

MỤC LỤC

CHƯƠNG 4	SỐ PHỨC	1
1	DẠNG ĐẠI SỐ CỦA SỐ PHỨC VÀ CÁC PHÉP TOÁN	1
	A TÓM TẮT LÝ THUYẾT	1
1	Định nghĩa	1
2	Hai số phức bằng nhau	1
3	Biểu diễn hình học của số phức	1
4	Biểu diễn hình học của số phức	2
5	Mô-đun của số phức	2
6	Số phức liên hợp	2
7	Cộng, trừ, nhân, chia số phức	3
	B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP	4
	Dạng 1. Bài toán quy về giải phương trình, hệ phương trình nghiệm thực	4
1	Các ví dụ minh họa	4
2	Bài tập áp dụng	5
	Dạng 2. Xác định các yếu tố cơ bản của số phức qua các phép toán	10
1	Các ví dụ minh họa	10
2	Bài tập áp dụng	11
	Dạng 3. Tính giá trị của biểu thức	12
1	Bài tập áp dụng	13
	Dạng 4. Bài toán sử dụng bất đẳng thức trong số phức	14
1	Các ví dụ minh họa	14
2	Bài tập áp dụng	16
	C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM	20
1	NHẬN BIẾT	20

2	ĐÁP ÁN	51
3	THÔNG HIỂU	52
4	ĐÁP ÁN	63
5	VẬN DỤNG THẤP	63
6	ĐÁP ÁN	70
7	VẬN DỤNG CAO	70
8	ĐÁP ÁN	71
2	BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC VÀ BÀI TOÁN LIÊN QUAN	72
A	Kiến thức cơ bản	72
B	Bài tập vận dụng	72
	Dạng 1. Tập hợp điểm của số phức là đường thẳng và các bài toán liên quan	78
	Dạng 2. Tập hợp điểm của số phức là đường tròn, hình tròn, hình vành khăn	81
	Dạng 3. Tập hợp điểm của số phức là elíp	89
C	Bài tập vận dụng	89
	Dạng 4. Bài toán liên quan đến giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất	90
D	Bài tập vận dụng	91
	Dạng 5. Sử dụng bình phương vô hướng	98
1	Bài tập áp dụng	99
	Dạng 6. Sử dụng hình chiếu và tương giao	102
1	Các ví dụ minh họa	102
2	Bài tập áp dụng	104
E	CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM	108
1	NHẬN BIẾT	108
2	ĐÁP ÁN	117
3	THÔNG HIỂU	117
4	ĐÁP ÁN	156

5	VẬN DỤNG THẤP	157
6	ĐÁP ÁN	191
7	VẬN DỤNG CAO	191
8	ĐÁP ÁN	203
3	PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TRÊN TẬP SỐ PHỨC	204
A	Kiến thức cơ bản	204
1	Căn bậc hai của số phức	204
2	Các ví dụ minh họa	204
3	Bài tập áp dụng	204
4	Các dạng toán	206
	Dạng 1. Phương trình bậc hai với hệ số phức	206
1	Bài tập áp dụng	206
	Dạng 2. Tìm các thuộc tính của số phức thỏa mãn điều kiện K	210
1	Các ví dụ	210
2	Bài tập áp dụng	211
	Dạng 3. Biểu diễn hình học của số phức và bài toán liên quan	226
	Dạng 4. Phương trình bậc hai và bậc cao trong số phức	239
1	Các ví dụ	239
2	Bài tập áp dụng	239
	Dạng 5. Phương trình quy về bậc hai	245
	Dạng 6. Dạng lượng giác của số phức	248
B	CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM	253
1	NHẬN BIẾT	253
2	ĐÁP ÁN	257
3	THÔNG HIỂU	257
4	ĐÁP ÁN	274

5	VẬN DỤNG THẤP	274
6	ĐÁP ÁN	298
7	VẬN DỤNG CAO	298
8	ĐÁP ÁN	303

BÀI 1. DẠNG ĐẠI SỐ CỦA SỐ PHỨC VÀ CÁC PHÉP TOÁN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa 1. Mỗi biểu thức dạng $a + bi$, trong đó $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$ được gọi là một **số phức**.
 Đối với số phức $z = a + bi$, ta nói a là **phần thực**, b là **phần ảo** của z , i gọi là đơn vị ảo. Tập số phức $\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$. Tập số thực $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Ví dụ 1. Tìm phần thực và phần ảo của số phức: $z = 2019 + 2020i$.

Lời giải.

— Phần thực: $a = 2019$.

— Phần ảo: $b = 2020$.

□

Đặc biệt:

- ① Khi phần ảo $b = 0 \Leftrightarrow z = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z$ là số thực.
- ② Khi phần thực $a = 0 \Leftrightarrow z = bi \Leftrightarrow z$ là số thuần ảo.
- ③ Số $0 = 0 + 0i$ vừa là số thực, vừa là số ảo.

2 HAI SỐ PHỨC BẰNG NHAU

Hai số phức là bằng nhau nếu phần thực và phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau.

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}, \text{ với } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 2. Tìm các số thực x, y biết rằng $(2x + 1) + (3y - 2)i = (x + 2) + (y + 4)i$.

Lời giải.

Từ định nghĩa ta có $\begin{cases} 2x + 1 = x + 2 \\ 3y - 2 = y + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3. \end{cases}$

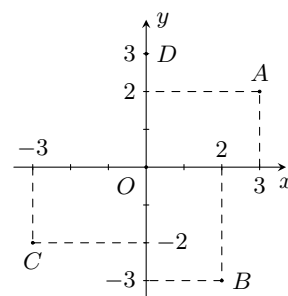
□

3 BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC

Điểm $M(a; b)$ trong hệ trục tọa độ vuông góc của mặt phẳng được gọi là điểm biểu diễn của số phức $z = a + bi$.

Quan sát hình vẽ bên cạnh, ta có

- ① Điểm A biểu diễn cho số phức: $z = 3 + 2i$
- ② Điểm B biểu diễn cho số phức: $z = 2 - 3i$
- ③ Điểm C biểu diễn cho số phức: $z = -3 - 2i$
- ④ Điểm D biểu diễn cho số phức: $z = 3i$



4 BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC

Điểm $M(a; b)$ trong hệ trục tọa độ vuông góc của mặt phẳng được gọi là điểm biểu diễn của số phức $z = a + bi$.

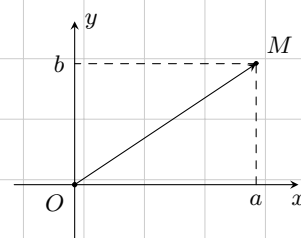
5 MÔ-ĐUN CỦA SỐ PHỨC

Giả sử số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ trên mặt phẳng tọa độ.

- ① Độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là mô-đun của số phức z và được ký hiệu là $|z|$. Khi đó, $|z| = |\overrightarrow{OM}| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

- ② Kết quả, với mọi số phức z ta có

$$\begin{aligned} \blacksquare |z| &\geq 0 \text{ và } |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0. & \blacksquare z \cdot \bar{z} &= |z|^2. \\ \blacksquare |z| &= |\bar{z}|. & \blacksquare |z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2|. \\ \blacksquare \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|}. \end{aligned}$$



Ví dụ 3. Tìm mô-đun của các số phức sau

① $z = 3 - 2i$

② $z = 1 + i\sqrt{3}$

Lời giải.

Ta có

① $|z| = |3 - 2i| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}.$

② $|z| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2.$

□

6 SỐ PHỨC LIÊN HỢP

Định nghĩa 2. Cho số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$). Ta gọi $a - bi$ là số phức liên hợp của z và được ký hiệu là $\bar{z} = a - bi$.

Ví dụ 4. Tìm các số phức liên hợp của các số phức sau:

① $z = -3 - 2i$

② $\bar{z} = 4 + 3i$

Lời giải.

① Cho $z = -3 - 2i \Rightarrow \bar{z} = -3 + 2i.$

② Cho $\bar{z} = 4 + 3i \Rightarrow z = 4 - 3i.$

□

— Trên mặt phẳng tọa độ, các điểm biểu diễn z và $\bar{z}$ đối xứng với nhau qua trục Ox .

— Từ định nghĩa ta có các kết quả sau

$$\textcircled{1} \bar{\bar{z}} = z; |\bar{z}| = |z|.$$

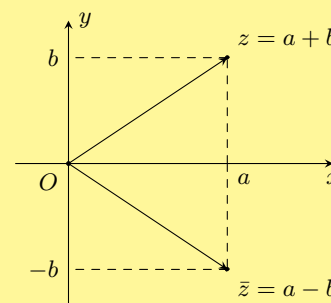
$$\textcircled{2} \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2.$$

$$\textcircled{3} \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

$$\textcircled{4} \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

$$\textcircled{5} z \text{ là số thực} \Leftrightarrow z = \bar{z}.$$

$$\textcircled{6} z \text{ là số thuần ảo} \Leftrightarrow z = -\bar{z}.$$



7 CỘNG, TRỪ, NHÂN, CHIA SỐ PHỨC

Cho hai số phức $z_1 = a + bi$ và $z_2 = c + di$.

Phép cộng và phép trừ hai số phức được thực hiện theo quy tắc cộng, trừ đa thức.

$$\textcircled{1} \text{ Phép cộng: } z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

$$\textcircled{2} \text{ Phép trừ: } z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

$$\textcircled{3} \text{ Số phức đối của của số phức: } z = a + bi \text{ là } -z = -a - bi. \text{ Do đó, } z + (-z) = (-z) + z = 0.$$

$$\textcircled{4} \text{ Phép nhân số phức được thực hiện theo quy tắc nhân đa thức, rồi thay } i^2 = -1 \text{ trong kết quả nhận được. Cụ thể, } z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

$$\textcircled{5} \text{ Phép chia: } \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i, (z_2 \neq 0).$$

$$\textcircled{6} \text{ Số phức nghịch đảo của } z = a + bi \neq 0 \text{ là: } \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

Ví dụ 5. Cho hai số phức $z_1 = 5 + 2i$ và $z_2 = 3 + 7i$. Tìm phần thực, phần ảo và mô-đun của số phức $w = z_1 + z_2$ và số phức $w' = z_2 - z_1$.

Lời giải.

Ta có $w = (5 + 2i) + (3 + 7i) = 8 + 9i$ và $w' = (3 + 7i) - (5 + 2i) = -2 + 5i$.

Như thế

- w có phần thực là 8, phần ảo là 9 và mô-đun là $|w| = \sqrt{8^2 + 9^2} = \sqrt{145}$,
- w' có phần thực là -2, phần ảo là 5 và mô-đun là $|w'| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}$.

□

Ví dụ 6. Cho hai số phức $z_1 = 5 + 2i$ và $z_2 = 4 + 3i$. Hãy tính

$$\textcircled{1} w = z_1 \cdot z_2 =$$

$$\textcircled{2} \overline{z_1 \cdot z_2} =$$

$$\textcircled{3} r = \frac{z_1}{z_2}$$

Lời giải.

Ta có

$$\textcircled{1} w = z_1 \cdot z_2 = (5 + 2i)(4 + 3i) = 14 + 23i.$$

$$\textcircled{2} \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(5 + 2i)(4 + 3i)} = \overline{26 + 7i} = 26 - 7i.$$

$$\textcircled{3} r = \frac{z_1}{z_2} = \frac{5 + 2i}{4 + 3i} = \frac{(5 + 2i)(4 - 3i)}{(4 + 3i)(4 - 3i)} = \frac{26 - 7i}{25} = \frac{26}{25} - \frac{7}{25} \cdot i.$$

□

B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP**Dạng 1. Bài toán quy về giải phương trình, hệ phương trình nghiệm thực***Phương pháp giải:**Hai số phức là bằng nhau nếu phần thực và phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau.*

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}, \quad \text{với } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

— Biểu diễn số phức cần tìm $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Biến đổi thu gọn phương trình của bài toán về dạng $A + Bi = C + Di$.

— Giải hệ phương trình $\begin{cases} A = C \\ B = D. \end{cases}$

1 CÁC VÍ DỤ MINH HỌA**Ví dụ 1.** Tìm các số thực x và y thỏa các điều kiện sau

$$\textcircled{1} 2x + 1 + (1 - 2y)i = 2(2 - i) + yi - x. \quad \textcircled{2} (1 - 2i)x + (1 + 2y)i = 1 + i.$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ Ta có } 2x + 1 + (1 - 2y)i = 2(2 - i) + yi - x &\Leftrightarrow 2x + 1 + (1 - 2y)i = 4 - x + (y - 2)i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 4 - x \\ 1 - 2y = y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $x = 1, y = 1$.

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \text{ Ta có } (1 - 2i)x + (1 + 2y)i = 1 + i &\Leftrightarrow x + (-2x + 1 + 2y)i = 1 + i \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ -2x + 1 + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases} \\ \text{Vậy } x = 1, y = 1. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 2. Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện bên dưới. Từ đó xác định phần thực, phần ảo, số phức liên hợp và mô-đun của z .

$$\textcircled{1} (2 + 3i)z - (1 + 2i)\bar{z} = 7 - i. \quad \textcircled{2} |z - (2 + i)| = \sqrt{10} \text{ và } z \cdot \bar{z} = 25.$$

Lời giải.**①** Gọi $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi, (a, b \in \mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned} &(2 + 3i)(a + bi) - (1 + 2i)(a - bi) = 7 - i \\ \Leftrightarrow &2a + 2bi + 3ai + 3bi^2 - a + bi - 2ai + 2bi^2 = 7 - i \\ \Leftrightarrow &(a - 5b) + (a + 3b)i = 7 - i \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a - 5b = 7 \\ a + 3b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $z = 2 - i \Rightarrow |z| = |2 - i| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$.Vậy phần thực của số phức z là 2, phần ảo bằng -1, số phức liên hợp $\bar{z} = 2 + i$.

Nhận xét. Khi bài toán yêu cầu tìm các thuộc tính của số phức (phần thực, phần ảo, mô-đun hoặc số phức liên hợp) mà đề bài cho giả thiết chứa hai thành phần trong ba thành phần $z, \bar{z}, |z|$ thì ta sẽ gọi số phức $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi, |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ với $a, b \in \mathbb{R}$, rồi sau đó thu gọn và sử dụng kết quả hai số phức bằng nhau, giải hệ.

② Gọi $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$). Ta có

$$|a + bi - 2 - i| = \sqrt{10} \Leftrightarrow \sqrt{(a-2)^2 + (b-1)^2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow (a-2)^2 + (b-1)^2 = 10. \quad (1)$$

$$\text{Lại có } a^2 + b^2 = 25 \Leftrightarrow (a-2)^2 + (b-1)^2 + 4a + 2b = 30. \quad (2)$$

$$\text{Thế (1) vào (2) ta được } b = 10 - 2a. \text{ Khi đó } a^2 + (10 - 2a)^2 = 25 \Leftrightarrow 5a^2 - 40a + 75 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = 5. \end{cases}$$

Với $a = 3 \Rightarrow b = 4$.

Với $a = 5 \Rightarrow b = 0$.

Vậy có 2 số phức z thỏa mãn đề bài là $z = 3 + 4i$ và $z = 5$.

□

Ví dụ 3. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| = 2\sqrt{2}$ và $(z - 1)^2$ là số thuần ảo?

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ta có

$$\begin{aligned} (z - 1)^2 &= z^2 - 2z + 1 = (a + bi)^2 - 2(a + bi) + 1 \\ \Rightarrow (z - 1)^2 &= a^2 + 2abi + b^2i^2 - 2a - 2bi + 1 = (a^2 - b^2 - 2a + 1) + (2ab - 2b)i. \end{aligned}$$

Vì $(z - 1)^2$ là số thuần ảo nên phần thực của nó bằng 0, nghĩa là có $a^2 - b^2 - 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow (a - 2)^2 - b^2 = 0. \quad (1)$

Ta có $|z + 2 - i| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow |a + bi + 2 - i| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow |(a + 2) + (b - 1)i| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow (a + 2)^2 + (b - 1)^2 = 8. \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} b^2 = (a - 1)^2 \\ (a + 2)^2 + (b - 1)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a - 1 \\ (a + 2)^2 + (b - 1)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a - 1 \\ 2a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a - 1 \\ b = 1 - a \\ a^2 + 2a - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ a = -1 + \sqrt{3} \\ b = 2 - \sqrt{3} \\ a = -1 - \sqrt{3} \\ b = 2 + \sqrt{3}. \end{cases}$$

Vậy có ba số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán là $z = -i, z = -1 + \sqrt{3} + (2 - \sqrt{3})i, z = -1 - \sqrt{3} + (2 + \sqrt{3})i$.

Nhận xét. Số phức $z = a + bi$ được gọi là số phức thuần ảo $\Leftrightarrow$ phần thực $a = 0$ và z là số thực $\Leftrightarrow$ phần ảo $b = 0$.

□

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Tìm các số thực x và y thỏa các điều kiện sau (nhóm sử dụng hai số phức bằng nhau).

$$\textcircled{1} \quad 3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i. \quad \textcircled{2} \quad \frac{x + yi}{1 - i} = 3 + 2i. \quad \textcircled{3} \quad \frac{x - 3}{3 + i} + \frac{y - 3}{3 - i} = i.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \quad \text{Ta có } 3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i \Leftrightarrow 3x + 5y + (-x + 2y)i = 7 + 5i \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ -x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2. \end{cases}$$

Vậy $x = -1, y = 2$.

$$\textcircled{2} \quad \text{Ta có } \frac{x + yi}{1 - i} = 3 + 2i \Leftrightarrow x + yi = (3 + 2i)(1 - i) \Leftrightarrow x + yi = 5 - i \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -1. \end{cases}$$

Vậy $x = 5, y = -1$.

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad \text{Ta có } \frac{x - 3}{3 + i} + \frac{y - 3}{3 - i} = i &\Leftrightarrow (x - 3)(3 - i) + (y - 3)(3 + i) = (3 + i)(3 - i)i \Leftrightarrow 3x + 3y - 18 + (-x + y)i = 10i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3y - 18 = 0 \\ -x + y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 8. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $x = -2, y = 8$.



Bài 2. Tìm phần thực, phần ảo, số phức liên hợp và mô-đun của z .

- | | |
|---|--|
| ① $2z - i\bar{z} = 2 + 5i$. | ② $z + (2 + i)\bar{z} = 3 + 5i$. |
| ③ $2z + 3(1 - i)\bar{z} = 1 - 9i$. | ④ $(3z - \bar{z})(1 + i) - 5z = 8i - 1$. |
| ⑤ $(2 - 3i)z + (4 + i)\bar{z} = -(1 + 3i)^2$. | ⑥ $(3 - 2i)z + 5(1 + i)\bar{z} = 1 + 5i$. |
| ⑦ $(3 + i)\bar{z} + (1 + 2i)z = 3 - 4i$. | ⑧ $(1 + 2i)^2 z + \bar{z} = 4i - 20$. |
| ⑨ $z^2 + z = 0$. | ⑩ $ z + (\bar{z} - 3)i = 1$. |
| ⑪ $z + \bar{z} = 10$ và $ z = 13$. | ⑫ $ z + 1 - 2i = \bar{z} - 2 - i $ và $ z - 1 = \sqrt{5}$. |
| ⑬ $ z ^2 + 2z \cdot \bar{z} + \bar{z} ^2 = 8$ và $z + \bar{z} = 2$. | ⑭ $w = z + iz + z^2$ với $z + (2 - i)\bar{z} = 5 + i$. |
| ⑮ $w = z + 2\bar{z}$ với $(1 - i)z + 2i\bar{z} = 5 + 3i$. | |

Lời giải.

- ① Gọi $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi, (a, b \in \mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned}
 & 2(a + bi) - i(a - bi) = 2 + 5i \\
 \Leftrightarrow & 2a + 2bi - ia + bi^2 = 2 + 5i \\
 \Leftrightarrow & (2a - b) + (2b - a)i = 2 + 5i \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 2a - b = 2 \\ -a + 2b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Suy ra $z = 3 + 4i$.

Vậy số phức z có phần thực là 3, phần ảo bằng 4, số phức liên hợp là $\bar{z} = 3 - 4i$, mô-đun bằng $|z| = 5$.

- ② Gọi $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi, (a, b \in \mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned}
 & a + bi + (2 + i)(a - bi) = 3 + 5i \\
 \Leftrightarrow & a + bi + 2a - 2bi + ai - bi^2 = 3 + 5i \\
 \Leftrightarrow & (3a + b) + (a - b)i = 3 + 5i \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 3a + b = 3 \\ a - b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Suy ra $z = 2 - 3i$.

Vậy số phức z có phần thực là 2, phần ảo bằng -3, số phức liên hợp $\bar{z} = 2 + 3i$, mô-đun bằng $|z| = \sqrt{13}$.

- ③ Gọi $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi, (a, b \in \mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned}
 & 2(a + bi) + 3(1 - i)(a - bi) = 1 - 9i \\
 \Leftrightarrow & 2a + 2bi + 3a - 3bi - 3ai + 3bi^2 = 1 - 9i \\
 \Leftrightarrow & (5a - 3b) - (3a + b)i = 1 - 9i \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 5a - 3b = 1 \\ 3a + b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Suy ra $z = 2 + 3i$.

Vậy phần thực của số phức z là 2, phần ảo bằng 3, số phức liên hợp $\bar{z} = 2 - 3i$, mô-đun bằng $|z| = \sqrt{13}$.

- ④ Gọi $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi, (a, b \in \mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned}
 & [3(a + bi) - (a - bi)](1 + i) - 5(a + bi) = 8i - 1 \\
 \Leftrightarrow & (2a + 4bi)(1 + i) - 5(a + bi) = 8i - 1 \\
 \Leftrightarrow & 2a + 2ai + 4bi + 4bi^2 - 5a - 5bi = 8i - 1 \\
 \Leftrightarrow & (-3a - 4b) + (2a - b)i = 8i - 1 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} -3a - 4b = -1 \\ 2a - b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Suy ra $z = 3 - 2i$.

Vậy phần thực của số phức z là 3, phần ảo bằng -2 , số phức liên hợp $\bar{z} = 3 + 2i$, mô-đun bằng $|z| = \sqrt{13}$.

- ⑤ Gọi $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi, (a, b \in \mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned} & (2 - 3i)(a + bi) + (4 + i)(a - bi) = 8 - 6i \\ \Leftrightarrow & 2a + 2bi - 3ai - 3bi^2 + 4a - 4bi + ai - bi^2 = 8 - 6i \\ \Leftrightarrow & (6a + 4b) - 2(a + b)i = 8 - 6i \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 6a + 4b = 8 \\ 2a + 2b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $z = -2 + 5i$.

Vậy phần thực của số phức z là -2 , phần ảo bằng 5, số phức liên hợp $\bar{z} = -2 - 5i$, mô-đun $|z| = \sqrt{29}$.

- ⑥ Gọi $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi, (a, b \in \mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned} & (3 - 2i)(a + bi) + 5(1 + i)(a - bi) = 1 + 5i \\ \Leftrightarrow & 3a + 3bi - 2ai - 2bi^2 + 5a - 5bi + 5ai - 5bi^2 = 1 + 5i \\ \Leftrightarrow & (8a + 7b) + (3a - 2b)i = 1 + 5i \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 8a + 7b = 1 \\ 3a - 2b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $z = 1 - i$.

Vậy phần thực của số phức z là 1, phần ảo bằng -1 , số phức liên hợp $\bar{z} = 1 + i$ và mô-đun $|z| = \sqrt{2}$.

- ⑦ Gọi $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi, (a, b \in \mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned} & (3 + i)(a - bi) + (1 + 2i)(a + bi) = 3 - 4i \\ \Leftrightarrow & 3a - 3bi + ai - bi^2 + a + bi + 2ai + 2bi^2 = 3 - 4i \\ \Leftrightarrow & (4a - b) + (3a - 2b)i = 3 - 4i \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 4a - b = 3 \\ 3a - 2b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $z = 2 + 5i$.

Vậy phần thực của số phức z là 2, phần ảo bằng 5, số phức liên hợp $\bar{z} = 2 - 5i$, và mô-đun $|z| = \sqrt{29}$.

- ⑧ Gọi $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi, (a, b \in \mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned} & (1 + 2i)^2(a + bi) + a - bi = 4i - 20 \\ \Leftrightarrow & (-3 + 4i)(a + bi) + a - bi = 4i - 20 \\ \Leftrightarrow & -3a - 3bi + 4ai + 4bi^2 + a - bi = 4i - 20 \\ \Leftrightarrow & (-2a - 4b) + (4a - 4b)i = 4i - 20 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -2a - 4b = -20 \\ 4a - 4b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow z = 4 + 3i. \end{aligned}$$

Vậy phần thực của số phức z là 4, phần ảo bằng 3, số phức liên hợp $\bar{z} = 4 - 3i$, và mô-đun $|z| = 5$.

- ⑨ Gọi $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi, (a, b \in \mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned} & (a + bi)^2 + \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 + \sqrt{a^2 + b^2} + 2abi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \\ 2ab = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a^2 - b^2 + \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ -b^2 + \sqrt{b^2} = 0 \\ b = 0 \\ a^2 + \sqrt{a^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ b = \pm 1 \\ a = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} z = 0 \\ z = \pm i. \end{cases}$$

Vậy có 3 số phức thỏa mãn đề bài là $z = 0, z = \pm i$.

- ⑩ Gọi $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi, (a, b \in \mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + b^2} + (a - bi - 3)i &= 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} - bi^2 + (a - 3)i = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{a^2 + b^2} + b) + (a - 3)i = 1 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} + b = 1 \\ a - 3 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ \sqrt{b^2 + 9} = 1 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \end{cases} \Rightarrow z = 3 - 4i. \end{aligned}$$

Vậy phần thực của số phức z là 3, phần ảo bằng -4 , số phức liên hợp $\bar{z} = 3 + 4i$.

- ⑪ Gọi $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$. Ta có $2a = 10 \Leftrightarrow a = 5 \Rightarrow \sqrt{b^2 + 25} = 13 \Rightarrow b = \pm 12$.

Vậy có 2 số phức z thỏa mãn đề bài là $z = 5 \pm 12i$.

- ⑫ Gọi $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = a - bi$. Ta có

$$\begin{aligned} |z + 1 - 2i| &= |\bar{z} - 2 - i| \Leftrightarrow |a + bi + 1 - 2i| = |a - bi - 2 - i| \\ \Leftrightarrow (a + 1)^2 + (b - 2)^2 &= (a - 2)^2 + (b + 1)^2 \Leftrightarrow a = b. \end{aligned}$$

$$\text{Lại có } |z - 1| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a - 1)^2 + b^2 = 5. \text{ Thay } a = b \text{ vào ta được } (b - 1)^2 + b^2 = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ b = -1. \end{cases}$$

Vậy có 2 số phức z thỏa mãn đề bài là $z = 2 + 2i$ và $z = -1 - i$.

- ⑬ Gọi $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = a - bi$. Ta có $z + \bar{z} = 2 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$.

$$\text{Lại có } |z|^2 + 2z \cdot \bar{z} + |\bar{z}|^2 = 8 \Rightarrow 4(a^2 + b^2) = 8 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ b = -1. \end{cases}$$

Vậy có 2 số phức z thỏa mãn đề bài là $z = 1 + i$ và $z = 1 - i$.

- ⑭ Gọi $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = a - bi$. Ta có

$$\begin{aligned} z + (2 - i)\bar{z} &= 5 + i \\ \Leftrightarrow a + bi + (2 - i)(a - bi) &= 5 + i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b = 5 \\ -a - b = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases} \\ \Rightarrow w = 1 + i(1 - 2i) + (1 - 2i)^2 &\Leftrightarrow w = -3i. \end{aligned}$$

Vậy số phức w cần tìm là $w = -3i$.

- ⑮ Gọi $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = a - bi$. Ta có

$$\begin{aligned} (1 - i)z + 2i\bar{z} &= 5 + 3i \\ \Leftrightarrow (1 - i)(a + bi) + 2i(a - bi) &= 5 + 3i \\ \Leftrightarrow a + bi - ai - bi^2 + 2ai - 2bi^2 &= 5 + 3i \\ \Leftrightarrow (a + 3b) + (a + b)i &= 5 + 3i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b = 5 \\ a + b = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1. \end{cases} \\ \Rightarrow z = 2 + i \Rightarrow w = 2 + i + 2(2 - i) &= 6 - i. \end{aligned}$$

Vậy số phức w cần tìm là $w = 6 - i$.

□

Bài 3. Tìm các số phức z thỏa mãn biểu thức số phức là số thực, số thuần ảo.

- ① $|z| = \sqrt{5}$ và phần thực bằng 2 lần phần ảo. ② $|z| = \sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo.
 ③ $|z - i| = \sqrt{2}$ và $(z - 1)(\bar{z} + i)$ là số thực. ④ $|2z - \bar{z}| = \sqrt{13}$ và $(1 + 2i)z$ là số thuần ảo.
 ⑤ $|z - 1| = \sqrt{5}$ và $(z - 1)(\bar{z} + 2i)$ là số thực. ⑥ $z + \bar{z} = 6$ và $z^2 + 2\bar{z} - 8i$ là số thực.
 ⑦ $|z - 3i| = |1 - i\bar{z}|$ và $z + \frac{9}{z}$ là số thuần ảo.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ta có phần thực bằng 2 lần phần ảo nên $a = 2b$.

Mặt khác $|z| = \sqrt{5} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 5$.

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} a = 2b \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ (2b)^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ a = -2 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 2 + i \\ z = -2 - i. \end{cases}$$

Vậy có hai số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán là $z = 2 + i, z = -2 - i$.

Gọi $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ta có $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ là số thuần ảo nên $a^2 - b^2 = 0$.

Mặt khác $|z| = \sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2$.

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ a = -1 \\ b = 1 \\ a = 1 \\ b = -1 \\ a = -1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 + i \\ z = -1 + i \\ z = 1 - i \\ z = -1 - i. \end{cases}$$

Vậy có 4 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán là $z = 1 + i, z = -1 + i, z = 1 - i, z = -1 - i$.

Gọi $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ta có $(z - 1)(\bar{z} + i) = z \cdot \bar{z} + zi - \bar{z} - i = a^2 + b^2 + (a + bi)i - (a - bi) - i = a^2 + b^2 - a - b + (a + b - 1)i$.

Do $(z - 1)(\bar{z} + i)$ là số thực nên $a + b - 1 = 0$.

Ta lại có $|z - i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |a + bi - i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 + (b - 1)^2 = 2$.

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} a = 1 - b \\ a^2 + (b - 1)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ 2(b - 1)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z = -1 + 2i. \end{cases}$$

Gọi $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ta có $(1 + 2i)(z) = (1 + 2i)(a + bi) = (a - 2b) + (2a + b)i$ là số thuần ảo nên $a - 2b = 0 \Rightarrow a = 2b$.

Ta lại có $|2z - \bar{z}| = \sqrt{13} \Leftrightarrow |2(a + bi) - (a - bi)| = \sqrt{13} \Leftrightarrow |a + 3bi| = \sqrt{13} \Leftrightarrow a^2 + 9b^2 = 13$.

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} a = 2b \\ a^2 + 9b^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ 4b^2 + 9b^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ a = -2 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 2 + i \\ z = -2 - i. \end{cases}$$

Vậy có 2 số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán là $z = 2 + i, z = -2 - i$.

Gọi $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ta có $(z - 1)(\bar{z} + 2i) = z \cdot \bar{z} + 2iz - \bar{z} - 2i = a^2 + b^2 + 2i(a + bi) - (a - bi) - 2i = a^2 + b^2 - a - 2b + (2a + b - 2)i$ là số thực nên $2a + b - 2 = 0 \Rightarrow b = 2 - 2a$.

Ta lại có $|z - 1| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |a - 1 + bi| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a - 1)^2 + b^2 = 5$.

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} b = 2 - 2a \\ (a - 1)^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - 2a \\ 5(a - 1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - 2a \\ (a - 1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \\ a = 2 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 2i \\ z = 2 - 2i. \end{cases}$$

Vậy có 2 số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán là $z = 2i, z = 2 - 2i$.

Gọi $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ta có $z + \bar{z} = 6 \Leftrightarrow 2a = 6 \Leftrightarrow a = 3$.

Ta lại có $z^2 + 2\bar{z} - 8i = a^2 - b^2 + 2abi + 2(a - bi) - 8i = a^2 - b^2 + 2a - (2ab - 2b - 8)i$ là số thực nên $2ab - 2b - 8 = 0$.

Suy ra $b = 2$.

Vậy số phức z thỏa mãn là $z = 3 + 2i$.

Gọi $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ta có $z + \frac{9}{z} = a + bi + \frac{9}{a + bi} = a + bi + \frac{9(a - bi)}{a^2 + b^2}$ là số thuần ảo nên $a + \frac{9a}{a^2 + b^2} = 0$.

Ta lại có $|z - 3i| = |1 - i\bar{z}| \Leftrightarrow |a + bi - 3i| = |1 - i(a - bi)| \Leftrightarrow a^2 + (b - 3)^2 = (1 - b)^2 + a^2 \Leftrightarrow b = 2$.

Suy ra $a + \frac{9a}{a^2 + 4} = 0 \Leftrightarrow a^3 + 13a = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

Vậy số phức z thỏa mãn là $z = 2i$. □

Dạng 2. Xác định các yếu tố cơ bản của số phức qua các phép toán

Phương pháp giải:

① Sử dụng hợp lý các phép toán cộng, trừ, nhân, chia để tìm được số phức z . Từ đó tìm được phần thực, phần ảo, mô-đun của z và tìm được $\bar{z}$.

② Hai số phức bằng nhau thì có mô-đun bằng nhau. Sử dụng các kết quả

$$\blacksquare |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

$$\blacksquare z \cdot \bar{z} = |z|^2.$$

$$\blacksquare |z| = |\bar{z}|.$$

$$\blacksquare \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ với } z_2 \neq 0.$$

1 CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1.

① Cho z thỏa $(2 + i)z + \frac{1 - i}{1 + i} = 5 - i$. Tìm các thuộc tính của $w = 1 + 2z + z^2$.

② Cho z thỏa $z = 2 + 4i + 2i(1 - 3i)$. Tìm các thuộc tính của z .

③ Tính $z = 1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + (1 + i)^3 + \dots + (1 + i)^{20}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{① Ta có } (2 + i)z + \frac{1 - i}{1 + i} &= 5 - i \Leftrightarrow (2 + i)z + \frac{(1 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = 5 - i \Leftrightarrow (2 + i)z + \frac{-2i}{2} = 5 - i \\ &\Leftrightarrow (2 + i)z = 5 \Leftrightarrow z = \frac{5}{2 + i} \Leftrightarrow z = \frac{5(2 - i)}{5} = 2 - i. \end{aligned}$$

Do đó, $w = 1 + 2z + z^2 = 1 + 2(2 - i) + (2 - i)^2 = 1 + 4 - 2i + 4 - 4i + i^2 = 8 - 6i$.

Vậy w có phần thực là 8, phần ảo là -6 , mô-đun là $|w| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10$ và $\bar{w} = 8 + 6i$.

Nhận xét.

— Về phương pháp tự luận, để thực hiện phép chia 2 số phức, ta cần nhân thêm số phức liên hợp của mẫu số. Chẳng hạn, trong lời giải trên ta có $\frac{1 - i}{1 + i} = \frac{(1 - i)^2}{(1 + i)(1 - i)}$.

— Nếu sử dụng Casio, ta chuyển về chế độ CMPLX (mode 2) (i tương ứng ENG). Chuyển về tìm z và nhập $\frac{5 - i - \frac{1 - i}{1 + i}}{2 + i}$ sẽ được kết quả $2 - i$, nghĩa là tìm được số phức $z = 2 - i$. Các phép toán còn lại thao tác tương tự trên Casio.

② Ta có $z = 2 + 4i + 2i(1 - 3i) = 2 + 4i + 2i - 6i^2 = 8 + 6i$.

Vậy z có phần thực là 8, phần ảo là 6, mô-đun là $|z| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ và $\bar{z} = 8 - 6i$.

③ Ta có số phức z là tổng của 21 số hạng đầu tiên của một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = 1 + i$.

$$\text{Khi đó } z = 1 + \sum_{k=1}^{20} (1+i)^k = \frac{(1+i)^{21} - 1}{i}.$$

$$\text{Ta lại có } (1+i)^{21} = [(1+i)^2]^{10} (1+i) = (2i)^{10} (1+i) = -2^{10} (1+i).$$

$$\text{Vậy } z = \frac{-2^{10}(1+i) - 1}{i} = (2^{10} + 1)i - 2^{10}.$$

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Tìm phần thực, phần ảo, số phức liên hợp và mô-đun của z .

① $(1+i)z = 14 - 2i$.

② $(1-i)z + (2-i) = 4 - 5i$.

③ $w = z_1 - 2z_2$ biết rằng $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 - 3i$. ④ $w = z_1 z_2$ biết rằng $z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = 3 - 4i$.

⑤ $(1-2i)z - \frac{9+7i}{3-i} = 5 - 2i$.

⑥ $(1+i)^2(2-i)z = 8 + i + (1+2i)z$.

Lời giải.

① Ta có $z = \frac{14-2i}{1+i} = \frac{(14-2i)(1-i)}{2} = \frac{12-16i}{2} = 6 - 8i$.

Vậy z có phần thực là 6, phần ảo là -8 , mô-đun là $|z| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$ và $\bar{z} = 6 + 8i$.

② Ta có $(1-i)z + (2-i) = 4 - 5i \Leftrightarrow (1-i)z = 2 - 4i \Leftrightarrow z = \frac{2-4i}{1-i} \Leftrightarrow z = \frac{(2-4i)(1+i)}{2} \Leftrightarrow z = \frac{6-2i}{2} \Leftrightarrow z = 3 - i$.

Vậy z có phần thực là 3, phần ảo là -1 , mô-đun là $|z| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$ và $\bar{z} = 3 + i$.

③ Ta có $w = 1 + 2i - 2(2 - 3i) = -3 + 8i$.

Vậy w có phần thực là -3 , phần ảo là 8, mô-đun là $|w| = \sqrt{(-3)^2 + 8^2} = \sqrt{73}$ và $\bar{w} = -3 - 8i$.

④ Ta có $w = (2 + 5i)(3 - 4i) = 26 + 7i$.

Vậy w có phần thực là 26, phần ảo là 7, mô-đun là $|w| = \sqrt{26^2 + 7^2} = 5\sqrt{29}$ và $\bar{w} = 26 - 7i$.

⑤ Ta có $(1-2i)z - \frac{9+7i}{3-i} = 5 - 2i \Leftrightarrow (1-2i)z - (2+3i) = 5 - 2i \Leftrightarrow (1-2i)z = 7 + i \Leftrightarrow z = \frac{7+i}{1-2i} \Leftrightarrow z = 1 + 3i$.

Vậy z có phần thực là 1, phần ảo là 3, mô-đun là $|z| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ và $\bar{z} = 1 - 3i$.

⑥ Ta có $(1+i)^2(2-i)z = 8 + i + (1+2i)z \Leftrightarrow 2i(2-i)z = 8 + i + (1+2i)z \Leftrightarrow (2+4i)z = 8 + i + (1+2i)z \Leftrightarrow (1+2i)z = 8 + i \Leftrightarrow z = \frac{8+i}{1+2i} \Leftrightarrow z = 2 - 3i$.

Vậy z có phần thực là 2, phần ảo là -3 , mô-đun là $|z| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$ và $\bar{z} = 2 + 3i$.

□

Bài 2. Tính mô-đun của các số phức sau:

① Tìm mô-đun của số phức z thỏa mãn $2z - 2 = (1-i)|\bar{z}| + (2-z\sqrt{2})i$.

② Cho số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $z[(2+3i)|\bar{z}| - 3 + 2i] - \sqrt{26} = 0$. Tính giá trị của $|\bar{z}|$.

③ Cho số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $\frac{1-i}{z} = \frac{(2-3i)\bar{z}}{|z|^2} + 2 - i$. Tính giá trị của $|z|$.

④ Cho số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $(1+2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} + i - 2$. Tính giá trị của $|\bar{z}|$.

⑤ Cho số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $(2+3i)|z| = \frac{\sqrt{26}}{\bar{z}} + 3 - 2i$. Tính giá trị của $|z|$.

⑥ Cho số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $(1-3i)|\bar{z}| = \frac{4\sqrt{10}}{z} + 3 + i$. Tính giá trị của $P = |\bar{z}|^4 + |z|^2$.

Lời giải.

- ① Từ giả thiết ta có $(2 + i\sqrt{2})z = (|\bar{z}| + 2) + (2 - |\bar{z}|)i$.

$$\text{Lấy mô-đun hai vế ta được } \sqrt{6}|z| = \sqrt{(|\bar{z}| + 2)^2 + (2 - |\bar{z}|)^2} \Leftrightarrow 6|z|^2 = 2|\bar{z}|^2 + 8 \Leftrightarrow 6|z|^2 = 2|z|^2 + 8 \\ \Leftrightarrow 4|z|^2 = 8 \Leftrightarrow |z|^2 = 2 \Leftrightarrow |z| = \sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } |z| = \sqrt{2}.$$

- ② Từ giả thiết ta có $z[(2|\bar{z}| - 3) + (3|\bar{z}| + 2)i] = \sqrt{26}$.

$$\text{Lấy mô-đun hai vế ta được } |z|\sqrt{(2|\bar{z}| - 3)^2 + (3|\bar{z}| + 2)^2} = \sqrt{26} \Leftrightarrow |z|^2(13|\bar{z}|^2 + 13) = 26 \\ \Leftrightarrow |\bar{z}|^2(|\bar{z}|^2 + 1) = 2 \\ \Leftrightarrow |\bar{z}|^4 + |\bar{z}|^2 - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} |\bar{z}|^2 = 1 \\ |\bar{z}|^2 = -2 \text{ (vô lý)} \end{cases} \Leftrightarrow |\bar{z}| = 1.$$

$$\text{Vậy } |\bar{z}| = 1.$$

- ③ Từ giả thiết ta có $\frac{1-i}{z} = \frac{(2-3i)\bar{z}}{z\bar{z}} + 2-i \Leftrightarrow \frac{1-i}{z} = \frac{2-3i}{z} + 2-i \Leftrightarrow \frac{-1+2i}{z} = 2-i$.

$$\text{Lấy mô-đun hai vế ta được } \frac{\sqrt{5}}{|z|} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |z| = 1.$$

$$\text{Vậy } |z| = 1.$$

- ④ Từ giả thiết ta có $(|z| + 2) + (2|z| - 1)i = \frac{\sqrt{10}}{z}$.

$$\text{Lấy mô-đun hai vế ta được } \sqrt{(|z| + 2)^2 + (2|z| - 1)^2} = \frac{\sqrt{10}}{|z|} \Leftrightarrow |z|^2(5|z|^2 + 5) = 10 \Leftrightarrow |z|^4 + |z|^2 - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 = 1 \\ |z|^2 = -2 \text{ (vô lý)} \end{cases} \Leftrightarrow |z| = 1.$$

$$\text{Vậy } |\bar{z}| = |z| = 1.$$

- ⑤ Từ giả thiết ta có $(2|z| - 3) + (3|z| + 2)i = \frac{\sqrt{26}}{\bar{z}}$.

$$\text{Lấy mô-đun hai vế ta được } \sqrt{(2|z| - 3)^2 + (3|z| + 2)^2} = \frac{\sqrt{26}}{|\bar{z}|} \Leftrightarrow \sqrt{13|z|^2 + 13} = \frac{\sqrt{26}}{|z|} \\ \Leftrightarrow |z|^2(|z|^2 + 1) = 2 \Leftrightarrow |z|^4 + |z|^2 - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 = 1 \\ |z|^2 = -2 \text{ (vô lý)} \end{cases} \Leftrightarrow |z| = 1.$$

$$\text{Vậy } |z| = 1.$$

- ⑥ Từ giả thiết ta có $(|\bar{z}| - 3) + (-3|\bar{z}| - 1)i = \frac{4\sqrt{10}}{z}$.

$$\text{Lấy mô-đun hai vế ta được } \sqrt{(|\bar{z}| - 3)^2 + (-3|\bar{z}| - 1)^2} = \frac{4\sqrt{10}}{|z|} \Leftrightarrow \sqrt{10|\bar{z}|^2 + 10} = \frac{4\sqrt{10}}{|\bar{z}|} \\ \Leftrightarrow |\bar{z}|^2(|\bar{z}|^2 + 1) = 16 \Leftrightarrow |\bar{z}|^4 + |\bar{z}|^2 = 16 \\ \Leftrightarrow |\bar{z}|^4 + |\bar{z}|^2 = 16.$$

$$\text{Vậy } P = 16.$$

□

Dạng 3. Tính giá trị của biểu thức*Phương pháp giải:**Chuẩn hóa số phức, dựa vào điều kiện đã cho để tìm số phức z .***Ví dụ 1.** Cho số phức $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$ thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2|$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^4.$$

Lời giải.

Chuẩn hóa $z_1=1$, suy ra $|z_1|=1$, đặt $z_2 = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), khi đó $|z_2| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ta có

$$\begin{cases} |z_1| = |z_2| = 1 \\ |z_1 - z_2| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \\ |(1-a) - bi| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ (1-a)^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 - 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Chọn $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ thì $z_1 - z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Ta thấy $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2| = 1$, thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do đó $P = \left[\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2\right]^2 + \left[\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2\right]^2 = -1$. □

1 BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $|z_1| = 3$, $|z_2| = 4$, $|z_1 - z_2| = \sqrt{37}$. Biết số phức $z = \frac{z_1}{z_2} = a + bi$.

Tìm $|b|$.

Lời giải.

Ta có $|z| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{3}{4}$ nên $\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{3}{4}$ hay $a^2 + b^2 = \frac{9}{16}$.

Lại có $\frac{|z_1 - z_2|}{|z_2|} = \left|\frac{z_1 - z_2}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1}{z_2} - 1\right| = |z - 1| = \frac{\sqrt{37}}{4}$. Suy ra $\sqrt{(a-1)^2 + b^2} = \frac{\sqrt{37}}{4}$ hay $a^2 + b^2 - 2a = \frac{21}{16}$.

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{9}{16} \\ a^2 + b^2 - 2a = \frac{21}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{9}{16} \\ -2a = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{8} \\ b^2 = \frac{27}{64} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{8} \\ |b| = \frac{3\sqrt{3}}{8} \end{cases}.$$

Vậy $|b| = \frac{3\sqrt{3}}{8}$. □

Bài 2. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 2$, $|z_2| = \sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1 và iz_2 . Biết rằng $\widehat{MON} = 45^\circ$ với O là gốc tọa độ. Tính $|z_1^2 + 4z_2^2|$.

Lời giải.

Ta có $z_1^2 + 4z_2^2 = z_1^2 - (2iz_2)^2 = (z_1 - 2iz_2)(z_1 + 2iz_2)$.

Lại có $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = 45^\circ$ và $|z_1^2 + 4z_2^2| = |(z_1 - 2iz_2)(z_1 + 2iz_2)| = |z_1 - 2iz_2| \cdot |z_1 + 2iz_2|$.

Mặt khác

$$|z_1 - 2iz_2|^2 = |z_1|^2 + 4|iz_2|^2 - 4|z_1||iz_2|\cos 45^\circ = 2^2 + 4 \cdot (\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4.$$

$$|z_1 + 2iz_2|^2 = |z_1|^2 + 4|iz_2|^2 + 4|z_1||iz_2|\cos 45^\circ = 2^2 + 4 \cdot (\sqrt{2})^2 + 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 20.$$

Do đó $|z_1^2 + 4z_2^2| = \sqrt{4 \cdot 20} = 4\sqrt{5}$. □

Bài 3. Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1) = -2z_1z_2z_3 \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) \\ &= -2z_1z_2z_3 \left(\frac{\bar{z}_1}{z_1\bar{z}_1} + \frac{\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} + \frac{\bar{z}_3}{z_3\bar{z}_3}\right) = -2z_1z_2z_3 \left(\frac{\bar{z}_1}{|z_1|^2} + \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2} + \frac{\bar{z}_3}{|z_3|^2}\right) = -2z_1z_2z_3(\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3) \\ &= -2z_1z_2z_3 \cdot \overline{z_1 + z_2 + z_3} = 0. \end{aligned}$$

□

Dạng 4. Bài toán sử dụng bất đẳng thức trong số phức

Phương pháp giải:

Vì số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ trên mặt phẳng tọa độ. Do đó ta có thể xem véc-tơ $\vec{OM} = (a; b)$ cũng biểu diễn cho số phức z . Nghĩa là có thể sử dụng bất đẳng thức véc-tơ trong phép toán max – min của số phức.

Cho ba véc-tơ $\vec{u} = (a; b)$, $\vec{v} = (x; y)$, $\vec{w} = (m; n)$, khi đó

$$\textcircled{1} \quad |\vec{u} - \vec{v}| \geq |\vec{u}| - |\vec{v}|. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } \vec{u}, \vec{v} \text{ cùng chiều, tức là } \frac{a}{x} = \frac{b}{y} \text{ hay } \frac{x}{a} = \frac{y}{b}.$$

$$\textcircled{2} \quad |\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } \vec{u}, \vec{v} \text{ cùng chiều, tức là } \frac{a}{x} = \frac{b}{y} \text{ hay } \frac{x}{a} = \frac{y}{b}.$$

$$\textcircled{3} \quad |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \geq \vec{u} \cdot \vec{v}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } \vec{u}, \vec{v} \text{ cùng chiều, tức là } \frac{a}{x} = \frac{b}{y} \text{ hay } \frac{x}{a} = \frac{y}{b}.$$

$$\textcircled{4} \quad |\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}|. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } \frac{a}{b} = \frac{x}{y} = \frac{m}{n}.$$

Các bất đẳng thức cổ điển thường được sử dụng

■ Bất đẳng thức Cauchy

○ Với $a \geq 0, b \geq 0$ thì $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

○ Với $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ thì $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

■ Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz (Bunhiacôpxki)

○ Với $a > 0, b > 0$ và x, y bất kỳ ta luôn có $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$ (dạng cộng mẫu số). Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ hay $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.

○ Với a, b, x, y bất kỳ ta luôn có $\begin{cases} (a \cdot x + b \cdot y)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \\ |a \cdot x + b \cdot y| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)} \end{cases}$. Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ hay $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.

○ Với a, b, c, x, y, z bất kỳ ta luôn có $\begin{cases} (a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \\ |a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z| \leq \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \end{cases}$. Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ hay $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

Lưu ý

① Ta có thể sử dụng phương pháp hàm số (hoặc tam thức) để tìm max – min.

② Ngoài ra còn sử dụng phương pháp hình học.

1 CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho số phức z thỏa $|z - 3 + 4i| = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z|$.

Lời giải.

Cách 1. Áp dụng bất đẳng thức $|\vec{u} - \vec{v}| \geq |\vec{u}| - |\vec{v}|$ (hay $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$).

Ta có

$$4 = |z - 3 + 4i| = |z - (3 - 4i)| \geq |z| - |3 - 4i| \Rightarrow 4 \geq |z| - 5 \Rightarrow |z| \leq 9.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 9.

Cách 2. Sử dụng lượng giác hóa.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có

$$|z - 3 + 4i| = 4 \Leftrightarrow |(x - 3) + (y + 4)i| = 4 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 16 \Leftrightarrow \left(\frac{x - 3}{4}\right)^2 + \left(\frac{y + 4}{4}\right)^2 = 1.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} \frac{x - 3}{4} = \sin \alpha \\ \frac{y + 4}{4} = \cos \alpha \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = 4 \sin \alpha + 3 \\ y = 4 \cos \alpha - 4 \end{cases}, \text{ khi đó}$$

$$\begin{aligned} P &= |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(4 \sin \alpha + 3)^2 + (4 \cos \alpha - 4)^2} = \sqrt{41 + 24 \sin \alpha - 32 \cos \alpha} = \sqrt{41 + \sqrt{24^2 + 32^2} \sin(\alpha - \beta)} \\ &= \sqrt{41 + 40 \sin(\alpha - \beta)}, \end{aligned}$$

$$\text{với } \frac{24}{\sqrt{24^2 + 32^2}} = \cos \beta, \frac{32}{\sqrt{24^2 + 32^2}} = \sin \beta.$$

Lại có

$$-1 \leq \sin(\alpha - \beta) \leq 1 \Leftrightarrow -40 \leq 40 \sin(\alpha - \beta) \leq 40 \Leftrightarrow 1 \leq 41 + 40 \sin(\alpha - \beta) \leq 81 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{41 + 40 \sin(\alpha - \beta)} \leq 9.$$

Suy ra $P_{\min} = 1$ và $P_{\max} = 9$.

Cách khác. Áp dụng bất đẳng thức $|a \cdot x + b \cdot y| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$.

Ta có

$$\begin{aligned} |24 \sin \alpha - 32 \cos \alpha| &\leq \sqrt{[24^2 + (-32)^2] (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} = 40 \\ \Leftrightarrow -40 &\leq 24 \sin \alpha - 32 \cos \alpha \leq 40 \\ \Leftrightarrow 1 &\leq 41 + 24 \sin \alpha - 32 \cos \alpha \leq 81 \\ \Leftrightarrow 1 &\leq \sqrt{41 + 24 \sin \alpha - 32 \cos \alpha} \leq 9. \end{aligned}$$

Suy ra $P_{\min} = 1$ và $P_{\max} = 9$.

Cách 3. Sử dụng phương pháp hình học.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có

$$|z - 3 + 4i| = 4 \Leftrightarrow |(x - 3) + (y + 4)i| = 4 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 16.$$

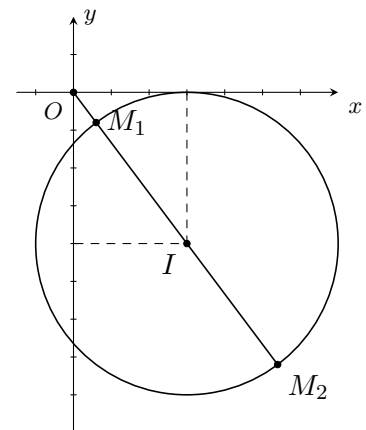
Do đó tập hợp biểu diễn số phức z là một đường tròn có tâm $I(3; -4)$ và bán kính $R = 4$.

Từ hình vẽ ta có

$$\begin{cases} |z|_{\min} = OM_1 = OI - IM_1 = OI - R = 1 \\ |z|_{\max} = OM_2 = OM_1 + 2R = 9. \end{cases}$$

Để tìm z có mô-đun lớn nhất và z có mô-đun nhỏ nhất chính là tọa độ hai điểm M_1, M_2 cũng là tọa độ giao điểm của đường thẳng OI và đường tròn. Đường thẳng OI qua $O(0; 0)$ và có véc-tơ chỉ phương là $\vec{OI} = (3; -4)$ có dạng $\frac{x}{3} = \frac{y}{-4}$ hay $y = -\frac{4}{3}x$.

Ta tìm được các giao điểm $M_1\left(\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right), M_2\left(\frac{27}{5}; -\frac{36}{5}\right)$.



Nhận xét. Cách 2 và 3 tổng quát hơn, có thể tìm $P_{\max}$ và $P_{\min}$ cùng một lúc. Tùy vào yêu cầu của bài toán mà ta chọn phương pháp cho phù hợp cho trắc nghiệm hoặc tự luận.

□

Ví dụ 2. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|iz + 4 - 3i| = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

🔗 **Lời giải.**

Cách 1. Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có

$$|iz + 4 - 3i| = 1 \Leftrightarrow |(4 - y) + (x - 3)i| = 1 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 1.$$

Đặt $\begin{cases} x - 3 = \sin \alpha \\ y - 4 = \cos \alpha \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 3 + \sin \alpha \\ y = 4 + \cos \alpha \end{cases}$, khi đó

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3 + \sin \alpha)^2 + (4 + \cos \alpha)^2} = \sqrt{6 \sin \alpha + 8 \cos \alpha + 26}.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} |6 \sin \alpha + 8 \cos \alpha| &\leq \sqrt{(6^2 + 8^2)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} \\ \Leftrightarrow |6 \sin \alpha + 8 \cos \alpha| &\leq 10 \\ \Leftrightarrow -10 &\leq 6 \sin \alpha + 8 \cos \alpha \leq 10 \\ \Leftrightarrow 16 &\leq 6 \sin \alpha + 8 \cos \alpha + 26 \leq 36 \\ \Leftrightarrow 4 &\leq \sqrt{6 \sin \alpha + 8 \cos \alpha + 26} \leq 6. \end{aligned}$$

Suy ra $|z|_{\min} = 4$, $|z|_{\max} = 6$.

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức $|\vec{u} - \vec{v}| \geq |\vec{u}| - |\vec{v}|$ (hay $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$).

Ta có

$$1 = |iz + 4 - 3i| = |4 - 3i - (-iz)| \geq |4 - 3i| - |-iz| = 5 - |z| \Rightarrow |z| \geq 4.$$

Suy ra $|z|_{\min} = 4$. □

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 - i| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |\bar{z}|$.

[Lời giải.](#)

Ta có

$$1 = |z^2 - i| \geq |z^2| - |i| \Leftrightarrow 1 \geq |z|^2 - 1 \Leftrightarrow |z|^2 \leq 2 \Rightarrow |z| \leq \sqrt{2}.$$

Lại có $P = |\bar{z}| = |z|$. Do đó $P_{\max} = \sqrt{2}$. □

Bài 2. Trong các số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$, tìm số phức có mô-đun nhỏ nhất.

[Lời giải.](#)

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Từ giả thiết đề bài ta có

$$\begin{aligned} |x + yi - 2 - 4i| &= |x + yi - 2i| \\ \Leftrightarrow |(x - 2) + (y - 4)i| &= |x + (y - 2)i| \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 4)^2} &= \sqrt{x^2 + (y - 2)^2} \\ \Leftrightarrow x + y - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= 4 - x. \end{aligned}$$

Cách 1. Sử dụng đánh giá hằng đẳng thức $A^2 \geq 0$.

Ta có

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (4 - x)^2} = \sqrt{2x^2 - 8x + 16} = \sqrt{2(x - 2)^2 + 8} \geq 2\sqrt{2}.$$

Dấu “=” xảy ra khi $x - 2 = 0$ hay $x = 2$.

Vậy số phức z có mô-đun nhỏ nhất bằng $2\sqrt{2}$ khi $z = 2 + 2i$.

Cách 2. Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng cộng mẫu $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x + y)^2}{a + b}$.

Ta có

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{1}} \geq \sqrt{\frac{(x + y)^2}{1 + 1}} \Rightarrow |z| \geq 2\sqrt{2}.$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = 2$.

Vậy số phức z có mô-đun nhỏ nhất bằng $2\sqrt{2}$ khi $z = 2 + 2i$.

Cách 3. Sử dụng hình học.

Tập hợp biểu diễn số phức z là đường thẳng $d: x + y - 4 = 0$.

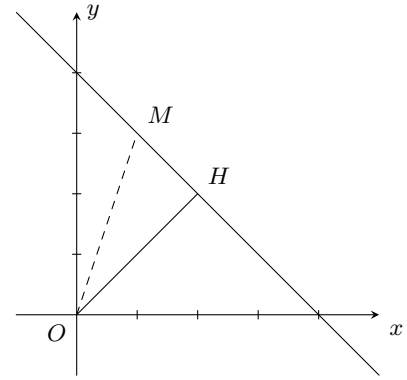
Số phức có mô-đun nhỏ nhất khi và chỉ khi $|z|_{\min} = OH$ và số phức cần tìm chính là tọa độ điểm H là hình chiếu của điểm O lên d .

Vì $OH \perp d$ nên phương trình của OH có dạng $x - y + m = 0$.

Lại có $O(0;0)$ thuộc OH nên $m = 0$, suy ra phương trình của OH là $x - y = 0$.

Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2. \end{cases}$$



Vậy số phức z có mô-đun nhỏ nhất bằng $2\sqrt{2}$ khi $z = 2 + 2i$.

□

Bài 3. Trong các số phức thỏa mãn $|z - i| = |\bar{z} - 2 - 3i|$, tìm số phức có mô-đun nhỏ nhất.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Từ giả thiết đề bài ta có

$$|x + (y - 1)i| = |(x - 2) - (y + 3)i| \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = (x - 2)^2 + (y + 3)^2 \Leftrightarrow 4x - 8y - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2y + 3.$$

Ta có

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2y + 3)^2 + y^2} = \sqrt{5y^2 + 12y + 9} = \sqrt{5\left(y + \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{9}{5}} \geq \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

Dấu “=” xảy ra khi $y = -\frac{6}{5}$, $x = \frac{3}{5}$.

Vậy $|z|_{\min} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ khi $z = \frac{3}{5} - \frac{6}{5}i$.

□

Bài 4. Trong các số phức thỏa mãn $|iz - 3| = |z - 2 - i|$, tìm số phức có mô-đun nhỏ nhất.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Từ giả thiết đề bài ta có

$$|(-y - 3) + xi| = |(x - 2) + (y - 1)i| \Leftrightarrow (-y - 3)^2 + x^2 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2 \Leftrightarrow 4x + 8y + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2y - 1.$$

Ta có

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2y - 1)^2 + y^2} = \sqrt{5y^2 + 4y + 1} = \sqrt{5\left(y + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}} \geq \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Dấu “=” xảy ra khi $y = -\frac{2}{5}$, $x = -\frac{1}{5}$.

Vậy $|z|_{\min} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ khi $z = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$.

□

Bài 5. Trong các số phức thỏa $(z - 1)(\bar{z} + 2i)$ là số thực, tìm số phức có mô-đun nhỏ nhất.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có

$$\begin{aligned} (z - 1)(\bar{z} + 2i) &= z \cdot \bar{z} + 2iz - \bar{z} - 2i = |z|^2 + 2i(z - 1) - \bar{z} = x^2 + y^2 + 2i(x + yi - 1) - (x - yi) \\ &= x^2 + y^2 + 2xi - 2y - 2i - x + yi = (x^2 + y^2 - x - 2y) + (2x + y - 2)i. \end{aligned}$$

Vì $(z - 1)(\bar{z} + 2i)$ là số thực nên $2x + y - 2 = 0$ hay $y = 2 - 2x$.

Ta có

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (2 - 2x)^2} = \sqrt{5x^2 - 8x + 4} = \sqrt{5\left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}} \geq \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = \frac{4}{5}$, $y = \frac{2}{5}$.

Vậy $|z|_{\min} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ khi $z = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$.

□

Bài 6. Trong các số phức thỏa mãn $|z - 1| = |z - i|$, tìm mô-đun nhỏ nhất của số phức $w = 2z + 2 - i$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Từ giả thiết đề bài ta có

$$|(x - 1) + yi| = |x + (y - 1)i| \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = x^2 + (y - 1)^2 \Leftrightarrow -2x + 2y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Ta có $w = 2z + 2 - i = 2x + 2yi + 2 - i = 2x + 2 + (2y - 1)i = (2x + 2) + (2x - 1)i$.

Khi đó

$$|w| = |(2x + 2) + (2x - 1)i| = \sqrt{(2x + 2)^2 + (2x - 1)^2} = \sqrt{8x^2 + 4x + 5} = \sqrt{8\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{2}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = -\frac{1}{4}$, $y = -\frac{1}{4}$.

Vậy $|w|_{\min} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ khi $z = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$. □

Bài 7. Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z + 2 - 2i| = |z - 4i|$ và $w = iz + 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|w|$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Từ giả thiết đề bài ta có

$$|(x + 2) + (y - 2)i| = |x + (y - 4)i| \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = x^2 + (y - 4)^2 \Leftrightarrow 4x + 4y - 8 = 0 \Leftrightarrow y = 2 - x.$$

Ta có $w = iz + 1 = xi - y + 1 = (1 - y) + xi = (x - 1) + xi$.

Khi đó

$$|w| = \sqrt{(x - 1)^2 + x^2} = \sqrt{2x^2 - 2x + 1} = \sqrt{2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{2}$.

Vậy $|w|_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ khi $z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$. □

Bài 8. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z| \geq 2$. Tìm tích của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \left| \frac{z + i}{z} \right|.$$

Lời giải.

Đặt $w = \frac{z + i}{z}$, ta có

$$wz = z + i \Leftrightarrow (w - 1)z = i \Leftrightarrow |(w - 1)z| = |i| \Leftrightarrow |w - 1||z| = 1 \Leftrightarrow |w - 1| = \frac{1}{|z|} \Leftrightarrow |w - 1| \leq \frac{1}{2}.$$

Lại có

$$|w| - 1 \leq |w - 1| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |w| \leq \frac{3}{2}.$$

Mặt khác

$$|-1| - |-w| \leq |-1 - (-w)| \Leftrightarrow 1 - |w| \leq |w - 1| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |w| \geq \frac{1}{2}.$$

Suy ra $P_{\min} = \frac{1}{2}$, $P_{\max} = \frac{3}{2}$. Do đó tích của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức là $\frac{3}{4}$. □

Bài 9. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3| + |z + 3| = 8$. Gọi M, m lần lượt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tìm $M + m$.

Lời giải.

Ta có Gọi $E(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức z , $A(3; 0)$, $B(-3; 0)$.

Ta có $EA + EB = 8$ nên E thuộc elip có trục lớn bằng 8, tiêu cự bằng 6, trục bé bằng $2\sqrt{7}$.

Do đó $|z|_{\max} = 4$, $|z|_{\min} = \sqrt{7}$.

Suy ra $M = 4$, $m = \sqrt{7}$. Vậy $M + m = 4 + \sqrt{7}$. □

Bài 10. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |1 + z| + 3|1 - z|$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Từ giả thiết đề bài ta có

$$|z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2.$$

Từ kết quả trên ta thấy $x \in [-1; 1]$.

Mặt khác

$$\begin{aligned} P &= |1 + z| + 3|1 - z| = |(x + 1) + yi| + 3|(1 - x) - yi| = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} + 3\sqrt{(1 - x)^2 + y^2} \\ &= \sqrt{x^2 + 2x + 1 + 1 - x^2} + 3\sqrt{1 - 2x + x^2 + 1 - x^2} = \sqrt{2(x + 1)} + 3\sqrt{2(1 - x)}. \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{2(x + 1)} + 3\sqrt{2(1 - x)}$ trên đoạn $[-1; 1]$ có $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2(x + 1)}} - \frac{3}{\sqrt{2(1 - x)}}$, $\forall x \in (-1; 1)$.

Phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm $x = -\frac{4}{5} \in [-1; 1]$.

Lại có $f(-1) = 6$, $f(1) = 2$, $f\left(-\frac{4}{5}\right) = 2\sqrt{10}$.

Do đó $P_{\max} = 2\sqrt{10}$ khi $x = -\frac{4}{5}$, $y = \pm\frac{3}{5}$ tức là $z = \frac{4}{5} \pm \frac{3}{5}i$.

Cách khác. Sử dụng bất đẳng thức $a \cdot x + b \cdot y \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= 1 \cdot \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} + 3\sqrt{(1 - x)^2 + y^2} \leq \sqrt{(1^2 + 3^2)[(x + 1)^2 + y^2 + (1 - x)^2 + y^2]} \\ \Rightarrow P &\leq \sqrt{20(x^2 + y^2 + 1)} = 2\sqrt{10}. \end{aligned}$$

□

Bài 11. Cho số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0, z_1 + z_2 \neq 0$ và $\frac{1}{z_1 + z_2} = \frac{1}{z_1} + \frac{2}{z_2}$. Tính $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_1 + z_2} = \frac{1}{z_1} + \frac{2}{z_2} &\Leftrightarrow z_1 z_2 = (z_1 + z_2)(z_2 + 2z_1) \Leftrightarrow z_1 z_2 = z_1 z_2 + 2z_1^2 + z_2^2 + 2z_1 z_2 \Leftrightarrow 2z_1^2 + 2z_1 z_2 + z_2^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{z_1}{z_2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{-1 \pm i}{2}. \end{aligned}$$

Do đó $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

□

Bài 12. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z^2 - 2z + 5| = |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)|$. Tính $\min |w|$, với $w = z - 2 + 2i$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} |z^2 - 2z + 5| &= |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)| \\ \Leftrightarrow |(z - 1 - 2i)(z - 1 + 2i)| &= |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)| \\ \Leftrightarrow |z - 1 - 2i| \cdot |z - 1 + 2i| &= |z - 1 + 2i| \cdot |z - 1 + 3i| \quad (1) \end{aligned}$$

① $z = 1 - 2i \Rightarrow w = -1 \Rightarrow |w| = 1$.

② $z \neq 1 - 2i$. Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow |z - 1 - 2i| = |z - 1 + 3i| \\ &\Leftrightarrow |(x - 1) + (y - 2)i| = |(x - 1) + (y + 3)i| \\ &\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = (x - 1)^2 + (y + 3)^2 \\ &\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Với $y = -\frac{1}{2} \Rightarrow z = x - \frac{1}{2}i$. Khi đó $w = x - 2 + \frac{3}{2}i \Rightarrow |w| = \sqrt{(x - 2)^2 + \frac{9}{4}} \geq \frac{3}{2}$.

$\Rightarrow \min |w| = \frac{3}{2}$ khi $z = 2 - \frac{1}{2}i$.

Vậy $\min |w| = 1$. □

Bài 13. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z^2 + 4| = |z^2 + 2iz|$. Tính giá trị nhỏ nhất của $P = |z + i|$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} |z^2 + 4| &= |z^2 + 2iz| \\ \Leftrightarrow |(z - 2i)(z + 2i)| &= |z(z + 2i)| \\ \Leftrightarrow |z - 2i| \cdot |z + 2i| &= |z| \cdot |z + 2i| \quad (*) \end{aligned}$$

① $z = -2i \Rightarrow P = |-i| = 1$.

② $z \neq -2i$. Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (*) \Leftrightarrow |z - 2i| &= |z| \\ \Leftrightarrow |x + (y - 2)i| &= |x + yi| \\ \Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 &= x^2 + y^2 \\ \Leftrightarrow y &= 1. \end{aligned}$$

Với $y = 1 \Rightarrow z = x + i$. Khi đó $P = |x + 2i| = \sqrt{x^2 + 4} \geq 2$.
 $\Rightarrow \min P = 2$ khi $z = i$.

Vậy $\min P = 1$. □

Bài 14. Cho số phức $z = x + 2iy$, ($x, y \in \mathbb{R}$) thay đổi thỏa mãn điều kiện $|z| = 1$. Tính tổng S của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = x - y$.

Lời giải.

$$|z| = 1 \Leftrightarrow |x + 2iy| = 1 \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{2} \leq -y \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq x - y \leq \frac{3}{2}.$$

Do đó $\min P = -\frac{3}{2}$ khi $x = -1; y = -\frac{1}{2}$ và $\max P = \frac{3}{2}$ khi $x = 1; y = \frac{1}{2}$.

Vậy $S = 0$. □

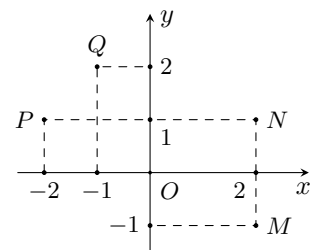
CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 NHẬN BIẾT

Câu 1.

Điểm nào trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức $z = -1 + 2i$?

- A. N. B. P. C. M. D. Q.



Lời giải.

Vì $z = -1 + 2i$ nên điểm biểu diễn của số phức z có tọa độ $(-1; 2)$.

Chọn đáp án **D**. □

Câu 2. Số phức liên hợp của số phức $z = 1 - 2i$ là

- A. $1 + 2i$. B. $-1 - 2i$. C. $2 - i$. D. $-1 + 2i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của $z = 1 - 2i$ là $1 + 2i$.

Chọn đáp án **A**. □

Câu 3. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = 4 - 3i$.

- A. $\bar{z} = -4 - 3i$. B. $\bar{z} = -4 + 3i$. C. $\bar{z} = 4 + 3i$. D. $\bar{z} = 3 + 4i$.

Lời giải.

$z = 4 - 3i \Rightarrow \bar{z} = 4 + 3i$.

Chọn đáp án **C**. □

Câu 4. Điểm nào trong các điểm dưới đây biểu diễn số phức $z = -1 + i$?

- A. $Q(0; -1)$. B. $M(-1; 1)$. C. $N(1; -1)$. D. $P(-1; 0)$.

Lời giải.

Điểm biểu diễn số phức $z = -1 + i$ là $M(-1; 1)$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 5. Số phức $z = -2i$ có phần thực và phần ảo lần lượt là

- A. -2 và 0 . B. $-2i$ và 0 . C. 0 và -2 . D. 0 và 2 .

Lời giải.

Số phức $z = -2i$ có phần thực bằng 0 và phần ảo bằng -2 .

