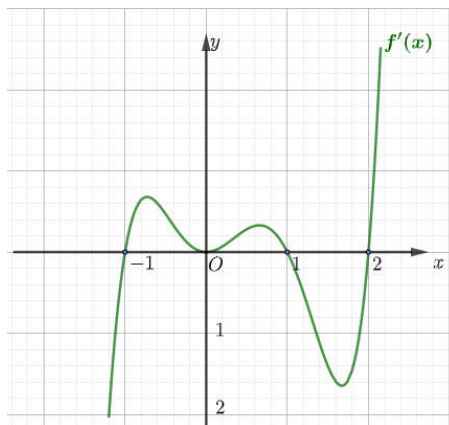
Dựa vào đồ thị của  $y = f'(x)$  và đường thẳng  $y = x + 1$  ta có



$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ f'(u)=u+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ u=a \in (-1;0) \\ u=b \in (0;1) \\ u=c \in (1;2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ (x-1)^2=a+1 \in (0;1) \\ (x-1)^2=b+1 \in (1;2) \\ (x-1)^2=c+1 \in (2;3) \end{cases}$$

Như vậy  $g'(x)=0$  có 7 nghiệm đơn phân biệt, nên hàm số  $g(x)$  có 7 điểm cực trị.

**Câu 3.** Cho  $f(x)$  là hàm đa thức thỏa mãn  $f(0)=0$ . Hàm số  $y=f'(x)$  có đồ thị như hình bên dưới.



Hàm số  $g(x)=\left|f\left(\sqrt{x^2+1}\right)-\frac{1}{2}x^2\right|$  có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 2.

**C. 5.**

D. 4.

Lời giải

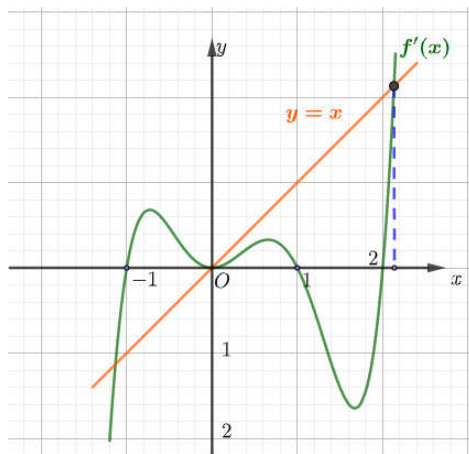
**Chọn C**

Xét  $h(x)=f\left(\sqrt{x^2+1}\right)-\frac{1}{2}x^2$ .

Ta có  $h'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot f'\left(\sqrt{x^2+1}\right)-x=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \left[f'\left(\sqrt{x^2+1}\right)-\sqrt{x^2+1}\right]$

Suy ra  $h'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ f'\left(\sqrt{x^2+1}\right)=\sqrt{x^2+1} \end{cases} (*)$

Dựa vào đồ thị hàm số  $f'(x)$ :



Ta có  $h'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \sqrt{x^2+1}=a \ (a>2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{a-1} \end{cases}$

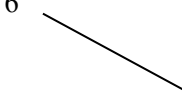
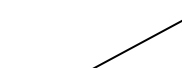


Và  $h(0) = f(1) = 0$  nên ta có bảng biến thiên

|         |           |               |     |              |           |
|---------|-----------|---------------|-----|--------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-\sqrt{a-1}$ | $0$ | $\sqrt{a-1}$ | $+\infty$ |
| $h'(x)$ | $-$       | $0$           | $+$ | $0$          | $+$       |
| $h(x)$  | $+\infty$ |               | $0$ |              | $+\infty$ |

Vậy hàm số  $g(x) = |h(x)|$  có 5 cực trị.

**Câu 4:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ , có bảng biến thiên như sau:

|      |           |                                                                                   |      |                                                                                   |     |                                                                                    |  |           |
|------|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------|------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|------------------------------------------------------------------------------------|--|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $a$                                                                               |      |                                                                                   | $b$ |                                                                                    |  | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $-$                                                                               | $0$  | $+$                                                                               | $0$ | $-$                                                                                |  |           |
| $y$  | $+\infty$ |  |      |                                                                                   | $6$ |  |  |           |
|      |           |                                                                                   | $-5$ |  |     |                                                                                    |  | $-\infty$ |

Đặt  $h(x) = |m - f(x-2)|$  ( $m$  là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  sao cho hàm số  $y = h(x)$  có đúng 5 cực trị?

A. Vô số!

B. 12.

C. 0.

**D. 10.**

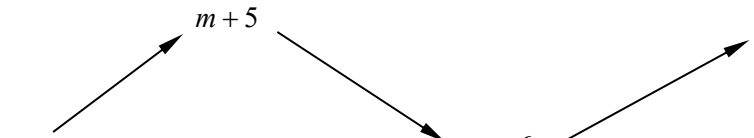
**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt  $g(x) = m - f(x-2) \Rightarrow g'(x) = -f'(x-2)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = a \\ x-2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+a \\ x = 2+b \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên

|         |           |                                                                                      |     |       |     |           |
|---------|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------|-----|-------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $a+2$                                                                                |     | $b+2$ |     | $+\infty$ |
| $g'(x)$ |           | $+$                                                                                  | $0$ | $-$   | $0$ | $+$       |
| $g(x)$  |           |  |     |       |     |           |

Để hàm số  $h(x) = |m - f(x-2)| = |g(x)|$  có đúng 5 cực trị điều kiện là

$$\begin{cases} m+5 > 0 \\ m-6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -5 < m < 6 \Rightarrow m \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Do  $m$  nguyên nên  $m \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ . Vậy có 10 giá trị của  $m$ .

**Câu 47**

Có bao nhiêu số nguyên  $a(a \geq 2)$  sao cho tồn tại số thực  $x$  thỏa mãn:  $(a^{\log x} + 2)^{\log a} = x - 2$ ?

A. 8.

B. 9.

C. 1.

D. Vô số.

Facebook: Lê Thanh Bình – Chanh Muối – Nguyễn Tất Thành

**Phân tích định hướng tìm lời giải:**

+ Đây là bài toán tìm tham số  $a$  để phương trình mũ có nghiệm;

+ Để giải bài toán này thông thường chúng ta sử dụng một trong các phương pháp sau đây:

**Cách 1: Đặt ẩn phụ đưa về giải hệ phương trình đối xứng loại 2.**

$$\begin{cases} f(x, y) = a \\ f(y, x) = a \end{cases}$$

**Cách 2: Sử dụng phương pháp hàm số**

+ Cho phương trình  $f(x) = c$  ( với  $c$  là hằng số). Nếu hàm số  $f(x)$  luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên khoảng  $K$  và tồn tại  $x_0 \in K$ , sao cho  $f(x_0) = c$  thì phương trình  $f(x) = c$  có nghiệm duy nhất  $x = x_0$  trên khoảng  $K$ .

+ Cho phương trình  $f(x) = g(x)$ . Nếu hàm số  $f(x)$  luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên khoảng  $K$  còn  $g(x)$  luôn nghịch biến (hoặc luôn đồng biến) trên khoảng  $K$  và tồn tại  $x_0 \in K$ , sao cho  $f(x_0) = g(x_0)$  thì phương trình  $f(x) = g(x)$  có nghiệm duy nhất  $x = x_0$  trên khoảng  $K$ .

+ Cho phương trình  $f(u) = f(v)$ . Nếu hàm số  $f(t)$  luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên khoảng  $K$  thì từ phương trình  $f(u) = f(v)$  ta có  $u = v$  trên khoảng  $K$ . Ở đây ta nói  $f(t)$  là hàm số đặc trưng của PT.

+  $f(u) > f(v)$  mà  $f(t)$  luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên khoảng  $K$  thì bất phương trình tương đương với  $u > v$  ( hoặc  $u < v$ ) trên khoảng  $K$ . Ở đây ta nói  $f(t)$  là hàm số đặc trưng của bpt.

**Chú ý:**

+ Nhận dạng  $f(u) = f(v)$  hay  $f(u) > f(v)$  thường sử dụng cách này khi phương trình, bất phương trình chứa các ẩn vừa nằm trong dấu loga ( trên mũ) và ẩn nằm ngoài dấu loga ( không trên mũ), hoặc PT, BPT vừa chứa loga vừa chứa mũ.

+ Để đưa về dạng  $f(u) = f(v)$  hay  $f(u) > f(v)$  ta thường biến đổi bằng cách thêm bớt dựa vào những biểu thức trong loga, biểu thức trên số mũ sao cho biểu thức trong loga, biểu thức trên mũ cùng xuất hiện ở một vế của phương trình hay bất phương trình.

**Ví dụ:** Phương trình cho ở dạng  $\log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{4x^2 - 2x + 2} = x^2 - 5x + 1 - m$

Vì  $4x^2 - 2x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$  nên điều kiện là  $3x^2 + 3x + m + 1 > 0$  (\*)

Với điều kiện (\*) phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\log_2 (3x^2 + 3x + m + 1) - \log_2 (4x^2 - 2x + 2) = x^2 - 5x + 1 - m$$

Để đưa về dạng  $f(u) = f(v)$ , thì ta phải biến đổi  $x^2 - 5x + 1 - m$  sao cho xuất hiện  $(4x^2 - 2x + 2), (3x^2 + 3x + m + 1)$  vì hai biểu thức này nằm trong dấu loga. Nên ta được:

$$\Leftrightarrow \log_2(3x^2 + 3x + m + 1) - \log_2(4x^2 - 2x + 2) = (4x^2 - 2x + 2) - (3x^2 + 3x + m + 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(3x^2 + 3x + m + 1) + (3x^2 + 3x + m + 1) = \log_2(4x^2 - 2x + 2) + (4x^2 - 2x + 2)$$

+ Việc chứng minh hàm số  $f(t)$  luôn đồng biến, nghịch biến trên  $K$  khi làm bài trắc nghiệm có thể sử dụng máy tính cầm tay: MODE 7- với 570, MODE 8- với 580.

### Lời giải

#### Chọn A

Điều kiện:  $x > 2$ . Đặt  $m = \log a > 0$

Khi đó phương trình trở thành:  $(x^m + 2)^m = x - 2$ .

Đặt  $y = x^m + 2$ ,  $y > 2$  thì ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} y^m = x - 2 & (1) \\ x^m = y - 2 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) - (2) vế theo vế ta được

$$y^m + y = x^m + x \quad (3)$$

Xét hàm  $f(t) = t^m + t$  với  $m > 0; t > 0$  có  $f'(t) = m.t^{m-1} + 1 > 0, \forall t > 0$

$\Rightarrow f(t) = t^m + t$  đồng biến  $(0; +\infty)$ .

Do đó (3)  $\Leftrightarrow y = x \Leftrightarrow x^m = x - 2 \Leftrightarrow m \cdot \log x = \log(x - 2) \Leftrightarrow m = \frac{\log(x - 2)}{\log x} < 1$

$\Rightarrow \log a < 1 \Rightarrow a < 10$ . Do đó, mọi số  $a \in \{2; 3; 4; \dots; 9\}$  đều thỏa mãn.

### Bình luận:

- Việc cho hàm số  $f(u); f(v)$  như nào rất quan trọng. Vì khi thi trắc nghiệm với công cụ hỗ trợ của máy tính cầm tay học sinh có thể dễ dàng bấm máy để tìm ra mối liên hệ giữa  $u$  và  $v$ . Tất nhiên việc bấm máy tính dựa trên nền tảng kiến thức tốt của học sinh. Khi hướng đi làm tự luận gây khó khăn cho học sinh thì hướng giải bằng công cụ hỗ trợ máy tính cầm tay cũng là 1 phương án tốt.

- Ví dụ giải câu 47 dựa trên hướng tự luận và sự hỗ trợ của máy tính cầm tay

**Câu 47.** Có bao nhiêu số nguyên  $a (a \geq 2)$  sao cho tồn tại số thực  $x$  thỏa mãn:

$$(a^{\log x} + 2)^{\log a} = x - 2?$$

### Lời giải

Để tìm mối liên hệ giữa  $a$  và  $x$  ở bài này chưa có thể tìm ra ngay bằng máy tính.

