

Ths. Trần Đình Cư

GV Chuyên luyện thi THPT Quốc gia, TP Huế

CHUYÊN ĐỀ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN:

CHỦ ĐỀ 7: KHOẢNG CÁCH

- KHOẢNG CÁCH TỪ ĐIỂM ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG**
- KHOẢNG CÁCH TỪ ĐIỂM ĐẾN MẶT PHẪNG**
- KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI MẶT PHẪNG SONG SONG**
- KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU**

HUẾ, 9/03/2017

MỤC LỤC

CHỦ ĐỀ 7. KHOẢNG CÁCH.....	3
DẠNG 1. KHOẢNG CÁCH TỪ 1 ĐIỂM ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG	3
DẠNG 2. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MẶT PHẪNG	9
DẠNG 3. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI MẶT PHẪNG SONG SONG.	40
DẠNG 4. KHOẢNG CÁCH HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU.....	46

CHỦ ĐỀ 7. KHOẢNG CÁCH

DẠNG 1. KHOẢNG CÁCH TỪ 1 ĐIỂM ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG

Phương Pháp

Cách xác định:

Việc dựng hình chiếu của một điểm trên đường thẳng trong không gian, ta có thể làm theo 2 cách sau:

- Dựng mặt phẳng đi qua điểm và đường thẳng đã cho. Rồi trên mặt phẳng đó qua điểm đã cho dựng đoạn vuông góc từ điểm tới đường thẳng.
- Dựng một mặt phẳng đi qua điểm đã cho và vuông góc với đường thẳng, lúc đó giao điểm của đường thẳng với mặt phẳng vừa dựng chính là hình chiếu của điểm trên đường thẳng.

Tính toán: Sau khi đã xác định được khoảng cách cần tính, ta dùng các hệ thức lượng trong tam giác, đa giác, đường tròn, ... để tính toán.

Câu 1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$. Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BD' .

A. $\frac{a\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

B. $\frac{b\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

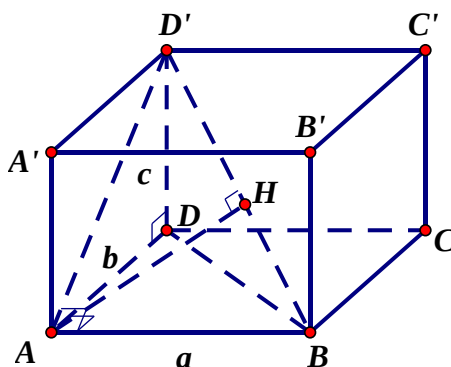
C. $\frac{c\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

D. $\frac{abc\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Hướng dẫn giải

Do $AB \perp AD'$ nên tam giác ABD' vuông tại A . Trong tam giác ABD' kẻ đường cao AH thì $AH = d(A, BD')$.

Trong $\triangle ADD'$, ta có:



$$AD' = \sqrt{AD^2 + DD'^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$BD' = \sqrt{AB^2 + AD'^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Xét $\triangle ABD'$, ta được:

$$AH \cdot BD' = AB \cdot AD'$$

$$\Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AD'}{BD'} = \frac{a\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Vậy $d(A, BD') = AH = \frac{a\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. Vậy chọn đáp án A.

Câu 2. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều tâm O , cạnh a , hình chiếu của C' trên $mp(ABC)$ trùng với tâm của đáy. Cạnh bên CC' hợp với $mp(ABC)$ góc 60° . Gọi I là trung điểm của AB . Tính các khoảng cách:

Câu 2.1. Từ điểm O đến đường thẳng CC'

- A. $\frac{a}{2}$ B. $\frac{3a}{2}$ C. $\frac{a}{4}$ D. $\frac{a}{3}$

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết, suy ra: $C'O \perp (ABC)$, suy ra:

$$OC = h_{(ABC)}CC' \Rightarrow (CC', (ABC)) = C'CO$$

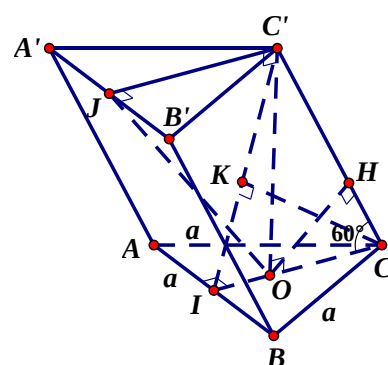
Theo giả thiết, ta có: $C'CO = 60^\circ$

Trong $mp(C'CO)$ dựng $OH \perp CC'$ tại H ta được:

$$d(O, CC') = OH.$$

$$\text{Xét } \triangle COH \Rightarrow OH = OC \cdot \sin 30^\circ = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2}$$

Suy ra: $d(O, CC') = \frac{a}{2}$. Vậy chọn đáp án A.



Câu 2.2. Khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng IC'

- A. $\frac{2a\sqrt{13}}{3}$ B. $\frac{3a\sqrt{13}}{13}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{a\sqrt{13}}{3}$

Hướng dẫn giải

Tính $d(C, IC')$

Trong $mp(C'IC)$ dựng $CK \perp IC'$ tại K ta được: $d(C, IC') = CK$

$$\text{Xét } \triangle C'IC \Rightarrow OC' \cdot CI = CK \cdot IC' \Rightarrow CK = \frac{OC' \cdot CI}{IC'}$$

$$\text{Mà } OC' = OC \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a; CI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$IC'^2 = IO^2 + OC'^2 = \frac{a^2}{12} + a^2 = \frac{13a^2}{12}$$

$$\text{Nên } d(C, IC') = CK = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}} = \frac{3a}{\sqrt{13}} = \frac{3a\sqrt{13}}{13}. \text{ Vậy chọn đáp án B.}$$

Câu 2.3. Khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng $A'B'$

A. $\frac{2a\sqrt{7}}{3}$

B. $\frac{a\sqrt{7}}{3}$

C. $\frac{a\sqrt{7}}{2}$

D. $\frac{a\sqrt{7}}{4}$

Hướng dẫn giải

Tính $d(O, A'B')$

Vì $C'O \perp (ABC) \parallel (A'B'C') \Rightarrow OC' \perp (A'B'C')$. Gọi J là trung điểm của $A'B' \Rightarrow C'J \perp A'B' \subset (A'B'C') \Rightarrow OJ \perp A'B'$ (định lý 3 đường vuông góc)

Tức là: $d(O, A'B') = OJ$

$$\text{Xét } \triangle OC'J \Rightarrow OJ = \sqrt{OC'^2 + C'J^2} = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

Tức là: $d(O, A'B') = \frac{a\sqrt{7}}{2}$. Vậy chọn đáp án C.

Câu 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SA = a$. Gọi E là trung điểm của cạnh CD. Tính theo a khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BE

A. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$

B. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$

C. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{3a\sqrt{5}}{5}$

Hướng dẫn giải

Vì $SA \perp (ABCD)$, trong mặt phẳng (ABCD) nếu dựng $AH \perp BE$ tại H thì $SH \perp BE$ (định lý 3 đường vuông góc). Tức là khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BE bằng đoạn SH. Ta có:

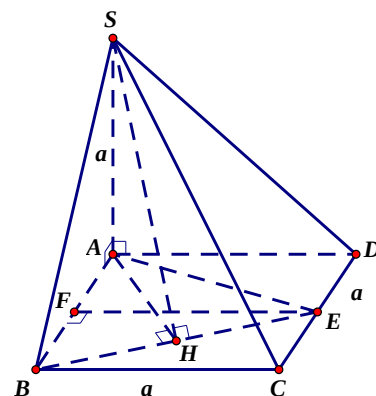
$$S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot EF = \frac{1}{2} a \cdot a = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} AH \cdot BE$$

$$\text{Mà } BE = \sqrt{BC^2 + CE^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Nên } AH = \frac{a^2}{BE} = \frac{2a}{\sqrt{5}}, \text{ mà } \triangle SAH \text{ vuông tại A, nên:}$$

$$SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \sqrt{a^2 + \frac{4a^2}{5}} = \frac{3a}{\sqrt{5}} = \frac{3a\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Vậy } d(S, BE) = \frac{3a\sqrt{5}}{5}. \text{ Vậy chọn đáp án D.}$$



Câu 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Gọi I là trung điểm của SC và M là trung điểm của AB. Tính khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng CM

A. $\frac{a\sqrt{2}}{5}$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{17}$

C. $\frac{a\sqrt{30}}{10}$

D. $\frac{a\sqrt{3}}{7}$

Hướng dẫn giải

Do $IO \perp (ABCD)$ nên nếu dựng $OK \perp CM$ ($K \in CM$) thì $IK \perp CM$.

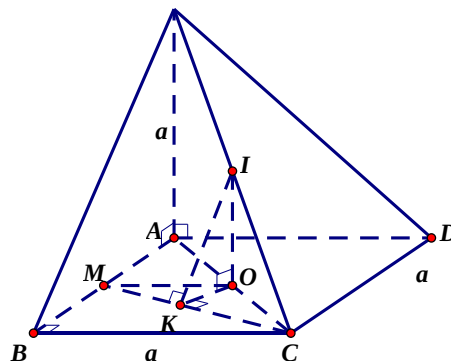
Tức là: $d(I, CM) = IK$.

Mà $IK = \sqrt{OI^2 + OK^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + OK^2}$

Do $S_{\triangle OMC} = \frac{1}{2} OK \cdot MC$

$$\Rightarrow OK = \frac{2S_{\triangle OMC}}{MC} = \frac{2 \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{4} \right)}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{a}{2\sqrt{5}}$$

Suy ra $IK = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{20}} = \frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{30}}{10}$. **Vậy chọn đáp án C.**



Câu 5. Cho hình chóp đều S.ABC có cạnh đáy bằng a, gọi O là tâm của đáy và $SO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Gọi I là trung điểm của BC và K là hình chiếu của O lên SI. Tính khoảng cách từ O đến SA.

A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$

D. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$

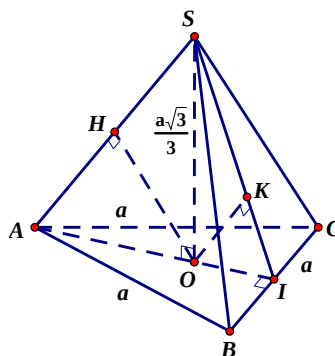
Hướng dẫn giải

Dựng $OH \perp SA$ tại H $\Rightarrow d(O, SA) = OH$

Ta có: $OA = \frac{2}{3} AI = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} = SO$, suy ra:

$$OH = \frac{1}{2} SA = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Vậy $d(O, SA) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. **Vậy chọn đáp án D.**



Câu 7. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Tính khoảng cách từ C đến AC.

A. $\frac{a\sqrt{6}}{7}$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

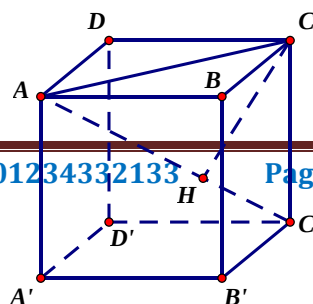
C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

D. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$

Hướng dẫn giải

Nhận xét rằng:

$\triangle BAC' = \triangle CA'A = \triangle DAC' = \triangle A'A'C = \triangle B'C'A = \triangle D'C'A$ nên



khoảng cách từ các điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' đều bằng nhau.

Hạ CH vuông góc với AC', ta được:

$$\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{CC'^2} \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{6}}{3}. \text{ Vậy chọn đáp án C.}$$

Câu 8. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có tất cả các cạnh đều bằng a. Khoảng cách từ D đến đường thẳng SB bằng:

A. a

B. $\frac{a}{2}$

C. $\frac{a}{3}$

D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải

Gọi H là giao điểm của AC và BD.

$AB = BC = CD = DA = a \Rightarrow ABCD$ là hình thoi.

Do đó $AC \perp BD$ đồng thời H là trung điểm của AC và BD.

ΔSAC cân tại S $\Rightarrow SH \perp AC$ (1)

ΔSBD cân tại S $\Rightarrow SH \perp BD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $SH \perp (ABCD)$ (3)

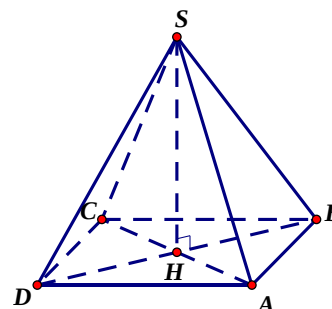
Vì $SA = SB = SC = SD$ nên $HA = HB = HC = HD$.

Suy ra ABCD là hình vuông (tứ giác đều) (4)

Từ (3) và (4) ta được S.ABCD là hình chóp tứ giác đều.

Xét ΔSBD ta có: $SA = SB = a, BD = a\sqrt{2} \Rightarrow BD^2 = SB^2 + SD^2$. Thế nên ΔSBD vuông tại S.

Suy ra $DS \perp SB$. Vậy $d(D, SB) = DS = a$. **Vậy chọn đáp án A.**



Câu 9. Cho tứ diện ABCD có $AB \perp (BCD)$, $BC = 3a$, $CD = 4a$, $AB = 5a$. Tam giác BCD vuông tại B. Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng CD.

A. a

B. $\frac{a}{2}$

C. $\frac{a}{3}$

D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải

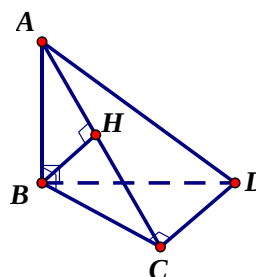
Ta có

$AC \perp CD \Rightarrow d(A, CD) = AC$

$\Delta ABC \left(A = 90^\circ \right)$

$$\Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 = (5a)^2 + (3a)^2 = 34a^2$$

$$\Rightarrow AC = a\sqrt{34}$$



Câu 10. Cho tam giác ABC có $AB = 14, BC = 10, AC = 16$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A lấy điểm O sao cho $OA = 8$. Khoảng cách từ điểm O đến cạnh BC là:

A. $8\sqrt{3}$

B. 16

C. $8\sqrt{2}$

D. 24

Hướng dẫn giải

Nửa chu vi tam giác ABC: $p = \frac{14+16+10}{2} = 20$

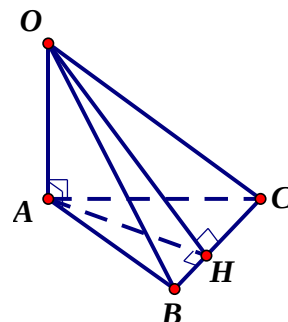
$$S_{ABC} = \sqrt{20 \cdot (20-14)(20-16)(20-10)} = 40\sqrt{3}$$

$$AH = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{80\sqrt{3}}{10} = 8\sqrt{3}$$

Nối OH thì $OH \perp BC$. Khoảng cách từ O đến BC là OH:

$$OH = \sqrt{OA^2 + AH^2} = 16$$

Vậy chọn đáp án B.



Câu 11. Hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $BC = 2a$, $\angle ABC = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh BC và $SA = SC = SM = a\sqrt{5}$. Khoảng cách từ S đến cạnh AB là:

A. $\frac{a\sqrt{17}}{4}$

B. $\frac{a\sqrt{19}}{2}$

C. $\frac{a\sqrt{19}}{4}$

D. $\frac{a\sqrt{17}}{2}$

Hướng dẫn giải

Chân đường cao hình chóp là tâm H của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMC (Do $SA = SC = SM$).

Góc $\angle AMC = 120^\circ$, nên H ở ngoài tam giác AMC và HAM là tam giác đều nên:

$$HM = AM = a$$

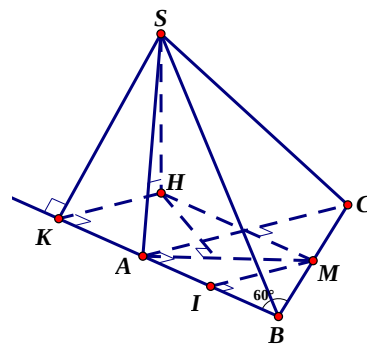
$$SH = \sqrt{SM^2 - HM^2} = \sqrt{5a^2 - a^2} = 2a$$

Từ H kẻ $HK \perp AB$ thì $SK \perp AB$: SK là khoảng cách từ S đến cạnh AB.

$$HK = MI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ (do ABM là tam giác đều cạnh bằng a)}$$

$$SK = \sqrt{SH^2 + HK^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \sqrt{\frac{19a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{19}}{2}.$$

Vậy chọn đáp án B.



DẠNG 2. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MẶT PHẪNG

Câu 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông, SA vuông góc với đáy, $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC) bằng 30° . Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBM) với M là trung điểm CD.

- A. $\frac{a}{3}$ B. $\frac{2a}{3}$ C. $\frac{4a}{3}$ D. $\frac{5a}{3}$

Hướng dẫn giải

Chứng minh $DB \perp (SAC) \Rightarrow$ Hình chiếu vuông góc của DS lên (SAC) là SO, góc giữa SD và (SAC) là $\angle DSO = 30^\circ$. Đặt $DO = x$, ta có $SO = x\sqrt{3}$ (O là giao của AC và BD)

$$\text{Từ } SO^2 = AO^2 + SA^2 \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Gọi N là trung điểm của AB $\Rightarrow DN \parallel BM$

$$\text{Suy ra } d(D; (SBM)) = d(N; (SBM)) = \frac{1}{2}d(A; (SBM))$$

Kẻ $AI \perp BM$, $AH \perp SM$.

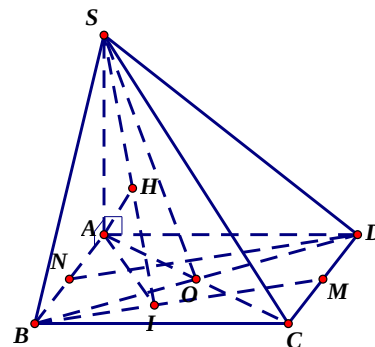
Từ đó chứng minh được $AH \perp (SBM) \Rightarrow d(A; (SBM)) = AH$

$$\text{Trong } (ABCD): S_{ABM} = S_{ABCD} - S_{BCM} = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Mà } S_{ABM} = \frac{1}{2}AI \cdot BM \Rightarrow AI = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Khi đó: } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{SA^2} \Rightarrow AH = \frac{2}{3}a \Rightarrow d(D; (SBM)) = \frac{a}{3}.$$

Vậy chọn đáp án A.



Câu 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = a\sqrt{2}$ và $BC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và góc giữa cạnh bên SC với đáy là 60° . Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD)

- A. $\frac{a\sqrt{38}}{29}$ B. $\frac{3a\sqrt{58}}{29}$ C. $\frac{3a\sqrt{38}}{29}$ D. $\frac{3a}{29}$

Hướng dẫn giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BD và K là hình chiếu vuông góc của A trên SH.

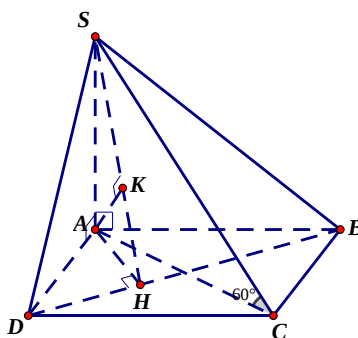
Ta có $SA \perp BD$ và $AH \perp BD$ nên $BD \perp (SAH)$.

Suy ra $AK \perp BD$. Mà $AK \perp SH$ nên $AK \perp (SBD)$

Ta có: $d(C; (SBD)) = d(A; (SBD)) = AK$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{29}{18a^2}$$

$$\text{Vậy } d(C; (SBD)) = AK = \frac{3a\sqrt{58}}{29}. \text{ Vậy chọn đáp án B}$$



Câu 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi I là hình chiếu của A lên SC. Từ I lần lượt vẽ các đường thẳng song song với SB, SD cắt BC, CD tại P, Q. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của PQ với AB, AD. Tính khoảng cách từ E đến mặt phẳng (SBD).

A. $\frac{3a\sqrt{21}}{11}$

B. $\frac{a\sqrt{21}}{9}$

C. $\frac{3a\sqrt{21}}{7}$

D. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$

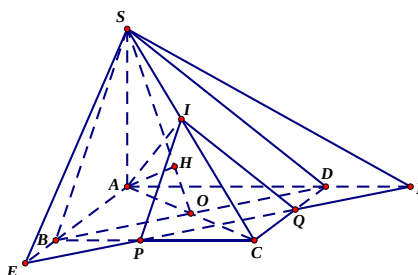
Hướng dẫn giải

Gọi O là tâm của hình vuông ABCD.

Qua A dựng $AH \perp SO$. Dễ dàng chứng minh được $AH \perp BD$

Khi đó $AH = d(A; (SBD))$

Trong tam giác vuông SAC, ta có:



$$CI \cdot SC = AC^2 \Rightarrow \frac{IC}{SC} = \frac{AC^2}{SC^2} = \frac{AC^2}{SA^2 + AC^2} = \frac{AB^2 + BC^2}{SA^2 + (AB^2 + BC^2)} = \frac{2a^2}{2a^2 + 3a^2} = \frac{2}{5}$$

$$\Delta CBS \text{ có } IP \parallel SB \Rightarrow \frac{IP}{SB} = \frac{CP}{CB} = \frac{CI}{CS} \Rightarrow \frac{CP}{CB} = \frac{2}{5}$$

$$\text{Áp dụng định lý Talet: } \frac{BE}{CQ} = \frac{BP}{PC} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{BE}{CQ} = \frac{BC - CP}{PC} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Mà } AB = CD = CQ + QP = CQ + BE = \frac{5}{3} BE$$

Do $\triangle AEF$ vuông tại A nên:

$$S_{AEF} = \frac{1}{2} AE \cdot AF = \frac{1}{2} AE^2 = \frac{1}{2} (AB + BE)^2 = \frac{32}{25} AB^2 = \frac{32a^2}{25} \text{ (đvdt)}$$

$$\frac{DA}{DE} = \frac{5}{3} \Rightarrow d(E, (SBD)) = \frac{3}{5} d(A, (SBD))$$

$$\text{Tam giác } SAO \text{ vuông tại } A, \text{ khi đó } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AO^2} \Rightarrow AH^2 = \frac{3a^2}{7}$$

$$\text{Vậy } d(E, (SBD)) = \frac{3a\sqrt{21}}{7}$$

Câu 4. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $BA = a$, $BC = 2a$, $SA = 2a$, $SA \perp (ABC)$. Gọi H , K lần lượt là hình chiếu của A trên SB , SC . Tính khoảng cách từ điểm K đến mặt phẳng (SAB)

A. $\frac{8a}{9}$

B. $\frac{a}{9}$

C. $\frac{2a}{9}$

D. $\frac{5a}{9}$

Hướng dẫn giải

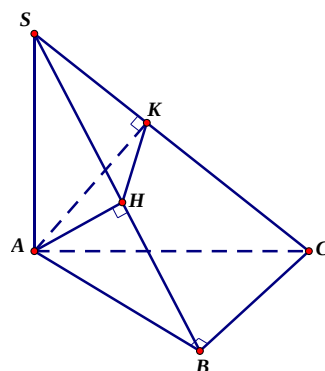
Vì $BC \perp (SAB)$ nên:

$$AH \perp BC, AH \perp (SBC)$$

$$\Rightarrow AH \perp HK, AH \perp SC \quad \text{mà}$$

$$AK \perp SC$$

$$\Rightarrow SC \perp (AHK)$$



$$\text{Ta có: } AH = \frac{AB \cdot SA}{SB} = \frac{2a}{\sqrt{5}},$$

$$AK = \frac{AC \cdot SA}{SC} = \frac{2\sqrt{5}a}{3},$$

$$HK = \sqrt{AK^2 - AH^2} = \frac{8a}{3\sqrt{5}}, \quad SK = \frac{4a}{3} \Rightarrow V_{S.AHK} = \frac{1}{6} \cdot \frac{4a}{3} \cdot \frac{2a}{\sqrt{5}} \cdot \frac{8a}{3\sqrt{5}} = \frac{32}{135} a^3$$

$$\text{Mặt khác } SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{4}{\sqrt{5}} a \text{ nên } S_{AHS} = \frac{4}{5} a^2$$

$$\text{Vậy khoảng cách cần tìm là: } d(K, (SAB)) = \frac{3V_{KSAH}}{S_{AHS}} = \frac{8a}{9}.$$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang, $ABC = BAD = 90^\circ$, $BA = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu của A lên SB . Tính (theo a) khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD)

A. $\frac{5a}{3}$

B. $\frac{4a}{3}$

C. $\frac{2a}{3}$

D. $\frac{a}{3}$

Hướng dẫn giải

Gọi I là trung điểm AD.