Chọn đáp án **C**

□

Câu 6. Điểm biểu diễn số phức $z = 1 - 2i$ trên mặt phẳng Oxy có tọa độ là

- A. $(1; -2)$. B. $(-1; -2)$. C. $(2; -1)$. D. $(2; 1)$.

Lời giải.

Điểm biểu diễn số phức $z = 1 - 2i$ trên mặt phẳng Oxy có tọa độ là $(1; -2)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 7. Cho số phức $z = -4 + 5i$. Điểm biểu diễn của z có tọa độ

- A. $(-4; 5)$. B. $(-4; -5)$. C. $(4; -5)$. D. $(4; 5)$.

Lời giải.

Điểm biểu diễn của số phức $z = a + bi$ là $M(a; b)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 8. Số phức liên hợp của số phức $z = 3 + 2i$ là

- A. $\bar{z} = -3 + 2i$. B. $\bar{z} = 2 - 3i$. C. $\bar{z} = -3 - 2i$. D. $\bar{z} = 3 - 2i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của số phức $z = a + bi$ là $\bar{z} = a - bi$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 9. Tính mô-đun của số phức $z = 3 + 4i$.

- A. 3 . B. 5 . C. 7 . D. $\sqrt{7}$.

Lời giải.

$$|z| = |3 + 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

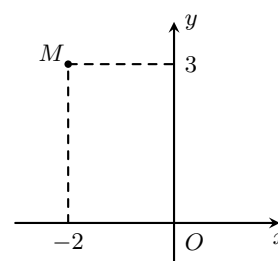
Chọn đáp án **B**

□

Câu 10.

Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức nào trong các số phức cho sau đây?

- A. $3 - 2i$. B. $-2 + 3i$.
C. $2 - 3i$. D. $3 + 2i$.



Lời giải.

Điểm $M(-2; 3)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = -2 + 3i$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 11. Phần thực và phần ảo của số phức $z = 1 + 2i$ lần lượt là

- A. 2 và 1 . B. 1 và $2i$. C. 1 và 2 . D. 1 và i .

Lời giải.

Số phức $z = 1 + 2i$ có phần thực và phần ảo lần lượt là 1 và 2 .

Chọn đáp án **C**

□

Câu 12. Số phức liên hợp $\bar{z}$ của số phức $z = 2 - 3i$ là

- A. $\bar{z} = 2 + 3i$. B. $\bar{z} = 3 - 2i$. C. $\bar{z} = 3 + 2i$. D. $\bar{z} = -2 + 3i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của số phức $z = 2 - 3i$ là $\bar{z} = 2 + 3i$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 13. Số phức được biểu diễn bởi điểm $M(2; -1)$ là

- A. $2 + i$. B. $1 + 2i$. C. $2 - i$. D. $-1 + 2i$.

Lời giải.

Số phức có điểm biểu diễn bởi $M(2; -1)$ trên mặt phẳng tọa độ là $2 - i$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 14. Số phức liên hợp của $z = a + bi$ là

- A. $\bar{z} = -a + bi$. B. $\bar{z} = b - ai$. C. $\bar{z} = -a - bi$. D. $\bar{z} = a - bi$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của $z = a + bi$ là $\bar{z} = a - bi$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 15. Phần ảo của số phức $z = 3 - 4i$ bằng

- A. -4 . B. $-4i$. C. 4 . D. $4i$.

Lời giải.

Phần ảo của số phức $z = 3 - 4i$ bằng -4 .

Chọn đáp án **A**

□

Câu 16. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

- A. Mô-đun của số phức z là một số âm.
B. Mô-đun của số phức z là một số thực.
C. Mô-đun của số phức $z = a + bi$ là $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
D. Mô-đun của số phức z là một số thực không âm.

Lời giải.

Ta có $z = a + bi$ (với $a, b \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Do $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} |z| \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \\ |z| \geq 0. \end{cases}$

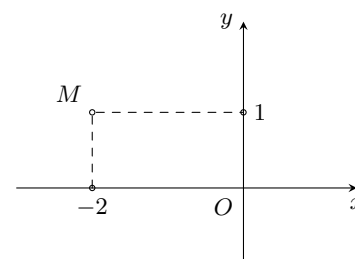
Chọn đáp án **A**

□

Câu 17.

Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức

- A. $z = -2 + i$. B. $z = 1 - 2i$. C. $z = 2 + i$. D. $z = 1 + 2i$.



Lời giải.

Ta có $M(-2; 1) \Rightarrow z = -2 + i$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 18. Phần ảo của số phức $z = 3 - 4i$ bằng

- A. -4 . B. $-4i$. C. 4 . D. $4i$.

Lời giải.

Phần ảo của số phức $z = 3 - 4i$ bằng -4 . Nó là hệ số của i trong dạng đại số của số phức.

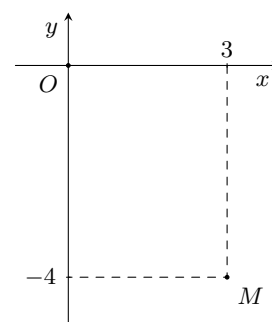
Chọn đáp án **A**

□

Câu 19.

Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z . Tìm phần thực và phần ảo của số phức z .

- A. Phần thực là -4 và phần ảo là 3 . B. Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$.
C. Phần thực là 3 và phần ảo là -4 . D. Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$.



Lời giải.

Ta có $M(3; -4)$ nên điểm M là điểm biểu diễn số phức $z = 3 - 4i$.

Vậy, số phức z có phần thực là 3 và phần ảo là -4 .

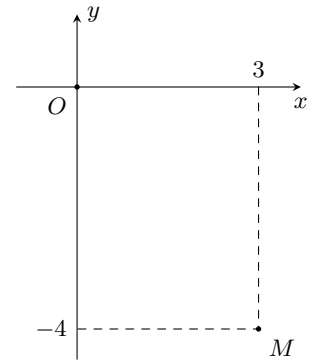
Chọn đáp án **C**

□

Câu 20.

Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z . Tìm phần thực và phần ảo của số phức z .

- A. Phần thực là -4 và phần ảo là 3. B. Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$.
C. Phần thực là 3 và phần ảo là -4 . D. Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$.



Lời giải.

Điểm M trong hình vẽ biểu diễn cho số phức $z = 3 - 4i$.

Vậy số phức z có phần thực là 3 và phần ảo là -4 .

Chọn đáp án **C**

□

Câu 21. Số phức liên hợp $\bar{z}$ của số phức $z = 2 - 3i$ là

- A. $\bar{z} = 3 - 2i$. B. $\bar{z} = 2 + 3i$. C. $\bar{z} = 3 + 2i$. D. $\bar{z} = -2 + 3i$.

Lời giải.

Ta có $\bar{z} = 2 + 3i$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 22. Phần ảo của số phức $z = 2 - 3i$ là

- A. $-3i$. B. 2. C. -3 . D. 3.

Lời giải.

Phần ảo của số phức $z = 2 - 3i$ là -3 .

Chọn đáp án **C**

□

Câu 23. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = (3 + i)(m - 2i)$, $m \in \mathbb{R}$.

- A. $\bar{z} = -(3m + 2) + (m - 6)i$. B. $\bar{z} = (3m + 2) + (m - 6)i$.
C. $\bar{z} = -(3m + 2) - (m - 6)i$. D. $\bar{z} = (3m + 2) - (m - 6)i$.

Lời giải.

Ta có $z = (3 + i)(m - 2i) = (3m + 2) + (m - 6)i$, do đó số phức liên hợp của z là $\bar{z} = (3m + 2) - (m - 6)i$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 24. Cho số phức $z = -4 + 5i$. Biểu diễn hình học của z là điểm có tọa độ

- A. $(-4; 5)$. B. $(-4; -5)$. C. $(4; -5)$. D. $(4; 5)$.

Lời giải.

Tọa độ biểu diễn số phức $z = -4 + 5i$ là điểm $M(-4; 5)$.

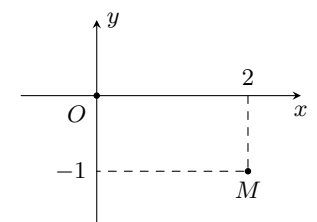
Chọn đáp án **A**

□

Câu 25.

Điểm M trong hình vẽ là biểu diễn hình học của số phức nào dưới đây?

- A. $z = 1 + 2i$. B. $z = 2 + i$. C. $z = -1 + 2i$. D. $z = -1 - 2i$.



Lời giải.

Theo hình vẽ thì $M(2; -1)$ nên điểm M biểu diễn cho số phức $z = 2 - i$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 26. Số phức liên hợp của số phức $z = 4 + 3i$ là

- A. $\bar{z} = -3 + 4i$. B. $\bar{z} = 4 - 3i$. C. $\bar{z} = 3 + 4i$. D. $\bar{z} = 3 - 4i$.

Lời giải.

Với $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thì số phức liên hợp là $\bar{z} = a - bi$.

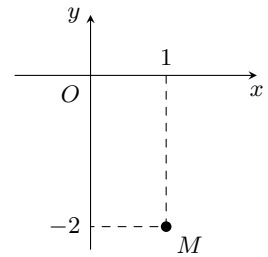
Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 27.

Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z . Tìm phần thực, phần ảo của số phức z

- A. Phần thực là -2 , phần ảo là i . B. Phần thực là 1 , phần ảo là -2 .
C. Phần thực là 1 , phần ảo là $-2i$. D. Phần thực là -2 , phần ảo là 1 .



Lời giải.

Vì $M(1; -2)$ nên $z = 1 - 2i$. Vậy phần thực của z là 1 , phần ảo của z là -2 .

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 28. Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z} = 3 + 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z .

- A. Phần thực bằng 3 , phần ảo bằng 2 . B. Phần thực bằng -3 , phần ảo bằng 2 .
C. Phần thực bằng 3 , phần ảo bằng -2 . D. Phần thực bằng -3 , phần ảo bằng -2 .

Lời giải.

Ta có $z = 3 - 2i$, suy ra phần thực của z bằng 3 , phần ảo của z bằng -2 .

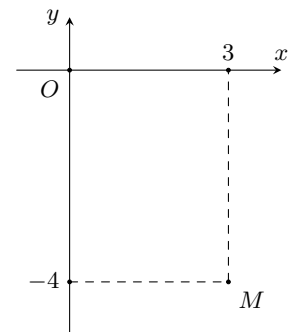
Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 29.

Điểm M trong hình bên là điểm biểu diễn của số phức z . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Số phức z có phần thực là 3 và phần ảo là -4 .
B. Số phức z có phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$.
C. Số phức z có phần thực là -4 và phần ảo là 3 .
D. Số phức z có phần thực là -4 và phần ảo là $3i$.



Lời giải.

Số phức z có phần thực là 3 và phần ảo là -4 .

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 30. Điểm M biểu diễn số phức $z = 3 + 2i$ trong mặt phẳng tọa độ phức là

- A. $M(2; 3)$. B. $M(-3; -2)$. C. $M(3; 2)$. D. $M(3; -2)$.

Lời giải.

Số phức $z = 3 + 2i$ có điểm biểu diễn là $M(3; 2)$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 31. Cho số phức $z = -12 + 5i$. Mô-đun của số phức z bằng

- A. 13 . B. 119 . C. 17 . D. -7 .

Lời giải.

$$|z| = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = 13.$$

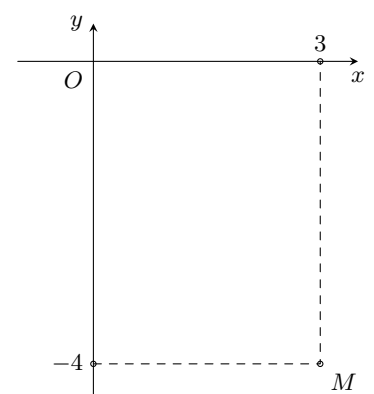
Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 32.

Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z . Tìm phần thực và phần ảo của số phức z .

- A. Phần thực là 3 và phần ảo là -4 .
B. Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$.
C. Phần thực là -4 và phần ảo là 3 .
D. Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$.



Lời giải.

Theo hình vẽ ta thấy $z = 3 - 4i$ nên phần thực là 3 và phần ảo là -4 .

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 33. Biết $M(1; -2)$ là điểm biểu diễn số phức $\bar{z}$, số phức z bằng

- A. $2 + i$. B. $1 + 2i$. C. $2 - i$. D. $1 - 2i$.

Lời giải.

Vì $M(1; -2)$ là điểm biểu diễn của số phức $\bar{z}$ nên $\bar{z} = 1 - 2i$. Từ đó suy ra $z = 1 + 2i$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 34. Cho số phức z có điểm biểu diễn trong mặt phẳng tọa độ Oxy là điểm $M(3; -5)$. Xác định số phức liên hợp $\bar{z}$ của z .

- A. $\bar{z} = -5 + 3i$. B. $\bar{z} = 5 + 3i$. C. $\bar{z} = 3 + 5i$. D. $\bar{z} = 3 - 5i$.

Lời giải.

Vì số phức z có điểm biểu diễn trong mặt phẳng tọa độ Oxy là điểm $M(3; -5)$ nên $z = 3 - 5i$.

Do đó số phức liên hợp của số phức z là $\bar{z} = 3 + 5i$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 35. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Số phức liên hợp của số phức z là

- A. $\bar{z} = 3 - 2i$. B. $\bar{z} = 3 + 2i$. C. $\bar{z} = -2 - 3i$. D. $\bar{z} = 2 + 3i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của số phức $z = 2 - 3i$ là $\bar{z} = 2 + 3i$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 36. Trong mặt phẳng phức, điểm biểu diễn số phức $z = 3 - 2i$ là

- A. $M(3; -2)$. B. $N(2; -3)$. C. $P(-2; 3)$. D. $Q(-3; 2)$.

Lời giải.

Số phức $z = 3 - 2i$ có phần thực và phần ảo lần lượt là 3 và -2 nên z có điểm biểu diễn là $M(3; -2)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 37. Điểm biểu thị số phức $z = 3 - 2i$ là

- A. $M(3; -2)$. B. $N(-2; 3)$. C. $P(2; 3)$. D. $Q(3; 2)$.

Lời giải.

Điểm biểu thị số phức $z = 3 - 2i$ là điểm $M(3; -2)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 38. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = 1 - 2i$.

- A. $\bar{z} = 1 + 2i$. B. $\bar{z} = 2 - i$. C. $\bar{z} = -1 + 2i$. D. $\bar{z} = -1 - 2i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của số phức $z = 1 - 2i$ là $\bar{z} = 1 + 2i$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 39. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

A. Số phức $z = a + bi$ có mô-đun là $\sqrt{a^2 + b^2}$.

B. Số phức $z = a + bi$ có số đối $z' = a - bi$.

C. Số phức $z = a + bi = 0$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$.

D. Số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ trong mặt phẳng phức Oxy .

Lời giải.

Số phức $z = a + bi$ có số đối $z' = -a - bi$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 40. Điểm nào sau đây là điểm biểu diễn của số phức $z = 3 - 4i$?

- A. $M(3; 4)$. B. $M(-3; 4)$. C. $M(3; -4)$. D. $M(-3; -4)$.

Lời giải.

Điểm biểu diễn của số phức $z = 3 - 4i$ là điểm có tọa độ $(3; -4)$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 41. Gọi M và M' lần lượt là các điểm biểu diễn cho các số phức z và $\bar{z}$. Xác định mệnh đề đúng.

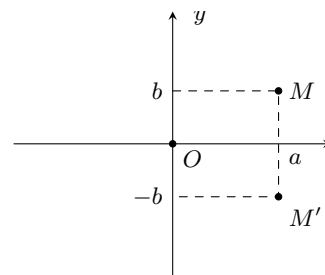
- A. M và M' đối xứng với nhau qua trục hoành. B. M và M' đối xứng với nhau qua trục tung.
C. M và M' đối xứng với nhau qua gốc tọa độ. D. Ba điểm O, M, M' thẳng hàng.

Lời giải.

Viết $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$.

Suy ra các điểm biểu diễn cho các số phức z và $\bar{z}$ lần lượt là $M(a; b)$ và $M'(a; -b)$.

Vậy M và M' đối xứng với nhau qua trục hoành.



Chọn đáp án **A**

□

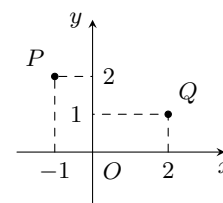
Câu 42. Trong hình vẽ bên, điểm P biểu diễn số phức z_1 , điểm Q biểu diễn số phức z_2 . Tìm số phức $z = z_1 + z_2$?

A. $1 + 3i$.

B. $-3 + i$.

C. $-1 + 2i$.

D. $2 + i$.

**Lời giải.**

Nhìn vào hình vẽ trên ta thấy $z_1 = -1 + 2i$, $z_2 = 2 + i$. Khi đó $z_1 + z_2 = 1 + 3i$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 43. Số phức liên hợp của số phức $z = 2 + i$ là

A. $\bar{z} = 2 - i$.

B. $\bar{z} = 2 + i$.

C. $\bar{z} = -2 + i$.

D. $\bar{z} = -2 - i$.

Lời giải.

Số phức $z = x + yi$ (với $x, y \in \mathbb{R}$) thì số phức liên hợp của z là $\bar{z} = x - yi$.

Do đó số phức liên hợp của $2 + i$ là $2 - i$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 44. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $|z|$ là một số không âm.

B. $|z|$ là một số thực.

C. $|z|$ là một số phức.

D. $|z|$ là một số thực dương.

Lời giải.

Với $z = 0 + 0i$ có $|z| = 0$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 45. Cho số phức $z = -1 + 2i$. Số phức $\bar{z}$ được biểu diễn bởi điểm nào dưới đây trên mặt phẳng tọa độ?

A. $Q(-1; -2)$.

B. $P(1; 2)$.

C. $N(1; -2)$.

D. $M(-1; 2)$.

Lời giải.

Ta có $\bar{z} = -1 - 2i$, nên điểm biểu diễn cho số phức $\bar{z}$ là $Q(-1; -2)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 46. Số phức nào sau đây có điểm biểu diễn là $M(1; -2)$?

A. $1 + 2i$.

B. $1 - 2i$.

C. $-2 + i$.

D. $-1 - 2i$.

Lời giải.

Số phức $z = 1 - 2i$ có điểm biểu diễn là $M(1; -2)$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 47. Phần thực và phần ảo của số phức $z = 1 + 2i$ lần lượt là

A. 1 và 2.

B. 1 và i .

C. 1 và $2i$.

D. 2 và 1.

Lời giải.

Phần thực và phần ảo của số phức $z = 1 + 2i$ lần lượt là 1 và 2.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 48. Cho số phức $z = 10 - 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$.

A. Phần thực bằng 10 và phần ảo bằng 2.

B. Phần thực bằng 10 và phần ảo bằng $2i$.

C. Phần thực bằng -10 và phần ảo bằng $-2i$.

D. Phần thực bằng -10 và phần ảo bằng -2 .

Lời giải.

$\bar{z} = 10 + 2i$ nên $\bar{z}$ có phần thực bằng 10 và phần ảo bằng 2.

Chọn đáp án **A** ☐

Câu 49. Tọa độ điểm biểu diễn số phức liên hợp của số phức $z = 2 + 5i$ là

- A. $(2; -5)$. B. $(2; 5)$. C. $(-2; -5)$. D. $(-2; 5)$.

Lời giải.

Ta có $\bar{z} = 2 - 5i \Rightarrow M(2; -5)$ là điểm biểu diễn số phức liên hợp của số phức z .

Chọn đáp án **A** ☐

Câu 50. Giả sử a, b , là hai số thực thỏa mãn $2a + (b - 3)i = 4 - 5i$ với i là đơn vị ảo. Giá trị của a, b , bằng

- A. $a = 1, b = 8$. B. $a = 8, b = 8$. C. $a = 2, b = -2$. D. $a = -2, b = 2$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} 2a = 4 \\ b - 3 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases}$.

Chọn đáp án **C** ☐

Câu 51. Số phức $z = 5 - 8i$ có phần ảo là

- A. 5. B. -8 . C. 8. D. $-8i$.

Lời giải.

Số phức $z = 5 - 8i$ có phần ảo là -8 .

Chọn đáp án **B** ☐

Câu 52. Tìm phần ảo của số phức $z = 3 - 4i$.

- A. -4 . B. 4. C. 3. D. -3 .

Lời giải.

Phần ảo của số phức $z = 3 - 4i$ là -4 .

Chọn đáp án **A** ☐

Câu 53. Số phức z thỏa mãn $z = 5 - 8i$ có phần ảo là

- A. -8 . B. 8. C. 5. D. $-8i$.

Lời giải.

Số phức $z = 5 - 8i$ có phần thực là 5 và phần ảo là -8 .

Chọn đáp án **A** ☐

Câu 54. Trong các số phức $z_1 = -2i$, $z_2 = 2 - i$, $z_3 = 5i$, $z_4 = 4$ có bao nhiêu số thuần ảo?

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Lời giải.

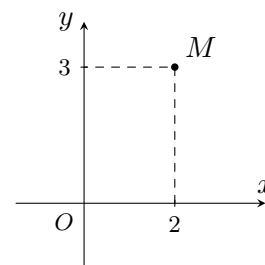
Số thuần ảo là số có dạng $z = bi$ ($b \in \mathbb{R}$).

Vậy trong các số phức đã cho có hai số thuần ảo là $z_1 = -2i$, $z_3 = 5i$.

Chọn đáp án **D** ☐

Câu 55. Số phức z có điểm biểu diễn A như hình vẽ. Phần ảo của số phức $\frac{z}{z-i}$ bằng

- A. $\frac{5}{4}i$. B. $\frac{1}{4}i$. C. $\frac{5}{4}$. D. $\frac{1}{4}$.

**Lời giải.**

Vì điểm $A = (2; 3)$ nên $z = 2 + 3i$. Do đó $\frac{z}{z-i} = \frac{2+3i}{2+2i} = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}i$.

Vậy phần ảo của số phức $\frac{z}{z-i}$ bằng $\frac{1}{4}$.

Chọn đáp án **D** ☐

Câu 56. Mô-đun của số phức $w = 2 - \sqrt{5}i$ là

- A. $|w| = \sqrt{29}$. B. $|w| = 1$. C. $|w| = \sqrt{7}$. D. $|w| = 3$.

Lời giải.

Ta có $|w| = \sqrt{2^2 + (-\sqrt{5})^2} = \sqrt{9} = 3$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 57. Số phức liên hợp của số phức $z = 2 - 3i$ là

A. $\bar{z} = 3 + 2i$.

B. $\bar{z} = 3 - 2i$.

C. $\bar{z} = 2 + 3i$.

D. $\bar{z} = -2 + 3i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của số phức $z = 2 - 3i$ là $\bar{z} = 2 + 3i$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 58. Trong mặt phẳng Oxy , điểm nào sau đây biểu diễn số phức $z = 2 + i$?

A. $M(2; 0)$.

B. $N(2; 1)$.

C. $N(2; -1)$.

D. $N(1; 2)$.

Lời giải.

Trong mặt phẳng Oxy , điểm biểu diễn số phức $z = 2 + i$ là $N(2; 1)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 59.

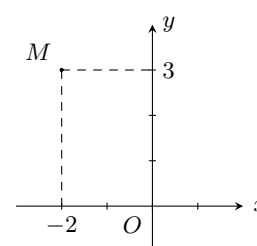
Điểm M trong hình vẽ bên biểu thị cho số phức nào dưới đây?

A. $3 + 2i$.

B. $2 - 3i$.

C. $-2 + 3i$.

D. $3 - 2i$.

**Lời giải.**

Điểm $M(-2; 3)$ biểu diễn cho số phức $z = -2 + 3i$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 60. Trong mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = 2 - 3i$ là

A. $(2; 3)$.

B. $(2; -3)$.

C. $(-3; 2)$.

D. $(3; 2)$.

Lời giải.

Ta có điểm $A(2; -3)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = 2 - 3i$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 61. Điểm biểu diễn số phức liên hợp của số phức $z = 2 - 3i$ là

A. $M(2; -3)$.

B. $M(2; 3)$.

C. $M(-2; 3)$.

D. $M(-2; -3)$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của $z = 2 - 3i$ là $\bar{z} = 2 + 3i$. Vậy điểm biểu diễn số phức $\bar{z}$ là $M(2; 3)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 62. Mô-đun của số phức $z = 4 - 3i$ bằng

A. 7.

B. 25.

C. 5.

D. 1.

Lời giải.

Ta có $|z| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 63. Phần ảo của số phức $z = -1 + i$ là

A. 1.

B. -1.

C. i .

D. $-i$.

Lời giải.

Số phức $z = -1 + i$ viết lại là $z = -1 + 1 \cdot i$ nên có phần ảo là 1.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 64. Cho số phức $z = 3 - 5i$. Phần ảo của z là

A. 5.

B. 3.

C. -5.

D. $-5i$.

Lời giải.

Do $z = 3 - 5i$ nên có phần ảo bằng -5.

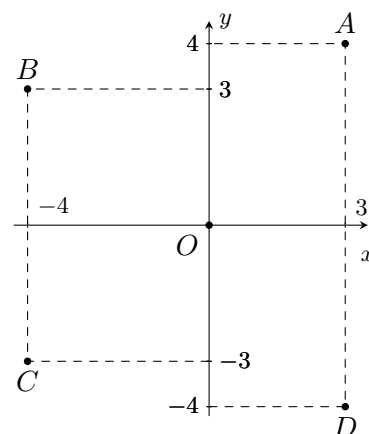
Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 65.

Trên mặt phẳng tọa độ, số phức $z = 3 - 4i$ được biểu diễn bởi điểm nào trong các điểm A, B, C, D ?

- A. Điểm D . B. Điểm B . C. Điểm A . D. Điểm C .



Lời giải.

Ta có $z = 3 - 4i$ nên điểm biểu diễn số phức z là $D(3; -4)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 66. Số phức $z = 2 - 3i$ có điểm biểu diễn là

- A. $N(-3; 2)$. B. $P(3; 2)$. C. $M(2; -3)$. D. $Q(2; 3)$.

Lời giải.

Số phức $z = 2 - 3i$ có điểm biểu diễn là $M(2; -3)$.

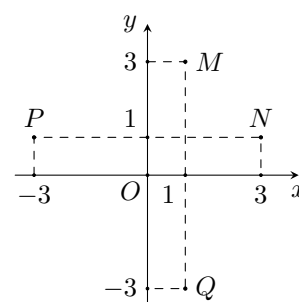
Chọn đáp án **C**

□

Câu 67.

Điểm nào trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức $z = 1 + 3i$?

- A. Q . B. P . C. M . D. N .



Lời giải.

Điểm $M(1; 3)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = 1 + 3i$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 68. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Điểm biểu diễn số phức liên hợp của z là

- A. $(2; -3)$. B. $(2; 3)$. C. $(-2; -3)$. D. $(-2; 3)$.

Lời giải.

Ta có $z = 2 - 3i \Rightarrow \bar{z} = 2 + 3i \Rightarrow M(2; 3)$ là điểm biểu diễn số phức liên hợp của z .

Chọn đáp án **B**

□

Câu 69. Mô-đun của số phức $z = 5 - 2i$ bằng

- A. $\sqrt{29}$. B. 3. C. 7. D. 29.

Lời giải.

Ta có $|z| = |5 - 2i| = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 70. Số phức $z = 5 - 7i$ có số phức liên hợp là

- A. $\bar{z} = 5 + 7i$. B. $\bar{z} = -5 + 7i$. C. $\bar{z} = 7 - 5i$. D. $\bar{z} = -5 - 7i$.

Lời giải.

Số phức $z = a + bi$ có số phức liên hợp là $\bar{z} = a - bi$.

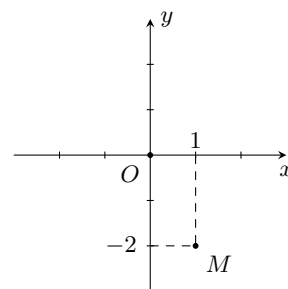
Chọn đáp án **A**

□

Câu 71.

Số phức nào dưới đây có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là điểm M như hình bên?

- A. $1 - 2i$. B. $i + 2$. C. $i - 2$. D. $1 + 2i$.



Lời giải.

Vì $M(1; -2)$ nên M là điểm biểu diễn của số phức $z = 1 - 2i$.

Chọn đáp án **A**

Câu 72. Tìm các số thực a, b thỏa mãn $(a - 2b) + (a + b + 4)i = (2a + b) + 2bi$ với i là đơn vị ảo.

- A. $a = -3, b = 1$. B. $a = 3, b = -1$. C. $a = -3, b = -1$. D. $a = 3, b = 1$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } (a - 2b) + (a + b + 4)i = (2a + b) + 2bi \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b = 2a + b \\ a + b + 4 = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b = 0 \\ a - b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 1 \end{cases}$$

Chọn đáp án **A**

Câu 73. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi M, N theo thứ tự là các điểm biểu diễn cho số phức z và $\bar{z}$ (với $z \neq 0$). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

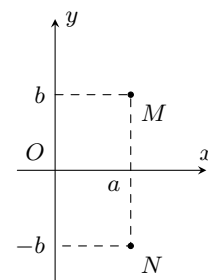
- A. M và N đối xứng nhau qua trục Ox .
 B. M và N đối xứng nhau qua trục Oy .
 C. M và N đối xứng nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.
 D. M và N đối xứng nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ .

Lời giải.

Gọi $M(a; b)$ là điểm biểu diễn của số phức z .

Ta được $N(a; -b)$ là điểm biểu diễn của số phức $\bar{z}$.

Ta thấy M và N đối xứng nhau qua trục Ox .



Chọn đáp án **A**

Câu 74. Phần ảo của số phức $z = 5 + 2i$ bằng

- A. 5. B. $2i$. C. 2. D. $5i$.

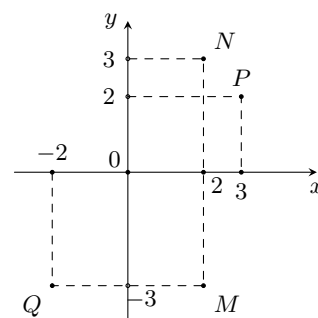
Lời giải.

Số phức $z = 2i + 5$ có phần thực bằng 5, phần ảo bằng 2.

Chọn đáp án **C**

Câu 75. Điểm nào trong hình vẽ dưới đây biểu diễn số phức liên hợp của số phức $z = 2 - 3i$?

- A. M .
 B. P .
 C. N .
 D. Q .



Lời giải.

Ta có $\bar{z} = 2 + 3i \Rightarrow$ điểm biểu diễn của $\bar{z}$ là $(2; 3)$.

Chọn đáp án **C**

Câu 76. Cho số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. Số phức z có phần thực là a , phần ảo là bi . B. Số phức z có mô-đun là $\sqrt{a^2 + b^2}$.

C. Số phức liên hợp của z là $\bar{z} = a - bi$.

D. $z = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$.

Lời giải.

Số phức $z = a + bi$ thì phần thực là a , phần ảo là b .

Chọn đáp án **A**

□

Câu 77. Điểm $M(-1; 3)$ là điểm biểu diễn của số phức

A. $z = -1 + 3i$.

B. $z = 2$.

C. $z = 1 - 3i$.

D. $z = 2i$.

Lời giải.

Số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$. Do đó điểm $M(-1; 3)$ biểu diễn cho số phức $z = -1 + 3i$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 78. Phần ảo của số phức liên hợp của $z = 4i - 7$ là

A. -4 .

B. -7 .

C. 7 .

D. 4 .

Lời giải.

Ta có $\bar{z} = -7 - 4i$. Vậy phần ảo của $\bar{z}$ là -4 .

Chọn đáp án **A**

□

Câu 79. Mô-đun của số phức $z = -4 + 3i$ là

A. -1 .

B. 1 .

C. 5 .

D. 25 .

Lời giải.

Ta có $|z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 80. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = 1 + 3i$.

A. $\bar{z} = -1 + 3i$.

B. $\bar{z} = 1 - 3i$.

C. $\bar{z} = 3 - i$.

D. $\bar{z} = -1 - 3i$.

Lời giải.

Ta có $\bar{z} = 1 - 3i$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 81. Mô-đun của số phức $z = bi$, $b \in \mathbb{R}$ là

A. b .

B. b^2 .

C. $|b|$.

D. $\sqrt{b}$.

Lời giải.

Ta có $|z| = |bi| = |b| \cdot |i| = |b|$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 82.

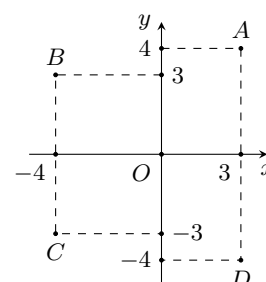
Điểm nào trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức $z = 3 + 4i$?

A. Điểm D.

B. Điểm C.

C. Điểm A.

D. Điểm B.



Lời giải.

Số phức $z = 3 + 4i$ có điểm biểu diễn là $A(3; 4)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 83. Điểm M biểu diễn số phức $z = 2 - i$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy là

A. $M = (1; -2)$.

B. $M = (2; -1)$.

C. $M = (-2; 1)$.

D. $M = (2; 1)$.

Lời giải.

Số phức $z = 2 - i$ có điểm biểu diễn là $M = (2; -1)$.

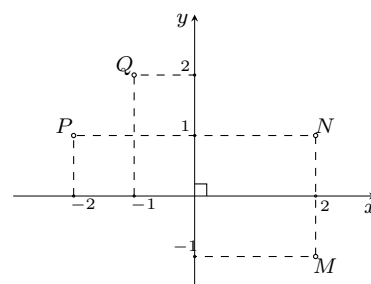
Chọn đáp án **B**

□

Câu 84.

Điểm nào trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức $z = -2 + i$

- A. N . B. P . C. M . D. Q .



Lời giải.

Số phức $z = -2 + i$ có phần thực -2 , phần ảo 1 nên có điểm biểu diễn tọa độ $(-2; 1)$ chính là P .

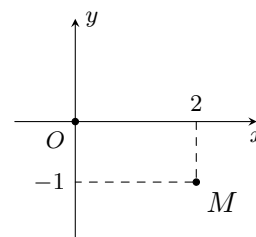
Chọn đáp án **B**

□

Câu 85.

Trong hình vẽ bên, điểm M biểu diễn số phức $\bar{z}$. Số phức z là

- A. $2 - i$. B. $2 + i$. C. $1 + 2i$. D. $1 - 2i$.



Lời giải.

Từ hình vẽ suy ra tọa độ điểm M là $M(2; -1)$ nên $\bar{z} = 2 - i$. Vậy $z = 2 + i$.

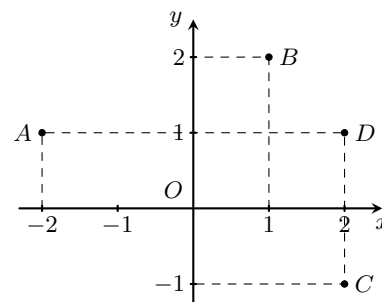
Chọn đáp án **B**

□

Câu 86.

Điểm nào trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức $z = 2 + i$?

- A. D . B. B . C. C . D. A .



Lời giải.

Điểm biểu diễn số phức $z = a + bi$ là $I(a; b)$. Vậy đáp án đúng là $D(2; 1)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 87. Điểm nào sau đây là điểm biểu diễn của số phức $z = -3 + 4i$?

- A. $M(3; 4)$. B. $M(-3; 4)$. C. $M(3; -4)$. D. $M(-3; -4)$.

Lời giải.

Điểm biểu diễn của số phức $z = -3 + 4i$ là điểm có tọa độ $(-3; 4)$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 88. Số phức $-3 + 7i$ có phần ảo bằng

- A. 3 . B. -7 . C. -3 . D. 7 .

Lời giải.

Số phức $-3 + 7i$ có phần ảo bằng 7 .

Chọn đáp án **D**

□

Câu 89. Số phức có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 4 là

- A. $3 + 4i$. B. $4 - 3i$. C. $3 - 4i$. D. $4 + 3i$.

Lời giải.

Số phức có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 4 là $z = 3 + 4i$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 90. Số phức $5 + 6i$ có phần thực bằng

- A. -5 . B. 5 . C. -6 . D. 6 .

Lời giải.

Số phức $5 + 6i$ có phần thực bằng 5 .

Chọn đáp án **B**

□

Câu 91. Số phức có phần thực bằng 1 và phần ảo bằng 3 là

- A. $-1 - 3i$. B. $1 - 3i$. C. $-1 + 3i$. D. $1 + 3i$.

Lời giải.

Số phức có phần thực bằng 1 và phần ảo bằng 3 là $1 + 3i$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 92. Tìm các số thực x, y thỏa mãn $(2x + 5y) + (4x + 3y)i = 5 + 2i$.

- A. $x = \frac{5}{14}$ và $y = -\frac{8}{7}$. B. $x = \frac{8}{7}$ và $y = -\frac{5}{14}$.
C. $x = -\frac{5}{14}$ và $y = \frac{8}{7}$. D. $x = -\frac{8}{14}$ và $y = -\frac{5}{7}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } (2x + 5y) + (4x + 3y)i = 5 + 2i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5y = 5 \\ 4x + 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{14} \\ y = \frac{8}{7} \end{cases}$$

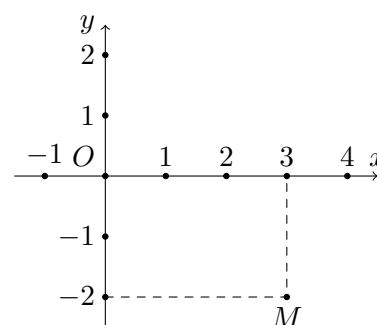
Chọn đáp án **C**

□

Câu 93.

Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức nào dưới đây?

- A. $z = -2 + 3i$. B. $z = 3 + 2i$. C. $z = 2 - 3i$. D. $z = 3 - 2i$.



Lời giải.

Vì điểm $M(3; -2)$ nên nó là điểm biểu diễn của số phức $z = 3 - 2i$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 94. Tìm phần thực a và phần ảo b của số phức $z = \sqrt{5} - 2i$.

- A. $a = -2, b = \sqrt{5}$. B. $a = \sqrt{5}, b = 2$. C. $a = \sqrt{5}, b = -2$. D. $a = \sqrt{5}, b = -2i$.

Lời giải.

Số phức $z = \sqrt{5} - 2i$ có phần thực $a = \sqrt{5}$ và phần ảo $b = -2$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 95. Số phức liên hợp của số phức $z = 2 - 3i$ là

- A. $\bar{z} = -2 - 3i$. B. $\bar{z} = -2 + 3i$. C. $\bar{z} = 3 - 2i$. D. $\bar{z} = 2 + 3i$.

Lời giải.

Ta có $\bar{z} = 2 + 3i$.

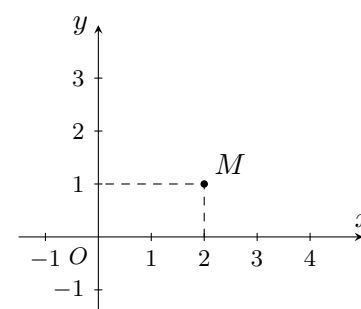
Chọn đáp án **D**

□

Câu 96.

Điểm M trong hình vẽ bên dưới là điểm biểu diễn của số phức z . Tính tổng phần thực và phần ảo của số phức z .

- A. -1 . B. $3i$. C. 3 . D. $2 + i$.



Lời giải.

Dựa vào hình vẽ ta có tọa độ của M là $(2; 1)$. Do đó, số phức $z = 2 + i$.

Vậy tổng phần thực và phần ảo là $2 + 1 = 3$.

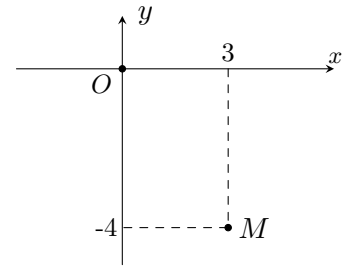
Chọn đáp án **C**

□

Câu 97.

Điểm M trong hình vẽ bên biểu diễn cho số phức

- A. $z = 3 - 4i$. B. $z = -4 - 3i$. C. $z = 3 + 4i$. D. $z = -4 + 3i$.

**Lời giải.**

Điểm $M(3; -4)$ biểu diễn cho số phức $z = 3 - 4i$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 98. Cho số phức $z = 6 + 7i$. Số phức liên hợp của z có điểm biểu diễn là

- A. $(6; 7)$. B. $(6; -7)$. C. $(-6; 7)$. D. $(-6; -7)$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của $z = 6 + 7i$ là $\bar{z} = 6 - 7i$. Điểm biểu diễn của $\bar{z}$ có tọa độ là $(6; -7)$.

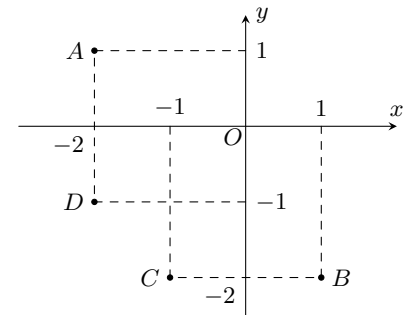
Chọn đáp án **B**

□

Câu 99.

Cho 4 điểm A, B, C, D trên hình vẽ biểu diễn 4 số phức khác nhau. Chọn mệnh đề **sai**.

- A. B là điểm biểu diễn số phức $z = 1 - 2i$.
 B. D là điểm biểu diễn số phức $z = -1 - 2i$.
 C. C là điểm biểu diễn số phức $z = -1 - 2i$.
 D. A là điểm biểu diễn số phức $z = -2 + i$.

**Lời giải.**

D là điểm biểu diễn số phức $z = -2 - i$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 100. Cho số phức $z = 1 + 2i$. Mô-đun của z là

- A. 3. B. $\sqrt{5}$. C. 5. D. 4.

Lời giải.

$$|z| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

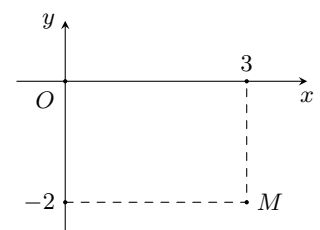
Chọn đáp án **B**

□

Câu 101.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm M có tọa độ như hình bên. Xác định số phức z có điểm biểu diễn là điểm M .

- A. $z = 3 + 2i$. B. $z = -2 + 3i$. C. $z = 2 + 3i$. D. $z = 3 - 2i$.

**Lời giải.**

Số phức z có điểm biểu diễn là điểm $M(3; -2) \Rightarrow z = 3 - 2i$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 102. Cho số phức $z = 4 - 3i$. Tìm mô-đun của số phức z .

- A. $|z| = 5$. B. $|z| = 25$. C. $|z| = \sqrt{7}$. D. $|z| = 1$.

Lời giải.

$$|z| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 103. Cho số phức $z = 1 - 2i$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

- A. Phần thực của số phức z là 1. B. Phần ảo của số phức z là $-2i$.
 C. Phần ảo của số phức z là 2. D. Số phức z là số thuần ảo.

Lời giải.

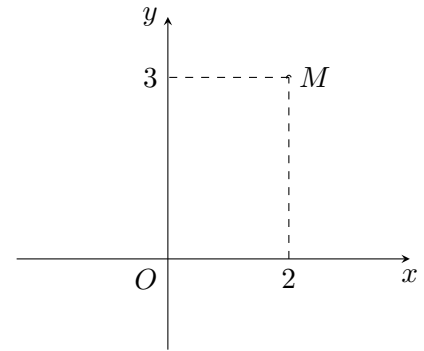
Số phức $z = 1 - 2i$ có phần thực là 1, phần ảo là -2 và không phải là số thuần ảo.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 104. Điểm M trong hình vẽ bên là biểu diễn số phức

A. $z = 2 + 3i$. B. $z = 3 - 2i$. C. $z = 2 - 3i$. D. $z = 3 + 2i$.



Lời giải.

Số phức $z = a + bi$ có điểm biểu diễn là $M(a; b)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 105. Điểm nào trong các điểm sau đây là điểm biểu diễn hình học của số phức $z = -5 + 4i$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

A. $C(5; -4)$. B. $B(4; -5)$. C. $A(-5; 4)$. D. $D(4; 5)$.

Lời giải.

Điểm biểu diễn hình học của số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ là $M(a; b)$. Vậy điểm biểu diễn hình học của số phức $z = -5 + 4i$ là $A(-5; 4)$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 106. Tìm mô-đun của số phức $z = 4 - 3i$.

A. $|z| = 4$. B. $|z| = 1$. C. $|z| = 5$. D. $|z| = \sqrt{7}$.

Lời giải.

Ta có $|z| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 107. Cho số phức $z = 1 + 2i$. Điểm biểu diễn của số phức liên hợp của z là điểm nào sau đây?

A. $M(1; 2)$. B. $N(1; -2)$. C. $P(-1; -2)$. D. $Q(2; -1)$.

Lời giải.

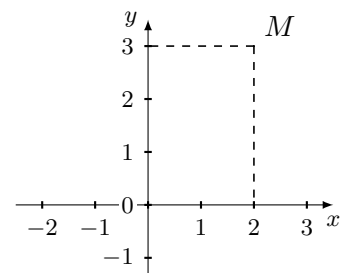
Ta có $\bar{z} = 1 - 2i$. Do đó điểm biểu diễn của số phức $\bar{z}$ là $N(1; -2)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 108.

Điểm M trong hình vẽ bên là biểu diễn số phức



A. $z = 3 + 2i$. B. $z = 3 - 2i$. C. $z = 2 - 3i$. D. $z = 2 + 3i$.

Lời giải.

Trục thực (trục Ox) chỉ số 2, trục ảo (trục Oy) chỉ số 3. Vậy đáp án là $z = 2 + 3i$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 109. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\bar{z} = a - bi$. B. z^2 là số thực. C. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. D. $z \cdot \bar{z}$ là số thực.

Lời giải.

Xét $z = 1 + 2i \in \mathbb{C}$, ta có $z^2 = z \cdot z = (1 + 2i)(1 + 2i) = -3 + 4i \notin \mathbb{R}$.

Vậy khẳng định “ z^2 là số thực” sai.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 110. Tính mô-đun của số phức $z = 3 + 4i$.

A. $\sqrt{7}$. B. 3. C. 7. D. 5.

Lời giải.

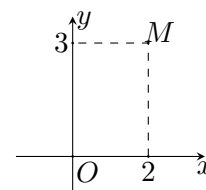
Ta có $z = 3 + 4i \Rightarrow |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Chọn đáp án **D** ☐

Câu 111.

Điểm M trong hình vẽ bên biểu diễn số phức z . Số phức $\bar{z}$ bằng

- A. $2 + 3i$. B. $2 - 3i$. C. $3 + 2i$. D. $3 - 2i$.

**Lời giải.**

Ta có $M(2; 3)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = 2 + 3i$. Suy ra $\bar{z} = 2 - 3i$.

Chọn đáp án **B** ☐

Câu 112. Phần ảo của số phức $z = -3 + 2i$ là

- A. -2 . B. 3 . C. 2 . D. -3 .

Lời giải.

Phần ảo của số phức $z = -3 + 2i$ là 2 .

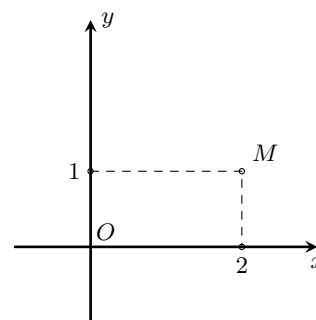
Chọn đáp án **C** ☐

Câu 113.

Trong hình vẽ bên điểm M biểu diễn số phức

z . Số phức z bằng

- A. $2 + i$. B. $1 + 2i$.
C. $1 - 2i$. D. $2 - i$.

**Lời giải.**

Điểm M có tọa độ $(2; 1)$ nên là điểm biểu diễn số phức $z = 2 + i$.

Chọn đáp án **A** ☐

Câu 114. Số phức liên hợp của số phức $z = 2 - 3i$ là

- A. $\bar{z} = -2 - 3i$. B. $\bar{z} = -2 + 3i$. C. $\bar{z} = 3 - 2i$. D. $\bar{z} = 2 + 3i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của số phức $z = 2 - 3i$ là $\bar{z} = 2 + 3i$.

Chọn đáp án **D** ☐

Câu 115. Số phức liên hợp của $z = 1 - 2i$ là

- A. $\bar{z} = 1 + 2i$. B. $\bar{z} = -1 - 2i$. C. $\bar{z} = 2 - i$. D. $\bar{z} = -1 + 2i$.

Lời giải.

Số phức $\bar{z} = 1 + 2i$ là số phức liên hợp của $z = 1 - 2i$.

Chọn đáp án **A** ☐

Câu 116. Cho số phức $z = 3 + i$. Tính $|\bar{z}|$.

- A. $|\bar{z}| = 4$. B. $|\bar{z}| = \sqrt{10}$. C. $|\bar{z}| = 2\sqrt{2}$. D. $|\bar{z}| = 2$.

Lời giải.

Do $z = 3 + i$ nên $\bar{z} = 3 - i$.

Vậy $|\bar{z}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$.

Chọn đáp án **B** ☐

Câu 117. Số phức z thỏa mãn $\bar{z} = 1 - 2i$ được biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ bởi điểm nào sau?

- A. $Q(-1; -2)$. B. $M(1; 2)$. C. $P(-1; 2)$. D. $N(1; -2)$.

Lời giải.

Ta có $\bar{z} = 1 - 2i \Rightarrow z = 1 + 2i$. Khi đó số phức z được biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ bởi điểm $M(1; 2)$.

Chọn đáp án **B** ☐

Câu 118. Cho số phức $z = 1 - 2i$, điểm M biểu diễn số phức $\bar{z}$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy có tọa độ là

- A. $M(2; 1)$. B. $M(1; 2)$. C. $M(1; -2)$. D. $M(-1; 2)$.

Lời giải.

Ta có $z = 1 - 2i \Rightarrow \bar{z} = 1 + 2i \Rightarrow M(1; 2)$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 119. Cho số phức $z = -3 + 4i$. Gọi M là điểm biểu diễn số phức $\bar{z}$. Tung độ của điểm M là

- A. 6. B. -4. C. 4. D. -6.

Lời giải.

$z = -3 + 4i \Rightarrow \bar{z} = -3 - 4i$. Điểm biểu diễn số phức $\bar{z}$ là điểm $M(-3; -4)$ nên tung độ điểm M bằng -4.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 120. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = -\pi i + 1$.

- A. Phần thực là 1 và phần ảo là $-\pi$. B. Phần thực là $-\pi$ và phần ảo là 1.
C. Phần thực là 1 và phần ảo là $-\pi i$. D. Phần thực là $-\pi i$ và phần ảo là 1.

Lời giải.

Số phức z có phần thực là 1 và phần ảo là $-\pi$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 121. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Số phức $z = 2018i$ là số thuần ảo.
B. Số 0 không phải là số thuần ảo.
C. Số phức $z = 5 - 3i$ có phần thực bằng 5, phần ảo bằng -3.
D. Điểm $M(-1; 2)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = -1 + 2i$.

Lời giải.

Số 0 vừa là số thực, vừa là số thuần ảo.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 122. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = 3 + 2i$.

- A. $\bar{z} = 3 - 2i$. B. $\bar{z} = -2 - 3i$. C. $\bar{z} = 2 - 3i$. D. $\bar{z} = -3 - 2i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của z là $\bar{z} = 3 - 2i$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 123. Cho số phức z có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là $A(3; -4)$. Tính $|z|$.

- A. 25. B. $\sqrt{5}$. C. 10. D. 5.

Lời giải.

Theo đề bài suy ra $z = 3 - 4i$. Từ đó $|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 124. Trong mặt phẳng phức Oxy , điểm $A(-2; 1)$ là điểm biểu diễn của số phức nào sau đây?

- A. $z = 2 - i$. B. $z = -2 + i$. C. $z = 2 + i$. D. $z = -2 - i$.

Lời giải.

Điểm $A(-2; 1)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = -2 + i$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 125. Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của $\bar{z}$.

- A. Phần thực là 2, phần ảo là $-2i$. B. Phần thực là 3, phần ảo là -2 .
C. Phần thực là 3, phần ảo là $2i$. D. Phần thực là 3, phần ảo là 2.

Lời giải.

Ta có $\bar{z} = 3 + 2i$, vậy $\bar{z}$ có phần thực là 3, phần ảo là 2.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 126. Tìm phần ảo của số phức $z = 3 + 2i$.

- A. 2. B. 3. C. i . D. $2i$.

Lời giải.

Phần ảo của số phức $z = 3 + 2i$ là 2.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 127. Cho số phức $z = -2 + 3i$. Tìm phần ảo của số phức $\bar{z}$.

- A. -3 . B. 3 . C. $-3i$. D. $3i$.

Lời giải.

Ta có $\bar{z} = \overline{-2 + 3i} = -2 - 3i$. Phần ảo cần tìm là -3 .

Chọn đáp án **A**

□

Câu 128. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. Với mọi số phức z , $|z|$ là một số thực không âm.
 B. Với mọi số phức z , $|z|$ là một số phức.
 C. Với mọi số phức z , $|z|$ là một số thực dương.
 D. Với mọi số phức z , $|z|$ là một số thực.

Lời giải.

Với mọi số phức z thì $|z|$ là một số thực không âm nên $|z|$ là số thực hay $|z|$ là số phức.

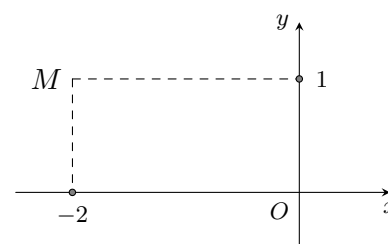
Chọn đáp án **C**

□

Câu 129.

Điểm M trong hình vẽ bên là biểu diễn số phức z . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $2z = -4 + i$. B. $2z = -4 + 2i$.
 C. $2z = 4 - 2i$. D. $2z = 2 - 4i$.



Lời giải.

Theo hình vẽ, ta có $z = -2 + i \Rightarrow 2z = -4 + 2i$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 130. Cho số phức $z = 2 + 4i$. Tính hiệu phần thực và phần ảo của z .

- A. 2 . B. $2\sqrt{5}$. C. -2 . D. 6 .

Lời giải.

$$z = 2 + 4i \Rightarrow \begin{cases} \text{Phần thực bằng } 2 \\ \text{Phần ảo bằng } 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hiệu phần thực và phần ảo là $2 - 4 = -2$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 131. Cho số phức $z = 2 + 3i$. Số phức liên hợp của z là

- A. $\bar{z} = 2 - 3i$. B. $\bar{z} = -2 - 3i$. C. $\bar{z} = -2 + 3i$. D. $\bar{z} = 3 + 2i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của $z = 2 + 3i$ là $\bar{z} = 2 - 3i$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 132. Cho số phức $z = 3 - 4i$. Mô-đun của z bằng

- A. 25 . B. 7 . C. -1 . D. 5 .

Lời giải.

$$z = 3 - 4i \Rightarrow |z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 133. Cho số phức $z = -3 + 7i$. Phần ảo của số phức z là?

- A. $7i$. B. 4 . C. 7 . D. -3 .

Lời giải.

Phần ảo của số phức $z = -3 + 7i$ là 7 .

Chọn đáp án **C**

□

Câu 134. Trong mặt phẳng tọa độ, điểm $M(-3; 2)$ là điểm biểu diễn của số phức nào dưới đây?

- A. $z = 3 + 2i$. B. $z = -3 + 2i$. C. $z = -3 - 2i$. D. $z = 3 - 2i$.

Lời giải.

$M(-3; 2)$ được biểu diễn bởi số phức $z = -3 + 2i$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 135. Cho số phức $z = 3 + 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$.

A. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng -2 .

B. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng $-2i$.

C. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 2.

D. Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng -2 .

Lời giải.

$$z = 3 + 2i \Rightarrow \bar{z} = 3 - 2i.$$

Vậy phần thực của $\bar{z}$ bằng 3 và phần ảo bằng -2 .

Chọn đáp án **A**

□

Câu 136.

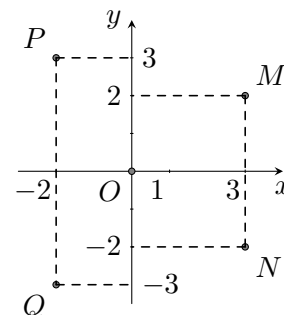
Trong các điểm ở hình bên, điểm nào là điểm biểu diễn cho số phức $z = 3 - 2i$?

A. P.

B. M.

C. Q.

D. N.



Lời giải.

Điểm N là điểm biểu diễn cho số phức $z = 3 - 2i$.

Chọn đáp án **D**

□

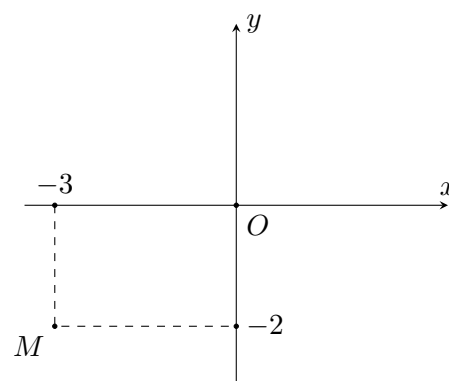
Câu 137. Điểm M trong hình vẽ bên dưới là điểm biểu diễn của số phức

A. $z = -3 + 2i$.

B. $z = 3 + 2i$.

C. $z = -3 - 2i$.

D. $z = 3 - 2i$.



Lời giải.

Điểm M trong hình vẽ là điểm biểu diễn của số phức $z = -3 - 2i$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 138. Phần thực của số phức $z = 1 - 2i$ là

A. -2 .

B. -1 .

C. 1.

D. 3.

Lời giải.

Số phức $z = 1 - 2i$ có phần thực là 1.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 139. Cho số phức $z = 11 + i$. Điểm biểu diễn số phức liên hợp của z là điểm nào dưới đây?

A. $Q(-11; 0)$.

B. $M(11; 1)$.

C. $P(11; 0)$.

D. $N(11; -1)$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của z là $\bar{z} = 11 - i$ nên có điểm biểu diễn là $N(11; -1)$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 140.

Trong mặt phẳng Oxy , điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức

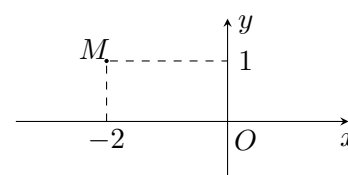
z. Số phức $\bar{z}$ là

A. $-2 + i$.

B. $1 - 2i$.

C. $-2 - i$.

D. $1 + 2i$.



Lời giải.

Ta có $M(-2; 1)$ nên điểm M là điểm biểu diễn số phức $z = -2 + i$. Do đó $\bar{z} = -2 - i$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 141. Kí hiệu a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $z = -4 - 3i$. Tìm a, b .

- A. $a = -4, b = 3$. B. $a = -4, b = -3i$. C. $a = -4, b = -3$. D. $a = 4, b = 3$.

Lời giải.

Số phức $z = -4 - 3i$ có phần thực là $a = -4$, phần ảo là $b = -3$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 142. Cho số phức z có số phức liên hợp $\bar{z} = 3 - 2i$. Tổng phần thực và phần ảo của số phức z bằng

- A. 1. B. -5. C. 5. D. -1.

Lời giải.

Ta có $z = 3 + 2i$. Vậy tổng phần thực và phần ảo của số phức z là $3 + 2 = 5$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 143. Số phức $z = 15 - 3i$ có phần ảo bằng

- A. 15. B. 3. C. -3. D. $3i$.

Lời giải.

Phần ảo là -3.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 144. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tọa độ điểm M biểu diễn cho số phức $z = 3 + 5i$.

- A. $M(3; -5)$. B. $M(-3; -5)$. C. $M(3; 5)$. D. $M(5; 3)$.

Lời giải.

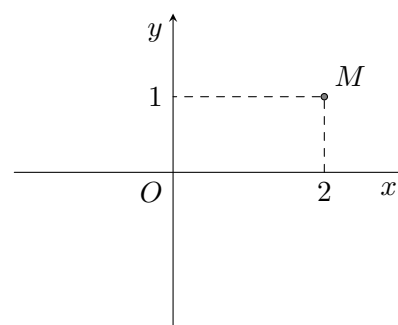
Số phức $z = a + bi$ có điểm biểu diễn là $M(a; b)$. Vậy suy ra điểm M có tọa độ là $(3; 5)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 145. Điểm M trong hình vẽ bên biểu diễn số phức có phần thực là

- A. 1. B. 2. C. $\sqrt{5}$. D. 3.



Lời giải.

Điểm M biểu diễn số phức $z = 2 + i$. Do đó, phần thực của z là 2.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 146. Tìm tọa độ điểm M là điểm biểu diễn của số phức $z = 3 - 4i$.

- A. $M(3; 4)$. B. $M(-3; -4)$. C. $M(3; -4)$. D. $M(-3; 4)$.

Lời giải.

Ta có số phức $z = 3 - 4i$ có điểm biểu diễn là $M(3; -4)$.

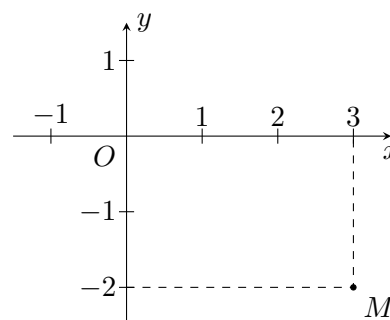
Chọn đáp án **C**

□

Câu 147.

Cho số phức z có biểu diễn hình học là điểm M ở hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $z = 3 + 2i$. B. $z = -2 - 3i$.
C. $z = 3 - 2i$. D. $z = -2 + 3i$.



Lời giải.

Điểm $M(3; -2)$ biểu diễn số phức $z = 3 - 2i$.

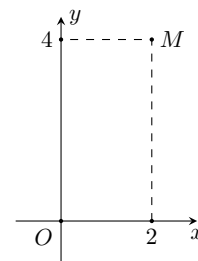
Chọn đáp án **C**

□

Câu 148.

Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn cho số phức nào trong 4 số phức được liệt kê dưới đây?

- A. $z = 4 - 2i$. B. $z = 2 + 4i$. C. $z = 4 + 2i$. D. $z = 2 - 4i$.



Lời giải.

Ta có tọa độ $M(2; 4)$, suy ra số phức biểu diễn bởi M là $z = 2 + 4i$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 149. Cho số phức $z = 1 + 3i$. Gọi M là điểm biểu diễn của số phức liên hợp $\bar{z}$. Tọa độ điểm M là

- A. $M(-1; -3)$. B. $M(1; 3)$. C. $M(1; -3)$. D. $M(-1; 3)$.

Lời giải.

Số phức liên hợp $\bar{z} = 1 - 3i$ nên $M(1; -3)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 150. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = 3 + 2i$.

- A. Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng $-2i$. B. Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng -2 .
C. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng $2i$. D. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 2 .

Lời giải.

Theo định nghĩa thì số phức $z = 3 + 2i$ có phần thực và phần ảo tương ứng là 3 và 2 .

Chọn đáp án **D**

□

Câu 151. Tìm tọa độ điểm biểu diễn hình học của số phức $z = 8 - 9i$.

- A. $(8; 9)$. B. $(8; -9)$. C. $(-9; 8)$. D. $(8; -9i)$.

Lời giải.

Tọa độ điểm biểu diễn số phức $z = 8 - 9i$ là $(8; -9)$.

Chọn đáp án **B**

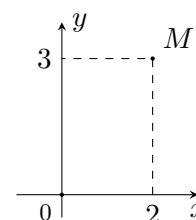
□

Câu 152.

Điểm M trong hình vẽ bên biểu diễn số phức $\bar{z}$.

Số phức z bằng

- A. $2 + 3i$. B. $3 + 2i$.
C. $2 - 3i$. D. $3 - 2i$.



Lời giải.

Từ hình vẽ, ta thấy điểm M biểu diễn của số phức $2 + 3i$, do đó từ giả thiết suy ra $\bar{z} = 2 + 3i$.

Vậy, $z = 2 - 3i$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 153. Tìm phần thực của số phức $z = 1 - 2i$.

- A. -2 . B. -1 . C. 1 . D. 3 .

Lời giải.

Phần thực của số phức $z = 1 - 2i$ là 1 .

Chọn đáp án **C**

□

Câu 154. Số phức $z = 2 - 3i$ có số phức liên hợp là

- A. $3 - 2i$. B. $2 + 3i$. C. $-2 + 3i$. D. $3 + 2i$.

Lời giải.

$\bar{z} = \overline{2 - 3i} = 2 + 3i$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 155. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

- A. Số phức $z = 2 - 3i$ có phần thực là 2 và phần ảo là $-3i$.
B. Số phức $z = 2 - 3i$ có phần thực là 2 và phần ảo là -3 .
C. Số phức $z = 2 - 3i$ có phần thực là 2 và phần ảo là $3i$.
D. Số phức $z = 2 - 3i$ có phần thực là 2 và phần ảo là 3 .

Lời giải.

Một số phức $z = a + bi$ thì a là phần thực, b là phần ảo và i là đơn vị ảo.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 156. Số phức liên hợp của số phức $z = 6 - 4i$ là

A. $\bar{z} = -6 + 4i$.

B. $\bar{z} = 4 + 6i$.

C. $\bar{z} = 6 + 4i$.

D. $\bar{z} = -6 - 4i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của số phức $6 - 4i$ là $6 + 4i$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 157. Mô-đun của số phức $z = 3 - 2i$ bằng

A. 1.

B. 13.

C. $\sqrt{13}$.

D. 5.

Lời giải.

Số phức $z = 3 - 2i$ có mô-đun là $|z| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 158. Tìm phần thực và phần ảo của số phức liên hợp của số phức $z = 1 + i$.

A. Phần thực là 1, phần ảo là -1 .

B. Phần thực là 1, phần ảo là $-i$.

C. Phần thực là 1, phần ảo là 1.

D. Phần thực là 1, phần ảo là i .

Lời giải.

$\bar{z} = 1 - i$, phần thực bằng 1, phần ảo bằng -1 .

Chọn đáp án **A**

□

Câu 159. Mô-đun của số phức $w = a + 2i$ với $a \in \mathbb{R}$ bằng bao nhiêu?

A. $|w| = \sqrt{a + 2}$.

B. $|w| = \sqrt{a^2 - 4}$.

C. $|w| = \sqrt{a^2 + 4}$.

D. $|w| = a^2 + 4$.

Lời giải.

Số phức $w = a + 2i$ có mô-đun là $|w| = \sqrt{a^2 + 4}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 160. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = 1 - 3i$.

A. 1 và $-3i$.

B. 1 và -3 .

C. -3 và 1.

D. 1 và 3.

Lời giải.

Phần thực là 1 và phần ảo là -3 .

Chọn đáp án **B**

□

Câu 161. Cho số phức $z = 2 - i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Phần thực bằng 2.

B. Phần thực bằng -1 .

C. Phần thực bằng 1.

D. Phần ảo bằng 2.

Lời giải.

Số phức $z = 2 - i$ có phần thực bằng 2 và phần ảo bằng -1 .

Chọn đáp án **A**

□

Câu 162. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tọa độ điểm M biểu diễn số phức $z = 4 - i$ là

A. $M(4; 1)$.

B. $M(-4; 1)$.

C. $M(4; -1)$.

D. $M(-4; -1)$.

Lời giải.

Điểm biểu diễn số phức $z = 4 - i$ là $M(4; -1)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 163. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Số phức liên hợp $\bar{z}$ của số phức z là

A. $\bar{z} = -3 + 2i$.

B. $\bar{z} = 2 + 3i$.

C. $\bar{z} = -2 + 3i$.

D. $\bar{z} = -2 - 3i$.

Lời giải.

$$z = 2 - 3i \Rightarrow \bar{z} = 2 + 3i.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 164. Điểm biểu diễn của số phức $z = 2 - 3i$ trên mặt phẳng Oxy là điểm nào sau đây?

A. $(-2; 3)$.

B. $(-3; 2)$.

C. $(2; 3)$.

D. $(2; -3)$.

Lời giải.

Điểm biểu diễn của số phức $z = 2 - 3i$ trong mặt phẳng Oxy là $(2; -3)$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 165. Cho số phức z có điểm biểu diễn trong mặt phẳng tọa độ Oxy là điểm $M(-1; 5)$. Tính mô-đun của z .

A. $|z| = \sqrt{26}$.

B. $|z| = 4$.

C. $|z| = 2$.

D. $|z| = \sqrt{24}$.

Lời giải.

Điểm $M(-1; 5)$ biểu diễn của số phức $z = -1 + 5i$.

Vậy mô-đun của z là $|z| = \sqrt{26}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 166. Tổng phần thực và phần ảo của số phức $z = 3 - i$ là

A. 2.

B. -1.

C. -2.

D. 3.

Lời giải.

Ta có phần thực của z bằng 3 và phần ảo của z bằng -1. Do đó tổng phần thực và phần ảo là 2.

Chọn đáp án **A** □

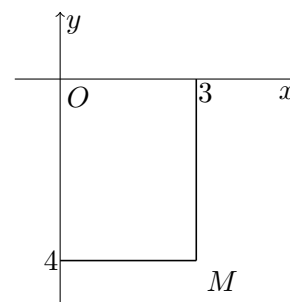
Câu 167. Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z . Tìm phần thực và phần ảo của số phức z .

A. Phần thực là -4 và phần ảo là 3.

B. Phần thực là 3 và phần ảo là -4i.

C. Phần thực là 3 và phần ảo là -4.

D. Phần thực là -4 và phần ảo là 3i.

**Lời giải.**

Dựa vào hình vẽ ta được số phức $z = 3 - 4i$. Vậy số phức z có phần thực là 3 và phần ảo là -4.

Chọn đáp án **C** □

Câu 168. Cho số phức $z = 4 - 3i$. Điểm biểu diễn của z trên mặt phẳng phức là

A. $M(4; 3)$.B. $M(-4; 3)$.C. $M(4; -3)$.D. $M(-3; 4)$.**Lời giải.**

Điểm biểu diễn của z trên mặt phẳng phức là $M(4; -3)$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 169. Gọi a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $z = -3 + 2i$. Giá trị của $a + 2b$ bằng

A. 1.

B. -1.

C. -4.

D. -7.

Lời giải.

Ta có $a = -3, b = 2$ nên $a + 2b = 1$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 170. Số phức z thỏa mãn $\bar{z} = -3 - 2i$ là

A. $z = 3 + 2i$.B. $z = -3 - 2i$.C. $z = -3 + 2i$.D. $z = 3 - 2i$.**Lời giải.**

Dễ thấy ngay $z = \bar{\bar{z}} = \overline{-3 - 2i} = -3 + 2i$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 171. Mô-đun của số phức $z = 3 + 4i$ bằng

A. 1.

B. 7.

C. 5.

D. $\sqrt{7}$.**Lời giải.**

Ta có $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 172. Điểm biểu diễn của các số phức $z = 7 + bi$ với $b \in \mathbb{R}$ nằm trên đường thẳng có phương trình là

A. $y = x + 7$.B. $y = 7$.C. $x = 7$.D. $y = x$.**Lời giải.**

Các điểm biểu diễn của các số phức $z = 7 + bi, b \in \mathbb{R}$ có tọa độ $M_b = (7; b), b \in \mathbb{R}$. Tập hợp các điểm M_b là đường thẳng $x = 7$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 173. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho các điểm $A(4; 0)$, $B(1; 4)$ và $C(1; -1)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Biết rằng G là điểm biểu diễn số phức z . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $z = 3 - \frac{3}{2}i$.

B. $z = 3 + \frac{3}{2}i$.

C. $z = 2 - i$.

D. $z = 2 + i$.

Lời giải.

G là trọng tâm của tam giác ABC suy ra $G\left(\frac{4+1+1}{3}; \frac{0+4+(-1)}{3}\right) = (2; 1)$.

Vậy G là điểm biểu diễn của số phức $z = 2 + i$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 174. Cho các số phức $z_1 = 3i$, $z_2 = -1 - 3i$ và $z_3 = m - 2i$. Tập giá trị của tham số m để số phức z_3 có mô-đun nhỏ nhất trong 3 số phức đã cho là

A. $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$.

B. $(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$.

C. $\{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$.

D. $(-\infty; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} |z_3| < |z_1| \\ |z_3| < |z_2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4 < 9 \\ m^2 + 4 < 10 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 < 5 \Leftrightarrow -\sqrt{5} < m < \sqrt{5}.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 175. Cho số phức $z = 3 - 5i$. Gọi a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của z . Tính $S = a + b$.

A. $S = -8$.

B. $S = 8$.

C. $S = 2$.

D. $S = -2$.

Lời giải.

Ta có $a = 3, b = -5 \Rightarrow S = a + b = -2$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 176. Cho số phức $z = 7 - 5i$. Tìm phần thực a của z .