Dựa vào nhận xét  $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$  ta có  $a^{\log x} = x^{\log a}$ . Công việc này nhằm mục đích để đưa về cùng  $\log a$ . Khi đó đặt  $\log a = t$  phương trình trở thành  $(x^t + 2)^t = x - 2$  (điều kiện  $x > 2$ )

Cho  $t = 100$  bấm máy tính ta có  $x \approx 0,9956130378$ . Tuy nhiên chưa thấy được mối liên hệ giữa  $x$  và  $t$ . Vì đề bài có  $x^t$  nên bấm máy

$$x^t = 98 \Rightarrow x^t = x - 2 \Rightarrow t = \log_x(x - 2) \Rightarrow \log a = \frac{\log(x - 2)}{\log x}.$$

Đến đây có thể khảo sát hàm số  $y = \frac{\log(x-2)}{\log x}$  bằng phương pháp đạo hàm hay dùng máy tính CASIO MODE 7- với 570, MODE 8- với 580.

**Hướng phát triển:**

**Hướng phát triển 1:** Thay đổi yêu cầu như tìm điều kiện liên quan đến tương giao đồ thị...

**Hướng phát triển 2:** Thay đổi phương trình thành bất phương trình.

**Hướng phát triển 3:** Thay đổi hàm số  $f(u); f(v)$  kết hợp với hàm số chẵn, hàm số lẻ.

**Câu 1.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  với  $m > 1$  sao cho tồn tại số thực  $x$  thỏa mãn:

$$(m^{\log_5 x} + 3)^{\log_5 m} = x - 3 \quad (1).$$

A. 4.

**B. 3.**

C. 5.

D. 8.

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện:  $x > 0$

Đặt  $m^{\log_5 x} + 3 = u$  thay vào phương trình (1) ta được:  $u^{\log_5 m} = x - 3 \Leftrightarrow x = u^{\log_5 m} + 3$ .

$$\text{Vì } u^{\log_5 m} = m^{\log_5 u}. \text{ Từ đó ta có hệ Phương trình } \begin{cases} u = m^{\log_5 x} + 3 \\ x = u^{\log_5 m} + 3 \end{cases}.$$

Xét hàm đặc trưng  $f(t) = m^t + 3$  trên  $\mathbb{R}$ .

Do  $m > 1$ . Suy ra hàm số  $f(t)$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

Do đó,  $f(\log_5 x) = f(\log_5 u) \Leftrightarrow x = u$ .

Vì thế, ta đưa về xét phương trình:  $x = m^{\log_5 x} + 3 \Leftrightarrow x = x^{\log_5 m} + 3 \Leftrightarrow x - 3 = x^{\log_5 m}$

$$\Leftrightarrow \log_5(x-3) = \log_5(x^{\log_5 m}) \Leftrightarrow \log_5(x-3) = \log_5 x \cdot \log_5 m \Leftrightarrow \log_5 m = \frac{\log_5(x-3)}{\log_5 x}$$

$$\text{Do } x > 0 \text{ nên } x - 3 < x \text{ nên } \log_5 m = \frac{\log_5(x-3)}{\log_5 x} < 1 \Leftrightarrow m < 5.$$

Suy ra  $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ 1 < m < 5 \end{cases} \Rightarrow m \in \{2, 3, 4\}$ . Vậy có 3 giá trị tham số  $m$  thỏa mãn.

**Câu 2.** Có bao nhiêu  $m$  nguyên  $m \in [-2021; 2021]$  để phương trình

$$6^x - 2m = \log_{\sqrt[3]{6}}(18(x+1) + 12m) \text{ có nghiệm?}$$

A. 211.

B. 2020.

**C. 2023.**

D. 212.

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Phương trình } 6^x - 2m = \log_{\sqrt[3]{6}}(18(x+1) + 12m) \Leftrightarrow 6^x = 2m + 3 \log_6[6(3x + 2m + 3)]$$

$$\Leftrightarrow 6^x = 2m + 3[1 + \log_6(3x + 2m + 3)] \Leftrightarrow 6^x = 3 \log_6(3x + 2m + 3) + 2m + 3, (*)$$

$$\text{Đặt } y = \log_6(3x + 2m + 3) \Leftrightarrow 6^y = 3x + 2m + 3$$

Mặt khác, PT(\*) trở thành:  $6^x = 3y + 2m + 3$

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} 6^y = 3x + 2m + 3, (1) \\ 6^x = 3y + 2m + 3, (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ vế với vế cho (2), ta được

$$6^y - 6^x = 3x - 3y \Leftrightarrow 6^x + 3x = 6^y + 3y \quad (3)$$

Xét hàm số  $f(t) = 6^t + 3t, t \in \mathbb{R}$ .

Ta có  $f'(t) = 6' \ln 6 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ .

Suy ra hàm số  $f(t)$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$

Mà PT (3)  $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ .

Thay  $y = x$  vào PT (1), ta được  $6^x = 3x + 2m + 3 \Leftrightarrow 6^x - 3x = 2m + 3$ .

Xét hàm số  $g(x) = 6^x - 3x$ , với  $x \in \mathbb{R}$ . Ta có

$$g'(x) = 6^x \ln 6 - 3 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \log_6 \left( \frac{3}{\ln 6} \right)$$

BBT:

|         |           |                                         |           |
|---------|-----------|-----------------------------------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $\log_6 \left( \frac{3}{\ln 6} \right)$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | -         | 0                                       | +         |
| $g(x)$  | $+\infty$ | 0,81                                    | $+\infty$ |

Từ đó suy ra PT đã cho có nghiệm  $\Leftrightarrow 2m + 3 \geq g \left( \log_6 \frac{3}{\ln 6} \right) \approx 0,81 \Rightarrow m \geq -1,095$

Vậy có 2023 số nguyên  $m$  thỏa mãn yêu cầu.

**Câu 3.** Có bao nhiêu số nguyên  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1}$  cắt đồ thị hàm số  $y = x^2 - 5x + 2 - m$  tại hai điểm có hoành độ lớn hơn 1?

A. 3.

B. Vô số.

**C. 2.**

D. 4.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện:  $3x^2 + 3x + m + 1 > 0$ .

- Ta có phương trình hoành độ giao điểm :

$$\log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} = x^2 - 5x + 2 - m (*)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \left( \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} \right) - 1 = x^2 - 5x + 1 - m$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{4x^2 - 2x + 2} = x^2 - 5x + 1 - m$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (3x^2 + 3x + m + 1) - \log_2 (4x^2 - 2x + 2) = (x^2 - 2x + 2) - (3x^2 + 3x + m + 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (3x^2 + 3x + m + 1) + (3x^2 + 3x + m + 1) = \log_2 (4x^2 - 2x + 2) + (4x^2 - 2x + 2) \quad (1)$$

Xét hàm số:  $f(t) = t + \log_2 t$  trên  $D = (0; +\infty)$ , có  $f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 2} > 0, \forall t \in D$ ,

Do đó hàm số  $f(t)$  đồng biến trên  $D$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow f(4x^2 - 2x + 2) = f(3x^2 + 3x + m + 1)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 2x + 2 = 3x^2 + 3x + m + 1. \text{ Vì } 4x^2 - 2x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ nên } 3x^2 + 3x + m + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x = m - 1 \quad (2).$$

- Xét hàm số:  $g(x) = x^2 - 5x$  trên  $\mathbb{R}$ , có  $g'(x) = 2x - 5 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$ .

- Bảng biến thiên:

|         |           |   |   |   |               |   |           |
|---------|-----------|---|---|---|---------------|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |   | 1 |   | $\frac{5}{2}$ |   | $+\infty$ |
| $g'(x)$ |           | - | 0 | - | 0             | + |           |
| $g(x)$  |           |   |   |   |               |   |           |

Để hai đồ thị hàm số cắt nhau tại 2 điểm có hoành độ lớn hơn 1 thì phương trình (\*) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 thì phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 khi và chỉ khi  $-\frac{25}{4} < m - 1 < -4 \Leftrightarrow -\frac{21}{4} < m < -3$ , do  $m \in \mathbb{Z}$  nên  $m \in \{-5; -4\}$ , hay có 2 giá trị nguyên của  $m$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 4.** Tổng các giá trị nguyên của  $m$  để phương trình  $2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 6x^2 + 9x + m)2^{x-2} = 2^{x+1} + 1$  chỉ có 2 nghiệm là:

A.  $T = 32$ .

**B.  $T = 12$ .**

C.  $T = -4$ .

D.  $T = 4$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có:

$$2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 6x^2 + 9x + m)2^{x-2} = 2^{x+1} + 1 \Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m-3x}} + (x-2)^3 + 8 + m - 3x = 2^3 + 2^{2-x}$$

$$\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m-3x}} + m - 3x = 2^{2-x} + (2-x)^3.$$

Xét hàm  $h(t) = 2^t + t^3$  trên  $\mathbb{R}$ .

có  $h'(t) = 2^t \ln 2 + 3t^2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$  nên hàm số liên tục và đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

Do đó từ (1) suy ra  $m - 3x = (2-x)^3 \Leftrightarrow m = 8 - 9x + 6x^2 - x^3$ .

Xét hàm số  $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 8$  trên  $\mathbb{R}$ .

có  $f'(x) = -3x^2 + 12x - 9; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$ .

Bảng biến thiên

|         |           |   |   |   |   |   |           |
|---------|-----------|---|---|---|---|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |   | 1 |   | 3 |   | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | - | 0 | + | 0 | - |           |
| $f(x)$  | $+\infty$ |   |   |   |   |   |           |

Dựa vào bảng biến thiên ta có, phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi  $m = 4; m = 8 \Rightarrow T = 12$

**Câu 5.** Tổng tất cả các giá trị của  $m$  để phương trình  $2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2)$  có đúng ba nghiệm phân biệt là

A. 1.

B. 2.

C. 0.

**D. 3.**

**Chọn D**

Ta có  $2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2)$  (1)

$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2} \cdot \log_2[(x-1)^2 + 2] = 2^{2|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2)$  (2)

Xét hàm số  $f(t) = 2^t \cdot \log_2(t+2), t \geq 0$ .

Vì  $f'(t) > 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow$  hàm số đồng biến trên  $(0; +\infty)$

Khi đó (2)  $\Leftrightarrow f[(x-1)^2] = f(2|x-m|) \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2|x-m|$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 1 + 2m = 0 & (3) \\ x^2 = 2m - 1 & (4) \end{cases}$

Phương trình (1) có đúng ba nghiệm phân biệt nếu xảy ra các trường hợp sau:

+) PT (3) có nghiệm kép khác hai nghiệm phân biệt của PT(4)  $\Rightarrow m = \frac{3}{2}$ , thay vào PT (4) thỏa mãn

+) PT (4) có nghiệm kép khác hai nghiệm phân biệt của PT(3)  $\Rightarrow m = \frac{1}{2}$ , thay vào PT (3) thỏa mãn

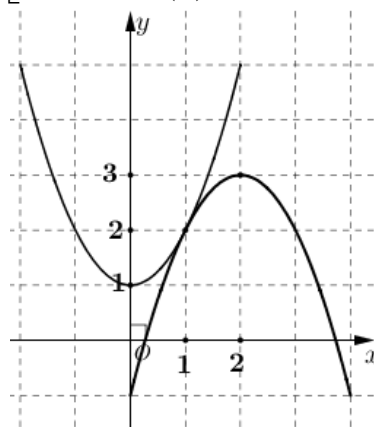
+) PT (4) có hai nghiệm phân biệt và PT (3) có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm của hai PT trùng nhau

(4)  $\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2m-1}$ , với  $\frac{1}{2} < m < \frac{3}{2}$ . Thay vào PT (3) tìm được  $m = 1$ .

$\Rightarrow m \in \left\{ \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2} \right\} \Rightarrow T = 3$ .

**Chú ý:** Cách tìm điều kiện để có đúng ba nghiệm có thể sử dụng đồ thị như sau:

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 1 + 2m = 0 \\ x^2 = 2m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m = -x^2 + 4x - 1 & (3) \\ 2m = x^2 + 1 & (4) \end{cases}$



**Câu 6.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để bất phương trình:

$\ln \frac{x^3 - 2x^2 + 2}{x^2 + m} + x^3 - 3x^2 + 2 - m \geq 0$  nghiệm đúng với  $\forall x \in [0; 3]$ ?

A. 3.

**B. 0.**

C. 2.

D. 4.

Lời giải

**Chọn B**

Điều kiện:  $\frac{x^3 - 2x^2 + 2}{x^2 + m} > 0$ .