Ta có $CI = IA = ID = \frac{AD}{2}$, suy ra $\triangle ACD$ vuông tại C.

$\Rightarrow CD \perp AC$. Mà $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD$ nên ta có $CD \perp SD$ hay $\triangle SCD$ vuông. Gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ B, H đến mp(SCD)

Ta có: $\triangle SAB \sim \triangle SHA \Rightarrow \frac{SA}{SH} = \frac{SB}{SA}$

$$\Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{2}{3}$$

$$\text{mà } \frac{SH}{SB} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{2}{3} \Rightarrow d_2 = \frac{2}{3}d_1$$

Thể tích khối tứ diện S.BCD:

$$V_{SBCD} = \frac{1}{3} SA \cdot \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$$

$$\text{Ta có: } SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2a,$$

$$CD = \sqrt{CI^2 + ID^2} = \sqrt{2}a \Rightarrow S_{SCD} = \frac{1}{2} SC \cdot CD = \sqrt{2}a^2$$

$$\text{Ta có: } V_{S.BCD} = \frac{1}{3} d_1 \cdot S_{SCD} \Rightarrow d_1 = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{2}a^3}{6}}{\sqrt{2}a^2} = \frac{a}{2}$$

$$\text{Vậy khoảng cách từ H đến mp(SCD) là } d_2 = \frac{2}{3}d_1 = \frac{a}{3}.$$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 6. Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông tại A, $AB = AC = a$, I là trung điểm của SC, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, mặt phẳng (SAB) tạo với đáy một góc bằng 60° . Tính khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (SAB) theo a.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{8}$

C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

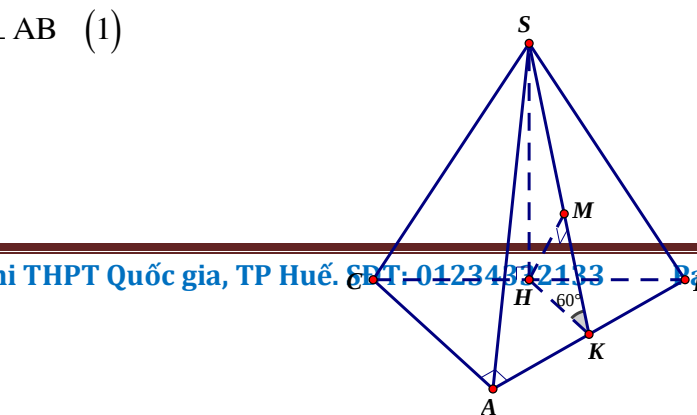
D. $\frac{a}{4}$

Hướng dẫn giải

Gọi K là trung điểm của AB $\Rightarrow HK \perp AB$ (1)

Vì $SH \perp (ABC)$ nên $SH \perp AB$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AB \perp SK$



Do đó góc giữa (SAB) với đáy bằng góc giữa SK và HK và bằng $SKH = 60^\circ$

$$\text{Ta có } SH = HK \cdot \tan SKH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Vì $IH // SB$ nên $IH // (SAB)$. Do đó $d(I, (SAB)) = d(H, (SAB))$

Từ H kẻ $HM \perp SK$ tại $M \Rightarrow HM \perp (SAB) \Rightarrow d(H, (SAB)) = HM$

$$\text{Ta có } \frac{1}{HM^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow HM = \frac{a\sqrt{3}}{4}. \text{ Vậy } d(I, (SAB)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A và $AB = 2a$, $AC = 2a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB . Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 30° . Tính khoảng cách từ trung điểm M của cạnh BC đến mặt phẳng (SAC)

A. $\frac{a\sqrt{3}}{5}$

B. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$

C. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{3a}{5}$

Hướng dẫn giải

Trong mặt phẳng (ABC) kẻ $HK \perp BC$ tại

$$K \Rightarrow BC \perp (SHK)$$

Từ giả thiết ta có: $SHK = 30^\circ$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 4a$$

$$\sin \angle SHK = \frac{AC}{BC} = \frac{HK}{HB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Trong tam giác SHK có:

$$SH = HK \tan SKH = \frac{a}{2}$$

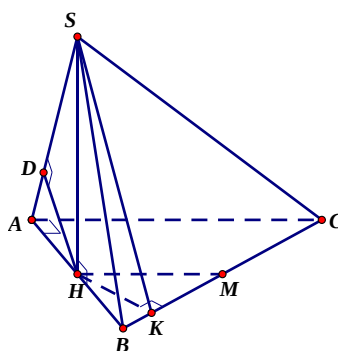
Do M là trung điểm của cạnh BC nên $MH // AC$, do đó $MH // (SAC)$. Suy ra:

$$d(M, (SAC)) = d(H, (SAC))$$

Trong mặt phẳng (SAB) kẻ $HD \perp SA$ tại D . Ta có: $AC \perp (SAB) \Rightarrow AC \perp DH \Rightarrow DH \perp (SAC)$

$$\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{HA^2} + \frac{1}{HS^2} \Rightarrow HD = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Vậy } d(M, (SAC)) = d(H, (SAC)) = HD = \frac{a\sqrt{5}}{5}. \text{ Vậy chọn đáp án C.}$$



Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A , $AB = AC = a$, I là trung điểm của SC , hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC , mặt

phẳng (SAB) tạo với đáy 1 góc bằng 60^0 . Tính khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (SAB) theo a.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{5}$

B. $\frac{a\sqrt{5}}{4}$

C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải

Gọi K là trung điểm của AB

$\Rightarrow HK \perp AB$ (1)

Vì $SH \perp (ABC)$ nên $SH \perp AB$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AB \perp SK$

Do đó góc giữa (SAB) với đáy bằng góc giữa SK và HK bằng $SKH = 60^0$.

Ta có: $SH = HK \tan SKH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot SH = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$$

Vì $IH // SB$ nên $IH // (SAB)$. Do đó $d(I, (SAB)) = d(H, (SAB))$

Từ H kẻ $HM \perp SK$ tại M $\Rightarrow HM \perp (SAB) \Rightarrow d(H, (SAB)) = HM$

Ta có: $\frac{1}{HM^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow HM = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Vậy $d(I, (SAB)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 9. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Gọi I là trung điểm cạnh AB. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng đáy là trung điểm H của CI, góc giữa đường thẳng SA và mặt đáy bằng 60^0 . Tính theo a khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SBC)

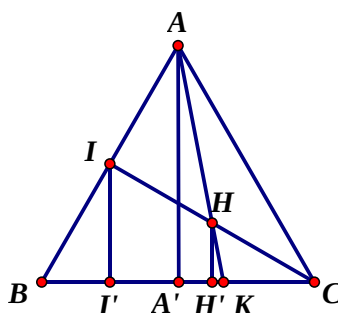
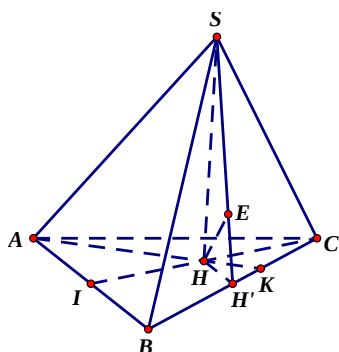
A. $\frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{29}}$

B. $\frac{a\sqrt{21}}{4\sqrt{29}}$

C. $\frac{a\sqrt{21}}{3\sqrt{29}}$

D. $\frac{a\sqrt{21}}{\sqrt{29}}$

Hướng dẫn giải



$$\text{Ta có: } CI = \sqrt{AC^2 - AI^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Do đó } AH = \sqrt{AI^2 + IH^2} = \frac{a\sqrt{7}}{4}, \text{ suy ra } SH = AH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{21}}{4}$$

Gọi A', H', I' lần lượt là hình chiếu của A, H, I trên BC , E là hình chiếu của H trên SH' thì $HE \perp (SBC) \Rightarrow d(H; (SBC)) = HE$.

$$\text{Ta có: } HH' = \frac{1}{2} II' = \frac{1}{4} AA' = \frac{a\sqrt{3}}{8}. \text{ Từ } \frac{1}{HE^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HH'^2} \Rightarrow HE = \frac{a\sqrt{21}}{4\sqrt{29}}$$

$$\text{Vậy } d(H; (SBC)) = \frac{a\sqrt{21}}{4\sqrt{29}}. \text{ Vậy chọn đáp án B.}$$

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a . Góc $BAC = 60^\circ$ hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC . Mặt phẳng (SAC) hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ góc 60° . Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD)

A. $\frac{a}{\sqrt{112}}$

B. $\frac{2a}{\sqrt{111}}$

C. $\frac{6a}{\sqrt{112}}$

D. $\frac{3a}{\sqrt{112}}$

Hướng dẫn giải

Trong (SBD) kẻ $OE \parallel SH$ khi đó ta có OC, OD, OE đôi một vuông góc. Và:

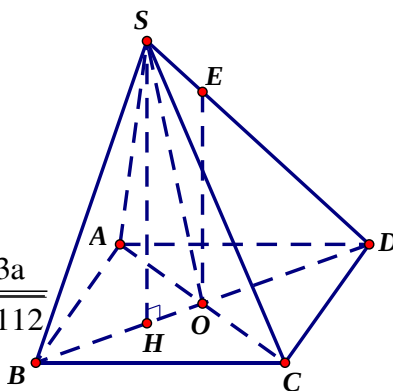
$$OC = \frac{a}{2}, OD = \frac{a\sqrt{3}}{2}, OE = \frac{3a}{8}$$

Áp dụng công thức:

$$\frac{1}{d^2(O; (SCD))} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OE^2} \Rightarrow d = \frac{3a}{\sqrt{112}}$$

$$\text{Mà } d(B; (SCD)) = 2d(O; (SCD)) = \frac{6a}{\sqrt{112}}$$

Vậy chọn đáp án C.



Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , góc BAC bằng 60° . Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn BD sao cho $HD = 2HB$. Đường thẳng SO tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ góc 60° với O là giao điểm của AC và BD . Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) theo a

A. $\frac{3a\sqrt{7}}{15}$

B. $\frac{3a\sqrt{7}}{14}$

C. $\frac{a\sqrt{7}}{11}$

D. $\frac{2a\sqrt{7}}{15}$

Hướng dẫn giải

Trong tam giác SHO có:

$$SH = HO \cdot \tan 60^\circ = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2}$$

Tính khoảng cách từ B đến (SCD):

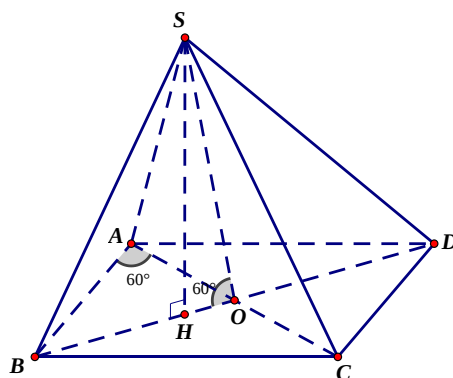
$$SD = \sqrt{SH^2 + HD^2} = \frac{a\sqrt{57}}{6};$$

$$SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$$

$$SD = \frac{a\sqrt{57}}{6}; SC = \frac{a\sqrt{21}}{6}; CD = a, p = \frac{SC + SD + CD}{2}$$

$$S_{SCD} = \sqrt{p(p-SC)(p-SD)(p-CD)} = \frac{a^2\sqrt{21}}{12} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có $d(B, (SCD)) = \frac{3a\sqrt{7}}{14}$. Vậy chọn đáp án B.



Câu 12. Cho hình chóp S.ABC có các mặt ABC, SBC là những tam giác đều cạnh a. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Hình chiếu vuông góc của S xuống (ABC) nằm trong tam giác ABC. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) theo a.

A. $\frac{2a\sqrt{13}}{13}$

B. $\frac{3a\sqrt{13}}{13}$

C. $\frac{3a\sqrt{13}}{11}$

D. $\frac{a\sqrt{13}}{13}$

Hướng dẫn giải

Gọi M là trung điểm của BC.

Lập luận được góc giữa (SBC) và (ABC) là $\angle SMA = 60^\circ$

$\triangle SAM$ đều cạnh bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

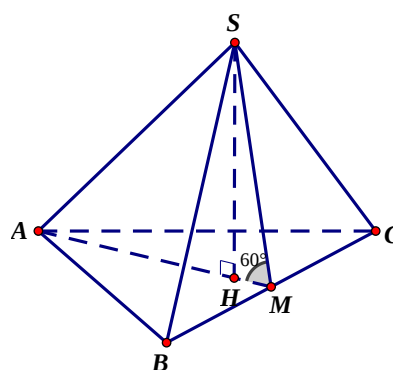
$$\Rightarrow S_{\triangle SAM} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{16}$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} BC \cdot S_{\triangle SAM} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$$

$$S_{\triangle SAC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{13}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{39}}{16}$$

$$d(B, (SAC)) = \frac{3V_{B.SAC}}{S_{\triangle SAC}} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{16 \cdot \frac{a^2\sqrt{39}}{16}} = \frac{3a\sqrt{13}}{13}$$

Vậy chọn đáp án B.



Câu 13. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình chữ nhật tâm I, có $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Gọi H là trung điểm AI. Biết SH vuông góc với mặt phẳng đáy và tam giác SAC vuông tại S. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD)

- A. $\frac{3a}{\sqrt{11}}$ B. $\frac{a}{\sqrt{13}}$ C. $\frac{3a}{\sqrt{15}}$ D. $\frac{5a}{\sqrt{17}}$

Hướng dẫn giải

$$SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp AC$$

$$\Delta SAC \text{ vuông tại } S \Rightarrow SH^2 = HA \cdot HC$$

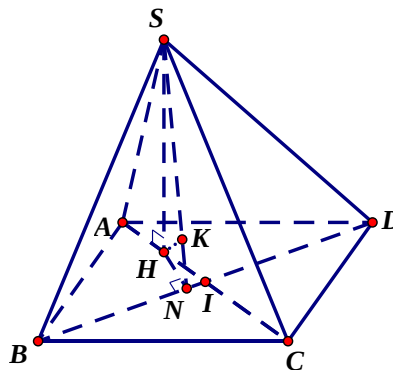
$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a, \text{ suy ra:}$$

$$HA = \frac{a}{2}, HC = \frac{3a}{2} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$CI = 2HI \Rightarrow d(C, (SBD)) = 2d(I, (SBD))$$

Hạ $HN \perp BD$, $N \in BD$ và $HK \perp SN$, KN .

Suy ra: $HK \perp (SBD)$ nên $d(H, (SBD)) = HK$



$$\text{Ta có: } AB \cdot AD = 2S_{\Delta ABD} = 2HN \cdot BD \Rightarrow HN = \frac{AB \cdot AD}{2BD} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HN^2} + \frac{1}{SH^2} \Rightarrow HK = \frac{3a}{2\sqrt{15}}. \text{ Vậy } d(C, (SBD)) = 2HK = \frac{3a}{\sqrt{15}}$$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 14. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông, $BD = 2a$; tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SC = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAD)

- A. $\frac{3a\sqrt{21}}{7}$ B. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$ C. $\frac{4a\sqrt{21}}{7}$ D. $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$

Hướng dẫn giải

Kẻ $SH \perp AC$, $H \in AC$

$$\text{Do } (SAC) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$$

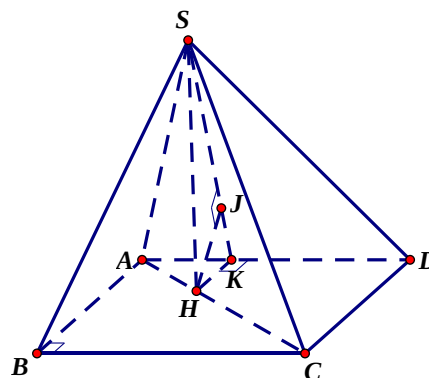
$$SA = \sqrt{AC^2 - SC^2} = a, SH = \frac{SA \cdot SC}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Ta có:

$$AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \frac{a}{2} \Rightarrow CA = 4HA$$

$$\Rightarrow d(C, (SAD)) = 4d(H, (SAD))$$

$$\text{Do } BC \parallel (SAD) \Rightarrow d(B, (SAD)) = d(C, (SAD)) = 4d(H, (SAD))$$



Kẻ $HK \perp AD$ ($K \in AD$), $HJ \perp SK$ ($J \in SK$)

Chứng minh được $(SHK) \perp (SAD)$ mà $HJ \perp SK \Rightarrow HJ \perp (SAD) \Rightarrow d(H, (SAD)) = HJ$; ΔAHK

vuông tại $K \Rightarrow HK = AH \sin 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow HJ = \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$. Vậy

$$d(B, (SAD)) = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}.$$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $BC = 2a\sqrt{2}$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng đáy là trọng tâm của tam giác ABC . Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC)

A. $\frac{3a\sqrt{21}}{7}$

B. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$

C. $\frac{4a\sqrt{21}}{7}$

D. $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$

Hướng dẫn giải

Gọi H là trọng tâm của tam giác ABC và

O là tâm của hình chữ nhật, ta có:

$$BH = \frac{2}{3}BO = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}AC = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + (2\sqrt{2}a)^2} = a$$

Ta có $SH \perp (ABCD)$ nên góc giữa SB và

mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $SBH = 60^\circ$

Trong tam giác vuông SHB ta có:

$$SH = BH \tan SBH = a \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$$

$$\text{Ta có: } d(A, (SBC)) = 2d(O, (SBC)) = 2 \cdot \frac{3}{2}d(H, (SBC)) = 3d(H, (SBC))$$

$$\text{Kẻ } HK \perp BC \text{ } (K \in BC), HI \perp SK \text{ } (I \in SK) \quad (1)$$

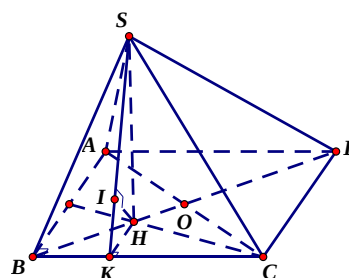
$$\text{Ta có: } SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp BC$$

$$\text{Do đó } BC \perp (SHK) \Rightarrow BC \perp HI \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } HI \perp (SBC) \text{ nên } d(H, (SBC)) = HI$$

Ta có $HK = \frac{1}{3}DC = \frac{1}{3}a$. Trong tam giác vuông SHK ta có:

$$HI = \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \frac{a}{3}}{\sqrt{3a^2 + \frac{a^2}{9}}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{28}} = \frac{a\sqrt{21}}{14}.$$



Vậy $d(A; (SBC)) = 3d(H; (SBC)) = 3HI = \frac{3a\sqrt{21}}{14}$. Vậy chọn đáp án D.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$, $BC = a\sqrt{3}$, $BAC = 120^\circ$. Gọi I là trung điểm cạnh AB . Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng đáy là trung điểm H của CI , góc giữa đường thẳng SA và mặt đáy bằng 60° . Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC)

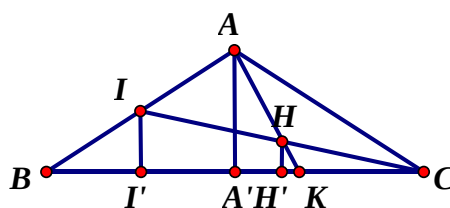
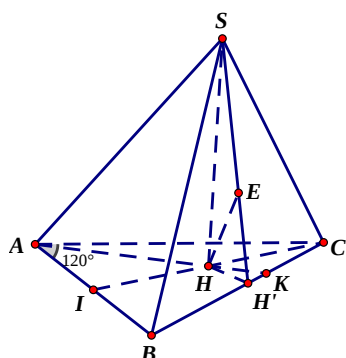
A. $\frac{4a\sqrt{37}}{37}$

B. $\frac{a}{\sqrt{37}}$

C. $\frac{3a\sqrt{37}}{37}$

D. $\frac{2a\sqrt{37}}{37}$

Hướng dẫn giải



Theo định lý cosin trong tam giác ABC ta được $AB = AC = a$

Ta có $CI^2 = AI^2 + AC^2 - 2AI \cdot AC \cdot \cos 120^\circ = \frac{7a^2}{4} \Rightarrow CI = \frac{a\sqrt{7}}{2}$

Do đó: $AH^2 = \frac{2(AI^2 + AC^2) - CI^2}{4} = \frac{3a^2}{16} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Suy ra $SH = AH \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{4}$

AH cắt BC tại K . Gọi A' , H' , I' lần lượt là hình chiếu của A , H , I trên BC .

Ta có: $\frac{d(A; (SBC))}{d(H; (SBC))} = \frac{AK}{HK} = \frac{AA'}{HH'} = 4 \Rightarrow d(A; (SBC)) = 4d(H; (SBC))$

Gọi E là hình chiếu của H trên SH' thì $HE \perp (SBC) \Rightarrow d(H; (SBC)) = HE$

$HH' = \frac{1}{4}AA' = \frac{a}{8}$ và từ $\frac{1}{HE^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HH'^2} \Rightarrow HE = \frac{3a}{4\sqrt{37}}$

Vậy $d(A; (SBC)) = 4HE = \frac{3a\sqrt{37}}{37}$. Vậy chọn đáp án C.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B . Hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm I của AC và BD . Mặt bên (SAB) hợp với

đáy một góc 60° . Biết rằng $AB = BC = a$, $AD = 3a$. Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAB) theo a

A. $\frac{4a\sqrt{3}}{5}$

B. $\frac{3a}{4}$

C. $\frac{3a\sqrt{3}}{7}$

D. $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải

Gọi K là hình chiếu của I lên AB.

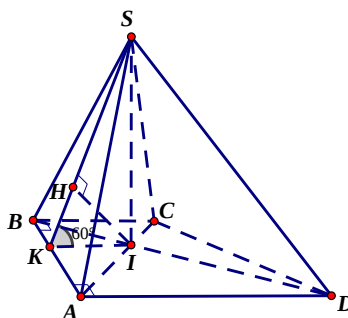
Suy ra $\angle SKI = 60^\circ$.

Do $IK \parallel AD \Rightarrow \frac{KI}{AD} = \frac{BI}{BD}$.