A. $a = -7$.

B. $a = 5$.

C. $a = -5$.

D. $a = 7$.

Lời giải.

Số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ có phần thực là a nên số phức $z = 7 - 5i$ có phần thực là 7.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 177. Tính mô-đun của số phức $z = 4 - 3i$.

A. $|z| = 7$.

B. $|z| = \sqrt{7}$.

C. $|z| = 5$.

D. $|z| = 25$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } |z| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 178. Tìm số phức z có điểm biểu diễn là $(-2; 9)$.

A. $z = -2i + 9i$.

B. $z = -2i + 9$.

C. $z = -2x + 9yi$.

D. $z = -2 + 9i$.

Lời giải.

Điểm biểu diễn số phức $z = a + bi$ là $(a; b)$, với a, b là số thực.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 179. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 2 - 5i| = 6$ là đường tròn có tâm I và bán kính R lần lượt là

A. $I(-2; 5)$ và $R = 36$.

B. $I(-2; 5)$ và $R = 6$.

C. $I(2; -5)$ và $R = 36$.

D. $I(2; -5)$ và $R = 6$.

Lời giải.

$$\text{Gọi } z = x + iy \ (x, y \in \mathbb{R}). \text{ Ta có } |z + 2 - 5i| = 6 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 36.$$

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn z là đường tròn có tâm $I(-2; 5)$ và bán kính $R = 6$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 180. Số phức liên hợp của số phức $z = 7i + 2$ là

A. $\bar{z} = 7i - 2$.

B. $\bar{z} = 2 - 7i$.

C. $\bar{z} = -2 - 7i$.

D. $\bar{z} = 2 + 7i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của $z = a + bi$ là $\bar{z} = a - bi$ với $(a, b \in \mathbb{R})$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 181. Mô-đun của số phức $z = a - 2i$ là

A. $|z| = \sqrt{a^2 + 4}$.

B. $|z| = \sqrt{a^2 - 4}$.

C. $|z| = z + 2$.

D. $|z| = \sqrt{a + 2}$.

Lời giải.

$$|z| = \sqrt{a^2 + (-2)^2} = \sqrt{a^2 + 4}.$$

Chọn đáp án **A** ☐

Câu 182. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = 5 - 4i$.

- A. Phần thực là 5, phần ảo là $4i$. B. Phần thực là 5, phần ảo là $-4i$.
C. Phần thực là 5, phần ảo là -4 . D. Phần thực là 5, phần ảo là 4.

Lời giải.

Số phức $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ có phần thực là a và phần ảo là b .

Chọn đáp án **C** ☐

Câu 183. Cho số phức $z = -4 - 6i$. Gọi M là điểm biểu diễn số phức $\bar{z}$. Tung độ của điểm M là

- A. 4. B. -6 . C. 6. D. -4 .

Lời giải.

Có $z = -4 - 6i \Rightarrow \bar{z} = -4 + 6i$, suy ra điểm biểu diễn của $\bar{z}$ là $M(-4; 6)$.

Chọn đáp án **C** ☐

Câu 184. Cho số phức $z = 7 - i\sqrt{5}$. Phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$ lần lượt là

- A. 7 và $\sqrt{5}$. B. -7 và $\sqrt{5}$. C. 7 và $i\sqrt{5}$. D. 7 và $-\sqrt{5}$.

Lời giải.

Có $\bar{z} = 7 + i\sqrt{5}$, có phần thực là 7, phần ảo là $\sqrt{5}$.

Chọn đáp án **A** ☐

Câu 185. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. Số phức $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ được gọi là số thuần ảo (hay số ảo) khi $a = 0$.
B. Số i được gọi là đơn vị ảo.
C. Mỗi số thực a được coi là một số phức với phần ảo bằng 0.
D. Số 0 không phải là số ảo.

Lời giải.

Số 0 vừa là số thực, vừa là số thuần ảo.

Chọn đáp án **D** ☐

Câu 186. Phần thực của số phức $z = 3 + 2i$ bằng

- A. $\sqrt{13}$. B. 2. C. 3. D. 5.

Lời giải.

Phần thực của số phức $3 + 2i$ là 3.

Chọn đáp án **C** ☐

Câu 187. Số phức nào sau đây là số thuần ảo?

- A. $z = 3i$. B. $z = \sqrt{3} + i$. C. $z = -2 + 3i$. D. $z = -2$.

Lời giải.

Vì $z = 3i$ có phần thực bằng 0 và phần ảo bằng $3 \neq 0$ nên $z = 3i$ là số thuần ảo.

Chọn đáp án **A** ☐

Câu 188. Trong mặt phẳng phức, cho hai điểm $A(-3; 5)$, $B(2; 4)$. Trung điểm M của đoạn AB là điểm biểu diễn của số phức nào sau đây?

- A. $z = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2}i$. B. $z = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}i$. C. $z = 9 - i$. D. $z = -1 + 9i$.

Lời giải.

Tọa độ điểm M là $\left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$. Suy ra, điểm M biểu diễn số phức $z = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2}i$.

Chọn đáp án **A** ☐

Câu 189. Số phức $z = 12 - 3i$ có phần thực và phần ảo lần lượt bằng

- A. -12 và 3. B. 12 và 3. C. -3 và 12. D. 12 và -3 .

Lời giải.

Số phức $z = 12 - 3i$ có phần thực là 12 và phần ảo là -3 .

Chọn đáp án **D** ☐

Câu 190. Trong mặt phẳng Oxy , số phức $z = 2i - 1$ được biểu diễn bởi điểm M có tọa độ là

- A. $(1; -2)$. B. $(2; 1)$. C. $(2; -1)$. D. $(-1; 2)$.

Lời giải.

Số phức $z = -1 + 2i$ có điểm biểu diễn $M(-1; 2)$.

Chọn đáp án **D** ☐

Câu 191. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = 3 + 2i$.

A. $\bar{z} = 3 - 2i$.

B. $\bar{z} = -3 - 2i$.

C. $\bar{z} = 2 - 3i$.

D. $\bar{z} = -2 - 3i$.

Lời giải.

Ta có số phức liên hợp của số phức $z = 3 + 2i$ là $\bar{z} = 3 - 2i$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 192. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm $M(3; -2)$ là điểm biểu diễn cho số phức nào sau đây?

A. $z = 2 - 3i$.

B. $z = 2 + 3i$.

C. $z = 3 - 2i$.

D. $z = -3 + 2i$.

Lời giải.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm $M(3; -2)$ là điểm biểu diễn cho số phức $z = 3 - 2i$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 193. Cho số phức $\bar{z} = 3 - 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của z .

A. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 2.

B. Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng -2.

C. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng -2.

D. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng -2i.

Lời giải.

Ta có $\bar{z} = 3 - 2i \Rightarrow z = 3 + 2i$.

Từ đó suy ra phần thực của z bằng 3, phần ảo của z bằng 2.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 194.

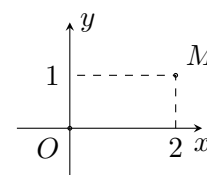
Trong hình vẽ bên, điểm M biểu diễn số phức z . Số phức $\bar{z}$ là

A. $2 - i$.

B. $1 + 2i$.

C. $1 - 2i$.

D. $2 + i$.



Lời giải.

Từ hình vẽ suy ra $M(2; 1)$ nên $z = 2 + i$. Vậy $\bar{z} = 2 - i$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 195. Mô-đun của số phức $z = \sqrt{7} - 3i$ là

A. $|z| = 5$.

B. $|z| = 10$.

C. $|z| = 16$.

D. $|z| = 4$.

Lời giải.

Ta có $z = \sqrt{7} - 3i \Rightarrow |z| = \sqrt{(\sqrt{7})^2 + (-3)^2} = 4$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 196. Cho số phức $\bar{z} = 3 - 5i$. Khi đó phần ảo của số phức z là

A. -5.

B. 5.

C. -3.

D. 3.

Lời giải.

Ta có $z = 3 + 5i \Rightarrow$ phần ảo của số phức z là 5.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 197. Cho số phức $z = 3 + 2i$. Tính $|z|$.

A. $|z| = \sqrt{5}$.

B. $|z| = \sqrt{13}$.

C. $|z| = 5$.

D. $|z| = 13$.

Lời giải.

Ta có $|z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 198. Tính mô-đun của số phức z , biết rằng z vừa là số thực vừa là số thuần ảo.

A. $|z| = 1$.

B. $|z| = 0$.

C. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \forall a, b \in \mathbb{R}$.

D. $|z| = i$.

Lời giải.

Do z vừa là số thực vừa là số thuần ảo nên $z = 0$.

Vậy $|z| = |0| = 0$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 199. Điểm nào sau đây là biểu diễn của số phức $z = 2 - 3i$?

A. $M(2; -3)$.

B. $M(-2; -3)$.

C. $M(-2; 3)$.

D. $M(2; 3)$.

Lời giải.

Điểm biểu diễn số phức $z = 2 - 3i$ là $M(2; -3)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 200. Tìm số phức liên hợp của của số $z = 5 + i$.

- A. $\bar{z} = 5 - i$. B. $\bar{z} = -5 - i$. C. $\bar{z} = 5 + i$. D. $\bar{z} = -5 + i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của của số $a + bi$ là $a - bi$. Do đó $\bar{z} = 5 - i$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 201. Cho số phức z thỏa mãn $(1 + 2i)z = 4 - 3i + 2z$. Số phức liên hợp của số phức z là

- A. $\bar{z} = 2 + i$. B. $\bar{z} = -2 + i$. C. $\bar{z} = -2 - i$. D. $\bar{z} = 2 - i$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$.

Ta có: $(1 + 2i)z = 4 - 3i + 2z \Leftrightarrow (-1 + 2i)z = 4 - 3i \Leftrightarrow z = -2 - i$.

Vậy $\bar{z} = -2 + i$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 202. Cho số phức $z = -3 - 2i$. Tổng phần thực và phần ảo của số phức z bằng

- A. -1 . B. $-i$. C. -5 . D. $-5i$.

Lời giải.

Số phức $z = -3 - 2i$ có phần thực bằng -3 , phần ảo bằng -2 . Tổng phần thực và phần ảo của số phức z là -5 .

Chọn đáp án **C**

□

Câu 203. Cho số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$). Tính mô-đun của số phức $\bar{z}$.

- A. $|\bar{z}| = a^2 + b^2$. B. $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$. C. $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 - b^2}$. D. $|\bar{z}| = \sqrt{a + b}$.

Lời giải.

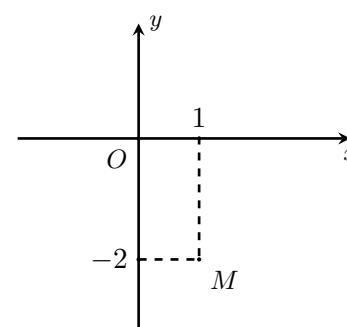
$|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 204.

Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức z . Tìm phần thực và phần ảo của số phức.



- A. Phần thực là 1 và phần ảo là $-2i$. B. Phần thực là -2 và phần ảo là 1.
C. Phần thực là -2 và phần ảo là i . D. Phần thực là 1 và phần ảo là -2 .

Lời giải.

Số phức z có phần thực là 1 và phần ảo là -2 .

Chọn đáp án **D**

□

Câu 205. Phần ảo của số phức $z = 2 - 3i$ là

- A. 2. B. 3. C. $3i$. D. -3 .

Lời giải.

Phần ảo của số phức $z = 2 - 3i$ là -3 .

Chọn đáp án **D**

□

Câu 206. Điểm biểu diễn của số phức $z = \frac{1}{2 - 3i}$ là

- A. $\left(\frac{2}{13}; \frac{3}{13}\right)$. B. $(4; -1)$. C. $(2; -3)$. D. $(3; -2)$.

Lời giải.

Ta có $z = \frac{1}{2 - 3i} = \frac{2 + 3i}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{2 + 3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$. Suy ra điểm biểu diễn của số phức $z = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$ là $\left(\frac{2}{13}; \frac{3}{13}\right)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 207. Cho số phức $z = 2 + i$. Tìm tọa độ điểm biểu diễn của số phức liên hợp của số phức z .

- A. $(-2; -1)$. B. $(-2; 1)$. C. $(2; 1)$. D. $(2; -1)$.

Lời giải.

Để thấy $\bar{z} = 2 - i$, điểm biểu diễn tương ứng có tọa độ là $(2; -1)$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 208. Tìm phần ảo của số phức $z = 3 - 2i$.

- A. $\text{Im}z = -2i$. B. $\text{Im}z = -2$. C. $\text{Im}z = 2$. D. $\text{Im}z = 3$.

Lời giải.

Để thấy $\text{Im}z = -2$.

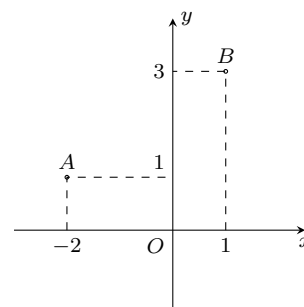
Chọn đáp án **B**

□

Câu 209.

Trong mặt phẳng Oxy , cho các điểm A, B như hình vẽ bên. Trung điểm của đoạn thẳng AB biểu diễn số phức

- A. $-1 + 2i$. B. $-\frac{1}{2} + 2i$. C. $2 - i$. D. $2 - \frac{1}{2}i$.



Lời giải.

Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là $\left(\frac{-1}{2}; 2\right)$. Khi đó $z = -\frac{1}{2} + 2i$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 210. Số phức liên hợp của số phức $z = 1 - 2i$ là

- A. $1 + 2i$. B. $-1 - 2i$. C. $2 - i$. D. $-1 + 2i$.

Lời giải.

Ta có $\bar{z} = 1 + 2i$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 211. Cho số phức $z = a + bi$ khác 0, $(a, b \in \mathbb{R})$. Tìm phần ảo của số phức z^{-1} .

- A. $\frac{-b}{a^2 + b^2}$. B. $\frac{b}{a^2 + b^2}$. C. $\frac{a}{a^2 + b^2}$. D. $\frac{-bi}{a^2 + b^2}$.

Lời giải.

Ta có $z^{-1} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$.

Phần ảo của số phức z^{-1} là $\frac{-b}{a^2 + b^2}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 212. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = -i$.

- A. i . B. -1 . C. 1 . D. $-i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của số phức là số phức có dạng $\bar{z} = a - bi$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 213. Phần ảo của số phức $z = 5 + 2i$ bằng

- A. 5 . B. $5i$. C. 2 . D. $2i$.

Lời giải.

Số phức $z = a + bi$ có phần ảo là b nên số phức $z = 5 + 2i$ có phần ảo là 2 .

Chọn đáp án **C**

□

Câu 214. Phần ảo của số phức $z = 2 - 3i$ là

- A. -3 . B. $-3i$. C. 2 . D. 3 .

Lời giải.

Phần ảo là -3 .

Chọn đáp án **A**

□

Câu 215. Tìm phần ảo của số phức $z = 8 - 12i$.

- A. -12 . B. 18 . C. 12 . D. $-12i$.

Lời giải.

Phần ảo của số phức $z = 8 - 12i$ là -12 .

Chọn đáp án **A**

□

Câu 216. Cho số phức $z = 2018 - 2017i$. Điểm M biểu diễn của số phức liên hợp của z là

- A. $M(-2018; 2017)$. B. $M(2018; -2017)$. C. $M(-2018; -2017)$. D. $M(2018; 2017)$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của $z = 2018 - 2017i$ là $\bar{z} = 2018 + 2017i$.

Suy ra điểm biểu diễn của $\bar{z}$ là $M(2018; 2017)$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 217. Phần ảo của số phức $z = 2 - 3i$ là

- A. $-3i$. B. 3 . C. -3 . D. $3i$.

Lời giải.

Phần thực của z bằng 2 và phần ảo của z bằng -3 .

Chọn đáp án **C**

□

Câu 218. Cho hai số phức $z_1 = -1 + 2i, z_2 = -1 - 2i$. Giá trị của biểu thức $|z_1|^2 + |z_2|^2$ bằng

- A. $\sqrt{10}$. B. 10 . C. -6 . D. 4 .

Lời giải.

Ta có $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}; |z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.

$|z_1|^2 + |z_2|^2 = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 = 10$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 219. Cho số phức $z = -3 + 4i$. Gọi M là điểm biểu diễn số phức $\bar{z}$. Tung độ của điểm M là

- A. 6 . B. 4 . C. -4 . D. -6 .

Lời giải.

$\bar{z} = -3 - 4i$ nên tung độ điểm M là -4 .

Chọn đáp án **C**

□

Câu 220. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = 1 - \pi i$.

- A. Phần thực là 1 và phần ảo là $-\pi$. B. Phần thực là 1 và phần ảo là π .
C. Phần thực là 1 và phần ảo là $-\pi i$. D. Phần thực là -1 và phần ảo là $-\pi$.

Lời giải.

— Theo định nghĩa số phức có dạng $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ thì có phần thực và phần ảo tương ứng là a và b .

— Vậy số phức $z = 1 - \pi i$ có phần thực là 1 và phần ảo là $-\pi$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 221. Tìm phần ảo của số phức $z = 5 - 8i$.

- A. 8 . B. $-8i$. C. 5 . D. -8 .

Lời giải.

Theo sách giáo khoa ta thấy z có phần ảo là -8 .

Chọn đáp án **D**

□

Câu 222. Điểm biểu diễn của các số phức $z = 7 + bi$ với $b \in \mathbb{R}$ nằm trên đường thẳng có phương trình là

- A. $y = 7$. B. $x = 7$. C. $y = x + 7$. D. $y = x$.

Lời giải.

Điểm biểu diễn của các số phức $z = 7 + bi$ với $b \in \mathbb{R}$ là $M(7; b)$. Dễ thấy các điểm $M(7; b)$ nằm trên đường thẳng $x = 7$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 223. Số phức liên hợp của số phức $z = 2 - 3i$ là

- A. $\bar{z} = 3 + 2i$. B. $\bar{z} = 3 - 2i$. C. $\bar{z} = 2 + 3i$. D. $\bar{z} = -2 + 3i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của $z = 2 - 3i$ là $\bar{z} = 2 + 3i$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 224. Cho mặt phẳng Oxy , điểm nào sau đây biểu diễn số phức $z = 2 + i$?

- A. $M(2; 0)$. B. $N(2; 1)$. C. $P(2; -1)$. D. $Q(1; 2)$.

Lời giải.

Xét $z = 2 + i \Rightarrow N(2; 1)$.

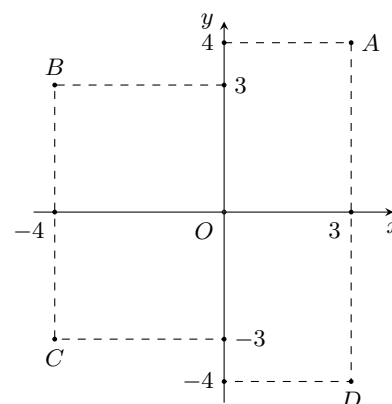
Chọn đáp án **B**

□

Câu 225.

Trên mặt phẳng tọa độ, số phức $z = 3 - 4i$ được biểu diễn bởi điểm nào trong các điểm A, B, C, D ?

- A. Điểm D . B. Điểm B . C. Điểm A . D. Điểm C .



Lời giải.

Trên mặt phẳng tọa độ, số phức $z = 3 - 4i$ được biểu diễn bởi điểm có tọa độ là $D(3; -4)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 226. Số phức $z = 2 - 3i$ có điểm biểu diễn là

- A. $N(-3; 2)$. B. $P(3; 2)$. C. $M(2; -3)$. D. $Q(2; 3)$.

Lời giải.

Điểm biểu diễn số phức $z = 2 - 3i$ là $M(2; -3)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 227. Trong mặt phẳng tọa độ, điểm $A(4; 5)$ là điểm biểu diễn số phức nào trong các số sau?

- A. $z = -4 + 5i$. B. $z = -4 - 5i$. C. $z = 4 - 5i$. D. $z = 4 + 5i$.

Lời giải.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 228. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm biểu diễn số phức $z = 2 - 3i$ là điểm

- A. $M(3; 2)$. B. $N(-3; 2)$. C. $P(2; -3)$. D. $Q(2; 3)$.

Lời giải.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm biểu diễn số phức $z = 2 - 3i$ là $P(2; -3)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 229. Mô-đun của số phức $z = 8 - 6i$ bằng

- A. 14. B. 2. C. 100. D. 10.

Lời giải.

Ta có $|z| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 230. Phần ảo của số phức $z = 1 - i$ là

- A. -1 . B. 1 . C. i . D. $-i$.

Lời giải.

Số phức $z = 1 - i$ có phần ảo là -1 .

Chọn đáp án **A**

□

Câu 231. Số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là số thuần ảo khi và chỉ khi

- A. $a = 0; b \neq 0$. B. $a \neq 0; b = 0$. C. $a = 0$. D. $b = 0$.

Lời giải.

Theo định nghĩa trong sách giáo khoa.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 232.

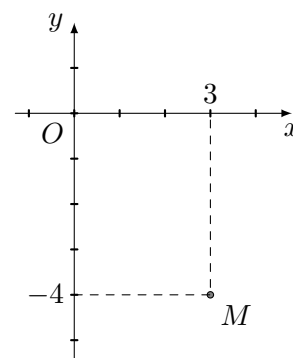
Số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) có điểm biểu diễn như hình vẽ bên. Tìm a, b .

A. $a = -4, b = 3$.

B. $a = 3, b = -4$.

C. $a = 3, b = 4$.

D. $a = -4, b = -3$.



Lời giải.

Từ hình vẽ suy ra $a = 3, b = -4$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 233.

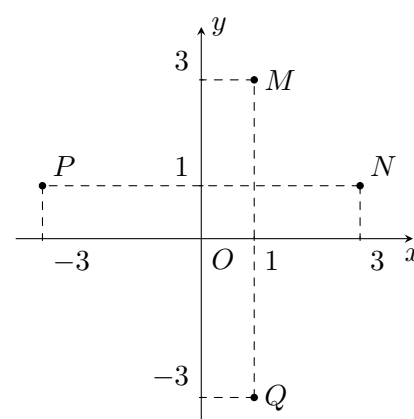
Điểm nào trong hình vẽ bên dưới là điểm biểu diễn số phức $z = 1 + 3i$

A. Điểm Q.

B. Điểm P.

C. Điểm M.

D. Điểm N.



Lời giải.

$z = 1 + 3i \Rightarrow$ Điểm biểu diễn của z có tọa độ là $M(1; 3)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 234. Mô-đun của số phức $z = -4 + 3i$ là

A. -1 .

B. 1 .

C. 5 .

D. 25 .

Lời giải.

Mô-đun của số phức là

$$|z| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5.$$

Chọn đáp án **C**

□

2 ĐÁP ÁN

1. D	2. A	3. C	4. B	5. C	6. A	7. A	8. D	9. B	10. B
11. C	12. A	13. C	14. D	15. A	16. A	17. A	18. A	19. C	20. C
21. B	22. C	23. D	24. A	25. A	26. B	27. B	28. C	29. A	30. C
31. A	32. A	33. B	34. C	35. D	36. A	37. A	38. A	39. B	40. C
41. A	42. A	43. A	44. D	45. A	46. B	47. A	48. A	49. A	50. C
51. B	52. A	53. A	54. D	55. D	56. D	57. C	58. B	59. C	60. B
61. B	62. C	63. A	64. C	65. A	66. C	67. C	68. B	69. A	70. A
71. A	72. A	73. A	74. C	75. C	76. A	77. A	78. A	79. C	80. B
81. C	82. C	83. B	84. B	85. B	86. A	87. B	88. D	89. A	90. B
91. D	92. C	93. D	94. C	95. D	96. C	97. A	98. B	99. B	100. B
101. D	102. A	103. A	104. A	105. C	106. C	107. B	108. D	109. B	110. D
111. B	112. C	113. A	114. D	115. A	116. B	117. B	118. B	119. B	120. A
121. B	122. A	123. D	124. B	125. D	126. A	127. A	128. C	129. B	130. C
131. A	132. D	133. C	134. B	135. A	136. D	137. C	138. C	139. D	140. C
141. C	142. C	143. C	144. C	145. B	146. C	147. C	148. B	149. C	150. D
151. B	152. C	153. C	154. B	155. B	156. C	157. C	158. A	159. C	160. B
161. A	162. C	163. B	164. D	165. A	166. A	167. C	168. C	169. A	170. C

171. C	172. C	173. D	174. B	175. D	176. D	177. C	178. D	179. B	180. B
181. A	182. C	183. C	184. A	185. D	186. C	187. A	188. A	189. D	190. D
191. A	192. C	193. A	194. A	195. D	196. B	197. B	198. B	199. A	200. A
201. B	202. C	203. B	204. D	205. D	206. A	207. D	208. B	209. B	210. A
211. A	212. A	213. C	214. A	215. A	216. D	217. C	218. B	219. C	220. A
221. D	222. B	223. C	224. B	225. A	226. C	227. D	228. C	229. D	230. A
231. C	232. B	233. C	234. C						

3 THÔNG HIỂU

Câu 1. Mô-đun số phức $z = 4 - 3i$ bằng

A. 7.

B. 5.

C. 1.

D. 25.

Lời giải.

Ta có $|z| = |4 - 3i| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 2. Cho số phức $z = 5 - 4i$. Số phức đối của z có tọa độ điểm biểu diễn là

A. $(-5; 4)$.B. $(5; -4)$.C. $(-5; -4)$.D. $(5; 4)$.

Lời giải.

Ta có $z = 5 - 4i \Leftrightarrow -z = -5 + 4i$.

Vậy tọa độ điểm biểu diễn của $-z$ là $(-5; 4)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 3. Cho số phức $z = 2 + 3i$. Phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$ lần lượt là

A. 2 và 3.

B. -2 và -3 .C. 2 và $-3i$.D. 2 và -3 .

Lời giải.

Ta có $z = 2 + 3i \Rightarrow \bar{z} = 2 - 3i$. Vậy phần thực của $\bar{z}$ là 2 và phần ảo của $\bar{z}$ là -3 .

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 4. Cho số phức $z = 6 + 7i$. Số phức liên hợp của z có điểm biểu diễn là điểm nào sau đây?

A. $M(6; -7)$.B. $N(-6; 7)$.C. $P(-6; -7)$.D. $Q(6; 7)$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của z là $\bar{z} = 6 - 7i$ nên được biểu diễn bởi $M(6; -7)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 5. Có bao nhiêu số phức z có phần thực bằng 2 và $|z + 1 - 2i| = 3$?

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải.

Gọi số phức z có phần thực bằng 2 là $z = 2 + bi$ với $b \in \mathbb{R}$.

Do $|z + 1 - 2i| = 3 \Leftrightarrow 9 + (b - 2)^2 = 9 \Leftrightarrow (b - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow b = 2$. Vậy $z = 2 + 2i$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 6. Tìm hai số thực x, y thỏa mãn $(3x + 2yi) + (3 - i) = 4x - 3i$, với i là đơn vị ảo.

A. $x = 3, y = -1$.B. $x = \frac{2}{3}, y = -1$.C. $x = 3, y = -3$.D. $x = -3, y = -1$.

Lời giải.

Ta có $(3x + 2yi) + (3 - i) = 4x - 3i \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3 = 4x \\ 2y - 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 7. Tìm các số thực x, y thỏa mãn $(3x - 2) + (2y + 1)i = (x + 1) - (y - 5)i$, với i là đơn vị ảo.

A. $x = \frac{3}{2}, y = -2$.B. $x = -\frac{3}{2}, y = -\frac{4}{3}$.C. $x = 1, y = \frac{4}{3}$.D. $x = \frac{3}{2}, y = \frac{4}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$(3x - 2) + (2y + 1)i = (x + 1) - (y - 5)i \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2 = x + 1 \\ 2y + 1 = -(y - 5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Vậy $x = \frac{3}{2}, y = \frac{4}{3}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 8. Tìm các số thực x, y thỏa mãn $3x + y + 5xi = 2y - 1 + (x - y)i$ với i là đơn vị ảo.

- A. $x = \frac{1}{7}; y = \frac{4}{7}$. B. $x = -\frac{2}{7}; y = \frac{4}{7}$. C. $x = -\frac{1}{7}; y = \frac{4}{7}$. D. $x = -\frac{1}{7}; y = -\frac{4}{7}$.

Lời giải.

Ta có đẳng thức đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 3x + y = 2y - 1 \\ 5x = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = -1 \\ 4x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{7} \\ y = \frac{4}{7} \end{cases}$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 9. Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 1 - 3i$. Gọi M là trung điểm của AB . Khi đó M biểu diễn cho số phức nào sau đây?

- A. $-i$. B. $2 - 2i$. C. $1 + i$. D. $1 - i$.

Lời giải.

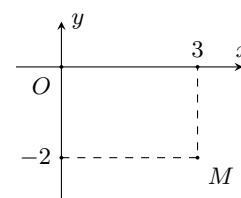
Ta có $A(1; 1), B(1; -3) \Rightarrow$ tọa độ của M là $M(1; -1) \Rightarrow M$ biểu diễn cho $z = 1 - i$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 10.

Cho số phức z có biểu diễn hình học là điểm M ở hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\bar{z} = -3 - 2i$. B. $\bar{z} = 3 + 2i$. C. $\bar{z} = 3 - 2i$. D. $\bar{z} = -3 + 2i$.



Lời giải.

Từ hình vẽ ta có $z = 3 - 2i$ nên suy ra $\bar{z} = 3 + 2i$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 11. Cho số phức $z = -3 + 4i$. Mô-đun của z là

- A. $|z| = 7$. B. $|z| = 4$. C. $|z| = 5$. D. $|z| = 3$.

Lời giải.

Ta có mô-đun của z là $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 12. Trong mặt phẳng Oxy , gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $z_1 = -3i, z_2 = 2 - 2i, z_3 = -5 - i$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Khi đó điểm G biểu diễn số phức

- A. $z = 2 - i$. B. $z = 1 - 2i$. C. $z = -1 - 2i$. D. $z = -1 - i$.

Lời giải.

Ta có: $A(0; -3); B(2; -2); C(-5; -1)$.

Gọi G là trọng tâm của tam giác $ABC \Rightarrow G(-1; -2)$.

Điểm G biểu diễn số phức $z = -1 - 2i$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 13. Biết rằng có duy nhất một cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn $(x + y) + (x - y)i = 5 + 3i$. Tính giá trị của $S = x + 2y$.

- A. $S = 4$. B. $S = 6$. C. $S = 5$. D. $S = 3$.

Lời giải.

Ta có

$$(x + y) + (x - y)i = 5 + 3i \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

Do đó $S = x + 2y = 4 + 2 \cdot 1 = 6$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 14. Nếu điểm $M(x; y)$ là điểm biểu diễn hình học của số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy thỏa mãn $OM = 4$ thì

- A. $|z| = \frac{1}{4}$. B. $|z| = 4$. C. $|z| = 16$. D. $|z| = 2$.

Lời giải.

Theo bài ra $OM = 4 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 4 \Rightarrow |z| = 4$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 15. Cho số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| = 3$. Tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ Oxy biểu diễn số phức $\omega = 1 + \bar{z}$ là

A. đường tròn tâm $I(-2; 1)$ bán kính $R = 3$.

B. đường tròn tâm $I(2; -1)$ bán kính $R = 3$.

C. đường tròn tâm $I(-1; -1)$ bán kính $R = 9$.

D. đường tròn tâm $I(-1; -1)$ bán kính $R = 3$.

Lời giải.

Gọi $\omega = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

+ Ta có $\omega = 1 + \bar{z} \Leftrightarrow x + yi = 1 + \bar{z} \Leftrightarrow \bar{z} = x - 1 + yi \Rightarrow z = x - 1 - yi$.

+ $|z + 2 - i| = 3 \Leftrightarrow |x - 1 - yi + 2 - i| = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} = 3 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = 9$.

Vậy tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ Oxy biểu diễn số phức $\omega = 1 + \bar{z}$ là đường tròn tâm $I(-1; -1)$ bán kính $R = 3$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{7}$.

A. Đường tròn tâm $O(0; 0)$, bán kính $R = \frac{7}{2}$.

B. Đường tròn tâm $O(0; 0)$, bán kính $R = 7$.

C. Đường tròn tâm $O(0; 0)$, bán kính $R = 49$.

D. Đường tròn tâm $O(0; 0)$, bán kính $R = \sqrt{7}$.

Lời giải.

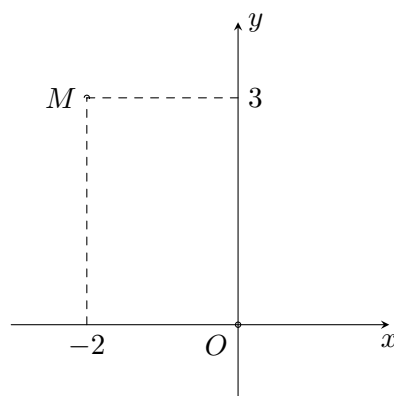
Gọi $M(x; y)$ là tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $z = x + yi$ $x, y \in \mathbb{R}$.

Theo giả thiết $|z| = \sqrt{7} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 7$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z là đường tròn tâm $O(0; 0)$, bán kính $R = \sqrt{7}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 17. Điểm M trong hình vẽ dưới đây biểu thị cho số phức z . Chọn khẳng định đúng.



A. $\bar{z} = -2 + 3i$.

B. $\bar{z} = 3 - 2i$.

C. $\bar{z} = -2 - 3i$.

D. $\bar{z} = 3 + 2i$.

Lời giải.

$z = -2 + 3i \Rightarrow \bar{z} = -2 - 3i$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 18. Cho số phức $z = -1 - 4i$. Tìm phần thực của số phức $\bar{z}$.

A. -4 .

B. -1 .

C. 1 .

D. 4 .

Lời giải.

Ta có $\bar{z} = -1 + 4i \Rightarrow$ Phần thực của số phức $\bar{z}$ là -1 .

Chọn đáp án **B** □

Câu 19. Cho các số phức z, z' có biểu diễn hình học lần lượt là các điểm M, M' trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Nếu $OM = 2OM'$ thì

A. $|z| = 2|z'|$.

B. $z' = 2z$.

C. $z = 2z'$.

D. $|z'| = 2|z|$.

Lời giải.

Ta có $|z| = OM, |z'| = OM'$. Do đó, nếu $OM = 2OM'$ thì $|z| = 2|z'|$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 20. Cho số phức $z = -2 - 5i$. Nếu z và z' là hai số phức liên hợp của nhau thì

A. $z' = \sqrt{(-2)^2 + 5^2}$.

B. $z' = 2 - 5i$.

C. $z' = 2 + 5i$.

D. $z' = -2 + 5i$.

Lời giải.

z' là số phức liên hợp của $z = -2 - 5i$ thì $z' = -2 + 5i$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 21. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $-1 - 2i, 4 - 4i, -3i$. Số phức biểu diễn trọng tâm tam giác ABC là

A. $-1 - 3i$.

B. $1 - 3i$.

C. $-3 + 9i$.

D. $3 - 9i$.

Lời giải.

Ta có $A(-1; -2), B(4; -4), C(0; -3)$ nên trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ là $G(1; -3)$. Do đó số phức biểu diễn điểm G là $1 - 3i$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 22.

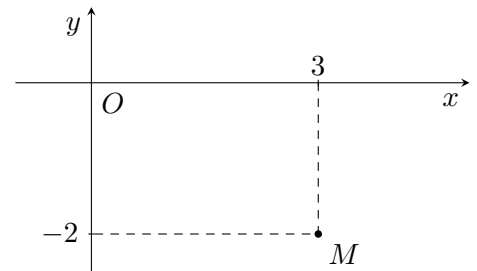
Cho số phức z có điểm biểu diễn là M trong hình vẽ bên. Gọi M' là điểm biểu diễn cho số phức $\bar{z}$. Tọa độ của điểm M' là

A. $M'(-3; -2)$.

B. $M'(3; 2)$.

C. $M'(-3; 2)$.

D. $M'(3; -2)$.



Lời giải.

Số phức z biểu diễn điểm M là $z = 3 - 2i$.

$\Rightarrow \bar{z} = 3 + 2i \Rightarrow M'(3; 2)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 23. Môđun của số phức $z = 4 - 3i$ bằng:

A. 25.

B. 5.

C. 4.

D. -3.

Lời giải.

Có $|z| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 24. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = 1 + i, z_2 = 8 + i, z_3 = 1 - 3i$ trong mặt phẳng phức Oxy . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\triangle MNP$ vuông.

B. $\triangle MNP$ đều.

C. $\triangle MNP$ cân.

D. $\triangle MNP$ vuông cân.

Lời giải.

Ta có $M(1; 1), N(8; 1), P(1; -3)$.

Dễ dàng tính được $MN = 7, NP = \sqrt{65}, MP = 4$ và $MN^2 + MP^2 = NP^2$.

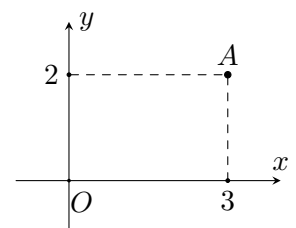
Vậy tam giác MNP vuông tại M .

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 25.

Cho số phức z có điểm biểu diễn là điểm A trong hình vẽ. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$.



A. Phần thực bằng 3, phần ảo bằng -2.

B. Phần thực bằng 3, phần ảo bằng 2.

C. Phần thực bằng 2, phần ảo bằng $-3i$.

D. Phần thực bằng 3, phần ảo bằng $2i$.

Lời giải.

$z = 3 + 2i \Rightarrow \bar{z} = 3 - 2i$.

Chọn đáp án **(A)**

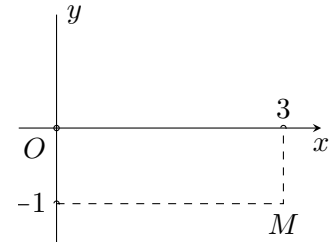
□

Câu 26.

Điểm M trong hình là điểm biểu diễn số phức nào?

A. $z = (1 + 2i)(1 - i)$.
C. $z = \frac{1 + i}{1 - i}$.

B. $2z - 6 = (1 - i)^2$.
D. $z = (1 + i)(2 - 3i)$.



Lời giải.

Điểm M là điểm biểu diễn số phức $z = 3 - i$, do đó:

- ① $z = (1 + 2i)(1 - i) = 3 + i$ loại.
② $2z - 6 = (1 - i)^2 = -2i \Rightarrow z = 3 - i$ thỏa mãn.
③ $z = \frac{1 + i}{1 - i} = \frac{(1 + i)^2}{2} = i$ loại.
④ $z = (1 + i)(2 - 3i) = 5 - i$ loại.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 27. Cho số phức z thỏa mãn $(2 + 3i)z = z - 1$. Môđun của z bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

B. $\frac{1}{10}$.

C. 1.

D. $\sqrt{10}$.

Lời giải.

$$(2 + 3i)z = z - 1 \Leftrightarrow (1 + 3i)z = -1 \Leftrightarrow |1 + 3i| \cdot |z| = 1 \Rightarrow |z| = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 28.

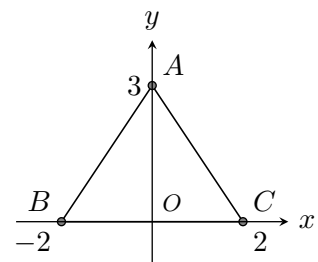
Cho tam giác ABC như hình vẽ. Biết trọng tâm G của tam giác ABC là điểm biểu diễn của số phức z . Tìm phần ảo của số phức $\bar{z}$.

A. 1.

B. -1.

C. $-i$.

D. i .



Lời giải.

Theo giả thiết, ta có $A(0; 3)$, $B(-2; 0)$, $C(2; 0)$.

Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là $G(0; 1)$ nên $z = i \Rightarrow \bar{z} = -i$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 29.

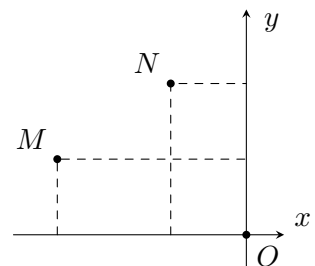
Gọi M và N lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z_1 , z_2 khác 0. Khi đó khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $|z_1 + z_2| = MN$.

B. $|z_2| = ON$.

C. $|z_1 - z_2| = MN$.

D. $|z_1| = OM$.



Lời giải.

Gọi $z_1 = a_1 + b_1i \Rightarrow M(a_1, b_1)$, $z_2 = a_2 + b_2i \Rightarrow N(a_2, b_2)$.

Ta có $|z_1 + z_2| = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}$.

Mà $MN = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$. Suy ra $|z_1 + z_2| \neq MN$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 30. Cho số phức $z = 1 + 2i$. Điểm biểu diễn của số phức $\bar{z}$ là

A. $M(-1; 2)$.

B. $M(-1; -2)$.

C. $M(1; -2)$.

D. $M(2; 1)$.

Lời giải.

$\bar{z} = 1 - 2i$. Suy ra điểm biểu diễn của số phức $\bar{z}$ là $M(1; -2)$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 31. Cho số phức $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$, ($\varphi \in \mathbb{R}$). Tìm mô-đun của z .

- A. $|\cos \varphi| + |\sin \varphi|$. B. 1. C. $|\cos \varphi + \sin \varphi|$. D. $|\cos 2\varphi|$.

Lời giải.

Ta có $z = \cos \varphi + i \sin \varphi = 1 (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ nên $r = 1$.

Vậy $|z| = 1$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 32. Tính mô-đun của số phức z thỏa mãn $(2 + i)z + \frac{15 - 5i}{1 - i} = 20$.

- A. $|z| = 5$. B. $|z| = 7$. C. $|z| = \sqrt{5}$. D. $|z| = 1$.

Lời giải.

Ta có $(2 + i)z + \frac{15 - 5i}{1 - i} = 20 \Leftrightarrow z = 3 - 4i \Rightarrow |z| = 5$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 33. Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $A(2; -3)$ biểu diễn số phức z_A , điểm B biểu diễn số phức $z_B = (1 + i)z_A$. Tính diện tích S của tam giác OAB .

- A. $S = \frac{11}{2}$. B. $S = \frac{13}{2}$. C. $S = \frac{17}{2}$. D. $S = \frac{15}{2}$.

Lời giải.

Ta có $z_A = 2 - 3i \Rightarrow z_B = 5 - i \Rightarrow B(5; -1)$.

Trong không gian $Oxyz$, ta có $\begin{cases} \overrightarrow{OA} = (2; -3; 0) \\ \overrightarrow{OB} = (5; -1; 0) \end{cases} \Rightarrow S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}| = \frac{13}{2}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 34. Cho các số phức $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = -2 + 2i$, $z_3 = -1 - i$ được biểu diễn lần lượt bởi các điểm A, B, C trên mặt phẳng phức. Gọi M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Khi đó điểm M biểu diễn số phức

- A. $z = 6i$. B. $z = -6i$. C. $z = 2$. D. $z = -2$.

Lời giải.

Tọa độ $A(1; 3)$, $B(-2; 2)$, $C(-1; -1)$. Gọi tọa độ điểm $M(x; y)$.

$\overrightarrow{AM} = (x - 1; y - 3)$, $\overrightarrow{AB} = (-3; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-2; -4)$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = -3 - (-2) \\ y - 3 = (-1) - (-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow z = 6i$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2i| = |\bar{z} + 3i|$. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng có phương trình

- A. $6x + 4y - 5 = 0$. B. $6x - 4y = 0$. C. $6x - 4y + 5 = 0$. D. $6x + 4y + 5 = 0$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, ta có $|z - 2i| = |\bar{z} + 3i| \Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 = y^2 + (x + 3)^2 \Leftrightarrow 6x + 4y + 5 = 0$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 36. Cho số phức z thay đổi, thỏa mãn $|z - i| = |z - 1 + 2i|$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $\omega = z + 2i$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Phương trình đường thẳng đó là

- A. $x - 4y + 3 = 0$. B. $x + 3y + 4 = 0$. C. $x - 3y + 4 = 0$. D. $-x + 3y + 4 = 0$.

Lời giải.

Đặt $\omega = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó, $z = \omega - 2i = x + (y - 2)i$. Suy ra $|z - i| = |z - 1 + 2i| \Leftrightarrow |x + (y - 3)i| = |x - 1 + yi|$, hay tương đương với $x^2 + (y - 3)^2 = (x - 1)^2 + y^2 \Leftrightarrow x - 3y + 4 = 0$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 37.

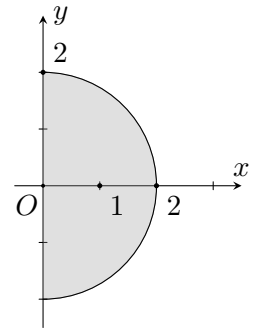
Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ là nửa hình tròn tâm $O(0; 0)$ bán kính $R = 2$ (phần tô đậm, kể cả đường giới hạn) như hình bên. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

A. $x \geq 0$ và $|z| = \sqrt{2}$.

B. $y \geq 0$ và $|z| = 2$.

C. $x \geq 0$ và $|z| \leq 2$.

D. $y \geq 0$ và $|z| \leq 2$.



Lời giải.

Dựa vào hình vẽ trên ta thấy số phức z có phần thực không âm và $|z| \leq 2$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 38. Cho số phức $z = 5 - 4i$. Số phức liên hợp của z có điểm biểu diễn M là

A. $M(-5; -4)$.

B. $M(5; -4)$.

C. $M(5; 4)$.

D. $M(-5; 4)$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của z là $\bar{z} = 5 + 4i$ suy ra $M(5; 4)$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 39. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 2 - i| = 2$ là

A. đường tròn $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

B. đường tròn tâm $I(2; -1)$ và bán kính $R = 2$.

C. đường thẳng $x - y - 2 = 0$.

D. đường thẳng $x + y - 2 = 0$.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi đó $|z + 2 - i| = 2 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 2 - i| = 2$ là đường tròn $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 40. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp điểm biểu diễn số phức z có phần thực bằng 3 là đường thẳng có phương trình

A. $x = -3$.

B. $x = 1$.

C. $x = -1$.

D. $x = 3$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Do z có phần thực bằng 3 nên $x = 3$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 41. Cho số phức $z = a + (a - 5)i$ với $a \in \mathbb{R}$. Tìm a để điểm biểu diễn của số phức nằm trên đường phân giác của góc phần tư thứ hai và thứ tư

A. $a = -\frac{1}{2}$.

B. $a = \frac{5}{2}$.

C. $a = 0$.

D. $a = \frac{3}{2}$.

Lời giải.

Để thỏa mãn bài toán suy ra $a - 5 = -a \Leftrightarrow 2a - 5 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{5}{2}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 42. Cho cho hai số phức $z = 3 + 2i$ và $w = 3 - 2i$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. $|z| > |w|$.

B. $|z| = |w|$.

C. Nếu A và B theo thứ tự là hai điểm biểu diễn của z và w trên hệ tọa độ Oxy thì $AB = |z - w|$.

D. Số phức z là số phức liên hợp của số phức w .

Lời giải.

Do $|z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ và $|w| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$ nên $|z| = |w|$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 43. Tìm hai số thực x, y thỏa mãn $2 + (5 - y)i = (x - 1) + 5i$.

A. $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = -6 \\ y = 3 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases}$.

Lời giải.

$$2 + (5 - y)i = (x - 1) + 5i \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = x - 1 \\ 5 - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 44. Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm A là điểm biểu diễn số phức $z = 1 + 2i$, B là điểm thuộc đường thẳng $y = 2$ sao cho tam giác OAB cân tại O . Điểm B là điểm biểu diễn của số phức nào trong các số phức dưới đây?

- A. $-3 + 2i$. B. $-1 + 2i$. C. $3 + 2i$. D. $1 - 2i$.

Lời giải.

$z = 1 + 2i \Rightarrow A(1; 2)$; điểm B thuộc đường thẳng $y = 2 \Rightarrow B(a; 2)$. Tam giác OAB cân tại $O \Leftrightarrow OA = OB \Leftrightarrow 5 = a^2 + 4 \Leftrightarrow a = \pm 1$. Vậy điểm B biểu diễn cho số phức $z = \pm 1 + 2i$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 45. Tìm tất cả các số thực x, y sao cho $x^2 - 2 + yi = -2 + 5i$.

- A. $x = 0, y = 5$. B. $x = -2, y = 5$. C. $x = 2, y = 5$. D. $x = 2, y = -5$.

Lời giải.

Ta có $x^2 - 2 + yi = -2 + 5i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2 = -2 \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 46. Trên mặt phẳng phức, cho điểm A biểu diễn số phức $-2 + 3i$, điểm B biểu diễn số phức $4 - 5i$. Gọi M là trung điểm của AB . Khi đó, điểm M biểu diễn số phức nào trong các số phức sau

- A. $3 - 4i$. B. $3 + 4i$. C. $1 + i$. D. $1 - i$.

Lời giải.

Ta có $A(-2; 3)$, $B(4; -5)$. M là trung điểm của $AB \Rightarrow M(1; -1)$. Vậy M biểu diễn số phức $1 - i$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 47. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = (1 - i)(3 + 2i)$.

- A. $\bar{z} = -5 + i$. B. $\bar{z} = 5 - i$. C. $\bar{z} = 5 + i$. D. $\bar{z} = -5 - i$.

Lời giải.

Ta có $z = (1 - i)(3 + 2i) = 5 - i$, suy ra $\bar{z} = 5 + i$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 48. Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z trong mặt phẳng tọa độ, N là điểm đối xứng của M qua Oy (M, N không thuộc các trục tọa độ). Số phức ω có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là N . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\omega = -z$. B. $\omega = -\bar{z}$. C. $\omega = \bar{z}$. D. $|\omega| > |z|$.

Lời giải.

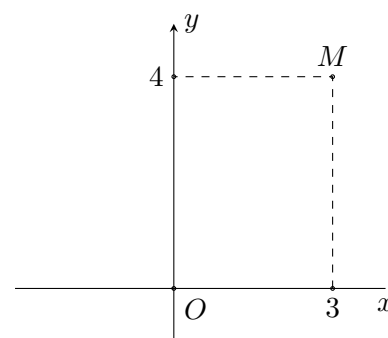
Giả sử $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$, N là điểm đối xứng của M qua Oy . Khi đó $N(-x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $\omega = -x + yi = -(x - yi) = -\bar{z}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 49.

Trong mặt phẳng phức, cho điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức z . Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**?

- A. Số phức z có phần ảo bằng 4. B. $\bar{z} = 3 - 4i$.
C. $|z| = 5$. D. $z - \bar{z} = 6$.



Lời giải.

Ta có $z = 3 + 4i \Rightarrow \bar{z} = 3 - 4i$, do đó $z - \bar{z} = 8i$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 50. Tìm các số thực x, y thỏa mãn $(x + y) + (2x - y)i = 3 - 6i$.

- A. $x = -1; y = -4$. B. $y = -1; x = 4$. C. $x = -1; y = 4$. D. $x = 1; y = -4$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}$.

Chọn đáp án **C** ☐

Câu 51. Mô-đun của số phức $z = m - 2i$ ($m \in \mathbb{R}$) là

- A. $\sqrt{m^2 - 2}$. B. $\sqrt{m^2 + 2}$. C. $\sqrt{m^2 - 4}$. D. $\sqrt{m^2 + 4}$.

Lời giải.

Ta có $|z| = \sqrt{m^2 + 4}$.

Chọn đáp án **D** ☐

Câu 52. Trong mặt phẳng Oxy , điểm biểu diễn số phức $z = -3 + 4i$ là

- A. $M(3; -4)$. B. $M(-3; -4)$. C. $M(-3; 4)$. D. $M(3; 4)$.

Lời giải.

$M(-3; 4)$ là điểm biểu diễn số phức $z = -3 + 4i$.

Chọn đáp án **C** ☐

Câu 53. Cho số phức $z = 5 - 4i$. Tính mô-đun của số phức $\bar{z}$.

- A. 3. B. 1. C. 9. D. $\sqrt{41}$.

Lời giải.

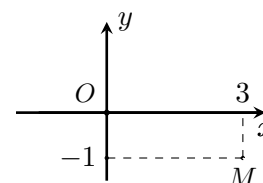
Ta có $\bar{z} = 5 + 4i$, suy ra $|\bar{z}| = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$.

Chọn đáp án **D** ☐

Câu 54.

Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức

- A. $z = 1 - 3i$. B. $z = -1 + 3i$. C. $z = 3 + i$. D. $z = 3 - i$.



Lời giải.

Điểm $M(3; -1)$ là biểu diễn cho số phức $z = 3 - i$.

Chọn đáp án **D** ☐

Câu 55. Cho số phức $z = 2i - 8$. Số phức liên hợp của z là

- A. $\bar{z} = 2i + 8$. B. $\bar{z} = -2i + 8$. C. $\bar{z} = 2i - 8$. D. $\bar{z} = -2i - 8$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của z là $\bar{z} = -2i - 8$.

Chọn đáp án **D** ☐

Câu 56. Trong mặt phẳng phức cho các điểm $A(-4; 1)$, $B(1; 3)$, $C(-6; 0)$ lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2, z_3 . Trọng tâm G của tam giác ABC là điểm biểu diễn của số phức nào sau đây?

- A. $-3 + \frac{4}{3}i$. B. $3 + \frac{4}{3}i$. C. $3 - \frac{4}{3}i$. D. $-3 - \frac{4}{3}i$.

Lời giải.

Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là $\begin{cases} x_G = -3 \\ y_G = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(-3; \frac{4}{3}\right)$ là điểm biểu diễn của số phức $-3 + \frac{4}{3}i$.

Chọn đáp án **A** ☐

Câu 57. Cho số phức $z = \sqrt{7} - 3i$. Tính $|z|$.

- A. $|z| = 5$. B. $|z| = 3$. C. $|z| = 4$. D. $|z| = 16$.

Lời giải.

Ta có $|z| = \sqrt{(\sqrt{7})^2 + (3)^2} = 4$.

Chọn đáp án **C** ☐

Câu 58. Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm điểm biểu diễn của số phức $w = z + i\bar{z}$.

- A. $M(1; 1)$. B. $M(1; -5)$. C. $M(5; -5)$. D. $M(5; 1)$.

Lời giải.

Ta có $w = 3 - 2i + i(3 + 2i) \Leftrightarrow w = 3 - 2i + 3i - 2 \Leftrightarrow w = 1 + i$.

Chọn đáp án **A** ☐

Câu 59. Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = (1-i)(2+i)$, $z_2 = 1+3i$, $z_3 = -1-3i$. Tam giác ABC là

A. Một tam giác vuông cân.

B. Một tam giác cân (không đều).

C. Một tam giác vuông (không cân).

D. Một tam giác đều.

Lời giải.

Ta có $z_1 = 3-i$, $z_2 = 1+3i$, $z_3 = -1-3i$. Điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2, z_3 lần lượt là $A(3; -1)$, $B(1; 3)$, $C(-1; -3)$.

$\Rightarrow AB = \sqrt{(1-3)^2 + (3+1)^2} = 2\sqrt{5}$. Tương tự $BC = 2\sqrt{10}$, $CA = 2\sqrt{5}$. Do $AB = AC (= 2\sqrt{5})$ và $AB^2 + AC^2 = BC^2$ nên tam giác ABC là tam giác vuông cân.

Chọn đáp án **A** □

Câu 60. Cho số phức z có phần ảo âm và thỏa mãn $z^2 - 3z + 5 = 0$. Tìm mô-đun của số phức $\omega = 2z - 3 + \sqrt{14}$.

A. $\sqrt{24}$.

B. $\sqrt{17}$.

C. 4.

D. 5.

Lời giải.

Ta có phương trình $z^2 - 3z + 5 = 0$ có hai nghiệm là $z = \frac{3 + \sqrt{11}i}{2}$ và $z = \frac{3 - \sqrt{11}i}{2}$.

$\Rightarrow \omega = \sqrt{14} \pm \sqrt{11}i$.

$\Rightarrow |\omega| = \sqrt{14 + 11} = \sqrt{25} = 5$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 61. Cho số phức $z = a + a^2i$ với $a \in \mathbb{R}$. Khi đó điểm biểu diễn của số phức liên hợp của z nằm trên đường nào?

A. Đường thẳng $y = -x + 1$.

B. Đường thẳng $y = 2x$.

C. Parabol $y = x^2$.

D. Parabol $y = -x^2$.

Lời giải.

Điểm biểu diễn của số phức liên hợp $\bar{z}$ là $M(a; -a^2)$. Do đó điểm M thuộc $y = -x^2$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 62. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Mệnh đề nào dưới đây luôn đúng?

A. $z - \bar{z} = 2a$.

B. $z\bar{z} = a^2 - b^2$.

C. $z + \bar{z} = 2bi$.

D. $|z^2| = |z|^2$.

Lời giải.

Dễ thấy $|z^2| = |z|^2$ với mọi số phức z .

Chọn đáp án **D** □

Câu 63. Số phức z nào sau đây thỏa mãn $|z| = \sqrt{5}$ và z là số thuần ảo?

A. $z = \sqrt{5}$.

B. $z = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$.

C. $z = 5i$.

D. $z = -\sqrt{5}i$.

Lời giải.

Vì z là số thuần ảo nên ta đặt $z = bi \Rightarrow |z| = |b| = \sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} b = \sqrt{5} \\ b = -\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \sqrt{5}i \\ z = -\sqrt{5}i \end{cases}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 64. Điểm $M(3; -4)$ là điểm biểu diễn của số phức z , số phức liên hợp của z là

A. $\bar{z} = 3 - 4i$.

B. $\bar{z} = -3 + 4i$.

C. $\bar{z} = 3 + 4i$.

D. $\bar{z} = -3 - 4i$.

Lời giải.

Ta có $z = 3 - 4i$ suy ra $\bar{z} = 3 + 4i$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 65. Cho số phức $z = 6 + 7i$. Số phức liên hợp của z trong mặt phẳng (Oxy) có điểm biểu diễn hình học là

A. $(6; 7)$.

B. $(6; -7)$.

C. $(-6; 7)$.

D. $(-6; -7)$.

Lời giải.

Ta có $z = 6 + 7i \Rightarrow \bar{z} = 6 - 7i \Rightarrow$ Điểm biểu diễn hình học của $\bar{z}$ là $M(6; -7)$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 66. Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 5 - i$. Tính độ dài đoạn thẳng AB .

A. $\sqrt{37}$.

B. 5.

C. 25.

D. $\sqrt{5} + \sqrt{26}$.

Lời giải.

Ta có $z_1 = 1 + 2i \Rightarrow A(1; 2)$ và $z_2 = 5 - i \Rightarrow B(5; -1)$.

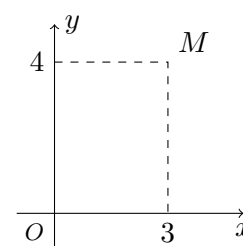
Suy ra $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 67.

Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z . Tìm phần thực và phần ảo của số phức z .

- A. Phần thực là 4 và phần ảo là 3. B. Phần thực là 3 và phần ảo là $4i$.
C. Phần thực là 3 và phần ảo là 4. D. Phần thực là 4 và phần ảo là $3i$.



Lời giải.

Điểm $M(3; 4)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = 3 + 4i$.

Chọn đáp án **(C)**

Câu 68. Cho số phức z thỏa mãn $z(1 + i) = 3 - 5i$. Tính môđun của z .

- A. $|z| = 4$. B. $|z| = \sqrt{17}$. C. $|z| = 17$. D. $|z| = 16$.

Lời giải.

Ta có $z(1 + i) = 3 - 5i \Leftrightarrow z = \frac{3 - 5i}{1 + i} = \frac{(3 - 5i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = -1 - 4i$. Suy ra $|z| = \sqrt{17}$.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 69. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi M, N, P lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 8 + i$, $z_3 = 1 - 3i$. Khẳng định nào sau đây là một mệnh đề đúng?

- A. Tam giác MNP cân, không vuông. B. Tam giác MNP đều.
C. Tam giác MNP vuông, không cân. D. Tam giác MNP vuông cân.

Lời giải.

Ta có $M(1; 1)$, $N(8; 1)$, $P(1; -3)$.

nên $\overrightarrow{MN} = (7; 0)$; $\overrightarrow{MP} = (0; -4)$; $\overrightarrow{NP} = (-7; -4)$ và $MN = 7$; $MP = 4$; $NP = \sqrt{65}$.

Ngoài ra $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$ nên tam giác MNP vuông tại M nhưng không cân.

Chọn đáp án **(C)**

Câu 70. Cho số phức $z = 5 - 4i$. Môđun của số phức z bằng

- A. 3. B. 9. C. $\sqrt{41}$. D. 1.

Lời giải.

Ta có $|z| = \sqrt{5^2 + (-4)^2} = \sqrt{41}$.

Chọn đáp án **(C)**

Câu 71. Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z} - 3 + i = 0$. Môđun của z bằng bao nhiêu?

- A. $\sqrt{10}$. B. 10. C. $\sqrt{3}$. D. 4.

Lời giải.

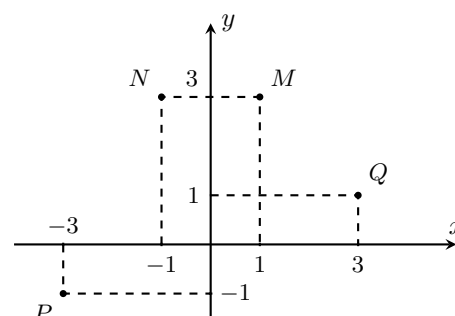
Ta có $|z| = |\bar{z}| = |3 - i| = \sqrt{10}$.

Chọn đáp án **(A)**

Câu 72.

Điểm nào trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức $z = (1 + i)(2 - i)$?

- A. P . B. M . C. N . D. Q .



Lời giải.

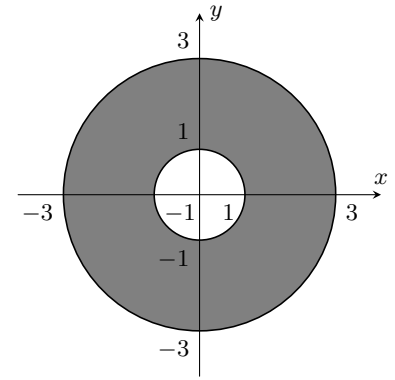
Ta có: $z = 2 - i + 2i - i^2 = 3 + i$.

Chọn đáp án **(D)**

Câu 73. Trong mặt phẳng tọa độ, tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $1 \leq |z| \leq 3$ là một hình phẳng có diện tích là

A. 2π .B. 4π .C. 8π .D. π .**Lời giải.**

Phần hình phẳng cần tính diện tích là phần nằm giữa hai hình tròn đồng tâm có bán kính lần lượt là 1 và 3, như vậy diện tích cần tìm là $S = \pi \cdot 3^2 - \pi \cdot 1^2 = 9\pi - \pi = 8\pi$.

Chọn đáp án **C**

□

4 ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. D	4. A	5. D	6. A	7. D	8. C	9. D	10. B
11. C	12. C	13. B	14. B	15. D	16. D	17. C	18. B	19. A	20. D
21. B	22. B	23. B	24. A	25. A	26. B	27. A	28. B	29. A	30. C
31. B	32. A	33. B	34. A	35. D	36. C	37. C	38. C	39. A	40. D
41. B	42. A	43. A	44. B	45. A	46. D	47. C	48. B	49. D	50. C
51. D	52. C	53. D	54. D	55. D	56. A	57. C	58. A	59. A	60. D
61. D	62. D	63. D	64. C	65. B	66. B	67. C	68. B	69. C	70. C
71. A	72. D	73. C							

5 VẬN DỤNG THẤP

Câu 1. Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1$; $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$. Tính $|z_1 - z_2|$.

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải.

Giả sử M, N lần lượt là điểm biểu diễn của số phức z_1, z_2 .

Theo bài ra ta có $OM = ON = 1$ và $|\vec{OM} + \vec{ON}| = \sqrt{3}$.

Do đó $3 = |\vec{OM} + \vec{ON}|^2 = OM^2 + ON^2 + 2\vec{OM} \cdot \vec{ON} \Rightarrow 2\vec{OM} \cdot \vec{ON} = 3 - 1 - 1 = 1$.

Ta có $|z_1 - z_2| = |\vec{OM} - \vec{ON}| = \sqrt{(\vec{OM} - \vec{ON})^2} = \sqrt{OM^2 + ON^2 - 2\vec{OM} \cdot \vec{ON}} = 1$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 2. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $1 \leq |z| \leq 2$ là một hình phẳng có diện tích bằng

A. π .B. 2π .C. 4π .D. 3π .**Lời giải.**

Đặt $z = x + yi$ với x, y là các số thực. Theo giả thiết, ta có

$$1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4.$$

Gọi $(C_1), (C_2)$ lần lượt là đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4$. Khi đó, $(C_1), (C_2)$ có tâm $O(0; 0)$, bán kính lần lượt là $R_1 = 1$ và $R_2 = 2$.

Hình phẳng cần tìm chính là vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn (C_1) và (C_2) .

Gọi S là diện tích vành khăn, suy ra

$$S = \pi R_2^2 - \pi R_1^2 = 4\pi - \pi = 3\pi.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 3. Cho số phức $z = m + 3 + (m^2 - 1)i$, với m là tham số thực thay đổi. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thuộc đường cong (C) . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành.

A. $\frac{8}{3}$.B. $\frac{4}{3}$.C. $\frac{1}{3}$.D. $\frac{2}{3}$.**Lời giải.**

Điểm $M(m+3; m^2-1)$ là điểm biểu diễn số phức $z = m+3 + (m^2-1)i$.

Đặt $x = m+3$; $y = m^2-1$, ta có $y = (x-3)^2-1 = x^2-6x+8$. Suy ra điểm M thuộc đường $(C): y = x^2-6x+8$.
Hoàn chỉnh giao điểm của (C) và trục hoành là nghiệm của phương trình

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4. \end{cases}$$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành là

$$S = \int_2^4 |x^2 - 6x + 8| dx = \frac{4}{3}.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 4. Gọi A, B, C, D lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $1+2i, 1+\sqrt{3}+i, 1+\sqrt{3}-i, 1-2i$ trên mặt phẳng tọa độ. Biết tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong một đường tròn, tâm của đường tròn đó biểu diễn số phức có phần thực là

A. $\sqrt{3}$.

B. 2.

C. $\sqrt{2}$.

D. 1.

Lời giải.

Ta có $A(1; 2), B(1+\sqrt{3}; 1), C(1+\sqrt{3}; -1), D(1; -2)$.

Khi đó $\overrightarrow{BA} = (-\sqrt{3}; 1), \overrightarrow{BD} = (-\sqrt{3}; -3)$ suy ra $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow \triangle ABD$ vuông tại B .

$\overrightarrow{CA} = (-\sqrt{3}; 3), \overrightarrow{CD} = (-\sqrt{3}; -1)$ suy ra $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow \triangle ACD$ vuông tại C .

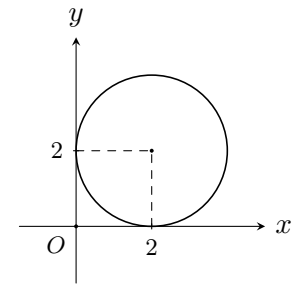
Do đó tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ là trung điểm đoạn AD có tọa độ $I(1; 0)$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 5.

Trong mặt phẳng tọa độ, đường tròn tô đậm như hình vẽ bên là tập hợp điểm biểu diễn số phức z . Hỏi số phức z thỏa mãn đẳng thức nào sau đây ?



A. $|z - 2 - 2i| = 2$.

B. $|z - 2| = 2$.

C. $|z - 1 - 2i| = 2$.

D. $|z - 2i| = 2$.

Lời giải.

z thuộc đường tròn tâm $I(2; 2)$ bán kính 2. Do đó $|z - 2 - 2i| = 2$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 6. Cho số phức z thỏa $|z - 1| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (1 + i\sqrt{3})z + 2$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r = 9$.

B. $r = 16$.

C. $r = 25$.

D. $r = 4$.

Lời giải.

$w - 3 - i\sqrt{3} = (1 + i\sqrt{3})(z - 1)$.

Suy ra $|w - 3 - i\sqrt{3}| = |(1 + i\sqrt{3})(z - 1)| = 4$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn bán kính 4.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 7. Cho số phức z , biết rằng các điểm biểu diễn hình học của số phức z, iz và $z + iz$ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 18. Tính mô-đun của số phức z .

A. $|z| = 2\sqrt{3}$.

B. $|z| = 3\sqrt{2}$.

C. $|z| = 6$.

D. $|z| = 9$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$, ta có

$iz = i(x + yi) = -y + xi$ và $z + iz = x + yi - y + xi = x - y + (x + y)i$.

Gọi $A(x; y), B(-y; x), C(x - y; x + y)$ là các điểm biểu diễn của $z, iz, z + iz$.

Ta có $AB = \sqrt{(-x-y)^2 + (x-y)^2}, AC = \sqrt{(-y)^2 + x^2}, BC = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại C .

Khi đó $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = 18 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 6 = |z|$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 8. Hỏi có bao nhiêu số phức z thỏa đồng thời các điều kiện $|z - i| = 5$ và z^2 là số thuần ảo?

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 4.

Lời giải.

Đặt $z = x + iy$ (với $x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có $|z - i| = 5 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 25. \quad (*)$

z^2 là số thuần ảo, suy ra $x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -y. \end{cases}$

Với $x = y$ thay vào $(*)$ ta được $x^2 + (x - 1)^2 = 25 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -3. \end{cases}$

Với $x = -y$ thay vào $(*)$ ta được $x^2 + (x + 1)^2 = 25 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 3. \end{cases}$

Vậy có 4 số phức cần tìm là $4 + 4i, -3 - 3i, -4 + 4i, 3 - 3i$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 9. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|\bar{z} - (3 - 4i)| = 2$ là

A. Đường tròn tâm $I(3; 4)$, bán kính $R = 2$.

B. Đường tròn tâm $I(-3; -4)$, bán kính $R = 2$.

C. Đường tròn tâm $I(3; -4)$, bán kính $R = 2$.

D. Đường tròn tâm $I(-3; 4)$, bán kính $R = 2$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = a - bi$.

Theo giả thiết $|\bar{z} - (3 - 4i)| = 2 \Leftrightarrow |a - bi - (3 - 4i)| = 2 \Leftrightarrow (a - 3)^2 + (b - 4)^2 = 4$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(3; 4)$, bán kính $R = 2$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 10. Cho số phức z thỏa mãn $|2z - 1| = |\bar{z} + 1 + i|$ và điểm biểu diễn của z trên mặt phẳng tọa độ thuộc đường tròn có tâm $I(1; 1)$, bán kính $R = \sqrt{5}$. Khi đó tích mô-đun của tất cả các số phức z thỏa mãn các yêu cầu trên là?

A. $\sqrt{5}$.

B. 3.

C. $3\sqrt{5}$.

D. 1.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned} |2(a + bi) - 1| &= |a - bi + 1 + i| \\ \Leftrightarrow |(2a - 1) + 2bi| &= |(a + 1) - (b - 1)i| \\ \Leftrightarrow (2a - 1)^2 + (2b)^2 &= (a + 1)^2 + (b - 1)^2 \\ \Leftrightarrow 3a^2 + 3b^2 - 6a + 2b - 1 &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Vì điểm biểu diễn của z trên mặt phẳng tọa độ thuộc đường tròn tâm $I(1; 1)$, $R = \sqrt{5}$ nên ta có

$$\begin{aligned} (a - 1)^2 + (b - 1)^2 &= 5 \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2a - 2b &= 3 \\ \Leftrightarrow a^2 - 2a &= 3 - b^2 + 2b. \end{aligned} \quad (2)$$

Thế (2) vào (1) ta được $3(3 - b^2 + 2b) + 3b^2 + 2b - 1 = 0 \Leftrightarrow b = -1$.

Khi đó, thay vào (2) ta suy ra $\begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -1 \\ z_2 = 2 - i \end{cases} \Rightarrow |z_1| \cdot |z_2| = \sqrt{5}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 11. Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C là ba điểm lần lượt biểu diễn ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Khi đó tam giác ABC

A. đều.

B. vuông.

C. cân.

D. có một góc tù.

Lời giải.

Theo giả thiết, tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; 1)$ có $AB = 2$. Suy ra tam giác ABC vuông tại C .

Chọn đáp án **B** □

Câu 12. Cho số phức z thỏa mãn $z(2 - i) + 13i = 1$. Tính mô-đun của số phức z

- A. $|z| = \sqrt{34}$. B. $|z| = \frac{\sqrt{34}}{3}$. C. $|z| = \frac{5\sqrt{34}}{3}$. D. $|z| = 34$.