Do  $x^3 - 2x^2 + 2 > 0$  với  $\forall x \in [0; 3]$  nên bài toán này ta chỉ xét với điều kiện  $x^2 + m > 0$  (\*)

Với điều kiện (\*) ta có bất phương trình

$$\Leftrightarrow \ln(x^3 - 2x^2 + 2) - \ln(x^2 + m) + x^3 - 3x^2 + 2 - m \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^3 - 2x^2 + 2) + x^3 - 2x^2 + 2 \geq \ln(x^2 + m) + x^2 + m \quad (1)$$

Xét hàm:  $f(t) = \ln t + t$  trên  $(0; +\infty)$ .

$$f'(t) = \frac{1}{t} + 1 > 0 \text{ với } \forall t \in (0; +\infty) \Rightarrow f(t) \text{ là hàm đồng biến trên } (0; +\infty).$$

$$\text{Do đó: } (1) \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 2 \geq x^2 + m \Leftrightarrow m \leq x^3 - 3x^2 + 2.$$

$$\text{Đặt } g(x) = x^3 - 3x^2 + 2.$$

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với  $\forall x \in [0; 3]$  khi:

$$\begin{cases} x^2 + m > 0 \quad \forall x \in [0; 3] \\ m \leq \min_{x \in [0; 3]} g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \leq -2 \end{cases}. \text{ Vậy không tồn tại giá trị của } m \text{ thỏa mãn bài toán.}$$

**Câu 7.** Cho hàm số  $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) + e^x - e^{-x}$ . Tập nghiệm của bất phương trình  $f(3^x) + f(2x - 1) \geq 0$  là?

A.  $S = (-\infty; 0]$       B.  $S = [-2021; 2021]$ .      C.  $S = [-2021; +\infty)$ .      **D.  $S = [0; +\infty)$ .**

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có:  $x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}; \sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} + x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra TXĐ:  $\mathbb{R}$

$$\text{Ta có: } f(-x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) + e^{-x} - e^x = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} + e^{-x} - e^x$$

$$= -\left(\ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) + e^x - e^{-x}\right) = -f(x).$$

$$(1) \Leftrightarrow f(3^x) \geq -f(2x - 1) \Leftrightarrow f(3^x) \geq f(1 - 2x) \quad (2)$$

Ta có:  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} + e^x + e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$  nên hàm số đã cho đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

$$\text{Vậy } (2) \Leftrightarrow 3^x \geq 1 - 2x$$

Khi  $x \geq 0$  ta có  $3^x \geq 1; 1 - 2x \leq 1 \Rightarrow 3^x \geq 1 - 2x, \forall x \geq 0$

Khi  $x < 0$  ta có  $3^x < 1; 1 - 2x > 1 \Rightarrow 3^x < 1 - 2x$

Vậy tập nghiệm:  $S = [0; +\infty)$

**Câu 8.** Cho hàm số  $f(x) = e^{\sqrt{x^2 + 1} - x} - e^{\sqrt{x^2 + 1} + x}$ . Có bao nhiêu số nguyên  $m \in [-2021; 2021]$  thỏa mãn  $f(m - 7) + f\left(\frac{12}{m + 1}\right) \leq 0$ ?

A. 4038

**B. 2025**

C. 5

D. 4036

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Ta có } f(-x) = e^{\sqrt{x^2 + 1} - x} - e^{\sqrt{x^2 + 1} + x} = -f(x)$$



$$f(m-7) + f\left(\frac{12}{m+1}\right) \leq 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{12}{m+1}\right) \leq -f(m-7) = f(7-m)$$

Mặt khác ta có  $f'(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1\right) \cdot e^{\sqrt{x^2+1}+x} - \left(\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right) \cdot e^{\sqrt{x^2+1}-x} > 0$  suy ra hàm số đồng

biến. Do đó ta có  $f\left(\frac{12}{m+1}\right) \leq f(7-m) \Leftrightarrow \frac{12}{m+1} \leq 7-m \Leftrightarrow \frac{m^2-6m+5}{m+1} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq m \leq 5 \\ m < -1 \end{cases}$

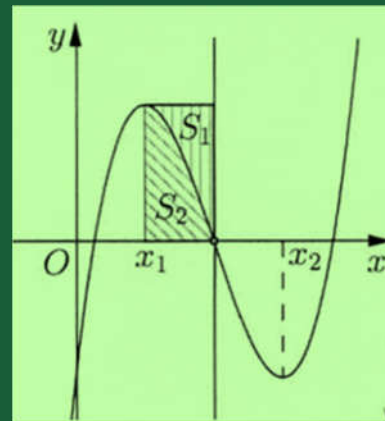
Mà  $m \in [-2021; 2021] \Rightarrow m \in [-2021; -2] \cup [1; 5]$

Suy ra có 2025 giá trị nguyên dương  $m$  thỏa mãn.

**Câu 48**

Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị là đường cong trong hình bên. Biết hàm số  $f(x)$  đạt cực trị tại hai điểm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_2 = x_1 + 2$  và  $f(x_1) + f(x_2) = 0$ . Gọi  $S_1$  và  $S_2$  là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tỷ số  $\frac{S_1}{S_2}$  bằng

- A.  $\frac{3}{4}$ .      B.  $\frac{5}{8}$ .      C.  $\frac{3}{8}$ .      D.  $\frac{3}{5}$ .



Facebook: Lại Nhật Hoan – Nguyễn Bá Nam

**Phân tích định hướng tìm lời giải:**

Bài toán ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng rất phong phú và đa dạng. Trong phần này xin đề cập đến một số VD và bài tập sử dụng các đồ thị đã được khảo sát trong chương trình THPT để tính diện tích hình phẳng, tính tỷ số diện tích các hình phẳng, tập trung và việc quy các đồ thị hàm tổng quát về các đồ thị dạng “chuẩn tắc”. Những bài toán này yêu cầu học sinh biết thiết lập, đặt vị trí đồ thị dạng tổng quát về dạng dễ tính toán cũng có thể đặc biệt hóa nếu làm bài trắc nghiệm. Thầy cô khi dạy cần nhắc lại một số tính chất của các đồ thị và các phép biến đổi đưa dạng tổng quát của hàm về **dạng chuẩn tắc**

1) Hàm số bậc 2:  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) có đỉnh  $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ , đồ thị (P)

Dùng phép tịnh tiến theo  $\overrightarrow{IO}$  biến đồ thị (P) thành đồ thị ( $P_1$ ):  $y = ax^2$  (**đưa về dạng chuẩn tắc**)

2) Hàm số bậc 3:  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a \neq 0$ ), có tâm đối xứng là điểm uốn. Ta có thể viết  $ax^3 + bx^2 + cx + d = a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + mx + n$  với  $y = mx + n$  là phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm uốn. Như vậy phép tịnh tiến theo  $\overrightarrow{IO}$  (với I là điểm uốn) sẽ biến đồ thị (C) thành đồ thị ( $C_1$ ) có phương trình  $y = a(x^3 + px)$  (**đưa về dạng chuẩn tắc**)

3) Hàm trùng phương  $y = ax^4 + bx^2 + c$  có thể có 3 cực trị hoặc 1 cực trị. Sử dụng phép biến đổi  $ax^4 + bx^2 + c = a\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ , phép tịnh tiến theo  $\vec{u}\left(0; \frac{-\Delta}{4a}\right)$  biến đồ thị (C)

thành đồ thị  $y = a(x^2 + m^2)^2$  nếu  $(C)$  có 1 cực trị, hoặc thành  $y = a(x^2 - m^2)^2$  nếu  $(C)$  có 3 cực trị ( **đưa về dạng chuẩn tắc** )

4) Hàm số b1/b1:  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  có đồ thị  $(C)$  có thể biến đổi  $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{k}{x + \frac{d}{c}}$ , đồ thị hàm

số nhận  $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$  làm giao điểm hai tiệm cận và là tâm đối xứng.

Dùng phép tịnh tiến theo  $\overline{IO}$  biến đồ thị  $(C)$  thành đồ thị  $(C_1)$  có phương trình  $y = \frac{k}{x}$  ( **đưa về dạng chuẩn tắc** )

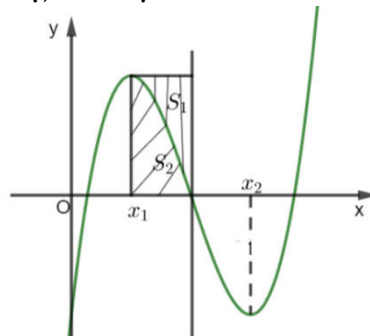
5) Các hàm số lượng giác cơ bản  $y = a \sin(mx + n) + b$ ,  $y = a \cos(mx + n) + b$  có chu kỳ tuần hoàn là  $T = \frac{2\pi}{m}$ ,  $Maxy = |a| + b$ ,  $Miny = -|a| + b$ .

Ta sẽ dùng dạng chuẩn tắc để chuẩn hóa các hàm cho các bài toán tính toán định lượng và không phụ thuộc vào vị trí đồ thị đặt ở đâu trong hệ trục.

### Lời giải

#### Chọn D

Tịnh tiến điểm uốn về gốc tọa độ, ta được hình vẽ bên dưới.



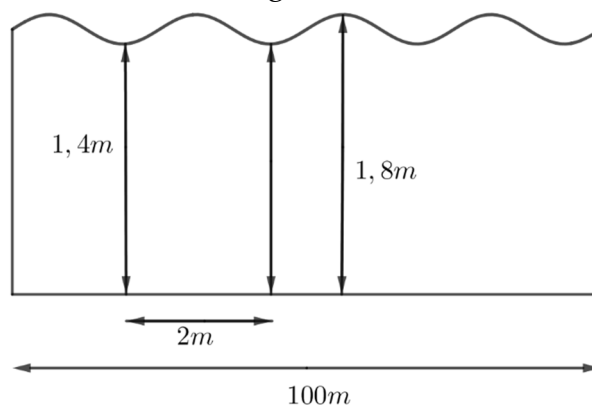
Khi đó, do  $f(x)$  là hàm bậc ba, nhận gốc tọa độ là tâm đối xứng nên  $x_1 = -1; x_2 = 1$ .

Chọn  $f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x$ .

Nên  $S_2 = \int_{-1}^0 (x^3 - 3x) dx = \frac{5}{4}$ ;  $S_1 + S_2 = 2 \Rightarrow S_1 = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{5}$ .

#### Các câu phát triển

**Câu 1.** Người ta xây một tường rào dài  $100m$ , tập hợp các điểm phía trên của hàng rào tạo thành một đường hình sin ( như hình vẽ). Điểm cao nhất trên tường rào cách móng  $1,8m$ , điểm thấp nhất nằm phía trên tường rào cách móng  $1,4m$ , hai điểm thấp nhất liên tiếp nhau cách nhau  $2m$ . Tính diện tích tường rào ?



A.  $54,5\pi (m^2)$

B.  $55\pi (m^2)$

**C.  $160(m^2)$**

D.  $165(m^2)$

Lời giải

**Chọn C**

Cách 1:

Đặt hệ trục tọa độ  $Oxy$  sao cho  $Ox$  là móng của tường, với đơn vị trên trục là (mét), như vậy phần tường xây là phần diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong  $y = a \cdot \sin(mx) + b$ ,

Do chu kì tuần hoàn bằng 2 nên  $m = \pi$ , và số chu kì bằng 50.

$$\begin{cases} \max y = 1,8 \Rightarrow a + b = 1,8 \\ \min y = 1,4 \Rightarrow -a + b = 1,4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0,2 \\ b = 1,6 \end{cases} \text{ vậy } y = 0,2 \sin(\pi x) + 1,6$$

$$S = \int_0^{100} (0,2 \sin(\pi x) + 1,6) dx = 160(m^2).$$

**Cách 2:** Kẻ đường thẳng  $y = 1,6$  ( $\parallel Ox$ ) ta thấy phần diện tích bị “hụt” bằng phần diện tích “đưa ra”, nên diện tích tường cần tính bằng diện tích hình chữ nhật có chiều dài bằng  $100m$  và chiều rộng bằng  $1,6m$ . Vậy diện tích tường rào bằng  $160(m^2)$ .