Mà

$\frac{BI}{ID} = \frac{BC}{AD} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BI}{BI + ID} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{BI}{BD} = \frac{1}{4}$

Suy ra $\frac{KI}{AD} = \frac{1}{4} \Rightarrow KI = \frac{3a}{4} \Rightarrow SI = \frac{3a\sqrt{3}}{4}$



Gọi H là hình chiếu của I lên SK. Ta có $\left. \begin{array}{l} AB \perp IK \\ AB \perp SI \end{array} \right\} \Rightarrow AB \perp IH$

Từ đó suy ra $IH \perp (SAB) \Rightarrow d(I; (SAB)) = IH$

Mà do $DB = 4IB \Rightarrow d(D; (SAB)) = 4d(I; (SAB)) = 4IH$

Lại có $\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IS^2} + \frac{1}{IK^2} = \frac{16}{27a^2} + \frac{16}{9a^2} \Rightarrow IH = \frac{3a\sqrt{3}}{8}$

Vậy $d(D; (SAB)) = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$. **Vậy chọn đáp án D.**

Câu 18. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O cạnh bằng a, góc $DAB = 120^\circ$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa (SBC) và mặt đáy bằng 60° . Tính thể tích khoảng cách từ A đến (SBC)

A. $\frac{a\sqrt{3}}{5}$

B. $\frac{3a}{4}$

C. $\frac{3a}{7}$

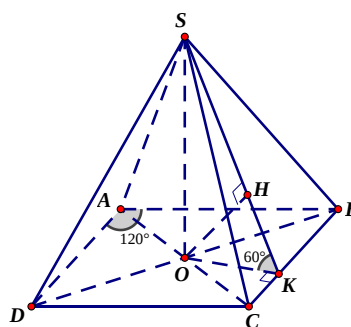
D. $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải

$\left. \begin{array}{l} (SAC) \perp (ABCD) \\ (SBD) \perp (ABCD) \\ (SAC) \cap (SBD) = SO \end{array} \right\} \Rightarrow SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BC$

Kẻ $OK \perp BC \Rightarrow BC \perp (SOK)$

$\Rightarrow ((SBC), (ABCD)) = \angle SKO = 60^\circ$



$$AO \cap (SBC) = C$$

$$\Rightarrow d(A; (SBC)) = 2d(O; (SBC))$$

$$\left. \begin{array}{l} (SBC) \perp (SOK) \\ (SBC) \cap (SOK) = SK \\ OH \perp SK \end{array} \right\} \Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow d(O; (SBC)) = OH$$

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{OS^2} \Rightarrow OH = \frac{3a}{8} \Rightarrow d(A; (SBC)) = \frac{3a}{4}$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 19. Trong mặt phẳng (P), cho hình thoi ABCD có độ dài các cạnh bằng a, $\angle ABC = 120^\circ$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD. Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại G, lấy điểm S sao cho $\angle ASC = 90^\circ$. Tính khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng (SBD) theo a.

A. $\frac{a}{\sqrt{17}}$

B. $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{27}}$

C. $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$

D. $\frac{a}{\sqrt{37}}$

Hướng dẫn giải

$$\angle ABC = 120^\circ \Rightarrow \angle BAD = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABD \text{ đều cạnh } a.$$

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

$$\Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{3}}{2}; AG = \frac{2}{3}AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}; AC = a\sqrt{3}$$

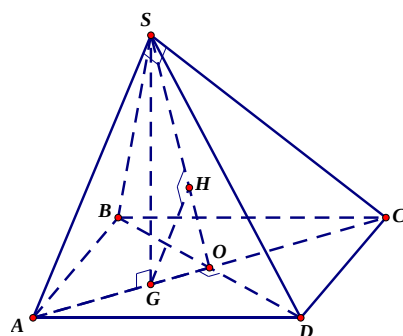
$$\Rightarrow SG = \sqrt{GA \cdot GC} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \quad (\triangle SAC \text{ vuông tại } S, \text{ đường cao } SG).$$

$$\text{Kẻ } GH \perp SO \Rightarrow GH \perp (SBD) \text{ vì}$$

$$BD \perp GH \subset (SAO) \Rightarrow d(G; (SBD)) = GH$$

$$\triangle SGO \text{ vuông tại } G, \text{ đường cao } GH$$

$$\Rightarrow \frac{1}{GH^2} = \frac{1}{GS^2} + \frac{1}{GO^2} = \frac{27}{2a^2} \Rightarrow GH = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{27}}. \text{ Vậy chọn đáp án B.}$$



Câu 20. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình chữ nhật tâm I, có $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Gọi H là trung điểm AI. Biết SH vuông góc với mặt phẳng đáy và tam giác SAC vuông tại S. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD)

A. $\frac{a}{\sqrt{5}}$

B. $\frac{2a}{\sqrt{7}}$

C. $\frac{3a}{\sqrt{17}}$

D. $\frac{3a}{\sqrt{15}}$

Phân tích: $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp AC$.

$$\triangle SAC \text{ vuông tại } S \Rightarrow SH^2 = HA \cdot HC$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a, \text{ suy ra: } HA = \frac{a}{2}, HC = \frac{3a}{2} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$CI = 2HI \Rightarrow d(C, (SBD)) = 2d(H, (SBD)). \text{ Hạ } HN \perp BD, N \in BD \text{ và } HK \perp SN, KN.$$

$$\text{Suy ra: } HK \perp (SBD) \text{ nên } d(H, (SBD)) = HK$$

Hướng dẫn giải

Ta có:

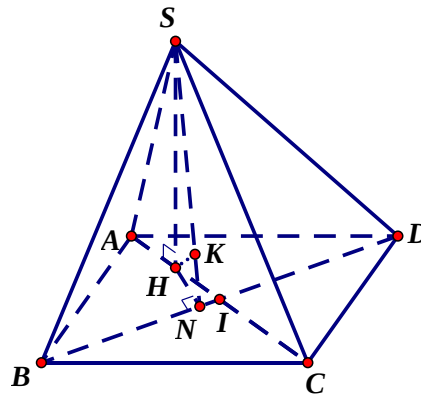
$$AB \cdot AD = 2S_{\triangle ABD} = 2HN \cdot BD$$

$$\Rightarrow HN = \frac{AB \cdot AD}{2BD} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Ta có:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HN^2} + \frac{1}{SH^2} \Rightarrow HK = \frac{3a}{2\sqrt{15}}$$

$$\cdot \text{ Vậy } d(C, (SBD)) = 2HK = \frac{3a}{\sqrt{15}}.$$



Vậy chọn đáp án D.

Câu 21. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông, $BD = 2a$; tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SC = a\sqrt{3}$. Tính theo a khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAD)

A. $\frac{2a\sqrt{13}}{\sqrt{7}}$

B. $\frac{2a}{\sqrt{7}}$

C. $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$

D. $\frac{a\sqrt{13}}{\sqrt{7}}$

Hướng dẫn giải

Kẻ $SH \perp AC, H \in AC$

Do $(SAC) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

$$SA = \sqrt{AC^2 - SC^2} = a, SH = \frac{SA \cdot SC}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Ta có:

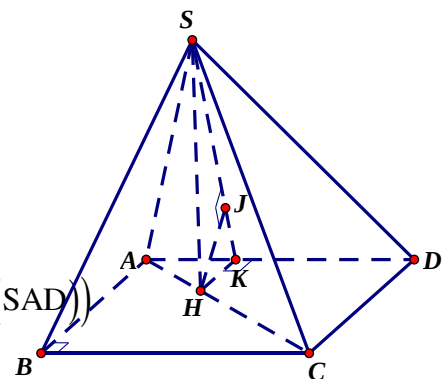
$$AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \frac{a}{2} \Rightarrow CA = 4HA \Rightarrow d(C, (SAD)) = 4d(H, (SAD))$$

Do $BC \parallel (SAD) \Rightarrow d(B, (SAD)) = d(C, (SAD)) = 4d(H, (SAD))$

Kẻ $HK \perp AD (K \in AD), HJ \perp SK (J \in SK)$

Chứng minh được $(SHK) \perp (SAD)$ mà $HJ \perp SK \Rightarrow HJ \perp (SAD) \Rightarrow d(H, (SAD)) = HJ$

$$\triangle AHK \text{ vuông tại } K \Rightarrow HK = AH \sin 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$



$$\Rightarrow HJ = \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}. \text{ Vậy } d(B, (SAD)) = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}.$$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 22. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật có $AB = a$, $BC = 2a\sqrt{2}$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng đáy là trọng tâm của tam giác ABC. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABCD) bằng 60° . Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC)

A. $\frac{3a\sqrt{21}}{14}$

B. $\frac{a\sqrt{21}}{15}$

C. $\frac{a\sqrt{21}}{13}$

D. $\frac{a\sqrt{21}}{5}$

Hướng dẫn giải

Gọi H là trọng tâm của tam giác ABC và O là tâm của hình

chữ nhật, ta có: $BH = \frac{2}{3}BO = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}AC = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + (2\sqrt{2}a)^2} = a$

Ta có $SH \perp (ABCD)$ nên góc giữa SB và mặt phẳng (ABCD)

là góc $SBH = 60^\circ$

Trong tam giác vuông SHB ta có:

$$SH = BH \tan SBH = a \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$$

$$\text{Ta có: } d(A, (SBC)) = 2d(O, (SBC)) = 2 \cdot \frac{3}{2}d(H, (SBC)) = 3d(H, (SBC))$$

$$\text{Kẻ } HK \perp BC \text{ (} K \in BC \text{)}, HI \perp SK \text{ (} I \in SK \text{)} \quad (1)$$

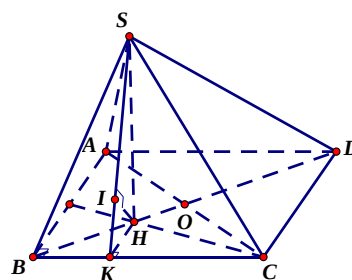
$$\text{Ta có: } SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp BC. \text{ Do đó } BC \perp (SHK) \Rightarrow BC \perp HI \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } HI \perp (SBC) \text{ nên } d(H, (SBC)) = HI$$

Ta có $HK = \frac{1}{3}DC = \frac{1}{3}a$. Trong tam giác vuông SHK ta có:

$$HI = \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \frac{a}{3}}{\sqrt{3a^2 + \frac{a^2}{9}}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{28}} = \frac{a\sqrt{21}}{14}.$$

$$\text{Vậy } d(A, (SBC)) = 3d(H, (SBC)) = 3HI = \frac{3a\sqrt{21}}{14}$$



Câu 23. Cho hình chóp S.ABC có $AB = AC$, $BC = a\sqrt{3}$, $BAC = 120^\circ$. Gọi I là trung điểm cạnh AB. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng đáy là trung điểm H của CI, góc giữa đường thẳng SA và mặt đáy bằng 60° . Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC)

A. $\frac{3a\sqrt{21}}{14}$

B. $\frac{a\sqrt{21}}{15}$

C. $\frac{a\sqrt{21}}{13}$

D. $\frac{a\sqrt{21}}{5}$

Hướng dẫn giải

Theo định lý cosin trong tam giác ABC ta được
 $AB = AC = a$

Ta có $CI^2 = AI^2 + AC^2 - 2AI \cdot AC \cdot \cos 120^\circ = \frac{7a^2}{4}$

$\Rightarrow CI = \frac{a\sqrt{7}}{2}$

Do đó

$AH^2 = \frac{2(AI^2 + AC^2) - CI^2}{4} = \frac{3a^2}{16} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Suy ra $SH = AH \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{4}$

AH cắt BC tại K. Gọi A', H', I' lần lượt là hình chiếu của A, H, I trên BC.

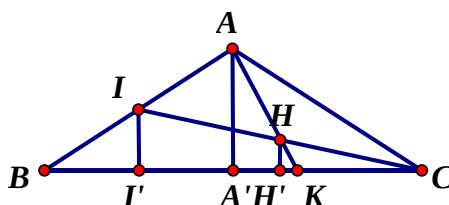
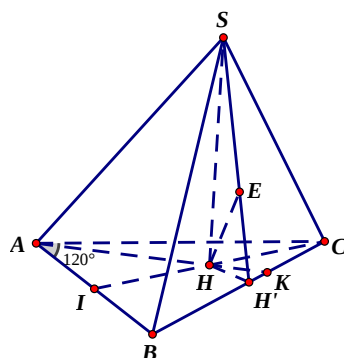
Ta có: $\frac{d(A; (SBC))}{d(H; (SBC))} = \frac{AK}{HK} = \frac{AA'}{HH'} = 4$

$\Rightarrow d(A; (SBC)) = 4d(H; (SBC))$

Gọi E là hình chiếu của H trên SH' thì $HE \perp (SBC) \Rightarrow d(H; (SBC)) = HE$

$HH' = \frac{1}{4}AA' = \frac{a}{8}$ và từ $\frac{1}{HE^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HH'^2} \Rightarrow HE = \frac{3a}{4\sqrt{37}}$

Vậy $d(A; (SBC)) = 4HE = \frac{3a\sqrt{37}}{37}$



Câu 24. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B. Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABCD) trùng với giao điểm I của AC và BD. Mặt bên (SAB) hợp với đáy một góc 60° . Biết rằng $AB = BC = a$, $AD = 3a$. Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAB) theo a

A. $\frac{3a\sqrt{5}}{4}$

B. $\frac{a\sqrt{2}}{5}$

C. $\frac{a\sqrt{3}}{13}$

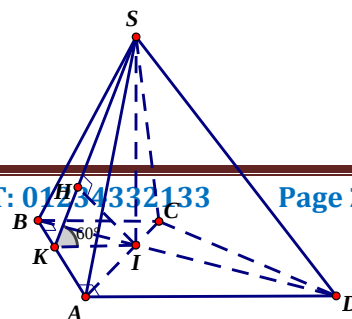
D. $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải

Gọi K là hình chiếu của I lên AB.

Suy ra $SKI = 60^\circ$.

Do $IK \parallel AD \Rightarrow \frac{KI}{AD} = \frac{BI}{BD}$.



$$\text{Mà } \frac{BI}{ID} = \frac{BC}{AD} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BI}{BI+ID} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{BI}{BD} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Suy ra } \frac{KI}{AD} = \frac{1}{4} \Rightarrow KI = \frac{3a}{4} \Rightarrow SI = \frac{3a\sqrt{3}}{4}$$

Gọi H là hình chiếu của I lên SK. Ta có $\left. \begin{array}{l} AB \perp IK \\ AB \perp SI \end{array} \right\} \Rightarrow AB \perp IH$

Từ đó suy ra $IH \perp (SAB) \Rightarrow d(I; (SAB)) = IH$

Mà do $DB = 4IB \Rightarrow d(D; (SAB)) = 4d(I; (SAB)) = 4IH$

$$\text{Lại có } \frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IS^2} + \frac{1}{IK^2} = \frac{16}{27a^2} + \frac{16}{9a^2} \Rightarrow IH = \frac{3a\sqrt{3}}{8}$$

Vậy $d(D; (SAB)) = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$. **Vậy chọn đáp án D.**

Câu 25. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O cạnh bằng a, góc $DAB = 120^\circ$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa (SBC) và mặt đáy bằng 60° . Tính khoảng cách từ A đến (SBC)

A. $\frac{3a}{4}$

B. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{5a}{2}$

Hướng dẫn giải

$$\left. \begin{array}{l} (SAC) \perp (ABCD) \\ (SBD) \perp (ABCD) \\ (SAC) \cap (SBD) = SO \end{array} \right\} \Rightarrow SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BC$$

$$\text{Kẻ } OK \perp BC \Rightarrow BC \perp (SOK)$$

$$\Rightarrow ((SBC), (ABCD)) = SKO = 60^\circ$$

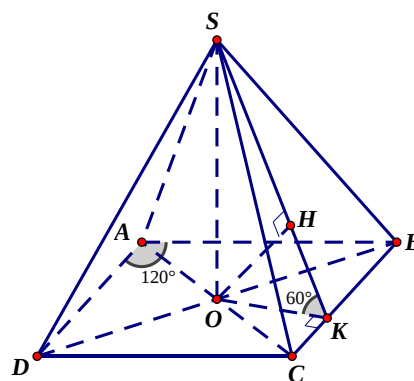
$$OK = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow SO = \frac{3a}{4}; AO \cap (SBC) = C$$

$$\Rightarrow d(A; (SBC)) = 2d(O; (SBC))$$

$$\left. \begin{array}{l} (SBC) \perp (SOK) \\ (SBC) \cap (SOK) = SK \\ OH \perp SK \end{array} \right\} \Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow d(O; (SBC)) = OH$$

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{OS^2} \Rightarrow OH = \frac{3a}{8} \Rightarrow d(A; (SBC)) = \frac{3a}{4}$$

Vậy chọn đáp án A.



Câu 26. Trong mặt phẳng (P), cho hình thoi ABCD có độ dài các cạnh bằng a, $\angle ABC = 120^\circ$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD. Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại G, lấy điểm S sao cho $\angle ASC = 90^\circ$. Tính khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng (SBD) theo a.

A. $\frac{a\sqrt{7}}{5}$

B. $\frac{a\sqrt{2}}{5}$

C. $\frac{a\sqrt{6}}{9}$

D. $\frac{a\sqrt{3}}{5}$

Hướng dẫn giải

$\angle ABC = 120^\circ \Rightarrow \angle BAD = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABD$ đều cạnh a.

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

$$\Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{3}}{2}; AG = \frac{2}{3}AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}; AC = a\sqrt{3}$$

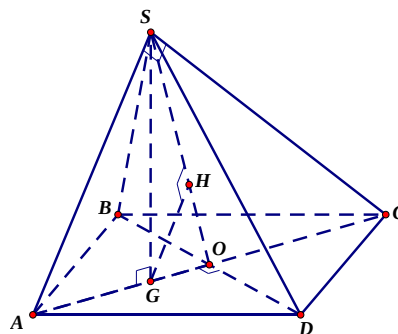
$$\Rightarrow SG = \sqrt{GA \cdot GC} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \quad (\triangle SAC \text{ vuông tại S, đường cao SG}).$$

Kẻ $GH \perp SO \Rightarrow GH \perp (SBD)$ vì

$$BD \perp GH \subset (SAO) \Rightarrow d(G; (SBD)) = GH$$

$$\triangle SGO \text{ vuông tại G, đường cao GH} \Rightarrow \frac{1}{GH^2} = \frac{1}{GS^2} + \frac{1}{GO^2} = \frac{27}{2a^2} \Rightarrow GH = \frac{a\sqrt{6}}{9}$$

Vậy chọn đáp án C.



Câu 27. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, $AB = 3a$, $AD = DC = a$. Gọi I là trung điểm của AD, biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60° . Tính khoảng cách từ trung điểm cạnh SD đến mặt phẳng (SBC)

A. $\frac{a\sqrt{17}}{5}$

B. $\frac{a\sqrt{15}}{20}$

C. $\frac{a\sqrt{6}}{19}$

D. $\frac{a\sqrt{3}}{15}$

Hướng dẫn giải

Vẽ $IK \perp BC \Rightarrow BC \perp (SIK) \Rightarrow \angle SKI$ là góc giữa

mặt phẳng (SBC) với mặt đáy nên $\angle SKI = 60^\circ$.

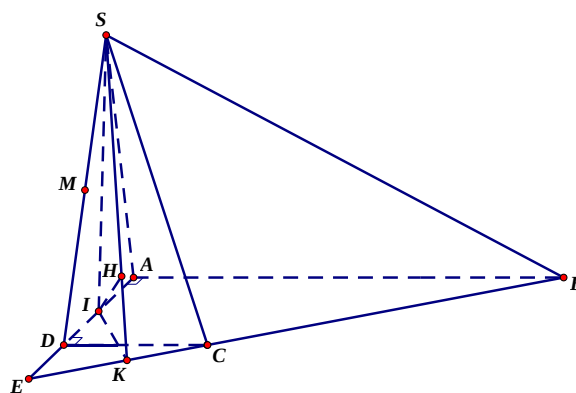
$$\text{Vì } S_{\triangle IDC} = \frac{1}{2}DI \cdot DC = \frac{a^2}{4}, S_{\triangle IAB} = \frac{1}{2}AI \cdot BI = \frac{3a^2}{4}$$

$$\text{Suy ra } S_{\triangle BIC} = S_{ABCD} - (S_{\triangle IDC} + S_{\triangle IAB}) = a^2$$

$$\text{Mặt khác } BC = \sqrt{(AB - CD)^2 + AD^2} = a\sqrt{5} \text{ và}$$

$$S_{\triangle IAB} = \frac{1}{2}IK \cdot BC. \text{ Suy ra } IK = \frac{2a^2}{a\sqrt{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Trong tam giác vuông SIK ta có: } SI = IK \tan 60^\circ = \frac{2a\sqrt{15}}{5}$$



Gọi M là trung điểm của SD, tính $d(M, (SBC))$

Gọi E là giao điểm của AD với BC, ta có: $\frac{ED}{EA} = \frac{DC}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow ED = \frac{1}{2} AD = ID$

Do đó $d(M, (SBC)) = \frac{1}{2} d(D, (SBC)) = \frac{1}{4} d(I, (SBC))$

Gọi H là hình chiếu của I lên SK ta có: $d(I, (SBC)) = IH$

Trong tam giác vuông SIK, ta có:

$$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{IK^2} = \frac{5}{12a^2} + \frac{5}{4a^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{15}}{5}$$

Vậy $d(M, (SBC)) = \frac{a\sqrt{15}}{20}$. **Vậy chọn đáp án B.**

Câu 28. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông, gọi M là trung điểm của AB. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABCD), biết $SD = 2a\sqrt{5}$, SC tạo với mặt đáy (ABCD) một góc 60° . Tính theo khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SA.

A. $\frac{a\sqrt{15}}{\sqrt{79}}$

B. $\frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{79}}$

C. $\frac{2a\sqrt{15}}{\sqrt{79}}$

D. $\frac{3a\sqrt{5}}{\sqrt{79}}$

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết ta có $SM \perp (ABCD)$

MC là hình chiếu của SC trên (ABCD) nên góc giữa SC với mặt phẳng (ABCD) là $\angle SCM = 60^\circ$

Trong tam giác vuông SMC và SMD ta có:

$SM = \sqrt{SD^2 - MD^2} = MC \cdot \tan 60^\circ$ mà ABCD là hình vuông nên $MC = MD$

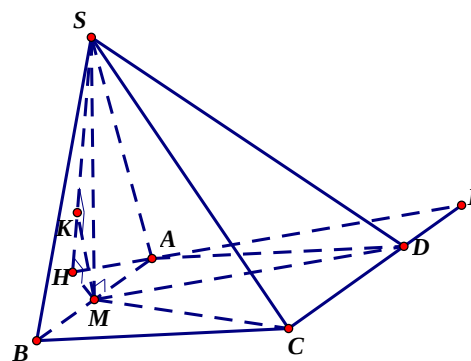
$$\Rightarrow SD^2 - MC^2 = 3MC^2 \Rightarrow MC = a\sqrt{5} \Rightarrow SM = a\sqrt{15}$$

Dựng hình bình hành AMDI ta có $AI \parallel MD$ nên

$$d(DM, SA) = d(DM, (SAI)) = d(M, (SAI))$$

Kẻ $MH \perp AI$ và $MK \perp SH$. Chứng minh $d(M, (SAI)) = MK$

$$\text{Tính được } MH = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow MK = \frac{2a\sqrt{15}}{\sqrt{79}}. \text{ **Vậy chọn đáp án C.**}$$



Câu 29. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại đỉnh S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{7}$

B. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$

C. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$

D. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$

Hướng dẫn giải

Theo bài ta có:
$$\begin{cases} SH \perp (ABC) \\ SH = \frac{a}{2} \end{cases}$$

Dựng đường thẳng d đi qua B và $d \parallel AC$
 $\Rightarrow d(AC, SB) = d(A; (SB, d)) = 2d(H; (SB, d))$

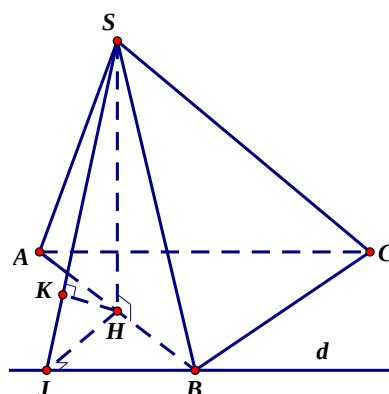
Kẻ đoạn thẳng HJ sao cho $HJ \perp d$, $J \in d$.