🔗 **Lời giải.**

Cách 1 Ta có $z(2-i) + 13i = 1 \Rightarrow |z(2-i)| = |1-13i| \Leftrightarrow |z| \cdot \sqrt{5} = \sqrt{170} \Leftrightarrow |z| = \sqrt{34}$.

Cách 2 Ta có $z(2-i) + 13i = 1 \Leftrightarrow z(2-i) = 1-13i$

$$\Leftrightarrow z(2-i)(2+i) = (1-13i)(2+i) \Leftrightarrow 5z = 15-25i \Leftrightarrow z = 3-5i$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi M là điểm biểu diễn số phức $z = 2 + 2i$; M' là điểm biểu diễn số phức $z' = \frac{3i}{2}z$. Tính diện tích tam giác OMM' .

- A. $S_{\triangle OMM'} = 4$. B. $S_{\triangle OMM'} = 6$. C. $S_{\triangle OMM'} = 3$. D. $S_{\triangle OMM'} = \frac{15}{2}$.

🔗 **Lời giải.**

Ta có $M(2; 2)$. Mặt khác $z' = \frac{3i}{2}z = -3 + 3i \Rightarrow M'(-3; 3)$.

Tam giác OMM' có $\overrightarrow{OM} = (2; 2)$, $\overrightarrow{OM'} = (-3; 3) \Rightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow OM \perp OM'$.

Diện tích tam giác OMM' là $S_{\triangle OMM'} = \frac{1}{2}OM \cdot OM' = \frac{1}{2} \cdot |z| \cdot |z'| = 6$.

Chọn đáp án **(B)** □

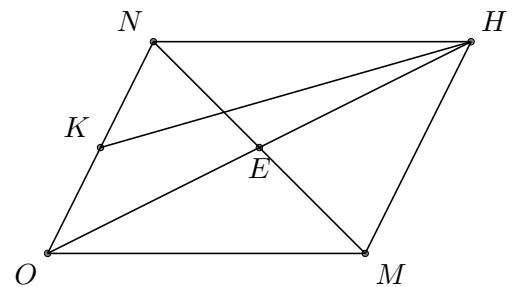
Câu 14. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa $|z_1| = |z_2| = \sqrt{17}$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Biết $MN = 3\sqrt{2}$, gọi H là đỉnh thứ tư của hình bình hành $OMHN$ và K là trung điểm của ON . Tính độ dài ℓ của đoạn thẳng KH .

- A. $\ell = \frac{\sqrt{17}}{2}$. B. $\ell = 5\sqrt{2}$. C. $\ell = \frac{3\sqrt{13}}{2}$. D. $\ell = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

🔗 **Lời giải.**

Gọi E là giao điểm của OH và MN .

$$\begin{aligned} OE^2 &= \frac{OM^2 + ON^2}{2} - \frac{MN^2}{4} \\ &= 17 - \frac{9}{2} = \frac{25}{2} \Rightarrow OH^2 = 4OE^2 = 50 \\ HK^2 &= \frac{HN^2 + HO^2}{2} - \frac{ON^2}{4} = \frac{OM^2 + OH^2}{2} - \frac{ON^2}{4} \\ &= \frac{17 + 50}{2} - \frac{17}{4} = \frac{117}{4} \Rightarrow \ell = HK = \frac{3\sqrt{13}}{2}. \end{aligned}$$



Chọn đáp án **(C)** □

Câu 15. Cho hai số phức z_1, z_2 thuộc tập hợp $S = \{z \in \mathbb{C} : |iz - 2 - 3i| = 2\}$ và thỏa mãn $z_1 + z_2 = 4 - 2i$. Tính $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

- A. $A = 6$. B. $A = 14$. C. $A = 8$. D. $A = 12$.

🔗 **Lời giải.**

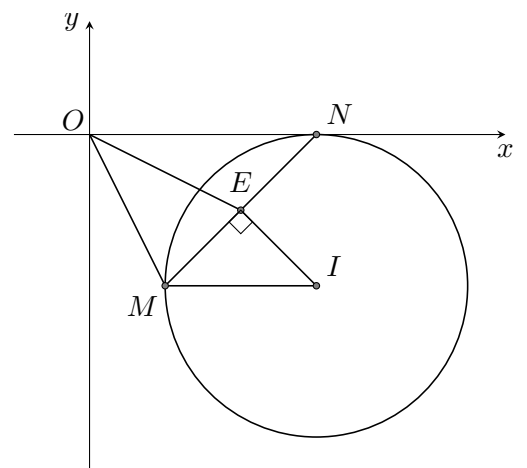
Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2 .

Gọi E là trung điểm MN .

Ta có

$$\begin{aligned} |iz - 2 - 3i| &= 2 \\ \Leftrightarrow |i \cdot (z - 3 + 2i)| &= 2 \\ \Leftrightarrow |z - 3 + 2i| &= 2. \end{aligned} \quad (1)$$

Từ (1) ta thấy M, N thuộc đường tròn tâm $I(3; -2)$ bán kính $R = 2$.



Ta có $E(2; -1) \Rightarrow \overrightarrow{EI} = (1; -1) \Rightarrow EI = \sqrt{2} \Rightarrow MN = 2\sqrt{2}$.

Trong $\triangle OMN$, ta có

$$OE^2 = \frac{OM^2 + ON^2}{2} - \frac{MN^2}{4}$$

$$\Rightarrow OM^2 + ON^2 = 14.$$

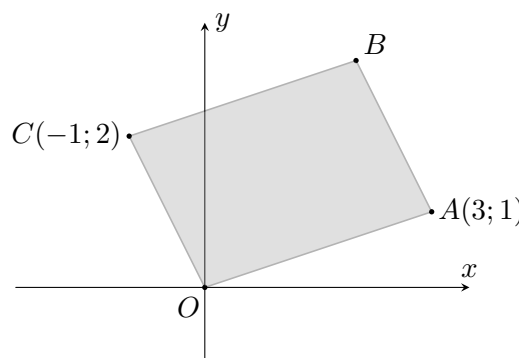
Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 16.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $OABC$ có tọa độ điểm $A(3; 1)$, $C(-1; 2)$ (như hình vẽ bên). Số phức nào sau đây có điểm biểu diễn là điểm B ?

- A. $w_1 = -2 + 3i$. B. $w_2 = 2 + 3i$.
C. $w_3 = 4 - i$. D. $w_4 = -4 + i$.



Lời giải.

Do $OABC$ là hình bình hành nên

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}. \quad (1)$$

Mà $\overrightarrow{OA} = (3; 1)$ và $\overrightarrow{OC} = (-1; 2)$ nên từ (1) suy ra

$$\overrightarrow{OB} = (2; 3). \quad (2)$$

Từ (2) suy ra điểm $B(2; 3)$ hay điểm B là điểm biểu diễn của số phức $w_2 = 2 + 3i$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 17. Cho tập $X = \{1; 3; 5; 7; 9\}$. Có bao nhiêu số phức $z = x + yi$ có phần thực, phần ảo đều thuộc X và có tổng $x + y \leq 10$?

- A. 20. B. 10. C. 15. D. 24.

Lời giải.

Xét số phức $z = x + yi$ ($x, y \in X$).

Vì số phức $z = x + yi$ thỏa mãn $x + y \leq 10$ nên ta xét các trường hợp sau

- ① $(x; y) \in \{(1; 3), (1; 5), (1; 7), (1; 9), (3; 5), (3; 7)\}$, có $2 \times 6 = 12$ số phức thỏa mãn.
② $(x; y) \in \{(1; 1), (3; 3), (5; 5)\}$, có 3 số phức thỏa mãn.

Vậy có $12 + 3 = 15$ số phức thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 18. Trong hệ tọa độ Oxy , cho điểm M biểu diễn số phức $z = -2 + 3i$. Gọi N là điểm thuộc đường thẳng $y = 3$ sao cho tam giác OMN cân tại O . Điểm N là điểm biểu diễn của số phức nào dưới đây?

- A. $z = 3 - 2i$. B. $z = -2 - 3i$. C. $z = 2 + 3i$. D. $z = -2 + i$.

Lời giải.

Do giả thiết suy ra tọa độ $M(-2; 3)$ nên M thuộc đường thẳng $y = 3$. Vì tam giác OMN cân tại O suy ra N đối xứng với M qua Oy nên tọa độ điểm $N(2; 3)$. Khi đó điểm N là biểu diễn của số phức $z = 2 + 3i$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 19. Giả sử z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên hệ tọa độ Oxy . Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng MN là

- A. $(1; 0)$. B. $(1; 1)$. C. $(0; 0)$. D. $(0; 1)$.

Lời giải.

Ta có $z^2 - 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 + 2i \\ z = 1 - 2i \end{cases}$. Không mất tính tổng quát giả sử $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = 1 - 2i$ do đó tọa độ điểm $M(1; 2)$ và $N(1; -2)$. Gọi I là trung điểm của MN ta suy ra tọa độ $I(1; 0)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 20. Cho số phức z thỏa mãn $z - 4 = (1 + i)|z| - (4 + 3z)i$. Môđun của số phức z bằng

A. 2.

B. 1.

C. 16.

D. 4.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}
 a + bi - 4 &= (1 + i)\sqrt{a^2 + b^2} - (4 + 3a + 3bi)i \\
 \Leftrightarrow a - 4 + bi &= \sqrt{a^2 + b^2} + i\sqrt{a^2 + b^2} - (4 + 3a)i + 3b \\
 \Leftrightarrow a - 3b - \sqrt{a^2 + b^2} - 4 + (b - \sqrt{a^2 + b^2} + 3a + 4)i &= 0 \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} a - 3b - \sqrt{a^2 + b^2} - 4 = 0 \\ 3a + b - \sqrt{a^2 + b^2} + 4 = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} a - 3b - \sqrt{a^2 + b^2} - 4 = 0 \\ 2a + 4b + 8 = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} -2b - 4 - 3b - \sqrt{(-2b - 4)^2 + b^2} - 4 = 0 \\ a = -2b - 4 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(-2b - 4)^2 + b^2} = 5b + 8 \\ a = -2b - 4 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 5b^2 + 16b + 16 = 25b^2 + 80b + 64 \\ a = -2b - 4 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 20b^2 + 64b + 48 = 0 \\ a = -2b - 4 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{6}{5} \\ a = -\frac{8}{5} \\ b = -2 \\ a = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Với cả hai trường hợp ta đều có $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 21.

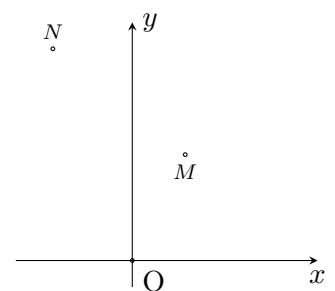
Cho số phức z có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là M , biết z^2 có điểm biểu diễn là N như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $|z| < 1$.

B. $1 < |z| < 3$.

C. $3 < |z| < 5$.

D. $|z| > 5$.



Lời giải.

Gọi $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}^+$ và $a < b$. Khi đó $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$.

Từ hình vẽ ta thấy

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} a^2 - b^2 < 0 \\ 2ab > 2b \\ a^2 - b^2 > -a \end{cases} \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} a > 1 \\ b < \sqrt{2} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow &1 < a < b < \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

Vậy $1 < |z| < 3$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 22. Gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 trong mặt phẳng phức, I là trung điểm MN , O là gốc tọa độ (3 điểm O, M, N phân biệt và không thẳng hàng). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $|z_1 + z_2| = 2OI$.

B. $|z_1 + z_2| = OI$.

C. $|z_1 - z_2| = OM + ON$.

D. $|z_1 - z_2| = 2(OM + ON)$.

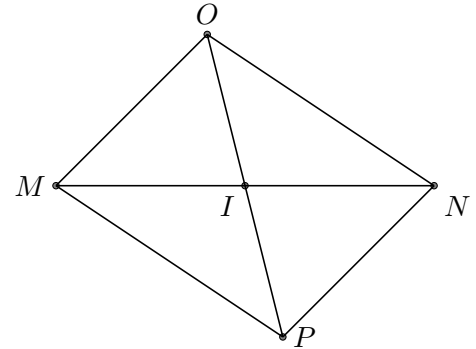
Lời giải.

Gọi P là điểm biểu diễn của số phức $z_1 + z_2$.

Khi đó $OMPN$ là hình bình hành nên $2OI = OP = |z_1 + z_2|$.

$|z_1 - z_2| = MN$ và $MN \neq OM + ON$, $MN \neq 2(OM + ON)$.

Vậy đáp số đúng là $|z_1 + z_2| = 2OI$.



Chọn đáp án **A** □

Câu 23. Gọi A, B, C là các điểm trong mặt phẳng Oxy theo thứ tự biểu diễn các số phức $2 + 3i, 3 + i, 1 + 2i$. Trọng tâm G của tam giác ABC biểu diễn số phức z . Tìm z .

A. $z = 1 + i$.

B. $z = 1 - i$.

C. $z = 2 - 2i$.

D. $z = 2 + 2i$.

Lời giải.

Ta có: $A(2; 3), B(3; 1), C(1; 2) \Rightarrow G(2; 2)$ là điểm biểu diễn số phức $z = 2 + 2i$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 24. Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C, D lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $z_1 = -1 + i, z_2 = 1 + 2i, z_3 = 2 - i, z_4 = -3i$. Gọi S diện tích tứ giác $ABCD$. Tính S .

A. $S = \frac{17}{2}$.

B. $S = \frac{19}{2}$.

C. $S = \frac{23}{2}$.

D. $S = \frac{21}{2}$.

Lời giải.

Ta có $z_1 = -1 + i \Rightarrow A(-1; 1);$

$z_2 = 1 + 2i \Rightarrow B(1; 2);$

$z_3 = 2 - i \Rightarrow C(2; -1);$

$z_4 = -3i \Rightarrow D(0; -3).$

$AB = \sqrt{5}, AC = \sqrt{13}, BC = \sqrt{10}, AD = \sqrt{17}, CD = 2\sqrt{2}.$

Do đó: $p_1 = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{13} + \sqrt{10}}{2}.$

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{p_1(p_1 - AB)(p_1 - BC)(p_1 - AC)}}{2} = \frac{7}{2}.$

$p_2 = \frac{AD + CD + AC}{2} = \frac{\sqrt{17} + 2\sqrt{2} + \sqrt{13}}{2}.$

Diện tích tam giác ACD là $S_{\triangle ACD} = \frac{\sqrt{p_2(p_2 - AC)(p_2 - AD)(p_2 - CD)}}{2} = 5.$

Vậy diện tích tứ giác $ABCD$ là $S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = \frac{7}{2} + 5 = \frac{17}{2}.$

Chọn đáp án **A** □

Câu 25. Trên mặt phẳng tập hợp các số phức $z = x + yi$ thỏa mãn $|z + 2 + i| = |\bar{z} - 3i|$ là đường thẳng có phương trình

A. $y = x + 1$.

B. $y = -x + 1$.

C. $y = -x - 1$.

D. $y = x - 1$.

Lời giải.

Ta có $|z + 2 + i| = |\bar{z} - 3i| \Leftrightarrow |(x + 2) + (y + 1)i| = |x - (y + 3)i| \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y + 1)^2 = x^2 + (y + 3)^2$

$\Leftrightarrow 4x + 4 + 2y + 1 = 6y + 9 \Leftrightarrow x - y - 1 = 0.$

Chọn đáp án **D** □

Câu 26. Cho số phức $z = m + 3 + (m^2 - 1)i$, với m là tham số thực thay đổi. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thuộc đường cong (C) . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành.

A. $\frac{8}{3}$.

B. $\frac{4}{3}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{2}{3}$.

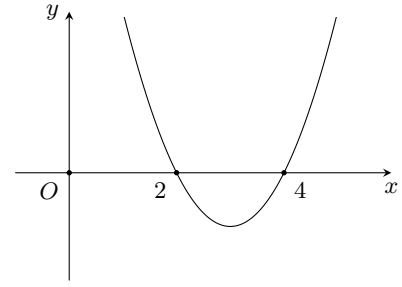
Lời giải.

Ta có $z = m + 3 + (m^2 - 1)i = x + yi \Rightarrow \begin{cases} x = m + 3 \\ y = m^2 - 1 \end{cases}$

$\Rightarrow y = (x - 3)^2 - 1 = x^2 - 6x + 8.$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục hoành là

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2; x = 4.$$



Diện tích hình phẳng cần tính là $\int_2^4 -(x^2 - 6x + 8) dx = \frac{4}{3}.$

Chọn đáp án **B**

□

6 ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. B	4. D	5. A	6. D	7. C	8. D	9. A	10. A
11. B	12. A	13. B	14. C	15. B	16. B	17. C	18. C	19. A	20. A
21. B	22. A	23. D	24. A	25. D	26. B				

7 VẬN DỤNG CAO

Câu 1. Cho các số phức z thỏa mãn $|z| = m^2 - 2m + 2$, với m là tham số thực. Biết rằng điểm biểu diễn của số phức $w = (6 + 8i)z + i$ thuộc đường tròn (C_m) . Tìm bán kính nhỏ nhất của đường tròn (C_m) .

A. $\frac{1}{10}.$

B. 1.

C. 10.

D. $\sqrt{10}.$

Lời giải.

Ta có $w = (6 + 8i)z + i \Leftrightarrow \frac{w - i}{6 + 8i} = z \Leftrightarrow \left| \frac{w - i}{6 + 8i} \right| = |z| \Leftrightarrow |w - i| = |z| \cdot |6 + 8i| = 10(m^2 - 2m + 2).$

Giả sử $w = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$, khi đó $|w - i| = 10(m^2 - 2m + 2) \Rightarrow (x)^2 + (y - 1)^2 = 100(m^2 - 2m + 2)^2.$
 $\Rightarrow$ tập hợp biểu diễn w là đường tròn có bán kính $R = 10(m^2 - 2m + 2).$

Ta có $m^2 - 2m + 2 = (m - 1)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow R \geq 10 \Rightarrow R_{\min} = 10.$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 2. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$. Tính $S = M^2 + m^2$.

A. 1256.

B. 1258.

C. 1233.

D. 1236.

Lời giải.

Cách 1: Sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai.

Gọi $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |x - 3 + (y - 4)i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5 (*)$.

Ta có $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2 = (x + 2)^2 + y^2 - [x^2 + (y - 1)^2] = 4x + 2y + 3 \Rightarrow y = \frac{P - 4x - 3}{2}$

Thế vào $(*)$ và rút gọn ta có: $20x^2 - 8(P - 8)x + P^2 - 22P + 137 = 0$

Phương trình bậc hai này có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = -4P^2 + 184P - 1716 \geq 0 \Leftrightarrow 13 \leq P \leq 33.$

Từ đó ta có $M = 33; m = 13 \Rightarrow M^2 + m^2 = 1258.$

Cách 2: Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki.

Gọi $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |x - 3 + (y - 4)i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5.$

Ta có $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2 = (x + 2)^2 + y^2 - [x^2 + (y - 1)^2] = 4x + 2y + 3 = 4(x - 3) + 2(y - 4) + 23.$

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki ta có:

$$|4(x - 3) + 2(y - 4)| \leq \sqrt{(16 + 4)[(x - 3)^2 + (y - 4)^2]} = 10$$

$$\Leftrightarrow -10 \leq 4(x - 3) + 2(y - 4) \leq 10 \Leftrightarrow 13 \leq 4(x - 3) + 2(y - 4) + 23 \leq 33 \Leftrightarrow 13 \leq P \leq 33.$$

Từ đó ta có $M = 33; m = 13 \Rightarrow M^2 + m^2 = 1258.$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 3. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 2, |z_2| = \sqrt{3}$. Gọi M, N là các điểm biểu diễn cho z_1 và iz_2 . Biết $\widehat{MON} = 30^\circ$. Tính $S = |z_1^2 + 4z_2^2|$.

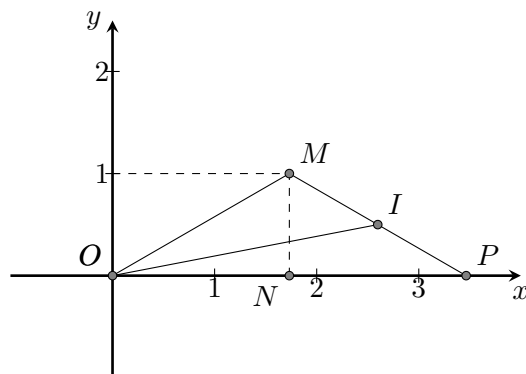
A. $5\sqrt{2}.$

B. $3\sqrt{3}.$

C. $4\sqrt{7}.$

D. $\sqrt{5}.$

Lời giải.



Ta có $S = |z_1^2 + 4z_2^2| = |z_1^2 - (2iz_2)^2| = |z_1 - 2iz_2| \cdot |z_1 + 2iz_2|$.

Gọi P là điểm biểu diễn của số phức $2iz_2$. Khi đó ta có

$$|z_1 - 2iz_2| \cdot |z_1 + 2iz_2| = |\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{PM}| \cdot |\overrightarrow{OI}| = 2PM \cdot OI.$$

Vì $\widehat{MON} = 30^\circ$ nên áp dụng định lí cosin cho $\triangle OMN$ với $OM = 2$, $ON = \sqrt{3}$ ta có

$$MN^2 = OM^2 + ON^2 - 2OM \cdot ON \cos \widehat{MON} = 4 + 3 - 4\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 1 \Rightarrow MN = 1.$$

Khi đó theo Pitago ta có $\triangle OMN$ vuông tại N . Khi đó $\triangle OMP$ có MN là đường cao đồng thời là trung tuyến, tức là $\triangle OMP$ cân tại $M \Rightarrow PM = OM = 2$.

Áp dụng định lý đường trung tuyến cho $\triangle OMN$ ta có $OI^2 = \frac{OM^2 + ON^2}{2} - \frac{MN^2}{4} = 7$.

Vậy $S = 2 \cdot PM \cdot OI = 4\sqrt{7}$.

Chọn đáp án 

□

8 ĐÁP ÁN

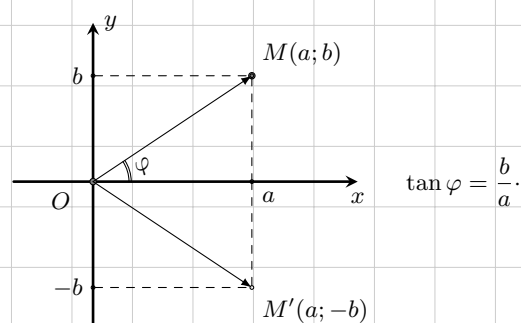
- | | | |
|------|------|------|
| 1. C | 2. B | 3. C |
|------|------|------|

BÀI 2. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC VÀ BÀI TOÁN LIÊN QUAN

A KIẾN THỨC CƠ BẢN

① Điểm $M(a; b)$ trong hệ trục tọa độ vuông góc của mặt phẳng được gọi là điểm biểu diễn số phức $z = a + bi$.

② Các điểm $M(a; b)$ và $M'(a; -b)$ biểu diễn số phức $z = a + bi$ và $\bar{z} = a - bi$.



Bài toán: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy tìm tập hợp các điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$ thỏa mãn điều kiện cho trước.

— Bước 1: Gọi $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$ (với $x, y \in \mathbb{R}$)

— Bước 2 : Biến đổi điều kiện K để tìm mối liên hệ giữa x, y và kết luận.

Mối liên hệ giữa x và y	Kết luận tập hợp điểm $M(x; y)$
$\circ Ax + By + C = 0$	Là đường thẳng $d: Ax + By + C = 0$.
$\circ (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$	Là đường tròn (C) có tâm $I(a; b)$ và bán kính R .
$\circ x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$	Là đường tròn (C) có tâm $I(-a; -b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.
$\circ (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2$	Là hình tròn (C) có tâm $I(a; b)$ và bán kính R .
$\circ x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c \leq 0$	Là hình tròn (C) có tâm $I(-a; -b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.
$\circ R_1^2 \leq (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R_2^2$	Là hình vành khăn tạo bởi hai đường tròn đồng tâm $I(a; b)$ và bán kính R_1 và R_2 .
$\circ y = ax^2 + bx + c$	Là Parabol (P) có đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.
$\circ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $\begin{cases} MF_1 + MF_2 = 2a \\ F_1F_2 = 2c < 2a \end{cases}$	Là đường Elip (E) có trục lớn $2a$, trục nhỏ $2b$ và tiêu cự $2c = 2\sqrt{a^2 - b^2}$.
$\circ \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} $	Là đường trung trực của đoạn AB .

B BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Quan sát hình vẽ bên cạnh, ta có:

Điểm $A(2; 1)$ biểu diễn cho số phức $z_1 = 2 + i$.

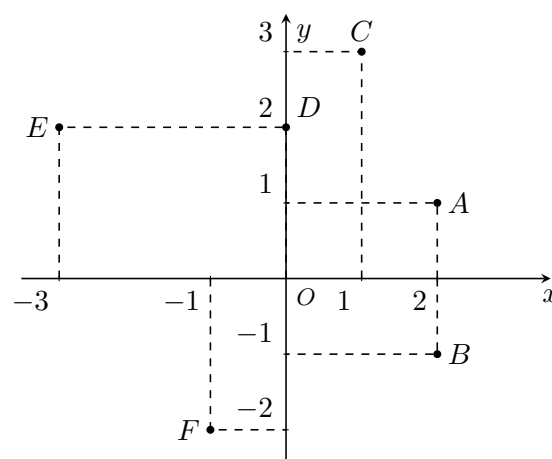
Điểm $B(\dots; \dots)$ biểu diễn cho số phức $z_2 = \dots$

Điểm $C(\dots; \dots)$ biểu diễn cho số phức $z_3 = \dots$

Điểm $D(\dots; \dots)$ biểu diễn cho số phức $z_4 = \dots$

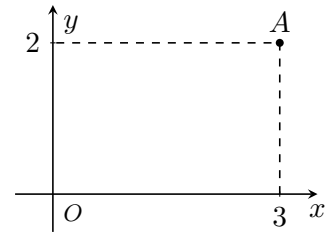
Điểm $E(\dots; \dots)$ biểu diễn cho số phức $z_5 = \dots$

Điểm $F(\dots; \dots)$ biểu diễn cho số phức $z_6 = \dots$



Số phức $z_1 = 2 + i$ và số phức liên hợp $\bar{z}_1 = z_2 = 2 - i$ có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ Oxy là A và B đối xứng nhau qua trục Ox .

Bài 2. Điểm A trong hình vẽ dưới đây là điểm biểu diễn của số phức z .
Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$.



Lời giải.

Số phức $z = 3 + 2i$ nên số phức liên hợp $\bar{z} = 3 - 2i$.

Vậy $\bar{z}$ có phần thực là 3 và phần ảo là -2 . □

Bài 3. Cho số phức $z = 2 - i$. Trên mặt phẳng tọa độ, tìm điểm biểu diễn số phức $w = iz$.

Lời giải.

$w = iz = i(2 - i) = 2i - i^2 = 1 + 2i$. Suy ra điểm biểu diễn số phức $w = iz$ là $Q(1; 2)$. □

Bài 4. Cho số phức z thỏa mãn $2i + z(1 - i) = i(3 - i)$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức z .

Lời giải.

Ta có: $2i + z(1 - i) = i(3 - i) \Leftrightarrow z = \frac{i(3 - i) - 2i}{1 - i} = \frac{1 + i}{1 - i} = i$.

Suy ra điểm biểu diễn số phức z là $M_1(0; 1)$. □

Bài 5. Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm điểm biểu diễn của số phức $w = z + i \cdot \bar{z}$.

Lời giải.

Ta có: $w = z + i \cdot \bar{z} = 3 - 2i + i \cdot (3 + 2i) = 3 - 2i + 3i + 2i^2 = 3 - 2i + 3i - 2 = 1 + i$.

Suy ra điểm biểu diễn số phức w là $M(1; 1)$. □

Bài 6. Điểm $M(x_0; y_0)$ biểu diễn của số phức z thỏa $(1 + i)z + (2 + i)\bar{z} = 3 + i$. Tính $2x_0 + 3y_0$.

Lời giải.

Do $M(x_0; y_0)$ biểu diễn của số phức z nên $z = x_0 + y_0i$.

Ta có:

$$(1 + i)(x_0 + y_0i) + (2 + i)(x_0 - y_0i) = 3 + i \Leftrightarrow 3x_0 + (2x_0 - y_0)i = 3 + i \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0 = 3 \\ 2x_0 - y_0 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1. \end{cases}$$

Vậy $2x_0 + 3y_0 = 2 + 3 = 5$. □

Bài 7. Cho hai số phức $z_1 = 1 - 3i$, $z_2 = -4 - 6i$ có các điểm biểu diễn trong mặt phẳng tọa độ lần lượt là M , N . Gọi z là số phức mà có điểm biểu diễn là trung điểm đoạn MN . Tính mô-đun của số phức z .

Lời giải.

Ta có $M(1; -3)$ và $N(-4; -6)$.

I là trung điểm đoạn MN nên $I\left(-\frac{3}{2}; -\frac{9}{2}\right)$.

Mà z là số phức có điểm biểu diễn là trung điểm I đoạn MN nên $z = -\frac{3}{2} - \frac{9}{2}i$.

Vậy $|z| = \frac{3\sqrt{10}}{2}$. □

Nhận xét. Vì điểm biểu diễn của số phức $z = a + bi$ là $M(a; b)$ hay $\overrightarrow{OM} = (a; b)$. Do đó cần nhớ những kiến thức cơ bản về vectơ, hệ trục Oxy và hệ thức lượng trong tam giác.

Cho tam giác ABC , hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ và R , r , p lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và nửa chu vi tam giác ABC .

① Các phép toán cơ bản trên vectơ:

— Quy tắc ba điểm: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

— Quy tắc đường chéo hình bình hành $ABCD$: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

② $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) \Rightarrow AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

③ M là trung điểm của $AB \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ và $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$.

G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$ và $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$.

④ Hai vectơ bằng nhau: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$.

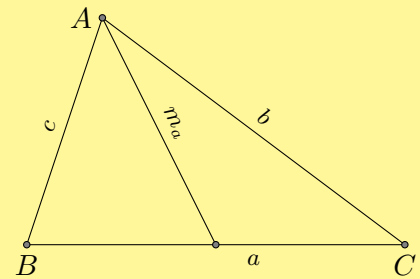
⑤ Hai vectơ cùng phương $\vec{a} \uparrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \quad (b_1, b_2 \neq 0)$.

⑥ Tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) \Rightarrow \begin{cases} \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \end{cases}$

⑦ Định lí hàm sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

⑧ Định lí hàm cos: $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \end{cases}$

⑨ Công thức trung tuyến: $\begin{cases} m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \\ m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4} \\ m_c^2 = \frac{2(b^2 + a^2) - c^2}{4} \end{cases}$

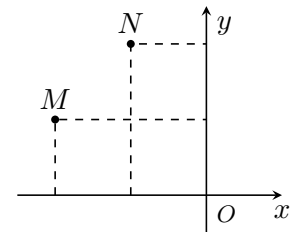


⑩ Diện tích: $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; $p = \frac{a+b+c}{2}$: nửa chu vi.

Bài 8.

Gọi M và N lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2 như hình bên dưới.

Tính MN



Lời giải.

Đặt $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$, suy ra $M(a_1; b_1), N(a_2; b_2)$

$$\Rightarrow MN = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}.$$

Ta có $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \Rightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} \neq MN$. □

Bài 9. Gọi M là điểm biểu diễn số phức $z_1 = 3 - 4i$ và điểm N là điểm biểu diễn số phức $z_2 = \frac{1}{2}(1 + i)z_1$.
Tính diện tích S của tam giác OMN với O là gốc tọa độ.

Lời giải.

Ta có $z_1 = 3 - 4i, z_2 = \frac{1}{2}(1 + i)z_1 = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}i \Rightarrow M(3; -4), N\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{NO} = \left(-\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right), \overrightarrow{NM} = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{7}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{NO} \cdot \overrightarrow{NM} = 0 \Rightarrow \triangle OMN$ vuông tại N .

$NO = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ và $NM = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} \cdot NO \cdot NM = \frac{25}{4}$. □

Cần nhớ: Tính diện tích $\triangle ABC$: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (a; b) \\ \overrightarrow{AC} = (c; d) \end{cases} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |ad - bc|$.

Bài 10. Trong mặt phẳng phức cho 3 điểm lần lượt là điểm biểu diễn của số phức $z_1 = 1 + i$, $z_2 = (1 + i)^2$, $z_3 = m - i$. Tìm tham số m để tam giác ABC vuông tại B .

Lời giải.

Ta có $z_1 = 1 + i \Rightarrow A(1; 1)$, $z_2 = (1 + i)^2 = 2i \Rightarrow B(0; 2)$, $z_3 = m - i \Rightarrow C(m, -1)$.

$\overrightarrow{BA} = (1; -1)$, $\overrightarrow{BC} = (m; -3)$.

Để $\triangle ABC$ vuông tại $B \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot m + (-1) \cdot (-3) = 0 \Leftrightarrow m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -3$. □

Bài 11. Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 3 - 2i$, $z_3 = -3 - 2i$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam ABC .

Lời giải.

Ta có $z_1 = 3 + 2i \Rightarrow A(3; 2)$, $z_2 = 3 - 2i \Rightarrow B(3; -2)$, $z_3 = -3 - 2i \Rightarrow C(-3; -2)$.

B và C đối xứng nhau qua trục tung.

Trọng tâm G của tam giác ABC : $G\left(1; -\frac{2}{3}\right) \neq \left(1; \frac{2}{3}\right)$.

A và B đối xứng nhau qua trục hoành.

$OA = OB = OC = \sqrt{13}$ nên A, B, C nằm trên đường tròn tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng $\sqrt{13}$. □

Bài 12. Cho $ABCD$ là hình bình hành với A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $1 - i$, $2 + 3i$, $3 + i$. Tìm số phức z có điểm biểu diễn là D .

Lời giải.

Ta có $A(1; -1)$, $B(2; 3)$, $C(3; 1)$.

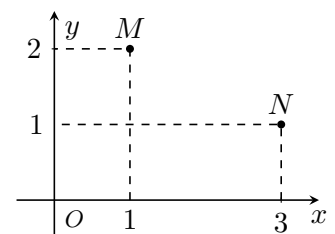
Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow D(x; y)$. Khi đó $\overrightarrow{AB} = (1; 4)$, $\overrightarrow{DC} = (3 - x; 1 - y)$.

Do $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 3 - x \\ 4 = 1 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$.

Vậy $z = 2 - 3i$. □

Bài 13.

Cho hai điểm M, N trong mặt phẳng phức như hình vẽ, gọi P là điểm sao cho $OMNP$ là hình bình hành. Hỏi điểm P biểu thị cho số phức nào sau đây?



Lời giải.

Ta có $O(0; 0)$, $M(1; 2)$, $N(3; 1)$ và $OMNP$ là hình bình hành $\Rightarrow P(2; -1) \Rightarrow P$ biểu thị số phức $z_1 = 2 - i$. □

Bài 14. Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $z_1 = (1 - i) \cdot (2 + i)$, $z_2 = 1 + 3i$, $z_3 = -1 - 3i$. Chứng minh tam giác ABC vuông.

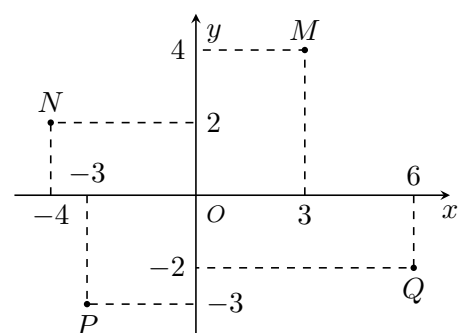
Lời giải.

Ta có $z_1 = 3 - i$ nên $A(3; -1)$, $B(1; 3)$, $C(-1; -3)$. Khi đó $\overrightarrow{AB} = (-2; 4)$, $\overrightarrow{AC} = (-4; -2)$, $\overrightarrow{BC} = (-2; -6)$.

Do $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ AB = AC = 2\sqrt{5} \end{cases}$ nên tam giác ABC vuông cân tại A . □

Bài 15.

Cho số phức z thỏa $|z| = 2\sqrt{10}$. Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong hình?

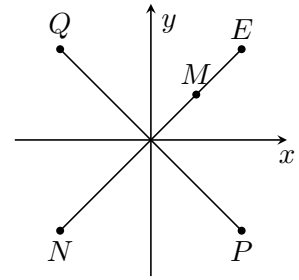


Lời giải.

Ta có: $M(3; 4) \Rightarrow |z| = 5$, $N(-4; 2) \Rightarrow |z| = 2\sqrt{5}$, $P(-3; -3) \Rightarrow |z| = 3\sqrt{2}$, $Q(6; -2) \Rightarrow |z| = 2\sqrt{10}$. □

Bài 16.

Trong mặt phẳng tọa độ, điểm M là điểm biểu diễn số phức z . Điểm nào trong hình vẽ là điểm biểu diễn của số phức $2z$?

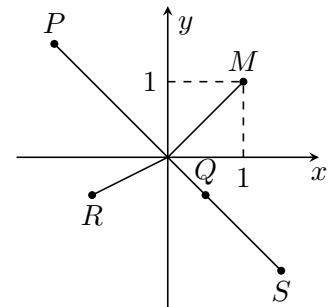
**Lời giải.**

Dựa vào hình vẽ ta thấy $\overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{OM}$.

Vậy điểm E là điểm biểu diễn của số phức $2z$. □

Bài 17.

Cho số phức z có điểm biểu diễn là M . Biết số phức $w = \frac{1}{z}$ được biểu diễn bởi một trong bốn điểm P, Q, R, S như hình vẽ. Hỏi điểm biểu diễn của w là điểm nào?

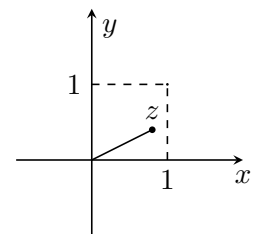
**Lời giải.**

Ta có $M(1; 1)$ nên $z = 1 + i$, suy ra $w = \frac{1}{z} = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

Vậy điểm biểu diễn của w là điểm Q . □

Bài 18.

Số phức z được biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ như hình vẽ. Hỏi điểm biểu diễn của số phức $w = \frac{i}{\bar{z}}$ nằm ở góc phần tư thứ mấy trong hệ trục tọa độ Oxy ?

**Lời giải.**

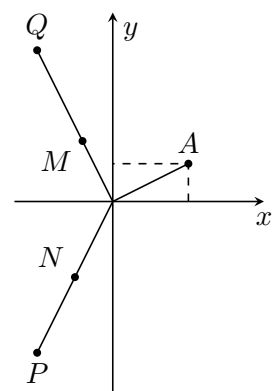
Gọi $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R}^+)$ sao cho $0 < x^2 + y^2 < \sqrt{2}$. Khi đó

$$w = \frac{i}{\bar{z}} = \frac{i}{x - yi} = \frac{i(x + yi)}{x^2 + y^2} = \frac{-y + xi}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + y^2}i.$$

Mà $-\frac{y}{x^2 + y^2} < 0$; $\frac{x}{x^2 + y^2} > 0 \Rightarrow$ điểm biểu diễn của số phức w nằm ở góc phần tư thứ hai. □

Bài 19.

Cho số phức z thỏa $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và điểm A trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của z . Biết trong hình vẽ, điểm biểu diễn của số phức $w = \frac{1}{iz}$ là một trong bốn điểm M, N, P, Q . Khi đó điểm biểu diễn của số phức w là điểm nào sau đây?

**Lời giải.**

Gọi $z = x + iy$, ($x, y \in \mathbb{R}^+$) sao cho $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$. Khi đó

$$w = \frac{1}{iz} = \frac{1}{-y + xi} = \frac{-y - xi}{x^2 + y^2} = -2y - 2xi.$$

Dựa vào hình vẽ của đề bài ta suy ra điểm biểu diễn của số phức w là điểm P . □

Bài 20. Trên mặt phẳng phức, gọi M là điểm biểu diễn số phức $z = (2 - 3i) \cdot (1 + i)$ và φ là góc tạo bởi chiều dương trục hoành và véc-tơ $\overrightarrow{OM}$. Tính $\sin 2\varphi$.

Lời giải.

Ta có $z = (2 - 3i) \cdot (1 + i) = 5 - i$ nên $M(5; -1) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = (5; -1)$.

Do $\tan \varphi = -\frac{1}{5}$ nên $\sin 2\varphi = \frac{2 \tan \varphi}{1 + \tan^2 \varphi} = -\frac{5}{13}$. □

Bài 21. Trên mặt phẳng phức, gọi M là điểm biểu diễn số phức $z = (2 + i)^2 \cdot (4 - i)$ và gọi φ là góc tạo bởi chiều dương trục hoành và véc-tơ $\overrightarrow{OM}$. Tính $\cos 2\varphi$.

Lời giải.

Ta có $z = (2 + i)^2 \cdot (4 - i) = 16 + 13i$ nên $M(16; 13) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = (16; 13)$.

Do $\tan \varphi = \frac{13}{16}$ nên $\cos 2\varphi = \frac{1 - \tan^2 \varphi}{1 + \tan^2 \varphi} = \frac{87}{425}$. □

Bài 22. Cho A, B, C, D là bốn điểm trong mặt phẳng tọa độ theo thứ tự biểu diễn các số phức $1 + 2i, 1 + \sqrt{3} + i, 1 + \sqrt{3} - i, 1 - 2i$. Biết $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn tâm I , bán kính R . Hỏi tọa độ điểm I biểu diễn số phức nào sau đây?

Lời giải.

Ta có $A(1; 2), B(1 + \sqrt{3}; 1), C(1 + \sqrt{3}; -1), D(1; -2)$ và gọi $I(x; y)$.

Do $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn tâm I , bán kính R nên $IA = IB = IC = ID = R$. Suy ra:

$$+) IA^2 = ID^2 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 \Rightarrow y = 0.$$

$$+) IA^2 = IB^2 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = (x - 1 - \sqrt{3})^2 + (y - 1)^2, \text{ với } y = 0 \text{ ta tìm được } x = 1.$$

Vậy $I(1; 0)$ nên I biểu diễn số phức $z = 1$. □

Bài 23. Cho hai số phức z_0, z_1 khác 0 thỏa mãn $z_0^2 - z_0 z_1 + z_1^2 = 0$. Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn cho số phức z_0, z_1 . Hỏi tam giác OAB là tam giác gì?

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} z_0^2 - z_0 z_1 + z_1^2 = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{z_0}{z_1}\right)^2 - \frac{z_0}{z_1} + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z_0}{z_1} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{z_0}{z_1} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z_0 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} z_1 \\ z_0 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} z_1. \end{cases} \end{aligned}$$

— Xét trường hợp $z_0 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} z_1$.

$$OA = |z_0| = \left| \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} z_1 \right| = \left| \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right| \cdot |z_1| = |z_1| = OB.$$

$$AB = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}| = |z_1 - z_0| = \left| z_1 - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} z_1 \right| = \left| \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} z_1 \right| = |z_1| = OB.$$

Như vậy: $OA = OB = AB \Rightarrow \triangle OAB$ là tam giác đều.

— Xét trường hợp $z_0 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} z_1$.

$$OA = |z_0| = \left| \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} z_1 \right| = \left| \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right| \cdot |z_1| = |z_1| = OB.$$

$$AB = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}| = |z_1 - z_0| = \left| z_1 - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} z_1 \right| = \left| \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} z_1 \right| = |z_1| = OB.$$

Như vậy: $OA = OB = AB \Rightarrow \triangle OAB$ là tam giác đều.

Tóm lại, ba điểm O, A, B tạo thành tam giác đều (O là gốc tọa độ). □

Bài 24. Xét số phức z và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là M, M' . Số phức $z(4 + 3i)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn lần lượt là N, N' . Biết rằng $MM'N'N$ là một hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 4i - 5|$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$. Khi đó $z(4 + 3i) = 4a - 3b + (3a + 4b)i$ và $M(a; b); M'(a; -b), N(4a - 3b; 3a + 4b), N'(4a - 3b; -3a - 4b)$.

$\overrightarrow{MN} = (3a - 3b; 3a + 3b)$.

Theo tính chất đối xứng thì $MNN'M'$ là hình thang cân. Do đó để $MNN'M'$ là hình chữ nhật thì $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với trục Ox hay $3a + 3b = 0 \Leftrightarrow b = -a$.

Ta có

$$\begin{aligned} |z + 4i - 5| &= \sqrt{(a - 5)^2 + (b + 4)^2} \\ &= \sqrt{(a - 5)^2 + (-a + 4)^2} = \sqrt{2a^2 - 18a + 41} \\ &= \sqrt{2\left(a - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{9}{2}$ hay $z = \frac{9}{2} - \frac{9}{2}i$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z + 4i - 5|$ bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$ khi và chỉ khi $z = \frac{9}{2} - \frac{9}{2}i$. □

Bài 25. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 2, |z_2| = \sqrt{3}$ và nếu gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, iz_2 thì $\widehat{MON} = 30^\circ$. Tính $P = |z_1^2 + 4z_2^2|$.

Lời giải.

Ta có $z_1^2 + 4z_2^2 = z_1^2 - (2iz_2)^2 = (z_1 - 2iz_2)(z_1 + 2iz_2)$.

Lại có $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = 30^\circ$ và $|z_1^2 + 4z_2^2| = |(z_1 - 2iz_2)(z_1 + 2iz_2)| = |z_1 - 2iz_2| \cdot |z_1 + 2iz_2|$.

Mặt khác

$$|z_1 - 2iz_2|^2 = |z_1|^2 + 4|iz_2|^2 - 4|z_1||iz_2|\cos 30^\circ = 2^2 + 4 \cdot (\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4.$$

$$|z_1 + 2iz_2|^2 = |z_1|^2 + 4|iz_2|^2 + 4|z_1||iz_2|\cos 30^\circ = 2^2 + 4 \cdot (\sqrt{3})^2 + 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 28.$$

Do đó $|z_1^2 + 4z_2^2| = \sqrt{4 \cdot 28} = 4\sqrt{7}$. □

Dạng 1. Tập hợp điểm của số phức là đường thẳng và các bài toán liên quan

Phương pháp giải:

Bài 1. ① Cho số phức z thỏa mãn $|z - (1 + i)| = |z + 2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (3 - 4i)z - 1$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Viết phương trình đường thẳng đó.

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có

$$w = (3 - 4i)z - 1 = x + yi \Leftrightarrow z = \frac{x + 1 + yi}{3 - 4i}.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
 |z - (1 + i)| = |z + 2i| &\Leftrightarrow \left| \frac{x + 1 + yi}{3 - 4i} - (1 + i) \right| = \left| \frac{x + 1 + yi}{3 - 4i} + 2i \right| \\
 &\Leftrightarrow \left| \frac{(x - 6) + (y + 1)i}{3 - 4i} \right| = \left| \frac{(x + 9) + (y + 6)i}{3 - 4i} \right| \\
 &\Leftrightarrow \frac{|(x - 6) + (y + 1)i|}{|3 - 4i|} = \frac{|(x + 9) + (y + 6)i|}{|3 - 4i|} \\
 &\Leftrightarrow |(x - 6) + (y + 1)i| = |(x + 9) + (y + 6)i| \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{(x - 6)^2 + (y + 1)^2} = \sqrt{(x + 9)^2 + (y + 6)^2} \\
 &\Leftrightarrow (x - 6)^2 + (y + 1)^2 = (x + 9)^2 + (y + 6)^2 \\
 &\Leftrightarrow 3x + y + 8 = 0.
 \end{aligned}$$

Suy ra, tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường thẳng có phương trình $3x + y + 8 = 0$. $\square$

- ② Cho các số phức z thỏa mãn $|z - 2 - i| = |\bar{z} + 2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (1 + i)z - 2$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Viết phương trình đường thẳng đó.

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có

$$w = (1 + i)z - 2 = x + yi \Leftrightarrow z = \frac{(x + y + 2) - (x - y + 2)i}{2}.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
 |z - 2 - i| = |\bar{z} + 2i| &\Leftrightarrow \left| \frac{(x + y + 2) - (x - y + 2)i}{2} - 2 - i \right| = \left| \frac{(x + y + 2) + (x - y + 2)i}{2} + 2i \right| \\
 &\Leftrightarrow \left| \frac{(x + y - 2) - (x - y + 4)i}{2} \right| = \left| \frac{(x + y + 2) + (x - y + 6)i}{2} \right| \\
 &\Leftrightarrow |(x + y - 2) - (x - y + 4)i| = |(x + y + 2) + (x - y + 6)i| \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{(x + y - 2)^2 + (x - y + 4)^2} = \sqrt{(x + y + 2)^2 + (x - y + 6)^2} \\
 &\Leftrightarrow (x + y - 2)^2 + (x - y + 4)^2 = (x + y + 2)^2 + (x - y + 6)^2 \\
 &\Leftrightarrow 3x + y + 5 = 0.
 \end{aligned}$$

Suy ra, tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường thẳng có phương trình $3x + y + 5 = 0$. $\square$

Bài 2. Cho số phức z thỏa mãn $2|z - 2 + 3i| = |2i - 1 - 2\bar{z}|$. Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường thẳng có phương trình nào sau đây?

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có

$$\begin{aligned}
 2|z - 2 + 3i| &= |2i - 1 - 2\bar{z}| \\
 \Leftrightarrow 2|(x + yi) - 2 + 3i| &= |2i - 1 - 2(x - yi)| \\
 \Leftrightarrow 2|(x - 2) + (y + 3)i| &= |(-2x - 1) + (2y + 2)i| \\
 \Leftrightarrow 2\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 3)^2} &= \sqrt{(-2x - 1)^2 + (2y + 2)^2} \\
 \Leftrightarrow 4[(x - 2)^2 + (y + 3)^2] &= (-2x - 1)^2 + (2y + 2)^2 \\
 \Leftrightarrow 20x - 16y - 47 &= 0.
 \end{aligned}$$

Suy ra, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng có phương trình $20x - 16y - 47 = 0$. $\square$

Bài 3. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z| = |\bar{z} - 2 + 3i|$.

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có

$$\begin{aligned} |z| &= |\bar{z} - 2 + 3i| \\ \Leftrightarrow |x + yi| &= |(x - yi) - 2 + 3i| \\ \Leftrightarrow |x + yi| &= |(x - 2) + (3 - y)i| \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} &= \sqrt{(x - 2)^2 + (3 - y)^2} \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 &= (x - 2)^2 + (3 - y)^2 \\ \Leftrightarrow 4x + 6y - 13 &= 0. \end{aligned}$$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng có phương trình $4x + 6y - 13 = 0$. $\square$

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $z(1 + i)$ là số thực.

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có $z(1 + i) = (x + yi)(1 + i) = (x - y) + (x + y)i$. Để $z(1 + i)$ là số thực điều kiện cần và đủ là $x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$.

Suy ra, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng có phương trình $y = -x$. $\square$

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $w = z(2 + 3i) + 5 - i$ là số thuần ảo.

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có

$$w = z(2 + 3i) + 5 - i = (x + yi)(2 + 3i) + 5 - i = (2x - 3y + 5) + (3x + 2y - 1)i.$$

Để $w = z(2 + 3i) + 5 - i$ là số thuần ảo điều kiện cần và đủ là $2x - 3y + 5 = 0$.

Suy ra, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng có phương trình $2x - 3y + 5 = 0$. $\square$

Bài 6. Tìm tất cả các số phức z thỏa mãn $|z - 2i| = \sqrt{5}$ và điểm biểu diễn số phức z thuộc đường thẳng $d: 3x - y + 1 = 0$.

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có

$$\begin{aligned} |z - 2i| = \sqrt{5} &\Leftrightarrow |(x + yi) - 2i| = \sqrt{5} \\ &\Leftrightarrow |x + (y - 2)i| = \sqrt{5} \\ &\Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 5. \end{aligned}$$

Mặt khác, điểm biểu diễn số phức z thuộc đường thẳng $d: 3x - y + 1 = 0$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + (y - 2)^2 = 5 \\ 3x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -\frac{2}{5} \\ y = -\frac{1}{5} \end{cases}.$$

Từ đó suy ra $z = 1 + 4i$ hoặc $z = -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$. $\square$

Bài 7. Cho số phức z thỏa mãn $|z - i| = |z - 1 + 2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (2 - i)z + 1$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Viết phương trình đường thẳng đó.

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa bài toán.

Ta có $w = (2 - i)z + 1 = x + yi \Leftrightarrow z = \frac{x - 1 + yi}{2 - i}$.

Từ đó

$$\begin{aligned} |z - i| = |z - 1 + 2i| &\Leftrightarrow \left| \frac{x - 1 + yi}{2 - i} - i \right| = \left| \frac{x - 1 + yi}{2 - i} - 1 + 2i \right| \\ &\Leftrightarrow \frac{|(x - 2) + (y - 2)i|}{|2 - i|} = \frac{|(x - 1) + (y + 5)i|}{|2 - i|} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 2)^2} = \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 5)^2} \\ &\Leftrightarrow x + 7y + 9 = 0. \end{aligned}$$

$\square$

Nhận xét. Bài toán cho z , yêu cầu tìm tập hợp điểm biểu diễn w (loại gián tiếp) thường ta sẽ gọi $w = x + yi$, sau đó biểu thị z theo x, y sẽ tìm được tập hợp điểm.

Bài 8. Cho tất cả các số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z + 2i - 1| = |z + i|$. Biết z được biểu diễn bởi điểm M sao cho MA ngắn nhất với $A(1; 3)$. Tìm $P = 2x + 3y$.

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có

$$\begin{aligned} |z + 2i - 1| = |z + i| &\Leftrightarrow |x + yi + 2i - 1| = |x + yi + i| \\ &\Leftrightarrow |(x - 1) + (y + 2)i| = |x + (y + 1)i| \\ &\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = x^2 + (y + 1)^2 \\ &\Leftrightarrow x - y - 2 = 0. \end{aligned}$$

Như vậy, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $\Delta: x - y - 2 = 0$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm $A(1; 3)$ trên đường thẳng Δ , khi đó $H(3; 1)$.

Ta luôn có $MA \geq MH$. Nên, MA ngắn nhất khi và chỉ khi $M \equiv H$, hay $M(3; 1)$.

Do đó $P = 2x + 3y = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 9$. □

Bài 9. Cho hai số phức $z_1 = 1 + 3i$ và $z_2 = -5 - 3i$. Tìm điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z_3 , biết rằng trong mặt phẳng phức điểm M nằm trên đường thẳng $x - 2y + 1 = 0$ và mô-đun số phức $w = 3z_3 - z_2 - 2z_1$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Vì điểm $M(x; y)$ nằm trên đường thẳng $x - 2y + 1 = 0$ nên $M = (2y - 1; y)$. Do đó $z_3 = (2y - 1) + yi$.

Ta có $w = 3z_3 - z_2 - 2z_1 = 3[(2y - 1) + yi] - (-5 - 3i) - 2(1 + 3i) = 6y + (3y - 3)i$.

$$|w| = \sqrt{(6y)^2 + (3y - 3)^2} = \sqrt{45\left(y - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{36}{5}} \geq \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $y = \frac{1}{5}$.

Như vậy $|w|$ nhỏ nhất khi $M\left(-\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right)$. □

Dạng 2. Tập hợp điểm của số phức là đường tròn, hình tròn, hình vành khăn

Phương pháp giải

Bài 1. ① Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp những điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - (3 - 4i)| = 2$.

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn bài toán.

Ta có

$$\begin{aligned} |z - (3 - 4i)| = 2 &\Leftrightarrow |x + yi - (3 - 4i)| = 2 \\ &\Leftrightarrow |(x - 3) + (y + 4)i| = 2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 4)^2} = 2 \\ &\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 4. \end{aligned}$$

Vậy, tập hợp các điểm $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn bài toán là đường tròn $(C): (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 4$ có tâm $I(3; -4)$, bán kính $R = 2$. □

② Cho số phức z thỏa mãn $|z + 2| = 5$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn của số phức $w = (1 - 2i)z + 3$ là một đường tròn tâm I và bán kính R . Tìm I và R .

Lời giải.

Gọi $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} w = (1 - 2i)z + 3 &\Leftrightarrow z = \frac{w - 3}{1 - 2i} \\ &\Leftrightarrow z + 2 = \frac{w - 3}{1 - 2i} + 2 \\ &\Leftrightarrow z + 2 = \frac{w - 1 - 4i}{1 - 2i} \\ &\Leftrightarrow z + 2 = \frac{(x - 1) + (y - 4)i}{1 - 2i}. \end{aligned}$$

Lấy mô-đun hai vế ta được

$$\begin{aligned} |z + 2| &= \left| \frac{(x - 1) + (y - 4)i}{1 - 2i} \right| \\ &\Leftrightarrow 5 = \frac{|(x - 1) + (y - 4)i|}{|1 - 2i|} \\ &\Leftrightarrow 5 = \frac{\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 4)^2}}{\sqrt{5}} \\ &\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 4)^2 = (5\sqrt{5})^2. \end{aligned}$$

Vậy, tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm $I(1; 4)$, bán kính $R = 5\sqrt{5}$. $\square$

- ③ Cho số phức z thỏa mãn $(2 + i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} + 1 - 2i$. Biết tập hợp điểm biểu diễn của số phức $w = (3 - 4i)z - 1 + 2i$ là một đường tròn tâm I và bán kính R . Tìm I và R .

Lời giải.

$$\text{Ta có } (2 + i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} + 1 - 2i \Leftrightarrow (2|z| - 1) + (|z| + 2)i = \frac{\sqrt{10}}{z}.$$

Lấy mô-đun hai vế, ta có

$$\begin{aligned} |(2|z| - 1) + (|z| + 2)i| &= \left| \frac{\sqrt{10}}{z} \right| \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(2|z| - 1)^2 + (|z| + 2)^2} = \frac{\sqrt{10}}{|z|} \\ &\Leftrightarrow 5|z|^2 + 5 = \frac{10}{|z|^2} \\ &\Leftrightarrow 5|z|^4 + 5|z|^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow |z| = 1. \end{aligned}$$

Gọi $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Theo đề bài ta có

$$w = (3 - 4i)z - 1 + 2i \Leftrightarrow z = \frac{w + 1 - 2i}{3 - 4i} \Leftrightarrow z = \frac{(x + 1) + (y - 2)i}{3 - 4i}.$$

Lấy mô-đun hai vế ta được

$$\begin{aligned} |z| &= \left| \frac{(x + 1) + (y - 2)i}{3 - 4i} \right| \Leftrightarrow |z| = \frac{|(x + 1) + (y - 2)i|}{|3 - 4i|} \\ &\Leftrightarrow 1 = \frac{\sqrt{(x + 1)^2 + (y - 2)^2}}{5} \\ &\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25. \end{aligned}$$

Vậy, tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(-1; 2)$, bán kính $R = 5$. $\square$

- ④ Hãy xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn $1 < |z - 1| < 2$.

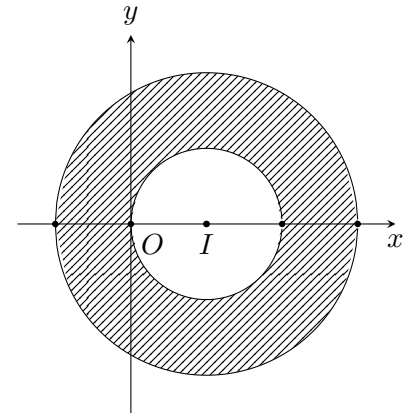
Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn bài toán.

Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} 1 < |z - 1| < 2 &\Leftrightarrow 1 < |(x - 1) + yi| < 2 \\ &\Leftrightarrow 1 < \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} < 2 \\ &\Leftrightarrow 1 < (x - 1)^2 + y^2 < 4. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z thỏa mãn $1 < |z - 1| < 2$ là hình vành khăn là phần nằm giữa hai đường tròn đồng tâm $I(1; 0)$ với bán kính $R_1 = 1$, $R_2 = 2$ như hình vẽ bên (không tính những điểm nằm trên hai đường tròn).



□

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp những điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - i| = |(1 + i)z|$.

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có

$$\begin{aligned} |z - i| &= |(1 + i)z| \Leftrightarrow |(x + yi) - i| = |(1 + i)(x + yi)| \\ &\Leftrightarrow |x + (y - 1)i| = |(x - y) + (x + y)i| \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(x - y)^2 + (x + y)^2} \\ &\Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = (x - y)^2 + (x + y)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + (y + 1)^2 = 2. \end{aligned}$$

Vậy, tập hợp những điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - i| = |(1 + i)z|$ là đường tròn (C) có phương trình $x^2 + (y + 1)^2 = 2$. □

Cần nhớ những kiến thức cơ bản về đường tròn trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

① Để viết phương trình đường tròn ta cần tìm tâm $I(a; b)$ và bán kính R .

Dạng 1 Đường tròn (C) có phương trình $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

Dạng 2 Đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, với $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

② Chu vi đường tròn $p = 2\pi R$ và diện tích hình tròn $S = \pi R^2$.

Bài 3. Trong mặt phẳng phức, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 5i| = 4$ là một đường tròn. Tính chu vi p của đường tròn đó.

Lời giải.

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 5i| = 4$ là đường tròn tâm $I(3; -5)$, bán kính $R = 4$. Chu vi đường tròn là $p = 2\pi R = 8\pi$. □

Bài 4. Cho số phức z thỏa mãn $(z + 1)(\bar{z} - 2i)$ là một số thuần ảo. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có diện tích S bằng bao nhiêu?

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có $(z + 1)(\bar{z} - 2i) = (x + yi + 1)(x - yi - 2i) = [(x + 1) + yi] \cdot [x - (y + 2)i] = (x^2 + y^2 + x + 2y) - (2x + y + 2)i$.

$(z + 1)(\bar{z} - 2i)$ là một số thuần ảo khi và chỉ khi $x^2 + y^2 + x + 2y = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = \frac{5}{4}$.

Suy ra, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C) tâm $I\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Diện tích hình tròn (C) là $S = \pi R^2 = \frac{5\pi}{4}$. □

Bài 5. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1| = 2$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = 2z - i$ là một đường tròn tâm I và bán kính R . Tìm khẳng định **đúng**.

Lời giải.

Gọi $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} w = 2z - i &\Leftrightarrow z = \frac{w + i}{2} \\ &\Leftrightarrow z - 1 = \frac{w + i}{2} - 1 \\ &\Leftrightarrow z - 1 = \frac{w - 2 + i}{2} \\ &\Leftrightarrow z - 1 = \frac{(x - 2) + (y + 1)i}{2}. \end{aligned}$$

Lấy mô-đun hai vế ta được

$$\begin{aligned} |z - 1| &= \left| \frac{(x - 2) + (y + 1)i}{2} \right| \\ &\Leftrightarrow 2 = \frac{|(x - 2) + (y + 1)i|}{2} \\ &\Leftrightarrow 2 = \frac{\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2}}{2} \\ &\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16. \end{aligned}$$

Như vậy, tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = 2z - i$ là một đường tròn tâm $I(2; -1)$ và bán kính $R = 4$. $\square$

Bài 6. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1| = 1$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = (1 + i\sqrt{3})z + 2$ là một đường tròn tâm I và bán kính R . Tìm khẳng định **đúng**.

Lời giải.

Gọi $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} w = (1 + i\sqrt{3})z + 2 &\Leftrightarrow z = \frac{w - 2}{1 + i\sqrt{3}} \\ &\Leftrightarrow z - 1 = \frac{w - 2}{1 + i\sqrt{3}} - 1 \\ &\Leftrightarrow z - 1 = \frac{w - 3 - i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} \\ &\Leftrightarrow z - 1 = \frac{(x - 3) + (y - \sqrt{3})i}{1 + i\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Lấy mô-đun hai vế ta được

$$\begin{aligned} |z - 1| &= \left| \frac{(x - 3) + (y - \sqrt{3})i}{1 + i\sqrt{3}} \right| \\ &\Leftrightarrow 1 = \frac{|(x - 3) + (y - \sqrt{3})i|}{|1 + i\sqrt{3}|} \\ &\Leftrightarrow 1 = \frac{\sqrt{(x - 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2}}{2} \\ &\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 4. \end{aligned}$$

Như vậy, tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = (1 + i\sqrt{3})z + 2$ là một đường tròn tâm $I(3; \sqrt{3})$ và bán kính $R = 2$. $\square$

Bài 7. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 3$. Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = \bar{z} + 1 - i$ là một đường tròn tâm I và bán kính R . Tìm khẳng định **đúng**.

Lời giải.

Gọi $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} w = \bar{z} + 1 - i &\Leftrightarrow \bar{z} = w - 1 + i \\ &\Leftrightarrow \bar{z} = (x - 1) + (y + 1)i \\ &\Leftrightarrow z = (x - 1) - (y + 1)i \\ &\Leftrightarrow z - 1 + 2i = (x - 1) - (y + 1)i - 1 + 2i \\ &\Leftrightarrow z - 1 + 2i = (x - 2) + (1 - y)i. \end{aligned}$$

Lấy mô-đun hai vế ta được

$$\begin{aligned} |z - 1 + 2i| &= |(x - 2) + (1 - y)i| \\ \Leftrightarrow 3 &= \sqrt{(x - 2)^2 + (1 - y)^2} \\ \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 &= 9. \end{aligned}$$

Vậy, tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = \bar{z} + 1 - i$ là một đường tròn tâm $I(2; 1)$ và bán kính $R = 3$. $\square$

Bài 8. Cho số phức z thỏa mãn $|z + 1|^2 = \frac{z\bar{z}}{2}$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = (1 + 2i)z + 1$ là một đường tròn tâm I và bán kính R . Tìm I và R .

Lời giải.

Gọi $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} w = (1 + 2i)z + 1 &\Leftrightarrow z = \frac{w - 1}{1 + 2i} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{(x - 1) + yi}{1 + 2i}. \end{aligned}$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} |z + 1|^2 = \frac{z\bar{z}}{2} &\Leftrightarrow \left| \frac{(x - 1) + yi}{1 + 2i} + 1 \right|^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x - 1) + yi}{1 + 2i} \cdot \frac{(x - 1) - yi}{1 - 2i} \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{x + (y + 2)i}{1 + 2i} \right|^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x - 1)^2 + y^2}{5} \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 + (y + 2)^2}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x - 1)^2 + y^2}{5} \\ &\Leftrightarrow 2[x^2 + (y + 2)^2] = (x - 1)^2 + y^2 \\ &\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 10. \end{aligned}$$

Như vậy, tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = (1 + 2i)z + 1$ là một đường tròn tâm $I(-1; -4)$ và bán kính $R = \sqrt{10}$. $\square$

Bài 9. Cho số phức z thỏa mãn $(1 - i)|\bar{z}| = \frac{2\sqrt{3}}{z} + 1 + i$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = iz - 1 + i$ là một đường tròn tâm I và bán kính R . Tìm khẳng định **đúng**.

Lời giải.

$$\text{Ta có } (1 - i)|\bar{z}| = \frac{2\sqrt{3}}{z} + 1 + i \Leftrightarrow (1 - i)|z| = \frac{2\sqrt{3}}{z} + 1 + i \Leftrightarrow (|z| - 1) - (|z| + 1)i = \frac{2\sqrt{3}}{z}.$$

Lấy mô-đun hai vế, ta có

$$\begin{aligned} |(|z| - 1) - (|z| + 1)i| &= \left| \frac{2\sqrt{3}}{z} \right| \\ \Leftrightarrow \sqrt{(|z| - 1)^2 + (|z| + 1)^2} &= \frac{2\sqrt{3}}{|z|} \\ \Leftrightarrow (|z| - 1)^2 + (|z| + 1)^2 &= \frac{12}{|z|^2} \\ \Leftrightarrow |z|^4 + |z|^2 - 6 &= 0 \\ \Rightarrow |z|^2 &= 2 \\ \Rightarrow |z| &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Gọi $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Theo đề bài ta có

$$w = iz - 1 + i \Leftrightarrow z = -iw - i - 1 \Leftrightarrow z = (y - 1) + (-x - 1)i.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} |z| &= |(y - 1) + (-x - 1)i| \Leftrightarrow \sqrt{2} = \sqrt{(y - 1)^2 + (-x - 1)^2} \\ &\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2. \end{aligned}$$

Vậy, tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(-1; 1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$. $\square$

Bài 10. Cho số phức z thỏa mãn $(3 - 7i)|z| = \frac{176 - 82i}{\bar{z}} + 7 + 3i$. Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = (1 + i)z + 2 - i$ là một đường tròn tâm I và bán kính R . Tìm I và R .

Lời giải.

$$\text{Ta có } (3 - 7i)|z| = \frac{176 - 82i}{\bar{z}} + 7 + 3i \Leftrightarrow (3|z| - 7) - (7|z| + 3)i = \frac{176 - 82i}{\bar{z}}.$$

Lấy mô-đun hai vế, ta có

$$\begin{aligned} |(3|z| - 7) - (7|z| + 3)i| &= \left| \frac{176 - 82i}{\bar{z}} \right| \\ \Leftrightarrow \sqrt{(3|z| - 7)^2 + (7|z| + 3)^2} &= \frac{\sqrt{37700}}{|z|} \\ \Leftrightarrow (3|z| - 7)^2 + (7|z| + 3)^2 &= \frac{37700}{|z|^2} \\ \Leftrightarrow |z|^4 + |z|^2 - 650 &= 0 \\ \Rightarrow |z|^2 &= 25 \\ \Rightarrow |z| &= 5. \end{aligned}$$

Gọi $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Theo đề bài ta có

$$w = (1 + i)z + 2 - i \Leftrightarrow z = \frac{w - 2 + i}{1 + i} \Leftrightarrow z = \frac{(x - 2) + (y + 1)i}{1 + i}.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} |z| &= \left| \frac{(x - 2) + (y + 1)i}{1 + i} \right| \\ \Leftrightarrow 5 &= \frac{|(x - 2) + (y + 1)i|}{|1 + i|} \\ \Leftrightarrow 5 &= \frac{\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2}}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2} &= 5\sqrt{2} \\ \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 &= 50. \end{aligned}$$

Vậy, tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(2; -1)$, bán kính $R = 5\sqrt{2}$. $\square$

Bài 11. Cho số phức z thỏa mãn $|3z + i|^2 \leq z \cdot \bar{z} + 9$. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức w thỏa mãn $w = \bar{z} + 1 - i$.

Lời giải.

Gọi $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có

$$w = \bar{z} + 1 - i \Leftrightarrow \bar{z} = (x - 1) + (y + 1)i \Leftrightarrow z = (x - 1) - (y + 1)i.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} |3z + i|^2 &\leq z \cdot \bar{z} + 9 \\ \Leftrightarrow |3[(x - 1) - (y + 1)i] + i|^2 &\leq (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + 9 \\ \Leftrightarrow |3(x - 1) - (3y + 2)i|^2 &\leq (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + 9 \\ \Leftrightarrow 9(x - 1)^2 + (3y + 2)^2 &\leq (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + 9 \\ \Leftrightarrow (x - 1)^2 + \left(y + \frac{5}{8}\right)^2 &\leq \frac{73}{64}. \end{aligned}$$

Vậy, tập hợp điểm biểu diễn số phức w là hình tròn $(x-1)^2 + \left(y + \frac{5}{8}\right)^2 \leq \frac{73}{64}$. $\square$

Bài 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức w thỏa mãn $w = (1 + i\sqrt{3})z + 2$ với $|z - 1| \leq 2$.

Lời giải.

Gọi $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có

$$w = (1 + i\sqrt{3})z + 2 \Leftrightarrow z = \frac{w - 2}{1 + i\sqrt{3}} \Leftrightarrow z = \frac{(x - 2) + yi}{1 + i\sqrt{3}}.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} & |z - 1| \leq 2 \\ \Leftrightarrow & \left| \frac{(x - 2) + yi}{1 + i\sqrt{3}} - 1 \right| \leq 2 \\ \Leftrightarrow & \left| \frac{(x - 3) + (y - \sqrt{3})i}{1 + i\sqrt{3}} \right| \leq 2 \\ \Leftrightarrow & \frac{\sqrt{(x - 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2}}{2} \leq 2 \\ \Leftrightarrow & (x - 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2 \leq 16. \end{aligned}$$

Vậy, tập hợp điểm biểu diễn số phức w là hình tròn $(x - 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2 \leq 16$. $\square$

Bài 13. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (1 + i)z + 1$ với z là số phức thỏa mãn $|z - 1| \leq 1$ là hình tròn. Tính diện tích S của hình tròn đó.

Lời giải.