**Câu 2.** Cho Parabol  $(P)$ ,  $y = mx^2$  và hình vuông  $OACB$  có  $A \in Ox$ ,  $B \in Oy$ , trọng tâm  $G$  của tam giác  $OAC$  thuộc Parabol  $(P)$ . Gọi  $S_1, S_2$  là diện tích hai phần của hình vuông bị chia bởi parabol  $(P)$ . Biết  $S_1 < S_2$ , tính  $\frac{S_1}{S_2}$ .

A.  $\frac{2}{3}$ .

B.  $\frac{2}{5}$ .

C.  $\frac{1}{4}$ .

**D.  $\frac{1}{3}$ .**

Lời giải

**Chọn D**

Gọi  $A(3a, 0)$ ,  $B(0; 3a)$  suy ra  $C(3a; 3a) \Rightarrow G(2a; a)$

$G \in (P) \Rightarrow 4am = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{4a}$ ,  $AC \cap (P) = K\left(3a; \frac{9a}{4}\right)$  nên  $K$  thuộc đoạn  $AC$ .

$$\text{Vậy } S_1 = \int_0^{3a} mx^2 dx = 9ma^3 = \frac{9a^2}{4}, S_{ABCD} = 9a^2 \Rightarrow S_2 = \frac{27a^2}{4}$$

$$\text{Vậy } \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{3}$$

**Câu 3.** Cho đồ thị  $(C)$  của hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ , gọi  $A$  là giao điểm hai tiệm cận của đồ thị  $(C)$ . Một hình vuông  $ABCD$  có các đỉnh  $B, D$  lần lượt thuộc hai tiệm cận, và tâm  $I$  của hình vuông thuộc  $(C)$ . Biết diện tích hình vuông bằng 4, đồ thị  $(C)$  chia hình vuông thành 2 phần có diện tích  $S_1, S_2$  ( $S_1 < S_2$ ). Tính  $S_1$ .

**A.  $3 - 2 \ln 2$**

B.  $2 - \ln 2$

C.  $4 - 2 \ln 3$

D.  $2 - \ln 3$

Lời giải

**Chọn A**

Không làm mất tính tổng quát, xét phương trình đường cong  $(C)$  ở dạng chuẩn tắc

$$y = \frac{k}{x} (k > 0)$$

Như vậy  $(C)$  nhận 2 trục  $Ox, Oy$  làm hai tiệm cận khi đó  $A \equiv O$ . hình vuông  $ABCD$  có diện tích bằng 4 nên  $B(2; 0), D(0; 2), C(2; 2)$  đường thẳng  $BC$  có phương trình  $y = 2$ , Tâm của hình vuông là  $I(1; 1), I \in (C)$  suy ra  $k = 1$ . Phương trình  $(C): y = \frac{1}{x}$ ,

$$(C) \cap BC = M\left(\frac{1}{2}; 2\right).$$

$$\text{Ta được } S_1 = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(2 - \frac{1}{x}\right) dx = 3 - 2 \ln 2.$$

**Câu 4.** Cho đồ thị  $(C)$  của hàm số  $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ , có ba điểm cực trị  $A, B, C$  biết tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  và diện tích miền phẳng giới hạn bởi đồ thị  $(C)$  và đường thẳng  $BC$  bằng 16. Tính độ dài đoạn  $BC$ .

- A. 12.                      B. 13.                      C.  $\frac{64}{5}$ .                      **D. 15.**

**Lời giải**

**Chọn D**

Do  $f(x)$  có 3 điểm cực trị nên có thể chuẩn hóa  $f(x) = a(x^2 - m^2)^2$  khi đó  $A(0; am^4), B(-m; 0), C(m; 0)$  ( $m > 0$ ) khi đó  $B, C \in Ox$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị  $(C)$  và đường thẳng  $BC$  là

$$S = \left| \int_{-m}^m a(x^2 - m^2)^2 dx \right| = \frac{16|a|m^5}{15}$$

Cũng có diện tích tam giác  $ABC$  là  $S_{ABC} = |am^5|$  Vậy ta luôn có  $S = \frac{16}{15} S_{ABC}$

Theo bài ra  $S = 16$  suy ra  $S_{ABC} = 15$ .

**Câu 5.** Cho đồ thị  $(C)$  của hàm số bậc 3:  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có hai điểm cực trị là  $M, P$  và hình chữ nhật  $MNPQ$  có  $MN \parallel Ox$ . Biết diện tích của phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị và đường thẳng  $MN$  bằng 10. Tính diện tích hình chữ nhật  $MNPQ$ .

- A.  $\frac{80}{9}$ .                      **B.  $\frac{320}{27}$ .**                      C.  $\frac{125}{12}$ .                      D. 12.

**Lời giải**

**Chọn B**

Do hàm số có hai cực trị, nên ta có thể chuẩn hóa  $y = a(x^3 - 3m^2x)$  ( $m > 0$ )

suy ra  $y' = 3a(x^2 - m^2)$  khi đó  $M(-m; 2am^3), P(m; -2am^3)$  suy ra  $N(m; 2am^3)$

Đường thẳng  $MN$  có phương trình  $y = 2am^3$ ,  $MN$  cắt  $(C)$  tại  $M$  và  $K$  với  $x_K = 2m$  ( $MN$  chính là tiếp tuyến của  $(C)$  tại điểm cực trị  $M$ )

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị và đường thẳng  $MN$  là

$$S = \left| \int_{-m}^{2m} (2am^3 - a(x^3 - 3m^2x)) dx \right| = \frac{27|a|m^4}{4}$$

Diện tích hình chữ nhật  $MNPQ$  là  $S_{MNPQ} = 8|a|m^4$  suy ra  $\frac{S}{S_{MNPQ}} = \frac{27}{32}$

Theo bài ra  $S = 10$  suy ra  $S_{MNPQ} = \frac{320}{27}$ .

**Câu 49**

Xét hai số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1| = 1, |z_2| = 2$  và  $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$ . Giá trị lớn nhất  $|3z_1 + z_2 - 5i|$  bằng

A.  $5 - \sqrt{19}$ .

B.  $5 + \sqrt{19}$ .

C.  $-5 + 2\sqrt{19}$ .

D.  $5 + 2\sqrt{19}$ .

Facebook: Nguyễn Khải

**Định hướng:**

+ Đây là bài toán tìm  $\max |z - z_0|$ ,  $\min |z - z_0|$  với  $z$  là số phức thay đổi thỏa mãn  $|z - z_1| = r > 0$ . Để giải bài toán này chúng ta có hai cách cơ bản:

-Cách 1: Áp dụng BĐT mô đun:

$$\left| |z - z_1| - |z_1 - z_0| \right| \leq |(z - z_1) + (z_1 - z_0)| \leq |z - z_1| + |z_1 - z_0| \text{ hay } |r - |z_1 - z_0|| \leq |z - z_0| \leq r + |z_1 - z_0|.$$

-Cách 2: Biểu diễn hình học số phức:

Trong mặt phẳng phức, gọi  $M(z)$ ,  $A(z_0)$ , khi đó:  $M$  thuộc đường tròn tâm  $I(z_1)$ , bán kính  $r$  và  $|z - z_0| = MA$ . Ta có  $|MI - IA| \leq MA \leq MI + IA \Rightarrow |r - |z_1 - z_0|| \leq |z - z_0| \leq r + |z_1 - z_0|$ .

+ Tất cả giả thiết của đề bài đều cho ở dạng  $|mz_1 + nz_2| = r$ , chính vì thế ta xét:  $|mz_1 + nz_2|^2$  bởi vì  $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ .

+ Bằng tính toán ta có kết quả:  $|mz_1 + nz_2|^2 = m^2 |z_1|^2 + n^2 |z_2|^2 + mn(z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2)$ . Trong đó  $m, n$  là các số thực và  $z_1, z_2$  là các số phức. Như vậy từ giả thiết ta sẽ tính được  $|3z_1 + z_2|$  và đưa bài toán đã cho về bài toán quen thuộc.

**Lời giải 1**

$$+3 = |z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) = 5 - (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) \Rightarrow (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) = 2;$$

$$|3z_1 + z_2| = \sqrt{9|z_1|^2 + |z_2|^2 + 3(z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2)} = \sqrt{19}.$$

$$+ \text{Có: } |(3z_1 + z_2) + (-5i)| \leq |3z_1 + z_2| + |-5i| \Leftrightarrow |3z_1 + z_2 - 5i| \leq 5 + \sqrt{19}.$$

$$+ \text{Khi } \begin{cases} z_1 = \frac{\sqrt{57}}{19} - \frac{4\sqrt{19}}{19}i \\ z_2 = -\frac{3\sqrt{57}}{19} - \frac{7\sqrt{19}}{19}i \end{cases} \text{ và thỏa mãn điều kiện đề bài thì } |3z_1 + z_2 - 5i| = 5 + \sqrt{19}. \text{ Vậy}$$

$$\max |3z_1 + z_2 - 5i| = 5 + \sqrt{19} \Rightarrow \text{Chọn B.}$$

**Lời giải 2**

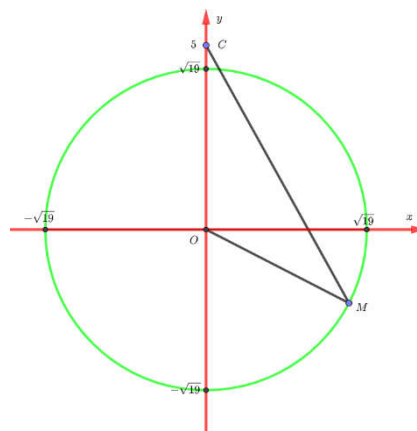
+Trong mặt phẳng phức, gọi  $A(z_1), B(z_2), C(5i), M(3z_1 + z_2)$ ; Vì  $\begin{cases} |z_1| = 1 \\ |z_2| = 2 \\ |z_1 - z_2| = \sqrt{3} \end{cases}$  nên  $A$  thuộc

đường tròn tâm  $O(0;0)$  bán kính  $R_1 = 1$ ,  $B$  thuộc đường tròn tâm  $O(0;0)$  bán kính  $R_2 = 2$ , và  $AB = \sqrt{3}$ .

$$+Ta\ có \begin{cases} \overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OM}^2 = 9\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + 6\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - 2\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB} \end{cases}$$

$$\Rightarrow OM^2 = 9OA^2 + OB^2 + 6 \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2} = 19 \Rightarrow OM = \sqrt{19} \Rightarrow M \text{ thuộc đường tròn tâm}$$

$O(0;0)$  bán kính  $R_3 = \sqrt{19}$ .



$+|3z_1 + z_2 - 5i| = MC \leq MO + OC = 5 + \sqrt{19}$ . Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $O$  thuộc đoạn thẳng  $MC$ . Như vậy, rõ ràng tồn tại các số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn điều kiện bài toán và  $|3z_1 + z_2 - 5i| = 5 + \sqrt{19}$ . Vậy  $\max |3z_1 + z_2 - 5i| = 5 + \sqrt{19} \Rightarrow$  **Chọn B.**

#### Bình luận:

1. Đây là câu hỏi VDC, câu hỏi này đã xuất hiện trong đề thi thử của trường chuyên Đại học Vinh năm 2018. Điểm then chốt của câu hỏi này là phải tính được  $|3z_1 + z_2|$ .

2. Những BĐT mô đun hay dùng:

$|z + z_1| + |-z - z_2| \geq |z_1 - z_2|$  (1). Đẳng thức ở (1) xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} z + z_2 = 0 \\ \begin{cases} z + z_2 \neq 0 \\ \exists k \in \mathbb{R}, k \geq 0 : z + z_1 = k(-z - z_2) \end{cases} \\ \exists k \in \mathbb{R}, 0 \leq k \leq 1 : z + z_1 = k(z_1 - z_2) \end{cases}$$

$\|z + z_1\| - \|-z - z_2\| \leq \|z_1 - z_2\| \Leftrightarrow \|z + z_1\| + \|z + z_2\| \geq 2\left\|z + \frac{z_1 + z_2}{2}\right\|$  (2). Vậy đẳng thức ở (2) xảy ra

$$\text{khi và chỉ khi } \begin{cases} z + z_2 = 0 \\ z + z_2 \neq 0 \\ \exists k \in \mathbb{R}, k \leq 0: z + z_1 = k[-z - z_2] \\ \exists k \in \mathbb{R}, k \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty): z + z_1 = k(z_1 - z_2) \end{cases}.$$

3. Tập hợp điểm biểu diễn số phức

+ Trong mặt phẳng phức, số phức  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) được biểu diễn bằng

- Điểm  $M(x; y)$ , kí hiệu  $M(z)$ .