Kẻ đoạn thẳng HK sao cho $HK \perp SJ$, $K \in SJ$

$d(H; (SB, d)) = HK$

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HJ^2} + \frac{1}{SH^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \Rightarrow d(AC, SB) = 2HK = a\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Vậy chọn đáp án C.



Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Gọi M là trung điểm của SD . Tính theo a khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SAC)

A. $\frac{a\sqrt{1353}}{98}$

B. $\frac{a\sqrt{153}}{89}$

C. $\frac{a\sqrt{1353}}{89}$

D. $\frac{a\sqrt{1513}}{89}$

Hướng dẫn giải

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$, suy ra HC

là hình chiếu của SC lên $(ABCD) \Rightarrow \angle SCH = 45^\circ$

$$SH = HC = \sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{17}}{2}$$

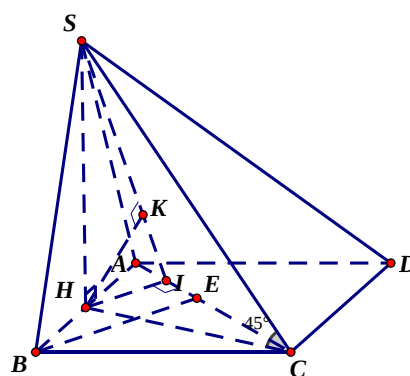
$$d(M, (SAC)) = \frac{1}{2}d(D, (SAC)) = \frac{1}{2}d(B, (SAC)) = d(H, (SAC))$$

Kẻ

$HI \perp AC$, $HK \perp SI \Rightarrow HK \perp AC \Rightarrow HK \perp (SAC) \Rightarrow d(H, (SAC)) = HK$ Kẻ

$BE \perp AC \Rightarrow HI = \frac{1}{2}BE$

$$\frac{1}{BE^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow BE = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow HI = \frac{a}{\sqrt{5}}$$



$$\text{Từ đó suy ra } \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{5}{a^2} + \frac{4}{17a^2} = \frac{89}{17a^2} \Rightarrow d(M, (SAC)) = \frac{a\sqrt{17}}{\sqrt{89}} = \frac{a\sqrt{1513}}{89}$$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 31. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a. SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, góc giữa cạnh SC và mặt phẳng (ABCD) bằng 60° , cạnh AC = a. Tính theo a khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC)

A. $\frac{3a\sqrt{13}}{13}$

B. $\frac{3a\sqrt{13}}{11}$

C. $\frac{3a\sqrt{11}}{11}$

D. $\frac{a\sqrt{13}}{13}$

Hướng dẫn giải

Gọi I là trung điểm của đoạn AB

$\Rightarrow SI \perp AB, (SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp (ABCD)$ nên

$$SCI = (SC; (ABCD)) = 60^\circ, CI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SI = CI \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}$$

Gọi M là trung điểm của đoạn BC, N là trung điểm của đoạn BM.

$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow IN = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Ta có $BC \perp IN, BC \perp SI \Rightarrow BC \perp (SIN)$.

Trong mặt phẳng (SIN) kẻ $IK \perp SN, K \in SN$. Ta có:

$$\begin{cases} IK \perp SN \\ IK \perp BC \end{cases} \Rightarrow IK \perp (SBC) \Rightarrow d(I; (SBC)) = IK$$

$$\text{Lại có: } \frac{1}{IK^2} = \frac{1}{IS^2} + \frac{1}{IN^2} \Rightarrow IK = \frac{3a\sqrt{13}}{26} \Rightarrow d(I; (SBC)) = \frac{3a\sqrt{13}}{26} \Rightarrow d(A; (SBC)) = \frac{3a\sqrt{13}}{13}$$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 32. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, hình chiếu vuông góc của S trên đường thẳng AB là điểm H thuộc đoạn AB sao cho $BH = 2AH$. Gọi I là giao điểm của HC và BD. Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SCD)

A. $\frac{a\sqrt{33}}{15}$

B. $\frac{3a\sqrt{22}}{55}$

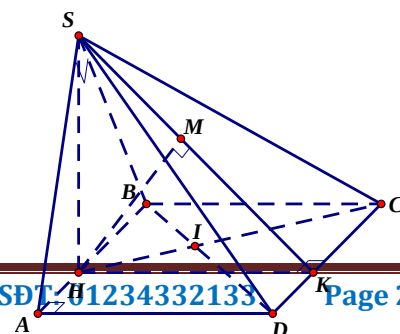
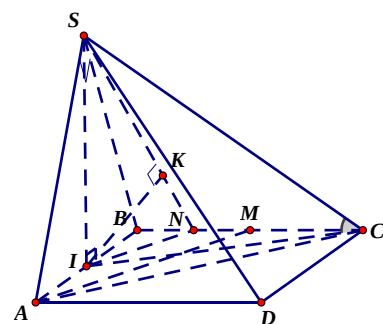
C. $\frac{3a\sqrt{33}}{11}$

D. $\frac{a\sqrt{23}}{12}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } SH^2 = HA \cdot HB = \frac{2a^2}{9} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{d(I; (SCD))}{d(H; (SCD))} = \frac{IC}{HC} \text{ và } \frac{IC}{IH} = \frac{CD}{BH} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{IC}{HC} = \frac{3}{5}$$



$$CH^2 = BH^2 + BC^2 = \frac{13}{9}a^2$$

$$\frac{1}{HM^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{11}{2a^2} \Rightarrow HM = \frac{a\sqrt{22}}{11}$$

$$d(I; (SCD)) = \frac{3a\sqrt{22}}{55}$$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 33. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BA = 3a$, $BC = 4a$, mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\angle SBC = 30^\circ$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a.

A. $\frac{3a}{\sqrt{7}}$

B. $\frac{6a}{\sqrt{7}}$

C. $\frac{a}{\sqrt{7}}$

D. $\frac{7a}{\sqrt{7}}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Gọi H là hình chiếu của S trên BC.

Vì $(SBC) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$

Ta có $SH = a\sqrt{3}$

Ta có tam giác SAC vuông tại S vì $SA = a\sqrt{21}$, $SC = 2a$,

$AC = 5a$ và $S_{SAC} = a^2\sqrt{21}$

Nên ta có được: $d(B, (SAC)) = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{SAC}} = \frac{6a}{\sqrt{7}}$

Vậy chọn đáp án B.

Cách 2: Hạ $HD \perp AC$ ($D \in AC$), $HK \perp SD$ ($K \in SD$)

$\Rightarrow HK \perp (SAC) \Rightarrow HK = d(H, (SAC))$

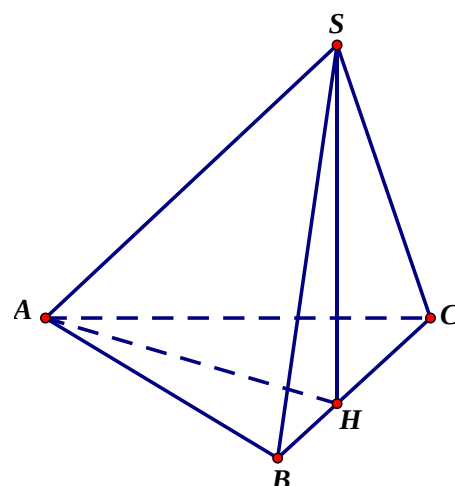
$BH = SB \sin \angle SBC = 3a \Rightarrow BC = 4HC$

Hay $d(B, (SAC)) = 4d(H, (SAC))$

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5a$, $HC = BC - BH = a \Rightarrow HD = AB \cdot \frac{HC}{AC} = \frac{3a}{5}$

$$HK = \frac{SH \cdot HD}{\sqrt{SH^2 + HD^2}} = \frac{3a\sqrt{7}}{14}$$

Vậy, $d(B, (SAC)) = 4d(H, (SAC)) = 4HK = \frac{6a\sqrt{7}}{7}$



Câu 34. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a. Tính khoảng cách từ A đến (SCD)

A. $\frac{a\sqrt{6}}{7}$

B. $\frac{a\sqrt{6}}{5}$

C. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$

D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

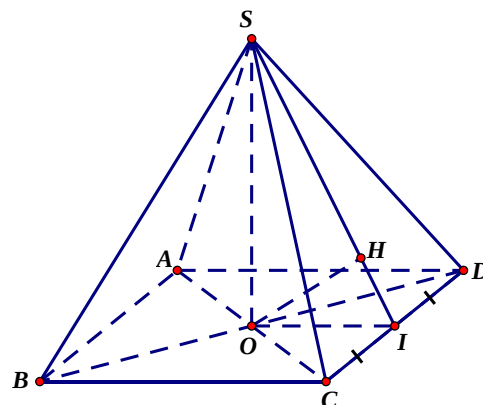
Hướng dẫn giải

Cách 1. Ta có: $V_{S.ACD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Mặt khác

$$V_{SACD} = \frac{1}{3} S_{SCD} \cdot d(A, (SCD))$$

$$\Rightarrow d(A, (SCD)) = \frac{3V_{SACD}}{S_{SCD}} = \frac{\frac{a^3\sqrt{2}}{4}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$



Vậy chọn đáp án D.

Cách 2. Gọi I là trung điểm của CD, dựng $OH \perp SI$ ($H \in SI$), ta có:

$$\begin{cases} CD \perp OI \\ CD \perp SO \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOI) \Rightarrow CD \perp OH; \begin{cases} OH \perp SI \\ OH \perp CD \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SCD) \Rightarrow OH = d(O, (SCD))$$

Trong tam giác vuông SOI, $OH \cdot SI = SO \cdot OI \Rightarrow OH = \frac{SO \cdot OI}{SI} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$$AO \cap (SCD) = \{C\} \Rightarrow \frac{d(A, (SCD))}{d(O, (SCD))} = \frac{CA}{CO} = 2 \Rightarrow d(A, (SCD)) = 2d(O, (SCD)) = 2OH = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$$

Bài 35. Cho hình chóp đều S.ABC có cạnh đáy bằng a. Gọi B', C' lần lượt là trung điểm của SB, SC. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (ABC') biết rằng $(SBC) \perp (AB'C')$

A. $\frac{a\sqrt{53}}{4}$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{14}$

C. $\frac{a\sqrt{5}}{14}$

D. $\frac{a\sqrt{35}}{14}$

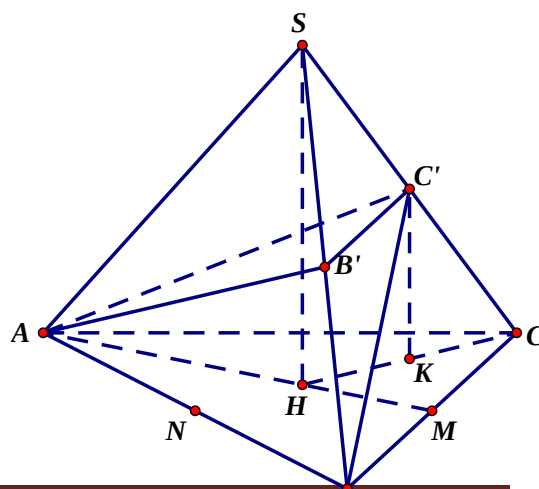
Hướng dẫn giải

Gọi M, N là trung điểm của BC, BA. H, K là hình chiếu của S xuống mặt phẳng (ABC). $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$$SH = \frac{a\sqrt{15}}{6} \text{ và thể tích khối chóp S.ABC là } V = \frac{a^3\sqrt{5}}{24}$$

Tam giác C'AB cân tại C' và

$$C'N = \sqrt{C'K^2 + KN^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}a \text{ nên ta có } S_{ABC'} = \frac{\sqrt{7}}{8}a^2$$



$$\text{Vậy } d(C, (C'AB)) = \frac{3V_{C.C'AB}}{S_{C'AB}} = \frac{3V}{2S_{C'AB}} \text{ hay khoảng cách cần tìm là: } d(C, (C'AB)) = \frac{a\sqrt{35}}{14}.$$

Vậy chọn đáp án D

Bài 36. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân, $AB = AC = a$, $BAC = 120^\circ$. Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với mặt đáy góc 60° . Tính khoảng cách từ đường thẳng BC đến mặt phẳng $(AB'C')$ theo a .

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

B. $\frac{a\sqrt{5}}{14}$

C. $\frac{a\sqrt{7}}{4}$

D. $\frac{a\sqrt{35}}{21}$

Hướng dẫn giải

Xác định góc giữa $(AB'C')$ và mặt đáy là

$$\angle AKA' \Rightarrow \angle AKA' = 60^\circ$$

$$\text{Tính } A'K = \frac{1}{2}A'C' = \frac{a}{2} \Rightarrow AA' = A'K \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$d(B; (AB'C')) = d(A'; (AB'C'))$$

Chứng minh: $(AA'K) \perp (AB'C')$

Trong mặt phẳng $(AA'K)$ dựng $A'H$ vuông góc với

$$AK \Rightarrow A'H \perp (AB'C') \Rightarrow d(A'; (AB'C')) = A'H$$

$$\text{Tính } A'H = \frac{a\sqrt{3}}{4}. \text{ Vậy } d(B; (AB'C')) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Vậy chọn đáp án A.

Bài 37. Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có các mặt bên là các hình vuông cạnh a . Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh BC, A_1C_1, B_1C_1 . Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng DE và A_1F .

A. $\frac{a\sqrt{17}}{3}$

B. $\frac{a}{\sqrt{17}}$

C. $\frac{a\sqrt{17}}{4}$

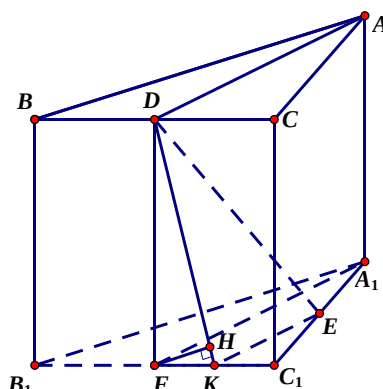
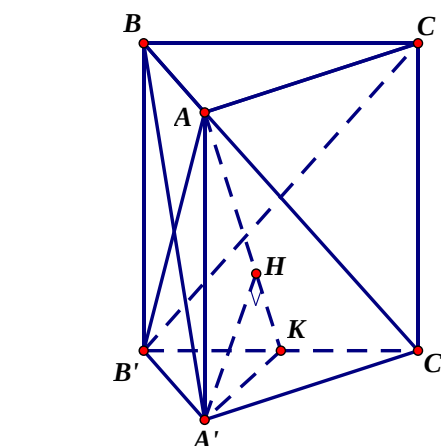
D. $\frac{a\sqrt{17}}{2}$

Hướng dẫn giải

Gọi (α) là mặt phẳng chứa DE và song song với A_1F , thì khoảng cách cần tính bằng khoảng cách từ F đến (α) .

Theo giả thiết suy ra lăng trụ đã cho là lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều cạnh a .

Gọi K là trung điểm của FC_1 thì $EK // A_1F // AD$, suy ra $(\alpha) = (ADKE)$.



Ta có $A_1F \perp B_1C_1 \Rightarrow A_1F \perp (BCC_1B_1) \Rightarrow EK \perp (BCC_1B_1)$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của F lên đường thẳng DK thì $FH \perp (ADKE)$, suy ra FH là khoảng cách cần tính.

Trong tam giác vuông DKF, ta có: $\frac{1}{FH^2} = \frac{1}{FD^2} + \frac{1}{FK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{4}\right)^2} \Rightarrow FH = \frac{a}{\sqrt{17}}$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 38. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và góc $BAD = 60^\circ$. Gọi O, O' lần lượt là tâm của hai đáy, $OO' = 2a$. Gọi S là trung điểm của OO' . Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SAB)

A. $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$

C. $\frac{a}{\sqrt{19}}$

D. $\frac{3a}{\sqrt{19}}$

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết suy ra $\triangle ABD$ đều cạnh bằng a , $ACC'A'$, $BDD'B'$ là các hình chữ nhật với $AA' = BB' = 2a$, $AC = a\sqrt{3}$, $BD = a$. Do đó:

$$S_{ACC'A'} = AA' \cdot AC = 2a^2 \sqrt{3}$$

$$S_{BDD'B'} = BB' \cdot BD = 2a^2$$

Ta có: $OO' \perp (ABCD) \Rightarrow OO' \perp AB$

Kẻ OK vuông góc với AB thì $AB \perp (SOK)$

Kẻ OH vuông góc với SK , khi đó $OH \perp (SAB)$. Suy ra OH

là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB)

Do tam giác ABD đều nên $OK = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Vì $OO' = 2a$ nên $OS = a$.

Trong tam giác vuông SOK , ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{16}{3a^2} + \frac{1}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$

Vậy chọn đáp án B.

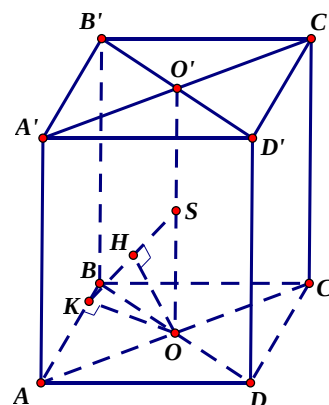
Câu 39. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $AA' = 2a$, $A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng $A'C'$, I là giao điểm của AM và $A'C$. Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC)

A. $\frac{2a\sqrt{3}}{5}$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$

D. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$



Hướng dẫn giải

Hạ $IH \perp AC$ ($H \in AC$) $\Rightarrow IH \perp (ABC)$, nên IH là đường cao của tứ diện $IABC$

$$\Rightarrow IH \parallel AA' \Rightarrow \frac{IH}{AA'} = \frac{CI}{CA'} = \frac{2}{3} \Rightarrow IH = \frac{2}{3} AA' = \frac{4a}{3}$$

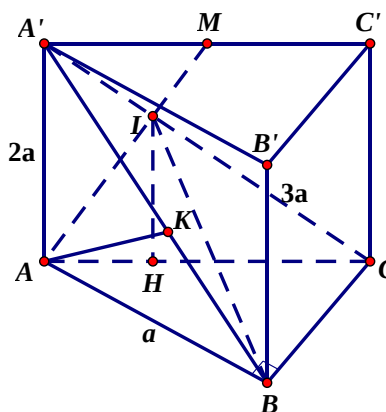
$$AC = \sqrt{A'C^2 - A'A^2} = a\sqrt{5}; BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a$$

Hạ $AK \perp A'B$ ($K \in A'B$). Vì $BC \perp (ABB'A')$ nên

$$AK \perp BC \Rightarrow AK \perp (IBC)$$

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC) là AK :

$$AK = \frac{2S_{\triangle AA'B}}{A'B} = \frac{AA' \cdot AB}{\sqrt{A'A^2 + AB^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$



Vậy chọn đáp án D.

Câu 40. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.

A. $\frac{a\sqrt{35}}{7}$

B. $\frac{a\sqrt{7}}{7}$

C. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{a\sqrt{35}}{5}$

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết suy ra tam giác ABC vuông cân tại B .

Gọi E là trung điểm của BB' . Khi đó $B'C \parallel (AME)$

$$\text{Suy ra } d(AM, B'C) = d(B'C, (AME))$$

$$= d(C, (AME)) = d(B, (AME))$$

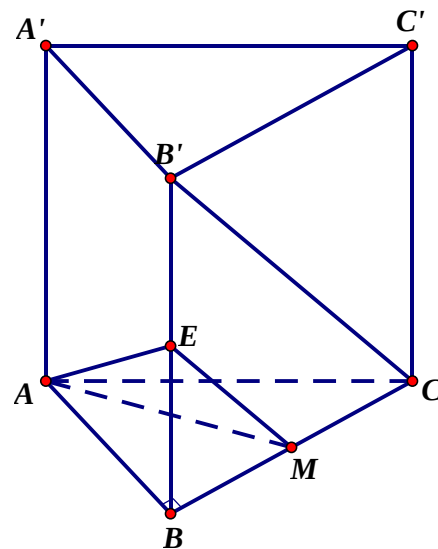
Gọi h là khoảng cách từ B đến mặt phẳng (AME)

Do tứ diện $BAME$ có BA, BM, BE đôi một vuông góc nên:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BE^2} \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{7}{a^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{7}}{7}$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$ là

$$\frac{a\sqrt{7}}{7}. \text{ Vậy chọn đáp án B.}$$



Câu 41. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $AC = 2a$ và $BAC = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC' thì $BMA' = 90^\circ$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BMA')

A. $\frac{a\sqrt{5}}{7}$

B. $\frac{a\sqrt{7}}{7}$

C. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng định lý hàm số cosin trong tam giác ABC ta có:

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB.AC \cos BAC \\ &= a^2 + 4a^2 - 2.a.2a.\cos 120^\circ = 7a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{7} \end{aligned}$$

Đặt $CC' = 2x$

$$\text{Ta có } A'M = \sqrt{A'C'^2 + C'M^2} = \sqrt{4a^2 + x^2}$$

$$BM = \sqrt{BC^2 + CM^2} = \sqrt{7a^2 + x^2},$$

$$A'B = \sqrt{A'B'^2 + BB'^2} = \sqrt{a^2 + 4x^2}$$

Tam giác BMA' là tam giác vuông tại M nên

$$MB^2 + MA'^2 = A'B^2$$

$$\text{Do đó } 4a^2 + x^2 + 7a^2 + x^2 = a^2 + 4x^2 \Rightarrow x^2 = 5a^2 \Rightarrow x = a\sqrt{5}$$

$$CC' \parallel (ABB'A') \Rightarrow V_{A.A'BM} = V_{M.AA'B} = V_{C.AA'B} = V_{A'.ABC};$$

$$d(A, (A'BM)) = \frac{3V_{A.A'BM}}{S_{A'BM}}$$

$$V_{A'.ABC} = \frac{1}{3} AA'.S_{ABC} = \frac{1}{3} . 2x . \frac{1}{2} AB.AC.\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{15}}{3} a^3$$

$$S_{A'BM} = \frac{1}{2} MA'.MB = 3\sqrt{3}a^2$$

$$d(A, (A'BM)) = \frac{\sqrt{15}a^3}{3\sqrt{3}a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{3}$$

Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BM)$ là $\frac{a\sqrt{5}}{3}$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 42. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M là trung điểm của cạnh AA' , biết $BM \perp AC'$. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (BMC') .