Gọi $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có

$$w = (1 + i)z + 1 \Leftrightarrow z = \frac{w - 1}{1 + i} \Leftrightarrow z = \frac{(x - 1) + yi}{1 + i}.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} & |z - 1| \leq 1 \\ \Leftrightarrow & \left| \frac{(x - 1) + yi}{1 + i} - 1 \right| \leq 1 \\ \Leftrightarrow & \left| \frac{(x - 1) + yi}{1 + i} - 1 \right| \leq 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2}}{\sqrt{2}} \leq 1 \\ \Leftrightarrow & (x - 2)^2 + (y - 1)^2 \leq 2. \end{aligned}$$

Vậy, tập hợp điểm biểu diễn số phức w là hình tròn $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 \leq 2$. Bán kính hình tròn là $R = \sqrt{2}$, diện tích của hình tròn là $S = \pi R^2 = 2\pi$. $\square$

Bài 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm M biểu diễn số phức w thỏa mãn $w = \bar{z} + 1 - i$ với $|2z + i|^2 \leq 3z\bar{z} + 1$ là một hình tròn. Tìm tâm I và bán kính R .

Lời giải.

Gọi $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có

$$w = \bar{z} + 1 - i \Leftrightarrow \bar{z} = w - 1 + i \Leftrightarrow z = (x - 1) - (y + 1)i.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} & |2z + i|^2 \leq 3z\bar{z} + 1 \\ \Leftrightarrow & |2[(x - 1) - (y + 1)i] + i|^2 \leq 3[(x - 1)^2 + (y + 1)^2] + 1 \\ \Leftrightarrow & |2(x - 1) - (2y + 1)i|^2 \leq 3[(x - 1)^2 + (y + 1)^2] + 1 \\ \Leftrightarrow & 4(x - 1)^2 + (2y + 1)^2 \leq 3[(x - 1)^2 + (y + 1)^2] + 1 \\ \Leftrightarrow & (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 4. \end{aligned}$$

Vậy, tập hợp điểm biểu diễn số phức w là hình tròn có tâm $I(1; 1)$ và bán kính $R = 2$. $\square$

Bài 15. Trong mặt phẳng phức Oxy , tập hợp biểu diễn số phức z thỏa mãn $1 \leq |z + 1 - i| \leq 2$ là hình vành khăn. Tính chu vi P của hình vành khăn.

Lời giải.

Giả sử số phức z có dạng $z = x + iy$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

Khi đó $z + 1 - i = x + iy + 1 - i = (x + 1) + (y - 1)i$.

Do đó $|z + 1 - i| = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2}$.

Xét $|z + 1 - i| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2} = 2 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4 \quad (C_1)$.

Tương tự ta xét $|z + 1 - i| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2} = 1 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1 \quad (C_2)$.

Do đó P là tổng chu vi hai đường tròn (C_1) và (C_2) . Mà đường tròn (C_1) có bán kính $R_1 = 2$ và (C_2) có bán kính $R_2 = 1$ nên $P = 2\pi \cdot R_1 - 2\pi \cdot R_2 = 2\pi \cdot 2 - 2\pi \cdot 1 = 2\pi$. $\square$

Bài 16. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $3 \leq |z - 3i + 1| \leq 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z tạo thành một hình phẳng. Tính diện tích S của hình phẳng đó.

Lời giải.

Giả sử số phức z có dạng $z = x + iy$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

Khi đó $z - 3i + 1 = x + iy - 3i + 1 = (x + 1) + (y - 3)i$.

Do đó $|z - 3i + 1| = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 3)^2}$.

Xét $|z - 3i + 1| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 3)^2} = 5 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25 \quad (C_1)$.

Tương tự ta xét $|z - 3i + 1| = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 3)^2} = 3 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9 \quad (C_2)$.

Do đó S là diện tích hình vành khăn tạo bởi hai đường tròn (C_1) và (C_2) . Mà đường tròn (C_1) có bán kính $R_1 = 5$ và (C_2) có bán kính $R_2 = 3$ nên $S = \pi \cdot R_1^2 - \pi \cdot R_2^2 = \pi \cdot 5^2 - \pi \cdot 3^2 = 16\pi$. $\square$

Bài 17. Gọi (H) là tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ Oxy biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 \leq 1 \leq x - y$. Tính diện tích hình H .

Lời giải.

Do giả thiết số phức z có dạng $z = x + iy$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

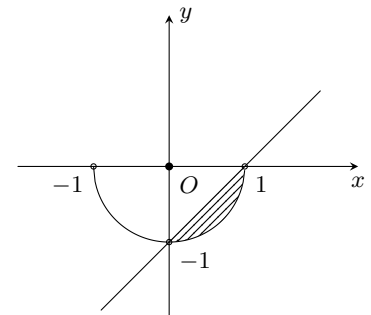
Khi đó ta xét $x^2 + y^2 = 1 \quad (1)$ và phương trình $x - y = 1 \Leftrightarrow y = x - 1 \quad (2)$.

Thay (2) vào (1) ta có $x^2 + (x - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + x^2 - 2x + 1 = 1 \Leftrightarrow$

$$2x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác } x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{1 - x^2} \\ y = -\sqrt{1 - x^2} \end{cases}$$

Do giả thiết suy ra hình H giới hạn bởi các đường $x = 0$; $x = 1$, $y = x - 1$ và $y = -\sqrt{1 - x^2}$.



Khi đó diện tích hình H bằng

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (x - 1 + \sqrt{1 - x^2}) \, dx = \int_0^1 x \, dx - \int_0^1 1 \, dx + \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \, dx \\ &= \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 - \left. x \right|_0^1 + \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \, dx \\ &= -\frac{1}{2} + \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \, dx. \end{aligned}$$

Xét $J = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \, dx$, đặt $x = \sin t$, với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ suy ra $dx = \cos t \, dt$.

Khi $x = 0$ suy ra $t = 0$; khi $x = 1$ suy ra $t = \frac{\pi}{2}$.

$$\text{Do đó } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t \, dt.$$

Vì $\cos t \geq 0$ với mọi $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ nên

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt = \frac{1}{2} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Do đó $S = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$. □

Dạng 3. Tập hợp điểm của số phức là elíp

Phương pháp giải:

Định nghĩa 1. Cho hai điểm cố định F_1 và F_2 với $F_1F_2 = 2c > 0$. Đường elíp là tập hợp các điểm M sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$ ($a > c$). Hai điểm F_1, F_2 được gọi là các tiêu điểm của elíp. Khoảng cách $2c$ được gọi là tiêu cự của elíp.

Phương trình chính tắc của elíp (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Các thông số cần nhớ:

— Trục lớn $A_1A_2 = 2a$.

— Trục bé $B_1B_2 = 2b$.

— Tiêu cự $F_1F_2 = 2c$.

— Mối liên hệ $a^2 = b^2 + c^2$.

— Bán kính qua tiêu của M là $MF_1 = a + \frac{c}{a}x$, $MF_2 = a - \frac{c}{a}x$.

📁 BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Biết tập hợp các điểm M biểu diễn hình học số phức z thỏa mãn $|z + 4| + |z - 4| = 10$ là một elíp (E). Hãy viết phương trình elíp đó.

🔗 **Lời giải.**

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + iy$, với $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn bài toán.

Khi đó $z - 4 = x + iy - 4 = (x - 4) + yi$.

Do đó $|z - 4| = \sqrt{(x - 4)^2 + y^2}$.

Tương tự, xét $z + 4 = x + iy + 4 = (x + 4) + yi$.

Do đó $|z + 4| = \sqrt{(x + 4)^2 + y^2}$.

Từ giả thiết suy ra $\sqrt{(x - 4)^2 + y^2} + \sqrt{(x + 4)^2 + y^2} = 10$ (*).

Đặt $F_1(-4; 0)$ và $F_2(4; 0)$ thì (*) $\Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 10 > F_1F_2 = 8$.

Nên tập hợp điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z là một elíp (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với hai tiêu điểm F_1, F_2 .

Do $MF_1 + MF_2 = 10$ suy ra $2a = 10 \Leftrightarrow a = 5$.

Mặt khác $F_1F_2 = 8$ suy ra $2c = 8 \Leftrightarrow c = 4$.

Mà $b^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow b^2 = 25 - 16 \Leftrightarrow b^2 = 9 \Leftrightarrow b = 3$.

Vậy phương trình elíp (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. □

Bài 2. Biết tập hợp các điểm M biểu diễn hình học số phức z thỏa mãn $|z - 2| + |z + 2| = 10$ là một elíp (E). Hãy viết phương trình elíp đó.

🔗 **Lời giải.**

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + iy$, với $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn bài toán.

Khi đó $z - 2 = x + iy - 2 = (x - 2) + yi$.

Do đó $|z - 2| = \sqrt{(x - 2)^2 + y^2}$.

Tương tự, xét $z + 2 = x + iy + 2 = (x + 2) + yi$.

Do đó $|z + 2| = \sqrt{(x + 2)^2 + y^2}$.

Từ giả thiết suy ra $\sqrt{(x - 2)^2 + y^2} + \sqrt{(x + 2)^2 + y^2} = 10$ (*).

Đặt $F_1(-2; 0)$ và $F_2(2; 0)$ thì (*) $\Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 10 > F_1F_2 = 4$.

Nên tập hợp điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z là một elíp $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với hai tiêu điểm F_1, F_2 .

Do $MF_1 + MF_2 = 10$ suy ra $2a = 10 \Leftrightarrow a = 5$.

Mặt khác $F_1F_2 = 4$ suy ra $2c = 4 \Leftrightarrow c = 2$.

Mà $b^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow b^2 = 25 - 4 \Leftrightarrow b^2 = 21 \Leftrightarrow b = \sqrt{21}$.

Vậy phương trình elíp $(E) : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$. □

Bài 3. Biết tập hợp các điểm M biểu diễn hình học số phức z thỏa mãn $|z - 1| + |z + 1| = 4$ là một elíp (E) . Hãy viết phương trình elíp đó.

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + iy$, với $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn bài toán.

Khi đó $z - 1 = x + iy - 1 = (x - 1) + yi$.

Do đó $|z - 1| = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$.

Tương tự, xét $z + 1 = x + iy + 1 = (x + 1) + yi$.

Do đó $|z + 1| = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2}$.

Từ giả thiết suy ra $\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} + \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} = 4$ (*).

Đặt $F_1(-1; 0)$ và $F_2(1; 1)$ thì $(*) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 4 > F_1F_2 = 2$.

Nên tập hợp điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z là một elíp $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với hai tiêu điểm F_1, F_2 .

Do $MF_1 + MF_2 = 4$ suy ra $2a = 4 \Leftrightarrow a = 2$.

Mặt khác $F_1F_2 = 2$ suy ra $2c = 2 \Leftrightarrow c = 1$.

Mà $b^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow b^2 = 4 - 1 \Leftrightarrow b^2 = 3 \Leftrightarrow b = \sqrt{3}$.

Vậy phương trình elíp $(E) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. □

Bài 4. Biết tập hợp các điểm M biểu diễn hình học số phức z thỏa mãn $|z - \sqrt{2}| + |z + \sqrt{2}| = 8$ là một elíp (E) . Hãy viết phương trình elíp đó.

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + iy$, với $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn bài toán.

Khi đó $z - \sqrt{2} = x + iy - \sqrt{2} = (x - \sqrt{2}) + yi$.

Do đó $|z - \sqrt{2}| = \sqrt{(x - \sqrt{2})^2 + y^2}$.

Tương tự, xét $z + \sqrt{2} = x + iy + \sqrt{2} = (x + \sqrt{2}) + yi$.

Do đó $|z + \sqrt{2}| = \sqrt{(x + \sqrt{2})^2 + y^2}$.

Từ giả thiết suy ra $\sqrt{(x - \sqrt{2})^2 + y^2} + \sqrt{(x + \sqrt{2})^2 + y^2} = 8$ (*).

Đặt $F_1(-\sqrt{2}; 0)$ và $F_2(\sqrt{2}; 0)$ thì $(*) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 8 > F_1F_2 = 2\sqrt{2}$.

Nên tập hợp điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z là một elíp $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với hai tiêu điểm F_1, F_2 .

Do $MF_1 + MF_2 = 8$ suy ra $2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$.

Mặt khác $F_1F_2 = 2\sqrt{2}$ suy ra $2c = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow c = \sqrt{2}$.

Mà $b^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow b^2 = 16 - 2 \Leftrightarrow b^2 = 14 \Leftrightarrow b = \sqrt{14}$.

Vậy phương trình elíp $(E) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{14} = 1$. □

Dạng 4. Bài toán liên quan đến giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Sử dụng phương pháp lượng giác hóa Phương pháp giải: Đối với nhóm bài toán tập hợp điểm biểu diễn số phức là một đường tròn thì việc lượng giác hóa tỏ ra khá hiệu quả và nhanh chóng.

Giả sử có được giả thiết $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x - a}{R}\right)^2 + \left(\frac{y - b}{R}\right)^2 = 1$, sẽ gọi ta đến công

thức $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ nên ta đặt $\begin{cases} \frac{x - a}{R} = \sin t \\ \frac{y - b}{R} = \cos t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = R \sin t + a \\ y = R \cos t + b \end{cases}$ để đưa bài toán về dạng lượng

giác quen thuộc. Ngoài ra, ta cần nhớ những đánh giá thường được sử dụng

$$\text{— } -1 \leq \sin t \leq 1, -1 \leq \cos t \leq 1 \text{ và } a \sin t + b \cos t = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(t + \alpha).$$

$$\text{— Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng 1: } |ax + by| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}.$$

$$\text{— } a \sin t + b \cos t \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(\sin^2 t + \cos^2 t)} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \frac{\sin t}{a} = \frac{\cos t}{b} \\ a \sin t + b \cos t = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

$$\text{— } a \sin t + b \cos t \geq -\sqrt{(a^2 + b^2)(\sin^2 t + \cos^2 t)} = -\sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \frac{\sin t}{a} = \frac{\cos t}{b} \\ a \sin t + b \cos t = -\sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

D BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho số phức $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z - 2 - 3i| = 1$ và biểu thức $|\bar{z} + i + 1|$ đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị của biểu thức $|3x - 2y|$.

Lời giải.

Ta có $|z - 2 - 3i| = 1 \Leftrightarrow |(x - 2) + (y - 3)i| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 3)^2} = 1 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ (*)

— **Cách giải 1. Sử dụng lượng giác hóa** Đặt $\begin{cases} x = \sin t + 2 \\ y = \cos t + 3 \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} |\bar{z} + i + 1| &= |x - yi + i + 1| \\ &= |(x + 1) + (1 - y)i| \\ &= \sqrt{(x + 1)^2 + (1 - y)^2} \\ &= \sqrt{((x - 2) + 3)^2 + (-2 - (y - 3))^2} \\ &= \sqrt{(x - 2)^2 + 6(x - 2) + 9 + 4 + 4(y - 3) + (y - 3)^2} \end{aligned}$$

Từ (*) suy ra $|\bar{z} + i + 1| = \sqrt{6x + 4y - 10}$.

Khi đó $\sqrt{6x + 4y - 10} = \sqrt{6 \sin t + 4 \cos t + 14}$.

Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có

$$(6 \sin t + 4 \cos t)^2 \leq (6^2 + 4^2)(\sin^2 t + \cos^2 t) \Leftrightarrow (6 \sin t + 4 \cos t)^2 \leq 52 \Leftrightarrow |6 \sin t + 4 \cos t| \leq 2\sqrt{13}$$

Suy ra $\sqrt{6x + 4y - 10} \leq \sqrt{2\sqrt{13} + 14}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} \frac{\sin t}{6} = \frac{\cos t}{4} \\ 6 \sin t + 4 \cos t = 2\sqrt{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin t - 3 \cos t = 0 \\ 3 \sin t + 2 \cos t = \sqrt{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = \frac{3\sqrt{13}}{13} \\ \cos t = \frac{2\sqrt{13}}{13} \end{cases}$$

$$\text{Do } \begin{cases} x = \sin t + 2 \\ y = \cos t + 3 \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{13}}{13} + 2 \\ y = \frac{2\sqrt{13}}{13} + 3 \end{cases}.$$

$$\text{Nên } |3x - 2y| = \frac{5\sqrt{13}}{13}.$$

— **Cách giải 2. Sử dụng trực tiếp bất đẳng thức Cauchy - Schwarz**

Ta có

$$\begin{aligned}
|\bar{z} + i + 1| &= |x - yi + i + 1| \\
&= |(x + 1) + (1 - y)i| \\
&= \sqrt{(x + 1)^2 + (1 - y)^2} \\
&= \sqrt{((x - 2) + 3)^2 + (-2 - (y - 3))^2} \\
&= \sqrt{(x - 2)^2 + 6(x - 2) + 9 + 4 + 4(y - 3) + (y - 3)^2}
\end{aligned}$$

Từ (*) suy ra $|\bar{z} + i + 1| = \sqrt{6x + 4y - 10} = \sqrt{6(x - 2) + 4(y - 3) + 14}$.

Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có

$$[6(x - 2) + 4(y - 3)]^2 \leq (6^2 + 4^2) [(x - 2)^2 + (y - 3)^2] \Leftrightarrow |6(x - 2) + 4(y - 3)| \leq 2\sqrt{13}$$

Suy ra $\sqrt{6x + 4y - 10} \leq \sqrt{2\sqrt{13} + 14}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} \frac{x - 2}{6} = \frac{y - 3}{4} \\ 6x + 4y - 24 = 2\sqrt{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 3x + 2y = 12 + \sqrt{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{13}}{13} + 2 \\ y = \frac{2\sqrt{13}}{13} + 3 \end{cases}$$

$$\text{Nên } |3x - 2y| = \frac{5\sqrt{13}}{13}.$$

— **Cách giải 3. Sử dụng hình học (hình chiếu và tương giao)**

Giải sử $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z .

Từ (*) suy ra tập hợp biểu diễn số phức z là đường tròn có phương trình $(C): (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$.

Gọi I, R là tâm và bán kính đường tròn (C) ta có $I(2; 3), R = 1$.

Mặt khác

$$\begin{aligned}
|\bar{z} + i + 1| &= |x - yi + i + 1| \\
&= |(x + 1) + (1 - y)i| \\
&= \sqrt{(x + 1)^2 + (1 - y)^2} \\
&= \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2}
\end{aligned}$$

Giải sử $N(-1; 1)$ suy ra $MN = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2}$.

Bài toán trở thành tìm vị trí điểm M trên đường tròn (C) sao cho độ dài MN đạt giá trị lớn nhất.

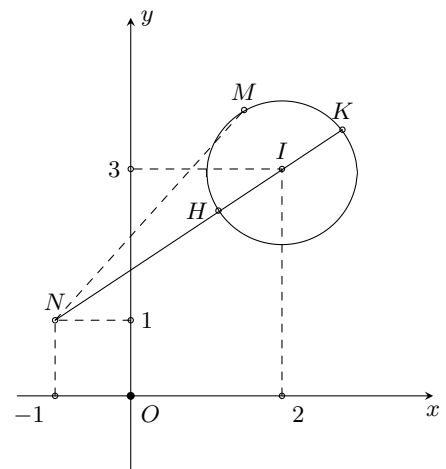
Gọi H, K lần lượt là giao điểm của đường thẳng NI với đường tròn (C) như hình bên.

Dễ thấy $NH \leq MN \leq NK$ suy ra $\max MN = NK$ khi $M \equiv K$.

Mà phương trình đường thẳng đi qua hai điểm I, N là $\frac{x + 1}{3} =$

$$\frac{y - 1}{2} \Leftrightarrow 2x - 3y + 5 = 0.$$

Khi đó tọa độ điểm K là nghiệm của hệ phương trình



$$\begin{aligned}
& \begin{cases} 2x - 3y + 5 = 0 \\ (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2x + 5}{3} \\ (x - 2)^2 + \left(\frac{2x + 5}{3} - 3\right)^2 = 1 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2x + 5}{3} \\ 9(x - 2)^2 + (2x - 4)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2x + 5}{3} \\ 13x^2 - 52x + 43 = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2x + 5}{3} \\ \begin{bmatrix} x = 2 + \frac{3\sqrt{13}}{13} \\ x = 2 - \frac{3\sqrt{13}}{13} \end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} x = 2 + \frac{3\sqrt{13}}{13} \\ y = 3 + \frac{2\sqrt{13}}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 - \frac{3\sqrt{13}}{13} \\ y = 3 - \frac{2\sqrt{13}}{3} \end{cases} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Suy ra tọa độ điểm $K \left(2 + \frac{3\sqrt{13}}{13}; 3 + \frac{3\sqrt{13}}{13} \right)$. Do đó $\begin{cases} x = 2 + \frac{3\sqrt{13}}{13} \\ y = 3 + \frac{2\sqrt{13}}{3} \end{cases}$ nên $|3x - 2y| = \frac{5\sqrt{13}}{13}$.

□

Bài 2. Xét các số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5}$. Tính $P = a + b$ khi $|z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

Ta có $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |(a - 4) + (b - 3)i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(a - 4)^2 + (b - 3)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a - 4)^2 + (b - 3)^2 = 5$ (*)

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{5} \sin t + 4 \\ b = \sqrt{5} \cos t + 3 \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned}
Q &= |z + 1 - 3i| + |z - 1 + i| \\
&= \sqrt{(a + 1)^2 + (b - 3)^2} + \sqrt{(a - 1)^2 + (b + 1)^2} \\
&= \sqrt{(\sqrt{5} \sin t + 5)^2 + (\sqrt{5} \cos t)^2} + \sqrt{(\sqrt{5} \sin t + 3)^2 + (\sqrt{5} \cos t + 4)^2} \\
&= \sqrt{5 \sin^2 t + 10\sqrt{5} \sin t + 25 + 5 \cos^2 t} + \sqrt{5 \sin^2 t + 6\sqrt{5} \sin t + 9 + 5 \cos^2 t + 8\sqrt{5} \cos t + 16} \\
&= \sqrt{10\sqrt{5} \sin t + 30} + \sqrt{6\sqrt{5} \sin t + 8\sqrt{5} \cos t + 30}
\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{10\sqrt{5} \sin t + 30} + \sqrt{6\sqrt{5} \sin t + 8\sqrt{5} \cos t + 30} \right)^2 &\leq (1^2 + 1^2) (10\sqrt{5} \sin t + 30 + 6\sqrt{5} \sin t + 8\sqrt{5} \cos t + 30) \\
&\leq 2 (16\sqrt{5} \sin t + 8\sqrt{5} \cos t + 60) \\
&\leq 16\sqrt{5} (2 \sin t + \cos t) + 120
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\sqrt{10\sqrt{5} \sin t + 30} + \sqrt{6\sqrt{5} \sin t + 8\sqrt{5} \cos t + 30} \leq \sqrt{16\sqrt{5} (2 \sin t + \cos t) + 120}$$

Mà

$$(2 \sin t + \cos t)^2 \leq (2^2 + 1^2) (\sin^2 t + \cos^2 t) \Leftrightarrow (2 \sin t + \cos t)^2 \leq 5 \Leftrightarrow |2 \sin t + \cos t| \leq \sqrt{5}$$

Nên

$$\sqrt{16\sqrt{5} (2 \sin t + \cos t) + 120} \leq \sqrt{200} \Leftrightarrow \sqrt{16\sqrt{5} (2 \sin t + \cos t) + 120} \leq 10\sqrt{2}$$

Suy ra $Q \leq 10\sqrt{2}$ dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} \frac{\sin t}{2} = \frac{\cos t}{1} \\ 2\sin t + \cos t = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t - 2\cos t = 0 \\ 2\sin t + \cos t = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos t = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Mà $\begin{cases} a = \sqrt{5}\sin t + 4 \\ b = \sqrt{5}\cos t + 3 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} a = 6 \\ b = 4 \end{cases}$.

Nên $P = a + b = 10$. □

Bài 3. Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z + 6 - 8i| = 2\sqrt{5}$. Tính $P = a + b$ khi $Q = |z + 6 + 2i| + |z - 2 - 2i|$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

Ta có $|z + 6 - 8i| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |(a + 6) + (b - 8)i| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(a + 6)^2 + (b - 8)^2} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow (a + 6)^2 + (b - 8)^2 = 20$ (*)

Đặt $\begin{cases} a = 2\sqrt{5}\sin t - 6 \\ b = 2\sqrt{5}\cos t + 8 \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} Q &= |z + 6 + 2i| + |z - 2 - 2i| \\ &= \sqrt{(a + 6)^2 + (b + 2)^2} + \sqrt{(a - 2)^2 + (b - 2)^2} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{5}\sin t)^2 + (2\sqrt{5}\cos t + 10)^2} + \sqrt{(2\sqrt{5}\sin t - 8)^2 + (2\sqrt{5}\cos t + 6)^2} \\ &= \sqrt{20\sin^2 t + 20\cos^2 t + 40\sqrt{5}\cos t + 100} + \sqrt{20\sin^2 t - 32\sqrt{5}\sin t + 64 + 20\cos^2 t + 24\sqrt{5}\cos t + 36} \\ &= \sqrt{40\sqrt{5}\cos t + 120} + \sqrt{-32\sqrt{5}\sin t + 24\sqrt{5}\cos t + 120} \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{40\sqrt{5}\cos t + 120} + \sqrt{-32\sqrt{5}\sin t + 24\sqrt{5}\cos t + 120} \right)^2 &\leq (1^2 + 1^2) (40\sqrt{5}\cos t + 120 - 32\sqrt{5}\sin t + 24\sqrt{5}\cos t + 120) \\ &\leq 2 (64\sqrt{5}\cos t - 32\sqrt{5}\sin t + 240) \\ &\leq 64\sqrt{5} (2\cos t - \sin t) + 480 \end{aligned}$$

Suy ra

$$\sqrt{40\sqrt{5}\cos t + 120} + \sqrt{-32\sqrt{5}\sin t + 24\sqrt{5}\cos t + 120} \leq \sqrt{64\sqrt{5} (2\cos t - \sin t) + 480}$$

Mà

$$(2\cos t - \sin t)^2 \leq (2^2 + (-1)^2) (\cos^2 t + \sin^2 t) \Leftrightarrow (2\cos t - \sin t)^2 \leq 5 \Leftrightarrow |2\cos t - \sin t| \leq \sqrt{5}$$

Nên

$$\sqrt{64\sqrt{5} (2\cos t - \sin t) + 480} \leq \sqrt{800} \Leftrightarrow \sqrt{64\sqrt{5} (2\cos t - \sin t) + 480} \leq 20\sqrt{2}$$

Suy ra $Q \leq 20\sqrt{2}$ dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} \frac{\cos t}{2} = \frac{\sin t}{-1} \\ 2\cos t - \sin t = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin t + \cos t = 0 \\ 2\cos t - \sin t = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = \frac{-\sqrt{5}}{5} \\ \cos t = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Mà $\begin{cases} a = 2\sqrt{5}\sin t - 6 \\ b = 2\sqrt{5}\cos t + 8 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} a = -8 \\ b = 12 \end{cases}$.

Nên $P = a + b = 4$. □

Bài 4. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $\frac{z-2i}{z-2}$ là số ảo. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z-1| + |z-i|$.

Lời giải.

Giả sử số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$\begin{aligned}\frac{z-2i}{z-2} &= \frac{a+bi-2i}{a+bi-2} = \frac{a+(b-2)i}{(a-2)+bi} \\ &= \frac{[a+(b-2)i][(a-2)-bi]}{[(a-2)+bi][(a-2)-bi]} \\ &= \frac{a(a-2)-abi+b(b-2)+(b-2)(a-2)i}{(a-2)^2+b^2} \\ &= \frac{a(a-2)+b(b-2)}{(a-2)^2+b^2} + \left(\frac{(b-2)(a-2)-ab}{(a-2)^2+b^2} \right) i\end{aligned}$$

Do giả thiết suy ra $a(a-2)+b(b-2)=0 \Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2=2 \quad (*)$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{2} \sin t + 1 \\ b = \sqrt{2} \cos t + 1 \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned}P &= |z-1| + |z-i| \\ &= \sqrt{(a-1)^2+b^2} + \sqrt{a^2+(b-1)^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{2} \sin t)^2 + (\sqrt{2} \cos t + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{2} \sin t + 1)^2 + (\sqrt{2} \cos t)^2} \\ &= \sqrt{2 \sin^2 t + 2 \cos^2 t + 2\sqrt{2} \cos t + 1} + \sqrt{2 \sin^2 t + 2\sqrt{2} \sin t + 1 + 2 \cos^2 t} \\ &= \sqrt{2\sqrt{2} \cos t + 3} + \sqrt{2\sqrt{2} \sin t + 3}\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2\sqrt{2} \cos t + 3} + \sqrt{2\sqrt{2} \sin t + 3} \right)^2 &\leq (1^2 + 1^2) (2\sqrt{2} \cos t + 3 + 2\sqrt{2} \sin t + 3) \\ &\leq 2 (2\sqrt{2} \cos t + 2\sqrt{2} \sin t + 6) \\ &\leq 4\sqrt{2} (\cos t + \sin t) + 12 = 8 \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + 12\end{aligned}$$

Do $-1 \leq \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \leq 1$ ta suy ra

$$\left(\sqrt{2\sqrt{2} \cos t + 3} + \sqrt{2\sqrt{2} \sin t + 3} \right)^2 \leq 20 \Rightarrow \sqrt{2\sqrt{2} \cos t + 3} + \sqrt{2\sqrt{2} \sin t + 3} \leq 2\sqrt{5}$$

Do đó $P \leq 2\sqrt{5}$ dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2\sqrt{2} \cos t + 3}}{1} = \frac{\sqrt{2\sqrt{2} \sin t + 3}}{1} \\ \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = \cos t \\ \cos t + \sin t = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Mà $\begin{cases} a = \sqrt{2} \sin t + 1 \\ b = \sqrt{2} \cos t + 1 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$.

Nên $\max P = 2\sqrt{5}$. □

Bài 5. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i| = \sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z+2|^2 - |z-i|^2$. Tính môđun của số phức $w = M + mi$.

Lời giải.

Giả sử số phức z có dạng $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ta có $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |(a - 4) + (b - 3)i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(a - 4)^2 + (b - 3)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a - 4)^2 + (b - 3)^2 = 5$ (*)

Khi đó

$$\begin{aligned} P &= |z + 2|^2 - |z - i|^2 \\ &= (a + 2)^2 + b^2 - a^2 - (b - 1)^2 \\ &= a^2 + 4a + 4 + b^2 - a^2 - b^2 + 2b - 1 \\ &= 4a + 2b + 3 \\ &= 2[2(a - 4) + (b - 3)] + 25 \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có

$$\begin{aligned} [2(a - 4) + (b - 3)]^2 &\leq (2^2 + 1^2) [(a - 4)^2 + (b - 3)^2] \\ &\Leftrightarrow [2(a - 4) + (b - 3)]^2 \leq 25 \\ &\Leftrightarrow |2(a - 4) + (b - 3)| \leq 5 \end{aligned}$$

Nên

$$15 \leq 2[2(a - 4) + (b - 3)] + 25 \leq 35$$

Suy ra $\max P = 35$ và $\min P = 15$ hay $M = 35$; $m = 15$.

Khi đó $|w| = \sqrt{15^2 + 35^2} = 5\sqrt{58}$. □

Bài 6. Xét số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 2|^2 + |z + 2|^2 = 26$ và biểu thức $\left| z - \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i \right|$

đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị của biểu thức $P = |a + b|$.

[🔗Lời giải.](#)

Giả sử số phức z có dạng $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ta có

$$\begin{aligned} |z - 2|^2 + |z + 2|^2 &= 26 \\ \Leftrightarrow (a - 2)^2 + b^2 + (a + 2)^2 + b^2 &= 26 \\ \Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 + b^2 + a^2 + 4a + 4 + b^2 &= 26 \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 9 \quad (*) \end{aligned}$$

Mà

$$\begin{aligned} \left| z - \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i \right| &= \left| \left(a - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) + \left(b - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)i \right| \\ &= \sqrt{\left(a - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left(b - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)^2} \\ &= \sqrt{a^2 - 3\sqrt{2}a + \frac{9}{2} + b^2 - 3\sqrt{2}b + \frac{9}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{Do } (*) \text{ nên } \left| z - \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i \right| = \sqrt{18 - 3\sqrt{2}(a + b)}.$$

Ta có

$$(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) \Leftrightarrow (a + b)^2 \leq 18 \Leftrightarrow |a + b| \leq 3\sqrt{2}$$

Nên

$$0 \leq 18 - 3\sqrt{2}(a + b) \leq 36 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{18 - 3\sqrt{2}(a + b)} \leq 6$$

Suy ra $\max \left| z - \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i \right| = 6$ khi đó $|a + b| = 3\sqrt{2}$. □

Bài 7. Xét số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $\frac{z-2i}{z-2}$ là số thuần ảo và môđun của z đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$.

Lời giải.

Giả sử số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$\begin{aligned}\frac{z-2i}{z-2} &= \frac{a+bi-2i}{a+bi-2} = \frac{a+(b-2)i}{(a-2)+bi} \\ &= \frac{[a+(b-2)i][(a-2)-bi]}{[(a-2)+bi][(a-2)-bi]} \\ &= \frac{a(a-2)-abi+b(b-2)+(b-2)(a-2)i}{(a-2)^2+b^2} \\ &= \frac{a(a-2)+b(b-2)}{(a-2)^2+b^2} + \left(\frac{(b-2)(a-2)-ab}{(a-2)^2+b^2} \right) i\end{aligned}$$

Do giả thiết suy ra $a(a-2)+b(b-2)=0 \Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2=2 \quad (*)$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{2}\sin t + 1 \\ b = \sqrt{2}\cos t + 1 \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned}|z| &= \sqrt{a^2+b^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{2}\sin t + 1)^2 + (\sqrt{2}\cos t + 1)^2} \\ &= \sqrt{2\sin^2 t + 2\sqrt{2}\sin t + 1 + 2\cos^2 t + 2\sqrt{2}\cos t + 1} \\ &= \sqrt{2\sqrt{2}(\cos t + \sin t) + 4} \\ &= \sqrt{4\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 4}\end{aligned}$$

Do $-1 \leq \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$ ta suy ra $\sqrt{4\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 4} \leq 4\sqrt{2}$.

Do đó $|z| \leq 4\sqrt{2}$ dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Mà $\begin{cases} a = \sqrt{2}\sin t + 1 \\ b = \sqrt{2}\cos t + 1 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} a = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + k2\pi\right) + 1 \\ b = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + k2\pi\right) + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$.

Nên $\max |z| = 4\sqrt{2}$ khi $\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$.

Do đó $P = 4$. □

Bài 8. Xét số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z-1+2i|=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z-2i|$.

Lời giải.

Ta có $|z-1+2i|=3 \Leftrightarrow |(a-1)+(b+2)i|=3 \Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2+(b+2)^2}=3 \Leftrightarrow (a-1)^2+(b+2)^2=9 \quad (*)$

Đặt $\begin{cases} a = 3\sin t + 1 \\ b = 3\cos t - 2 \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned}P &= |z-2i| = \sqrt{a^2+(b-2)^2} \\ &= \sqrt{(3\sin t + 1)^2 + (3\cos t - 4)^2} \\ &= \sqrt{9\sin^2 t + 6\sin t + 1 + 9\cos^2 t - 24\cos t + 16} \\ &= \sqrt{6(\sin t - 4\cos t) + 26}\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có

$$\begin{aligned}(\sin t - 4 \cos t)^2 &\leq (1^2 + (-4)^2) (\sin^2 t + \cos^2 t) \\ \Leftrightarrow (\sin t - 4 \cos t)^2 &\leq 17 \\ \Leftrightarrow |\sin t - 4 \cos t| &\leq \sqrt{17}\end{aligned}$$

Nên $\sqrt{6(\sin t - 4 \cos t) + 26} \leq \sqrt{6\sqrt{17} + 26}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} \frac{\cos t}{-4} = \frac{\sin t}{1} \\ \sin t - 4 \cos t = \sqrt{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t - 4 \sin t = 0 \\ \sin t - 4 \cos t = \sqrt{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = -\frac{\sqrt{17}}{15} \\ \cos t = -\frac{4\sqrt{17}}{15} \end{cases}$$

$$\text{Mà } \begin{cases} a = 3 \sin t + 1 \\ b = 3 \cos t - 2 \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} a = -\frac{3\sqrt{17}}{15} + 1 \\ b = -\frac{12\sqrt{17}}{15} - 2 \end{cases}.$$

Vậy $\max P = \sqrt{26 + 6\sqrt{17}}$. □

Dạng 5. Sử dụng bình phương vô hướng

Phương pháp giải:

Đối với một số bài toán tìm max, min việc sử dụng bình phương vô hướng để tìm điểm rơi nhằm áp dụng bất đẳng thức $ax + by \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$ hoặc $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b}) \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ tỏ ra khá hiệu quả. Ta cần nhớ bình phương vô hướng $|\vec{u} \pm \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 \pm 2\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Ví dụ 1. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 2z_2| = 5$ và $|3z_1 - z_2| = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z_1| + |z_2|$.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1 và z_2 .

Suy ra $|\vec{u}| = |z_1 + 2z_2| = |\vec{OM} + 2\vec{ON}| = 5$ và $|\vec{v}| = |3z_1 - z_2| = |3\vec{OM} - \vec{ON}| = 3$.

Phân tích. Bài toán trở thành tìm M, N để $P = |\vec{OM}| + |\vec{ON}|$ đạt giá trị lớn nhất thỏa mãn $|\vec{OM} + 2\vec{ON}| = 5$ và $|3\vec{OM} - \vec{ON}| = 3$. Để tìm $P_{\max}$ ta sử dụng bất đẳng thức $ax + by \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$.

Tức tìm $P = |\vec{OM}| + |\vec{ON}| = \frac{1}{\alpha} \cdot (\alpha |\vec{OM}|) + \frac{1}{\beta} \cdot (\beta |\vec{ON}|)$ hay

$$P = \frac{1}{\alpha} \cdot (\alpha |\vec{OM}|) + \frac{1}{\beta} \cdot (\beta |\vec{ON}|) \leq \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right) (\alpha^2 |\vec{OM}|^2 + \beta^2 |\vec{ON}|^2)}.$$

Do đó cần phải tìm tổng bình phương vô hướng $\alpha^2 |\vec{OM}|^2 + \beta^2 |\vec{ON}|^2 = \text{const}$, đó là chìa khóa.

Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} |\vec{OM} + 2\vec{ON}| = 5 \\ |\vec{OM} - \vec{ON}| = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{OM}|^2 + 4|\vec{ON}|^2 + 4\vec{OM} \cdot \vec{ON} = 25 \\ 9|\vec{OM}|^2 + |\vec{ON}|^2 - 6\vec{OM} \cdot \vec{ON} = 9 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3|\vec{OM}|^2 + 12|\vec{ON}|^2 + 12\vec{OM} \cdot \vec{ON} = 75 \\ 18|\vec{OM}|^2 + 2|\vec{ON}|^2 - 12\vec{OM} \cdot \vec{ON} = 18 \end{cases} &\Rightarrow 21|\vec{OM}|^2 + 14|\vec{ON}|^2 = 93. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} P &= |\vec{OM}| + |\vec{ON}| = \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot (\sqrt{21} \cdot |\vec{OM}|) + \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot (\sqrt{14} \cdot |\vec{ON}|) \\ &\leq \sqrt{\left(\frac{1}{21} + \frac{1}{14}\right) (21|\vec{OM}|^2 + 14|\vec{ON}|^2)} = \sqrt{\left(\frac{1}{21} + \frac{1}{14}\right) \cdot 93} = \sqrt{\frac{155}{14}} \Rightarrow P_{\max} = \sqrt{\frac{155}{14}}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 21OM = 14ON \\ OM + ON = \sqrt{\frac{155}{14}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ON = \frac{3}{5}\sqrt{\frac{155}{14}} \\ OM = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{155}{14}}. \end{cases}$ □

Ví dụ 2. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - i| = 1$ và biểu thức $P = 3|z| + 2|z - 4 - 4i|$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm mô-đun của số phức z .

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Có $|z - 1 - i| = 1 \Leftrightarrow |(x - 1) + (y - 1)i| = 1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$. Do đó tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn tâm $I(1; 1)$ bán kính $R = 1$.

Ta có $P = 3|z| + 2|z - 4 - 4i| = 3\sqrt{x^2 + y^2} + 2\sqrt{(x - 4)^2 + (y - 4)^2}$.

Xét $O(0; 0)$, $N(4; 4)$ thì $P = 3OM + 2NM = 3|\overrightarrow{OM}| + 2|\overrightarrow{NM}|$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} |\overrightarrow{OM}|^2 = (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM})^2 = |\overrightarrow{OI}|^2 + |\overrightarrow{IM}|^2 + 2\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IM} = 3 + 2\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IM} \\ |\overrightarrow{NM}|^2 = (\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IM})^2 = |\overrightarrow{NI}|^2 + |\overrightarrow{IM}|^2 + 2\overrightarrow{NI} \cdot \overrightarrow{IM} = 19 + 2\overrightarrow{NI} \cdot \overrightarrow{IM} \end{cases}$$

$$\text{Nhận thấy rằng } \begin{cases} \overrightarrow{OI} = (1; 1) \\ \overrightarrow{NI} = (3; 3) = 3(1; 1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{NI} = 3\overrightarrow{OI} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IN} = \vec{0}.$$

$$\text{Suy ra } 3|\overrightarrow{OM}|^2 + |\overrightarrow{NM}|^2 = 28 + 2\overrightarrow{IM} \cdot (3\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{NI}) = 28 \Rightarrow 3|\overrightarrow{OM}|^2 + |\overrightarrow{NM}|^2 = 28.$$

$$\text{Khi đó } P = 3|\overrightarrow{OM}| + 2|\overrightarrow{NM}| = \sqrt{3}(\sqrt{3}|\overrightarrow{OM}|) + 2 \cdot |\overrightarrow{NM}| \leq \sqrt{(3+4)(3|\overrightarrow{OM}|^2 + |\overrightarrow{NM}|^2)} = 14.$$

$$\text{Vậy } P_{\max} = 14 \text{ đạt được khi } \begin{cases} |\overrightarrow{OM}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{NM}| \\ 3|\overrightarrow{OM}| + 2|\overrightarrow{NM}| = 14 \end{cases} \Leftrightarrow |\overrightarrow{OM}| = 2 = |z|. \quad \square$$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tính giá trị lớn nhất của $P = |z + 1| + 3|z - 1|$.

Lời giải.

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z và $A(-1; 0)$, $B(1; 0)$, $O(0; 0)$.

Khi đó $|z| = 1 \Leftrightarrow |\overrightarrow{OM}| = 1$ và $P = |z + 1| + 3|z - 1| = |\overrightarrow{AM}| + 3|\overrightarrow{BM}|$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} |\overrightarrow{AM}|^2 = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM})^2 = |\overrightarrow{AO}|^2 + |\overrightarrow{OM}|^2 + 2 \cdot \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OM} = 2 + 2 \cdot \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OM} \\ |\overrightarrow{BM}|^2 = (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM})^2 = |\overrightarrow{BO}|^2 + |\overrightarrow{OM}|^2 + 2 \cdot \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{OM} = 2 + 2 \cdot \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{OM}. \end{cases}$$

Dễ thấy $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$.

$$\text{Suy ra } |\overrightarrow{AM}|^2 + |\overrightarrow{BM}|^2 = 4 + 2\overrightarrow{OM} \cdot (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}) = 4.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$$P = |\overrightarrow{AM}| + 3|\overrightarrow{BM}| \leq \sqrt{(1^2 + 3^2)(|\overrightarrow{AM}|^2 + |\overrightarrow{BM}|^2)} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} AM = \frac{1}{3}BM \\ AM + BM = 2\sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BM = \frac{2}{3}\sqrt{10} \\ AM = \frac{1}{2}\sqrt{10}. \end{cases} \quad \square$$

Bài 2. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - 2i| = 2$ và biểu thức $P = |z| + |z - 3 - 6i|$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $|\overline{z}|$.

Lời giải.

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z và $I(1; 2)$, $O(0; 0)$, $A(3; 6)$.

Khi đó $|z - 1 - 2i| = 2 \Leftrightarrow |\overrightarrow{IM}| = 2$ và $P = |z| + |z - 3 - 6i| = |\overrightarrow{OM}| + |\overrightarrow{AM}|$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} |\overrightarrow{OM}|^2 = (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM})^2 = |\overrightarrow{OI}|^2 + |\overrightarrow{IM}|^2 + 2\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IM} = 9 + 2\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IM} \\ |\overrightarrow{AM}|^2 = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM})^2 = |\overrightarrow{AI}|^2 + |\overrightarrow{IM}|^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IM} = 24 + 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IM}. \end{cases}$$

Mặt khác $\begin{cases} \overrightarrow{AI} = (-2; -4) \\ \overrightarrow{OI} = (1; 2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{OI} = \vec{0}.$

Suy ra $2|\overrightarrow{OM}|^2 + |\overrightarrow{AM}|^2 = 42.$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$$P = |\overrightarrow{OM}| + |\overrightarrow{AM}| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} |\overrightarrow{OM}| + |\overrightarrow{AM}| \leq \sqrt{\left(\frac{1}{2} + 1\right) \left(2|\overrightarrow{OM}|^2 + |\overrightarrow{AM}|^2\right)} = 3\sqrt{7}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 2|\overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{AM}| \\ |\overrightarrow{OM}| + |\overrightarrow{AM}| = 3\sqrt{7} \end{cases} \Rightarrow |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{7} \Rightarrow |z| = \sqrt{7} \Rightarrow |\bar{z}| = \sqrt{7}. \quad \square$

Bài 3. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z_1| + |z_2|$.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là hai điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 và $O(0; 0)$.

Ta có $z_1 + z_2 = 8 + 6i \Rightarrow |z_1 + z_2| = 10$.

Khi đó $|z_1 - z_2| = 2 \Leftrightarrow |\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}| = 2; |z_1 + z_2| = 10 \Leftrightarrow |\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}| = 10$ và $P = |\overrightarrow{OM}| + |\overrightarrow{ON}|$.

Suy ra $\begin{cases} |\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}|^2 = 4 \\ |\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}|^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\overrightarrow{OM}|^2 + |\overrightarrow{ON}|^2 - 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 4 \\ |\overrightarrow{OM}|^2 + |\overrightarrow{ON}|^2 + 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 100 \end{cases} \Rightarrow |\overrightarrow{OM}|^2 + |\overrightarrow{ON}|^2 = 52.$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$$P = |\overrightarrow{OM}| + |\overrightarrow{ON}| \leq \sqrt{(1+1) \left(|\overrightarrow{OM}|^2 + |\overrightarrow{ON}|^2\right)} = 2\sqrt{26} \Rightarrow P_{\max} = 2\sqrt{26}. \quad \square$$

Bài 4. Cho số phức $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $4|z + i| + 3|z - i| = 10$. Tìm $|z|_{\min}$.

Lời giải.

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z và $A(0; -1), B(0; 1)$.

Suy ra $4|z + i| + 3|z - i| = 10 \Leftrightarrow 4|\overrightarrow{AM}| + 3|\overrightarrow{BM}| = 10; |z| = |\overrightarrow{OM}|$.

Ta có $\begin{cases} |\overrightarrow{OM}|^2 = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM})^2 = OA^2 + AM^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AM} \\ |\overrightarrow{OM}|^2 = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM})^2 = OB^2 + BM^2 + 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BM} \end{cases}$

Dễ thấy $\overrightarrow{OA} = (0; -1), \overrightarrow{OB} = (0; 1) \Rightarrow \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$ và $OA^2 = OB^2 = 1$.

Suy ra

$$\begin{aligned} 2|\overrightarrow{OM}|^2 &= OA^2 + OB^2 + AM^2 + BM^2 + 2(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BM}) \\ &= 2 + AM^2 + BM^2 + 2\overrightarrow{OA}(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM}) \\ &= 2 + AM^2 + BM^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = AM^2 + BM^2 - 2. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$$4|\overrightarrow{AM}| + 3|\overrightarrow{BM}| \leq \sqrt{(3^2 + 4^2)(AM^2 + BM^2)} \Leftrightarrow 10 \leq \sqrt{25(AM^2 + BM^2)} \Rightarrow AM^2 + BM^2 \geq 4.$$

Vậy $2|\overrightarrow{OM}|^2 = AM^2 + BM^2 - 2 \geq 4 - 2 = 2 \Rightarrow |\overrightarrow{OM}| \geq 1 \Rightarrow |z|_{\min} = 1. \quad \square$

Bài 5. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $|z + i|$.

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z .

Suy ra $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5.$

Khi đó $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2 = (x + 2)^2 + y^2 - x^2 - (y - 1)^2 = 4x + 2y + 3 = 2[2(x - 3) + (y - 4)] + 23$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$$\begin{aligned} 2(x - 3) + (y - 4) &\leq \sqrt{(2^2 + 1^2)[(x - 3)^2 + (y - 4)^2]} = 5 \\ \Rightarrow P_{\max} &= 2 \cdot 5 + 23 = 33. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{x-3}{2} = y-4 \\ 2(x-3) + (y-4) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5. \end{cases}$

Khi đó $|z + i| = \sqrt{61}$. □

Bài 6. Cho số phức $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5}$. Tính $x + y$ biết rằng biểu thức $P = |z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z .

Khi đó $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5$ và $P = |z + 1 - 3i| + |z - 1 + i| = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 3)^2} + \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 3)^2} + \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} \\ &\leq \sqrt{2[(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (x - 1)^2 + (y + 1)^2]} = \sqrt{2[2(x^2 + y^2) - 4y + 12]} \end{aligned}$$

Mặt khác $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 8x + 6y - 20$.

Suy ra $P \leq \sqrt{2(16x + 8y - 28)} = 2\sqrt{8x + 4y - 14}$.

Lại có $8x + 4y - 14 = 8(x - 4) + 4(y - 3) + 30 \leq \sqrt{(8^2 + 4^2)[(x - 4)^2 + (y - 3)^2]} + 30 = 20 + 30 = 50$.

Do đó $P \leq 2\sqrt{50} = 10\sqrt{2} \Rightarrow P_{\max} = 10\sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{x-4}{8} = \frac{y-3}{4} \\ 8(x-4) + 4(y-3) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow x + y = 10$. □

Bài 7. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 2$ và biểu thức $P = |z - 1| + |z - 1 - 7i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính mô-đun của số phức $w = z - 1 + i\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z và $A(1; 0)$, $B(1; 7)$.

Khi đó $|z| = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$ và $P = |z - 1| + |z - 1 - 7i| = |\overrightarrow{AM}| + |\overrightarrow{BM}| \geq |\overrightarrow{AB}|$.

Suy ra $P_{\min} = AB = 7$. Phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm AB : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 7t \end{cases}$ với $t \in \mathbb{R}$.

Mà $x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow t = \pm \frac{\sqrt{3}}{7} \Rightarrow M_1(1; \sqrt{3})$ hoặc $M_2(1; -\sqrt{3})$.

Dễ thấy điểm $AM_1 + BM_1 < AM_2 + BM_2 \Rightarrow M_1 \equiv M \Rightarrow z = 1 + i\sqrt{3} \Rightarrow w = 2\sqrt{3}i \Rightarrow |w| = 2\sqrt{3}$. □

Bài 8. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - i| = 5$ và biểu thức $P = |z - 7 - 9i| + 2|z - 8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm $|z|$.

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z và $I(1; 1)$, $A(7; 9)$, $B(0; 8)$.

Khi đó $|z - 1 - i| = 5 \Leftrightarrow MI = 5 \Rightarrow$ tập hợp điểm M nằm trên đường tròn (C) có tâm I bán kính $R = 5$ và $P = AM + 2BM$.

Có $IA = 10$ và các điểm A, B đều nằm ngoài đường tròn (C) .

Lấy A' trên đoạn IA sao cho $AI' \cdot IA = R^2 \Rightarrow \overrightarrow{IA'} = \frac{R^2}{IA^2} \cdot \overrightarrow{IA} \Rightarrow A'(\frac{5}{2}; 3)$.

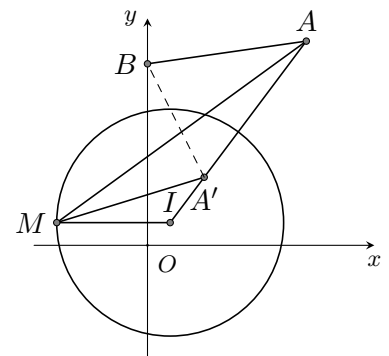
Suy ra $MA = 2MA' \Rightarrow P = 2(MA' + BM) \geq 2A'B \Rightarrow P_{\min} = 2A'B = 5\sqrt{5}$.

Khi đó M là giao điểm của đường tròn (C) và đường thẳng

$$A'B: \begin{cases} x = -t \\ y = 8 + 2t \end{cases} \text{ với } t \in \mathbb{R}.$$

Thay vào (C) : $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \Rightarrow M(1; 6) \\ t = -5 \Rightarrow M(5; -2). \end{cases}$

Dễ thấy $M(1; 6)$ thì $P_{\min} = MA + 2MB \Rightarrow |z| = \sqrt{37}$. □



Bài 9. Cho số phức $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $|z - 3 - 3i| = 6$. Tính $x + y$ biết rằng biểu thức $P = 2|z + 6 - 3i| + 3|z + 1 + 5i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z và $A(-6; 3)$, $B(-1; -5)$.
 Khi đó từ $|z - 3 - 3i| = 6$ suy ra M thuộc đường tròn (C) có tâm $I(3; 3)$
 bán kính $R = 6$. Dễ thấy $IA = 9 = \frac{3}{2} \cdot R$.

Gọi $C' = IA \cap (C)$ và D thỏa mãn $\overrightarrow{ID} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IC} \Rightarrow D(-1; 3)$.

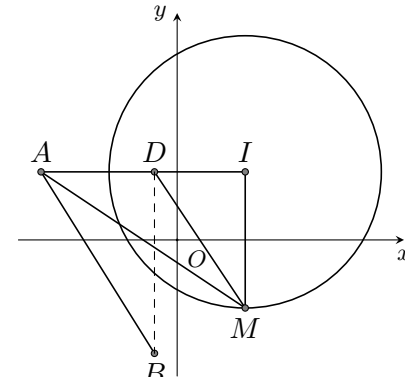
Suy ra $ID \cdot IA = \frac{2}{3}R \cdot \frac{3}{2}R = R^2$.

Suy ra $\triangle IMD \sim \triangle IAM \Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{IA}{IM} = \frac{3}{2}$ hay $2MA = 3MD$.

Lại có $P = 2MA + 3MB = 3(MD + MB) \geq 3DB$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD}$ ngược hướng suy ra $M(-1; 3 - 2\sqrt{5})$.

Vậy $x + y = 2 - 2\sqrt{5}$.



□

Dạng 6. Sử dụng hình chiếu và tương giao

Phương pháp giải:

Cho đường thẳng $(\Delta): ax + by + c = 0$ và điểm $M \in (\Delta)$. Điểm $N \notin (\Delta)$ thì NM nhỏ nhất khi và chỉ khi $M \equiv K$ với K là hình chiếu của N trên (Δ) .

$$\text{— } \min |z| = OH = d_{[O, (\Delta)]} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Khi đó $M \equiv H$ và $H = (\Delta) \cap OH$.

$$\text{— } \min |z - (x_N + y_N i)| = NK = d_{N, (\Delta)} = \frac{|ax_N + by_N + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Khi đó $M \equiv K$ và $K = (\Delta) \cap NK$.

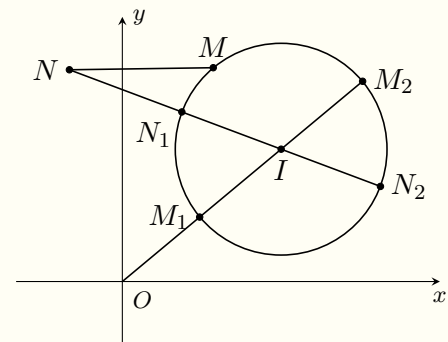
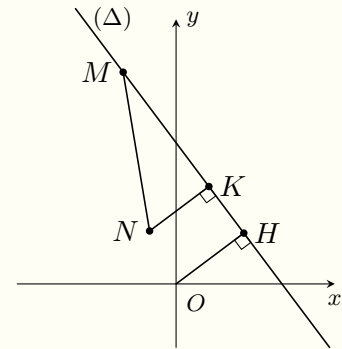
Cho tập hợp các điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là đường tròn $(\mathcal{C})$ có tâm $I(a; b)$ và bán kính R . Gọi N là điểm biểu diễn số phức z' . Khi đó

$$\text{— } \begin{cases} \min |z| = \min OM = OM_1 = |OI - R| \\ \max |z| = \max OM = OM_2 = OI + R. \end{cases}$$

Khi đó $OI \cap (\mathcal{C}) = \{M_1; M_2\}$.

$$\text{— } \begin{cases} \min |z - z'| = \min MN = NN_1 = |NI - R| \\ \max |z - z'| = \max MN = NN_2 = NI + R. \end{cases}$$

Khi đó $NI \cap (\mathcal{C}) = \{N_1; N_2\}$.



1 CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Xét các số phức $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$ và $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm $P = 3x - 2y$.

Lời giải.

Ta có

$$|z - 2 - 4i| = |z - 2i| \Leftrightarrow |(x - 2) + (y - 4)i| = |x + (y - 2)i|$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = x^2 + (y - 2)^2 \Leftrightarrow x + y - 4 = 0.$$

Vậy tập hợp điểm $M(x; y)$ biểu diễn các số phức $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$ là đường thẳng $(d): x + y - 4 = 0$.

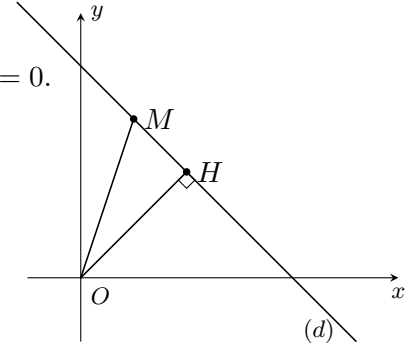
$\min |z| = \min OM = OH$ với H là hình chiếu của điểm O lên (d) .

Vì $OH \perp d: x + y - 4 = 0 \Rightarrow OH: x - y + m = 0$.

Do $O(0; 0) \in OH \Rightarrow m = 0 \Rightarrow OH: x - y = 0$.

$$\text{Tọa độ điểm } H = (d) \cap OH \text{ thỏa mãn hệ } \begin{cases} x + y = 4 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow P = 3x - 2y = 2.$$



Ngoài cách giải sử dụng hình chiếu và tương giao (hình học), ta có thể giải theo cách khác như: Sử dụng $A^2 \geq 0$, bất đẳng thức cộng mẫu để tìm $\min |z|$.

□

Ví dụ 2. Cho các số phức $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z + 2 - 2i| = |z - 4i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|iz + 1|$.

Lời giải.

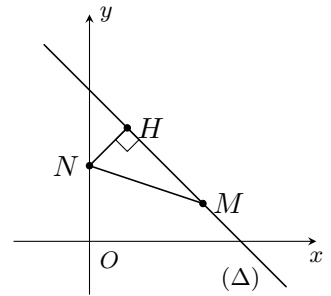
$$|z + 2 - 2i| = |z - 4i| \Leftrightarrow |(x + 2) + (y - 2)i| = |x + (y - 4)i| \Leftrightarrow x + y - 2 = 0.$$

Vậy tập hợp điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$ là đường thẳng $(\Delta): x + y - 2 = 0$.

Ta lại có $|iz + 1| = |(i(x + yi) + 1)| = |(1 - y) + xi| = \sqrt{(x^2) + (y - 1)^2} = MN$ với $N(0; 1)$.

Bài toán trở thành tìm điểm $M \in (\Delta): x + y - 2 = 0$ thỏa mãn MN nhỏ nhất.

$$\min |iz + 1| = \min MN = d_{[N; (\Delta)]} = \frac{|x_N + y_N - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|0 + 1 - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Ngoài cách giải sử dụng hình chiếu và tương giao (hình học), ta có thể giải theo cách khác như: Sử dụng $A^2 \geq 0$, bất đẳng thức cộng mẫu để tìm $\min |z|$.

□

Ví dụ 3. Cho các số phức $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - (2 + 4i)| = 2$. Gọi z_1, z_2 lần lượt là hai số phức có mô-đun lớn nhất và mô-đun nhỏ nhất. Tính tổng phần ảo của hai số phức z_1, z_2 đó.

Lời giải.

$$|z - (2 + 4i)| = 2 \Leftrightarrow |(x - 2) + (y - 4)i| = 2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 4.$$

Vậy tập hợp điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z là đường tròn $\mathcal{C}$ có tâm $I(2; 4)$ và bán kính $R = 2$.

Ta lại có $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = OM$.

Bài toán trở thành tìm $M \in \mathcal{C}: (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$ thỏa mãn OM nhỏ nhất và OM lớn nhất.

$$\text{Theo hình vẽ có } \begin{cases} \min |z| = \min OM = OM_1 = |OI - R| \\ \max |z| = \max OM = OM_2 = OI + R \end{cases}.$$

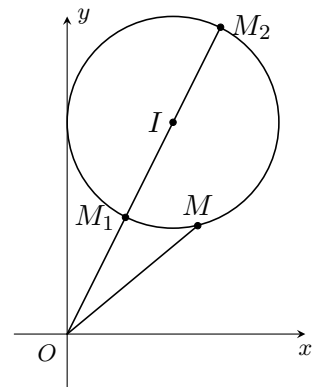
Lúc này tọa độ biểu diễn số phức z_1, z_2 là hai điểm M_1, M_2 là giao của OI với $(\mathcal{C})$.

Phương trình đường thẳng OI đi qua điểm $O(0; 0)$, có véc-tơ chỉ phương $\vec{OI} = (2; 4)$ là $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} \Leftrightarrow y = 2x$.

Vậy tọa độ của M_1, M_2 là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = 2x \\ (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = \left(2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}; 4 + \frac{4\sqrt{5}}{5}\right) \text{ hoặc } (x; y) = \left(2 - \frac{2\sqrt{5}}{5}; 4 - \frac{4\sqrt{5}}{5}\right).$$

$$\text{Suy ra } z_1 = 2 + \frac{2\sqrt{5}}{5} + \left(4 + \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)i, z_2 = 2 - \frac{2\sqrt{5}}{5} + \left(4 - \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)i.$$



Do đó tổng hai phần ảo của số phức z_1, z_2 là $\left(4 + \frac{4\sqrt{5}}{5}\right) + \left(4 - \frac{4\sqrt{5}}{5}\right) = 8$. $\square$

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Xét các số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - i| = |\bar{z} - 2 - 3i|$ và $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $3x - y$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}|z - i| &= |\bar{z} - 2 - 3i| \Leftrightarrow |x + (y - 1)i| = |(x - 2) - (y + 3)i| \\&\Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = (x - 2)^2 + (y + 3)^2 \\&\Leftrightarrow -2y + 1 = -4x + 4 + 6y + 9 \\&\Leftrightarrow x - 2y - 3 = 0.\end{aligned}$$

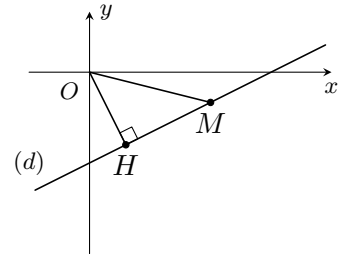
Vậy tập hợp điểm $M(x; y)$ biểu diễn các số phức $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) là đường thẳng $(d): x - 2y - 3 = 0$.

min $|z| = OH$ với H là hình chiếu của điểm O lên (d) .

Vì $OH \perp d: x - 2y - 3 = 0 \Rightarrow OH: 2x + y + m = 0$.

Do $O(0; 0) \in OH \Rightarrow m = 0 \Rightarrow OH: 2x + y = 0$.

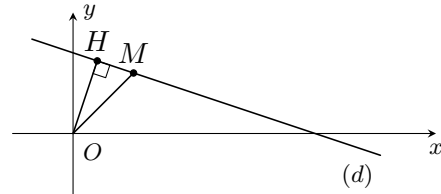
Tọa độ điểm $H = (d) \cap OH$ thỏa mãn hệ $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = -\frac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow P = 3x - y = 3$. $\square$



Bài 2. Xét các số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $\left|\frac{z + 1 - 5i}{\bar{z} + 3 - i}\right| = 1$ và $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T = 3x + y$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\left|\frac{z + 1 - 5i}{\bar{z} + 3 - i}\right| = 1 &\Leftrightarrow \left|\frac{x + 1 + (y - 5)i}{x + 3 - (y + 1)i}\right| = 1 \\&\Leftrightarrow |x + 1 + (y - 5)i| = |(x + 3) - (y + 1)i| \\&\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 5)^2 = (x + 3)^2 + (y + 1)^2 \\&\Leftrightarrow 2x + 1 - 10y + 25 = 6x + 9 + 2y + 1 \\&\Leftrightarrow x + 3y - 4 = 0.\end{aligned}$$



Vậy tập hợp điểm $M(x; y)$ biểu diễn các số phức $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) là đường thẳng $(d): x + 3y - 4 = 0$. min $|z| = OH$ với H là hình chiếu của điểm O lên (d) .

Vì $OH \perp d: x + 3y - 4 = 0 \Rightarrow OH: 3x - y + m = 0$.

Do $O(0; 0) \in OH \Rightarrow m = 0 \Rightarrow OH: 3x - y = 0$. Tọa độ điểm $H = (d) \cap OH$ thỏa mãn hệ $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow T = 3x + y = 0$. $\square$

Bài 3. Cho các số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 1 - 2i| = |z - 2 + i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z + 2 - 3i|$.

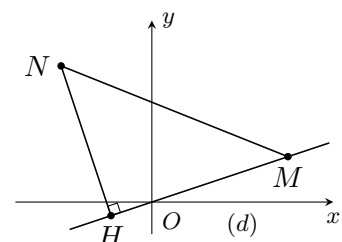
Lời giải.

$$|z - 1 - 2i| = |z - 2 + i| \Leftrightarrow |(x - 1) + (y - 2)i| = |(x - 2) + (y + 1)i| \Leftrightarrow x - 3y = 0.$$

Vậy tập hợp điểm $M(x; y)$ biểu diễn các số phức $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) là đường thẳng $(d): x - 3y = 0$.

Ta lại có $|z + 2 - 3i| = |(x + 2) + (y - 3)i| = \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 3)^2} = MN$ với $N(-2; 3)$.

Vậy min $|z + 2 - 3i| = \min MN = d_{[N, (d)]} = \frac{|-2 - 3 \cdot 3|}{\sqrt{10}} = \frac{11\sqrt{10}}{10}$.



Bài 4. Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 3 + 4i| = 4$. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z|$.

Lời giải.

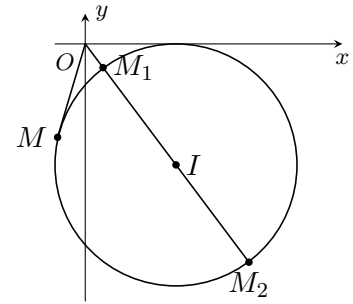
$$|z - 3 + 4i| = 4 \Leftrightarrow |(x - 3) + (y + 4)i| = 4 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 16.$$

Vậy tập hợp điểm $M(x; y)$ biểu diễn các số phức $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) là đường tròn $\mathcal{C}$ có tâm $I(3; -4)$, bán kính $R = 4$.

Ta có $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = OM$.

$$\text{Theo hình vẽ có } \begin{cases} \min |z| = \min OM = OM_1 = |OI - R| = 5 - 4 = 1 \\ \max |z| = \max OM = OM_2 = OI + R = 5 + 4 = 9 \end{cases}.$$

Vậy tổng cần tìm là $9 + 1 = 10$.



□

Bài 5. Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - i| = |z + 1|$ và biểu thức $P = |z - (3 - 2i)|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm $T = |x - y|$.

Lời giải.

$$|z - i| = |z + 1| \Leftrightarrow |x + (y - 1)i| = |(x + 1) + yi| \Leftrightarrow x + y = 0.$$

Vậy tập hợp điểm $M(x; y)$ biểu diễn các số phức $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) là đường thẳng $(d): x + y = 0$.

Ta có $|z - (3 - 2i)| = |(x - 3) + (y + 2)i| = \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 2)^2} = MI$ với $I(3; -2)$.

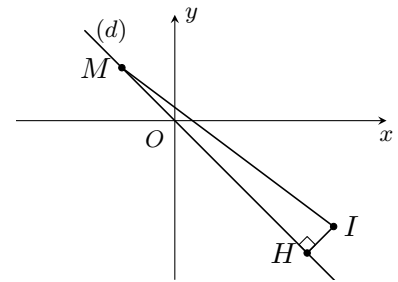
Vậy $P = MI$ nhỏ nhất khi M trùng với H là hình chiếu của I trên (d) .

Vì $IH \perp (d): x + y = 0 \Rightarrow IH: x - y + m = 0$.

Do $I(3; -2) \in IH \Rightarrow m = -5 \Rightarrow IH: x - y - 5 = 0$.

$$\text{Khi đó tọa độ của } H \text{ thỏa mãn hệ } \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = -\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow T =$$

$$|x - y| = 5.$$



□

Bài 6. Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $P = |z + 1 + i|$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm $Q = |x - 2y|$.

Lời giải.

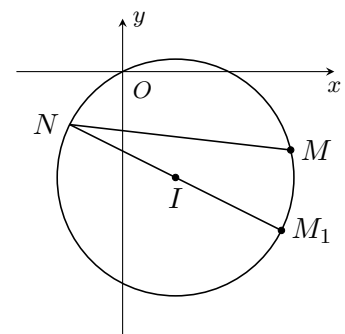
$$|z - 1 + 2i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |(x - 1) + (y + 2)i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5.$$

Vậy tập hợp điểm $M(x; y)$ biểu diễn các số phức $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) là đường tròn $(\mathcal{C})$ có tâm $I(1; -2)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.

Ta có $P = |z + 1 + i| = |(x + 1) + (y + 1)i| = \sqrt{(x + 1)^2 + (y + 1)^2} = MN$ với $N(-1; -1)$.

Dễ thấy $N \in (\mathcal{C})$ nên MN lớn nhất khi và chỉ khi $M \equiv M_1$ là điểm đối xứng với N qua I .

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x = 2x_I - x_N = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \\ y = 2y_I - y_N = 2 \cdot (-2) + 1 = -3 \end{cases} \Rightarrow Q = |x - 2y| = 9.$$



□

Bài 7. Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|2iz - 1 + 3i| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z + 2 - 3i|$.

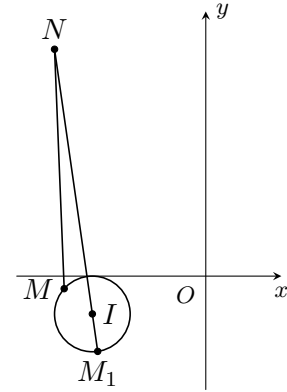
Lời giải.

$$\begin{aligned}
 |2iz - 1 + 3i| = 1 &\Leftrightarrow |2i(x + yi) - 1 + 3i| = 1 \\
 &\Leftrightarrow |(-2y - 1) + (2x + 3)i| = 1 \\
 &\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm $M(x; y)$ biểu diễn các số phức $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$ là đường tròn ($\mathcal{C}$) có tâm $I\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ và bán kính $R = \frac{1}{2}$.

Ta có $|z + 2 - 3i| = |(x + 2) + (y - 3)i| = \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 3)^2} = MN$ với $N(-2; 3)$.

$$\text{Vậy } \max P = \max MN = NM_1 = NI + R = \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1 + 5\sqrt{2}}{2}.$$



□

Bài 8. Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 4$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 1 - i|$. Tìm $M + m$.

🔗 **Lời giải.**

$$|z - 1 + 2i| = 4 \Leftrightarrow |(x - 1) + (y + 2)i| = 4 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16.$$

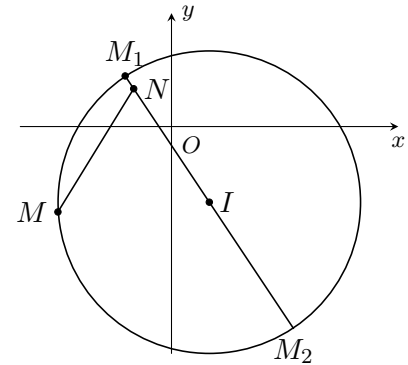
Vậy tập hợp điểm $M(x; y)$ biểu diễn các số phức $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$ là đường tròn ($\mathcal{C}$) có tâm $I(1; -2)$ và bán kính $R = 4$.

Ta có $|z + 1 - i| = |(x + 1) + (y - 1)i| = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2} = MN$ với $N(-1; 1)$.