- Véc tơ  $\overrightarrow{OM} = (x; y)$ .

- Véc tơ  $\vec{u} = (x; y)$ .

+ Biểu diễn hình học của  $z_1 + z_2, z_1 - z_2, kz_1$  ( $k \in \mathbb{R}$ ).

Gọi  $M, \vec{u}$  lần lượt biểu diễn số phức  $z_1$ ; Gọi  $N, \vec{v}$  lần lượt biểu diễn số phức  $z_2$ . Ta có  $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$  và  $\vec{u} + \vec{v}$  biểu diễn số phức  $z_1 + z_2$ ;  $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}$  và  $\vec{u} - \vec{v}$  biểu diễn số phức  $z_1 - z_2$ ;  $k\overrightarrow{OM}$  và  $k\vec{u}$  biểu diễn số phức  $kz_1$ .

+ Với  $M, A, B$  lần lượt biểu diễn số phức  $z, z_1, z_2$  thì  $OM = |z|$ ;  $AB = |z_2 - z_1|$ .

4. Tìm được  $\min|3z_1 + z_2 - 5i|$  bằng BĐT  $|(3z_1 + z_2) + (-5i)| \geq \|3z_1 + z_2\| - \|-5i\| = 5 - \sqrt{19}$ .

**Hướng Phát Triển:**

**Hướng 1: Khai thác BDT**  $|z + z_1| + |z + z_2| \geq 2\left|z + \frac{z_1 + z_2}{2}\right|$ .

**Câu 1:** [Sở GD & ĐT Phú Thọ-2021] Có bao nhiêu số phức  $z$  có phần thực, phần ảo là các số nguyên đồng thời thỏa mãn  $|z| < 7$  và  $|z| + |z - 1 - i| = |z + 1 + i| + |z - 2 - 2i|$ ?

A. 6.

B. 7.

C. 8.

D. 9.

**Định hướng:**

+ Khai thác giả thiết  $|z| + |z - 1 - i| = |z + 1 + i| + |z - 2 - 2i|$ . Nghĩ đến BDT

$$|z + z_1| + |z + z_2| \geq 2\left|z + \frac{z_1 + z_2}{2}\right|.$$

+ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $z + z_1 = k(z_1 - z_2)$ ;  $k \in \mathbb{R}, k \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$ .

**Lời giải**

+ Áp dụng BDT  $|z + z_1| + |z + z_2| \geq 2\left|z + \frac{z_1 + z_2}{2}\right|$  ta có:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} |z+1+i|+|z-1-i| \geq 2|z| \\ |z-2-2i|+|z| \geq 2|z-1-i| \end{cases} \Rightarrow |z+1+i|+|z-2-2i| \geq |z|+|z-1-i| \\ & \Rightarrow \begin{cases} z+1+i = k[z+1+i-(z-1-i)]; k \in \mathbb{R}, k \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty) \\ z = m[z-(z-2-2i)]; m \in \mathbb{R}, m \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty) \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} z = (2k-1)(1+i); k \in \mathbb{R}, k \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty) \\ z = 2m(1+i); m \in \mathbb{R}, m \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty) \end{cases} \Rightarrow z = x(1+i); x \in \mathbb{Z}, x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty). \\ & + \forall i |z| < 7 \Rightarrow |x|\sqrt{2} < 7 \Rightarrow x \in \{-4; -3; -2; -1; 2; 3; 4\} \Rightarrow \text{Chọn B.} \end{aligned}$$

**Hướng 2: Khai thác BĐT**  $\|z+z_1|-|-z-z_2\| \leq \|(z+z_1)+(-z-z_2)\| \leq |z+z_1|+|-z-z_2|$ .

**Câu 2:** [Sở GD & ĐT Hòa Bình-2021] Xét các số phức  $z, w$  thỏa mãn  $|z| = 2, |w-3+2i| = 1$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $H = |z^2 - 2zw - 4|$  bằng

- A.  $16\sqrt{2}$ . B.  $18\sqrt{2}$ . C. 8. D. 24.

**Định hướng:**

+ Biến đổi kết luận:  $H = |z^2 - 2zw - z\bar{z}| = |2z| \left| \frac{z-\bar{z}}{2} - w \right| = 4 \left| \frac{z-\bar{z}}{2} - w \right|$ .

+ Để tìm  $\max H$ , biến đổi  $H = 4 \left| \left( \frac{z-\bar{z}}{2} - 3 + 2i \right) - (w-3+2i) \right|$ .

**Lời giải**

+  $\forall i \left( \frac{z-\bar{z}}{2i} \right)^2 = |z|^2 - \left( \frac{z+\bar{z}}{2} \right)^2 \leq |z|^2 = 4$  nên  $0 \leq \frac{z-\bar{z}}{2i} + 2 \leq 4 \Rightarrow \left( \frac{z-\bar{z}}{2i} \right)^2 \leq 16$ .

+ Ta có  $H = |z^2 - 2zw - z\bar{z}| = |2z| \left| \frac{z-\bar{z}}{2} - w \right| = 4 \left| \frac{z-\bar{z}}{2} - w \right| = 4 \left| \left( \frac{z-\bar{z}}{2} - 3 + 2i \right) - (w-3+2i) \right|$   
 $\leq 4 \left| \frac{z-\bar{z}}{2} - 3 + 2i \right| + 4|w-3+2i| = 4 + 4 \left| -3 + \left( \frac{z-\bar{z}}{2i} + 2 \right)i \right| = 4 + 4 \sqrt{9 + \left( \frac{z-\bar{z}}{2i} + 2 \right)^2} \leq 24$ .

+ Khi  $\begin{cases} z = 2i \\ w = \frac{18}{5} - \frac{14}{5}i \end{cases}$  (thỏa mãn điều kiện đề bài) thì  $H = 24$ . Vậy  $\max H = 24 \Rightarrow \text{Chọn D.}$

**Nhận xét:**

1. Tìm min  $H$ :

+  $H = 4 \left| \left( \frac{z-\bar{z}}{2} - 3 + 2i \right) - (w-3+2i) \right| \geq 4 \left| \frac{z-\bar{z}}{2} - 3 + 2i \right| - 4|w-3+2i| = 4 \left| -3 + \left( \frac{z-\bar{z}}{2i} + 2 \right)i \right| - 4$   
 $= 4 \sqrt{9 + \left( \frac{z-\bar{z}}{2i} + 2 \right)^2} - 4 \geq 8$ .

+ Khi  $\begin{cases} z = -2i \\ w = 2 - 2i \end{cases}$  (thỏa mãn điều kiện đề bài) thì  $H = 8$ . Vậy min  $H = 8$ .

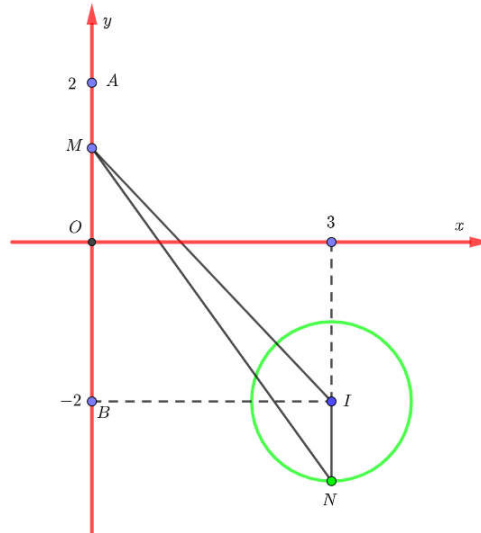
2. Biểu diễn hình học số phức



Trong mặt phẳng phức, gọi  $M\left(\frac{z-\bar{z}}{2}\right)$ ,  $N(w)$  thì  $NM = \left|\frac{z-\bar{z}}{2} - w\right|$ ; Vì

$$\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 = |z|^2 - \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 \leq |z|^2 = 4 \Rightarrow -2 \leq \frac{z-\bar{z}}{2i} \leq 2 \text{ nên điểm } M \text{ thuộc đoạn thẳng } AB \text{ với}$$

$A(0;2)$ ,  $B(0;-2)$ ; Vì  $|w-(3-2i)|=1$   $N$  là điểm thuộc đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(3;-2)$ , bán kính  $r=1$ .



+ Ta có  $NM + IN \geq MI \Rightarrow NM \geq MI - 1 \geq IB - 1 = 2 \Rightarrow H \geq 8$  (Chú ý  $IB \perp AB$ ).

+  $NM \leq NI + IM = 1 + MI \leq 1 + \max\{IA; IB\} = 6 \Rightarrow H \leq 24$ .

**Câu 3:** [Sưu Tầm Trên Nhóm Giáo Viên Toán Việt Nam] Xét hai số phức  $z_1, z_2$  thay đổi thỏa mãn  $|z_1 + 1 + i| = 2$ ,  $|z_2 + 1 + i| = 2$  và  $|z_1| + |z_2| = |z_1 - z_2|$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $|z_1 - 2z_2|$  bằng

**A. 0.**                      **B. 1.**                      **C. 2.**                      **D. 4.**

**Định hướng:**

Thấy ngay từ  $|z_1| + |z_2| = |z_1 - z_2| \Rightarrow z_1 = k(-z_2)$  với  $k \in \mathbb{R}, k > 0$ . Từ đây sẽ có  $|z_1 - 2z_2| = (k+2)|z_2|$ . Sẽ đi tính  $|z_2|$  theo  $k$ .

**Lời giải**

+Ta có  $|z_1| + |z_2| = |z_1 - z_2| \Leftrightarrow |z_1| + |-z_2| = |z_1 - z_2| \Rightarrow z_1 = k(-z_2)$  với  $k \in \mathbb{R}, k > 0$ . Chú ý rằng  $z_1, z_2$  đều khác 0.

$$\begin{aligned} + \begin{cases} |z_2 + 1 + i| = 2 \\ |-kz_2 + 1 + i| = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} |z_2|^2 + |1+i|^2 + z_2(\overline{1+i}) + \overline{z_2}(1+i) = 4 \\ k^2|z_2|^2 + |1+i|^2 - k[z_2(\overline{1+i}) + \overline{z_2}(1+i)] = 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z_2(\overline{1+i}) + \overline{z_2}(1+i) = 2 - |z_2|^2 \\ z_2(\overline{1+i}) + \overline{z_2}(1+i) = \frac{k^2|z_2|^2 - 2}{k} \end{cases} \Rightarrow \frac{k^2|z_2|^2 - 2}{k} = 2 - |z_2|^2 \Leftrightarrow |z_2| = \sqrt{\frac{2}{k}}. \end{aligned}$$

$$+ |z_1 - 2z_2| = (k+2)|z_2| = \sqrt{2k} + 2\sqrt{\frac{2}{k}} \geq 2\sqrt{\sqrt{2k} \cdot 2\sqrt{\frac{2}{k}}} = 4.$$

+Khi  $z_1 = -\frac{1+\sqrt{7}}{2} - \frac{1-\sqrt{7}}{2}i, z_2 = \frac{1+\sqrt{7}}{4} + \frac{1-\sqrt{7}}{4}i$  và thỏa mãn điều kiện đề bài thì  $|z_1 - 2z_2| = 4$ . Vậy  $\min|z_1 - 2z_2| = 4 \Rightarrow$  **Chọn D.**

**Câu 4:** [Sở GD & ĐT Hải Phòng-2021] Xét hai số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1 - z_2| = 3$  và  $|z_1 + 6 - 8i| = 7 - |z_2|$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức  $P = |z_1 + 2z_2 + 21 - 3i|$ . Khi đó giá trị của  $M^2 - m^2$  bằng

A. 220. B. 223. C. 224. D. 225.

**Định hướng:**

+Khai thác giả thiết. Từ giả thiết, không thể tính được  $|z_1 + 2z_2|$ . Nhận thấy xuất hiện số  $3; 7; 10 = |6 - 8i|$ .

$$+7 = |z_1 + 6 - 8i| + |-z_2| \geq |(z_1 - z_2) + (6 - 8i)| \geq |z_1 - z_2| - |6 - 8i| = 7.$$

**Lời giải**

+Ta có  $7 = |z_1 + 6 - 8i| + |-z_2| \geq |(z_1 - z_2) + (6 - 8i)| \geq |z_1 - z_2| - |6 - 8i| = 7$ . Suy ra

$$\begin{cases} z_1 - z_2 = k(6 - 8i); k \in \mathbb{R}, k < 0 \\ -z_2 = m(z_1 - z_2 + 6 - 8i); m \in \mathbb{R}, 0 \leq m \leq 1 \end{cases}. \text{ Vì } |z_1 - z_2| = 3 \Rightarrow z_1 - z_2 = -\frac{3}{5}(3 - 4i).$$

$$+ \begin{cases} z_1 = -\frac{7m}{5}(3 - 4i) - \frac{3}{5}(3 - 4i) \\ z_2 = -\frac{7m}{5}(3 - 4i) \end{cases} \Rightarrow z_1 + 2z_2 + 21 - 3i = \frac{3}{5}[(-21m + 32) + (28m - 1)i]$$

$$\Rightarrow P = \frac{3}{5}\sqrt{(-21m + 32)^2 + (28m - 1)^2} = 3\sqrt{49m^2 - 56m + 41}.$$

+Vì  $0 \leq m \leq 1$  nên  $P = 3\sqrt{7m(7m - 8) + 41} \leq 3\sqrt{41}$ ;  $P = 3\sqrt{(7m - 4)^2 + 25} \geq 15$ . Khi

$$\begin{cases} z_1 = -\frac{3}{5}(3 - 4i) \\ z_2 = 0 \end{cases} \text{ và thỏa mãn điều kiện đề bài thì } P = 3\sqrt{41}; \text{ Khi } \begin{cases} z_1 = -\frac{7}{5}(3 - 4i) \\ z_2 = -\frac{4}{5}(3 - 4i) \end{cases} \text{ và thỏa}$$

mãn điều kiện đề bài thì  $P = 15$ .