A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$

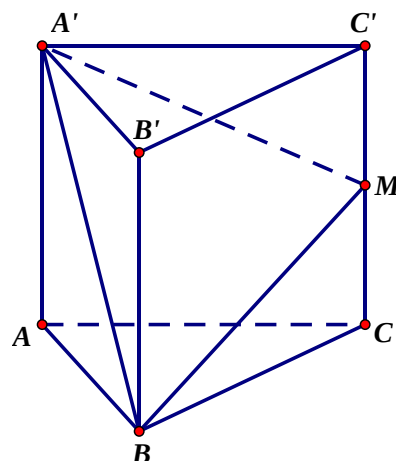
B. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$

C. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$

D. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$

Hướng dẫn giải

Ta có:



$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA'}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'}) = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}$$

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C'}$$

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC'} = \left(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}\right) \cdot (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C'}) = \underbrace{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AA'}}_0 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{A'C'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{AA'} + \underbrace{\frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{A'C'}}_0$$

$$= BA \cdot AC \cdot \cos 120^\circ + \frac{1}{2}BA \cdot AA \cdot \cos 0^\circ = a \cdot a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot h \cdot h = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}h^2$$

Theo giả thiết:

$$BM \perp AC' \Rightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC'} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}h^2 = \frac{1}{2}a^2 \Leftrightarrow h = a$$

Diện tích tam giác ABC là: $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Vì $AM \parallel (BCC')$ nên $V_{M.BCC'} = V_{A.BCC'}$ hay

$$V_{M.BCC'} = \frac{\sqrt{3}}{12}a^3$$

Gọi H là hình chiếu của M trên BC' . Ta có:

$$MB = MC' = \frac{a\sqrt{5}}{2}, BC' = a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow MH = \sqrt{MC'^2 - HC'^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{MBC'} = \frac{1}{2}MH \cdot BC' = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}$$

Vậy khoảng cách cần tìm là $d(C, (BMC')) = \frac{3V_{CBMC'}}{S_{BMC'}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 43. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, đáy ABC có $AC = a\sqrt{3}$, $BC = 3a$, $\angle ACB = 30^\circ$. Cạnh bên hợp với mặt phẳng đáy góc 60° và mặt phẳng $(A'BC)$ vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Điểm H trên cạnh BC sao cho $HC = 3BH$ và mặt phẳng $(A'AH)$ vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(A'AC)$

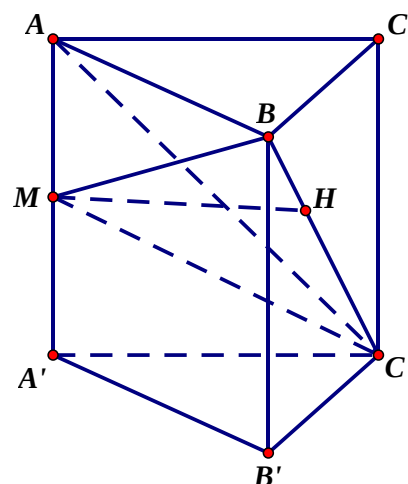
A. $\frac{2a\sqrt{5}}{3}$

B. $\frac{3\sqrt{3}a}{4}$

C. $\frac{3a\sqrt{5}}{2}$

D. $\frac{3a\sqrt{5}}{7}$

Hướng dẫn giải



$$\begin{cases} (A'BC) \perp (ABC) \\ (A'AH) \perp (ABC) \\ A'H = (A'BC) \cap (A'AH) \end{cases} \Rightarrow A'H \perp (ABC)$$

Suy ra $A'AH = 60^\circ$

$$AH^2 = AC^2 + HC^2 - 2AC \cdot HC \cdot \cos 30^\circ = a^2 \Rightarrow AH = a$$

$$\Rightarrow A'H = AH \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'H = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{3} = \frac{9a^3}{4}$$

$$\text{Vì } AH^2 + AC^2 = HC^2 \Rightarrow HA \perp AC \Rightarrow AA' \perp AC$$

$$S_{A'AC} = \frac{1}{2} AC \cdot A'A = \frac{1}{2} a\sqrt{3} \cdot 2a = a^2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow d(B; (A'AC)) = \frac{3V_{A'ABC}}{S_{A'AC}} = \frac{\frac{9}{4}a^3}{a^2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}a}{4}$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 44. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, ΔABC đều có cạnh bằng a , $AA' = a$ và đỉnh A' cách đều A, B, C . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh BC và $A'B$. Tính theo a khoảng cách từ C đến mặt phẳng (AMN)

A. $\frac{a\sqrt{5}}{23}$

B. $\frac{\sqrt{3}a}{33}$

C. $\frac{a\sqrt{5}}{22}$

D. $\frac{a\sqrt{22}}{11}$

Hướng dẫn giải

Gọi O là tâm tam giác đều $ABC \Rightarrow A'O \perp (ABC)$

$$\text{Ta có } AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AO = \frac{2}{3} AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$A'O = \sqrt{AA'^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3};$$

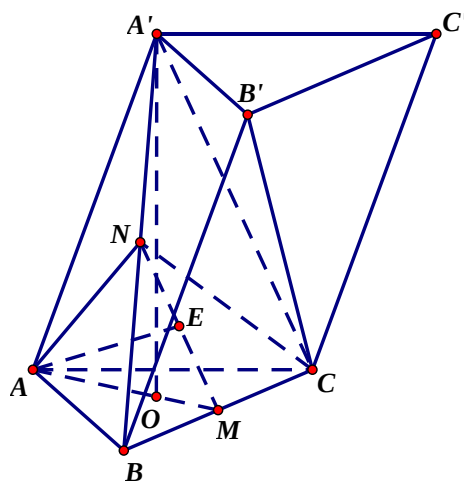
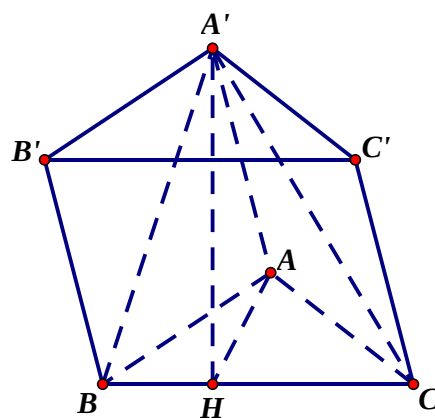
Ta có:

$$V_{NAMC} = \frac{1}{3} S_{\Delta AMC} \cdot d(N, (ABC))$$

$$\Rightarrow d(N, (ABC)) = \frac{3V_{NAMC}}{S_{\Delta AMC}}$$

$$S_{\Delta AMC} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}; d(N, (ABC)) = \frac{1}{2} A'O = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$\Rightarrow V_{NAMC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{48}$$



Lại có: $AM = AN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, nên $\triangle AMN$ cân tại A.

Gọi E là trung điểm của MN, suy ra $AE \perp MN$, $MN = \frac{A'C}{2} = \frac{a}{2}$

$$\Rightarrow AE = \sqrt{AN^2 - NE^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{11}}{4}; S_{AMN} = \frac{1}{2}MN \cdot AE = \frac{a^2\sqrt{11}}{16}$$

$$\Rightarrow d(C, (AMN)) = \frac{3a^2\sqrt{2}}{48} : \frac{a\sqrt{11}}{16} = \frac{a\sqrt{22}}{11} \text{ (đ v đ đ)}$$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 45. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $\angle ACB = 30^\circ$; M là trung điểm cạnh AC. Góc giữa cạnh bên và mặt đáy của lăng trụ bằng 60° . Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BM. Tính theo a khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng (BMB')

A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}a}{3}$

C. $\frac{3a}{4}$

D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Hướng dẫn giải

$A'H \perp (ABC) \Rightarrow A'H$ là đường cao của hình lăng trụ.

AH là hình chiếu vuông góc của $A A'$ lên (ABC)

$$\Rightarrow \angle A'AH = 60^\circ$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = A'H \cdot S_{ABC}$$

$$AC = 2a, MA = MB = AB = a \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'H = \frac{3a}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BA \cdot BC = \frac{1}{2}a \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$$

$$d(C', (BMB')) = d(C, (BMB')) = d(A, (BMB')) = \frac{3V_{A.BMB'}}{S_{BMB'}}$$

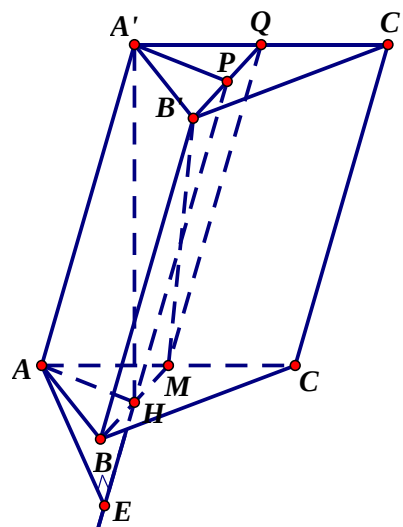
$$V_{A.BMB'} = V_{B'.AMB} = \frac{1}{6}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$$

Do $BM \perp (AHA')$ nên $BM \perp AA' \Rightarrow BM \perp BB' \Rightarrow \triangle BMB'$ vuông tại B

$$\Rightarrow S_{BMB'} = \frac{1}{2}BB' \cdot BM = \frac{1}{2}a\sqrt{3} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}. \text{ Suy ra } d(C', (BMB')) = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8} : \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4}$$

$$(\text{Cách 2: } d(A, (BMB')) = AE = AH \cdot \sin \angle AHE = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{3a}{4})$$

Vậy chọn đáp án C.



Câu 46. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Hình chiếu vuông góc của điểm A' trên mặt phẳng $ABCD$ là trung điểm I của cạnh AB . Biết $A'C$ tạo với mặt phẳng đáy một góc α với $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Tính theo a khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(A'AC)$

A. $\frac{a}{2}$

B. $\frac{2a}{3}$

C. $\frac{3a}{4}$

D. $\frac{5a}{2}$

Hướng dẫn giải

Theo bài ra ta có IC là hình chiếu vuông góc của $A'C$ trên mặt phẳng $(ABCD)$. Suy ra $(A'C, (ABCD)) = (A'C, CI) = A'CI = \alpha$

Xét tam giác vuông $A'IC$:

$$A'I = IC \cdot \tan A'CI = IC \cdot \tan \alpha = \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = a$$

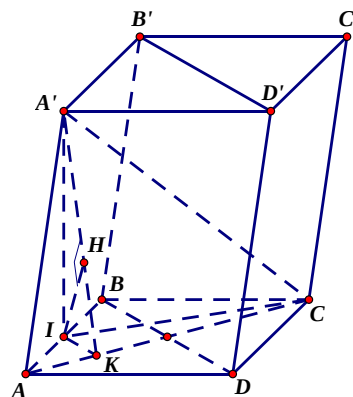
Ta có $BI \cap (A'AC) = A$ và I là trung điểm AB nên $d(B; (A'AC)) = 2d(I; (A'AC))$

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ kẻ $IK // BD \Rightarrow IK \perp AC$, mà $A'I \perp AC$ (do $A'I \perp (ABCD)$) nên $AC \perp (A'IK)$. Kẻ $IH \perp A'K \Rightarrow IH \perp (A'AC) \Rightarrow d(I; (A'AC)) = IH$

Xét tam giác vuông $A'IK$ có $A'I = a$, $IK = \frac{BD}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

$$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IK^2} + \frac{1}{IA'^2} = \frac{8}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{9}{a^2} \Rightarrow IH = \frac{a}{3}. \text{ Suy ra } d(B; (A'AC)) = \frac{2a}{3}$$

Vậy chọn đáp án B.



Câu 47. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD . Góc giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính khoảng cách từ điểm B' đến mặt phẳng $(A'BD)$ theo a .

A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$

B. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$

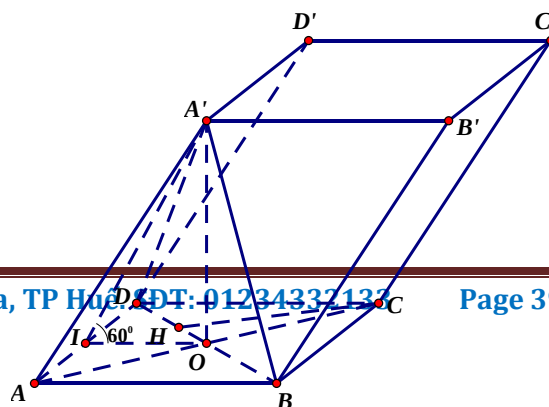
C. $\frac{3a\sqrt{2}}{4}$

D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải

Gọi $O = AC \cap BD$, I là trung điểm của cạnh AD .

Ta có $AD \perp (AOI)$



$$\Rightarrow A'IO = ((ADD'A'), (ABCD)) = 60^\circ \text{ Vì } OI = \frac{a}{2} \text{ nên ta suy ra } A'I = 2OI = a$$

$$\Rightarrow A'O = OI \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } V_{ABCD.A'B'C'D'} &= A'O \cdot S_{ABCD} \\ &= a \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3}{2} \end{aligned}$$

Do $B'C \parallel A'D \Rightarrow B'C \parallel (A'BD) \Rightarrow d(B', (A'BD)) = d(C, (A'BD)) = CH$ trong đó CH là đường cao của tam giác vuông BCD .

$$\text{Ta có } CH = \frac{CD \cdot CB}{\sqrt{CD^2 + CB^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \text{ Vậy } d(B', (A'BD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy chọn đáp án D.

DẠNG 3. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI MẶT PHẶNG SONG SONG. KHOẢNG CÁCH TỪ ĐƯỜNG THẲNG ĐẾN MẶT PHẶNG

Phương pháp

Việc tính khoảng cách giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song với nó, hoặc tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song đều quy về việc tính khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng. Cần lưu ý việc chọn điểm trên đường hoặc trên mặt sao cho việc xác định khoảng cách được đơn giản nhất.

Câu 1. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a . Hình chiếu vuông góc của A trên $mp(A'B'C')$ trùng với trung điểm của $B'C'$.

Câu 1.1. Tính khoảng cách từ AA' đến mặt bên $BCC'B'$

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{3a\sqrt{2}}{4}$

D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải

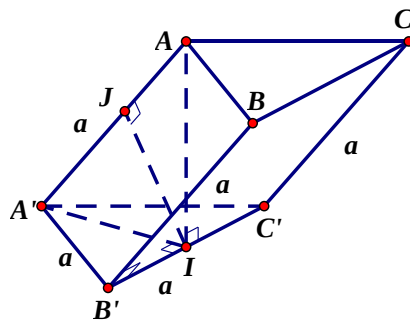
Ta có: $AA' \parallel BB' \subset (BCC'B')$

$$\Rightarrow AA' \parallel (BCC'B')$$

$$\text{Gọi } J = h_{AA', I} \Rightarrow IJ \perp AA' \parallel BB' \Rightarrow IJ \perp BB'$$

Mặt khác, theo giả thiết suy ra:

$$\begin{cases} B'C' \perp AI \subset (AA'I) \\ B'C' \perp BI \subset (AA'I) \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (AA'I)$$



Suy ra: $IJ \perp B'C'$, tức là $IJ \perp (BCC'B')$, mà $J \in AA'$ nên $d(AA', (BCC'B')) = IJ$

Trong $\triangle AA'I \Rightarrow IJ \cdot AA' = AI \cdot A'I \Rightarrow IJ = \frac{AI \cdot A'I}{AA'}$.

Để thấy $A'I = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AI = \sqrt{AA'^2 - A'I^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}$. Suy ra: $IJ = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $d(AA', (BCC'B')) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. **Vậy chọn đáp án A.**

Câu 1.2. Tính khoảng cách giữa hai mặt đáy của lăng trụ

A. $\frac{a}{4}$

B. $\frac{a}{2}$

C. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

D. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$

Hướng dẫn giải

Hai đáy của lăng trụ song song nên $d((ABC), (A'B'C')) = d(A, (A'B'C'))$ mà $A \in (ABC)$ và

$$AI \perp (A'B'C') \Rightarrow d((ABC), (A'B'C')) = AI = \frac{a}{2}.$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = b$, $CC' = c$.

Câu 2.1. Tính khoảng cách từ AA' đến $mp(BDD'B')$

A. $\frac{abc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

B. $\frac{abc}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

C. $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

D. $\frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $AA' \parallel BB' \subset (BDD'B')$

$\Rightarrow AA' \parallel (BDD'B')$. Do đó:

$$d(AA', (BDD'B')) = d(A, (BDD'B'))$$

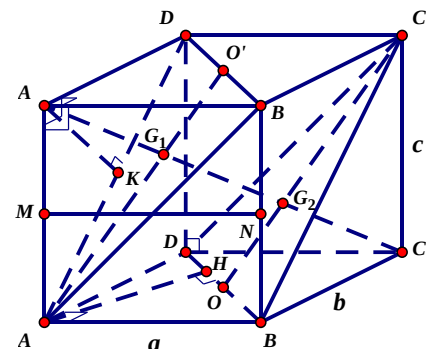
Gọi $H = h_{ch_{BD}}A \Rightarrow AH \perp BD$ mà $(BDD'B') \perp (ABCD)$

suy ra: $AH \perp (BDD'B')$. Tức là: $d(A, (BDD'B')) = AH$

$$\text{Xét } \triangle ABD \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}$$

$$\text{nên } AH^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \Rightarrow AH = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Vậy: $d(AA', (BDD'B')) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. **Vậy chọn đáp án C.**



Câu 2.2. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA' , BB' . Tính khoảng cách từ MN đến $mp(ABC'D')$

A. $\frac{2abc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

B. $\frac{abc}{2\sqrt{a^2 + b^2}}$

C. $\frac{bc}{2\sqrt{a^2 + b^2}}$

D. $\frac{2ac}{\sqrt{a^2 + c^2}}$

Hướng dẫn giải

Tính khoảng cách từ MN đến mp(ABC'D'):

Ta có: $MN' \parallel AB \subset (ABC'D') \Rightarrow MN' \parallel (ABC'D')$. Suy ra:

$d(MN, (ABC'D')) = d(M, (ABC'D'))$, nhưng A'M cắt mặt phẳng (ABC'D') tại A và M là

trung điểm của AA'. Nên: $d(M, (ABC'D')) = \frac{1}{2}d(A', (ABC'D'))$

Gọi K = hch_{AD}A' $\Rightarrow A'K \perp AD'$ mà $(ABC'D') \perp (AA'D'D)$, suy ra:

$A'K \perp (ABC'D')$. Tức là: $d(A', (ABC'D')) = A'K$.

Xét $\Delta A'AD' \Rightarrow \frac{1}{A'K^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{A'D'^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{c^2 + b^2}{c^2b^2}$, nên:

$$A'K^2 = \frac{c^2b^2}{c^2 + b^2} \Rightarrow A'K = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}. \text{ Vậy } d(M, (ABC'D')) = \frac{bc}{2\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 2.3. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (AD'B'), (C'BD)

A. $\frac{abc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

B. $\frac{abc}{\sqrt{ab + bc + ca}}$

C. $\frac{abc}{2\sqrt{a^2 + c^2 + c^2}}$

D. $\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $B'D' \parallel BC \subset (C'BD) \Rightarrow B'D' \parallel (C'BD)$

Gọi O = AC ∩ BD, O' = A'C' ∩ B'D'

Suy ra: $AO' \parallel C'O \subset (C'BD) \Rightarrow AO' \parallel (C'BD)$

Mà $AO', B'D' \subset (AD'B'), AO' \cap B'D' = O' \Rightarrow (AD'B') \parallel (C'BD)$

Ta đã chứng minh được A'C bị các mặt (AD'B'), (C'BD) chia thành ba đoạn bằng nhau.

Do đó: $d((AD'B'), (C'BD)) = d(G_1, (C'BD)) = d(A', (AD'B'))$

Vì A'A, A'B', A'D' đôi một vuông góc, nếu:

$$\frac{1}{d^2(A', (AD'B'))} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{A'B'^2} + \frac{1}{A'D'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$\text{Vậy: } d(A', (AD'B')) = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} = d((AD'B'), (C'BD))$$

Vậy chọn đáp án D.

Ta cần chú ý kết quả sau: Nếu tứ diện OABC có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc

$$\text{thì: } d(O, (ABC)) = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$$

Câu 3. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a, mặt bên SBC vuông góc với đáy ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, SA, AC. Tính khoảng cách giữa hai mp(MNP) và mp(SBC)

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

D. $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết, suy ra:

$$MN \parallel SA \subset (SAC) \Rightarrow MN \parallel (SAC)$$

$$NP \parallel SC \subset (SAC) \Rightarrow NP \parallel (SAC)$$

Mà $MN, NP \subset (MNP), MN \cap NP = N$

$$\text{mp}(MNP) \parallel \text{mp}(SBC).$$

Gọi H là trung điểm của BC $\Rightarrow AH \perp BC$ (do $\triangle ABC$ đều)

$$\text{Mà } (ABC) \perp (SBC) \text{ và } AH \subset (ABC)$$

$$BC = (ABC) \cap (SBC) \Rightarrow AH \perp (SBC)$$

$$\text{Gọi } K = AH \cap MP \Rightarrow KH \perp (SBC) \Rightarrow d(K, (SBC)) = KH$$

$$\text{Vì } \text{mp}(MNP) \parallel \text{mp}(SBC) \text{ và } K \in (MNP)$$

$$\text{Do đó: } d((MNP), (SBC)) = d(K, (SBC)) = KH = \frac{1}{2}AH = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 4. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh đều bằng a. Góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30° . Hình chiếu H của điểm A trên mặt phẳng (A'B'C') thuộc đường thẳng B'C'. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy.

A. $\frac{a}{3}$

B. $\frac{a}{2}$

C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

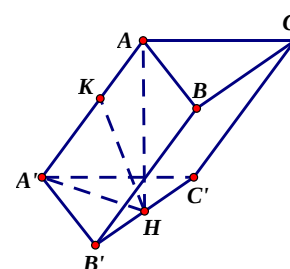
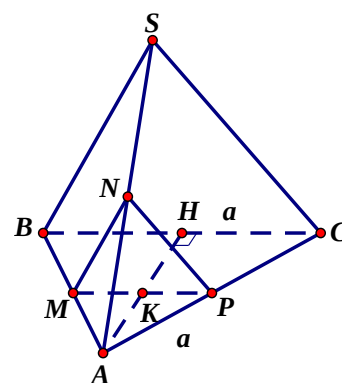
Hướng dẫn giải

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy chính bằng AH.

Trong $\triangle HAA'$, ta có: $A' = 30^\circ$.

$$AH = AA' \cdot \sin A' = a \cdot \sin 30^\circ = \frac{a}{2}$$

Vậy chọn đáp án B.



Câu 5. Cho hình hộp thoi $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh đều bằng a và $\angle BAD = \angle BAA' = \angle DAA' = 60^\circ$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$.

- A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{a\sqrt{10}}{5}$ C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Hướng dẫn giải

Hạ $A'H \perp AC$, ta có nhận xét:

$$\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp A'O \end{cases} \Leftrightarrow BD \perp (OAA') \\ \Rightarrow BD \perp A'H \Rightarrow A'H \perp (ABCD)$$

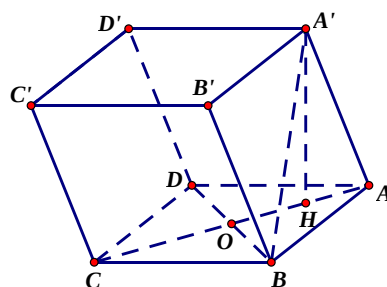
Và vì $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$ nên $A'H$ chính là khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy.