Theo hình vẽ có

$$\begin{cases} m = \min P = \min MN = NM_1 = |NI - R| = |\sqrt{13} - 4| = 4 - \sqrt{13} \\ M = \max P = \max MN = NM_2 = |NI + R| = \sqrt{13} + 4. \end{cases}$$

Vậy $M + m = 8$.



□

Bài 9. Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 1 - i| + |z - 7 - 4i| = 3\sqrt{5}$. Gọi a, b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = |z - 5 + 2i|$. Tìm $a + b$.

🔗 **Lời giải.**

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Trong mặt phẳng tọa độ xét các điểm $A(1; 1)$, $B(7; 4)$ và $I(5; -2)$.

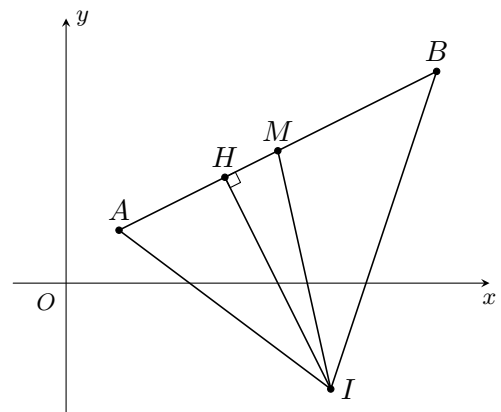
Ta có $|z - 1 - i| + |z - 7 - 4i| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow MA + MB = 3\sqrt{5} = AB$. Suy ra tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là đoạn thẳng AB .

Ta lại có $|z - 5 + 2i| = IM$. Theo hình vẽ, ta có $IM \geq IH$ và $IM \leq IB$.

Phương trình đường thẳng AB đi qua $A(1; 1)$, có véc-tơ chỉ phương $\vec{AB} = (6; 3)$ là $\frac{x-1}{6} = \frac{y-1}{3}$ hay $x - 2y + 1 = 0$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \min |z - 5 + 2i| = IH = \frac{|5 - 2 \cdot (-2) + 1|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \\ \max |z - 5 + 2i| = IB = \sqrt{(7 - 5)^2 + (4 + 2)^2} = 2\sqrt{10} \end{cases}$$

Vậy $a + b = 2\sqrt{10} + 2\sqrt{5}$.



□

Bài 10. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 5| = 5$ và $|z_2 + 1 - 3i| = |z_2 - 3 - 6i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1 - z_2|$.

🔗 **Lời giải.**

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của số phức z_1 và z_2 .
Ta có $|z_1 + 5| = 5 \Leftrightarrow |(x_M + 5) + y_M i| = 5 \Leftrightarrow (x_M + 5)^2 + y_M^2 = 25$.
Vậy M nằm trên đường tròn ($\mathcal{C}$) tâm $I(-5; 0)$ và bán kính $R = 5$.

Ta lại có

$$|z_2 + 1 - 3i| = |z_2 - 3 - 6i|$$

$$\Leftrightarrow |(x_N + 1) + (y_N - 3)i| = |(x_N - 3) + (y_N - 6)i|$$

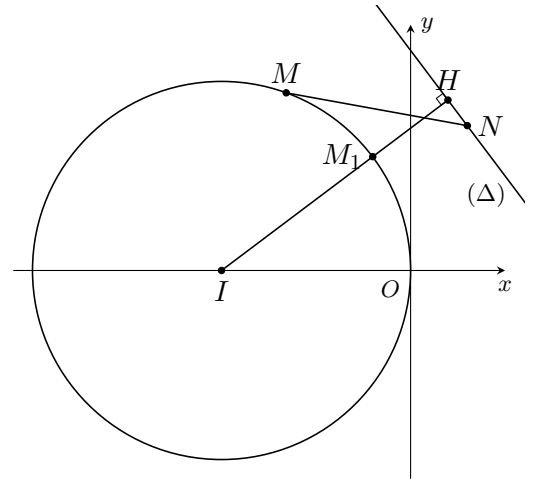
$$\Leftrightarrow 8x + 6y - 35 = 0.$$

Vậy N nằm trên đường thẳng (Δ): $8x + 6y - 35 = 0$.

Hơn nữa $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2} = MN$.

Gọi (d) là đường thẳng đi qua I và vuông góc với (Δ), (d) cắt (Δ) tại H , đoạn thẳng IH cắt ($\mathcal{C}$) tại M_1 . Khi đó để $P = MN$ nhỏ nhất thì $M \equiv M_1$ và $N \equiv H$.

$$\text{Suy ra } \min MN = M_1 H = d_{[I; (\Delta)]} - R = \frac{|8 \cdot (-5) + 6 \cdot 0 - 35|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} - 5 = \frac{5}{2}.$$



□

Bài 11. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để tồn tại duy nhất số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z\bar{z} = 1$ và $|z - \sqrt{3} + i| = m$. Tìm số phần tử của S .

▮Lời giải.

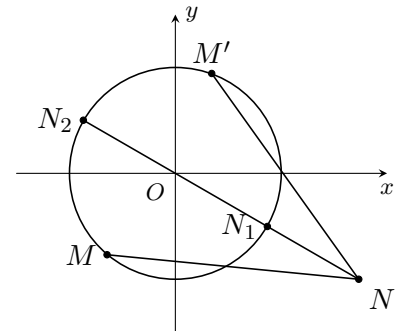
$$z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow (x + yi)(x - yi) = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Vậy tập hợp điểm $M(x; y)$ biểu diễn các số phức $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) là đường tròn ($\mathcal{C}$) có tâm $O(0; 0)$ và bán kính $R = 1$.

$$\text{Ta có } |z - \sqrt{3} + i| = m \Leftrightarrow \sqrt{(x - \sqrt{3})^2 + (y + 1)^2} = m \Leftrightarrow MN = m \text{ với } N(\sqrt{3}; -1).$$

Vì đường tròn ($\mathcal{C}$) nhận ON làm trục đối xứng nên để tồn tại duy nhất số phức z hay tồn tại duy nhất điểm M thỏa mãn $MN = m$ thì M phải là giao điểm của ON và ($\mathcal{C}$).

Mà ON cắt ($\mathcal{C}$) tại 2 điểm N_1, N_2 nên số phần tử của S là 2.



□

Bài 12. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z^2 - z| + |z^2 + z|$ với z là số phức thỏa mãn $|z| = 1$.

▮Lời giải.

$$|z| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Vậy tập hợp điểm $C(x; y)$ biểu diễn các số phức $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) là đường tròn ($\mathcal{C}$) có tâm $O(0; 0)$, bán kính $R = 1$.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= |z^2 - z| + |z^2 + z| = |z||z - 1| + |z||z + 1| \\ &= |(x - 1) + yi| + |(x + 1) + yi| \\ &= \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} + \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} \\ &= MA + MB \end{aligned}$$

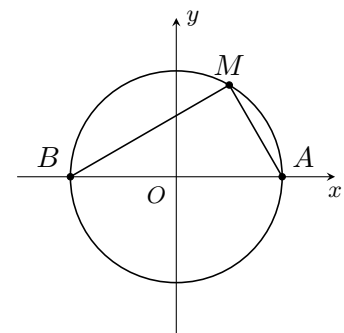
với $A(1; 0)$ và $B(-1; 0)$.

Đễ thấy AB là đường kính của đường tròn ($\mathcal{C}$) nên $AB = 2$.

$$\text{Khi đó } P = MA + MB \leq \sqrt{2(MA^2 + MB^2)} = \sqrt{2AB^2} = 2\sqrt{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $MA = MB$ hay M là điểm chính giữa cung AB .

$$\text{Suy ra } \max P = 2\sqrt{2}.$$



□

Bài 13. Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $\left|iz + \frac{2}{1-i}\right| + \left|iz + \frac{2}{i-1}\right| = 4$. Gọi M và n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính $M \cdot n$.

▮Lời giải.

Ta có

$$\left| iz + \frac{2}{1-i} \right| + \left| iz + \frac{2}{i-1} \right| = 4$$

$$\Leftrightarrow |i(x+yi) + 1+i| + |i(x+yi) - 1-i| = 4$$

$$\Leftrightarrow |(-y+1) + (x+1)i| + |(-y-1) + (x-1)i| = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = 4$$

$$\Leftrightarrow CA + CB = 4 > 2\sqrt{2} = AB.$$

với $C(x; y)$, $A(-1; 1)$ và $B(1; -1)$.

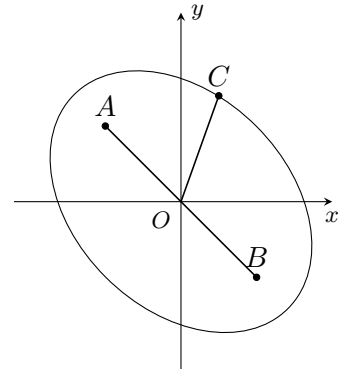
Vậy tập hợp điểm $C(x; y)$ biểu diễn các số phức $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) là elip (E) nhận A và B làm hai tiêu điểm với độ dài trục lớn bằng 4, tiêu cự bằng $2\sqrt{2}$.

Dễ thấy O là trung điểm của AB nên O là tâm đối xứng của elip (E).

Mà $|z| = OC$ nên OC lớn nhất khi C nằm trên trục lớn và nhỏ nhất khi C nằm trên trục nhỏ của elip (E).

$$\Rightarrow \begin{cases} M = \frac{4}{2} = 2 \\ n = \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } M \cdot n = 2\sqrt{2}.$$



Nếu tập hợp điểm biểu diễn z là một elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) thì $\begin{cases} \max |z| = \max OM = a \\ \min |z| = \min OM = b \end{cases}$.

□

E CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 NHẬN BIẾT

Câu 1. Cho hai số thực x, y thỏa mãn phương trình $x + 2i = 3 + 4yi$. Khi đó giá trị của x và y là

- A. $x = 3i, y = \frac{1}{2}$. B. $x = 3, y = 2$. C. $x = 3, y = -\frac{1}{2}$. D. $x = 3, y = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } x + 2i = 3 + 4yi \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 2 = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Chọn đáp án **D**.

□

Câu 2. Cho số phức $z = -2 + i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w = iz$ trên mặt phẳng tọa độ?

- A. $M(-1; -2)$. B. $P(-2; 1)$. C. $N(2; 1)$. D. $Q(1; 2)$.

Lời giải.

Với $z = -2 + i$ ta có $w = iz = i(-2 + i) = -1 - 2i \Rightarrow$ điểm biểu diễn của w là $M(-1; -2)$.

Chọn đáp án **A**.

□

Câu 3. Tìm các số thực a và b thỏa mãn $2a + (b + i)i = 1 + 2i$ với i là đơn vị ảo.

- A. $a = 0, b = 2$. B. $a = \frac{1}{2}, b = 1$. C. $a = 0, b = 1$. D. $a = 1, b = 2$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } 2a + (b + i)i = 1 + 2i \Leftrightarrow 2a - 1 + bi = 1 + 2i \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 1 = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **D**.

□

Câu 4. Số nào trong các số phức sau là số thực?

- A. $(\sqrt{3} + 2i) - (\sqrt{3} - 2i)$. B. $(3 + 2i) + (3 - 2i)$.
C. $(5 - 2i) + (\sqrt{5} - 2i)$. D. $(1 + 2i) + (-1 + 2i)$.

Lời giải.

Ta có $(3 + 2i) + (3 - 2i) = 3 + 3 = 6$ nên $(3 + 2i) + (3 - 2i)$ là số thực.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 5.

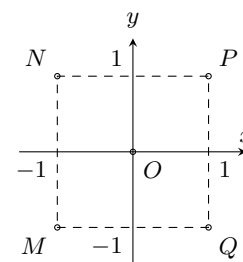
Cho số phức $z = -1 + 2i, w = 2 - i$. Điểm nào trong hình bên biểu diễn số phức $z + w$?

A. P .

B. N .

C. Q .

D. M .



Lời giải.

Vì $z + w = -1 + 2i + 2 - i = 1 + i$ nên điểm biểu diễn là điểm $P(1; 1)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 6. Cho số phức $z = 1 + 2i$. Tính tổng phần thực và phần ảo của số phức $w = 2z + \bar{z}$.

A. 3.

B. 5.

C. 1.

D. 2.

Lời giải.

Ta có $w = 2(1 + 2i) + (1 - 2i) = 3 + 2i$. Suy ra tổng của phần thực và phần ảo của w là $3 + 2 = 5$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 7. Cho số phức $z = 1 - i$. Biểu diễn số phức z^2 là điểm

A. $M(-2; 0)$.

B. $N(1; 2)$.

C. $P(2; 0)$.

D. $Q(0; -2)$.

Lời giải.

Ta có $z^2 = (1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$.

Do đó, điểm biểu diễn số phức z^2 là điểm $Q(0; -2)$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 8. Cho số phức z thỏa mãn $(3 + 2i)z + (2 - i)^2 = 4 + i$. Hiệu phần thực và phần ảo của số phức z là

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} (3 + 2i)z + (2 - i)^2 &= 4 + i \\ \Leftrightarrow (3 + 2i)z &= 4 + i - (2 - i)^2 \\ \Leftrightarrow (3 + 2i)z &= 1 + 5i \\ \Leftrightarrow z &= \frac{1 + 5i}{3 + 2i} \\ \Leftrightarrow z &= 1 + i. \end{aligned}$$

Suy ra phần thực là 1 và phần ảo là 1.

Vậy hiệu phần thực và phần ảo của số phức z là 0.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 9. Cho cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $(2x - y)i + y(1 - 2i) = 3 + 7i$. Khi đó biểu thức $P = x^2 - xy$ nhận giá trị nào sau đây?

A. 30.

B. 40.

C. 10.

D. 20.

Lời giải.

$$\text{Ta có } (2x - y)i + y(1 - 2i) = 3 + 7i \Leftrightarrow y + (2x - 3y)i = 3 + 7i \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 8. \end{cases}$$

Vậy $P = x^2 - xy = 64 - 24 = 40$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 10. Cho số phức $z = (1 + i)^2(1 + 2i)$. Số phức z có phần ảo là

A. $2i$.

B. 4.

C. 2.

D. -4 .

Lời giải.

Ta có $z = (1 + i)^2(1 + 2i) = -4 + 2i$. Suy ra phần ảo của z là 2.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 11. Tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn $2|z - i| = |z - \bar{z} + 2i|$ là

A. Đường parabol có phương trình $x = \frac{y^2}{4}$.

B. Đường parabol có phương trình $y = \frac{x^2}{4}$.

C. Đường tròn tâm $I(0; 1)$, bán kính $R = 1$.

D. Đường tròn tâm $I(\sqrt{3}; 0)$, bán kính $R = \sqrt{3}$.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Theo bài ra ta có

$$\begin{aligned} 2|x + yi - i| &= |x + yi - (x - yi) + 2i| \Leftrightarrow 2|x + (y - 1)i| = 2|(y + 1)i| \\ &\Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = (y + 1)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 4y. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn là đường parabol có phương trình $y = \frac{x^2}{4}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 12. Cho hai số phức $z_1 = 3 - 7i$ và $z_2 = 2 + 3i$. Tìm số phức $z = z_1 + z_2$.

A. $z = 1 - 10i$.

B. $z = 5 - 4i$.

C. $z = 3 - 10i$.

D. $z = 3 + 3i$.

Lời giải.

Ta có $z = z_1 + z_2 = 3 - 7i + 2 + 3i = 5 - 4i$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 13. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = i(3i + 1)$.

A. $\bar{z} = 3 + i$.

B. $\bar{z} = -3 + i$.

C. $\bar{z} = 3 - i$.

D. $\bar{z} = -3 - i$.

Lời giải.

Ta có $z = i(3i + 1) = 3i^2 + i = -3 + i \Rightarrow \bar{z} = -3 - i$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 14. Cho số phức z thỏa $z + 2\bar{z} = 2 + 3i$, thì $|z|$ bằng

A. $\frac{\sqrt{29}}{3}$.

B. $\frac{85}{3}$.

C. $\frac{29}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{85}}{3}$.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, suy ra $\bar{z} = a - bi$.

$$\text{Ta có } z + 2\bar{z} = 2 + 3i \Leftrightarrow a + bi + 2(a - bi) = 2 + 3i \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 2 \\ -b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |z| = \frac{\sqrt{85}}{3}.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 15. Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm phần ảo của số phức $w = (1 + 2i)z$.

A. 4.

B. 7.

C. -4.

D. $4i$.

Lời giải.

Ta có $w = (1 + 2i)(3 - 2i) = 7 + 4i$. Suy ra phần ảo của w bằng 4.

Chọn đáp án **A** □

Câu 16. Tìm số z thỏa mãn phương trình $z + 2\bar{z} = 2 - 4i$.

A. $z = \frac{-2}{3} - 4i$.

B. $z = \frac{2}{3} - 4i$.

C. $z = \frac{-2}{3} + 4i$.

D. $z = \frac{2}{3} + 4i$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$). Khi đó, phương trình có dạng

$$a + bi + 2(a - bi) = 2 - 4i \Leftrightarrow 3a - bi = 2 - 4i \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = 4. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } z = \frac{2}{3} + 4i.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 17. Cho hai số phức $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 + i$. Tính $|z_1 + 3z_2|$.

- A. $|z_1 + 3z_2| = \sqrt{11}$. B. $|z_1 + 3z_2| = 11$. C. $|z_1 + 3z_2| = \sqrt{61}$. D. $|z_1 + 3z_2| = 61$.

Lời giải.

Ta có $z_1 + 3z_2 = (2 + 3i) + 3(1 + i) = 5 + 6i \Rightarrow |z_1 + 3z_2| = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 18. Cho số phức z khác 0 là số thuần ảo. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $\bar{z}$ là số thực. B. $z = \bar{z}$.
C. $z + \bar{z} = 0$. D. Phần ảo của z bằng 0.

Lời giải.

Ta có $z = bi$, với $b \neq 0$, suy ra $\bar{z} = -bi$. Do đó $z + \bar{z} = 0$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 19. Cho z_1, z_2 là hai số phức tùy ý. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

- A. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. B. $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.
C. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$. D. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Lời giải.

Khẳng định $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ sai vì $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 20. Cho số phức $z = 1 - 2i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w = iz$ trên mặt phẳng tọa độ?

- A. $P(-2; 1)$. B. $Q(1; 2)$. C. $M(1; -2)$. D. $N(2; 1)$.

Lời giải.

Ta có $w = iz = i(1 - 2i) = i - 2i^2 = 2 + i$. Do đó, điểm $N(2; 1)$ là điểm biểu diễn số phức $w = iz$ trên mặt phẳng tọa độ.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 21. Cho số phức $z = 2 + i$. Tính mô-đun của số phức $w = z^2 - 1$.

- A. $2\sqrt{5}$. B. $\sqrt{5}$. C. $5\sqrt{5}$. D. 20.

Lời giải.

Ta có $w = z^2 - 1 = (2 + i)^2 - 1 = 4 + 4i + i^2 - 1 = 2 + 4i$.

Do đó $|w| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 22. Cho số phức $z = 3 + 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $-2 \cdot \bar{z}$.

- A. Phần thực bằng -6 và phần ảo bằng $-4i$. B. Phần thực bằng -6 và phần ảo bằng -4 .
C. Phần thực bằng -6 và phần ảo bằng $4i$. D. Phần thực bằng -6 và phần ảo bằng 4 .

Lời giải.

Ta có $z = 3 + 2i \Rightarrow \bar{z} = 3 - 2i$, do đó $-2 \cdot \bar{z} = -6 + 4i$.

Vậy số phức $-2 \cdot \bar{z}$ có phần thực bằng -6 và phần ảo bằng 4 .

Chọn đáp án **D**

□

Câu 23. Cho số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Tìm số phức liên hợp của số phức $w = z_1 + z_2$.

- A. $\bar{w} = 3 - 2i$. B. $\bar{w} = 1 - 4i$. C. $\bar{w} = -1 + 4i$. D. $\bar{w} = 3 + 2i$.

Lời giải.

Ta có $w = z_1 + z_2 = 3 - 2i$.

Khi đó $\bar{w} = 3 + 2i$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 24. Điểm nào sau đây biểu diễn số phức $z = i(7 - 4i)$ trong mặt phẳng tọa độ?

- A. $P(-4; 7)$. B. $M(4; 7)$. C. $Q(-4; -7)$. D. $N(4; -7)$.

Lời giải.

Ta có $z = 7i - 4i^2 = 4 + 7i$. Do đó z được biểu diễn bởi $M(4; 7)$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 25. Số nào trong các số phức sau là số thực?

- A. $(1 + 2i) + (-1 + 2i)$. B. $(3 + 2i) + (3 - 2i)$.
C. $(5 + 2i) - (\sqrt{5} - 2i)$. D. $(\sqrt{3} - 2i) - (\sqrt{3} + 2i)$.

Lời giải.

Số phức có phần ảo bằng 0 là số thực. Do đó $(3 + 2i) + (3 - 2i) = 6$ là số thực.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 26. Cho hai số phức $z_1 = 2 + 3i$ và $z_2 = -3 - 5i$. Tính tổng phần thực và phần ảo của số phức $w = z_1 + z_2$.

- A. 3. B. -3. C. 0. D. $-1 - 2i$.

Lời giải.

Ta có $w = -1 - 2i \Rightarrow$ tổng phần thực và phần ảo của số phức w là -3 .

Chọn đáp án **B**

□

Câu 27. Cho số phức $z = 2 + 3i$. Tính $\frac{z}{\bar{z}}$.

- A. $\frac{-5 + 12i}{13}$. B. $\frac{5 - 6i}{11}$. C. $\frac{5 - 12i}{13}$. D. $\frac{-5 - 12i}{13}$.

Lời giải.

Ta có

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{z \cdot z}{\bar{z} \cdot z} = \frac{z^2}{|z|^2} = \frac{(2 + 3i)^2}{2^2 + 3^2} = \frac{-5 + 12i}{13}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 28. Cho hai số phức $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = -3 + 3i$. Khi đó số phức $z_1 - z_2$ là

- A. $-5 + 5i$. B. $-5i$. C. $5 - 5i$. D. $-1 + i$.

Lời giải.

Ta có $z_1 - z_2 = (2 - 2i) - (-3 + 3i) = 5 - 5i$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 29. Tổng 2 số phức $1 + i$ và $\sqrt{3} + i$ bằng

- A. $1 + \sqrt{3} + 2i$. B. $2i$. C. $1 + \sqrt{3} + i$. D. $1 + \sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $1 + i + \sqrt{3} + i = 1 + \sqrt{3} + 2i$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 30. Cho hai số phức $z = 5 + 2i$ và $z' = 1 - i$. Tính mô-đun của số phức $w = z - z'$.

- A. 5. B. $3\sqrt{5}$. C. $\sqrt{17}$. D. $\sqrt{37}$.

Lời giải.

Ta có $|w| = |z - z'| = |5 + 2i - (1 - i)| = |4 + 3i| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 31. Cho i là đơn vị ảo. Giá trị của biểu thức $z = (1 + i)^2$ là

- A. $2i$. B. $-i$. C. $-2i$. D. i .

Lời giải.

Ta có $z = (1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 32. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Số phức $w = i \cdot \bar{z} + z$ là

- A. $w = -1 + i$. B. $w = 5 - i$. C. $w = -1 + 5i$. D. $w = -1 - i$.

Lời giải.

$w = i \cdot (2 + 3i) + 2 - 3i = -1 - i$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 33. Cho số phức $z = 1 - \frac{1}{3}i$. Tính số phức $w = i\bar{z} + 3z$.

- A. $w = \frac{8}{3}$. B. $w = \frac{8}{3} + i$. C. $w = \frac{10}{3} + i$. D. $w = \frac{10}{3}$.

Lời giải.

Ta có $w = i \left(1 + \frac{1}{3}i\right) + 3 \left(1 - \frac{1}{3}i\right) = \left(3 - \frac{1}{3}\right) + i(1 - 1) = \frac{8}{3}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 34. Cho số phức z được biểu diễn bởi điểm $M(2; -3)$. Tìm tọa độ điểm M' biểu diễn cho số phức iz .

- A. $M'(-3; 2)$. B. $M'(-3; -2)$. C. $M'(3; -2)$. D. $M'(3; 2)$.

Lời giải.

Ta có $z = 2 - 3i \Leftrightarrow iz = 3 + 2i$.

Vậy điểm biểu diễn cho số phức iz là điểm $M'(3; 2)$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 35. Cho số phức $z = a + bi$, với a, b là các số thực bất kỳ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $z - \bar{z}$ không phải là số thực.

B. Phần ảo của z là bi .

C. Mô-đun của z^2 bằng $a^2 + b^2$.

D. Số z và $\bar{z}$ có mô-đun khác nhau.

Lời giải.

Ta có: $|z^2| = (|z|)^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = a^2 + b^2$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 36. Cho các số phức $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 4 + 5i$. Số phức liên hợp của số phức $w = 2(z_1 + z_2)$ là

A. $\bar{w} = 8 + 10i$.

B. $\bar{w} = 12 - 16i$.

C. $\bar{w} = 12 + 8i$.

D. $\bar{w} = 28i$.

Lời giải.

Ta có $w = 2(6 + 8i) = 12 + 16i \Rightarrow \bar{w} = 12 - 16i$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 37. Cho số phức z thỏa mãn $(1 + z)(1 + i) - 5 + i = 0$. Số phức $w = 1 + z$ bằng

A. $-1 + 3i$.

B. $1 - 3i$.

C. $-2 + 3i$.

D. $2 - 3i$.

Lời giải.

Ta có $(1 + z)(1 + i) - 5 + i = 0 \Leftrightarrow 1 + z = \frac{5 - i}{1 + i} \Leftrightarrow 1 + z = 2 - 3i \Leftrightarrow z = 1 - 3i$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 38. Cho hai số phức $z = 3 - 5i$ và $w = -1 + 2i$. Điểm biểu diễn số phức $z' = \bar{z} - w \cdot z$ trong mặt phẳng Oxy có tọa độ là

A. $(-4; -6)$.

B. $(4; 6)$.

C. $(4; -6)$.

D. $(-6; -4)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} z' &= \bar{z} - w \cdot z \\ &= 3 + 5i - (-1 + 2i) \cdot (3 - 5i) \\ &= 3 + 5i - (7 + 11i) \\ &= -4 - 6i. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 39. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tìm phần ảo của số phức $w = (1 + i)z - (2 - i)\bar{z}$.

A. -5 .

B. -9 .

C. $-5i$.

D. $-9i$.

Lời giải.

$$w = (1 + i)z - (2 - i)\bar{z} = (1 + i)(2 - 3i) - (2 - i)(2 + 3i) = -2 - 5i.$$

Phần ảo của số phức w là -5 .

Chọn đáp án **A** □

Câu 40. Cho hai số phức $z_1 = 2 + i$ và $z_2 = 1 - i$. Tìm số phức $z = z_1 + 2z_2$.

A. $1 + i$.

B. 1 .

C. $4 - i$.

D. $2i$.

Lời giải.

$$z = z_1 + 2z_2 = 2 + i + 2(1 - i) = 4 - i.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 41. Cho $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = 4 + 5i$. Tìm số phức liên hợp của số phức w biết $w = 2(z_1 + z_2)$.

A. $\bar{w} = 12 - 16i$.

B. $\bar{w} = 12 + 16i$.

C. $\bar{w} = -14 + 44i$.

D. $\bar{w} = -14 - 44i$.

Lời giải.

Ta có $w = 2(2 + 3i + 4 + 5i) = 12 + 16i$. Vậy $\bar{w} = 12 - 16i$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 42. Tìm phần ảo của số phức $z = (a + bi)(1 - 2i)$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

A. $2a + b$.

B. $2a - b$.

C. $a + 2b$.

D. $b - 2a$.

Lời giải.

$$z = (a + bi)(1 - 2i) = (a + 2b) + (b - 2a)i.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 43. Thu gọn số phức $z = i + (2 - 4i) - (3 - 2i)$, ta được:

- A. $z = -1 - i$. B. $z = 1 - i$. C. $z = -1 - 2i$. D. $z = 1 + i$.

Lời giải.

Ta có $z = i + (2 - 4i) - (3 - 2i) = i + 2 - 4i - 3 + 2i = -1 - i$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 44. Cho số phức $z = 2 + bi$. Tính $z \cdot \bar{z}$.

- A. $z \cdot \bar{z} = \sqrt{4 + b^2}$. B. $z \cdot \bar{z} = 4 - b^2$. C. $z \cdot \bar{z} = -b$. D. $z \cdot \bar{z} = 4 + b^2$.

Lời giải.

Ta có $z \cdot \bar{z} = (2 + bi)(2 - bi) = 4 - b^2 i^2 = 4 + b^2$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 45. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $(2x - 1) + (y + 1)i = 1 + 2i$. Giá trị của biểu thức $x^2 + 2xy + y^2$ bằng

- A. 2. B. 0. C. 1. D. 4.

Lời giải.

Từ $(2x - 1) + (y + 1)i = 1 + 2i$ ta có $\begin{cases} 2x - 1 = 1 \\ y + 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases}$

Vậy $x^2 + 2xy + y^2 = 4$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 46. Với các số phức z thỏa mãn $|z - 2 + i| = 4$, tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn. Tìm bán kính R của đường tròn đó.

- A. $R = 8$. B. $R = 16$. C. $R = 2$. D. $R = 4$.

Lời giải.

Viết z dưới dạng $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$). Khi đó, ta có:

$$|z - 2 + i| = 4 \Leftrightarrow |(a - 2) + (b + 1)i| = 4 \Leftrightarrow (a - 2)^2 + (b + 1)^2 = 16.$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z đã cho là đường tròn tâm $I(2; -1)$, bán kính $R = 4$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 47. Cho số phức $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 - i$. Tìm số phức liên hợp của số phức $w = z_1 + z_2$.

- A. $\bar{w} = 4 - i$. B. $\bar{w} = 4 + i$. C. $\bar{w} = -4 + i$. D. $\bar{w} = -4 - i$.

Lời giải.

Ta có $w = z_1 + z_2 = (1 + 3) + (2 - 1)i = 4 + i \Rightarrow \bar{w} = 4 - i$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 48. Cho z là một số thuần ảo khác 0. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\bar{z}$ là số thực. B. Phần ảo của z bằng 0.
C. $z = \bar{z}$. D. $z + \bar{z} = 0$.

Lời giải.

Vì z là số thuần ảo khác 0 nên $z = bi$, $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ và $\bar{z} = -bi$.

Suy ra $z + \bar{z} = 0$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 49. Số phức $z + \bar{z}$ là

- A. Số thực. B. Số ảo. C. 0. D. 2.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{z} = a - bi$. Vậy $z + \bar{z} = 2a$ là số thực.

Chọn đáp án **A** □

Câu 50. Tính mô-đun của số phức nghịch đảo của số phức $z = (1 - 2i)^2$.

- A. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. B. $\frac{1}{25}$. C. $\sqrt{5}$. D. $\frac{1}{5}$.

Lời giải.

Gọi ω là số phức nghịch đảo của số phức $z = (1 - 2i)^2 \Rightarrow \omega = \frac{1}{z} = \frac{-3 + 4i}{25}$.

Vậy $|\omega| = \frac{1}{5}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 51. Cho số phức z thỏa $(1+i)z = 3-i$. Tìm phần ảo của z .

- A. $-2i$. B. $2i$. C. 2 . D. -2 .

Lời giải.

Ta có $z = \frac{3-i}{1+i} = 1-2i$, do đó phần ảo của z bằng -2 .

Chọn đáp án **D**

□

Câu 52. Tìm phần thực a và phần ảo b của số phức $z = (-2+3i)(-9-10i)$.

- A. $a = 48$ và $b = 7$. B. $a = -48$ và $b = 7$. C. $a = -48$ và $b = -7$. D. $a = 48$ và $b = -7$.

Lời giải.

Ta có $z = (-2+3i)(-9-10i) = 48-7i$ nên $a = 48$ và $b = -7$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 53. Tìm mô-đun của số phức $z = (-6+8i)^2$.

- A. $|z| = 4\sqrt{527}$. B. $|z| = 2\sqrt{7}$. C. $|z| = 100$. D. $|z| = 10$.

Lời giải.

Ta có $z = (-6+8i)^2 = -28-96i \Rightarrow |z| = \sqrt{(-28)^2 + (-96)^2} = 100$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 54. Cho số phức $z = 2+5i$. Tìm số phức $w = iz + \bar{z}$.

- A. $w = -3-3i$. B. $w = 3+7i$. C. $w = -7-7i$. D. $w = 7-3i$.

Lời giải.

Ta có $w = i \cdot (2+5i) + (2-5i) = -3-3i$.

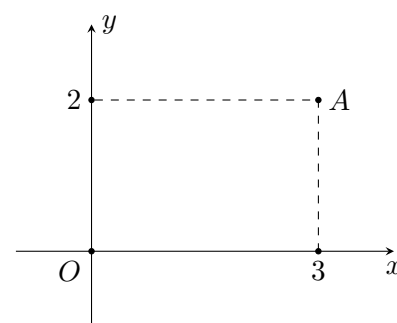
Chọn đáp án **A**

□

Câu 55.

Điểm A trong hình vẽ biểu diễn cho số phức z . Tìm phần thực và phần ảo của số phức z .

- A. Phần thực là 3, phần ảo là $-2i$.
B. Phần thực là 3, phần ảo là 2.
C. Phần thực là 3, phần ảo là -2 .
D. Phần thực là 3, phần ảo là $2i$.



Lời giải.

Ta có tọa độ điểm $A(3;2)$, suy ra số phức $z = 3+2i$.

Vậy phần thực của z là 3 và phần ảo của z là 2.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 56. Phần thực của số phức $z = (a+i)(1-i)$ là

- A. $-a+1$. B. $a-1$. C. $a+1$. D. a^2+1 .

Lời giải.

$$z = (a+i)(1-i) = a+1+(1-a)i.$$

Phần thực của z là $a+1$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 57. Số phức $z = (1+2i)(2-3i)$ bằng

- A. $8-i$. B. 8 . C. $8+i$. D. $-4+i$.

Lời giải.

Có $z = (1+2i)(2-3i) = 2+4i-3i-6i^2 = 8+i$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 58. Cho $z_1 = 1+2i$, $z_2 = 2-3i$. Khi đó $w = z_1 - 2z_2$ bằng

- A. $w = 5+8i$. B. $w = -3+8i$. C. $w = 3-i$. D. $w = -3-4i$.

Lời giải.

$w = z_1 - 2z_2 = (1+2i) - 2(2-3i) = -3+8i$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 59. Cho số phức $z = a + bi$. Khi đó phần ảo của số phức z^2 bằng

- A. b . B. a . C. $2ab$. D. $a^2 - b^2$.

Lời giải.

Ta có $z^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$. Do đó phần ảo của z^2 là $2ab$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 60. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = (3 + 2i)(3 - 2i)$.

- A. $\bar{z} = 13$. B. $\bar{z} = i$. C. $\bar{z} = 0$. D. $\bar{z} = -13$.

Lời giải.

Ta có $z = (3 + 2i)(3 - 2i) = 13 \Rightarrow \bar{z} = 13$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 61. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = 1 - 3i + (1 - i)^2$.

- A. $\bar{z} = -1 - 5i$. B. $\bar{z} = 1 - 5i$. C. $\bar{z} = 1 + 5i$. D. $\bar{z} = 5 - i$.

Lời giải.

Ta có $z = 1 - 3i + 1 - 2i + i^2 = 1 - 5i$. Suy ra $\bar{z} = 1 + 5i$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 62. Tìm số phức $w = z_1 - 2z_2$, biết rằng $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = 2 - 3i$.

- A. $w = 3 - i$. B. $w = 5 + 8i$. C. $w = -3 + 8i$. D. $w = -3 - 4i$.

Lời giải.

Ta có: $w = z_1 - 2z_2 = 1 + 2i - 2(2 - 3i) = -3 + 8i$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 63. Tổng phần thực và phần ảo của số phức $z = (1 + i)^2 - (3 + 3i)$ là

- A. $\sqrt{10}$. B. -4 . C. 4 . D. $-3 - i$.

Lời giải.

Ta có $z = 2i - 3 - 3i = -3 - i$ nên tổng phần thực và phần ảo bằng -4 .

Chọn đáp án **B**

□

Câu 64. Nghiệm của phương trình $2z^2 + 3z + 4 = 0$ trên tập số phức là

- A. $z_1 = \frac{-3 + \sqrt{23}i}{4}; z_2 = \frac{3 - \sqrt{23}i}{4}$. B. $z_1 = \frac{3 + \sqrt{23}i}{4}; z_2 = \frac{-3 - \sqrt{23}i}{4}$.
C. $z_1 = \frac{-3 + \sqrt{23}i}{4}; z_2 = \frac{-3 - \sqrt{23}i}{4}$. D. $z_1 = \frac{3 + \sqrt{23}i}{4}; z_2 = \frac{3 - \sqrt{23}i}{4}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho có hai nghiệm là $z_1 = \frac{-3 + \sqrt{23}i}{4}; z_2 = \frac{-3 - \sqrt{23}i}{4}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 65. Cho hai số phức $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -4 - 5i$. Tính $z = z_1 + z_2$.

- A. $z = -2 - 2i$. B. $z = -2 + 2i$. C. $z = 2 + 2i$. D. $z = 2 - 2i$.

Lời giải.

$z = z_1 + z_2 = 2 + 3i - 4 - 5i = -2 - 2i$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 66. Cho số phức $z = -3 + 4i$. Mô-đun của số phức z là

- A. 4 . B. 7 . C. 3 . D. 5 .

Lời giải.

Ta có $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 67. Cho hai số phức $z_1 = 2 + 3i$ và $z_2 = -4 - 5i$. Tìm số phức $z = z_1 + z_2$.

- A. $z = 2 + 2i$. B. $z = -2 - 2i$. C. $z = 2 - 2i$. D. $z = -2 + 2i$.

Lời giải.

Ta có $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (-4 - 5i) = -2 - 2i$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 68. Phần thực và phần ảo của số phức $z = (1 + 2i)i$ lần lượt là

- A. 1 và 2 . B. -2 và 1 . C. 1 và -2 . D. 2 và 1 .

Lời giải.

Ta có $z = (1 + 2i)i = -2 + i$. Do đó phần thực và phần ảo của số phức z lần lượt là -2 và 1 .

Chọn đáp án **B**

□

Câu 69. Tìm số phức liên hợp của số phức z , biết: $4z + (2 + 3i)(1 - 2i) = 4 + 3i$

- A. $\bar{z} = -1 - \frac{5}{4}i$. B. $\bar{z} = 1 - \frac{5}{4}i$. C. $\bar{z} = -1 + \frac{5}{4}i$. D. $\bar{z} = -1 - i$.

Lời giải.

$4z + (2 + 3i)(1 - 2i) = 4 + 3i \Leftrightarrow 4z + 8 - i = 4 + 3i \Leftrightarrow 4z = -4 + 4i \Leftrightarrow z = -1 + i$. Vậy $\bar{z} = -1 - i$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 70. Tìm các số thực a và b thỏa mãn $a + (b - i)i = 1 + 3i$ với i là đơn vị ảo.

- A. $a = -2, b = 3$. B. $a = 1, b = 3$. C. $a = 2, b = 4$. D. $a = 0, b = 3$.

Lời giải.

Ta có: $a + (b - i)i = 1 + 3i \Leftrightarrow a + 1 + bi = 1 + 3i \Leftrightarrow \begin{cases} a + 1 = 1 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 3 \end{cases}$.

Chọn đáp án **D** □

2 ĐÁP ÁN

1. D	2. A	3. D	4. B	5. A	6. B	7. D	8. D	9. B	10. C
11. B	12. B	13. D	14. D	15. A	16. D	17. C	18. C	19. B	20. D
21. A	22. D	23. D	24. B	25. B	26. B	27. A	28. C	29. A	30. A
31. A	32. D	33. A	34. D	35. C	36. B	37. D	38. A	39. A	40. C
41. A	42. D	43. A	44. D	45. D	46. D	47. A	48. D	49. A	50. D
51. D	52. D	53. C	54. A	55. B	56. C	57. C	58. B	59. C	60. A
61. C	62. C	63. B	64. C	65. A	66. D	67. B	68. B	69. D	70. D

3 THÔNG HIỂU

Câu 1. Xét số phức z thỏa mãn $(z + 2i)(\bar{z} + 2)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn, tâm đường tròn đó có tọa độ là

- A. $(1; -1)$. B. $(1; 1)$. C. $(-1; 1)$. D. $(-1; -1)$.

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$), ta có

$$(z + 2i)(\bar{z} + 2) = [a + (b + 2)i][(a + 2) - bi] = [a(a + 2) + b(b + 2)] + [(a + 2)(b + 2) - ab]i.$$

$(z + 2i)(\bar{z} + 2)$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow a(a + 2) + b(b + 2) = 0 \Leftrightarrow (a + 1)^2 + (b + 1)^2 = 2$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của z là một đường tròn có phương trình $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$ có tâm $I(-1; -1)$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 2. Trong mặt phẳng phức, tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $z \cdot \bar{z} = 1$ là

- A. một đường thẳng. B. một đường tròn. C. một elip. D. một điểm.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ (với $x, y \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bởi điểm $M(x; y)$.

Ta có $z \cdot \bar{z} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của các số phức z là đường tròn có tâm $O(0; 0)$ và bán kính $R = 1$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 3. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2|z - 1| = |z + \bar{z} + 2|$ trên mặt phẳng tọa độ là một

- A. đường thẳng. B. đường tròn. C. parabol. D. hypebol.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$; $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$\begin{aligned} 2|z - 1| &= |z + \bar{z} + 2| \Leftrightarrow 2|(x - 1) + yi| = |2x + 2| \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = \sqrt{(x + 1)^2} \\ &\Leftrightarrow y^2 = 4x. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một parabol.

Chọn đáp án **C** □

Câu 4. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo?

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Ta có

$$+ |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$+ z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ a^2 - b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ a = \pm b. \end{cases}$

Hệ này có 4 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án **A** □

Câu 5. Tìm số phức $w = 3z + \bar{z}$ biết $z = 1 + 2i$.

- A. $w = 4 + 4i$. B. $w = 4 - 4i$. C. $w = 2 - 4i$. D. $w = 2 + 4i$.

Lời giải.

Ta có $w = 3z + \bar{z} = 3(1 + 2i) + 1 - 2i = 3 + 6i + 1 - 2i = 4 + 4i$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 6. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - 1| = |z + 2i|$ là

- A. Đường tròn. B. Đường thẳng. C. Parabol. D. Hypebol.

Lời giải.

Giả sử số phức $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) có điểm biểu diễn $M(x, y)$. Khi đó ta có

$$|z - 1| = |z + 2i| \Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y + 2)^2} \Leftrightarrow 2x + 4y + 3 = 0.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $2x + 4y + 3 = 0$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 7. Tìm số phức $3z + \bar{z}$ biết $z = 1 + 2i$.

- A. $3z + \bar{z} = 4 + 4i$. B. $3z + \bar{z} = 4 - 4i$. C. $3z + \bar{z} = 2 - 4i$. D. $3z + \bar{z} = 2 + 4i$.

Lời giải.

$z = 1 + 2i \Rightarrow \bar{z} = 1 - 2i \Rightarrow 3z + \bar{z} = 3(1 + 2i) + 1 - 2i = 4 + 4i$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 8. Cho số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z - (2 + 3i)\bar{z} = 1 - 9i$. Giá trị của $ab + 1$ bằng

- A. -1. B. 0. C. 1. D. -2.

Lời giải.

Ta có $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = a - bi$.

Nên $a + bi - (2 + 3i)(a - bi) = 1 - 9i \Leftrightarrow \begin{cases} -a - 3b = 1 \\ 3a - 3b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1. \end{cases}$

Vậy $ab + 1 = -1$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 9. Tính mô-đun của số phức z thỏa mãn $z(2 - i) + 13i = 1$.

- A. $|z| = \sqrt{34}$. B. $|z| = 34$. C. $|z| = \frac{5\sqrt{34}}{3}$. D. $|z| = \frac{\sqrt{34}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $z(2 - i) + 13i = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1 - 13i}{2 - i} \Leftrightarrow z = \frac{(1 - 13i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} \Leftrightarrow z = 3 - 5i$.

Vậy $|z| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 10. Cho số phức z thỏa mãn $(2 + 3i)z - (1 + 2i)\bar{z} = 7 - i$. Tìm mô-đun của z .

- A. $|z| = \sqrt{5}$. B. $|z| = 1$. C. $|z| = \sqrt{3}$. D. $|z| = 2$.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned} (2 + 3i)z - (1 + 2i)\bar{z} &= 7 - i \\ \Leftrightarrow (2 + 3i)(x + yi) - (1 + 2i)(x - yi) &= 7 - i \\ \Leftrightarrow (x - 5y) + (x + 3y)i &= 7 - i \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 5y = 7 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1. \end{cases}$$

Như vậy $z = 2 - i \Rightarrow |z| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 11. Cho số phức z thỏa mãn $(2 + 3i)z - (1 + 2i)\bar{z} = 7 - i$. Tìm mô-đun của z .

- A. $|z| = \sqrt{5}$. B. $|z| = 1$. C. $|z| = \sqrt{3}$. D. $|z| = 2$.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) là số phức thỏa mãn bài toán. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} (2 + 3i)(a + bi) - (1 + 2i)(a - bi) &= 7 - i \\ \Leftrightarrow 2a - 3b + (3a + 2b)i - [a + 2b + (2a - b)i] &= 7 - i \\ \Leftrightarrow a - 5b + (a + 3b)i &= 7 - i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a - 5b = 7 \\ a + 3b = -1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $|z| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 12. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Mô-đun của số phức $w = 2z + (1 + i)\bar{z}$ bằng

- A. 4. B. 2. C. $\sqrt{10}$. D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $w = 2(2 - 3i) + (1 + i)(2 + 3i) = 4 - 6i + 2 + 3i + 2i + 3i^2 = 3 - i$.

Vậy $|w| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 13. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Mô-đun của số phức $w = \bar{z} + z^2$ bằng

- A. $3\sqrt{10}$. B. $\sqrt{206}$. C. $\sqrt{134}$. D. $3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $w = 2 + 3i + (2 - 3i)^2 = 2 + 3i + 4 - 12i + 9i^2 = -3 - 9i$.

Vậy $|w| = \sqrt{3^2 + (-9)^2} = 3\sqrt{10}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 14. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x(3 + 2i) + y(1 - 4i) = 1 + 24i$. Giá trị của $x + y$ bằng

- A. -3. B. 4. C. 2. D. 3.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} x(3 + 2i) + y(1 - 4i) = 1 + 24i &\Leftrightarrow 3x + y + (2x - 4y)i = 1 + 24i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x - 4y = 24 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -5. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $x + y = -3$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 15. Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z - 1 + i| = 2$ là đường tròn có tâm và bán kính lần lượt là

- A. $I(-1; 1)$, $R = 4$. B. $I(-1; 1)$, $R = 2$. C. $I(1; -1)$, $R = 2$. D. $I(1; -1)$, $R = 4$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) là số phức thỏa mãn bài toán.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z .

Ta có $|z - 1 + i| = 2 \Leftrightarrow |(x - 1) + (y + 1)i| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} = 2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$.
 Vậy M thuộc đường tròn tâm $I(1; -1)$, bán kính $R = 2$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 16. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z + 2| = |z - i|$ là một đường thẳng có phương trình

- A. $4x + 2y + 3 = 0$. B. $2x + 4y + 13 = 0$. C. $4x - 2y + 3 = 0$. D. $2x - 4y + 13 = 0$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) là số phức thỏa mãn bài toán.

Khi đó $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng phức.

Ta có

$$\begin{aligned} |z + 2| = |z - i| &\Leftrightarrow |x + 2 + yi| = |x + (y - 1)i| \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x + 2)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \\ &\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1 \\ &\Leftrightarrow 4x + 2y + 3 = 0. \quad (*) \end{aligned}$$

Đẳng thức (*) chứng tỏ M thuộc đường thẳng có phương trình $4x + 2y + 3 = 0$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn bài toán là đường thẳng $4x + 2y + 3 = 0$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 17. Tìm tập hợp điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $|z - i| = |(1 + i)z|$.

- A. Đường tròn tâm $I(0; 1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$. B. Đường tròn tâm $I(1; 0)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.
 C. Đường tròn tâm $I(-1; 0)$, bán kính $R = \sqrt{2}$. D. Đường tròn tâm $I(0; -1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi \Rightarrow (1 + i)z = (a - b) + (a + b)i$.

Vậy

$$\begin{aligned} |z - i| = |(1 + i)z| &\Leftrightarrow |a + (b - 1)i| = |(a - b) + (a + b)i| \\ &\Leftrightarrow a^2 + (b - 1)^2 = (a - b)^2 + (a + b)^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2b - 1 = 0. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn của số phức z là đường tròn tâm $I(0; -1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 18. Tìm mô đun của số phức z biết $(2z - 1)(1 + i) + (\bar{z} + 1)(1 - i) = 2 - 2i$.

- A. $\frac{1}{9}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{2}{9}$. D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó $\bar{z} = a - bi$ và

$$\begin{aligned} (2z - 1)(1 + i) + (\bar{z} + 1)(1 - i) &= 2 - 2i \\ \Leftrightarrow (2z - 1)(1 + i) + (\bar{z} + 1)(1 - i) - 2(1 - i) &= 0 \\ \Leftrightarrow (2z - 1)(1 + i) + (\bar{z} - 1)(1 - i) &= 0 \\ \Leftrightarrow (2z - 1)(1 + i)^2 + (\bar{z} - 1)(1 - i)(1 + i) &= 0 \\ \Leftrightarrow (2a + 2bi - 1) \cdot 2i + 2(a - bi - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow a - 2b - 1 + (2a - b - 1)i &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b - 1 = 0 \\ 2a - b - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases} \\ \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 19. Cho số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $z + 1 + 3i - |z|i = 0$. Tính $S = 2a + 3b$.

- A. $S = -5$. B. $S = 5$. C. $S = -6$. D. $S = 6$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$(a+1) + (b+3 - \sqrt{a^2+b^2})i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+1=0 \\ b+3 - \sqrt{a^2+b^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b \geq -3 \\ (b+3)^2 = b^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-\frac{4}{3} \end{cases}.$$

Vậy $S = 2a + 3b = -2 - 4 = -6$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 20. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|\bar{z} + 2 - i| = 4$ là đường tròn có tâm I , bán kính R . Xác định tọa độ điểm I và bán kính R .

- A. $I(2; -1), R = 2$. B. $I(-2; -1), R = 4$. C. $I(-2; -1), R = 2$. D. $I(2; -1), R = 4$.

Lời giải.

Ta có $|\bar{z} + 2 - i| = |\overline{\bar{z} + 2 - i}| = |\bar{\bar{z}} + 2 + i| = |z - (-2 - i)| = 4$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(-2; -1)$, bán kính $R = 4$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 21. Cho số phức $z \neq 1$ thỏa mãn $z^3 = 1$. Tính $(1 - z + z^{2018})(1 + z - z^{2018})$.

- A. 1. B. 3. C. 4. D. 2.

Lời giải.

Từ $z^3 = 1$ suy ra $z^{2018} = (z^3)^{672} \cdot z^2 = z^2$. Vì $z^2 + z + 1 = 0$ nên

$$\begin{aligned} (1 - z + z^{2018})(1 + z - z^{2018}) &= (1 - z + z^2)(1 + z - z^2) = 1 - (z - z^2)^2 \\ &= [1 - (z - z^2)][1 + (z - z^2)] = 4 - (1 + z + z^2) = 4. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 22. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo?

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Ta có $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ và $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$. Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ a^2 - b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ a = \pm b \end{cases}$$

Hệ này có 4 nghiệm phân biệt $(1; -1), (1; 1), (-1; 1), (-1; -1)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 23. Cho số phức z thỏa mãn $(2 - 3i)z + (4 + i)\bar{z} = -(1 + 3i)^2$. Xác định phần thực và phần ảo của z .

- A. Phần thực là -2 ; phần ảo là 3 . B. Phần thực là -3 ; phần ảo là $5i$.
C. Phần thực là -2 ; phần ảo là $5i$. D. Phần thực là -2 ; phần ảo là 5 .

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = a - bi$, ta có

$$(2 - 3i)z + (4 + i)\bar{z} = -(1 + 3i)^2 \Leftrightarrow (2 - 3i)(a + bi) + (4 + i)(a - bi) = 8 - 6i \Leftrightarrow 3a + 2b - (a + b)i = 4 - 3i.$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} 3a + 2b = 4 \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 5 \end{cases}.$$

Vậy $z = -2 + 5i$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 24. Trong mặt phẳng Oxy , tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - (2 - 3i)| \leq 2$.

- A. Một đường thẳng. B. Một hình tròn. C. Một đường tròn. D. Một đường Elip.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$\text{Khi đó, } |z - (2 - 3i)| \leq 2 \Leftrightarrow |x + yi - (2 - 3i)| \leq 2 \Leftrightarrow |(x - 2) + (y + 3)i| \leq 2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 \leq 4.$$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z nằm bên trong hình tròn tâm $I(2; -3)$, bán kính $R = 2$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 25. Cho số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{Z}$) thỏa mãn $(2 + 3i)|z| = (4 + 3i)z - 15(1 - i)$. Tính $a - b$.

A. -1.

B. 3.

C. 5.

D. 7.

Lời giải.

Ta thấy

$$\begin{aligned} (2 + 3i)|z| &= (4 + 3i)z - 15(1 - i) \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{a^2 + b^2} + 3\sqrt{a^2 + b^2}i &= (4a - 3b - 15) + (3a + 4b + 15)i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{a^2 + b^2} = 4a - 3b - 15 \\ 3\sqrt{a^2 + b^2} = 3a + 4b + 15. \end{cases} & \quad (I) \end{aligned}$$

Từ hệ (I) ta được $6a - 17b - 75 = 0$. (1)

Vì $a, b \in \mathbb{Z}$ nên từ (1) ta được $\begin{cases} a = 4 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow a - b = 7$.

Cách khác:

Ta có

$$\begin{aligned} (2 + 3i)|z| &= (4 + 3i)z - 15(1 - i) \\ \Leftrightarrow 25z &= (17|z| + 15) + (6|z| - 15 \cdot 7)i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 25a = 17|z| + 15 \\ 25b = 6|z| - 15 \cdot 7 \end{cases} \\ \Rightarrow 25(a - b) &= 11|z| + 15 \cdot 8. \quad (2) \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} (2 + 3i)|z| &= (4 + 3i)z - 15(1 - i) \\ \Leftrightarrow (4 + 3i)z &= (2 + 3i)|z| + 15(1 - i) \\ \Leftrightarrow 25|z|^2 &= (2|z| + 15)^2 + (3|z| - 15)^2 \\ \Rightarrow |z| &= 5. \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (2) và (3) ta được $a - b = 7$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 26. Tìm số phức z thỏa mãn $z + 2 - 3i = 2\bar{z}$.

A. $z = 2 + i$.

B. $z = 2 - i$.

C. $z = 3 - 2i$.

D. $z = 3 + i$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$(a + bi) + 2 - 3i = 2(a - bi) \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2 = 2a \\ b - 3 = -2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow z = 2 + i.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 27. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - i| = |(1 + i)z|$ là một đường tròn. Tâm của đường tròn đó có tọa độ là

A. (1; 1).

B. (0; -1).

C. (0; 1).

D. (-1; 0).

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned} |x + yi - i| &= |(1 + i)(x + yi)| \\ \Leftrightarrow |x + (y - 1)i| &= |x - y + (x + y)i| \\ \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 &= (x - y)^2 + (x + y)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + (y + 1)^2 &= 2. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(0; -1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 28. Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z - (2-i)\bar{z} = 3$. Mô-đun của số phức $w = \frac{i-2z}{1-i}$ là

A. $\frac{\sqrt{122}}{5}$. B. $\frac{3\sqrt{10}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{45}}{4}$. D. $\frac{\sqrt{122}}{2}$.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = a - bi$.

Ta có

$$\begin{aligned} (1+i)z - (2-i)\bar{z} &= 3 \\ \Leftrightarrow (1+i)(a+bi) - (2-i)(a-bi) &= 3 \\ \Leftrightarrow -a + (2a+3b)i &= 3 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -a = 3 \\ 2a+3b = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases} \\ \Rightarrow z &= -3 + 2i. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } w = \frac{i-2z}{1-i} = \frac{i-2(-3+2i)}{1-i} = \frac{6-3i}{1-i} = \frac{9}{2} + \frac{3}{2}i \Rightarrow |w| = \frac{3\sqrt{10}}{2}.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 29. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+i+1| = |\bar{z}-2i|$ và $|z| = 1$.

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Theo giả thiết $|z| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ (1). Mặt khác

$$\begin{aligned} |z+i+1| &= |\bar{z}-2i| \Leftrightarrow |x+yi+i+1| = |x-yi-2i| \\ \Leftrightarrow |(x+1) + (y+1)i| &= |x - (y+2)i| \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} &= \sqrt{x^2 + (y+2)^2} \\ \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 &= x^2 + (y+2)^2 \\ \Leftrightarrow x - y - 1 &= 0 \Leftrightarrow y = x - 1. \end{aligned}$$

$$\text{Thay } y = x - 1 \text{ vào (1), ta được } x^2 + (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1. \end{cases}$$

Với $x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow z = -i$.

Với $x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = 1$.

Vậy có 2 số phức z thỏa mãn bài.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 30. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(1+2i)^2 z + \bar{z} = 4i - 20$. Tìm $|z|$.

A. $|z| = 25$.

B. $|z| = 7$.

C. $|z| = 4$.

D. $|z| = 5$.

Lời giải.

Viết $z = a + bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} (1+2i)^2 z + \bar{z} &= 4i - 20 \\ \Leftrightarrow (-3+4i)(a+bi) + (a-bi) &= 4i - 20 \\ \Leftrightarrow (-2a-4b+20) + (4a-4b-4)i &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -2a-4b+20 = 0 \\ 4a-4b-4 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b = 10 \\ a-b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 31. Cho số phức z thỏa mãn $z + 3\bar{z} = (1 - 2i)^2$. Phần ảo của z là

A. -2 .

B. $\frac{3}{4}$.

C. 2 .

D. $-\frac{3}{4}$.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$.

$$\text{Ta có } (1 - 2i)^2 = -3 + 4i \Rightarrow z + 3\bar{z} = -3 + 4i \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = -3 \\ -2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{4} \\ y = -2. \end{cases}$$

Do vậy, phần ảo của z là $y = -2$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 32.

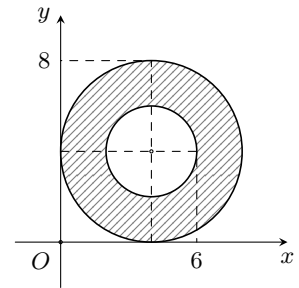
Phần gạch trong hình vẽ bên là hình biểu diễn của tập hợp các số phức thỏa mãn điều kiện nào trong các điều kiện sau đây

A. $6 \leq |z| \leq 8$.

B. $2 \leq |z + 4 + 4i| \leq 4$.

C. $2 \leq |z - 4 - 4i| \leq 4$.

D. $4 \leq |z - 4 - 4i| \leq 16$.



Lời giải.

Nhận xét

Nếu $z_0 = a + bi$ và $z = x + yi$ thì tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức z thỏa $R_1 \leq |z - z_0| \leq R_2$, ($R_1 < R_2$) là hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn tâm $I(a; b)$ và bán kính R_1, R_2 .

Theo hình vẽ, phần gạch trong hình vẽ là các điểm thuộc hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn tâm $I(4; 4)$ bán kính $R_1 = 2$ và $R_2 = 4$. Vậy đáp án thỏa mãn là $2 \leq |z - (4 + 4i)| \leq 4$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 33. Cho hai số phức z và w . Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $(z \cdot w) = \bar{z} \cdot \bar{w}$.

B. $z \cdot \bar{z} = z^2$.

C. $(z + w) = \bar{z} + \bar{w}$.

D. $(z^2) = (\bar{z})^2$.

Lời giải.

Ta có $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \neq z^2$. Nên khẳng định $z \cdot \bar{z} = z^2$ **sai**.

Chọn đáp án **B** □

Câu 34. Cho số phức $z = 1 - \frac{1}{3}i$. Tính số phức $w = i\bar{z} + 3z$.

A. $w = \frac{8}{3}$.

B. $w = \frac{8}{3} + i$.

C. $w = \frac{10}{3} + i$.

D. $w = \frac{10}{3}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } w = i \left(1 + \frac{1}{3}i \right) + 3 \left(1 - \frac{1}{3}i \right) = \frac{8}{3}.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn $|z| - 2\bar{z} = -7 + 3i + z$. Tính $|z|$.

A. 5 .

B. 3 .

C. $\frac{13}{4}$.

D. $\frac{25}{4}$.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$\begin{aligned} |z| - 2\bar{z} = -7 + 3i + z &\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} - 2(a - bi) = -7 + 3i + (a + bi) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} - 3a + 7 = 0 \\ b - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + 9} = 3a - 7 \\ b = 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \frac{7}{3} \\ \begin{cases} a = 4 \\ a = \frac{5}{4} \end{cases} \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 36. Cho số phức $z = a + bi$ (a, b là các số thực) thỏa mãn $(1 + i)z + 2\bar{z} = 3 + 2i$. Tính $P = a + b$.

- A. $P = 1$. B. $P = -\frac{1}{2}$. C. $P = \frac{1}{2}$. D. $P = -1$.

Lời giải.

$$(1 + i)z + 2\bar{z} = 3 + 2i \Leftrightarrow (1 + i)(a + bi) + 2(a - bi) = 3 + 2i \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b = 3 \\ a - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Suy ra $P = a + b = -1$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 37. Cho số phức z thỏa mãn $(1 - i)z + (3 - i)\bar{z} = 2 - 6i$. Tìm mô-đun của số phức $w = 2z + 2$.

- A. $6\sqrt{2}$. B. $\sqrt{7}$. C. $\sqrt{34}$. D. $2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi đó ta có

$$\begin{aligned} (1 - i)(x + yi) + (3 - i)(x - yi) &= 2 - 6i \\ \Leftrightarrow (x + y) + (y - x)i + (3x - y) - (x + 3y)i &= 2 - 6i \\ \Leftrightarrow 4x - (2x + 2y)i &= 2 - 6i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 2 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{5}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $w = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i\right) + 2 = 3 + 5i$ nên $|w| = \sqrt{34}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 38. Cho các số phức $z_1 = 2 + i$, $z_2 = x + yi$. Tính tổng $S = x + y$ biết $|z_2 + i| = |z_2 - 1 + 2i|$ và $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$.

- A. $-\frac{2}{3}$. B. $\frac{4}{3}$. C. $-\frac{4}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} |z_2 + i| &= |z_2 - 1 + 2i| \Leftrightarrow |x + (y + 1)i| = |(x - 1) + (y + 2)i| \\ \Leftrightarrow x^2 + (y + 1)^2 &= (x - 1)^2 + (y + 2)^2 \\ \Leftrightarrow x - y - 2 &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Lại có

$$\begin{aligned} |z_1|^2 + |z_2|^2 &= |z_1 - z_2|^2 \Leftrightarrow |2 + i|^2 + |x + yi|^2 = |(2 - x) + (1 - y)i|^2 \\ \Leftrightarrow 5 + x^2 + y^2 &= (2 - x)^2 + (1 - y)^2 \\ \Leftrightarrow 2x + y &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Từ (1) và (2), suy ra $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow S = x + y = -\frac{2}{3}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 39. Cho $a, b \in \mathbb{R}$ và thỏa mãn $(a + bi)i - 2a = 1 + 3i$, với i là đơn vị ảo. Giá trị $a - b$ bằng

- A. -4 . B. 4 . C. 10 . D. -10 .

Lời giải.

Ta có $(a + bi)i - 2a = 1 + 3i \Leftrightarrow -2a - b + ai = 1 + 3i \Leftrightarrow \begin{cases} -2a - b = 1 \\ a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -7 \end{cases}$.

Do đó $a - b = 10$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 40. Tổng phần thực và phần ảo của số phức z thỏa mãn $iz + (1 - i)\bar{z} = -2i$ bằng

- A. -6. B. -2. C. 2. D. 6.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi, (a; b \in \mathbb{R})$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} iz + (1 - i)\bar{z} &= -2i \\ \Leftrightarrow i(a + bi) + (1 - i)(a - bi) &= -2i \\ \Leftrightarrow ia - b + a - bi - ai - b &= -2i \\ \Leftrightarrow a - 2b + (2 - b)i &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - b = 0 \\ a - 2b = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Tổng phần thực và phần ảo của z là $2 + 4 = 6$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 41. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $2|z - i| = |z - \bar{z} + 2i|$ là

- A. Một parabol. B. Một đường tròn. C. Một đường thẳng. D. Một điểm.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi, (x; y \in \mathbb{R})$.

Ta có

$$\begin{aligned} 2|z - i| &= |z - \bar{z} + 2i| \\ \Leftrightarrow 2|x + yi - i| &= |x + yi - x + yi + 2i| \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} &= 2|y + 1| \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{4}x^2. \end{aligned}$$

Vậy quỹ tích các điểm biểu diễn cho số phức z thỏa mãn đề bài là một đường parabol.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 42. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 3 + 4i| \leq 2$. Trong mặt phẳng tọa độ, tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = 2z + 1 - i$ là hình tròn có diện tích

- A. 9π . B. 12π . C. 16π . D. 25π .

Lời giải.

Ta có $w = 2z + 1 - i \Leftrightarrow z = \frac{w}{2} - \frac{1 - i}{2}$.

Suy ra $|z - 3 + 4i| \leq 2 \Leftrightarrow \left| \frac{w}{2} - \frac{1 - i}{2} - 3 + 4i \right| \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}|w - (1 + 23i)| \leq 2 \Leftrightarrow |w - (1 + 23i)| \leq 4$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn cho w là hình tròn tâm $A(1; 23)$, bán kính $R = 4$, có diện tích $S = \pi \times R^2 = 16\pi$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 43. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|\bar{z} + 1 + 2i| = 1$ là

- A. Đường tròn tâm $I(1; 2)$, bán kính $R = 1$. B. Đường tròn tâm $I(-1; -2)$, bán kính $R = 1$.
C. Đường tròn tâm $I(-1; 2)$, bán kính $R = 1$. D. Đường tròn tâm $I(1; -2)$, bán kính $R = 1$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$ được biểu diễn bởi điểm $M(x; y)$. Ta có

$$|\bar{z} + 1 + 2i| = 1 \Leftrightarrow |x - yi + 1 + 2i| = 1 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1.$$

Vậy nên M thuộc đường tròn tâm $I(-1; 2)$, bán kính $R = 1$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 44. Nếu hai số thực x, y thỏa mãn $x(3 + 2i) + y(1 - 4i) = 1 + 24i$ thì $x - y$ bằng

- A. 3. B. -3. C. -7. D. 7.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} x(3+2i) + y(1-4i) &= 1+24i \\ \Leftrightarrow 3x+y+(2x-4y)i &= 1+24i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=1 \\ 2x-4y=24 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-5 \end{cases} \\ \Rightarrow x-y &= 7. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 45. Nếu số phức $z = 1 - i$ thì z^{10} bằng

- A. $32i$. B. -32 . C. $-32i$. D. 32 .

Lời giải.

Ta có $z^{10} = (z^2)^5 = (-2i)^5 = -32i$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 46. Giá trị của $|\overline{(1-i)}(2+i) - i|$ bằng

- A. $\sqrt{17}$. B. $\sqrt{5}$. C. 3 . D. $\sqrt{13}$.

Lời giải.

Ta có

$$(\overline{1-i})(2+i) - i = (1+i)(2+i) - i = 1+2i.$$

Vậy $|\overline{(1-i)}(2+i) - i| = |1+2i| = \sqrt{5}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 47. Cho số phức z thỏa mãn $3\bar{z} + (1+i)z = 1 - 5i$. Tìm mô-đun của z .

- A. $|z| = 5$. B. $|z| = \sqrt{5}$. C. $|z| = \sqrt{13}$. D. $|z| = \sqrt{10}$.

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned} 3(a-bi) + (1+i)(a+bi) &= 1-5i \Leftrightarrow 4a-b+(a-2b)i = 1-5i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4a-b=1 \\ a-2b=-5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $|z| = \sqrt{10}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 48. Xét các số phức z thỏa mãn $(2-z)(\bar{z}+i)$ là số thuần ảo. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng tọa độ là

- A. Đường tròn có tâm $I\left(1; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
 B. Đường tròn có tâm $I\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
 C. Đường tròn có tâm $I(2; 1)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.
 D. Đường tròn có tâm $I\left(1; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$ nhưng bỏ hai điểm $A(2; 0)$ và $B(0; 1)$.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$(2-z)(\bar{z}+i) = (2-x-yi)(x-yi+i) = -x^2 - y^2 + 2x + y - 2yi - xi + 2i.$$

Để $(2-z)(\bar{z}+i)$ là số thuần ảo thì

$$-x^2 - y^2 + 2x + y = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - y = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của z là đường tròn có tâm $I\left(1; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 49. Trong mặt phẳng tọa độ, tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|iz - 2i + 1| = 2$ là đường tròn có tọa độ tâm là

- A. $(2; 1)$. B. $(2; -1)$. C. $(-2; 1)$. D. $(-2; -1)$.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

Khi đó $|iz - 2i + 1| = 2 \Leftrightarrow |ai - b - 2i + 1| = 2 \Leftrightarrow (b - 1)^2 + (a - 2)^2 = 4$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|iz - 2i + 1| = 2$ là đường tròn có tọa độ tâm $I(2; 1)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 50. Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z sao cho z^2 là số thuần ảo.

- A. Trục Ox .
B. Hai đường thẳng $y = x, y = -x$, bỏ đi điểm $O(0; 0)$.
C. Hai đường thẳng $y = x, y = -x$.
D. Trục Oy .

Lời giải.

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

Khi đó $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$.

Ta có z^2 là số thuần ảo $\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm x$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z sao cho z^2 là số thuần ảo là hai đường thẳng $y = x$ và $y = -x$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 51. Cho số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa $(1 + i)z + 2\bar{z} = 3 + 2i$. Tính $P = a + b$.

- A. $P = 1$. B. $P = -1$. C. $P = -\frac{1}{2}$. D. $P = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} (1 + i)z + 2\bar{z} &= 3 + 2i \\ \Leftrightarrow (1 + i)(a + bi) + 2(a - bi) &= 3 + 2i \\ \Leftrightarrow 3a - b + (a - b)i &= 3 + 2i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b = 3 \\ a - b = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b = 3 \\ a - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $a + b = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 52. Cho số phức z thỏa mãn $z(1 + 2i) - \bar{z}(2 - 3i) = -4 + 12i$. Tìm tọa độ điểm M biểu diễn số phức z .

- A. $M(3; 1)$. B. $M(3; -1)$. C. $M(-1; 3)$. D. $M(1; 3)$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned} (x + yi)(1 + 2i) - (x - yi)(2 - 3i) &= -4 + 12i \\ \Leftrightarrow (x - 2y - 2x + 3y) + (2x + y + 3x + 2y)i &= -4 + 12i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = -4 \\ 5x + 3y = 12 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $z = 3 - i$, điểm biểu diễn số phức z là $M(3; -1)$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 53. Tìm các số thực x, y thỏa mãn $x + (y + 2i)i = 2 + i$ với i là đơn vị ảo.

- A. $x = 4; y = 1$. B. $x = 3; y = 2$. C. $x = -1; y = 2$. D. $x = 0; y = 1$.

Lời giải.

Ta có $x + (y + 2i)i = 2 + i \Leftrightarrow x - 2 + yi = 2 + i \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$

Chọn đáp án **A** □

Câu 54. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho M, N, P lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $2 + 3i, 1 - 2i, -3 + i$. Tọa độ điểm Q sao cho tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành là

- A. $Q(0; 2)$. B. $Q(6; 0)$. C. $Q(-2; 6)$. D. $Q(-4; -4)$.

Lời giải.

Ta có $M(2; 3), N(1; -2), P(-3; 1)$.

Gọi $Q(x; y) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (-1; -5), \overrightarrow{QP} = (-3 - x; 1 - y)$.

Do $MNPQ$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 - x = -1 \\ 1 - y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow Q(-2; 6)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 55. Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn điều kiện $z^4 = |z|$. Số phần tử của S là

- A. 7. B. 6. C. 5. D. 4.

Lời giải.

Ta có: $z^4 = |z| \Rightarrow |z|^4 = |z| \Leftrightarrow |z|(|z|^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 0 \\ |z| = 1 \end{cases}$.

— $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

— $|z| = 1 \Leftrightarrow z^4 = 1 \Leftrightarrow (z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 \\ z = 1 \\ z = i \\ z = -i \end{cases}$.