+Kết luận:  $M = 3\sqrt{41}$ ;  $m = 15 \Rightarrow M^2 - m^2 = 144 \Rightarrow$  **Chọn E.**

**Hướng 3: Biểu diễn hình học các số phức**

**Câu 5:** [Sưu Tầm Trên Nhóm Giáo Viên Toán Việt Nam] Xét hai số phức  $z_1, z_2$  thay đổi thỏa mãn  $|z_1 + 1 + i| = 2$ ,  $|z_2 + 1 + i| = 2$  và  $|z_1| + |z_2| = |z_1 - z_2|$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $|z_1 - 2z_2|$  bằng

A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

**Định hướng:**

+  $A(z_1), B(z_2)$  thuộc đường tròn  $(T)$  có tâm  $I(-1;-1)$  bán kính  $R = 2$ ; Vì  $|z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2|$   
 $\Rightarrow AB = OA + OB$  nên  $O$  thuộc đoạn thẳng  $AB$ . Vì  $O \notin (T)$  nên  $OA.OB = OC.OD$  với  $C, D$  là  
 giao điểm của  $(T)$  và đường thẳng  $(d)$  qua  $O$ .

+ Bằng tính toán thấy  $|z_1 - 2z_2| = OA + 2OB$ .

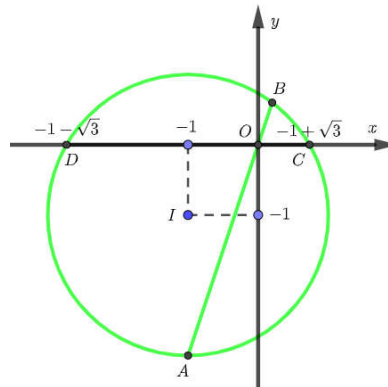
**Lời giải**

+ Trong mặt phẳng phức, gọi  $A(z_1), B(z_2), C(-1 + \sqrt{3} + 0i)$  và  $D(-1 - \sqrt{3} + 0i)$ ; Vì

$$\begin{cases} |z_1 + 2 - 2i| = 2 \\ |z_2 + 2 - 2i| = 2 \end{cases} \text{ nên } A, B \text{ thuộc đường tròn } (T) \text{ có tâm } I(-1; -1) \text{ bán kính } R = 2; \text{ Vì}$$

$$|z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2| \Rightarrow AB = OA + OB \text{ nên } O \text{ thuộc đoạn thẳng } AB. \text{ Rõ ràng } C, D \in (T).$$

$$\begin{aligned} + \text{Ta có } OA.OB &= OC.OD = |-1 + \sqrt{3}| \cdot |-1 - \sqrt{3}| = 2; |z_1 - 2z_2| = \sqrt{|\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB}|^2} \\ &= \sqrt{\overrightarrow{OA}^2 + 4\overrightarrow{OB}^2 - 4\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}} = \sqrt{OA^2 + 4OB^2 + 4OA.OB} = OA + 2OB \geq 2\sqrt{OA.2OB} = 4. \end{aligned}$$



+ Khi  $z_1 = -\frac{1+\sqrt{7}}{2} - \frac{1-\sqrt{7}}{2}i, z_2 = \frac{1+\sqrt{7}}{4} + \frac{1-\sqrt{7}}{4}i$  và thỏa mãn điều kiện đề bài thì  
 $|z_1 - 2z_2| = 4$ . Vậy  $\min |z_1 - 2z_2| = 4 \Rightarrow$  **Chọn D.**

**Câu 6:** [Đông Hà Quảng Trị -2021] Xét các số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1 + 2 - 2i| = 4, |z_2 + 2 - 2i| = 4$  và  
 $|z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2|$ . Giá trị lớn nhất của  $|z_1 + z_2 + 5|$  bằng

- A.  $2\sqrt{2} + 5\sqrt{13}$ . B.  $\sqrt{13}$ . C.  $2\sqrt{2} + \sqrt{13}$ . D.  $\sqrt{2} + 3\sqrt{13}$ .

**Định hướng:**

+ Từ giả thiết thấy ngay  $A(z_1), B(z_2)$  thuộc đường tròn tâm  $I(-2; 2)$  bán kính  $R_1 = 4$ ; Vì  
 $|z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2| \Rightarrow AB = OA + OB$  nên  $O$  thuộc đoạn thẳng  $AB$ .

+ Từ kết luận, ta phải tìm tập hợp điểm  $C(z_1 + z_2)$ .

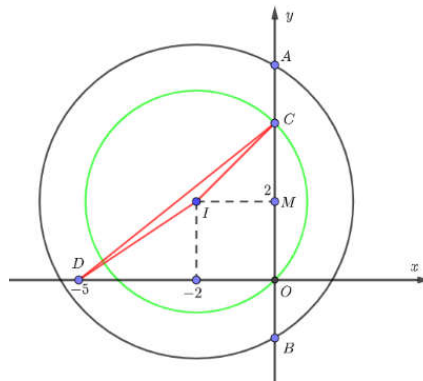
**Lời giải**

+ Trong mặt phẳng phức, gọi  $A(z_1), B(z_2), C(z_1 + z_2)$ . Gọi  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng

$$AB \text{ và } D(-5; 0); \text{ Vì } \begin{cases} |z_1 + 2 - 2i| = 4 \\ |z_2 + 2 - 2i| = 4 \end{cases} \text{ nên } A, B \text{ thuộc đường tròn tâm } I(-2; 2) \text{ bán kính } R_1 = 4$$

; Vì  $|z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2| \Rightarrow AB = OA + OB$  nên  $O$  thuộc đoạn thẳng  $AB$ .

+ Vì  $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MC} \Rightarrow M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $OC$  nên  $O, C$  đối xứng với nhau qua đường thẳng  $IM$ . Do vậy  $IC = IO = 2\sqrt{2} \Rightarrow C$  thuộc đường tròn tâm  $I$  bán kính  $R_2 = 2\sqrt{2}$ .



+Ta có  $|z_1 + z_2 + 5| = CD \leq CI + ID = 2\sqrt{2} + \sqrt{13}$ . Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $I$  thuộc đoạn thẳng  $CD$ . Như vậy, rõ ràng tồn tại các số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn điều kiện bài toán và  $|z_1 + z_2 + 5| = 2\sqrt{2} + \sqrt{13}$ . Vậy  $\max |z_1 + z_2 + 5| = 2\sqrt{2} + \sqrt{13} \Rightarrow$  **Chọn C.**

**Câu 7:** [Chuyên Lê Khiết Quảng Ngãi-L1/N2021] Xét các số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn điều kiện  $|z_1 - (1+i)| = 1, |z_2 - (2-i)| = 2$ . Số phức  $z$  thay đổi sao cho  $\overline{(z - z_1)} \cdot (1+i - z_1)$  và  $(z - z_2) \cdot \overline{(z_2 - 2 + i)}$  là số thuần ảo. Giá trị nhỏ nhất của  $|z - (3 - 2i)|$  bằng

- A.  $\frac{11}{5}$ .                      B. 3.                      C.  $2 - \sqrt{2}$ .                      D.  $\sqrt{13} - 1$ .

**Định hướng:**

+Khai thác được giả thiết:  $\overline{(z - z_1)} \cdot (1+i - z_1)$  và  $(z - z_2) \cdot \overline{(z_2 - 2 + i)}$  là số thuần ảo. Trong mặt phẳng phức, gọi  $A(z_1), B(z_2), M(z), I(1+i), K(2-i)$  thì  $\overline{MA} \perp \overline{IA}, \overline{MB} \perp \overline{KB}$ .

**Lời giải**

+Bài toán phụ: Trong mặt phẳng phức, gọi véc tơ  $\vec{u}, \vec{v}$  theo thứ tự biểu diễn số phức  $z, w$ . Khi đó,  $\vec{u}\vec{v} = 0 \Leftrightarrow z\bar{w}$  là số thuần ảo.

Chứng minh

$$z = a + bi, w = c + di \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}) \text{ thì } z\bar{w} + w\bar{z} = (a + bi)(c - di) + (a - bi)(c + di) \\ = 2(ac + bd) = 2\vec{u}\vec{v}.$$

$$z\bar{w} \text{ là số thuần ảo} \Leftrightarrow z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} = 0 \Leftrightarrow z\bar{w} + \bar{z}w = 0 \Leftrightarrow z\bar{w} + w\bar{z} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}\vec{v} = 0.$$

+Trong mặt phẳng phức, gọi  $A(z_1), B(z_2), I(1+i), K(2-i), M(z)$  thì từ giả thiết suy ra:

$\overline{MA} \cdot \overline{IA} = 0, \overline{MB} \cdot \overline{KB} = 0$ ; Điểm  $A$  thuộc đường tròn  $(C_1)$  tâm  $I$  bán kính  $r_1 = 1$  và điểm  $B$  thuộc đường tròn  $(C_2)$  tâm  $K$  bán kính  $r_2 = 2$ .

$$+ \overrightarrow{MA} = \vec{0} \text{ thì } M \equiv A \Rightarrow |z - (1+i)| = 1 \Rightarrow |z - (3-2i)| = |(z-1-i) + (-2+3i)| \\ \geq |z-1-i| - |-2+3i| = \sqrt{13} - 1.$$

$$+ \overrightarrow{MB} = \vec{0} \text{ thì } M \equiv B \Rightarrow |z - (2-i)| = 2. \text{ Từ đây có } |z - (3-2i)| = |(z-2+i) + (-1+i)| \\ \geq |z-2+i| - |-1+i| = 2 - \sqrt{2}. \text{ Khi } z = (2 + \sqrt{2}) - (1 + \sqrt{2})i \text{ (thỏa mãn điều kiện đề bài) thì} \\ |z - (3-2i)| = 2 - \sqrt{2}.$$

$+\overrightarrow{MA}$  và  $\overrightarrow{MB}$  đều khác  $\vec{0}$  thì  $M$  nằm ngoài  $(C_1)$  đồng thời nằm ngoài  $(C_2)$ . Trong trường hợp này, luôn có  $|z - (3-2i)| > \min\{2 - \sqrt{2}; \sqrt{13} - 1\}$ . So sánh ba trường hợp ta có  $\min|z - (3-2i)| = 2 - \sqrt{2} \Rightarrow$  **Chọn C.**

**Câu 50**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(2;1;3)$  và  $B(6;5;5)$ . Xét khối nón  $(N)$  có đỉnh  $A$ , đường tròn đáy nằm trên mặt cầu đường kính  $AB$ . Khi  $(N)$  có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng chứa đường tròn đáy của  $(N)$  có phương trình dạng  $2x + by + cz + d = 0$ . Giá trị của  $b + c + d$  bằng

A. -21.

B. -12.

C. -18.

D. -15.

Facebook: Trương Quốc Toàn – Tạ Minh Đức – Trương Đức Thịnh – DucThanh Phạm

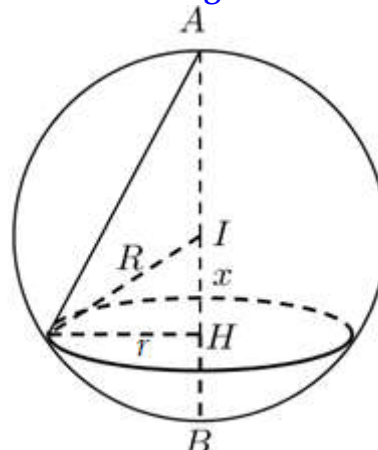
**Phân tích định hướng tìm lời giải:**

- Đây là bài toán lập phương trình mặt phẳng chứa đường tròn đáy của một hình nón, ứng với trường hợp thể tích của khối nón đạt giá trị lớn nhất;
- Để lập phương trình mặt phẳng chúng ta cần xác định hai yếu tố: một điểm thuộc mặt phẳng và một vectơ pháp tuyến;
- Trong bài toán này, hai yếu tố trên chỉ xác định được khi thể tích khối nón đạt giá trị lớn nhất. Từ đó, chúng ta quy về bài toán tìm giá trị lớn nhất của khối nón  $(N)$ ;

+ Xác định chiều cao  $h$  và bán kính đáy  $r$  của khối nón  $(N)$ .

+ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

**Lời giải**



Mặt cầu đường kính  $AB$  có tâm  $I(4;3;4)$  là trung điểm của  $AB$  và có bán kính  $R = \frac{AB}{2} = 3$ . Gọi  $h, r$  là chiều cao và bán kính đáy khối nón  $(N)$ ;  $H$  là tâm đường tròn đáy của  $(N)$ .

Đặt  $IH = x (0 \leq x < R)$ . Ta có:  $r^2 = R^2 - IH^2 = R^2 - x^2$ ;  $h = x + R$

Thể tích khối nón  $(N)$ :  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (R^2 - x^2)(R + x)$

Xét hàm số  $f(x) = -x^3 - Rx^2 + R^2x + R^3$  với  $0 \leq x < R$

Ta có:  $f'(x) = -3x^2 - 2Rx + R^2$ ;  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{R}{3}$

Từ đó, ta tìm được  $V_{\max}$  khi  $h = \frac{4R}{3} \Rightarrow AH = 4, BH = 2$ .

Gọi  $H(x; y; z)$ , khi đó:  $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} \Rightarrow H = \left(\frac{14}{3}; \frac{11}{3}; \frac{13}{3}\right)$ .

Do đó, mặt phẳng chứa đường tròn đáy của  $(N)$  đi qua  $H$  và nhận  $\overrightarrow{AB}$  làm vectơ pháp

tuyến có phương trình là:  $2\left(x - \frac{14}{3}\right) + 2\left(y - \frac{11}{3}\right) + 1\left(z - \frac{13}{3}\right) = 0 \Rightarrow 2x + 2y + z - 21 = 0$ .

Vậy  $b + c + d = -18$ . Suy ra **Chọn C**.

#### **Bình luận:**

- Đây là bài toán lập phương trình mặt phẳng, để xác định các yếu tố lập được phương trình của mặt phẳng nói trên học sinh phải có kiến thức tổng hợp liên quan đến thể tích khối nón, giá trị lớn nhất của hàm số trên một khoảng. Đặc biệt, học sinh phải nhận ra mẫu chốt của bài toán là các yếu tố chỉ được xác định khi khối nón đạt thể tích lớn nhất. Đây là câu hỏi kiểm tra kiến thức ở mức độ VDC.

- Có thể tìm giá trị lớn nhất của  $V = \frac{1}{3} \pi (R^2 - x^2)(R + x)$  bằng cách sử dụng bất đẳng thức

Côsi cho ba số dương như sau:

$$V = \frac{1}{6} \pi (2R - 2x)(R + x)(R + x) \leq \frac{\pi}{6} \left( \frac{(2R - 2x) + (R + x) + (R + x)}{3} \right)^3 = \frac{32\pi R^3}{81}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $x = \frac{R}{3}$ .

#### **Hướng phát triển:**

**Hướng phát triển 1:** Dữ nguyên giả thiết bài toán, thay đổi kết luận. Tính giá trị biểu thức liên quan đến các hệ số phương trình mặt phẳng chứa đáy của khối nón khi khối nón có diện tích xung quanh lớn nhất

**Hướng phát triển 2:** Thay đổi giả thiết khối nón bằng khối trụ có trục nằm trên đường thẳng  $AB$ , đường tròn đáy nằm trên mặt cầu đường kính  $AB$ . Tính giá trị biểu thức liên quan đến các hệ số của phương trình hai mặt phẳng song song đồng thời chứa hai đáy của khối trụ khi khối trụ có thể tích lớn nhất.

**Hướng phát triển 3:** Thay đổi giả thiết bài toán cho điểm  $A$ , mặt cầu  $(S)$  và một mặt phẳng  $(P)$  cố định. Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $A$  tiếp xúc với mặt cầu  $(S)$  và cắt  $(P)$  tại  $B$  sao cho  $AB$  nhỏ nhất.

**Hướng phát triển 4:** Thay đổi giả thiết khối nón ( $N$ ) có đỉnh  $A$ , đường tròn đáy là giao của mặt phẳng ( $\alpha$ ) qua  $B$  với mặt cầu  $S(O; OA)$ . Mặt phẳng ( $P$ ) đi qua hai điểm  $A, B$ . Thay đổi kết luận khi diện tích thiết diện của hình nón cắt bởi mặt phẳng ( $P$ ) có giá trị lớn nhất thì mặt phẳng ( $P$ ) có phương trình là?

**Bài tập tương tự**

**Câu 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(2;1;3)$  và  $B(6;5;5)$ . Xét khối nón ( $N$ ) có đỉnh  $A$ , đường tròn đáy nằm trên mặt cầu đường kính  $AB$ . Khi ( $N$ ) có diện tích xung quanh lớn nhất thì mặt phẳng chứa đường tròn đáy của ( $N$ ) có phương trình là

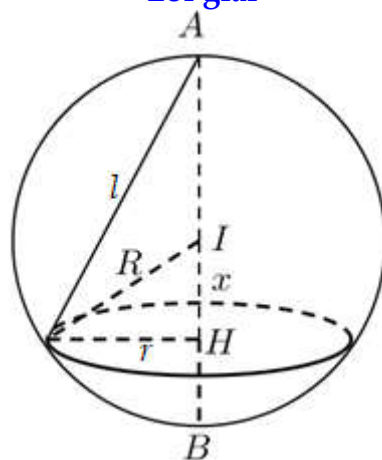
A.  $8x + 8y + 2z - 21 = 0$ .

B.  $2x + 2y + z - 21 = 0$ .

C.  $8x + 8y - 4z - 21 = 0$ .

D.  $2x + 2y - z - 21 = 0$ .

**Lời giải**



Mặt cầu đường kính  $AB$  có tâm  $I(4;3;4)$  là trung điểm của  $AB$  và có bán kính  $R = \frac{AB}{2} = 3$ . Gọi  $h, r$  là chiều cao và bán kính đáy khối nón ( $N$ );  $H$  là tâm đường tròn đáy của ( $N$ ).

Đặt  $IH = x (0 \leq x < R)$ . Ta có:  $r^2 = R^2 - IH^2 = R^2 - x^2$ ;  $l = \sqrt{(R+x)^2 + R^2 - x^2} = \sqrt{2xR + 2R^2}$

Diện tích xung quanh của khối nón ( $N$ ):

$$S_{xq} = \pi r l = \frac{1}{3} \pi \sqrt{(R^2 - x^2)(2xR + 2R^2)} = \frac{\pi}{3} \sqrt{2R(R^2 - x^2)(x + R)}$$

Xét hàm số  $f(x) = -x^3 - Rx^2 + R^2x + R^3$  với  $0 \leq x < R$

Ta có:  $f'(x) = -3x^2 - 2Rx + R^2$ ;  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{R}{3}$

Từ đó, ta suy ra  $S_{xq}$  đạt giá trị lớn nhất khi  $h = \frac{4R}{3} \Rightarrow AH = 4, BH = 2$ .

Gọi  $H(x; y; z)$ , khi đó:  $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} \Rightarrow H = \left(\frac{14}{3}; \frac{11}{3}; \frac{13}{3}\right)$ .

Do đó, mặt phẳng chứa đường tròn đáy của ( $N$ ) đi qua  $H$  và nhận  $\overrightarrow{AB}$  làm vectơ pháp tuyến có phương trình là:  $2\left(x - \frac{14}{3}\right) + 2\left(y - \frac{11}{3}\right) + 1\left(z - \frac{13}{3}\right) = 0 \Rightarrow 2x + 2y + z - 21 = 0$ .

Suy ra **Chọn B**.



**Câu 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1;0;0), B(3;4;-4)$ . Xét khối trụ  $(T)$  có trục là đường thẳng  $AB$  và có hai đường tròn đáy nằm trên mặt cầu đường kính  $AB$ . Khi  $(T)$  có thể tích lớn nhất, hai đáy của  $(T)$  nằm trên hai mặt phẳng song song lần lượt có phương trình là  $x + by + cz + d_1 = 0$  và  $x + by + cz + d_2 = 0$ . Khi đó giá trị của biểu thức  $b + c + d_1 + d_2$  thuộc khoảng nào sau đây?

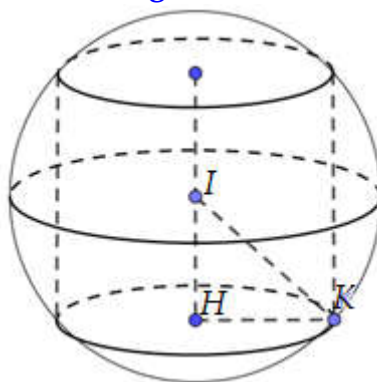
A.  $(0;21)$ .

B.  $(-11;0)$ .

C.  $(-29;-18)$ .

D.  $(-20;-11)$ .

Lời giải



Mặt cầu đường kính  $AB$  có tâm  $I(2;2;-2)$  và bán kính bằng 3.

Gọi  $x$  ( $0 < x < 3$ ) là bán kính đáy của  $(T)$ , khi đó  $(T)$  có chiều cao bằng  $h = 2\sqrt{9-x^2}$ , do đó thể tích của  $(T)$  bằng

$$V = 2\pi x^2 \sqrt{9-x^2} = 4\pi \cdot \sqrt{\frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot (9-x^2)} \leq 4\pi \sqrt{\left(\frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + (9-x^2)}{3}\right)^3} = 12\pi\sqrt{3}.$$

$(T)$  có thể tích lớn nhất bằng  $V_{\max} = 12\pi\sqrt{3}$  khi  $x = \sqrt{6}$ .

Khi đó gọi  $(P)$  là mặt phẳng chứa đường tròn đáy của  $(T)$ ,  $(P)$  có phương trình tổng quát dạng  $x + 2y - 2z + d = 0$ . Khoảng cách từ tâm  $I(2;2;-2)$  đến  $(P)$  bằng  $\sqrt{3}$  nên

$$\frac{|2 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-2) + d|}{3} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 3\sqrt{3} - 10 \\ d = -3\sqrt{3} - 10 \end{cases}.$$

Vậy  $b + c + d_1 + d_2 = 2 - 2 + 3\sqrt{3} - 10 - 3\sqrt{3} - 10 = -20$ . Suy ra **Chọn C**.

**Câu 3:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 9$  và mặt phẳng  $(P): 2x + y - 2z + 1 = 0$ . Đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $O$  tiếp xúc với mặt cầu  $(S)$  và cắt  $(P)$  tại  $A$  sao cho  $OA$  nhỏ nhất có phương trình là

A.  $\Delta: \frac{x}{10} = \frac{y}{7} = \frac{z}{2}$ .

B.  $\Delta: \frac{x}{-10} = \frac{y}{7} = \frac{z}{2}$ .

C.  $\Delta: \frac{x}{-10} = \frac{y}{-7} = \frac{z}{2}$ .

D.  $\Delta: \frac{x}{-10} = \frac{y}{7} = \frac{z}{-2}$ .

Lời giải

Ta thấy  $O(0;0;0)$  thuộc mặt cầu  $(S)$ .