Nhận xét rằng hình chóp $A'.ABD$ là hình chóp đều, nên ta lần lượt có:

$$AH = \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow A'H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Vậy chọn đáp án C.



Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (BCD)$, $AB = 5a$, $BC = 3a$, $CD = 4a$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AC và AD .

Câu 6.1. Tính khoảng cách giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (BCD) .

- A. $\frac{2a}{3}$ B. $\frac{a}{2}$ C. $\frac{a}{4}$ D. $\frac{5a}{2}$

Hướng dẫn giải

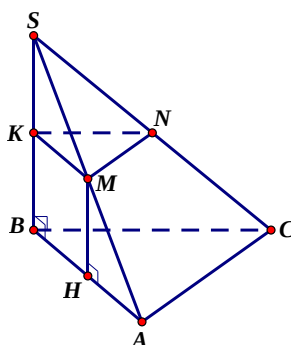
$$\begin{cases} MN \parallel CD \\ CD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (BCD)$$

$$\begin{cases} \text{Từ M kẻ } MH \parallel AB \\ AB \perp (BCD) \end{cases} \Rightarrow MH \perp (BCD)$$

$$\text{Vậy: } MH = d(MN, (BCD))$$

$$\Delta ABC \text{ cho: } MH = \frac{AB}{2} = \frac{5a}{2}$$

Vậy chọn đáp án D.



Câu 6.2. Gọi (P) là mặt phẳng chứa MN và đi qua trung điểm K của AB . Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (BCD)

A. $\frac{a}{3}$

B. $\frac{3a}{2}$

C. $\frac{5a}{4}$

D. $\frac{5a}{2}$

Giải

a. Tính $d((P), (BCD))$:

$$\left. \begin{array}{l} MN \parallel CD \\ MK \parallel BC \end{array} \right\} \Rightarrow (P) \parallel (BCD)$$

$$\left. \begin{array}{l} M \in (P) \\ MH \perp (BCD) \end{array} \right\} \Rightarrow MH = d((P), (BCD)) = \frac{5a}{2}. \text{ Vậy chọn đáp án D}$$

Câu 7. Cho hình chóp cắt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$. Đáy lớn $ABCD$ có cạnh bằng a , đáy nhỏ $A'B'C'D'$ có cạnh bằng b . Góc giữa mặt bên và đáy lớn bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai mặt đáy của hình chóp cắt đều này

A. $\frac{ab\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{(a+b)\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{(a-b)\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{(b-a)\sqrt{3}}{2}$

Lưu ý: Cần chú ý rằng, trong hình chóp cắt đều thì các mặt bên là những hình thang cân bằng nhau, các góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Gọi O, O' lần lượt là tâm của hai hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$; K và J lần lượt là trung điểm của $A'D'$ và AD .

Gọi H là hình chiếu của K trên $mp(ABCD)$ thì $KH \perp OJ$ tại H và KH là khoảng cách cần tìm.

Gọi φ là góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp cắt thì $\varphi = KJH = 60^\circ$.

Ta có: $O'K = \frac{b}{2}; OJ = \frac{a}{2}$. $KHOO'$ là hình chữ nhật nên:

$$JH = OJ - O'K = \frac{a-b}{2}$$

$$\Delta HJK: \tan \varphi = \frac{KH}{HJ} = \frac{2 \cdot KH}{a-b} \Rightarrow KH = \frac{(a-b)\sqrt{3}}{2}. \text{ Vậy chọn đáp án C.}$$

Câu 8. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(BA'C')$ và (ACD')

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

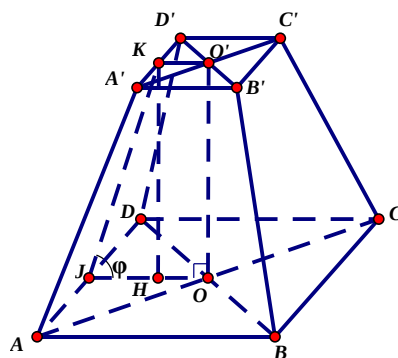
B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{a\sqrt{3}}{5}$

Phân tích:

Chứng minh $B'D \perp BC'$:



$$\begin{cases} BC' \perp CB' \\ BC' \perp DC (DC \perp (BB'C'C)) \end{cases} \Rightarrow BC' \perp (CDA'B') \Rightarrow BC' \perp B'D \quad (1)$$

Chứng minh $A'C' \perp B'D$:

$$\begin{cases} A'C' \perp B'D' \\ A'C' \perp BB' (BB' \perp (A'B'C'D')) \end{cases} \Rightarrow A'C' \perp (BDD'B') \Rightarrow A'C' \perp B'D \quad (2)$$

Xác định giao điểm K và H:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & (BB'D'D) \supset B'D \\ & (BC'A') \cap (BB'D'D) = BO' (O' = A'C' \cap B'D') \\ & B'D \cap BO' = K \end{aligned} \right\} \Rightarrow B'D \cap (BC'A') = K \\ & \left. \begin{aligned} & (BB'D'D) \supset B'D \\ & (ACD') \cap (BB'D'D) = D'O (O = AC \cap BD) \\ & B'D \cap D'O = H \end{aligned} \right\} \Rightarrow B'D \cap (ACD') = H \end{aligned}$$

Hướng dẫn giải

Từ (1) và (2) suy ra $B'D \perp (BC'A')$ (3)

Mặt khác:

$$\begin{cases} BC' \parallel AD' \\ BA' \parallel CD' \end{cases} \Rightarrow (BC'A') \parallel (ACD') \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra: $B'D \perp (ACD')$ (5)

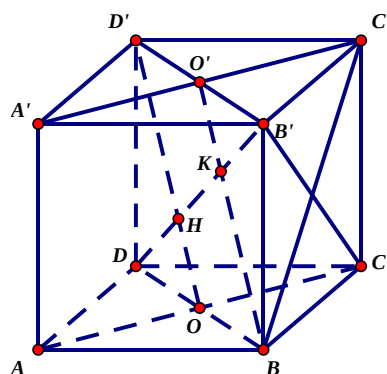
Ta có: $B'D \cap (BA'C') = K, B'D \perp (BC'A'),$
 $B'D \cap (D'AC) = H, B'D \perp (ACD')$

Do đó KH là khoảng cách cần tìm.

$$\triangle BDB': B'D^2 = BD^2 + B'B^2 = (a\sqrt{2})^2 + a^2 = 3a^2 \Rightarrow B'D = a\sqrt{3}$$

Để thấy trong hình chữ nhật $BB'D'D$ ta có: $KH = \frac{1}{3} B'D = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Vậy chọn đáp án B.



DẠNG 4. KHOẢNG CÁCH HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

Câu 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật ABCD có $AD = 2AB$, $SA \perp (ABCD)$, $SC = 2a\sqrt{5}$ và góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng 60° , M là trung điểm của cạnh BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và SD là

- A. $\frac{a\sqrt{510}}{17}$ B. $\frac{a\sqrt{51}}{17}$ C. $\frac{2a\sqrt{510}}{17}$ D. $\frac{3a\sqrt{510}}{17}$

Page 47

Gọi N là trung điểm cạnh SA.

Do $SB // (CMN)$ nên

$$\begin{aligned} d(SB, CM) &= d(SB, (CMN)) \\ &= d(B, (CMN)) = d(A, (CMN)) \end{aligned}$$

Kẻ $AE \perp MC$, $E \in MC$ và kẻ

$AH \perp NE$, $H \in NE$

Chứng minh được

$$AH \perp (CMN) \Rightarrow d(A, (CMN)) = AH$$

Tính $AE = \frac{2S_{\triangle AMC}}{MC}$ trong đó:

$$\left. \begin{aligned} S_{\triangle AMC} &= \frac{1}{2} AM \cdot AC \cdot \sin CAM = \frac{1}{2} a \cdot 4a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a^2 \sqrt{3} \\ MC &= a\sqrt{13} \end{aligned} \right\} \Rightarrow AE = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$$

$$\text{Tính được } AH = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{29}} \Rightarrow d(A, (CMN)) = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{29}} \Rightarrow d(SB, CM) = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{29}}.$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A, D , SA vuông góc với đáy, $SA = AD = a$, $AB = 2a$. Tính khoảng cách giữa AB và SC .

A. $\frac{a}{2}$

B. $\frac{a}{\sqrt{2}}$

C. $a\sqrt{2}$

D. $2a\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $AB // DC$ nên

$$d(AB, SC) = d(AB, (SDC)).$$

Trong mặt phẳng (SAD) từ A kẻ

$$AH \perp SD, H \in SD \quad (1)$$

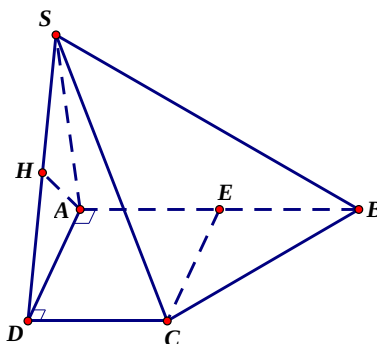
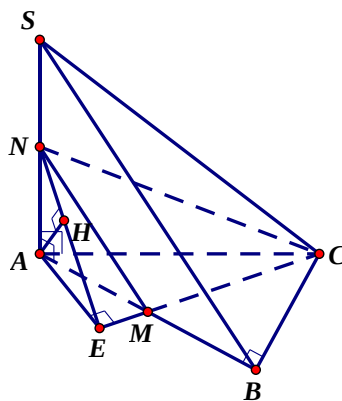
Ta có:

$$\left. \begin{aligned} DC \perp AD \\ DC \perp SA \end{aligned} \right\} \Rightarrow DC \perp (SAD) \Rightarrow DC \perp AH \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SCD)$

$$AH = d(AB, (SCD)) = d(AB, SC)$$

$$\text{Trong tam giác vuông } SAD \text{ có: } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{2}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$



Vậy chọn đáp án B.

Câu 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\angle ABC = 60^\circ$, cạnh bên SA vuông góc với đáy, SC tạo với đáy một góc 60° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, SD là

A. $\frac{3a}{\sqrt{5}}$

B. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$

C. $\frac{a}{\sqrt{15}}$

D. $\frac{3a}{\sqrt{15}}$

Hướng dẫn giải

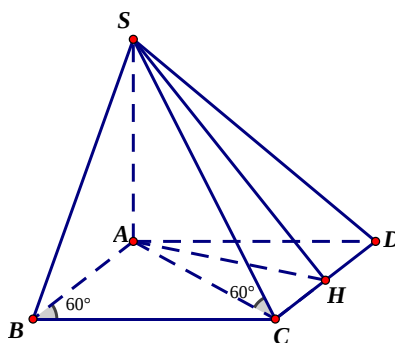
$$d(AB, SD) = d(A, (SCD)) = \frac{3V_{S.ACD}}{S_{\Delta SCD}}$$

Gọi H là trung điểm CD. Ta có:
 $CD \perp SH$.

$$\text{Do đó } S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2} CD \cdot SH = \frac{a^2 \sqrt{15}}{4}$$

Vậy

$$d(AB, SD) = d(A, (SCD)) = \frac{3V_{S.ACD}}{S_{\Delta SCD}} = \frac{3a}{\sqrt{15}}$$



Vậy chọn đáp án D.

Câu 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$, góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng (ABCD) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD

A. $\frac{3a}{2}$

B. $\frac{a}{4}$

C. $\frac{3a}{4}$

D. $\frac{2a}{3}$

Hướng dẫn giải

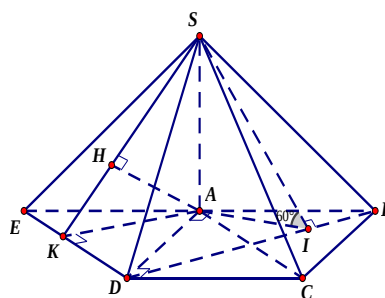
Trong mặt phẳng (ABCD) đường thẳng qua D song song với AC, cắt đường thẳng AB tại E.

Trong tam giác ADE kẻ đường cao AK ($K \in DE$) $\Rightarrow (SAK) \perp (SDE)$. Dựng $AH \perp SK$ tại H, suy ra $AH \perp (SDE)$.

Do

$$AC \parallel (SDE) \Rightarrow d(AC, SD) = d(A, (SDE)) = AH$$

$$\text{Ta có: } AK = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{3a}{4} \Rightarrow d(AC, SD) = \frac{3a}{4}. \text{ Vậy chọn đáp án A.}$$



Câu 6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi có cạnh bằng $a\sqrt{3}$, $\angle BAD = 120^\circ$ và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết rằng số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC

- A. $\frac{a\sqrt{7}}{14}$ B. $\frac{3a\sqrt{7}}{4}$ C. $\frac{3a\sqrt{7}}{14}$ D. $\frac{a\sqrt{7}}{8}$

Hướng dẫn giải

Gọi $O = AC \cap BD$. Vì $DB \perp AC$, $BD \perp SC$ nên $BD \perp (SAC)$ tại O.

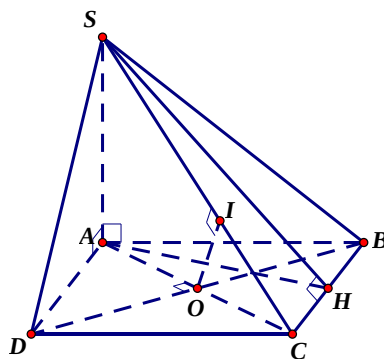
Kẻ $OI \perp SC \Rightarrow OI$ là đường vuông góc chung của BD và SC.

Sử dụng hai tam giác đồng dạng ICO và ACS hoặc đường cao của tam giác

SAC, suy ra được $OI = \frac{3a\sqrt{7}}{14}$. Vậy

$$d(BD, SC) = \frac{3a\sqrt{7}}{14}.$$

Vậy chọn đáp án C.



Câu 7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa SC và mặt phẳng đáy bằng 45° . Gọi E là trung điểm BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DE và SC theo a.

- A. $\frac{a}{19}$ B. $\frac{2a\sqrt{38}}{9}$ C. $\frac{a\sqrt{38}}{19}$ D. $\frac{a\sqrt{38}}{9}$

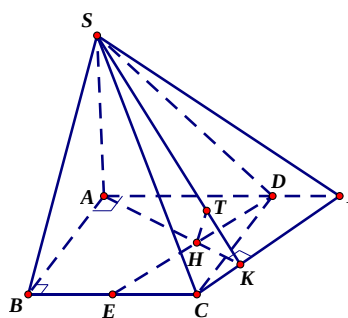
Hướng dẫn giải

Từ C dựng $CI \parallel DE \Rightarrow DE \parallel (SCI)$. Từ A dựng $AK \perp CI$, cắt ED tại H và CI tại K. Trong (SAK) dựng $HT \perp SK$. Do $CI \perp (SAK)$ nên $HT \perp (SCI)$

$$AK = \frac{CD \cdot AI}{CI} = \frac{3a}{\sqrt{5}}, \quad HK = \frac{1}{3}AK = \frac{a}{\sqrt{5}} \quad ()$$

$$d(DE, SC) = d(H, (SCI)) = HT = \frac{SA \cdot HK}{SK} = \frac{a\sqrt{38}}{19}$$

Vậy chọn đáp án C.



Câu 8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật ABCD, đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SA = AD = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{10}$

B. $\frac{a\sqrt{2}}{6}$

C. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Hướng dẫn giải

Trong mặt phẳng (SAD), vẽ $AH \perp SD$, $H \in SD$

Mặt khác ABCD là hình chữ nhật nên $CD \perp (SAD) \Rightarrow AH \perp (SCD)$

Vậy khoảng cách giữa AB và SC chính là AH.

Trong tam giác vuông SAD có AH là đường cao nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 9. Cho hình chóp S.ABC có tam giác SAB đều cạnh a, tam giác ABC cân tại C. Hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AB, góc hợp bởi cạnh SC và mặt đáy là 30° . Tính khoảng cách của hai đường thẳng SA và BC

A. $\frac{3a}{\sqrt{13}}$

B. $\frac{3a}{13}$

C. $\frac{a}{13}$

D. $\frac{2a}{13}$

Hướng dẫn giải

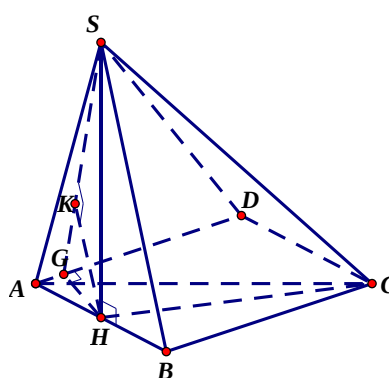
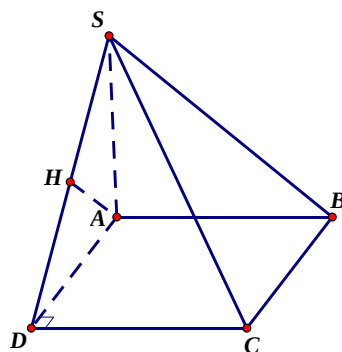
Gọi H là trung điểm cạnh AB, ta có SH là đường cao của hình chóp S.ABC và CH là đường cao của tam giác ABC. Từ giả thiết ta được $\angle SCH = 30^\circ$. Tam giác SHC vuông tại H nên

$$\frac{SH}{CH} = \tan 30^\circ \Rightarrow CH = SH \cdot \sqrt{3} = \frac{3a}{2}$$

Dựng hình bình hành ABCD, khi đó:

$$\begin{aligned} d(BC, SA) &= d(BC, (SAD)) \\ &= d(B, (SAD)) = 2d(H, (SAD)) \end{aligned}$$

Gọi G, K lần lượt là hình chiếu của H trên các đường thẳng AD và SG. Ta có:



$$\left. \begin{array}{l} AD \perp HG \\ AD \perp SH \end{array} \right\} \Rightarrow AD \perp (SHG) \Rightarrow HK \perp AD$$

Mà $HK \perp SG$ nên $HK \perp (SAD)$ hay $d(H, (SAD)) = HK$

Tam giác SHG vuông tại H nên:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HG^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{1}{HB^2} + \frac{1}{HC^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{52}{9a^2} \Rightarrow HK = \frac{3a}{2\sqrt{13}}$$

Vậy $d(BC, SA) = \frac{3a}{\sqrt{13}}$. Vậy chọn đáp án $\frac{3a}{\sqrt{13}}$. **Vậy chọn đáp án A.**

Câu 10. Cho hình chóp S.ABCD, tứ giác ABCD là hình thang cân, hai đáy là BC và AD. Biết $SA = a\sqrt{2}$, $AD = 2a$, $AB = BC = CD = a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) trùng với trung điểm cạnh AD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AD

A. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$

B. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$

C. $\frac{a}{7}$

D. $\frac{3a}{7}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $S_{ABCD} = 3S_{ABI} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$

Xét $\triangle SBI$ vuông tại I có:

$$SI^2 = SB^2 - BI^2 = a^2 \Rightarrow SI = a$$

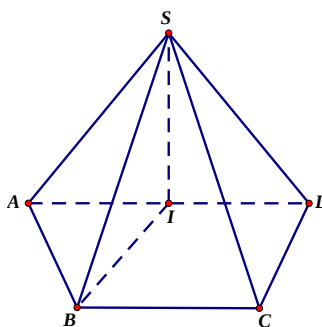
$$\left. \begin{array}{l} AD // BC \\ BC \subset (SBC) \end{array} \right\} \Rightarrow AD // (SBC)$$

$$\Rightarrow d(AD, BC) = d(AD, (SBC))$$

$$= d(I, (SBC)) = \frac{3V_{SIBC}}{S_{SBC}}$$

$$V_{SIBC} = \frac{1}{3} V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}; S_{SBC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{a^2\sqrt{7}}{4}$$

Vậy $d(AD, SB) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$. **Vậy chọn đáp án B.**



Câu 11. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = 3a$, $AD = 2a$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABCD) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $AH = 2HB$. Góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng (ABCD) bằng 60° . Tính theo a thể tích khối tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AD

A. $\frac{a\sqrt{39}}{15}$

B. $\frac{6a\sqrt{39}}{13}$

C. $\frac{a\sqrt{39}}{3}$

D. $\frac{a\sqrt{39}}{11}$

Hướng dẫn giải

Kẻ $HK \perp CD$ ($K \in CD$). Khi đó:

$$\left. \begin{array}{l} CD \perp HK \\ CD \perp SH \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp SK$$

Vậy góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ là góc $SKH = 60^\circ$

Trong tam giác vuông SHK :

$$SH = HK \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$$

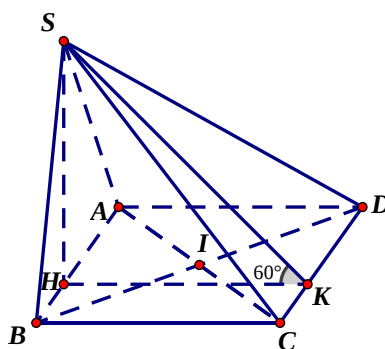
Vì $(SBC) // AD \Rightarrow d(AD, SC) = d(A, (SBC))$.

Trong (SAB) kẻ $AI \perp SB$, khi đó:

$$\left. \begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SH \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AI. \text{ Mà } SB \perp AI \Rightarrow AI \perp (SBC)$$

$$\text{Vậy } d(AD, SC) = d(A, (SBC)) = AI = \frac{SH \cdot AB}{SB} = \frac{2a\sqrt{3} \cdot 3a}{\sqrt{12a^2 + a^2}} = \frac{6a\sqrt{39}}{13}.$$

Vậy chọn đáp án A.



Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SD = \frac{a\sqrt{17}}{2}$, hình chiếu vuông góc H của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của đoạn AB . Gọi K là trung điểm của đoạn AD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng HK và SD theo a .

A. $\frac{a\sqrt{3}}{25}$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{45}$

C. $\frac{a\sqrt{3}}{15}$

D. $\frac{a\sqrt{3}}{5}$

Hướng dẫn giải

$SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp HD$. Ta có:

$$SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = \sqrt{SD^2 - (AH^2 + HD^2)}$$

$$\Rightarrow SH = a\sqrt{3}$$

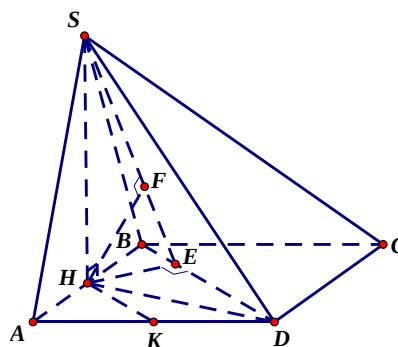
$$HK // BD \Rightarrow HK // (SBD)$$

$$\Rightarrow d(HK, SD) = d(H, (SBD))$$

Gọi E là hình chiếu vuông góc của H trên BD và F là hình chiếu vuông góc của H trên SE .

Ta có: $BD \perp HE$ và $BD \perp SH$ nên $BD \perp (SHE) \Rightarrow BD \perp HF$ mà $HF \perp SE$ do đó $HF \perp (SBD)$.