Vậy có 5 số phức z thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 56. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $|z \cdot \bar{z} + z| = 2$ và $|z| = 2$?

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

Lời giải.

Từ $|z| = 2$ và $|z \cdot \bar{z} + z| = 2$, suy ra $|4 + z| = 2$.

Tập hợp số phức z thỏa mãn điều kiện $|z| = 2$ là đường tròn tâm $O(0; 0)$ bán kính $R_1 = 2$.

Tập hợp số phức z thỏa mãn điều kiện $|4 + z| = 2$ là đường tròn tâm $I(-4; 0)$ bán kính $R_2 = 2$.

Do $OI = 4 = R_1 + R_2$ nên hai đường tròn tiếp xúc ngoài. Suy ra có 1 số phức z thỏa mãn.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 57. Cho số phức $z = 1 - \frac{1}{3}i$. Tìm số phức $w = i\bar{z} + 3z$.

- A. $w = \frac{10}{3} + i$. B. $w = \frac{10}{3}$. C. $w = \frac{8}{3}$. D. $w = \frac{8}{3} + i$.

Lời giải.

Ta có $z = 1 - \frac{1}{3}i \Rightarrow \bar{z} = 1 + \frac{1}{3}i$. Khi đó $w = i\bar{z} + 3z = i\left(1 + \frac{1}{3}i\right) + 3\left(1 - \frac{1}{3}i\right) = \frac{8}{3}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 58. Trên mặt phẳng phức, tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z + 2 - 3i| = 2$ là đường tròn có phương trình nào sau đây?

- A. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$. B. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 11 = 0$.
C. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0$. D. $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$\begin{aligned} &|z + (2 - 3i)| = 2 \\ \Leftrightarrow &|x + yi + 2 - 3i| = 2 \\ \Leftrightarrow &|x + 2 + (y - 3)i| = 2 \\ \Leftrightarrow &\sqrt{(x + 2)^2 + (y - 3)^2} = 2 \\ \Leftrightarrow &(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4 \\ \Leftrightarrow &x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 59. Nếu 2 số thực x, y thỏa mãn $x(3 + 2i) + y(1 - 4i) = 1 - 32i$ thì $x + y$ bằng

- A. 2. B. 4. C. 5. D. -3.

[🔗Lời giải.](#)

Ta có

$$\begin{aligned} x(3 + 2i) + y(1 - 4i) &= 1 - 32i \\ \Leftrightarrow (3x + y) + (2x - 4y)i &= 1 - 32i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x - 4y = -32 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 7. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $x + y = -2 + 7 = 5$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 60. Số phức z thỏa mãn $z + 2\bar{z} = 3 - 2i$ là

- A. $1 - 2i$. B. $1 + 2i$. C. $2 - i$. D. $2 + i$.

[🔗Lời giải.](#)

Giả sử $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned} z + 2\bar{z} = 3 - 2i &\Leftrightarrow (a + bi) + 2 \cdot (a - bi) = 3 - 2i \\ &\Leftrightarrow 3a - bi = 3 - 2i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $z = 1 + 2i$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 61. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - (3 - 4i)| = 2$ là

- A. Đường tròn có tâm $I(3; -4)$, bán kính $R = 2$. B. Đường tròn có tâm $I(-3; 4)$, bán kính $R = 2$.
C. Đường tròn có tâm $I(3; -4)$, bán kính $R = 4$. D. Đường tròn có tâm $I(-3; 4)$, bán kính $R = 4$.

[🔗Lời giải.](#)

Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có $|z - (3 - 4i)| = 2 \Leftrightarrow |(x - 3) + (y + 4)i| = 2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 4$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn đề bài là đường tròn có tâm $I(3; -4)$, bán kính $R = 2$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 62. Gọi a và b là các số thực thỏa mãn $a + 2bi + b - 3 = -ai - i$ với i là đơn vị ảo. Tính $a + b$.

- A. 3. B. 11. C. -3. D. -11.

[🔗Lời giải.](#)

Ta thấy

$$a + 2bi + b - 3 = -ai - i \Leftrightarrow (a + b - 3) + (a + 2b + 1)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ a + 2b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = -4. \end{cases}$$

Vậy $a + b = 3$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 63. Cho số phức z thỏa mãn $2z + (3 - 2i)\bar{z} = 5 + 5i$. Mô-đun của z bằng

- A. 5. B. $\sqrt{8}$. C. $\sqrt{5}$. D. $\sqrt{10}$.

[🔗Lời giải.](#)

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned} 2(x + yi) + (3 - 2i)(x - yi) &= 5 + 5i \\ \Leftrightarrow 5x - (2x + y)i &= 5 + 5i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 5 \\ 2x + y = 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Từ đó ta có $z = 1 + 3i \Rightarrow |z| = \sqrt{10}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 64. Tìm các số thực a và b thỏa mãn $3a + (b - i)(-1 + 2i) = 3 + 5i$ với i là đơn vị ảo.

- A. $a = 1, b = 2$. B. $a = \frac{1}{2}, b = 1$. C. $a = -1, b = 1$. D. $a = -2, b = 2$.

Lời giải.

Ta có $3a + (b - i)(-1 + 2i) = 3 + 5i \Leftrightarrow 3a - b + 2 + (2b + 1)i = 3 + 5i$.

Đồng nhất hệ số ta có $\begin{cases} 3a - b + 2 = 3 \\ 2b + 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 65. Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x - 3yi) + (1 - 3i) = x + 6i$, với i là đơn vị ảo.

- A. $x = -1; y = -3$. B. $x = -1; y = -1$. C. $x = 1; y = -1$. D. $x = 1; y = -3$.

Lời giải.

Ta có $(2x - 3yi) + (1 - 3i) = x + 6i \Leftrightarrow x + 1 - (3y + 9)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ 3y + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 66. Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(3x + 2yi) + (2 + i) = 2x - 3i$ với i là đơn vị ảo.

- A. $x = -2; y = -2$. B. $x = -2; y = -1$. C. $x = 2; y = -2$. D. $x = 2; y = -1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} (3x + 2yi) + (2 + i) &= 2x - 3i \Leftrightarrow (3x + 2) + (2y + 1)i = 2x - 3i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2 = 2x \\ 2y + 1 = -3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 67. Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(3x + yi) + (4 - 2i) = 5x + 2i$ với i là đơn vị ảo.

- A. $x = -2; y = 4$. B. $x = 2; y = 4$. C. $x = -2; y = 0$. D. $x = 2; y = 0$.

Lời giải.

Ta có $(3x + yi) + (4 - 2i) = 5x + 2i \Leftrightarrow 2x - 4 + (4 - y)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ 4 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 68. Tìm hai số x và y thỏa mãn $(2x - 3yi) + (3 - i) = 5x - 4i$ với i là đơn vị ảo.

- A. $x = -1; y = -1$. B. $x = -1; y = 1$. C. $x = 1; y = -1$. D. $x = 1; y = 1$.

Lời giải.

Ta có

$$(2x - 3yi) + (3 - i) = 5x - 4i \Leftrightarrow 3x - 3 + (3y - 3)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3 = 0 \\ 3y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 69. Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z} - 2i)(z + 2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

- A. $2\sqrt{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. 2. D. 4.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

Ta có $(\bar{z} - 2i)(z + 2) = a^2 + 2a + b^2 + 2b - 2(a + b + 2)i$. Vì $(\bar{z} - 2i)(z + 2)$ là số thuần ảo nên $a^2 + 2a + b^2 + 2b = 0 \Leftrightarrow (a + 1)^2 + (b + 1)^2 = 2$.

Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp các số điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn bán kính bằng $\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 70. Cho hai số phức $z_1 = 3 - 4i$ và $z_2 = -2 + i$. Tìm số phức liên hợp của $z_1 + z_2$.

- A. $1 + 3i$. B. $1 - 3i$. C. $-1 + 3i$. D. $-1 - 3i$.

Lời giải.

Ta có $z_1 + z_2 = (3 - 4i) + (-2 + i) = 1 - 3i \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = 1 + 3i$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 71. Cho hai số phức $z_1 = 1 - 2i$ và $z_2 = 3 + 4i$. Tìm điểm M biểu diễn số phức $z_1 \cdot z_2$ trên mặt phẳng tọa độ.

- A. $M(-2; 11)$. B. $M(11; 2)$. C. $M(11; -2)$. D. $M(-2; -11)$.

Lời giải.

Ta có $z_1 \cdot z_2 = (1 - 2i)(3 + 4i) = 3 + 4i - 6i + 8 = 11 - 2i$. Vậy điểm $M(11; -2)$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 72. Mô-đun của số phức $z = (1 + 2i)(2 - i)$ là

- A. $|z| = 5$. B. $|z| = \sqrt{5}$. C. $|z| = 10$. D. $|z| = 6$.

Lời giải.

Ta có $|z| = \sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2} = 5$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 73. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2i| = |\bar{z} + 1|$. Tập hợp những điểm M biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ là đường thẳng có phương trình $ax + 4y + c = 0$, trong đó a, c là các số nguyên. Tính $P = a + c$.

- A. 5. B. 1. C. -1. D. 3.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} |z - 2i| &= |\bar{z} + 1| \\ \Leftrightarrow |x + (y - 2)i| &= |(x + 1) - yi| \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - 2)^2} &= \sqrt{(x + 1)^2 + (-y)^2} \\ \Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 &= (x + 1)^2 + y^2 \\ \Leftrightarrow 2x + 4y - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Vậy $a = 2, c = -3$. Do đó $a + c = -1$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 74. Giả sử A, B theo thứ tự là điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2 . Khi đó độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ bằng

- A. $|z_1| - |z_2|$. B. $|z_1| + |z_2|$. C. $|z_2 - z_1|$. D. $|z_2 + z_1|$.

Lời giải.

Giả sử $z_1 = x_1 + y_1i$ và $z_2 = x_2 + y_2i$ trong đó x_1, y_1, x_2, y_2 là các số thực. Theo giả thiết thì $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

Ta có $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Lại có $|z_2 - z_1| = |(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)i| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Vậy $|\overrightarrow{AB}| = |z_2 - z_1|$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 75. Tìm các số thực x, y thỏa mãn $2x + 1 + (1 - 2y)i = 2 - x + (3y - 2)i$.

- A. $x = \frac{1}{3}; y = \frac{3}{5}$. B. $x = 1; y = \frac{3}{5}$. C. $x = 1; y = \frac{1}{5}$. D. $x = \frac{1}{3}; y = \frac{1}{5}$.

Lời giải.

Áp dụng định nghĩa hai số phức bằng nhau ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + 1 = 2 - x \\ 1 - 2y = 3y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 76. Trong các số phức $(1 + i)^3, (1 + i)^4, (1 + i)^5, (1 + i)^6$ số phức nào là số phức thuần ảo?

- A. $(1 + i)^5$. B. $(1 + i)^6$. C. $(1 + i)^3$. D. $(1 + i)^4$.

Lời giải.

$(1 + i)^3 = 2i - 2, (1 + i)^4 = -4, (1 + i)^5 = -4(1 + i), (1 + i)^6 = -8i$.

Vậy số thuần ảo là $(1 + i)^6$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 77. Số phức z thỏa mãn $z - (2 + 3i)\bar{z} = 1 - 9i$ là

- A. $-3 - i$. B. $2 - i$. C. $2 + i$. D. $-2 - i$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), ta có

$$\begin{aligned} z - (2 + 3i)\bar{z} = 1 - 9i &\Leftrightarrow a + bi - (2 + 3i)(a - bi) = 1 - 9i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -a - 3b = 1 \\ 3b - 3a = -9 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án **B**

Câu 78. Gọi a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $z = (\sqrt{2} + 3i)^2$. Tính $T = a + 2b$.

- A. $T = -7 + 12\sqrt{2}$. B. $T = -7 + 6\sqrt{2}$. C. $T = 12 - 7\sqrt{2}$. D. $T = -7 - 12\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $z = (\sqrt{2} + 3i)^2 = -7 + 6\sqrt{2}i \Rightarrow T = a + 2b = -7 + 12\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **A**

Câu 79. Cho số phức $z = 2 + 5i$. Gọi a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $w = iz + \bar{z}$. Tính tích ab .

- A. -9 . B. -6 . C. 9 . D. 6 .

Lời giải.

Ta có $w = iz + \bar{z} = i(2 + 5i) + 2 - 5i = -3 - 3i$. Suy ra $ab = 9$.

Chọn đáp án **C**

Câu 80. Gọi $\mathbb{C}$ là tập hợp các số phức. Xét các khẳng định sau

- ① $z^2 \geq 0 \forall z \in \mathbb{C}$. ② $z^2 = |z^2| \forall z \in \mathbb{C}$. ③ $|\bar{z}| = |z| \forall z \in \mathbb{C}$.

Số khẳng định đúng là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải.

Ta có $i^2 = -1 < 0$ và $|i^2| = 1$ nên mệnh đề a) và b) sai.

Chỉ có khẳng định c) đúng.

Chọn đáp án **B**

Câu 81. Cho số phức z thỏa mãn $(1 + z)^2$ là số thực. Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là

- A. Hai đường thẳng. B. Đường thẳng. C. Parabol. D. Đường tròn.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi đó $(1 + z)^2 = (x + 1)^2 - y^2 + 2(x + 1)yi$.

$(1 + z)^2$ là số thực khi $2(x + 1)y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$.

Vậy tập hợp các điểm M là hai đường thẳng $d_1: x + 1 = 0, d_2: y = 0$.

Chọn đáp án **A**

Câu 82. Tính môđun của số phức z biết $\bar{z} = (2i - 1)(3 + i)$.

- A. $|z| = 2\sqrt{5}$. B. $|z| = 5\sqrt{2}$. C. $|z| = \sqrt{10}$. D. $|z| = \sqrt{26}$.

Lời giải.

Ta có $\bar{z} = (2i - 1)(3 + i) = -5 + 5i \Rightarrow z = 5 + 5i \Rightarrow |z| = 5\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **B**

Câu 83. Cho số phức $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ thỏa $||z - 1| + z - 2| = a = b$. Tính $|z(1 + \bar{z})|$.

- A. $3\sqrt{2}$. B. $\sqrt{10}$. C. $\sqrt{5}$. D. $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Vì $a = b$ nên $z = a + ai$.

Ta có $||z - 1| + z - 2| = a \Leftrightarrow (\sqrt{(a - 1)^2 + a^2} + a - 2)^2 + a^2 = a^2 \Leftrightarrow \sqrt{2a^2 - 2a + 1} = 2 - a$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-a \geq 0 \\ 2a^2-2a+1=4-4a+a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 2 \\ a^2+2a-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=1 \text{ (vì } a > 0).$$

Khi đó $|z(1+\bar{z})| = |(1+i)(1+1-i)| = \sqrt{10}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 84. Trong mặt phẳng phức, điểm $M(1; -2)$ biểu diễn số phức z . Mô-đun của số phức $w = i\bar{z} - z^2$ bằng

- A. 26. B. $\sqrt{6}$. C. $\sqrt{26}$. D. 6.

Lời giải.

Ta có $z = 1 - 2i$ nên $w = i\bar{z} - z^2 = i(1 + 2i) - (1 - 2i)^2 = 1 + 5i$.

Vậy $|w| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 85. Gọi S là tập hợp các số phức z sao cho $z - 2i\bar{z} + 1 - 3i$ là số thực và z^2 là số thuần ảo. Tổng các phần tử của tập hợp S là

- A. $-4 - 2i$. B. $4 - 2i$. C. $-2 + 4i$. D. $1 + i$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Ta có

$$z - 2i\bar{z} + 1 - 3i = (a - 2b + 1) + (-2a + b - 3)i.$$

Vì $z - 2i\bar{z} + 1 - 3i$ là số thực nên $-2a + b - 3 = 0$.

$$z^2 = a^2 - b^2 + 2abi.$$

Vì z^2 là số thuần ảo nên $a^2 - b^2 = 0$.

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} -2a + b - 3 = 0 \\ a^2 - b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a + 3 \\ 3a^2 + 12a + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} b = -3 \\ a = -3 \end{cases}.$$

Vậy $S = \{-1 + i; -3 - 3i\}$, tổng các phần tử của S là $-4 - 2i$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 86. Cho số phức $z = 3 - 2i$. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức iz ?

- A. $M(-2; 3)$. B. $M(2; 3)$. C. $M(3; -2)$. D. $M(-2; 3i)$.

Lời giải.

Ta có $z = 3 - 2i \Rightarrow iz = 2 + 3i$.

Điểm biểu diễn số phức iz là $M(2; 3)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 87. Cho số phức z thỏa mãn $z + 4\bar{z} = 7 + i(z - 7)$. Khi đó, mô-đun của z bằng bao nhiêu?

- A. $|z| = \sqrt{3}$. B. $|z| = 3$. C. $|z| = \sqrt{5}$. D. $|z| = 5$.

Lời giải.

Giả sử $x = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có

$$\begin{aligned} z + 4\bar{z} = 7 + i(z - 7) &\Leftrightarrow x + yi + 4(x - yi) = 7 + i(x + yi - 7) \\ &\Leftrightarrow (5x + y - 7) + i(-x - 3y + 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + y - 7 = 0 \\ -x - 3y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Mô-đun của số phức z là $|z| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 88. Số nào sau đây là số thuần ảo?

- A. $(1 + i)^4$. B. $(1 + i)^3$. C. $(1 + i)^5$. D. $(1 + i)^6$.

Lời giải.

Ta có

$$— (1 + i)^4 = (1 + 2i + i^2)^2 = 4i^2 = -4.$$

$$— (1 + i)^3 = (1 + i)^2 \cdot (1 + i) = 2i \cdot (1 + i) = -2 + 2i.$$

$$— (1 + i)^5 = (1 + i)^4 \cdot (1 + i) = -4 \cdot (1 + i) = -4 - 4i.$$

$$— (1 + i)^6 = (1 + i)^5 \cdot (1 + i) = -4 \cdot (1 + i)(1 + i) = -8i \text{ là số thuần ảo.}$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 89. Trong mặt phẳng phức, gọi M là điểm biểu diễn số phức $(z - \bar{z})^2$ với $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M thuộc tia đối của tia Oy .

B. M thuộc tia Oy .

C. M thuộc tia đối của tia Ox .

D. M thuộc tia Ox .

Lời giải.

Ta có $(z - \bar{z})^2 = (a + bi - a + bi)^2 = 4b^2i^2 = -4b^2$. Do giả thiết suy ra M thuộc tia đối của tia Ox .

Chọn đáp án **C**

□

Câu 90. Cho $(2 - 2i)^{2018} = a + bi; a, b \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$.

A. -8^{1009} .

B. 8^{1009} .

C. -4^{1009} .

D. 4^{1009} .

Lời giải.

Ta có

$$(2 - 2i)^{2018} = 2^{2018} \cdot [(1 - i)^2]^{1009} = 2^{2018} \cdot (-2i)^{1009} = -8^{1009}i.$$

Vậy $a = 0, b = -8^{1009}$ và $P = a + b = -8^{1009}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 91. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z + 2i|^2 + 2|1 - \bar{z}|^2 + 3|z - 2 + i|^2 = 2018$ là một đường tròn. Tìm tâm I của đường tròn đó.

A. $\left(\frac{4}{3}; -\frac{5}{6}\right)$.

B. $\left(-\frac{4}{3}; \frac{5}{6}\right)$.

C. $(1; 1)$.

D. $\left(\frac{4}{3}; -\frac{7}{6}\right)$.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} & |x + (y + 2)i|^2 + 2|1 - x + yi|^2 + 3|x - 2 + (y + 1)i|^2 = 2018 \\ \Leftrightarrow & x^2 + (y + 2)^2 + 2(1 - x)^2 + 2y^2 + 3(x - 2)^2 + 3(y + 1)^2 = 2018 \\ \Leftrightarrow & 6x^2 + 6y^2 - 16x + 10y - 1997 = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{12071}{36}. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn $\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{12071}{36}$ có tâm là $I\left(\frac{4}{3}; -\frac{5}{6}\right)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 92. Tìm số phức thỏa mãn $i(\bar{z} - 2 + 3i) = 1 + 2i$.

A. $z = -4 + 4i$.

B. $z = -4 - 4i$.

C. $z = 4 - 4i$.

D. $z = 4 + 4i$.

Lời giải.

Ta có $i(\bar{z} - 2 + 3i) = 1 + 2i \Leftrightarrow -\bar{z} + 2 - 3i = i - 2 \Leftrightarrow \bar{z} = 4 - 4i$.

Khi đó $z = 4 + 4i$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 93. Cho số phức $z_1 = 3 + 2i, z_2 = 6 + 5i$. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = 6z_1 + 5z_2$.

A. $\bar{z} = 51 + 40i$.

B. $\bar{z} = 48 - 37i$.

C. $\bar{z} = 51 - 40i$.

D. $\bar{z} = 48 + 37i$.

Lời giải.

Ta có $z = 6z_1 + 5z_2 = 6(3 + 2i) + 5(6 + 5i) = 48 + 37i$.

Vậy $\bar{z} = 48 - 37i$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 94. Cho các số phức z thỏa mãn $|z - i| = |z - 1 + 2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = z + 2i$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Phương trình đường thẳng đó là

A. $x - 3y + 4 = 0$.

B. $x + 3y + 4 = 0$.

C. $x - 4y + 3 = 0$.

D. $-x + 3y + 4 = 0$.

Lời giải.

Ta có $z = w - 2i$. Thay vào giả thiết $\Rightarrow |w - 3i| = |w - 1|$.

Gọi $w = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$\begin{aligned} |x + yi - 3i| &= |x + yi - 1| \Leftrightarrow |x + (y - 3)i| = |x - 1 + yi| \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - 3)^2} = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \\ &\Leftrightarrow x - 3y + 4 = 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 95. Tính giá trị của tổng phần thực và phần ảo của số phức z biết $z = (2 + i)^2$.

- A. 7. B. 6. C. 8. D. -1.

Lời giải.

Ta có $z = (2 + i)^2 = 4 + 4i + i^2 = 3 + 4i$. Vậy tổng phần thực và phần ảo của z bằng 7.

Chọn đáp án **A** □

Câu 96. Cho số phức z thỏa mãn $z + 2\bar{z} = 3 - 2i$. Tìm phần ảo của z .

- A. -2. B. -1. C. 1. D. 2.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$). Từ giả thiết, suy ra

$$(a + bi) + 2(a - bi) = 3 - 2i \Leftrightarrow 3a - bi = 3 - 2i \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 3 \\ -b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2. \end{cases}$$

Vậy phần ảo của z bằng 2.

Chọn đáp án **D** □

Câu 97. Cho số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + z_2| = 3$, $|z_1| = 1$, $|z_2| = 2$. Tính $z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2$.

- A. 2. B. 8. C. 0. D. 4.

Lời giải.

Có $|z_1 + z_2| = 3 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = 9 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = 9 \Leftrightarrow |z_1|^2 + z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 + |z_2|^2 = 9$.
Mà $|z_1| = 1$, $|z_2| = 2$ nên $z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 = 9 - 1^2 - 2^2 = 4$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 98. Gọi $z = a + bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$, là số phức thỏa mãn $(1 + i)z + 3\bar{z} = 9 + 4i$. Tính $T = a + b$.

- A. $T = -1$. B. $T = 1$. C. $T = 7$. D. $T = -3$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} (1 + i)z + 3\bar{z} &= 9 + 4i \\ \Leftrightarrow (1 + i)(a + bi) + 3(a - bi) &= 9 + 4i \\ \Leftrightarrow a + bi + ai - b + 3a - 3bi &= 9 + 4i \\ \Leftrightarrow (4a - b) + (a - 2b)i &= 9 + 4i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - b = 9 \\ a - 2b = 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $T = 2 - 1 = 1$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 99. Tập hợp tất cả các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn cho số phức z thỏa mãn điều kiện $z^2 = (\bar{z})^2$ là

- A. trục hoành. B. gồm cả trục hoành và trục tung.
C. đường thẳng $y = x$. D. trục tung.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó } z^2 = (\bar{z})^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = x^2 - y^2 - 2xyi \Leftrightarrow 4xyi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

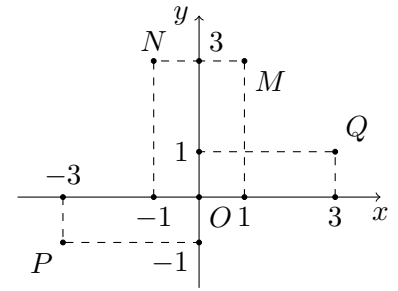
Vậy tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn cho số phức z là trục hoành và trục tung.

Chọn đáp án **B** □

Câu 100.

Điểm nào trong hình vẽ dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $z = (1 + i)(2 - i)$?

- A. M. B. P. C. N. D. Q.



Lời giải.

Ta có $z = (1 + i)(2 - i) = 3 + i$ có điểm biểu diễn là $Q(3; 1)$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 101. Cho số phức $z = -4 + 3i$. Tính mô-đun của số phức $w = iz + \bar{z}$.

- A. $|w| = 7\sqrt{2}$. B. $|w| = \sqrt{50}$. C. $|w| = 2\sqrt{7}$. D. $|w| = 25$.

Lời giải.

Ta có $w = iz + \bar{z} = i(-4 + 3i) - 4 - 3i = -7 - 7i \Rightarrow |w| = 7\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 102. Số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 2| = |z|$ và $(z + 1)(\bar{z} - i)$ là số thực. Giá trị của biểu thức $S = a + 2b$ bằng bao nhiêu?

- A. $S = -3$. B. $S = 1$. C. $S = 0$. D. $S = -1$.

Lời giải.

Ta có $|z - 2| = |z| \Leftrightarrow |(a - 2) + bi| = |a + bi| \Leftrightarrow (a - 2)^2 + b^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow (a - 2)^2 = a^2 \Leftrightarrow a = 1$.

Mặt khác $(z + 1)(\bar{z} - i) = (2 + bi)(1 - (b + 1)i) = 2 - 2(b - 1)i + bi + b(b - 1) = 2 + (-b - 2)i + b(b - 1)$ là số thực khi và chỉ khi $-b - 2 = 0 \Leftrightarrow b = -2$.

Vậy $S = a + 2b = 1 + 2 \cdot (-2) = -3$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 103. Đẳng thức nào trong các đẳng thức sau đúng?

- A. $(1 + i)^{2018} = 2^{1009}i$. B. $(1 + i)^{2018} = -2^{1009}i$.
C. $(1 + i)^{2018} = 2^{1009}$. D. $(1 + i)^{2018} = -2^{1009}$.

Lời giải.

Ta thấy $(1 + i)^{2018} = [(1 + i)^2]^{1009} = (2i)^{1009} = 2^{1009}i$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 104. Cho số phức $w = (2 + i)^2 - 3(2 - i)$. Giá trị của $|w|$ là

- A. $\sqrt{54}$. B. $2\sqrt{10}$. C. $\sqrt{43}$. D. $\sqrt{58}$.

Lời giải.

Ta có $w = -3 + 7i$ nên $|w| = \sqrt{(-3)^2 + 7^2} = \sqrt{58}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 105. Cho số phức z thỏa mãn $(2 + i)z - \frac{\bar{z}}{1 - i} = 9 - 9i$. Tính $|z|$.

- A. $\sqrt{5}$. B. $2\sqrt{5}$. C. $\sqrt{13}$. D. $\sqrt{17}$.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Phương trình đã cho có dạng

$$\begin{aligned} & (2 + i)(1 - i)(x + yi) - (x - yi) = (9 - 9i)(1 - i) \\ \Leftrightarrow & (3 - i)(x + yi) - (x - yi) = -18i \\ \Leftrightarrow & (2x + y) + (4y - x)i = -18i \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x + y = 0 \\ -x + 4y = -18 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 2 \\ y = -4. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $|z| = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 106. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| = 2\sqrt{2}$ và $(z - 1)^2$ là số thuần ảo?

A. 2.

B. 0.

C. 4.

D. 3.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$(z - 1)^2 \text{ là số thuần ảo} \Leftrightarrow (a - 1)^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = a - 1 \\ b = 1 - a. \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} |z + 2 - i| &= 2\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow (a + 2)^2 + (b - 1)^2 &= 8 \quad (1). \end{aligned}$$

— Trường hợp 1: $b = a - 1$.

$$(1) \Leftrightarrow 2a^2 + 8 = 8 \Leftrightarrow a = 0 \Rightarrow b = -1.$$

— Trường hợp 2: $b = 1 - a$.

$$(1) \Leftrightarrow 2a^2 + 4a - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3} - 1 \Rightarrow b = 2 - \sqrt{3} \\ a = -\sqrt{3} - 1 \Rightarrow b = \sqrt{3} + 2. \end{cases}$$

Vậy có 3 số phức z thỏa mãn.

Chọn đáp án **D** □

Câu 107. Biết z là một nghiệm của phương trình $z + \frac{1}{z} = 1$. Tính giá trị biểu thức $P = z^3 + \frac{1}{z^3}$.

A. $P = -2$.B. $P = 0$.C. $P = 4$.D. $P = \frac{7}{4}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } z^3 + \frac{1}{z^3} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - 3z \cdot \frac{1}{z} \left(z + \frac{1}{z}\right) = 1 - 3 = -2.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 108. Mô đun của số phức $z = (1 + 2i)(2 - i)$ là

A. $|z| = 5$.B. $|z| = \sqrt{5}$.C. $|z| = 10$.D. $|z| = 6$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } z = (1 + 2i)(2 - i) = 4 + 3i \Rightarrow |z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 109. Cho số phức z thỏa mãn $(1 - i)z + 2i\bar{z} = 5 + 3i$. Tính tổng phần thực và phần ảo của số phức $w = z + 2\bar{z}$.

A. 3.

B. 4.

C. 6.

D. 5.

Lời giải.

Cách 1: Đặt $z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$.

Thay vào biểu thức trên ta được $(x + 3y) + (x + y)i = 5 + 3i$, suy ra $z = 2 + i$.

Vậy $w = 6 - i$.

Từ đó suy ra $\text{Re}(w) + \text{Im}(w) = 6 + (-1) = 5$.

Cách 2: Sử dụng máy tính bỏ túi Casio

Đặt $z = X + Yi \Rightarrow \bar{z} = X - Yi$.

Nhập vào máy tính: $(1 - i)(X + Yi) + 2i(X - Yi) - (5 + 3i)$.

Gán $X = 1000$, $Y = 100$. Ta được kết quả là $1259 + 1097i$.

Phân tích số liệu: $1295 = X + 3Y - 5$ và $1097 = X + Y - 3$.

$$\text{Do đó ta giải hệ phương trình: } \begin{cases} X + 3Y - 5 = 0 \\ X + Y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X + 3Y = 5 \\ X + Y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 2 \\ Y = 1. \end{cases}$$

Do đó ta có $z = 2 + i$. Từ đó suy ra $w = 6 - i$.

Vậy $\text{Im}(w) + \text{Re}(w) = 5$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 110. Cho các mệnh đề:

(I) Số phức $z = 2i$ là số thuần ảo.

(II) Nếu số phức z có phần thực là a , số phức z' có phần thực là a' thì số phức $z \cdot z'$ có phần thực là $a \cdot a'$.

(III) Tích của hai số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) và $z' = a' + b'i$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là số phức có phần ảo là $ab' + a'b$.

Số mệnh đề đúng trong ba mệnh đề trên là

A. 0.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải.

Ta có $z \cdot z' = (a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$. Do đó, chỉ có hai mệnh đề đúng là (I) và (III).

Chọn đáp án **C**

Câu 111. Trong mặt phẳng Oxy , cho số phức z thỏa mãn $|z - 1| = |(1 + i)z|$. Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z là

A. đường tròn có tâm $I(1; 0)$, bán kính $r = \sqrt{2}$.

B. đường tròn có tâm $I(0; 1)$, bán kính $r = \sqrt{2}$.

C. đường tròn có tâm $I(-1; 0)$, bán kính $r = \sqrt{2}$.

D. đường tròn có tâm $I(0; -1)$, bán kính $r = \sqrt{2}$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$, trong đó x, y là các số thực.

$$|z - 1| = |(1 + i)z| \Leftrightarrow |(x - 1) + yi| = |1 + i||x + yi| \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 2(x^2 + y^2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0.$$

Do đó, tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa yêu cầu bài toán là đường tròn tâm $I(-1; 0)$, bán kính $r = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án **C**

Câu 112. Cho số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z - 2\bar{z} = -2 + 9i$. Khi đó giá trị $a + 3b$ bằng

A. -1.

B. -7.

C. 11.

D. 5.

Lời giải.

$$\text{Ta có } z - 2\bar{z} = -2 + 9i \Leftrightarrow -a + 3bi = -2 + 9i \Rightarrow a = 2; b = 3 \Rightarrow a + 3b = 11.$$

Chọn đáp án **C**

Câu 113. Cho hai số phức $z_1 = 3 - i$ và $z_2 = 4 - i$. Tính mô-đun của số phức $z_1^2 + \bar{z}_2$.

A. 12.

B. 10.

C. 13.

D. 15.

Lời giải.

$$\text{Ta có số phức } w = z_1^2 + \bar{z}_2 = (3 - i)^2 + (4 + i) = 9 - 6i + i^2 + 4 + i = 12 - 5i.$$

$$\text{Nên } |w| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = 13.$$

Chọn đáp án **C**

Câu 114. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - 2i| = 5$ và $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức z . Điểm M thuộc đường tròn có phương trình nào sau đây?

A. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$.

B. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

C. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$.

D. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

Lời giải.

Vì $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức z nên $z = x + yi$. Ta có

$$|z - 1 - 2i| = 5 \Leftrightarrow |x - 1 + (y - 2)i| = 5 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25.$$

Chọn đáp án **B**

Câu 115. Cho số phức z thỏa mãn $z(1 + i) + 12i = 3$. Tìm phần ảo của số $\bar{z}$.

A. $-\frac{9}{2}$.

B. $-\frac{15}{2}$.

C. $\frac{15}{2}i$.

D. $\frac{15}{2}$.

Lời giải.

$$z = \frac{3 - 12i}{1 + i} = -\frac{9}{2} - \frac{15}{2}i \Rightarrow \bar{z} = -\frac{9}{2} + \frac{15}{2}i. \text{ Phần ảo của } \bar{z} \text{ là } \frac{15}{2}.$$

Chọn đáp án **D**

Câu 116. Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Phần ảo của số phức $w = 3z_1 - 2z_2$ là

A. 12.

B. 1.

C. 11.

D. $12i$.

Lời giải.

$$w = 3z_1 - 2z_2 = -1 + 12i. \text{ Vậy } w \text{ có phần ảo là } 12.$$

Chọn đáp án **A**

Câu 117. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $2x + 1 + (1 - 2y)i = 2(2 - i) + yi - x$. Khi đó giá trị của $x^2 - 3xy - y$ bằng

A. -3.

B. 1.

C. -2.

D. -1.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
& 2x + 1 + (1 - 2y)i = 2(2 - i) + yi - x \\
\Leftrightarrow & 2x + 1 + (1 - 2y)i = 4 - x + (y - 2)i \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} 2x + 1 = 4 - x \\ 1 - 2y = y - 2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Suy ra $x^2 - 3xy - y = -3$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 118. Cho các số phức z thỏa mãn $|zi - (2 + i)| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn. Tâm I của đường tròn đó là

- A. $I(1; -2)$. B. $I(-1; 2)$. C. $I(-1; -2)$. D. $I(1; 2)$.

Lời giải.

Ta có $|i(z - 1 + 2i)| = 2 \Rightarrow |z - 1 + 2i| = 2 \Rightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 2)^2} = 2$.

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(1; -2)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 119. Cho số phức z thỏa mãn $(1 - i) \cdot \bar{z} + \overline{(1 + 2i)} \cdot (1 - 2z) = 10 + 7i$. Tính mô đun của z .

- A. 3 . B. $\sqrt{3}$. C. 5 . D. $\sqrt{5}$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$. Ta có

$$\begin{aligned}
& (1 - i) \cdot \bar{z} + \overline{(1 + 2i)} \cdot (1 - 2z) = 10 + 7i \\
\Leftrightarrow & (1 - i)(a - bi) + (1 - 2i)(1 - 2(a + bi)) = 10 + 7i \\
\Leftrightarrow & a - b - ai - bi + (1 - 2i)(1 - 2a - 2bi) = 10 + 7i \\
\Leftrightarrow & a - b - ai - bi + 1 - 2a - 2(1 - 2a)i - 2bi - 4b = 10 + 7i \\
\Leftrightarrow & -3a - 5b + 1 + 3ai - 3bi - 2i = 10 + 7i \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} -3a - 5b + 1 = 10 \\ 3a - 3b - 2 = 7 \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} a = 1 \\ b = -2. \end{cases}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow |z| = |1 - 2i| = \sqrt{5}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 120. Số phức $z = (1 - i)^{2018}$ có phần thực bằng

- A. 1. B. 2^{1009} . C. -2^{1009} . D. 0.

Lời giải.

$z = (1 - i)^{2018} = [(1 - i)^2]^{1009} = (-2i)^{1009} = (-2)^{1009}i = -2^{1009}i$.

Suy ra phần thực của số phức z bằng 0.

Chọn đáp án **D** □

Câu 121. Trong mặt phẳng tọa độ, tập hợp các điểm biểu diễn cho số z thỏa mãn $|(1 + 2i)z - 10| = |(2 + i)\bar{z} + 5|$ là

- A. hai đường thẳng cắt nhau. B. hai đường thẳng song song.
C. một đường thẳng. D. một đường tròn.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có

$$\begin{aligned}
& |(1 + 2i)z - 10| = |(2 + i)\bar{z} + 5| \\
\Leftrightarrow & |(1 + 2i)(x + yi) - 10| = |(2 + i)(x - yi) + 5| \\
\Leftrightarrow & |x - 2y - 10 + (2x + y)i| = |(2x + y) + (x - 2y + 5)i| \\
\Leftrightarrow & (x - 2y - 10)^2 + (2x + y)^2 = (2x + y)^2 + (x - 2y + 5)^2 \\
\Leftrightarrow & 2x - 4y - 5 = 0.
\end{aligned}$$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn cho số z là đường thẳng $2x - 4y - 5 = 0$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 122. Tìm phần ảo của số phức z biết $z - (2 + 3i)\bar{z} = 1 - 9i$.

A. 1.

B. -2.

C. -1.

D. 2.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có

$$\begin{aligned} z - (2 + 3i)\bar{z} = 1 - 9i &\Leftrightarrow x + yi - (2 + 3i)(x - yi) = 1 - 9i \\ &\Leftrightarrow x + yi - [2x + 3y + (3x - 2y)i] = 1 - 9i \\ &\Leftrightarrow -x - 3y - 3(x - y)i = 1 - 9i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x - 3y = 1 \\ -3(x - y) = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phần ảo của số phức z là $y = -1$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 123. Cho số phức $w = (2 + i)^2 - 3(2 - i)$. Giá trị của $|w|$ là

A. $\sqrt{54}$.

B. $\sqrt{58}$.

C. $2\sqrt{10}$.

D. $\sqrt{43}$.

Lời giải.

Ta có $w = -3 + 7i$ nên $|w| = \sqrt{58}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 124. Cho số phức $z = a + bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

A. $z + \bar{z} = 2bi$.

B. $z - \bar{z} = 2a$.

C. $z \cdot \bar{z} = a^2 - b^2$.

D. $|z^2| = |z|^2$.

Lời giải.

Ta có $\bar{z} = a - bi$, do đó

— $z + \bar{z} = 2a$.

— $z - \bar{z} = 2bi$.

— $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$.

— $|z^2| = |z \cdot z| = |z| \cdot |z| = |z|^2$.

Vậy chỉ có mệnh đề $|z^2| = |z|^2$ là mệnh đề đúng.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 125. Tính mô-đun của số phức $z = (1 + 2i)(2 - i)$.

A. $|z| = 5$.

B. $|z| = \sqrt{5}$.

C. $|z| = 10$.

D. $|z| = 6$.

Lời giải.

Ta có $|z| = |1 + 2i| \cdot |2 - i| = 5$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 126. Cho số phức z thỏa mãn $(2 - 3i)z + 6 = 5i - 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\bar{z} = \frac{29}{13} + \frac{11}{13}i$.

B. $\bar{z} = \frac{29}{13} - \frac{11}{13}i$.

C. $\bar{z} = -\frac{29}{13} - \frac{11}{13}i$.

D. $\bar{z} = -\frac{29}{13} + \frac{11}{13}i$.

Lời giải.

$$z = \frac{5i - 7}{2 - 3i} = -\frac{29}{13} - \frac{11}{13}i \Rightarrow \bar{z} = -\frac{29}{13} + \frac{11}{13}i.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 127. Cho số phức $z = (1 - i)^2(3 + 2i)$. Số phức z có phần ảo là

A. 6.

B. $-6i$.

C. -6 .

D. 4.

Lời giải.

Ta có $z = (1 - i)^2(3 + 2i) = 4 - 6i$. Do đó $\text{Im}(z) = -6$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 128. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|2z - i| = 6$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. 3.

B. $6\sqrt{2}$.

C. 6.

D. $3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có

$$|2z - i| = 6 \Leftrightarrow |2x + (2y - 1)i| = 6 \Leftrightarrow (2x)^2 + (2y - 1)^2 = 36 \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 9.$$

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I\left(0; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = 3$.

Cách khác. $|2z - i| = 6 \Leftrightarrow \left|2\left(z - \frac{1}{2}i\right)\right| = 6 \Leftrightarrow |2| \cdot \left|z - \frac{1}{2}i\right| = 6 \Leftrightarrow \left|z - \frac{1}{2}i\right| = 3$

$\Rightarrow$ tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C) có tâm $I\left(0; \frac{1}{2}\right)$ và bán kính $R = 3$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 129. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) và thỏa mãn điều kiện $(1 + 2i)z - (2 - 3i)\bar{z} = 2 + 30i$. Tính tổng $S = a + b$.

A. $S = -2$.B. $S = 2$.C. $S = 8$.D. $S = -8$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & (1 + 2i)(a + bi) - (2 - 3i)(a - bi) = 2 + 30i \\ \Leftrightarrow & a - 2b + 2ai + bi - 2a + 3b + 3ai + 2bi = 2 + 30i \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a - 2b - 2a + 3b = 2 \\ 2a + b + 3a + 2b = 30 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -a + b = 2 \\ 5a + 3b = 30 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a = 3 \\ b = 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $S = 8$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 130. Tìm tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z biết số phức $(z - i)(2 + i)$ là một số thuần ảo.

A. Đường thẳng $2x - y + 1 = 0$.B. Đường thẳng $x + 2y - 2 = 0$.C. Đường thẳng $2x + y - 1 = 0$.D. Đường thẳng $2x - y - 1 = 0$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$(z - i)(2 + i) = (x + yi - i)(2 + i) = (2x - y + 1) + (x + 2y - 2)i.$$

Để $(z - i)(2 + i)$ là một số thuần ảo thì $2x - y + 1 = 0$ hay tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z là đường thẳng $2x - y + 1 = 0$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 131. Cho số phức $z = (\sqrt{2} + 3i)^2$. Tổng phần thực và phần ảo của số phức z bằng bao nhiêu?

A. $\sqrt{2} + 3$.B. $6\sqrt{2} + 11$.C. $6\sqrt{2} - 7$.

D. 11.

Lời giải.

Ta có

$$z = (\sqrt{2} + 3i)^2 = -7 + 6\sqrt{2}i.$$

Vậy số z có phần thực bằng -7 và phần ảo bằng $6\sqrt{2}$.

Tổng phần thực và phần ảo của số phức z bằng $6\sqrt{2} - 7$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 132. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , số phức $z = (2 - 3i) - (3 + i)$ được biểu diễn bởi điểm nào sau đây?

A. $M(-1; -4)$.B. $N(1; -4)$.C. $P(1; 4)$.D. $Q(-1; 4)$.

Lời giải.

Ta có

$$z = (2 - 3i) - (3 + i) = -1 - 4i.$$

Vậy điểm biểu diễn số phức z là điểm $M(-1; -4)$.Chọn đáp án **A** □**Câu 133.** Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x(3 + 2i) + y(1 - 4i) = 1 + 24i$. Tính giá trị $x + y$.

A. $x + y = 4$.

B. $x + y = 3$.

C. $x + y = 2$.

D. $x + y = -3$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} x(3 + 2i) + y(1 - 4i) &= 1 + 24i \\ \Leftrightarrow 3x + 2xi + y - 4yi &= 1 + 24i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x - 4y = 24 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $x + y = 2 + (-5) = -3$.Chọn đáp án **D** □**Câu 134.** Tìm mô-đun của số phức z thỏa mãn điều kiện $z - 2\bar{z} = 3 + 4i$.

A. $|z| = \frac{\sqrt{93}}{3}$.

B. $|z| = \frac{\sqrt{95}}{3}$.

C. $|z| = \frac{\sqrt{91}}{3}$.

D. $|z| = \frac{\sqrt{97}}{3}$.

Lời giải.Đặt $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = a - bi$, thay vào phương trình ta có

$$\begin{aligned} a + bi - 2a + 2bi &= 3 + 4i \\ \Leftrightarrow -a + 3bi &= 3 + 4i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = \frac{4}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Mô-đun của z là $|z| = \sqrt{9 + \frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{97}}{3}$.Chọn đáp án **D** □**Câu 135.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $z^2 + (\bar{z})^2 = 0$ là

A. Trục hoành và trục tung.

B. Đường phân giác của góc phần tư thứ nhất và thứ ba.

C. Trục hoành.

D. Các đường phân giác của góc tạo bởi hai trục tọa độ.

Lời giải.Giả sử $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$. Khi đó

$$\begin{aligned} z^2 + (\bar{z})^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + yi)^2 + (x - yi)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi + x^2 - y^2 - 2xyi &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 &= y^2 \\ \Leftrightarrow y &= \pm x. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là các đường phân giác của góc tạo bởi hai trục tọa độ.Chọn đáp án **D** □

Câu 136. Cho số phức z có điểm biểu diễn trong mặt phẳng tọa độ Oxy là điểm $M(1; -2)$. Tính mô-đun của số phức $w = i\bar{z} - z^2$.

- A. $\sqrt{6}$. B. $\sqrt{26}$. C. 26. D. 6.

Lời giải.

Ta có $z = 1 - 2i \Rightarrow w = i(1 + 2i) - (1 - 2i)^2 = i - 2 - (-3 - 4i) = 1 + 5i$.

Vậy $|w| = \sqrt{26}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 137. Nếu mô-đun của số phức z là r ($r > 0$) thì mô-đun của số phức $(1 - i)^3 \cdot z$ bằng

- A. $\sqrt{2}r$. B. $3r$. C. $2r$. D. $2\sqrt{2}r$.

Lời giải.

Do $|(1 - i)^3 \cdot z| = |(1 - i)^3| |z| = |2 - 2i| |z| = 2\sqrt{2} |z| = 2\sqrt{2}r$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 138. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = i(3i - 1)$ là

- A. $\bar{z} = 3 - i$. B. $\bar{z} = -3 + i$. C. $\bar{z} = 3 + i$. D. $\bar{z} = -3 - i$.

Lời giải.

Ta có $z = i(3i - 1) \Leftrightarrow z = -3 - i$ suy ra $\bar{z} = -3 + i$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 139. Số nào trong các số sau là số thuần ảo?

- A. $(\sqrt{3} + 2i)(\sqrt{3} - 2i)$. B. $(\sqrt{3} + 2i) + (\sqrt{3} - 2i)$.
C. $\frac{1 - 4i}{1 + 4i}$. D. $(3 + 3i)^2$.

Lời giải.

Do $(3 + 3i)^2 = 9 + 18i + 9i^2 = 18i$ nên $(3 + 3i)^2$ là số thuần ảo.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 140. Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm điểm biểu diễn của số phức $w = z + i \cdot \bar{z}$.

- A. $M(5; -5)$. B. $M(1; -5)$. C. $M(1; 1)$. D. $M(5; 1)$.

Lời giải.

Ta có: $\bar{z} = 3 + 2i$.

Khi đó $w = z + i \cdot \bar{z} = 3 - 2i + i(3 + 2i) = 1 + i$.

Vậy điểm biểu diễn số phức w là $M(1; 1)$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 141. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = i(3i + 1)$.

- A. $\bar{z} = 3 - i$. B. $\bar{z} = -3 - i$. C. $\bar{z} = -3 + i$. D. $\bar{z} = 3 + i$.

Lời giải.

Ta có: $z = i(3i + 1) = -3 + i \Rightarrow \bar{z} = -3 - i$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 142. Cho số phức $z = (2 - 3i)(3 - 4i)$. Điểm biểu diễn số phức z là

- A. $M(6; 17)$. B. $M(17; 6)$. C. $M(-17; -6)$. D. $M(-6; -17)$.

Lời giải.

Ta có $z = (2 - 3i)(3 - 4i) = -6 - 17i$. Do đó, điểm biểu diễn cho số phức z là $M(-6; -17)$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 143. Rút gọn biểu thức $P = i^{2000} + i^{2021}$.

- A. $P = 1 + i$. B. $P = 1 - i$. C. $P = -1 + i$. D. $P = -1 - i$.

Lời giải.

$P = i^{2000} + i^{2021} = 1 + i$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 144. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn điều kiện $(1 + i)z + 2\bar{z} = 4 - 3i$. Tính $P = a + b$.

- A. $P = 3$. B. $P = 10$. C. $P = 7$. D. $P = 5$.

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ và $i^2 = -1$. Khi đó

$$\begin{aligned}(1+i)z + 2\bar{z} &= 4 - 3i \\ \Leftrightarrow (1+i)(a+bi) + 2(a-bi) &= 4 - 3i \\ \Leftrightarrow (3a-b) + i(a-b) &= 4 - 3i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-b=4 \\ a-b=-3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{7}{2} \\ b=\frac{13}{2} \end{cases}.\end{aligned}$$

Suy ra $P = a + b = 10$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 145. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho M, N, P lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $2+3i, 1-2i$ và $-3+i$. Tìm tọa độ của điểm Q sao cho tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

- A. $Q(0; 2)$. B. $Q(6; 0)$. C. $Q(-2; 6)$. D. $Q(-4; -4)$.

Lời giải.

Ta có $M(2; 3), N(1; -2), P(-3; 1)$.

Gọi H là trung điểm của MP , suy ra $H\left(\frac{-1}{2}; 2\right)$.

Vì $MNPQ$ là hình bình hành nên H cũng là trung điểm của NQ , do đó $Q(-2; 6)$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 146. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-i| = |2-3i-z|$ là

- A. Đường thẳng $x-2y-3=0$. B. Đường thẳng $x+2y+1=0$.
C. Đường tròn $x^2+y^2=2$. D. Đường tròn $x^2+y^2=4$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}|z-i| &= |2-3i-z| \\ \Leftrightarrow |x+yi-i| &= |2-3i-x-yi| \\ \Leftrightarrow |x+(y-1)i| &= |(2-x)+(-3-y)i| \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2} &= \sqrt{(2-x)^2+(-3-y)^2} \\ \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2 &= (2-x)^2+(-3-y)^2 \\ \Leftrightarrow x-2y-3 &= 0.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 147. Cho hai số phức $z_1 = 2+4i, z_2 = -1+3i$. Tính môđun của số phức $w = z_1\bar{z}_2 - 2\bar{z}_1$.

- A. $|w| = 2\sqrt{2}$. B. $|w| = 2\sqrt{10}$. C. $|w| = 4\sqrt{2}$. D. $|w| = 2$.

Lời giải.

Ta có $w = (2+4i)(-1-3i) - 2(2-4i) = (10-10i) - (4-8i) = 6-2i$. Do đó $|w| = \sqrt{6^2+(-2)^2} = 2\sqrt{10}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 148. Tìm số thực m sao cho $m^2-1+(m+1)i$ là số ảo.

- A. $m=0$. B. $m=1$. C. $m=\pm 1$. D. $m=-1$.

Lời giải.

$m^2-1+(m+1)i$ là số ảo khi $m^2-1=0$ hay $m=\pm 1$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 149. Cho hai số phức $z_1 = m+3i, z_2 = 2-(m+1)i$, với $m \in \mathbb{R}$. Tìm các giá trị của m để $w = z_1 \cdot z_2$ là số thực.

- A. $m=1$ hoặc $m=-2$. B. $m=2$ hoặc $m=-1$.
C. $m=2$ hoặc $m=-3$. D. $m=-2$ hoặc $m=-3$.

Lời giải.

Ta có $w = z_1 \cdot z_2 = (m + 3i)(2 - (m + 1)i) = 5m + 3 + (6 - m - m^2)i$.

Để w là số thực thì $6 - m - m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = 2. \end{cases}$

Chọn đáp án **C** □

Câu 150. Cho hai số phức $z = m + 3i$ và $z' = 2 - (m + 1)i$. Tích các giá trị của m để zz' là số thực là

- A. 6. B. -6. C. 10. D. 12.

Lời giải.

Ta có $zz' = (m + 3i)(2 - (m + 1)i) = 5m + 3 + i(-m^2 - m + 6)$.

Do đó zz' là số thực khi và chỉ khi $-m^2 - m + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -3. \end{cases}$

Chọn đáp án **B** □

Câu 151. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z - 3i| = 5$ và $z - 4$ là số thuần ảo khác 0?

- A. 2. B. 0. C. Vô số. D. 1.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ (với $x, y \in \mathbb{R}$). Ta có $z - 4 = (x - 4) + yi$ là số thuần ảo khác 0 nên $\begin{cases} y \neq 0 \\ x = 4. \end{cases}$

Khi đó $|z - 3i| = 5 \Leftrightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 25 \Leftrightarrow (y - 3)^2 = 9 \Leftrightarrow y = 6$ (vì $y \neq 0$).

Chọn đáp án **D** □

Câu 152. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z + 1 - 2i| = 3$.

- A. Đường tròn tâm $I(-1; 2)$, bán kính $r = 3$. B. Đường tròn tâm $I(1; -2)$, bán kính $r = 3$.
C. Đường tròn tâm $I(1; 2)$, bán kính $r = 9$. D. Đường tròn tâm $I(-1; 2)$, bán kính $r = 9$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có $M(x; y)$ biểu diễn số phức z .

Do $|z + 1 - 2i| = 3 \Rightarrow |(x + 1) + (y - 2)i| = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 2)^2} = 3 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$. Suy ra tập hợp điểm $M(x; y)$ biểu diễn z là đường tròn tâm $I(-1; 2)$, bán kính $r = 3$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 153. Gọi x, y là hai số thực thỏa $x(3 - 5i) - y(2 - i)^2 = 4 - 2i$. Tính $M = 2x - y$.

- A. $M = 1$. B. $M = 2$. C. $M = -2$. D. $M = 0$.

Lời giải.

Ta có $x(3 - 5i) - y(2 - i)^2 = 4 - 2i \Leftrightarrow x(3 - 5i) - y(4 - 4i + i^2) = 4 - 2i \Leftrightarrow (3x - 3y) - (5x - 4y)i = 4 - 2i$. Khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} 3x - 3y = 4 \\ 5x - 4y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{10}{3} \\ y = -\frac{14}{3} \end{cases}.$$

Suy ra $M = 2x - y = 2 \cdot \left(-\frac{10}{3}\right) + \frac{14}{3} = -2$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 154. Cho số phức z thỏa mãn $|z + 1 - i| = |z - 1 + 2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Viết phương trình đường thẳng đó.

- A. $4x + 6y - 3 = 0$. B. $4x - 6y + 3 = 0$. C. $4x - 6y - 3 = 0$. D. $4x + 6y + 3 = 0$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$\begin{aligned} |z + 1 - i| &= |z - 1 + 2i| \\ \Leftrightarrow |x + yi + 1 - i| &= |x + yi - 1 + 2i| \\ \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 &= (x - 1)^2 + (y + 2)^2 \\ \Leftrightarrow 4x - 6y - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 155. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tìm mô-đun của số phức $w = 2z + (1 + i)\bar{z}$.

- A. $|w| = \sqrt{10}$. B. $|w| = 4$. C. $|w| = \sqrt{15}$. D. $|w| = 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

$$w = 2z + (1+i)\bar{z} \Leftrightarrow w = 2(2-3i) + (1+i)(2+3i) = 4 - 6i + 2 + 2i + 3i - 3 = 3 - i.$$

Khi đó $|w| = \sqrt{10}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 156. Cho hai số thực x, y thỏa phương trình $2x + 3 + (1 - 2y)i = 2(2 - i) - 3yi + x$. Tính giá trị biểu thức $P = x^2 - 3xy - y$.

A. $P = -12$.

B. $P = 13$.

C. $P = 11$.

D. $P = -3$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 2x + 3 + (1 - 2y)i = 2(2 - i) - 3yi + x &\Leftrightarrow 2x + 3 + (1 - 2y)i = 4 + x + (-3y - 2)i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3 = 4 + x \\ 1 - 2y = -3y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $P = x^2 - 3xy - y = 1^2 - 3 \cdot (-3) - (-3) = 13$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 157. Cho hai số phức $z_1 = 2 + i, z_2 = 4 - 3i$. Khi đó $z_1 \cdot z_2$ có phần ảo bằng

A. 11.

B. 2.

C. -11.

D. -2.

Lời giải.

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + i)(4 - 3i) = 11 - 2i.$$

Vậy số phức $z_1 \cdot z_2$ có phần ảo bằng -2.

Chọn đáp án **D** □

Câu 158. Cho số phức thỏa mãn $\bar{z} = \frac{1+3i}{1-i}$. Tìm mô-đun của $w = i\bar{z} + z$.

A. $|w| = 2\sqrt{2}$.

B. $|w| = 4\sqrt{2}$.

C. $|w| = \sqrt{2}$.

D. $|w| = 3\sqrt{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \bar{z} = \frac{1+3i}{1-i} \Rightarrow \bar{z} = -1 + 2i \Rightarrow z = -1 - 2i \Rightarrow w = -3 - 3i \Rightarrow |w| = 3\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 159. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $3z - 2\bar{z} - 6 + 10i = 0$. Tính $a - b$.

A. 8.

B. -8.

C. -4.

D. 4.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 3z - 2\bar{z} - 6 + 10i &= 0 \\ \Leftrightarrow 3(a + bi) - 2(a - bi) - 6 + 10i &= 0 \\ \Leftrightarrow a - 6 + (5b + 10)i &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $a - b = 8$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 160. Điểm biểu diễn của số phức z là $M(1; 2)$. Tọa độ của điểm biểu diễn cho số phức $w = z - 2\bar{z}$ là

A. $(2; -3)$.

B. $(2; 1)$.

C. $(-1; 6)$.

D. $(2; 3)$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $z = 1 + 2i$.

Từ đó $w = z - 2\bar{z} = (1 + 2i) - 2(1 - 2i) = -1 + 6i$.

Vậy tọa độ của điểm biểu diễn số phức w là $(-1; 6)$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 161. Cho số phức $z = -2 + i$. Điểm nào sau đây là điểm biểu diễn của số phức $w = iz$ trên mặt phẳng tọa độ?

A. $P(-2; 1)$.

B. $N(2; 1)$.

C. $Q(1; 2)$.

D. $M(-1; -2)$.

Lời giải.

Có $w = zi = i(-2 + i) = -1 - 2i$ nên điểm biểu diễn của w là điểm $M(-1; -2)$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 162. Cho số phức z thỏa mãn $|z + 3 - 4i| = 5$. Biết rằng tập hợp điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn đó.

- A. $I(3; -4), R = \sqrt{5}$. B. $I(-3; 4), R = \sqrt{5}$. C. $I(3; -4), R = 5$. D. $I(-3; 4), R = 5$.

Lời giải.

Gọi $z = x + iy, (x, y \in \mathbb{R})$ thì $|z + 3 - 4i| = 5 \Leftrightarrow (x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$. Vậy tâm $I(-3; 4)$ và bán kính $R = 5$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 163. Tổng phần thực và phần ảo của số phức z thỏa mãn $iz + (1 - i)\bar{z} = -2i$ bằng

- A. 2. B. -2. C. 6. D. -6.

Lời giải.

Gọi $z = x + iy, (x, y \in \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} iz + (1 - i)\bar{z} = -2i &\Leftrightarrow i(x + iy) + (1 - i)(x - iy) = -2i \\ &\Leftrightarrow (x - 2y) + (2 - y)i = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $x + y = 6$.

Cách 2: Cách trắc nghiệm

Nhập máy tính $iz + (1 - i)\bar{z}$

CALC $z = 1$ ta được $1 + 0i$; CALC $z = i$ ta được $-2 - i$.

Giải hệ $\begin{cases} 1x - 2y = 0 \\ 0x - 1y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$.

Vậy $x + y = 6$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 164. Cho số phức $z = 3 + 5i$. Tìm môđun của số phức $w = iz + \bar{z}$.

- A. $|w| = 2$. B. $|w| = 2 + \sqrt{2}$. C. $|w| = 3\sqrt{2}$. D. $|w| = 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $w = iz + \bar{z} = i(3 + 5i) + 3 - 5i = -2 - 2i \Rightarrow |w| = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 165. Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z} = \frac{(1 - \sqrt{3}i)^3}{1 - i}$. Tìm môđun của $w = z - i\bar{z}$.

- A. $8\sqrt{2}$. B. 8. C. $4\sqrt{2}$. D. 4.

Lời giải.

Ta có $\bar{z} = \frac{(1 - \sqrt{3}i)^3}{1 - i} = -4 - 4i$.

Suy ra $z = -4 + 4i$; do đó $w = z - i\bar{z} = -8 + 8i$.

Vậy $|w| = |z - i\bar{z}| = \sqrt{(-8)^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 166. Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i; z_2 = 2 - 3i$. Xác định phần thực và phần ảo của số phức $2z_1 + z_2$.

- A. Phần thực là 4, phần ảo là -6. B. Phần thực là 4, phần ảo là -1.
C. Phần thực là -1, phần ảo là 4. D. Phần thực là 4, phần ảo là 5.

Lời giải.

ta có: $2z_1 + z_2 = 4 - i$.

Suy ra phần thực là 4, phần ảo là -1.

Chọn đáp án **B** □

Câu 167. Hai số phức $z_1 = 2 + 3i, z_2 = 1 + i$. Giá trị của biểu thức $|z_1 + 3z_2|$ là

- A. $\sqrt{55}$. B. 5. C. 6. D. $\sqrt{61}$.

Lời giải.

Ta có $z_1 + 3z_2 = 2 + 3i + 3(1 + i) = 5 + 6i$.

Do đó $|z_1 + 3z_2| = |5 + 6i| = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 168. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1| = |z - 2 + 3i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là

- A. Đường tròn tâm $I(1; 2)$, bán kính $R = 1$.
 B. Đường thẳng có phương trình $2x - 6y + 12 = 0$.
 C. Đường thẳng có phương trình $x - 3y - 6 = 0$.
 D. Đường thẳng có phương trình $x - 5y - 6 = 0$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có

$$|z - 1| = |z - 2 + 3i| \Leftrightarrow |x - 1 + yi| = |x - 2 + (y + 3)i| \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = (x - 2)^2 + (y + 3)^2 \Leftrightarrow x - 3y - 6 = 0.$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng có phương trình $x - 3y - 6 = 0$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 169. Số phức liên hợp của số phức $z = i(1 - 2i)$ có điểm biểu diễn trong mặt phẳng tọa độ là điểm nào dưới đây?

- A. $E(2; -1)$. B. $B(-1; 2)$. C. $A(1; 2)$. D. $F(-2; 1)$.

Lời giải.

Ta có $z = i(1 - 2i) = i - 2i^2 = 2 + i \Rightarrow \bar{z} = 2 - i$. Do đó $\bar{z}$ có điểm biểu diễn trong mặt phẳng tọa độ là điểm $E(2; -1)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 170. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $(1 + i)z + (2 - i)\bar{z} = 13 + 2i$?

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), ta có:

$$\begin{aligned} (1 + i)z + (2 - i)\bar{z} &= 13 + 2i \\ \Leftrightarrow (1 + i)(a + bi) + (2 - i)(a - bi) &= 13 + 2i \\ \Leftrightarrow 3a - 2b - bi &= 13 + 2i \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2b = 13 \\ -b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $z = 3 - 2i$ nên có 1 số phức z thỏa mãn.

Chọn đáp án **D** □

Câu 171. Cho số phức $z = 3 - 5i$. Gọi $w = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) là một căn bậc hai của z . Giá trị của biểu thức $T = x^4 + y^4$ là

- A. $T = \frac{43}{2}$. B. $T = 34$. C. $T = 706$. D. $T = \frac{17}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } w^2 = z \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 3 - 5i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -5. \end{cases}$$

$$\text{Mà ta có } T = x^4 + y^4 = (x^2 - y^2)^2 + 2 \cdot x^2 y^2 = 3^2 + 2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{43}{2}.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 172. Cho số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 7 + i - |z|(2 + i) = 0$ và $|z| < 3$. Tính $P = a + b$.

- A. $P = 5$. B. $P = -\frac{1}{2}$. C. $P = 7$. D. $P = \frac{5}{2}$.

Lời giải.

$$z + 7 + i - |z|(2 + i) = 0 \Leftrightarrow a + 7 + (b + 1)i - 2\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + b^2}i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 7 = 2\sqrt{a^2 + b^2} \quad (1) \\ \sqrt{a^2 + b^2} = b + 1 \quad (2) \end{cases}$$

Suy ra $a + 7 = 2(b + 1) \Rightarrow a = 2b - 5$ thế vào (2) ta được

$$\sqrt{(2b - 5)^2 + b^2} = b + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq -1 \\ 4b^2 - 22b + 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq -1 \\ b = 4 \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Với $b = 4 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow |z| = 5 > 3$ (không thỏa mãn).

Với $b = \frac{3}{2} \Rightarrow a = -2 \Rightarrow |z| = \frac{5}{2} < 3$.

Vậy $z = -2 + \frac{3}{2}i \Rightarrow P = a + b = -\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 173. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tính mô-đun của số phức $w = (1 + i)z$.

- A. $|w| = \sqrt{26}$. B. $|w| = \sqrt{37}$. C. $|w| = 5$. D. $|w| = 4$.

Lời giải.

Ta có $|w| = |(1 + i)z| = |1 + i| \cdot |2 - 3i| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{13} = \sqrt{26}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 174. Tính $P = \left|1 + \sqrt{3}i\right|^{2018} + \left|1 - \sqrt{3}i\right|^{2018}$.

- A. $P = 2$. B. $P = 2^{1010}$. C. $P = 2^{2019}$. D. $P = 4$.

Lời giải.

Ta có: $\left|1 + \sqrt{3}i\right| = \left|1 - \sqrt{3}i\right| = 2$, nên $P = 2^{2018} + 2^{2018} = 2^{2019}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 175. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 4i| = 5$ là

- A. Một đường tròn. B. Một đường thẳng. C. Một đường parabol. D. Một đường elip.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Theo giả thiết $|z - 3 + 4i| = 5 \Leftrightarrow |(x - 3) + (y + 4)i| = 5 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(3; -4)$ bán kính $R = 5$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 176. Tìm mô-đun của số phức z biết $z - 4 = (1 + i)|z| - (4 + 3z)i$.

- A. $|z| = 4$. B. $|z| = 1$. C. $|z| = \frac{1}{2}$. D. $|z| = 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} z - 4 &= (1 + i)|z| - (4 + 3z)i \Leftrightarrow (1 + 3i)z = (1 + i)|z| + 4(1 - i) \\ \Leftrightarrow z &= \frac{1 + i}{1 + 3i} \cdot |z| + 4 \cdot \frac{1 - i}{1 + 3i} \Leftrightarrow z = \frac{(1 + i)(1 - 3i)}{(1 + 3i)(1 - 3i)} \cdot |z| + 4 \cdot \frac{(1 - i)(1 - 3i)}{(1 + 3i)(1 - 3i)} \\ \Leftrightarrow z &= \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i\right) \cdot |z| - 4 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right) \Leftrightarrow z = \left(\frac{2}{5}|z| - \frac{4}{5}\right) - \left(\frac{|z|}{5} + \frac{8}{5}\right)i. \end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} |z|^2 &= \left(\frac{2}{5}|z| - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{|z|}{5} + \frac{8}{5}\right)^2 \Leftrightarrow 25|z|^2 = (2|z| - 4)^2 + (|z| + 8)^2 \\ \Leftrightarrow 25|z|^2 &= 4|z|^2 - 16|z| + 16 + |z|^2 + 16|z| + 64 \Leftrightarrow 20|z|^2 = 80 \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 2 \\ |z| = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $|z| = 2$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 177. Biết phương trình $z^2 + 2z + m = 0$ ($m \in \mathbb{R}$) có một nghiệm phức $z_1 = -1 + 3i$ và z_2 là nghiệm phức còn lại. Số phức $z_1 + 2z_2$ là

- A. $-3 + 3i$. B. $-3 + 9i$. C. $-3 - 3i$. D. $-3 + 9i$.

Lời giải.

Ta có $z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} = -2 \Leftrightarrow z_2 = -2 - z_1 = -2 + 1 - 3i = -1 - 3i$.

Vậy $z_1 + 2z_2 = -3 - 3i$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 178. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$, biết $z = -i(4i + 3)$.

- A. Phần thực bằng 4, phần ảo bằng 3. B. Phần thực bằng 4, phần ảo bằng -3.
C. Phần thực bằng 4, phần ảo bằng 3i. D. Phần thực bằng 4, phần ảo bằng -3i.

Lời giải.

$z = 4 - 3i$ nên $\bar{z} = 4 + 3i$. Vậy $\bar{z}$ có phần thực bằng 4, phần ảo bằng 3.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 179. Cho số phức z thỏa mãn $(1 + 2i)z - 5 = 3i$. Tìm số phức liên hợp của số phức z .

- A. $\bar{z} = \frac{11}{5} - \frac{7}{5}i$. B. $\bar{z} = \frac{11}{5} + \frac{7}{5}i$. C. $\bar{z} = -\frac{11}{5} - \frac{7}{5}i$. D. $\bar{z} = -\frac{11}{5} + \frac{7}{5}i$.

🔗 **Lời giải.**

Từ giả thiết, ta suy ra $z = \frac{5 + 3i}{1 + 2i} = \frac{11}{5} - \frac{7}{5}i$. Suy ra $\bar{z} = \frac{11}{5} + \frac{7}{5}i$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 180. Trong mặt phẳng phức, biết số phức z có điểm biểu diễn nằm trong góc phần tư (I). Hỏi điểm biểu diễn của số phức $w = \frac{1}{iz}$ nằm trong góc phần tư nào?

- A. (I). B. (II). C. (III). D. (IV).

🔗 **Lời giải.**

Điểm biểu diễn của iz chính là ảnh của điểm biểu diễn của z qua phép quay tâm O , góc quay 90° . Trong khi điểm biểu diễn của $\frac{1}{z}$ và điểm biểu diễn của z khác phía đối với trục hoành và cùng phía đối với trục tung. Vậy điểm biểu diễn của w thuộc góc phần tư (III).

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 181. Nếu môđun của số phức z bằng r ($r > 0$) thì môđun của số phức $(1 - i)^2 z$ bằng

- A. $2r$. B. $4r$. C. r . D. $r\sqrt{2}$.

🔗 **Lời giải.**

Ta có

$$|(1 - i)^2 z| = |(1 - i)^2| \cdot |z| = 2|z| = 2r.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 182. Cho hai số phức $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 3 - 4i$. Môđun của số phức $w = z_1 + z_2$ bằng

- A. $\sqrt{17}$. B. $\sqrt{15}$. C. 17 . D. 15 .

🔗 **Lời giải.**

Ta có $w = 4 - i$. Suy ra $|w| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 183. Môđun của số phức $z = (2 - 3i)(1 + i)^4$ là

- A. $|z| = -8 + 12i$. B. $|z| = \sqrt{13}$. C. $|z| = 4\sqrt{13}$. D. $|z| = \sqrt{31}$.

🔗 **Lời giải.**

Ta có $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i \Rightarrow (1 + i)^4 = (2i)^2 = 4i^2 = -4$ nên

$$z = (2 - 3i)(1 + i)^4 = (2 - 3i)(-4) = -8 + 12i.$$

Từ đó $|z| = \sqrt{(-8)^2 + 12^2} = 4\sqrt{13}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 184. Cho số phức z thỏa mãn $z + 2\bar{z} = 12 - 2i$. Phần thực a và phần ảo b của z là

- A. $a = 4$, $b = 2i$. B. $a = 4$, $b = 2$. C. $a = 4$, $b = -2$. D. $a = 4$, $b = -2i$.