Mặt phẳng  $(Q)$  đi qua  $O$  và tiếp xúc mặt cầu  $(S)$  có phương trình  $(Q): x + 2y - 2z = 0$ .

Khi đó  $\Delta \subset (Q)$ .

Gọi  $d = (P) \cap (Q)$  và  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $O$  lên đường thẳng  $d$ .

Vì  $A$  là giao điểm của  $\Delta$  và  $(P)$ ,  $\Delta \subset (Q)$ ,  $d = (P) \cap (Q)$



$\Rightarrow A \in d$ . Do đó  $OA \geq OH$ .

$\Rightarrow OA_{\min} = OH$ , dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow H \equiv A$

Khi đó đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $O$  và  $H$ , tức là  $\Delta$  đi qua điểm  $O$ , cắt và vuông góc với  $d$ . Mặt phẳng  $(P), (Q)$  lần lượt có vectơ pháp tuyến là  $\vec{u}_1 = (2; 1; -2)$  và  $\vec{u}_2 = (1; 2; -2)$ .

Đường thẳng  $d$  có vectơ chỉ phương  $\vec{u}_d = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (2; 2; 3)$

Mặt khác  $\Delta \subset (Q)$ , đường thẳng  $\Delta$  có một vectơ chỉ phương  $\vec{u}_\Delta = [\vec{u}_d, \vec{n}_{(Q)}] = (-10; 7; 2)$ .

Vậy phương trình đường thẳng  $\Delta: \frac{x}{-10} = \frac{y}{7} = \frac{z}{2}$ . Suy ra **Chọn B**.

**Câu 4.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A\left(0; 2; \frac{1}{2}\right)$ ,  $B\left(0; 0; \frac{5}{2}\right)$ . Xét khối nón  $(N)$  có đỉnh  $B$ , đường tròn đáy là giao của mặt phẳng  $(\alpha)$  qua  $A$  với mặt cầu  $S\left(O; \frac{5}{2}\right)$ . Mặt phẳng  $(P)$  đi qua hai điểm  $A, B$ . Khi diện tích thiết diện của hình nón cắt bởi mặt phẳng  $(P)$  có giá trị lớn nhất thì mặt phẳng  $(P)$  đi qua điểm nào sau đây?

A.  $(0; 1; 3)$

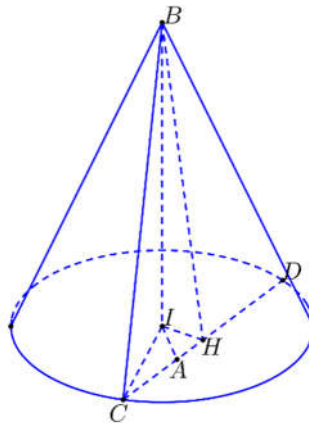
B.  $(0; 1; 3)$ .

**C.  $\left(0; -\frac{1}{2}; 3\right)$ .**

D.  $\left(0; 3; \frac{1}{2}\right)$ .

**Lời giải**

**Chọn C**



Dễ thấy mp  $(\alpha)$  nhận  $\vec{OB}$  làm véc tơ pháp tuyến nên phương trình  $(\alpha)$  là  $z - \frac{1}{2} = 0$ .

Khi đó chiều cao của khối nón  $h = d(B; (\alpha)) = 2$ , tâm đáy là  $I\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$  bán kính đường

tròn đáy  $r = \sqrt{R^2 - d^2(O; (\alpha))} = \sqrt{6}$ .

Gọi thiết diện là tam giác  $BCD$ ,  $H$  là trung điểm  $CD$ . Đặt  $IH = x, 0 \leq x \leq IA = 2$

Khi đó  $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + 4} \cdot 2\sqrt{6 - x^2} = \sqrt{-x^4 + 2x^2 + 24}$

Ta có  $S_{\triangle SAB}^2 = -x^4 + 2x^2 + 24 = f(x)$  dễ thấy  $\text{Max}_{[0;2]} f(x) = 25$  do đó  $\text{Max}_{\triangle BCD} S = 5$  đạt được

khi  $IH = 1$ .

Khi đó  $d(I; (P)) = \frac{BI \cdot IH}{\sqrt{BI^2 + IH^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ .

Gọi phương trình của  $(P)$  là  $ax+by+cz+d=0$  do  $(P)$  qua  $A\left(0;2;\frac{1}{2}\right), B\left(0;0;\frac{5}{2}\right)$  nên

$$\begin{cases} 2b+\frac{c}{2}+d=0 \\ \frac{5c}{2}+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=c \\ d=-\frac{5c}{2} \end{cases}$$

$$\text{Lại có } d(I;(P)) = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{\left|\frac{1}{2}c+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{|-2c|}{\sqrt{a^2+2c^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{3}c.$$

Từ đó ta tìm được 2 phương trình mặt phẳng là  $\pm\sqrt{3}x+y+z-\frac{5}{2}=0$ . Do đó  $\left(0;-\frac{1}{2};3\right)$  thuộc  $(P)$ .

**Câu 5.** Trong không gian tọa độ  $Oxyz$ , cho hai mặt cầu  $(S_1):x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=16$ ,  $(S_2):(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=1$  và điểm  $A\left(\frac{4}{3};\frac{7}{3};-\frac{14}{3}\right)$ . Gọi  $I$  là tâm của mặt cầu  $(S_1)$  và  $(P)$  là mặt phẳng tiếp xúc với cả hai mặt cầu  $(S_1)$  và  $(S_2)$ . Xét các điểm  $M$  thay đổi và thuộc mặt phẳng  $(P)$  sao cho đường thẳng  $IM$  tiếp xúc với mặt cầu  $(S_2)$ . Khi đoạn thẳng  $AM$  ngắn nhất thì  $M(a;b;c)$ . Tính giá trị của  $T=a+b+c$ .

A.  $T=1$ .

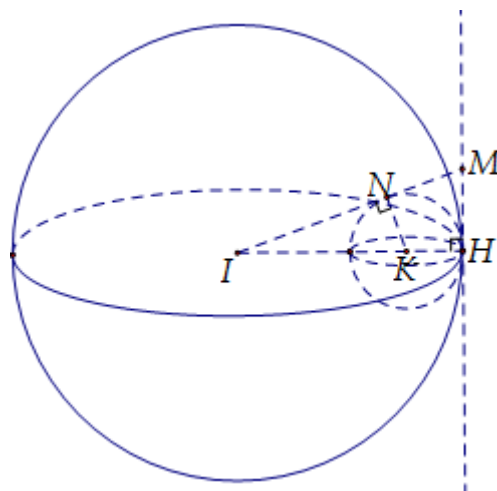
**B.  $T=-1$ .**

C.  $T=\frac{7}{3}$ .

D.  $T=-\frac{7}{3}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**



Mặt cầu  $(S_1)$  có tâm  $I(0;1;2)$  bán kính  $R_1=4$  và mặt cầu  $(S_2)$  có tâm  $K(1;-1;0)$  bán kính  $R_2=1$ .

Có  $IK=3$ , suy ra  $IK=R_1-R_2$  nên hai mặt cầu  $(S_1)$  và  $(S_2)$  tiếp xúc trong tại  $H$ .

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{IH} = \frac{4}{3}\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{IK} = (1;-2;-2) \Rightarrow H\left(\frac{4}{3};-\frac{5}{3};-\frac{2}{3}\right).$$

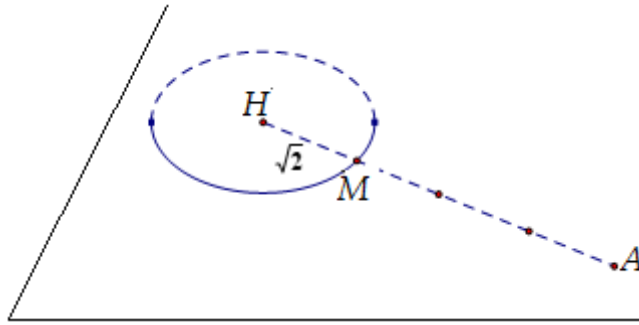
Vì  $(P)$  là mặt phẳng tiếp xúc với cả hai mặt cầu  $(S_1)$  và  $(S_2)$  nên  $(P)$  qua  $H$  và nhận vectơ  $\overrightarrow{IK}=(1;-2;-2)$  là một vectơ pháp tuyến. Suy ra phương trình mặt phẳng  $(P)$  là  $x-2y-2z-6=0$ .

Giả sử điểm  $M$  thay đổi trên  $(P)$  thỏa mãn đường thẳng  $IM$  tiếp xúc với mặt cầu  $(S_2)$ , tiếp điểm tương ứng là  $N$ .

Ta có  $\triangle IKN$  và  $\triangle IMH$  đồng dạng (vì  $\widehat{IHM} = \widehat{INK} = 90^\circ$ ,  $\widehat{MIH}$  chung) suy ra  $\frac{IN}{IH} = \frac{NK}{HM}$  (\*).

Với  $NK = R_2 = 1; IH = 4; IK = 3; IN = \sqrt{IK^2 - NK^2} = 2\sqrt{2}$  nên (\*)  $\Leftrightarrow$

$$\frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{HM} \Leftrightarrow HM = \sqrt{2}.$$



Mặt khác ta lại có  $A \in (P)$  và  $M$  thay đổi thuộc đường tròn  $(C)$  tâm  $H$  bán kính  $R = \sqrt{2}$  nên  $AM$  ngắn nhất bằng  $HA - R = 4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$  khi điểm  $M$  thỏa mãn

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AH} \Rightarrow M \left( \frac{4}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{5}{3} \right)$$

Suy ra  $a = \frac{4}{3}; b = -\frac{2}{3}; c = -\frac{5}{3} \Rightarrow T = a + b + c = -1$ . **Chọn B.**

**Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai mặt cầu:  $(S_1): x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 3$  và  $(S_2): (x-6)^2 + (y+7)^2 + (z-8)^2 = 27$ . Hai điểm  $E, F$  lần lượt thuộc  $(S_1)$  và  $(S_2)$ ,  $M$  là trung điểm của  $EF$ . Khi  $OM$  đạt giá trị nhỏ nhất thì  $M$  thuộc mặt phẳng nào sau đây?

**A.**  $(P): x + y + z - 2 = 0$ .

**B.**  $(Q): x + y + z - 1 = 0$ .

**C.**  $(R): x + y + z - 4 = 0$ .

**D.**  $(T): x + y + z - 5 = 0$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$(S_1)$  có tâm  $I_1(0;1;-2)$ , bán kính  $R_1 = \sqrt{3}$ .

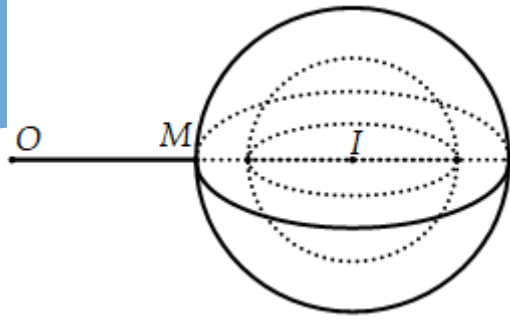
$(S_2)$  có tâm  $I_2(6;-7;8)$ , bán kính  $R_2 = 3\sqrt{3}$ .

Gọi  $I$  là trung điểm của  $I_1I_2 \Rightarrow I(3;-3;3)$ .

Ta có:  $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF}) \Rightarrow \frac{|IE - IF|}{2} \leq IM \leq \frac{IE + IF}{2} \Rightarrow \sqrt{3} \leq IM \leq 2\sqrt{3}$ .

Gọi  $(S_3)$  là mặt cầu tâm  $I$ , bán kính  $R_3 = \sqrt{3}$ .

$(S_4)$  là mặt cầu tâm  $I$ , bán kính  $R_4 = 2\sqrt{3}$ .



Ta có:  $OI = 3\sqrt{3}$ .

$OM_{\min} = OI - R_4 = \sqrt{3}$  khi và chỉ khi  $M$  là giao của đoạn thẳng  $OI$  và  $(S_4)$ .

Suy ra  $M(1; -1; 1)$ . Do đó  $M$  thuộc mặt phẳng  $(Q)$ .