Suy ra $d(H, (SBD)) = HF$



$$\text{Ta có: } HE = HB \sin EBH = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow HF = \frac{HS \cdot HE}{\sqrt{HS^2 + HE^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{5}.$$

Vậy $d(HK, SD) = \frac{a\sqrt{3}}{5}$. **Vậy chọn đáp án D.**

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SC = \frac{a\sqrt{70}}{5}$, đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = 2a$, $AC = a$ và hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh AB . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và SA

- A. $\frac{3a}{5}$ B. $\frac{4a}{5}$ C. $\frac{a}{5}$ D. $\frac{2a}{5}$

Hướng dẫn giải

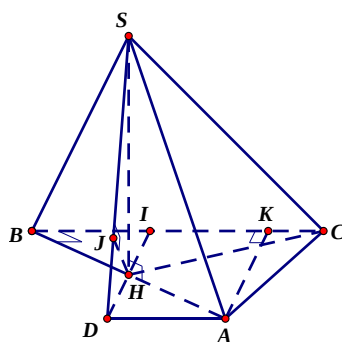
Tam giác AHC vuông cân cạnh a nên

$$CH = a\sqrt{2}$$

Tam giác SHC vuông tại H nên

$$SH = \sqrt{SC^2 - CH^2} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

Dựng $AK \perp BC$, $HI \perp BC$. Đường thẳng qua A song song với BC cắt IH tại $D \Rightarrow BC \parallel (SAD)$



$$\Rightarrow d(BC, SA) = s(BC, (SAD)) = d(B, (SAD)) = 2d(H, (SAD))$$

$$AD \perp (SDH) \Rightarrow (SAD) \perp (SDH).$$

$$\text{Kẻ } HJ \perp SD \Rightarrow HJ \perp (SAD) \Rightarrow d(H, (SAD)) = HJ$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AK = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow HD = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{HJ^2} = \frac{1}{HD^2} + \frac{1}{HS^2} \Rightarrow HJ = \frac{2a}{5}. \text{ Vậy } d(BC, SA) = \frac{4a}{5}$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh bằng $3a$. Chân đường cao hạ từ đỉnh S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $AB = 3AH$, góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC

- A. $\frac{3a\sqrt{21}}{\sqrt{29}}$ B. $\frac{3a\sqrt{21}}{\sqrt{19}}$ C. $\frac{a\sqrt{21}}{\sqrt{39}}$ D. $\frac{3a\sqrt{21}}{7}$

Hướng dẫn giải

Nhận thấy $SH \perp (ABC) \Rightarrow HC$ là hình chiếu của SC trên mặt phẳng (ABC)
 $\Rightarrow \angle SCH = 60^\circ$ là góc giữa SC và mặt phẳng (ABC)

Ta có

$$\begin{aligned} HC^2 &= AC^2 + AH^2 - 2AC \cdot AH \cdot \cos 60^\circ \\ &= 9a^2 + a^2 - 2 \cdot 3a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = 7a^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow HC = a\sqrt{7} \Rightarrow SH = HC \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{21}$$

$$\text{Dựng } \overline{AD} = \overline{CB} \Rightarrow AD \parallel CB \Rightarrow BC \parallel (SAD)$$

$$\Rightarrow d(SA; BC) = d(BC; (SAD)) = d(B; (SAD)) = 3d(H; (SAD))$$

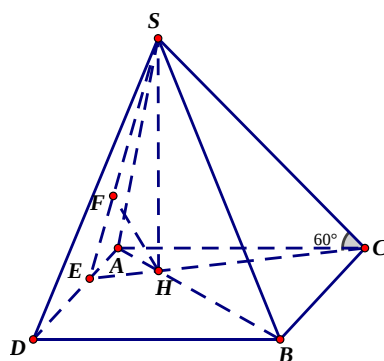
$$\text{Dựng } HE \perp AD \text{ tại } E \Rightarrow AD \perp (SHE) \Rightarrow (SAD) \perp (SHE) \text{ (theo giao tuyến } SE)$$

$$\text{Dựng } HF \perp (SE) \text{ tại } F \Rightarrow HF \perp (SAD) \Rightarrow HF = d(H; (SAD))$$

$$\text{Ta có: } HE = AH \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{HF^2} = \frac{1}{HE^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{21a^2} = \frac{29}{21a^2} \Rightarrow HF = \frac{a\sqrt{21}}{\sqrt{29}} \Rightarrow d(B; (SAD)) = \frac{3a\sqrt{21}}{\sqrt{29}}$$

$$\text{Vậy } d(SA; BC) = \frac{3a\sqrt{21}}{\sqrt{29}}. \text{ Vậy chọn đáp án A.}$$



Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy là trung điểm của H và AD , góc giữa SB và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là 45° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và BH theo a

- A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ B. $a\sqrt{\frac{2}{5}}$ C. $a\sqrt{\frac{2}{3}}$ D. $\frac{a}{\sqrt{3}}$

Hướng dẫn giải

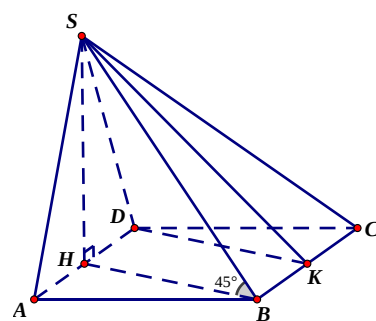
Do $SH \perp (ABCD)$ nên góc giữa SB và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là góc $\angle SBH = 45^\circ$. Ta có $\triangle SBH$ vuông cân tại H nên $SH = BH = a\sqrt{2}$

Gọi K là trung điểm của BC , ta có $BH \parallel DK \Rightarrow BH \parallel (SDK)$.

Suy ra:

$$d(BH; SD) = d(BH; (SDK)) = d(H; (SDK))$$

Tứ diện $SHDK$ vuông tại H nên



$$\frac{1}{d^2(H; (SDK))} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{HD^2} = \frac{5}{2a^2}$$

$$\text{Vậy } d(BH; SD) = d(H; (SDK)) = a\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 16. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, cạnh a. Cạnh bên SD hợp với mặt đáy một góc 60° và hình chiếu vuông góc H của đỉnh S lên mặt đáy là trung điểm của cạnh AB. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD.

A. $\frac{a\sqrt{345}}{31}$ B. $\frac{a\sqrt{546}}{31}$ C. $\frac{a\sqrt{645}}{31}$ D. $\frac{a\sqrt{465}}{31}$

Hướng dẫn giải

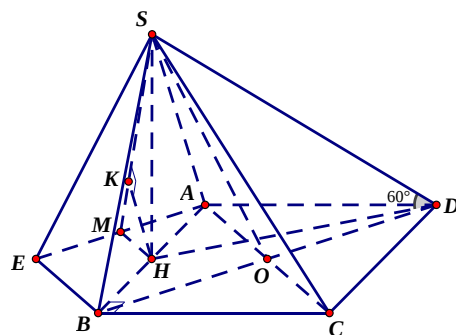
Ta có $SH \perp (ABCD)$.

$$\text{Tính } HD = \frac{a\sqrt{5}}{2}; SH = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$

Dựng E sao cho AEBO là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của AE. Hạ HK vuông góc với SM.

Chứng minh $HK \perp (SAE)$ và tính được $HK = \frac{a\sqrt{465}}{62}$

Chứng minh $d(BD; SA) = 2HK = \frac{a\sqrt{465}}{31}$. Vậy chọn đáp án D.



Câu 17. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, với $AB = BC = a$, $AD = 2a$ ($a > 0$). Các mặt bên (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt đáy. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SB.

A. $\frac{2a\sqrt{3}}{5}$ B. $\frac{2a\sqrt{3}}{15}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{15}$ D. $\frac{3a\sqrt{3}}{5}$

Hướng dẫn giải

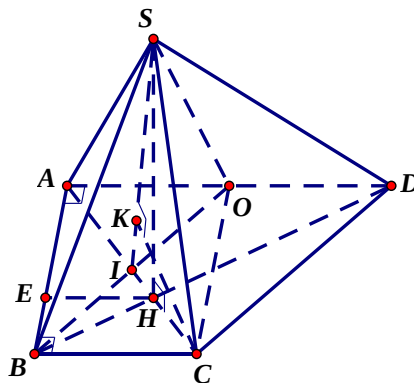
Gọi $H = AC \cap BD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$ và

$$BH = \frac{1}{3}BD$$

Kẻ $HE \perp AB \Rightarrow AB \perp (SHE)$, hay

$$((SAB); (ABCD)) = SEH = 60^\circ$$

$$\text{Mà } HE = \frac{1}{3}AD = \frac{2a}{3} \Rightarrow SH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$



Gọi O là trung điểm AD, ta có ABCD
là hình vuông cạnh a $\Rightarrow \triangle ACD$ có
trung tuyến

$$CO = \frac{1}{2} AD$$

$$CD \perp AC \Rightarrow CD \perp (SAC) \text{ VÀ } BO \parallel CD \text{ hay } CD \parallel (SBO) \text{ và } BO \perp (SAC)$$

$$d(CD; SB) = d(CD; (SBO)) = d(C; (SBO))$$

$$\text{Tính chất trọng tâm tam giác BCO} \Rightarrow IH = \frac{1}{3} IC = \frac{a\sqrt{2}}{6}$$

$$\Rightarrow IS = \sqrt{IH^2 + HS^2} = \frac{5a\sqrt{2}}{6}$$

$$\text{Kẻ } CK \perp SI \text{ mà } CK \perp BO \Rightarrow CK \perp (SBO) \Rightarrow d(C; (SBO)) = CK$$

$$\text{Trong tam giác SIC có: } S_{SIC} = \frac{1}{2} SH \cdot IC = \frac{1}{2} SI \cdot CK \Rightarrow CK = \frac{SH \cdot IC}{SI} = \frac{2a\sqrt{3}}{5}$$

$$\text{Vậy } d(CD, SB) = \frac{2a\sqrt{3}}{5}. \text{ Vậy chọn đáp án A.}$$

Câu 18. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, góc $ABC = 60^\circ$ cạnh bên $SD = a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) là điểm H thuộc đoạn BD sao cho $HD = 3HB$. Gọi M là trung điểm của cạnh SD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và SB.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{40}$

B. $\frac{a\sqrt{30}}{8}$

C. $\frac{a\sqrt{3}}{8}$

D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết có tam giác ABC đều cạnh a.

$$\text{Gọi } O = AC \cap BD \Rightarrow BO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BD = a\sqrt{3}$$

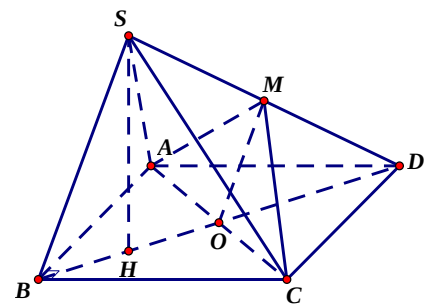
$$\Rightarrow HD = \frac{3}{4} BD = \frac{3}{4} a\sqrt{3}$$

$$SH^2 = SD^2 - HD^2 = 2a^2 - \frac{27a^2}{16} = \frac{5a^2}{16} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{5}}{4}$$

$$SB^2 = SH^2 + HB^2 = \frac{5a^2}{16} + \frac{3a^2}{16} \Rightarrow SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} BD \perp AC \\ AC \perp SH \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp OM$$

$$\text{Diện tích tam giác MAC là } S_{\triangle MAC} = \frac{1}{2} OM \cdot AC = \frac{1}{4} SB \cdot AC = \frac{1}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{2}}{8}$$



$$SB // OM \Rightarrow SB // (MAC)$$

$$\Rightarrow d(SB; CM) = d(SB; (MAC)) = d(S; (MAC)) = d(D; (MAC))$$

$$V_{M.ACD} = \frac{1}{3} d(M; (ABCD)) \cdot S_{\Delta ACD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} d(S; (ABCD)) \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{4} V_{S.ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{15}}{96}$$

$$\text{Mặt khác } V_{M.ACD} = \frac{1}{3} d(D; (MAC)) \cdot S_{\Delta MAC} \Rightarrow d(D; (MAC)) = \frac{3V_{M.ACD}}{S_{\Delta MAC}} = \frac{\frac{a^3 \sqrt{15}}{96}}{\frac{a^2 \sqrt{2}}{8}} = \frac{a\sqrt{30}}{8}$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại B và C , $AB = 2BC = 4CD = 2a$, giả sử M và N lần lượt là trung điểm AB và BC . Hai mặt phẳng (SMN) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy và cạnh bên SB hợp với $(ABCD)$ một góc 60° . Tính khoảng cách giữa SN và BD .

A. $a\sqrt{\frac{3}{15}}$

B. $a\sqrt{\frac{3}{65}}$

C. $a\sqrt{\frac{3}{55}}$

D. $a\sqrt{\frac{3}{35}}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Gọi } H = MN \cap BI \Rightarrow (SMN) \cap (SBI) = SH$$

Do hai mặt phẳng (SMN) và (SBI) cùng vuông góc với $(ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Để thấy BH là hình chiếu vuông góc của SB lên mặt phẳng đáy, suy ra $SBH = 60^\circ$.

Gọi M và N lần lượt là trung điểm AB và BC , mà $AB = 4CD$ nên suy ra $MN \perp BD$ tại H .

Xét tam giác BMN ta có:

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BN^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow BH = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

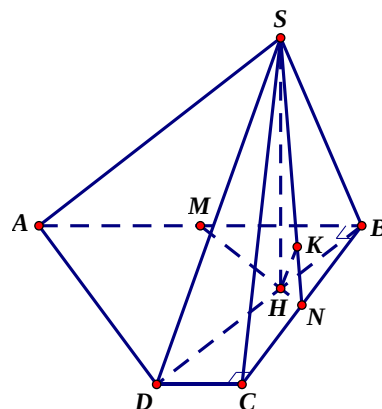
$$\text{Xét tam giác } SBH \text{ lại có: } \tan SBH = \frac{SH}{HB} \Rightarrow SH = HB \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{15}}{5}$$

* Tính khoảng cách giữa SN và BD .

$$\text{Do } \begin{cases} BD \perp SH \\ BD \perp MN \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SMN)$$

Dựng HK vuông góc SN , suy ra HK là đoạn vuông góc chung của SN và $BD \Rightarrow d(BD, SN) = HK$.

$$\text{Xét } \Delta BHN \text{ có: } HN = \sqrt{BN^2 - BH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{10}$$



Xét $\triangle SHN$ ta có: $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HN^2} = \frac{20}{a^2} + \frac{5}{3a^2} = \frac{65}{3a^2} \Rightarrow HK = a\sqrt{\frac{3}{65}}$

Vậy $d(BD, SN) = a\sqrt{\frac{3}{65}}$

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B . Biết $AD = 2AB = 2BC = 2a$, $SA = SD = SC = 3a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD .

A. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết ta có $BC = AB = a$

Gọi H là trung điểm của $AD \Rightarrow HA = HD = a$

Từ giả thiết $\Rightarrow ABCH$ là hình vuông cạnh a tâm O

$$\Rightarrow \begin{cases} CH = a \\ CO = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Trong tam giác ACD có CH là trung tuyến và $CH = \frac{1}{2}AD$

$\Rightarrow \triangle ACD$ vuông tại $C \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD .

Gọi K là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD) \Rightarrow SK \perp (ABCD)$, SK là đường cao của hình chóp $S.ABC$.

Hơn nữa các tam giác vuông SKA , SKC và SKD bằng nhau vì SK chung và $SA = SD = SC = 3a \Rightarrow KA = KC = KD$

$\Rightarrow K$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ACD \Rightarrow K$ trùng với H .

Trong tam giác vuông SHD ta có: $SH^2 = \sqrt{SD^2 - HD^2} = \sqrt{9a^2 - a^2} = 2\sqrt{2}a$

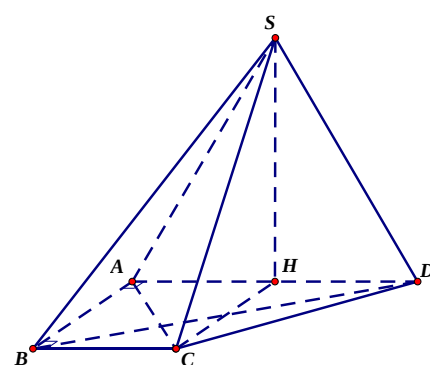
Tứ giác $BCDH$ là hình bình hành (vì $HD \parallel BC$, $HD = BC$) $\Rightarrow CD \parallel BH$

Ta có: $\begin{cases} CD \parallel BH \subset (SBH) \\ CD \not\subset (SBH) \end{cases} \Rightarrow CD \parallel (SBH)$

Ta có SB và CD là hai đường thẳng chéo nhau.

Mặt khác $\begin{cases} CD \parallel (SBH) \\ SB \subset (SBH) \end{cases} \Rightarrow d(CD, SB) = d(CD, (SBH)) = d(C, (SBH))$

Ta có $\begin{cases} CO \perp HB \\ CO \perp SH \end{cases} \Rightarrow CO \perp (SBH) \Rightarrow CO = d(C, (SBH)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy chọn đáp án D.



Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành thỏa mãn $AB=2a$, $BC=a\sqrt{2}$, $BD=a\sqrt{6}$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trọng tâm của tam giác BCD . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$, biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng a .

A. $\frac{4\sqrt{2}a^3}{3}$

B. $\frac{5\sqrt{3}a^3}{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$

D. $\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$

Hướng dẫn giải

Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$, M là trung điểm của CD và O là tâm của đáy $ABCD$. Do AO là trung tuyến của tam giác ABD nên:

$$AO^2 = \frac{AB^2 + AD^2}{2} - \frac{BD^2}{4} = \frac{3a^2}{2}$$

$$\Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow AH = AO + \frac{AO}{3} = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$$

$$BM^2 = \frac{BD^2 + BC^2}{2} - \frac{CD^2}{4}$$

$$= \frac{6a^2 + 2a^2}{2} - \frac{4a^2}{4} = 3a^2$$

$$\Rightarrow BM = a\sqrt{3} \Rightarrow BH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

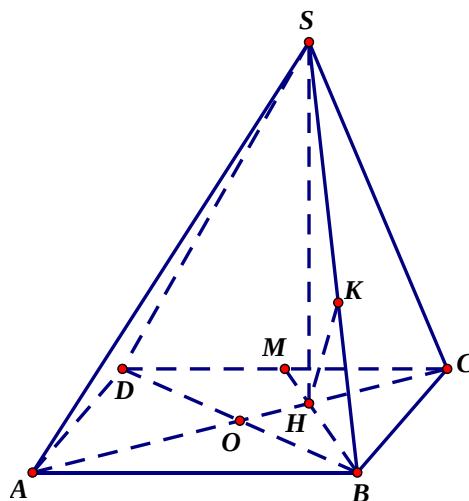
Ta có $AH^2 + BH^2 = 4a^2 = AB^2 \Rightarrow AH \perp BH$, kết hợp với $AH \perp SH$ ta được $AH \perp (SHB)$

Kẻ HK vuông góc với SB , theo chứng minh trên ta được $AH \perp (SHB)$

Suy ra $AH \perp HK \Rightarrow HK$ là đoạn vuông góc chung của AC và SB , suy ra $HK = a$.

Trong tam giác vuông SHB ta có: $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HB^2} \Rightarrow SH = 2a$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}SH.4S_{OAB} = \frac{4}{3}SH.\frac{1}{2}OA.BH = \frac{4\sqrt{2}a^3}{3}. \text{ Vậy chọn đáp án A.}$$



Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Biết $AB=a$, $BC=2a$, $SA=a\sqrt{3}$ (với $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$). Gọi M , N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SB , AD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và BN .

A. $\frac{\sqrt{2}a}{3}$

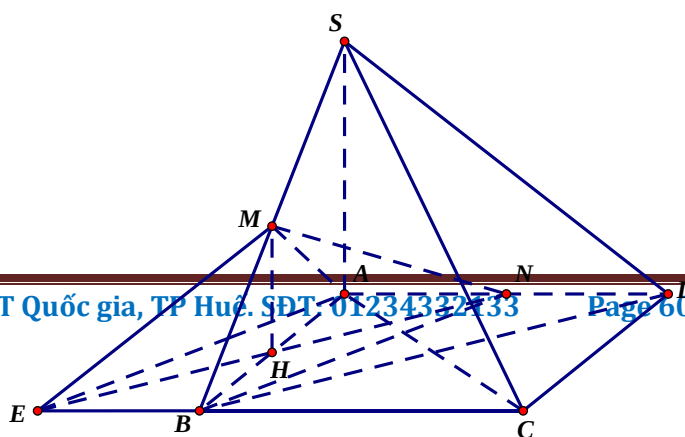
B. $\frac{\sqrt{3}a}{3}$

C. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$

D. $\frac{\sqrt{2}a}{7}$

Hướng dẫn giải

Qua A kẻ đường thẳng song song với BN cắt BC tại E . Gọi $H = AE \cap BN$.



Kẻ $MH \parallel SA$. Suy ra $MH \perp (ABCD) \Rightarrow MH$ là đường cao của khối chóp $M.ANBE$.

$$\text{Ta có: } MH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, S_{ANBE} = 2S_{\triangle ANB} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 = a^2$$

$$\text{Suy ra } V_{S.ANBE} = \frac{1}{3} MH \cdot S_{ANBE} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$$

Ta lại có: $AM = a, AE = a\sqrt{2}, CB \perp (SAB) \Rightarrow CB \perp SB$

$$\text{Suy ra } \triangle SBE \text{ vuông tại } B \Rightarrow ME = \sqrt{BE^2 + MB^2} = a\sqrt{2}$$

$$\text{Ta có: } AE = ME = a\sqrt{2} \Rightarrow \triangle AME \text{ cân tại } E \Rightarrow S_{\triangle AME} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{(a\sqrt{2})^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a^2\sqrt{7}}{4}$$

Vì $BN \parallel (AME)$

$$\Rightarrow d(BN, (AME)) = d(N, (AME)) = \frac{3V_{N.AME}}{S_{\triangle AME}} = \frac{\frac{3}{2}V_{M.ANBE}}{S_{\triangle AME}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

$$\text{Vậy } d(AM, BN) = \frac{a\sqrt{21}}{7}. \text{ Vậy chọn đáp án C.}$$

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh $a\sqrt{5}$, $AC = 4a$, $SO = 2\sqrt{2}a$ và SO vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của SC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BM .

A. $\frac{5\sqrt{2}a}{3}$

B. $\frac{\sqrt{3}a}{6}$

C. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$

D. $\frac{2\sqrt{6}}{3}a$

Hướng dẫn giải

Vì M là trung điểm của SC nên $OM \parallel SA, MS = MC$

$$\text{Do đó } d(SA, BM) = d(SA, (OBM)) = d(S, (OBM)) = d(C, (OBM)) = \frac{3V_{C.OMB}}{S_{OMB}}$$

$$\text{Ta có } OC = \frac{1}{2}AC = 2a \text{ nên } OB = \sqrt{BC^2 - OC^2} = a \Rightarrow S_{OBC} = \frac{1}{2}OB \cdot OC = a^2$$

Gọi N là trung điểm của OC thì $MN \parallel SO$ nên

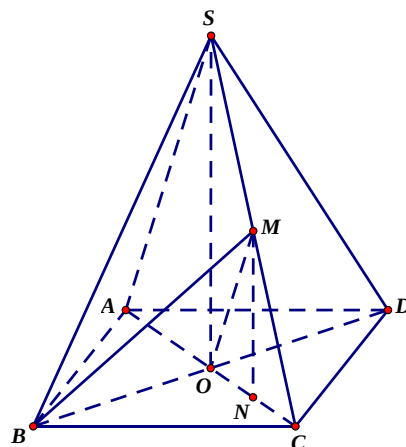
$$MN \perp (OBC) \text{ và } MN = \frac{1}{2}SO = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Do đó } V_{M.OBC} = \frac{1}{3}MN \cdot S_{OBC} = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$$

$$\text{Ta có } SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = 2\sqrt{3}a \text{ nên } OM = \sqrt{3}a$$

Tam giác OMB vuông tại O nên:

$$S_{OMB} = \frac{1}{2}OB \cdot OM = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$



$$\Rightarrow d(SA, BM) = \frac{3V_{C.OMB}}{S_{OMB}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}a$$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 24. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\angle BAD = 60^\circ$, G là trọng tâm tam giác ABD và $SG \perp (ABCD)$, $SG = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Gọi M là trung điểm CD. Tính khoảng cách giữa AB và SM theo a.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}a}{3}$

C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$

D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

Hướng dẫn giải

Dễ thấy SG là đường cao của khối chóp S.ABMD và $SG = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Vì ABCD là hình thoi cạnh a, $\angle BAD = 60^\circ$

nên $\triangle ABD$ và $\triangle BCD$ là các tam giác đều cạnh a, M là trung điểm CD

Vì $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD)$

$$\Rightarrow d(AB, SM) = d(AB, (SCD)) = d(B, (SCD)) = h$$

Gọi $O = AC \cap BD$

Hơn

$$AG = \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}AC = \frac{1}{3}AC = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow GC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow SC^2 = SG^2 + GC^2 = \frac{6a^2}{9} + \frac{12a^2}{9} = 2a^2$$

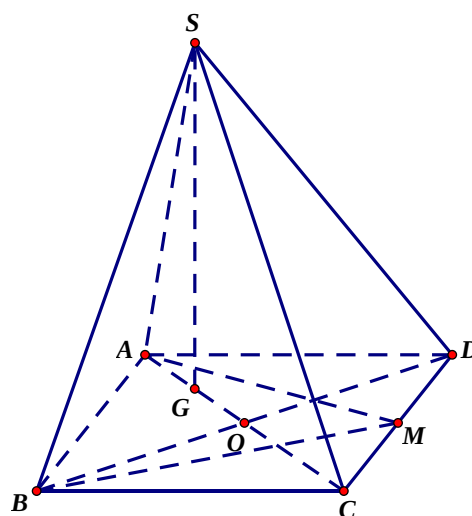
$$\text{Lại có } GD = GA = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SD^2 = SG^2 + GD^2 = \frac{6a^2}{9} + \frac{3a^2}{9} = a^2$$

$$\text{Suy ra } \cos \angle SCD = \frac{SC^2 + CD^2 - SD^2}{2SC \cdot CD} = \frac{2a^2 + a^2 - a^2}{2 \cdot a\sqrt{2} \cdot a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \angle SCD = 45^\circ$$

$$\text{Khi đó } S_{\triangle SCM} = \frac{1}{2}SC \cdot CM \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a^2}{4} \text{ (đvdt)}$$

$$\text{Mặt khác: } V_{S.BCM} = V_{B.SCM} = \frac{1}{3}h \cdot S_{\triangle SCM} \Rightarrow h = \frac{3V_{B.SCM}}{S_{\triangle SCM}}$$

$$V_{B.SCM} = V_{S.BCM} = V_{S.ABCD} - V_{S.ABMD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} - \frac{a^3\sqrt{2}}{8} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} - \frac{a^3\sqrt{2}}{8} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$$



$$\text{Suy ra } h = \frac{3 \cdot \frac{a^3 \sqrt{2}}{24}}{\frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \text{ Vậy } d(AB, SM) = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \text{ Vậy chọn đáp án A.}$$

Câu 25. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Biết $AC = 2a$, $BD = 4a$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC

A. $\frac{4a\sqrt{13}}{91}$

B. $\frac{a\sqrt{165}}{91}$

C. $\frac{4a\sqrt{1365}}{91}$

D. $\frac{a\sqrt{135}}{91}$

Hướng dẫn giải

Gọi $O = AC \cap BD$, H là trung điểm của AB, suy ra $SH \perp AB$.

Do $AB = (SAB) \cap (ABCD)$ và

$(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$

$$\text{Ta có: } OA = \frac{AC}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

$$OB = \frac{BD}{2} = \frac{4a}{2} = 2a$$

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$$

$$SH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} 2a \cdot 4a = 4a^2$$

$$\text{Thể tích khối chóp S.ABCD là } V = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{15}}{2} \cdot 4a^2 = \frac{2a^3 \sqrt{15}}{3}$$

$$\text{Ta có: } BC \parallel AD \text{ nên } AD \parallel (SBC) \Rightarrow d(AD, SC) = d(AD; (SBC)) = d(A; (SBC))$$

$$\text{Do H là trung điểm AB và } B = AH \cap (SBC) \text{ nên } d(A; (SBC)) = 2d(H; (SBC))$$

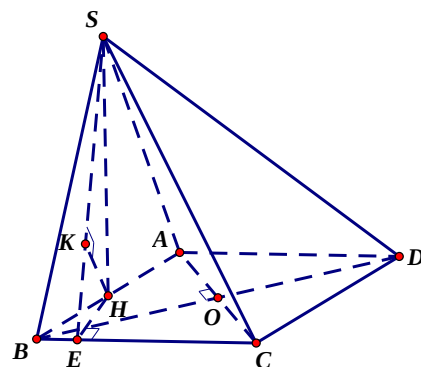
Kẻ $HE \perp BC$, $H \in BC$. Do $SH \perp BC$ nên $BC \perp (SHE)$.

Kẻ $HK \perp SE$, $K \in SE$, ta có $BC \perp HK \Rightarrow HK \perp (SBC) \Rightarrow HK = d(H; (SBC))$

$$HE = \frac{2S_{BCH}}{BC} = \frac{S_{ABC}}{BC} = \frac{S_{ABCD}}{2AB} = \frac{4a^2}{2a\sqrt{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HE^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{5}{4a^2} + \frac{4}{15a^2} = \frac{91}{60a^2} \Rightarrow HK = \frac{2a\sqrt{15}}{\sqrt{91}} = \frac{2a\sqrt{1365}}{91}$$

$$\text{Vậy } d(AD, SC) = 2HK = \frac{4a\sqrt{1365}}{91}$$



Vậy chọn đáp án C.

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a , $SD = a\sqrt{2}$, $SA = SB = a$, và mặt phẳng (SBD) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD .

A. $\frac{a}{4}$

B. $\frac{5a}{2}$

C. $\frac{a}{2}$

D. $\frac{3a}{2}$

Giải

Theo giả thiết $(ABCD) \perp (SBD)$ theo giao tuyến BD .

Do đó nếu dựng $AO \perp (SBD)$ thì $O \in BD$

Mặt khác $AS = AB = AD \Rightarrow OS = OB = OD$ hay $\triangle SBD$ là tam giác vuông tại S .

$$BD = \sqrt{SB^2 + SD^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$$

$$AO = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}$$

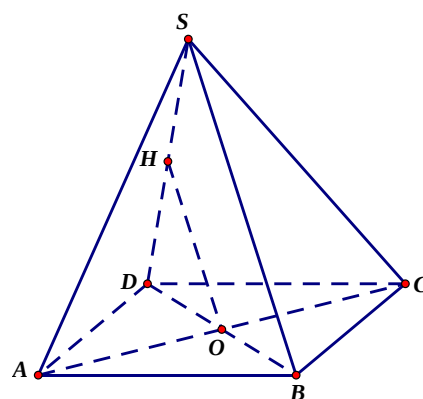
Trong $\triangle SBD$ dựng $OH \perp SD$ tại H (1)

$\Rightarrow H$ là trung điểm của SD .

Theo chứng minh trên $AO \perp (SBD) \Rightarrow AO \perp OH$ (2)

Từ (1) và (2) chứng tỏ OH là đoạn vuông góc chung của AC và SD .

$$\text{Vậy } d(AC, SD) = OH = \frac{1}{2} SB = \frac{a}{2}$$



Câu 27. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $SA = 2a$, $AB = a$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM , SB .

A. $\frac{a\sqrt{155}}{47}$

B. $\frac{a\sqrt{512}}{43}$

C. $\frac{a\sqrt{517}}{47}$

D. $\frac{a\sqrt{152}}{45}$

Hướng dẫn giải

Gọi O là tâm của tam giác đều ABC cạnh a . Do $S.ABC$ là hình

chóp đều nên $SO \perp (ABC)$. Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ và $OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

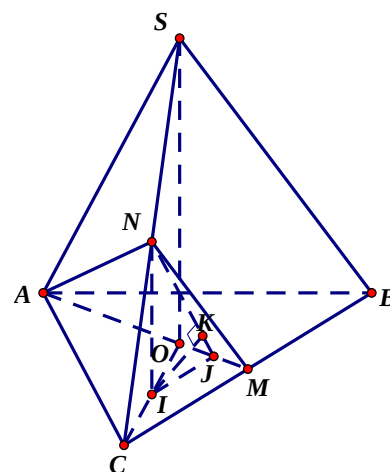
Xét $\triangle SOA$ có:

$$SO^2 = SA^2 - OA^2 = 4a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{11a^2}{3} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{33}}{3}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{33}}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{11}}{12}$$

Gọi N, I, J lần lượt là trung điểm của các đoạn SC, CO, OM .

Do $SB \parallel MN \Rightarrow SB \parallel (AMN)$. Suy ra:



$$d(AM, SB) = d(B, (AMN)) = d(C, (AMN)) = 2d(I, (AMN))$$

Ta có: $\begin{cases} AM \perp IJ \\ AM \perp IN \end{cases} \Rightarrow AM \perp (IJN) \Rightarrow (IJN) \perp (AMN) \text{ theo giao tuyến } NJ.$

Trong (IJN) , kẻ $IK \perp NJ \Rightarrow IK \perp (AMN) \Rightarrow d(I, (AMN)) = IK$

Xét tam giác IJN có:

$$\frac{1}{IK^2} = \frac{1}{IJ^2} + \frac{1}{IN^2} = \frac{16}{a^2} + \frac{12}{11a^2} = \frac{188}{11a^2} \Rightarrow IK = a\sqrt{\frac{11}{188}}$$

Vậy $d(AM, SB) = 2IK = 2a \cdot \sqrt{\frac{11}{188}} = \frac{a\sqrt{517}}{47}$. **Vậy chọn đáp án C.**

Câu 28. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi K là trung điểm của DD' . Tính khoảng cách giữa CK và $A'D$.

A. $\frac{a}{3}$

B. $\frac{a}{5}$

C. $\frac{a}{4}$

D. $\frac{a}{2}$

Hướng dẫn giải

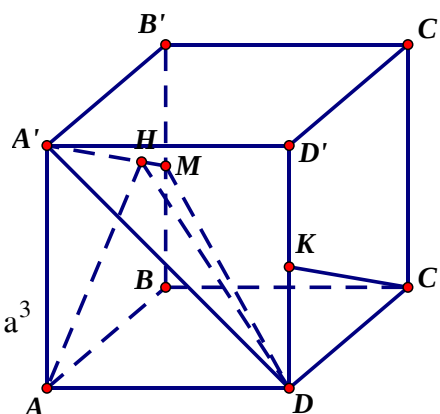
Gọi M là trung điểm của BB' thì $A'M \parallel CK$

$$d(CK, A'D) = d(CK, (A'DM))$$

$$= d(K, (A'DM)) = \frac{3V_{K.A'DM}}{S_{A'DM}}$$

Ta có:

$$V_{K.A'DM} = V_{M.KA'D} = V_{B'.KA'D} = \frac{1}{3}B'A' \cdot \frac{1}{2}A'D' \cdot KD = \frac{1}{12}a^3$$



Hạ $DH \perp A'M$. Do $AD \perp (ABB'A')$ nên $AH \perp A'M$

$$\text{Vì } AH.MA' = 2S_{\triangle AMA'} = 2S_{\triangle ABB'A'} = a^2 \text{ nên } AH = \frac{a^2}{MA'} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Do đó } DH = \sqrt{AD^2 + AH^2} = \frac{3a}{\sqrt{5}} \Rightarrow S_{\triangle A'MD} = \frac{1}{2}DH.A'M = \frac{3}{4}a^2$$

$$\text{Vậy } d(CK, A'D) = \frac{3V_{K.A'DM}}{S_{A'DM}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3}{12}}{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{3}. \text{ **Vậy chọn đáp án A.**}$$

Câu 29. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a , góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30° . Hình chiếu H của điểm A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ thuộc đoạn thẳng $B'C'$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$ theo a .

A. $\frac{a}{3}$

B. $\frac{a}{5}$

C. $\frac{a}{4}$

D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

Hướng dẫn giải

Ta có $A'H$ là hình chiếu của AA' lên mặt phẳng

$(A'B'C')$ nên $\angle AA'H = 30^\circ$

Xét tam giác vuông AHA' ta có:

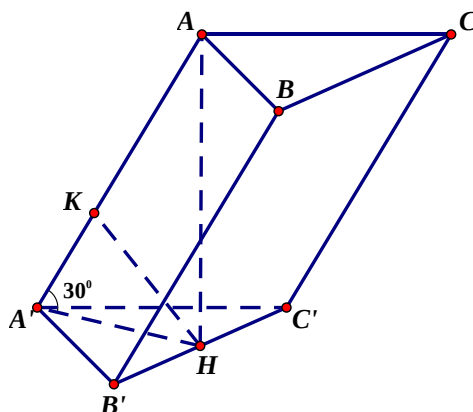
$$AH = AA' \sin 30^\circ = \frac{a}{2}, A'H = AA' \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Mà tam giác $A'B'C'$ đều nên H là trung điểm của $B'C'$.

Vẽ đường cao HK của tam giác AHA'

Ta có $B'C' \perp (AHA')$ nên $B'C' \perp HK$

Suy ra $d(AA', B'C') = HK = \frac{AH \cdot A'H}{AA'} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. **Vậy chọn đáp án D.**



Câu 30. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy (ABC) , I là trung điểm của AB và tam giác SIC vuông cân. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AI và SB theo a .

A. $6a$

B. $a\sqrt{6}$

C. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$

D. $6a\sqrt{6}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\begin{cases} CI \perp AB \\ CI \perp SA \end{cases} \Rightarrow CI \perp (SAB) \Rightarrow CI \perp SI$

Suy ra tam giác SIC vuông cân tại I , nên $SI = CI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

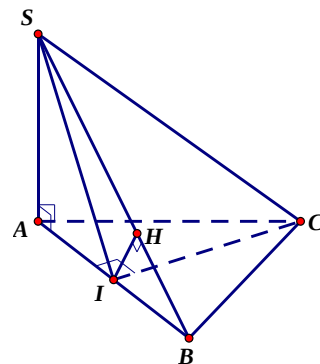
$$\text{Do đó: } SA = \sqrt{SI^2 - AI^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Dựng IH vuông góc với SB (I thuộc SB). Khi đó HI là đoạn vuông góc chung của SB và CI , do đó $d(SB; CI) = HI$

Hai tam giác vuông HBI và ABS đồng dạng, nên $\frac{HI}{SA} = \frac{BI}{SB}$

$$\Rightarrow HI = \frac{BI \cdot SA}{SB} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}. \text{ Vậy } d(SB; CI) = HI = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Vậy chọn đáp án C.



Câu 31. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a , góc $ABC = 60^\circ$ cạnh bên $SD = a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) là điểm H thuộc đoạn BD sao cho $HD = 3HB$. Gọi M là trung điểm của cạnh SD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và SB

A. $\frac{a\sqrt{30}}{8}$

B. $\frac{a\sqrt{7}}{4}$

C. $\frac{30a}{7}$

D. $\frac{a\sqrt{30}}{5}$

Hướng dẫn giải

$$SB // OM \Rightarrow SB // (MAC)$$

$$\Rightarrow d(SB; CM) = d(SB; (MAC))$$

$$= d(S; (MAC)) = d(D; (MAC))$$

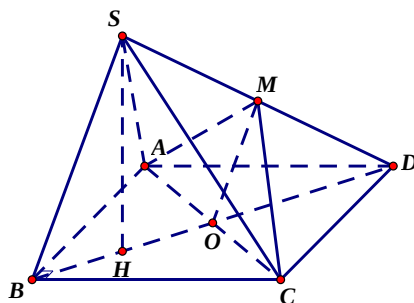
$$V_{M.ACD} = \frac{1}{3} d(M; (ABCD)) \cdot S_{\Delta ACD}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} d(S; (ABCD)) \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

$$= \frac{1}{4} V_{S.ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{15}}{96}$$

$$\text{Mặt khác } V_{M.ACD} = \frac{1}{3} d(D; (MAC)) \cdot S_{\Delta MAC}$$

$$\Rightarrow d(D; (MAC)) = \frac{3V_{M.ACD}}{S_{\Delta MAC}} = \frac{\frac{a^3 \sqrt{15}}{96}}{\frac{a^2 \sqrt{2}}{8}} = \frac{a\sqrt{30}}{8}. \text{ Vậy chọn đáp án A.}$$



Câu 32. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là điểm thuộc cạnh SC sao cho $MC = 2SM$. Biết $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BM.

A. $\frac{a\sqrt{21}}{8}$

B. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$

C. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$

D. $\frac{a\sqrt{21}}{4}$

Hướng dẫn giải

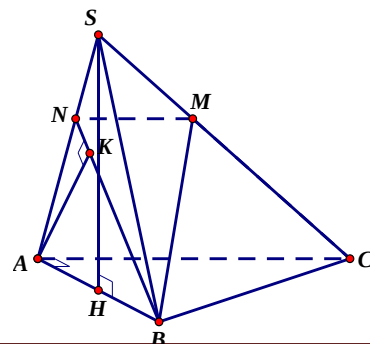
Gọi H là trung điểm của AB $\Rightarrow SH \perp AB$

Do $(SAB) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$

Do SAB là tam giác đều cạnh a nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$$

Từ M kẻ đường thẳng song song với AC cắt SA tại N



$$\Rightarrow AC // MN \Rightarrow AC // (BMN)$$

$$\text{Ta có: } AC \perp AB \Rightarrow AC \perp (SAB) \text{ mà } MN // AC \Rightarrow MN \perp (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (BMN)$$

$$\text{Từ A kẻ } AK \perp BN \text{ (} K \in BN \text{)}$$

$$\Rightarrow AK \perp (BMN) \Rightarrow AK = d(A; (BMN)) = d(AC, BM)$$

$$\text{Do } \frac{MC}{SC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AN}{SA} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow S_{ABN} = \frac{2}{3} S_{SAB} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{6}$$

$$BN^2 = AN^2 + AB^2 - 2AN \cdot AB \cdot \cos 60^\circ = \frac{7a^2}{9} \Rightarrow BN = \frac{a\sqrt{7}}{3}, AK = \frac{2S_{ABN}}{BN} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

$$\text{Vậy } d(AC, BM) = \frac{a\sqrt{21}}{7}. \text{ Vậy chọn đáp án C}$$

BDKT và LT THPT Quốc gia Môn Toán

ĐC: P5. Dãy 22. Tập thể Xã tắc-Đường Ngô Thời Nhậm. TP Huế

Ths. Trần Đình Cư. SĐT: 01234332133

Facebook: Trần Đình Cư.

Page face: <https://www.facebook.com/trandinhcu01234332133/>

Khai giảng các lớp hè: 10,11,12

Bắt đầu từ ngày 01/06/2017. Có thể gọi điện để đặt chỗ trước. Lớp học chất lượng cao (Không quá 20 học sinh)

Để sử dụng file word, quý thầy cô vui lòng đóng góp chút kinh phí để tạo động lực cho tác giả ra đời những chuyên đề khác hay hơn

STT	TÊN TÀI LIỆU	GIÁ	MÃ SỐ
1	KĨ THUẬT GIẢI NHANH TRẮC NGHIỆM SỐ PHỨC_123 Tặng 6 đề word thi thử THPT Quốc gia 2017 (có đáp án và lời giải chi tiết) {Đề 1-6}	60K	SO PHUC_123
2	CHỦ ĐỀ 1_KHỐI ĐA DIỆN {26 Trang} Tặng 5 đề word thi thử THPT Quốc gia 2017 (có đáp án và lời giải chi tiết) {Đề 7-11}	50K	HHKG_KDD
3	CHỦ ĐỀ 2_THỂ TÍCH KHỐI CHÓP {59 Trang} Tặng 10 đề word thi thử THPT Quốc gia 2017 (có đáp án và lời giải chi tiết) {Đề 12-21}	110 K	HHKG_TTKC
4	CHỦ ĐỀ 3_THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ {34 Trang} Tặng 5 đề word thi thử THPT Quốc gia 2017 (có đáp án và lời giải chi tiết) {Đề 22-26}	70K	HHKG_TTLT
5	CHỦ ĐỀ 456_NÓN TRỤ CẦU {56 Trang} Tặng 10 đề word thi thử THPT Quốc gia 2017 (có đáp án và lời giải chi tiết) {Đề 27-36}	110 K	HHKG_NTC
6	CHỦ ĐỀ 7_KHOẢNG CÁCH {68 Trang} Tặng 12 đề word thi thử THPT Quốc gia 2017 (có đáp án và lời giải chi tiết) {Đề 37-49}	130 K	HHKG_KC
7	CHỦ ĐỀ 8_GÓC {21 Trang} Tặng 5 đề word thi thử THPT Quốc gia 2017 (có đáp án và lời giải chi tiết) {Đề 50-54}	50K	HHKG_GOC
8	CHỦ ĐỀ 9_CỰC TRỊ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN VÀ CÁC KHỐI LỒNG NHAU {29 Trang} Tặng 8 đề word thi thử THPT Quốc gia 2017 (có đáp án và lời giải chi tiết) {Đề 55-63}	80k	HHKG_CT

Hướng dẫn thanh toán

Quý thầy cô thanh toán cho mình qua ngân hàng. Sau khi chuyển khoản, mình sẽ lập tức gửi tài liệu cho quý thầy cô.

Nếu trong ngày mà thầy cô chưa nhận được thì vui lòng gọi điện trực tiếp cho mình.

Thầy cư. SĐT: 01234332133

NGÂN HÀNG			
TÊN TÀI KHOẢN	TRẦN ĐÌNH CƯ	TRẦN ĐÌNH CƯ	TRẦN ĐÌNH CƯ
SỐ TÀI KHOẢN	4010205025243	0161000381524	55110000232924
CHI NHÁNH	THỪA THIÊN HUẾ	THỪA THIÊN HUẾ	THỪA THIÊN HUẾ

Nội dung: Họ và tên_email_ma tài liệu

Ví dụ: Nguyễn Thị B_nguyenthib@gmail.com_HHKG_TTKC

Lưu ý:

Thầy cô đọc kỹ file PDF trước khi mua, tài liệu mua chỉ dùng với mục đích cá nhân, không được bán lại hoặc chia sẻ cho người khác.

CHÚC QUÝ THẦY CÔ DẠY TỐT VÀ THÀNH CÔNG TRONG SỰ NGHIỆP TRỒNG NGƯỜI