🔗 **Lời giải.**

Ta có $z = a + bi$. Từ giả thiết suy ra

$$\begin{aligned} a + bi + 2(a - bi) &= 12 - 2i \Leftrightarrow 3a - bi = 12 - 2i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 12 \\ -b = -2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $a = 4$, $b = 2$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 185. Cho hai số phức $z = (a - 2b) - (a - b)i$ và $w = 1 - 2i$, biết $z = wi$. Tính $S = a + b$.

- A. $S = -7$. B. $S = -4$. C. $S = -3$. D. $S = 7$.

🔗 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} z &= \omega i \\ \Leftrightarrow (a - 2b) - (a - b)i &= (1 - 2i)i \\ \Leftrightarrow (a - 2b) - (a - b)i &= 2 + i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b = 2 \\ -a + b = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow S = a + b &= -7. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 186. Cho số phức z thỏa mãn $z + (1 + i)\bar{z} = 5 + 2i$. Mô-đun của z bằng

- A. 3. B. $\sqrt{6}$. C. $\sqrt{27}$. D. $\sqrt{5}$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$. Ta có $z + (1 + i)\bar{z} = 5 + 2i \Leftrightarrow (a + bi) + (1 + i)(a - bi) = 5 + 2i \Leftrightarrow 2a + b + ai = 5 + 2i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 5 \\ a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow z = 2 + i \Rightarrow |z| = \sqrt{5}$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 187. Cho i là đơn vị ảo. Gọi S là tập hợp tất cả các số n nguyên dương có hai chữ số thỏa mãn i^n là số nguyên dương. Số phần tử của S là

- A. 22. B. 23. C. 45. D. 46.

Lời giải.

i^n là số nguyên dương khi và chỉ khi $n = 4k$, với k nguyên dương. Khi đó, tập hợp $S = \{n = 4k | 3 \leq k \leq 24\}$. Vậy số phần tử của tập S là $24 - 3 + 1 = 22$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 188. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(z + 1 + i)(\bar{z} - i) + 3i = 9$ và $|\bar{z}| > 2$. Tính $P = a + b$.

- A. -3. B. -1. C. 1. D. 2.

Lời giải.

Ta có $(z + 1 + i)(\bar{z} - i) + 3i = 9 \Leftrightarrow z\bar{z} + i(\bar{z} - z) + \bar{z} - i + 1 + 3i = 9 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2b + a - bi + 1 + 2i = 9$. Do đó $b = 2$ và $a^2 + a = 0 \Leftrightarrow a = 0$ hoặc $a = -1$. Do $|\bar{z}| > 2$ nên ta chọn $a = -1$. Vậy $P = 1$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 189. Cho số phức $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 6 + 5i$. Tìm số phức liên hợp của $z = 6z_1 + 5z_2$.

- A. $\bar{z} = 51 + 40i$. B. $\bar{z} = 51 - 40i$. C. $\bar{z} = 48 + 37i$. D. $\bar{z} = 48 - 37i$.

Lời giải.

Ta có $z = 6z_1 + 5z_2 = 48 + 37i$ nên $\bar{z} = 48 - 37i$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 190. Cho số phức $z = a + bi$ (với a, b là số nguyên) thỏa mãn $(1 - 3i)z$ là số thực và $|\bar{z} - 2 + 5i| = 1$. Khi đó $a + b$ bằng

- A. 9. B. 8. C. 7. D. 6.

Lời giải.

Ta có $(1 - 3i)z = (a + 3b) + (b - 3a)i$, $\bar{z} - 2 + 5i = (a - 2) + (5 - b)i$.

Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{aligned} &\begin{cases} b - 3a = 0 \\ (a - 2)^2 + (5 - b)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a \\ 5a^2 - 17a + 14 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a \\ \begin{cases} a = \frac{7}{5} \text{ (loại)} \\ a = 2 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $a + b = 8$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 191. Cho số phức z thỏa mãn $(3 + 2i)z + (2 - i)^2 = 4 + i$. Hiệu phần thực và phần ảo của số phức z là

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

Lời giải.

Ta có $(3 + 2i)z + (2 - i)^2 = 4 + i \Leftrightarrow (3 + 2i)z + (3 - 4i) = 4 + i \Leftrightarrow (3 + 2i)z = 1 + 5i \Leftrightarrow z = 1 + i$.

Vậy hiệu phần thực và phần ảo của số phức z là 0.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 192. Tìm tọa độ điểm biểu diễn của số phức $z = \frac{(2 - 3i)(4 - i)}{3 + 2i}$ trên mặt phẳng Oxy .

- A. $(-1; -4)$. B. $(1; 4)$. C. $(1; -4)$. D. $(-1; 4)$.

Lời giải.

Ta có $z = \frac{(2 - 3i)(4 - i)}{3 + 2i} = \frac{5 - 14i}{3 + 2i} = \frac{(5 - 14i)(3 - 2i)}{13} = \frac{-13 - 52i}{13} = -1 - 4i$.

Do đó điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng Oxy có tọa độ $(-1; -4)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 193. Cho số phức $z = (1 + 3i)(4 - i)$, phần thực của z bằng bao nhiêu?

- A. 4. B. 1. C. 11. D. 7.

Lời giải.

Ta có $z = (1 + 3i)(4 - i) = 7 + 11i$.

Vậy phần thực của z bằng 7.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 194. Trong các số phức $(1 + i)^4$, $(1 + i)^6$, $(1 + i)^9$, $(1 + i)^{10}$ số phức nào là số thực?

- A. $(1 + i)^9$. B. $(1 + i)^6$. C. $(1 + i)^{10}$. D. $(1 + i)^4$.

Lời giải.

Ta có $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$.

Do đó $(1 + i)^4 = (1 + i)^2 = (2i)^2 = -4$ là một số thực.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 195. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{5}$ và số phức $w = (1 + 2i) \cdot \bar{z}$. Tìm $|w|$.

- A. $\sqrt{5}$. B. 5. C. $2\sqrt{5}$. D. 4.

Lời giải.

Ta có $|w| = |(1 + 2i) \cdot \bar{z}| = |1 + 2i| \cdot |\bar{z}| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 196. Cho hai số phức $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -3 - 5i$. Tính tổng phần thực và phần ảo của số phức $w = z_1 + z_2$.

- A. 3. B. 0. C. $-1 - 2i$. D. -3 .

Lời giải.

Ta có $w = -1 - 2i$, nên tổng phần thực và phần ảo của w là -3 .

Chọn đáp án **D**

□

Câu 197. Cho số phức z thỏa mãn $z + 4\bar{z} = 7 + i(z - 7)$. Khi đó, mô-đun của z bằng bao nhiêu?

- A. $|z| = 5$. B. $|z| = \sqrt{3}$. C. $|z| = \sqrt{5}$. D. $|z| = 3$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$.

Ta có: $z + 4\bar{z} = 7 + i(z - 7) \Leftrightarrow (x + yi) + 4(x - yi) = 7 + i(x + yi - 7)$

$$\Leftrightarrow 5x - 3yi = 7 - y + (x - 7)i \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 7 - y \\ -3y = x - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + y = 7 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = 1 + 2i \Rightarrow |z| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 198. Kí hiệu a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $z = i(1 - i)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $a = 1, b = -1$. B. $a = 1, b = 1$. C. $a = 1, b = i$. D. $a = 1, b = -i$.

Lời giải.

Ta có $z = 1 + i$ suy ra $a = 1, b = 1$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 199. Trong tập số phức, khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

B. $z + \bar{z}$ là số thuần ảo.

C. $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.

D. $z^2 - (\bar{z})^2 = 4ab$ với $z = a + bi$.

🔗**Lời giải.**

Gọi $z_1 = a_1 + b_1i$ và $z_2 = a_2 + b_2i$, với $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Khi đó $z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i$.

Do đó $\overline{z_1 + z_2} = a_1 + a_2 - (b_1 + b_2)i = a_1 - b_1i + a_2 - b_2i = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 200. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|\bar{z} + 2 - i| = 4$ là đường tròn tâm I có bán kính R lần lượt là

A. $I(-2; -1); R = 4$.

B. $I(-2; -1); R = 2$.

C. $I(2; -1); R = 4$.

D. $I(2; -1); R = 2$.

🔗**Lời giải.**

Gọi $z = a + bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Suy ra $\bar{z} = a - bi$.

Ta có $|\bar{z} + 2 - i| = 4 \Leftrightarrow (a + 2)^2 + (-b - 1)^2 = 16 \Leftrightarrow (a + 2)^2 + (b + 1)^2 = 16$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức là đường tròn tâm $I(-2; -1)$, bán kính $R = 4$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 201. Cho số phức $z = a + bi$ (trong đó a, b là các số thực) thỏa mãn $3z - (4 + 5i)\bar{z} = -17 + 11i$. Tính ab .

A. $ab = 6$.

B. $ab = -3$.

C. $ab = 3$.

D. $ab = -6$.

🔗**Lời giải.**

Ta có $3z - (4 + 5i)\bar{z} = -17 + 11i \Leftrightarrow 3(a + bi) - (4 + 5i)(a - bi) = -17 + 11i$

$$\Leftrightarrow -a - 5b + (-5a + 7b)i = -17 + 11i \Leftrightarrow \begin{cases} -a - 5b = -17 \\ -5a + 7b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow ab = 6.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 202. Cho số phức thỏa $|z| = 3$. Biết rằng tập hợp số phức $w = \bar{z} + i$ là một đường tròn. Tìm tâm của đường tròn đó.

A. $I(0; 1)$.

B. $I(0; -1)$.

C. $I(-1; 0)$.

D. $I(1; 0)$.

🔗**Lời giải.**

Đặt $w = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có $w = \bar{z} + i \Leftrightarrow x + yi = \bar{z} + i \Leftrightarrow \bar{z} = x + (y - 1)i \Leftrightarrow z = x + (1 - y)i$.

Theo đề $|z| = 3 \Leftrightarrow x^2 + (1 - y)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 9$.

Vậy tập hợp số phức $w = \bar{z} + i$ là đường tròn tâm $I(0; 1)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 203. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(1 + i)(z - i) + 2z = 2i$. Mô-đun của số phức $w = \frac{\bar{z} - 2z + 1}{z^2}$ là

A. $\sqrt{10}$.

B. $\sqrt{8}$.

C. $-\sqrt{10}$.

D. $-\sqrt{8}$.

🔗**Lời giải.**

Ta có $(1 + i)(z - i) + 2z = 2i \Leftrightarrow (3 + i)z = -1 + 3i \Leftrightarrow z = i$.

$$\text{Suy ra } w = \frac{\bar{z} - 2z + 1}{z^2} = \frac{-i - 2i + 1}{i^2} = -1 + 3i.$$

Vậy $|w| = \sqrt{10}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 204. Cho số phức z thỏa mãn $3\bar{z} + (1 + i)z = 1 - 5i$. Tìm mô-đun của z .

A. $|z| = 5$.

B. $|z| = \sqrt{5}$.

C. $|z| = \sqrt{13}$.

D. $|z| = \sqrt{10}$.

🔗**Lời giải.**

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Thay vào phương trình ta được:

$$\begin{aligned} 3(a - bi) + (1 + i)(a + bi) &= 1 - 5i \Leftrightarrow (4a - b) + (a - 2b)i = 1 - 5i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - b = 1 \\ a - 2b = -5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow z = 1 + 3i \Rightarrow |z| = \sqrt{10}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 205. Cho $z = 3 - 2i$. Tìm phần ảo của số phức $w = (1 + 2i)z$.

A. -4 .

B. 7 .

C. 4 .

D. $4i$.

Lời giải.

Ta có $w = (1 + 2i)z = (1 + 2i)(3 - 2i) = 7 + 4i$.

Từ đây ta suy ra phần ảo của số phức w bằng 4.

Chọn đáp án **C** □

Câu 206. Cho số phức z thỏa mãn $z(1 + 2i) - \bar{z}(2 - 3i) = -4 + 12i$. Tìm tọa độ điểm M biểu diễn số phức z .

A. $M(3; 1)$.

B. $M(3; -1)$.

C. $M(-1; 3)$.

D. $M(1; 3)$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$; $a, b \in \mathbb{R}$ suy ra $\bar{z} = a - bi$

Từ giả thiết ta có

$$(a + bi)(1 + 2i) - (a - bi)(2 - 3i) = -4 + 12i \Leftrightarrow (-a + b) + (5a + 3b)i = -4 + 12i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = -4 \\ 5a + 3b = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm M biểu diễn số phức z là $M(3; -1)$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 207. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(1 + i)z + 2\bar{z} = 3 + 2i$. Tính $P = a + b$.

A. $P = 1$.

B. $P = -1$.

C. $P = -\frac{1}{2}$.

D. $P = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} (1 + i)z + 2\bar{z} &= 3 + 2i \\ \Leftrightarrow (1 + i)(a + bi) + 2(a - bi) &= 3 + 2i \\ \Leftrightarrow a + bi + ai - b + 2a - 2bi &= 3 + 2i \\ \Leftrightarrow 3a - b + (a - b)i &= 3 + 2i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b = 3 \\ a - b = 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $P = a + b = -1$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 208. Trong mặt phẳng phức, tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z thỏa $|z + 4 - 3i| \leq 2$ là

A. Hình tròn tâm $I(-4; 3)$, bán kính $R = 4$.

B. Hình tròn tâm $I(4; -3)$, bán kính $R = 4$.

C. Hình tròn tâm $I(4; -3)$, bán kính $R = 2$.

D. Hình tròn tâm $I(-4; 3)$, bán kính $R = 2$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có: $|z + 4 - 3i| \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x + 4)^2 + (y - 3)^2} \leq 2 \Leftrightarrow (x + 4)^2 + (y - 3)^2 \leq 4$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là điểm cách điểm $I(-4; 3)$ một khoảng bé hơn hoặc bằng 2 hay tập hợp điểm biểu diễn là hình tròn tâm $I(-4; 3)$, bán kính $R = 2$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 209. Xét các số phức z thỏa mãn $(z + 2i + 1)(\bar{z} + 3i)$ là số thuần ảo, biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn. Tâm của đường tròn đó là:

A. $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

B. $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

C. $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

D. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Gọi số phức z có dạng $z = x + yi$.

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{aligned} (z + 2i + 1)(\bar{z} + 3i) &= (x + yi + 2i + 1)(x - yi + 3i) \\ &= (x^2 + x - 6 + y^2 - y) + (5x + 3 - y)i \end{aligned}$$

Mà $(z + 2i + 1)(\bar{z} + 3i)$ là một số thuần ảo nên phần thực bằng 0.

Suy ra

$$\begin{aligned} x^2 + x - 6 + y^2 - y &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + \left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right) &= \frac{13}{2} \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{13}{2}. \end{aligned}$$

Vậy điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có tâm là $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 210. Cho số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| = 3$. Tập hợp các điểm trong mặt phẳng Oxy biểu diễn số phức $w = 1 + \bar{z}$ là

A. Đường tròn tâm $I(-2; 1)$ bán kính $R = 3$.

B. Đường tròn tâm $I(2; -1)$ bán kính $R = 3$.

C. Đường tròn tâm $I(-1; -1)$ bán kính $R = 9$.

D. Đường tròn tâm $I(-1; -1)$ bán kính $R = 3$.

Lời giải.

Từ $w = 1 + \bar{z} \Rightarrow \bar{w} = \overline{1 + \bar{z}} \Rightarrow z = \bar{w} - 1$.

Thế vào $|z + 2 - i| = 3$ ta được

$$|\bar{w} + 1 - i| = 3 \Leftrightarrow |\overline{w + 1 - i}| = 3 \Leftrightarrow |w + 1 + i| = 3.$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(-1; -1)$, bán kính $R = 3$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 211. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z^2 + 2|z| = 0$?

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Theo giả thiết } z^2 + 2|z| = 0 \Leftrightarrow (x + yi)^2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ |y| - y^2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Giải hệ (1) ta được } \begin{cases} x = 0 \\ |y| = 0 \\ |y| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ x = 0 \\ y = 1. \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ (2) ta được } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Vậy có 3 số phức thỏa mãn bài toán là $z = 0, z = i, z = -i$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 212. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - i| = 4$ là đường cong có phương trình

A. $(x - 1)^2 + y^2 = 4$.

B. $x^2 + (y - 1)^2 = 4$.

C. $(x - 1)^2 + y^2 = 16$.

D. $x^2 + (y - 1)^2 = 16$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } |z - i| = 4 \Leftrightarrow |x + yi - i| = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = 4 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 16.$$

Chọn đáp án **D** □

4 ĐÁP ÁN

1. D	2. B	3. C	4. A	5. A	6. B	7. A	8. A	9. A	10. A
11. A	12. C	13. A	14. A	15. C	16. A	17. D	18. B	19. C	20. B
21. C	22. A	23. D	24. B	25. D	26. A	27. B	28. B	29. B	30. D

31. A	32. C	33. B	34. A	35. A	36. D	37. C	38. A	39. C	40. D
41. A	42. C	43. C	44. D	45. C	46. B	47. D	48. A	49. A	50. C
51. B	52. B	53. A	54. C	55. C	56. C	57. C	58. A	59. C	60. B
61. A	62. A	63. D	64. A	65. A	66. A	67. B	68. D	69. B	70. A
71. C	72. A	73. C	74. C	75. A	76. B	77. B	78. A	79. C	80. B
81. A	82. B	83. B	84. C	85. A	86. B	87. C	88. D	89. C	90. A
91. A	92. D	93. B	94. A	95. A	96. D	97. D	98. B	99. B	100. D
101. A	102. A	103. A	104. D	105. B	106. D	107. A	108. A	109. D	110. C
111. C	112. C	113. C	114. B	115. D	116. A	117. A	118. A	119. D	120. D
121. C	122. C	123. B	124. D	125. A	126. D	127. C	128. A	129. C	130. A
131. C	132. A	133. D	134. D	135. D	136. B	137. D	138. B	139. D	140. C
141. B	142. D	143. A	144. B	145. C	146. A	147. B	148. C	149. C	150. B
151. D	152. A	153. C	154. C	155. A	156. B	157. D	158. D	159. A	160. C
161. D	162. D	163. C	164. D	165. A	166. B	167. D	168. C	169. A	170. D
171. A	172. B	173. A	174. C	175. A	176. D	177. C	178. A	179. B	180. C
181. A	182. A	183. C	184. B	185. A	186. D	187. A	188. C	189. D	190. B
191. D	192. A	193. D	194. D	195. B	196. D	197. C	198. B	199. A	200. A
201. A	202. A	203. A	204. D	205. C	206. B	207. B	208. D	209. D	210. D
211. D	212. D								

5 VẬN DỤNG THẤP

Câu 1. Cho số phức z có phần thực là số nguyên và z thỏa mãn $|z| - 2\bar{z} = -7 + 3i + z$. Tính mô-đun của số phức $w = 1 - z + z^2$.

A. $|w| = \sqrt{37}$.

B. $|w| = \sqrt{457}$.

C. $|w| = \sqrt{425}$.

D. $|w| = \sqrt{445}$.

🔗 **Lời giải.**

Đặt $z = a + bi$, với $a \in \mathbb{Z}$.

Theo đề bài ta có

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 2(a - bi) - 7 + 3i + a + bi \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = (3a - 7) + (3 - b)i. \quad (*)$$

Suy ra $3 - b = 0$ hay $b = 3$. Khi đó $(*)$ trở thành

$$\sqrt{a^2 + 9} = 3a - 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 7 \geq 0 \\ 8a^2 - 42a + 40 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \frac{7}{3} \\ \begin{cases} a = 4 \\ a = \frac{5}{4} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow a = 4.$$

Vậy $z = 4 + 3i$. Khi đó $w = 1 - (4 + 3i) + (4 + 3i)^2 = 1 - 4 - 3i + 16 + 24i - 9 = 4 + 21i$.

Do đó $|w| = \sqrt{4^2 + 21^2} = \sqrt{457}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 2. Cho các số phức z thỏa mãn $|z| = 4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (3+4i)z+i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r = 4$.

B. $r = 5$.

C. $r = 20$.

D. $r = 22$.

🔗 **Lời giải.**

Ta có $|w - i| = |(3 + 4i)z| = |3 + 4i||z| = \sqrt{3^2 + 4^2} \cdot 4 = 20$.

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn cho các số phức w là đường tròn tâm $I(0; 1)$, bán kính $r = 20$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 3. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 3 + i - |z|i = 0$. Tính $S = a + b$.

A. 0.

B. -1.

C. -3.

D. 1.

🔗 **Lời giải.**

$$z + 3 + i - |z|i = 0 \Leftrightarrow a + bi + 3 + i - \sqrt{a^2 + b^2} \cdot i = 0 \Leftrightarrow (a + 3) + (b + 1 - \sqrt{a^2 + b^2})i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+3=0 \\ b+1-\sqrt{a^2+b^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ \sqrt{9+b^2}=b+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b+1 \geq 0 \\ 9+b^2=(b+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b \geq -1 \\ 9=2b+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b \geq 1 \\ b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=4. \end{cases}$$

Vậy $S = a + b = -3 + 4 = 1$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 4. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-1|^2 + |z-\bar{z}|i + (z+\bar{z})i^{2019} = 1$?

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Ta có

$$— |z-1|^2 = |a+bi-1|^2 = (a-1)^2 + b^2.$$

$$— |z-\bar{z}|i = |a+bi-a+bi|i = \sqrt{(2b)^2}i = 2|b|i.$$

$$— i^{2019} = i^{4 \cdot 504 + 3} = (i^4)^{504} \cdot i^3 = i \cdot i^2 = -i.$$

$$— (z+\bar{z})i^{2019} = -i(a+bi+a-bi) = -2ai.$$

Khi đó ta suy ra $(a-1)^2 + b^2 + 2|b|i - 2ai = 1$.

$$\begin{cases} (a-1)^2 + b^2 = 1 \\ 2|b| - 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2a + b^2 = 0 \\ a = |b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2|b|^2 - 2|b| = 0 \\ a = |b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |b| = 0 \\ |b| = 1 \\ a = |b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ a = 1 \\ b = 1 \\ a = 1 \\ b = -1. \end{cases}$$

Vậy có 3 số phức z thỏa mãn.

Chọn đáp án **D** □

Câu 5. Có tất cả bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+i\sqrt{5}| + |z-i\sqrt{5}| = 6$, biết z có mô đun bằng $\sqrt{5}$?

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 0.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Có $|z| = \sqrt{5} \Rightarrow z$ thuộc đường tròn (C) tâm $O(0;0)$ bán kính $R = \sqrt{5}$.

Gọi $M(x; y)$, $E(0; \sqrt{5})$, $F(0; -\sqrt{5})$ lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z , $i\sqrt{5}$ và $-i\sqrt{5}$.

Ta có $c = EF = 2\sqrt{5}$ và $|z+i\sqrt{5}| + |z-i\sqrt{5}| = 6 \Leftrightarrow ME + MF = 6$.

Suy ra M thuộc elip (E) có hai tiêu điểm là $E, F \in Oy$ độ dài trục lớn $a = 3$ nằm trên Oy và trục bé $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 2$ nằm trên Ox .

Suy ra $b < R$ do đó elip (E) có phần nằm trong đường tròn (C) do đó (E) và (C) có bốn điểm chung. Mặt khác z là giao điểm của (C) và (E) nên có 4 số phức z thỏa mãn điều kiện.

Chọn đáp án **B** □

Câu 6. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn các điều kiện $|z_1| = |z_2| = 2$ và $|z_1 + 2z_2| = 4$. Giá trị của $|2z_1 - z_2|$ bằng

A. $2\sqrt{6}$.

B. $\sqrt{6}$.

C. $3\sqrt{6}$.

D. 8.

Lời giải.

Giả sử $z_1 = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$; $z_2 = c + di$, $(c, d \in \mathbb{R})$.

$$\text{Theo giả thiết ta có } \begin{cases} |z_1| = 2 \\ |z_2| = 2 \\ |z_1 + 2z_2| = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ c^2 + d^2 = 4 \\ (a+2c)^2 + (b+2d)^2 = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 4 & (1) \\ c^2 + d^2 = 4 & (2) \\ a^2 + b^2 + 4(c^2 + d^2) + 4(ac + bd) = 16 & (3). \end{cases}$$

Thay (1), (2) vào (3) ta được $ac + bd = -1$. (4)

Ta có $|2z_1 - z_2| = \sqrt{(2a - c)^2 + (2b - d)^2} = \sqrt{4(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) - 4(ac + bd)}$. (5)

Thay (1), (2), (4) vào (5) ta có $|2z_1 - z_2| = 2\sqrt{6}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 7. Cho hai số phức z, w thay đổi thoả mãn $|z| = 3, |z - w| = 1$. Biết tập hợp điểm của số phức w là hình phẳng H . Tính diện tích S của hình H .

- A. $S = 20\pi$. B. $S = 16\pi$. C. $S = 4\pi$. D. $S = 12\pi$.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của số phức z, w . Suy ra M nằm trên đường tròn tâm O , bán kính bằng 3.

Vì $|z - w| = 1$ nên $MN = 1$, do đó N nằm trên đường tròn tâm O bán kính bằng 4 hoặc bằng 2. Suy ra $S = 4^2 \cdot \pi - 2^2 \cdot \pi = 12\pi$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 8. Cho các số phức z thoả mãn $|z| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = 3 - 2i + (4 - 3i)z$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

- A. $r = 20$. B. $r = 5$. C. $r = 10$. D. $r = 2\sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có

$$w = 3 - 2i + (4 - 3i)z \Leftrightarrow w - (3 - 2i) = (4 - 3i)z \Leftrightarrow |w - (3 - 2i)| = |(4 - 3i)z| \Leftrightarrow |w - (3 - 2i)| = 10.$$

Vậy $r = 10$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 9. Tính môđun của số phức z thoả mãn $3z \cdot \bar{z} + 2017(z - \bar{z}) = 48 - 2016i$

- A. $|z| = 4$. B. $|z| = \sqrt{2016}$. C. $|z| = \sqrt{2017}$. D. $|z| = 2$.

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi$, từ giả thiết ta có $3|z|^2 = 48 - 2016i - 2b \cdot 2017i = 48$ (vì $|z|^2 \in \mathbb{R}$), suy ra $|z| = 4$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 10. Cho số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thoả mãn $z + 2 + i - |z|(1 + i) = 0$ và $|z| > 1$. Tính $P = a + b$.

- A. $P = 3$. B. $P = -1$. C. $P = -5$. D. $P = 7$.

Lời giải.

Ta có $z + 2 + i - |z|(1 + i) = 0 \Leftrightarrow z = (|z| - 2) + (|z| - 1)i$.

Lấy môđun hai vế, ta được $|z| = \sqrt{(|z| - 2)^2 + (|z| - 1)^2}$

$$\Rightarrow |z|^2 = 2|z|^2 - 6|z| + 5 \Rightarrow \begin{cases} |z| = 1 & \text{loại do } |z| > 1 \\ |z| = 5 & \text{thoả } |z| > 1 \end{cases}$$

Với $|z| = 5 \Rightarrow z = (|z| - 2) + (|z| - 1)i = 3 + 4i$.

Suy ra $a = 3, b = 4$.

Vậy $a + b = 7$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 11. Cho số phức z thoả mãn $z - 4 = (i + 1)|z| - (3z + 4)i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $|z| \in (6; 9)$. B. $|z| \in (4; 6)$. C. $|z| \in (1; 4)$. D. $|z| \in (0; 1)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} z - 4 &= (i + 1)|z| - (3z + 4)i \\ \Leftrightarrow (1 + 3i)z &= (4 + |z|) + (|z| - 4)i. \end{aligned}$$

Lấy môđun hai vế, ta được

$$\begin{aligned} |1 + 3i| \cdot |z| &= \sqrt{(4 + |z|)^2 + (|z| - 4)^2} \\ \Leftrightarrow 10|z|^2 &= 2|z|^2 + 32 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 12. Tìm số phức $z = a + bi$ (với a, b là các số thực và $a^2 + b^2 \neq 0$) thỏa mãn điều kiện $\bar{z}(2 + i - z) = |z|^2$.
 Tính $S = a^2 + 2b^2 - ab$

A. $S = 3$.B. $S = -1$.C. $S = 2$.D. $S = 1$.

Lời giải.

$$\bar{z}(2 + i - z) = |z|^2 \Leftrightarrow (a - bi)(2 + i) = 2(a^2 + b^2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 2(a^2 + b^2) \\ a - 2b = 0 \end{cases}$$

Thay $a = 2b$ vào phương trình thứ nhất của hệ, ta được

$$5b = 2 \cdot 5b^2 \Leftrightarrow 5b = 10b^2 \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1 \\ b = 0 \Rightarrow a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = 1 \end{cases} \text{ (Do } a^2 + b^2 \neq 0 \text{)}.$$

Vậy $S = a^2 + 2b^2 - ab = 1$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 13. Tìm mô-đun của số phức z thỏa mãn điều kiện $z(4 - 3i) = 2 + |z|$.

A. $|z| = 2$.B. $|z| = \frac{1}{2}$.C. $|z| = 4$.D. $|z| = 3$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Ta có

$$(x + yi)(4 - 3i) = 2 + \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 2 + \sqrt{x^2 + y^2} \\ -3x + 4y = 0 \end{cases}$$

Thay $x = \frac{4}{3}y$, ta có

$$4 \cdot \frac{4y}{3} + 3y = 2 + \sqrt{\frac{16y^2}{9} + y^2} \Leftrightarrow 25y - 5|y| = 6.$$

— $y \geq 0$, suy ra $y = \frac{3}{10} \Rightarrow x = \frac{2}{5}$, ta có $|z| = \frac{1}{2}$.

— $y < 0$, suy ra $y = \frac{1}{5} \Rightarrow x = \frac{4}{15}$, trường hợp này loại.

Cách khác: Lấy mô-đun hai vế của đẳng thức, suy ra

$$|z(4 - 3i)| = |2 + |z|| \Leftrightarrow 5|z| = 2 + |z| \Leftrightarrow |z| = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 14. Cho hai số phức z, w thỏa mãn các điều kiện $|z + w| = \sqrt{17}$, $|z + 2w| = \sqrt{58}$ và $|z - 2w| = 5\sqrt{2}$.
 Giá trị của biểu thức $P = \bar{z} \cdot w + z\bar{w}$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải.

Ta có $|z + w|^2 = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z \cdot \bar{z} + w \cdot \bar{w} + z \cdot \bar{w} + w\bar{z} = 17$. (1)

Lại có $|z + 2w|^2 = (z + 2w)(\bar{z} + 2\bar{w}) = z \cdot \bar{z} + 4w \cdot \bar{w} + 2z \cdot \bar{w} + 2w\bar{z} = 58$. (2)

Thêm nữa $|z - 2w|^2 = (z - 2w)(\bar{z} - 2\bar{w}) = z \cdot \bar{z} + 4w \cdot \bar{w} - 2z \cdot \bar{w} - 2w\bar{z} = 50$. (3)

Từ (1), (2) và (3) ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} z \cdot \bar{z} + w \cdot \bar{w} + z \cdot \bar{w} + w\bar{z} = 17 \\ z \cdot \bar{z} + 4w \cdot \bar{w} + 2(z \cdot \bar{w} + w\bar{z}) = 58 \\ z \cdot \bar{z} + 4w \cdot \bar{w} - 2(z \cdot \bar{w} + w\bar{z}) = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \cdot \bar{z} = 2 \\ w \cdot \bar{w} = 13 \\ z \cdot \bar{w} + w\bar{z} = 2. \end{cases}$$

Vậy $z \cdot \bar{w} + w\bar{z} = 2$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 15. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 3 + 4i| \leq 2$. Trong mặt phẳng Oxy tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = 2z + 1 - i$ là hình tròn có diện tích

- A. $S = 25\pi$. B. $S = 9\pi$. C. $S = 12\pi$. D. $S = 16\pi$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta suy ra $|2z - 6 + 8i| \leq 4 \Leftrightarrow |(2z + 1 - i) - (7 - 9i)| \leq 4 \Leftrightarrow |w - (7 - 9i)| \leq 4$ nên tập hợp các điểm biểu diễn cho w trong mặt phẳng Oxy là hình tròn có bán kính bằng 4, do đó diện tích hình tròn này bằng 16π .

Chọn đáp án **D** □

Câu 16. Cho z_1, z_2 thỏa mãn $|2z - i| = |2 + iz|$ và $|z_1 - z_2| = 1$. Giá trị của biểu thức $P = |z_1 + z_2|$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\sqrt{2}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có

$$|2z - i| = |2 + iz| \Leftrightarrow (2x)^2 + (2y - 1)^2 = (2 - y)^2 + x^2 \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn của z là đường tròn (C) tâm $O(0; 0)$, bán kính $R = 1$.

Gọi A là điểm biểu diễn của z_1 và B là điểm biểu diễn của z_2 . Khi đó ta có

— A, B thuộc (C) ;

— $AB = |z_1 - z_2| = 1$;

— điểm biểu diễn của số phức $\frac{z_1 + z_2}{2}$ là trung điểm I của AB , suy ra

$$|z_1 + z_2| = 2 \cdot \left| \frac{z_1 + z_2}{2} \right| = 2OI = 2\sqrt{OA^2 - AI^2} = \sqrt{3}.$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 17. Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên m sao cho tồn tại 2 số phức phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn đồng thời các phương trình $|z - 1| = |z - i|$ và $|z + 2m| = m + 1$. Tổng tất cả các phần tử của S là

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Ta có $|z + 2m| = m + 1 \geq 0$.

TH 1. $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ suy ra $z = 2$ (loại) vì không thỏa mãn phương trình $|z - 1| = |z - i|$.

TH 2. $m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$ (1).

Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} & \begin{cases} |z - 1| = |z - i| \\ |z + 2m| = m + 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = x^2 + (y - 1)^2 \\ (x + 2m)^2 + y^2 = (m + 1)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y = x \\ (x + 2m)^2 + y^2 = (m + 1)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y = x \\ 2x^2 + 4mx + 3m^2 - 2m - 1 = 0. \quad (*) \end{cases} \end{aligned}$$

Để tồn tại hai số phức phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn yêu cầu bài toán thì phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = 4m^2 - 2(3m^2 - 2m - 1) = 2(-m^2 + 2m + 1) > 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} < m < 1 + \sqrt{2}. \quad (2)$$

Kết hợp điều kiện (1) và (2), $m \in \mathbb{Z}$ thì $m \in S = \{0; 1; 2\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là: $0 + 1 + 2 = 3$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 18. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = m^2 + 2m + 5$ với m là số thực. Biết tập hợp điểm biểu diễn của số phức $w = (3 + 4i)z - 2i$ là đường tròn. Tìm bán kính R nhỏ nhất của đường tròn đó.

- A. $R = 5$. B. $R = 10$. C. $R = 15$. D. $R = 20$.

Lời giải.

$$\text{Có } w = (3 + 4i)z - 2i \Rightarrow z = \frac{w + 2i}{3 + 4i} \Rightarrow |z| = \frac{|w + 2i|}{5}.$$

$$\text{Lại có } |z| = m^2 + 2m + 5 \Rightarrow |w + 2i| = 5(m^2 + 2m + 5) = 5(m + 1)^2 + 20 \geq 20.$$

Vì tập hợp điểm biểu diễn cho w là đường tròn nên tập hợp điểm biểu diễn cho $w + 2i$ cũng là một đường tròn có cùng bán kính.

Vậy bán kính nhỏ nhất của là $R = 20$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 19. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $z + \bar{z} = |z|$ là

- A. hai đường thẳng. B. một parabol. C. một đường thẳng. D. một ê-líp.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có

$$z + \bar{z} = |z| \Rightarrow x + yi + x - yi = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow 4x^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow 3x^2 = y^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x + y = 0 \\ \sqrt{3}x - y = 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 20. Cho số phức z có phần thực là số nguyên và z thỏa mãn $|z| - 2\bar{z} = -7 + 3i + z$. Mô-đun của số phức $w = 1 - z + z^2$.

- A. $|w| = \sqrt{37}$. B. $|w| = \sqrt{425}$. C. $|w| = \sqrt{457}$. D. $|w| = \sqrt{445}$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ta có:

$$\begin{aligned} |z| - 2\bar{z} = -7 + 3i + z &\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} - 2(a - bi) = -7 + 3i + a + bi \\ &\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} - 2a + 2bi = a - 7 + (b + 3)i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2b = b + 3 \Rightarrow b = 3 & (1) \\ \sqrt{a^2 + b^2} - 2a = a - 7. & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Thay (1) vào (2) ta được } \sqrt{a^2 + 9} = 3a - 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 7 \geq 0 \\ a^2 + 9 = (3a - 7)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \frac{7}{3} \\ \begin{cases} a = 4 \\ a = \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow a = 4. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } z = 4 + 3i \Rightarrow w = 1 - z + z^2 = 4 + 21i \Rightarrow |w| = \sqrt{457}.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 21. Gọi z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 5i| = 5$ và $|z_1 - z_2| = 6$. Tìm mô-đun của số phức $w = z_1 + z_2 - 6 + 10i$.

- A. $|w| = 10$. B. $|w| = 32$. C. $|w| = 16$. D. $|w| = 8$.

Lời giải.

$$\text{Đặt } \begin{cases} w_1 = z_1 - 3 + 5i \\ w_2 = z_2 - 3 + 5i \end{cases} \Rightarrow w_1 + w_2 = z_1 + z_2 - 6 + 10i = w.$$

$$\text{Mà } \begin{cases} |w_1| = |w_2| = 5 \\ |w_1 - w_2| = |z_1 - z_2| = 6. \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác } |w_1 + w_2|^2 + |w_1 - w_2|^2 = 2(|w_1|^2 + |w_2|^2) \Rightarrow |w_1 + w_2|^2 = 64.$$

$$\text{Vậy } |w| = |w_1 + w_2| = 8.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 22. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z^2 - 2018z = 2019|z|^2$?

- A. Vô số. B. 2. C. 1. D. 0.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có } z^2 - 2018z = 2019|z|^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 - 2018a = 2019(a^2 + b^2) & (1) \\ 2ab - 2018b = 0 & (2). \end{cases}$$

Từ (2) ta được $\begin{cases} b = 0 \\ a = 1009. \end{cases}$

Thay $b = 0$ vào (1) ta được $-2018a = 2018a^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -1. \end{cases}$

Do đó trường hợp này ta có 2 số phức thỏa yêu cầu là $z = 0; z = -1$.

Thay $a = 1009$ vào (1) ta được $-2018 \cdot 1009 \cdot 1010 = 2020b^2$ vô nghiệm do $b \in \mathbb{R}$.

Vậy có 2 số phức z thỏa mãn.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 23. Xét các số phức z thỏa mãn $(z - 4i)(\bar{z} + 2)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm của đường tròn đó.

- A. $(-1; -2)$. B. $(-1; 2)$. C. $(1; 2)$. D. $(1; -2)$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có

$$\begin{aligned} (z - 4i)(\bar{z} + 2) &= [x + (y - 4)i][(x + 2) - yi] \\ &= x(x + 2) - xyi + (x + 2)(y - 4)i + y(y - 4) \\ &= (x^2 + y^2 + 2x - 4y) + (-4x + 2y - 8)i. \end{aligned}$$

Do đó $(z - 4i)(\bar{z} + 2)$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của z là đường tròn có tâm $(-1; 2)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 24. Cho số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$ và $|z + 2|^2 - |z - i|^2 = 33$. Môđun của số phức $z - 2 - i$ bằng

- A. $\sqrt{5}$. B. 9. C. 25. D. 5.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

Khi đó

$$\begin{aligned} \begin{cases} |z - 3 - 4i| = \sqrt{5} \\ |z + 2|^2 - |z - i|^2 = 33 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5 \\ (x + 2)^2 + y^2 - [x^2 + (y - 1)^2] = 33 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5 \\ y = 15 - 2x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 3)^2 + (11 - 2x)^2 = 5 \\ y = 15 - 2x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Do đó $z = 5 + 5i \Rightarrow |z - 2 - i| = |3 + 4i| = 5$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 25. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{5}$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (1 + 2i)z + i$ là một đường tròn. Tìm bán kính r của đường tròn đó.

- A. $r = \sqrt{5}$. B. $r = 10$. C. $r = 5$. D. $r = 2\sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} w &= (1 + 2i)z + i \Leftrightarrow w - i = (1 + 2i)z \Rightarrow |w - i| = |(1 + 2i)z| \\ &\Leftrightarrow |w - i| = |(1 + 2i)| \cdot |z| \Leftrightarrow |w - i| = \sqrt{1 + 2^2} \cdot \sqrt{5} \Leftrightarrow |w - i| = 5. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn bán kính $r = 5$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 26. Biết số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $M = |z + 2|^2 - |z - i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính mô-đun của số phức $z + i$.

A. $|z + i| = \sqrt{61}$.

B. $|z + i| = 5\sqrt{2}$.

C. $|z + i| = 3\sqrt{5}$.

D. $|z + i| = 2\sqrt{41}$.

Lời giải.Gọi $z = x + yi$ với $(x; y \in \mathbb{R})$.Ta có $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5$.Theo giả thiết $M = |z + 2|^2 - |z - i|^2 = ((x + 2)^2 + y^2) - (x^2 + (y - 1)^2) = 4x + 2y + 3$.

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} M - 23 &= 4(x - 3) + 2(y - 4) \\ &\leq \sqrt{(16 + 4)[(x - 3)^2 + (y - 4)^2]} = \sqrt{20 \cdot 5} = 10. \end{aligned}$$

Vậy $M \leq 33$ và $M = 33$ xảy ra khi

$$\begin{cases} 4x + 2y + 3 = 33 \\ (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 15 - 2x \\ (x - 3)^2 + (11 - 2x)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 5. \end{cases}$$

Vậy $z = 5 + 5i \Rightarrow |z + i| = |5 + 6i| = \sqrt{61}$.Chọn đáp án **A** □**Câu 27.** Xét các số phức z thỏa mãn $(z + 2i + 1)(\bar{z} + 3i)$ là số thuần ảo, biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn. Tâm của đường tròn đó là

A. $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

B. $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

C. $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

D. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải.Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).Ta có $(z + 2i + 1)(\bar{z} + 3i) = (x + yi + 2i + 1)(x - yi + 3i) = x^2 + y^2 + x - y - 6 + (5x - y + 3)i$.Vì $(z + 2i + 1)(\bar{z} + 3i)$ là số thuần ảo nên $x^2 + y^2 + x - y - 6 = 0$.Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn tâm $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.Chọn đáp án **D** □**Câu 28.** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 3 + 4i| \leq 2$. Trong mặt phẳng Oxy , tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = 2z + 1 - i$ là hình tròn có diện tích bằng

A. $S = 25\pi$.

B. $S = 4\pi$.

C. $S = 16\pi$.

D. $S = 9\pi$.

Lời giải.Do $w = 2z + 1 - i \Rightarrow z = \frac{w - 1 + i}{2}$, thay vào $|z - 3 + 4i| \leq 2$ ta được

$$\left| \frac{w - 1 + i}{2} - 3 + 4i \right| \leq 2 \Leftrightarrow |w - (7 - 9i)| \leq 4.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn cho số phức w là hình tròn tâm $I(7; -9)$ bán kính $R = 4$.Diện tích hình tròn là $S = 16\pi$.Chọn đáp án **C** □**Câu 29.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , gọi (H) là hình biểu diễn tập hợp các số phức z thỏa mãn $|7z - \bar{z}| \leq 10$. Diện tích của hình (H) bằng

A. $\frac{5\pi}{2}$.

B. $\frac{25\pi}{12}$.

C. $\frac{7\pi}{2}$.

D. 5π .

Lời giải.Gọi $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta thấy

$$\begin{aligned} &|7z - \bar{z}| \leq 10 \\ \Leftrightarrow &|6x + 8yi| \leq 10 \\ \Leftrightarrow &36x^2 + 64y^2 \leq 100 \\ \Leftrightarrow &\frac{x^2}{\left(\frac{5}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{5}{4}\right)^2} \leq 1. \quad (1) \end{aligned}$$

Từ (1) ta được (H) là hình elip.Ta có $S_{(H)} = \pi \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{25\pi}{12}$.Chọn đáp án **B** □

Câu 30. Cho số phức z thỏa mãn $|z - i| = |z - 1 + 2i|$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = (2 - i)z + 1$ trên mặt phẳng là một đường thẳng. Phương trình đường thẳng đó là

- A. $x + 7y + 9 = 0$. B. $x + 7y - 9 = 0$. C. $x - 7y - 9 = 0$. D. $x - 7y + 9 = 0$.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có $|z - i| = |z - 1 + 2i| \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 \Leftrightarrow x - 3y - 2 = 0$. (1)

Gọi $M(x'; y')$ là điểm biểu diễn của w , ta có $w = (2 - i)z + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2x + y + 1 \\ y' = -x + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5}(2x' - y' - 2) \\ y = \frac{1}{5}(x' + 2y' - 1) \end{cases}$.

(2)

Từ (2) và (1) $\Rightarrow \frac{1}{5}(2x' - y' - 2) - \frac{3}{5}(x' + 2y' - 1) - 2 = 0 \Leftrightarrow x' + 7y' + 9 = 0$.

Vậy tập các điểm biểu diễn của w là đường thẳng có phương trình $x + 7y + 9 = 0$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 31. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(z + 1 + i)(\bar{z} - i) + 3i = 9$ và $|\bar{z}| > 2$. Tính $P = a + b$.

- A. 2. B. 1. C. -3. D. -1.

Lời giải.

Phương trình tương đương $|z|^2 - iz + (1 + i)\bar{z} + 2i - 8 = 0$ (1).

Thay $z = a + bi$ vào (1) và biến đổi ta được

$$a^2 + b^2 + a + 2b - 8 + (2 - b)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + a + 2b - 8 = 0 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \\ a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Vì $|\bar{z}| > 2$ nên ta chọn $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$. Vậy $P = a + b = 1$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 32. Cho các số phức z thỏa mãn $|z - 2i^{2020}| = |\bar{z} - 1 + 2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = 2\bar{z} - 1 + 4i$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Khoảng cách từ $I(2; -3)$ đến đường thẳng đó bằng

- A. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{18\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{10\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{18\sqrt{13}}{13}$.

Lời giải.

Đặt $w = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Khi đó, $x + yi = 2\bar{z} - 1 + 4i \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{x + 1}{2} + \frac{y - 4}{2}i$ và $z = \frac{x + 1}{2} - \frac{y - 4}{2}i$.

Ta có

$$\begin{aligned} &|z - 2i^{2020}| = |\bar{z} - 1 + 2i| \\ \Leftrightarrow &|z - 2| = |\bar{z} - 1 + 2i| \\ \Leftrightarrow &\left(\frac{x + 1}{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{y - 4}{2}\right)^2 = \left(\frac{x + 1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{y - 4}{2} + 2\right)^2 \\ \Leftrightarrow &(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = (x - 1)^2 + y^2 \\ \Leftrightarrow &x + 2y - 6 = 0. \end{aligned}$$

Như thế, tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường thẳng $\Delta: x + 2y - 6 = 0$.

Vậy khoảng cách từ $I(2; -3)$ đến Δ là $\frac{|2 - 2 \cdot 3 - 6|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{10\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 33. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn điều kiện $|z_1 - z_2| = |z_1| = |z_2| = 2$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z = z_1 + z_2$ là

- A. Đường tròn có bán kính $R = 3\sqrt{3}$. B. Đường tròn có bán kính $R = 2\sqrt{3}$.
C. Đường elip. D. Đường thẳng.

Lời giải.

Ta có $|z|^2 = |z_1 + z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) - |z_1 - z_2|^2 = 2(4 + 4) - 4 = 12$, suy ra $|z| = 2\sqrt{3}$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn có bán kính $R = 2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 34. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, a > 0$) thỏa mãn $z \cdot \bar{z} - 12|z| + (z - \bar{z}) = 13 + 10i$. Tính $S = a + b$.

A. $S = 7$.

B. $S = 17$.

C. $S = -17$.

D. $S = 5$.

Lời giải.

Ta có $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$ và $z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi$. Khi đó

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} - 12|z| + (z - \bar{z}) &= 13 + 10i \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 12\sqrt{a^2 + b^2} + 2bi &= 13 + 10i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 12\sqrt{a^2 + b^2} = 13 \\ 2b = 10 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 12\sqrt{a^2 + 25} + 12 = 0 \\ b = 5. \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt{a^2 + 25}$ với $t \geq 5$ và $t^2 = a^2 + 25$. Phương trình (1) trở thành

$$t^2 - 12t - 13 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 & (\text{loại}) \\ t = 13. \end{cases}$$

Với $t = 13 \Rightarrow \sqrt{a^2 + 25} = 13 \Leftrightarrow a^2 = 144 \Leftrightarrow a = 12$ vì $a > 0$.

Vậy $S = a + b = 12 + 5 = 17$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $3 \leq |z - 3i + 1| \leq 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z tạo thành một hình phẳng. Tính diện tích hình phẳng đó.

A. $S = 16\pi$.

B. $S = 4\pi$.

C. $S = 25\pi$.

D. $S = 8\pi$.

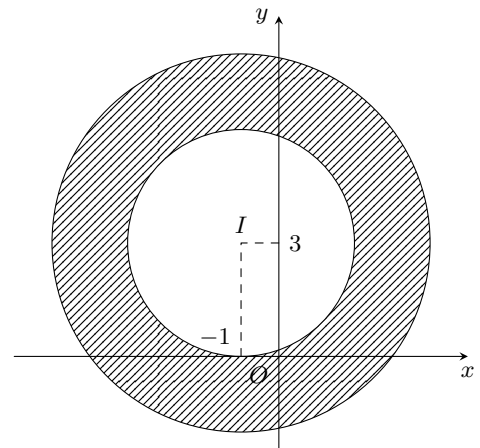
Lời giải.

Gọi các điểm biểu diễn các số phức z và $-1 + 3i$ lần lượt là M và $I(-1; 3)$. Ta có

$$3 \leq |z - 3i + 1| \leq 5 \Rightarrow 3 \leq IM \leq 5.$$

Gọi (C_1) là đường tròn tâm I , bán kính $R_1 = 3$; (C_2) là đường tròn tâm I , bán kính $R_2 = 5$. Khi đó tập hợp các điểm M nằm ngoài đường tròn (C_1) và nằm trong đường tròn (C_2) (phần gạch chéo trên hình vẽ). Diện tích hình phẳng này là

$$S = \pi \cdot 5^2 - \pi \cdot 3^2 = 16\pi.$$



Chọn đáp án **(A)** □

Câu 36. Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z} + i)(z + 2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

A. 1.

B. $\frac{5}{4}$.

C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có $(\bar{z} + i)(z + 2) = (x - yi + i)(x + yi + 2) = (x^2 + 2x + y^2 - y) + (x - 2y + 2)i$

Vì $(\bar{z} + i)(z + 2)$ là số thuần ảo nên ta có: $x^2 + 2x + y^2 - y = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$.

Vậy tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 37. Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z} + 3i)(z - 3)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

- A. $\frac{9}{2}$. B. $3\sqrt{2}$. C. 3. D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$ trong đó $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $(\bar{z} + 3i)(z - 3) = x^2 + y^2 - 3x - 3y + (3x + 3y - 9)i$.

Số phức $(\bar{z} + 3i)(z - 3)$ là số thuần ảo khi chỉ khi $x^2 + y^2 - 3x - 3y = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$.

Vậy tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán là đường tròn có bán kính bằng $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 38. Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z} + 2i)(z - 2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

- A. 2. B. $2\sqrt{2}$. C. 4. D. $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Đặt $Z = (\bar{z} + 2i)(z - 2) = [x + (2 - y)i][(x - 2) + yi] = [x(x - 2) - y(2 - y)] + [xy + (x - 2)(2 - y)]i$.

Vì Z là số thuần ảo nên có phần thực bằng không do đó

$$x(x - 2) - y(2 - y) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2.$$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 39. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z - 6 - i) + 2i = (7 - i)z$?

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

Lời giải.

Ta có $|z|(z - 6 - i) + 2i = (7 - i)z \Leftrightarrow (|z| - 7 + i)z = 6|z| + (|z| - 2)i$. (*)
 $\Rightarrow (|z| - 7 + i)|z| = 6|z| + (|z| - 2)i \Leftrightarrow [(|z| - 7)^2 + 1]|z|^2 = 36|z|^2 + (|z| - 2)^2$ (**)

Đặt $t = |z|$ thì $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ và (**) trở thành $t^4 - 14t^3 + 13t^2 + 4t - 4 = 0$.

$$\Leftrightarrow (t - 1)(t^3 - 13t^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t \approx 12,96 \\ t \approx 0,56 \\ t \approx -0,5 \end{cases} \text{ (chỉ nhận 3 giá trị } t \geq 0).$$

Thay vào (*) ta được 3 số phức z .

Lưu ý:

Để chứng minh phương trình cuối cùng theo t có 3 nghiệm $t \geq 0$ ta cần dùng đến phương pháp hàm số: chứng minh $f(t) = t^3 - 13t^2 + 4 = 0$ có 2 nghiệm không âm đều khác 1.

Bảng biến thiên của $f(t)$ trên nửa khoảng $[0; \infty)$ như sau:

t	0	1	$\frac{26}{3}$	$+\infty$
$f'(t)$		+	0	+
$f(t)$	4	-8	$-\frac{8680}{27}$	$+\infty$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 40. Tính mô-đun của số phức z thỏa mãn $(1 + i)z|z| - 1 = (i - 2)|z|$.

- A. $|z| = 1$. B. $|z| = 4$. C. $|z| = 2$. D. $|z| = 3$.

Lời giải.

Ta thấy $(1 + i)z|z| - 1 = (i - 2)|z| \Leftrightarrow (1 + i)z|z| = (i - 2)|z| + 1$.

Lấy mô-đun hai vế ta được

$$\begin{aligned} |i+1||z|^2 &= ||z|i+1-2|z|| \\ \Leftrightarrow \sqrt{2}|z|^2 &= \sqrt{(1-2|z|)^2 + |z|^2} \\ \Leftrightarrow 2|z|^4 &= (1-2|z|)^2 + |z|^2 \\ \Leftrightarrow 2|z|^4 - 5|z|^2 + 4|z| - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ 2|z|^3 + 2|z|^2 - 3|z| + 1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ta chứng minh phương trình $2|z|^3 + 2|z|^2 - 3|z| + 1 = 0$ vô nghiệm.

Đặt $t = |z|$ điều kiện $t \geq 0$. Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + 2t^2 - 3t + 1$.

Ta có $f'(t) = 6t^2 + 4t - 3$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 6t^2 + 4t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-2 + \sqrt{22}}{6} \\ t = \frac{-2 - \sqrt{22}}{6} \text{ (loại)} \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên sau

x	0	$\frac{-2 + \sqrt{22}}{6}$	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	1	$\frac{116 - 22\sqrt{22}}{54}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $f(t) \geq \frac{116 - 22\sqrt{22}}{54} > 0, \forall t \geq 0$. Suy ra $f(t) = 0$ vô nghiệm.

Vậy $|z| = 1$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 41. Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm của phương trình $z^4 + 3z^2 + 4 = 0$ trên tập số phức. Tính giá trị của biểu thức $T = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2$.

A. $T = 8$.

B. $T = 6$.

C. $T = 4$.

D. $T = 2$.

Lời giải.

Nhận xét: Cho số phức $z = a + bi$, khi đó ta luôn có $|z|^2 = |z^2|$.

Giải phương trình $z^4 + 3z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = C_1 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}i}{2} \\ z^2 = C_2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}i}{2} \end{cases}, (C_1, C_2 \in \mathbb{C}).$

Suy ra, phương trình đã cho có 4 nghiệm thỏa mãn $z_1^2 = z_2^2 = C_1, z_3^2 = z_4^2 = C_2$.

Suy ra

$$\begin{aligned} T &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 \\ &= |z_1^2| + |z_2^2| + |z_3^2| + |z_4^2| \\ &= |C_1| + |C_1| + |C_2| + |C_2| \\ &= 4\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{7}{4}} = 8. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 42. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 4i| = 5$. Biết rằng tập hợp điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức $w = 2z + 4 - i$ là đường tròn có tâm $I(a; b)$, bán kính R . Tổng $a + b + R$ bằng

A. 11.

B. 9.

C. 7.

D. 4.

Lời giải.

Gọi $z' = z - 3 + 4i \Rightarrow |z'| = 5$ và $z = z' + 3 - 4i$ Ta có

$$w = 2(z' + 3 - 4i) + 4 - i = 2z' + 10 - 9i.$$

Do đó $|w - (10 - 9i)| = 2|z'| = 10$. Suy ra tập hợp điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức $w = 2z + 4 - i$ là đường tròn có tâm $I(10; -9)$, bán kính 10.

Vậy $a + b + R = 10 - 9 + 10 = 11$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 43. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|3z - i| = |3 + iz|$. Biết rằng $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$. Tính giá trị biểu thức $P = |z_1 + z_2|$.

- A. $P = 2\sqrt{2}$. B. $P = \frac{1}{2}$. C. $P = \frac{3}{2}$. D. $P = 1$.

Lời giải.

Gọi A, B là hai điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

Gọi $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có $|3z - i| = |3 + iz| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.

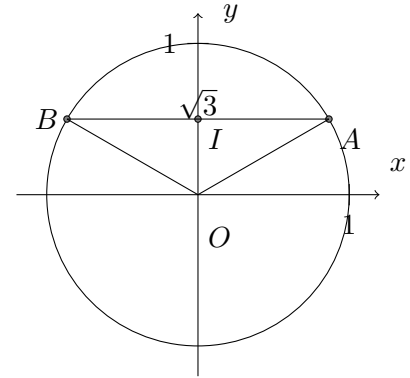
Suy ra A, B nằm trên đường tròn tâm O bán kính 1.

Từ $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$ ta có khoảng cách $AB = \sqrt{3}$.

Không mất tính tổng quát, ta vẽ hai điểm A, B đối xứng nhau qua trục tung thỏa $AB = \sqrt{3}$.

Gọi I là trung điểm AB suy ra $A = (\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2})$ và $B = (-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2})$.

Vậy $|z_1 + z_2| = 1$.



Cách khác. $|z_1 - z_2| = \sqrt{3} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 3 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = -\frac{1}{2}$.

Khi đó $|z_1 + z_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) + 2(x_1x_2 + y_1y_2)} = 1$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 44. Số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 2| = |z|$ và $(z + 1)(\bar{z} - i)$ là số thực. Giá trị của biểu thức $S = a + 2b$ bằng bao nhiêu?

- A. $S = -3$. B. $S = 0$. C. $S = -1$. D. $S = 1$.

Lời giải.

$|z - 2| = |z| \Leftrightarrow \sqrt{(a - 2)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow (a - 2)^2 = a^2 \Leftrightarrow a = 1$.

$(z + 1)(\bar{z} - i) = (a + 1 + bi)(a - bi - i) = a(a + 1) + b(b + 1) - (a + b + 1)i$.

Vì $(z + 1)(\bar{z} - i)$ là số thực nên $a + b + 1 = 0 \Rightarrow b = -2$.

Vậy $S = a + 2b = -3$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 45. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1| = |z - i|$. Tìm mô-đun nhỏ nhất của số phức $w = 2z + 2 - i$.

- A. $\frac{3}{2}$. B. $3\sqrt{2}$. C. $\frac{3}{2\sqrt{2}}$. D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Ta có

$$|z - 1| = |z - i| \Leftrightarrow |a - 1 + bi| = |a + (b - 1)i| \Leftrightarrow (a - 1)^2 + b^2 = a^2 + (b - 1)^2 \Leftrightarrow a - b = 0.$$

Khi đó $w = 2(a + ai) + 2 - i = 2a + 2 + (a - 1)i$.

Suy ra $|w| = \sqrt{(2a + 2)^2 + (a - 1)^2} = \sqrt{8a^2 + 4a + 5} = \sqrt{8\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{2}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Vậy mô-đun nhỏ nhất của số phức w là $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 46. Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn: $z + 1 - 2i - |z|(1 - i) = 0$. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , M là điểm biểu diễn của số phức z . Khi đó M thuộc đường thẳng nào sau đây?

- A. $x - y + 2 = 0$. B. $x + y - 1 = 0$. C. $x + y - 2 = 0$. D. $x + y + 1 = 0$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned}x + yi + 1 - 2i - \sqrt{x^2 + y^2}(1 - i) &= 0 \Leftrightarrow (x + 1 - \sqrt{x^2 + y^2}) + (y + \sqrt{x^2 + y^2} - 2)i = 0 \\&\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 - \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \\ y + \sqrt{x^2 + y^2} - 2 = 0 \end{cases} \\&\Leftrightarrow y = 1 - x \text{ hay } x + y - 1 = 0.\end{aligned}$$

Điều đó chứng tỏ M thuộc đường thẳng $x + y - 1 = 0$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 47. Cho hai số phức z, z' thỏa mãn $|z + 5| = 5$ và $|z' + 1 - 3i| = |z' - 3 - 6i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z - z'|$.

A. $\frac{5}{2}$.

B. $\frac{5}{4}$.

C. $\sqrt{10}$.

D. $3\sqrt{10}$.

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ và $N(x'; y')$ lần lượt là điểm biểu diễn cho số phức z và z' .

Do $|z + 5| = 5$ nên M thuộc đường tròn tâm $I(-5; 0)$ bán kính $R = 5$.

Lại có

$$\begin{aligned}|z' + 1 - 3i| &= |z' - 3 - 6i| \\&\Leftrightarrow |x' + y'i + 1 - 3i| = |x' + y'i - 3 - 6i| \\&\Leftrightarrow |(x' + 1) + (y' - 3)i| = |(x' - 3) + (y' - 6)i| \\&\Leftrightarrow (x' + 1)^2 + (y' - 3)^2 = (x' - 3)^2 + (y' - 6)^2 \\&\Leftrightarrow 2x' + 1 - 6y' + 9 = 6x' + 9 - 12y' + 36 \\&\Leftrightarrow 8x' + 6y' - 35 = 0 \quad (\Delta).\end{aligned}$$

Suy ra N thuộc đường thẳng (Δ) . Khi đó $|z - z'| = MN$, vậy $|z - z'|$ nhỏ nhất khi MN nhỏ nhất. Dựa vào hình vẽ ta thấy giá trị nhỏ nhất bằng $d(I, \Delta) - R = \frac{|-40 - 35|}{10} - 5 = \frac{5}{2}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 48. Cho số phức z thỏa mãn $z|(1 + 3i)|z| - 3 + i| = 4\sqrt{10}$ và $|z| > 1$. Tính $|z|$.

A. $|z| = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{65}}{4}}$.

B. $|z| = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{65}}{2}}$.

C. $|z| = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{65}}{2}}$.

D. $|z| = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{65}}{4}}$.

Lời giải.

Từ phương trình và giả thiết suy ra z có dạng $z = x$, ($x > 0, |x| > 1, x \in \mathbb{R}$).

Từ phương trình ta có

$$\begin{aligned}x|(1 + 3i)x - 3 + i| &= 4\sqrt{10} \Leftrightarrow x|(x - 3) + (3x + 1)i| = 4\sqrt{10} \\&\Leftrightarrow x\sqrt{(x - 3)^2 + (3x + 1)^2} = 4\sqrt{10} \Leftrightarrow x^2(x^2 - 6x + 9 + 9x^2 + 6x + 1) = 160 \\&\Leftrightarrow x^4 + x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{-1 + \sqrt{65}}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{65}}{2}}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 49. Cho số phức z . Gọi A, B lần lượt là các điểm trong mặt phẳng tọa độ Oxy biểu diễn số phức z và $(1 + i)z$. Tính mô-đun của z , biết diện tích $\triangle OAB$ bằng 32.

A. $|z| = 4\sqrt{2}$.

B. $|z| = 4$.

C. $|z| = 8$.

D. $|z| = 2$.

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) ta có

$$(1 + i)z = (1 + i)(a + bi) = a - b + (a + b)i.$$

Ta có $OA = \sqrt{a^2 + b^2}; OB = \sqrt{2(a^2 + b^2)}$.

$$\cos(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{2(a^2 + b^2)}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned} S_{\triangle OAB} = 32 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}OA \cdot OB \cdot \sin \widehat{AOB} = 32 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{2(a^2 + b^2)} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 32 \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 64 \Rightarrow |z| = 8. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 50. Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 không phải là thực, thỏa mãn điều kiện $z_1 + z_2 = 4$ và $|z_1 - 2| = |z_2 - 2| = |z_3 - 2| = 1$. Tính giá trị biểu thức $T = |z_3 - z_1|^2 + |z_3 - z_2|^2$.

- A. $T = 12$. B. $T = 1$. C. $T = 4$. D. $T = 8$.

Lời giải.

- Gọi A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2, z_3 trên mặt phẳng tọa độ.
- Từ giả thiết $|z_1 - 2| = |z_2 - 2| = |z_3 - 2| = 1$ suy ra A, B, C thuộc đường tròn tâm $I(2; 0)$ bán kính $R = 1$.
- Từ giả thiết $z_1 + z_2 = 4$ suy ra I là trung điểm của AB nên $AB = 2R = 2$.
- $T = |z_3 - z_1|^2 + |z_3 - z_2|^2 = AC^2 + BC^2 = AB^2 = 4R^2 = 4$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 51. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $\omega = (1 + i\sqrt{3})z + 2$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

- A. $r = 2\sqrt{3}$. B. $r = 4$. C. $r = 3$. D. $r = 2$.

Lời giải.

Ta có $|z - 1| = 2$. Khi đó

$$\begin{aligned} \omega = (1 + i\sqrt{3})z + 2 &\Leftrightarrow \omega = (1 + i\sqrt{3})(z - 1) + 3 + i\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow [\omega - (3 + i\sqrt{3})] = (1 + i\sqrt{3})(z - 1) \\ &\Rightarrow |\omega - (3 + i\sqrt{3})| = |1 + i\sqrt{3}| \cdot |z - 1| \\ &\Rightarrow |\omega - (3 + i\sqrt{3})| = 2 \cdot 2 = 4. \end{aligned}$$

Giả sử $\omega = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Ta có

$$|\omega - (3 + i\sqrt{3})| = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x - 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2} = 4 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 16.$$

Suy ra $r = 4$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 52. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 2 + i = |z|$. Tính $S = 4a + b$.

- A. $S = -3$. B. $S = 4$. C. $S = -1$. D. $S = -4$.

Lời giải.

— Ta có

$$\begin{aligned} z + 2 + i &= |z| \\ \Rightarrow z &= (|z| - 2) - i \\ \Rightarrow |z| &= |(|z| - 2) - i| \\ \Rightarrow |z| &= \sqrt{(|z| - 2)^2 + 1} \\ \Rightarrow |z|^2 &= (|z| - 2)^2 + 1 \Leftrightarrow |z| = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

— Khi đó thì $z = -\frac{3}{4} - i \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$, $b = -1 \Rightarrow S = -4$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 53. Cho $S = 1 + i + i^2 + \dots + i^{2018}$ (với i là đơn vị ảo). Khi đó S^{2018} bằng

- A. -1 . B. 1 . C. 2018 . D. i .

Lời giải.

$$S = 1 + i + i^2 + \dots + i^{2018} = \frac{1 - i^{2019}}{1 - i} = \frac{1 - (i^2)^{1009}i}{1 - i} = \frac{1 + i}{1 - i} = i \Rightarrow S^{2018} = -1.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 54. Cho số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 1 + 2i - (1 + 1)|z| = 0$ và $|z| > 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$.

- A. $P = 3$. B. $P = -1$. C. $P = 7$. D. $P = -5$.

Lời giải.

Với $z = a + bi$ ta có:

$$\begin{aligned} z + 1 + 2i - (1 + 1)|z| = 0 &\Leftrightarrow a + bi + 1 + 2i = (1 + i)\sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 1 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ b + 2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2a + 1 = a^2 + b^2 \\ b^2 + 2b + 1 = a^2 + b^2 \end{cases} \quad (a \geq -1, b \geq -2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = b^2 - 1 & (1) \\ 16b + 16 = (b^2 - 1)^2 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } (2) \Leftrightarrow b^4 - 2b^2 - 16b - 15 = 0 \Leftrightarrow (b + 1)(b - 3)(b^2 + 2b + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ b = 3. \end{cases}$$

Với $b = -1 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow z = -i$ (không thỏa mãn $|z| > 1$).

Với $b = 3 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow z = 3 + 4i$ (thỏa mãn).

Vậy $P = a + b = 7$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 55. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho số phức z thỏa mãn $|z - 1| = |\bar{z} - i|$. Quỹ tích các điểm biểu diễn số phức $w = (3 - 4i)z + i$ là đường thẳng có phương trình

- A. $7x - y - 1 = 0$. B. $x - 7y + 1 = 0$. C. $7x - y + 1 = 0$. D. $7x + y + 1 = 0$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$.

Ta có

$$|z - 1| = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}.$$

$$|\bar{z} - i| = \sqrt{x^2 + (y + 1)^2}.$$

Theo giả thiết thì $\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} \Leftrightarrow y = -x$.

Xét số phức $w = (3 - 4i)(x + yi) = (3x + 4y) + (3y - 4x + 1)i$.

Gọi $M'(x'; y')$ là điểm biểu diễn số phức w .

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = -7x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow y' = 7x' + 1 \Leftrightarrow 7x - y + 1 = 0$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 56. Cho số phức $z = a + bi$ (a, b là các số thực) thỏa mãn $z \cdot |z| + 2z + i = 0$. Tính giá trị của biểu thức $T = a + b^2$.

- A. $T = 4\sqrt{3} - 2$. B. $T = 3 + 2\sqrt{2}$. C. $T = 3 - 2\sqrt{2}$. D. $T = 4 + 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $z \cdot |z| + 2z + i = 0 \Leftrightarrow z \cdot (|z| + 2) = -i$. Lấy mô-đun hai vế, ta được

$$|z|(|z| + 2) = 1 \Leftrightarrow |z|^2 + 2|z| - 1 = 0 \Leftrightarrow |z| = -1 + \sqrt{2}.$$

$$\text{Do đó } z = \frac{-i}{1 + \sqrt{2}} \Rightarrow a + b^2 = 0 + \left(\frac{-1}{1 + \sqrt{2}}\right)^2 = 3 - 2\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 57. Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 1; |z_2| = 2$ và $z_1 \cdot \bar{z}_2$ là số thuần ảo, tính $|z_1 - z_2|$.

- A. $\sqrt{2}$. B. $\sqrt{3}$. C. 2 . D. $\sqrt{5}$.

Lời giải.

Vì $z_1 \overline{z_2}$ là số thuần ảo nên $z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1 \overline{z_2}} = 0$.

Ta có $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2) = 5 - 0 = 5$.

Vậy $|z_1 - z_2| = \sqrt{5}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 58.

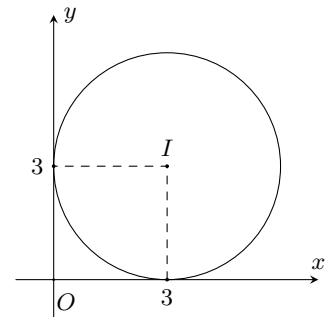
Đường tròn ở hình bên là tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z thỏa mãn đẳng thức nào dưới đây?

A. $|z - 3| = 3$.

B. $|z| = 3$.

C. $|z - 3 - 3i| = 3$.

D. $|z - 3i| = 3$.



Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Dựa vào hình vẽ ta thấy tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z thuộc đường tròn tâm $I(3; 3)$, có bán kính $R = 3$.

Suy ra

$$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 3^2 \Leftrightarrow |z - 3 - 3i| = 3.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 59. Cho biết có hai số phức z thỏa mãn $z^2 = 119 - 120i$, ký hiệu là z_1 và z_2 . Tính $|z_1 - z_2|^2$.

A. 169.

B. 114244.

C. 338.

D. 676.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$.

$$\text{Theo giả thiết ta có } \begin{cases} a^2 - b^2 = 119 \\ 2ab = -120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -12 \\ b = 5 \\ a = 12 \\ b = -5 \end{cases}.$$

Do đó $z_1 = -12 + 5i; z_2 = 12 - 5i$.

Suy ra $|z_1 - z_2|^2 = |-24 + 10i|^2 = 676$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 60. Cho w là số phức thay đổi thỏa mãn $|w| = 2$. Trong mặt phẳng phức, các điểm biểu diễn số phức $z = 3w + 1 - 2i$ chạy trên đường nào?

A. Đường tròn tâm $I(1; -2)$, bán kính $R = 6$.

B. Đường tròn tâm $I(-1; 2)$, bán kính $R = 2$.

C. Đường tròn tâm $I(1; -2)$, bán kính $R = 2$.

D. Đường tròn tâm $I(-1; 2)$, bán kính $R = 6$.

Lời giải.

Ta có: $z = 3w + 1 - 2i \Leftrightarrow z - 1 + 2i = 3w$.

$$\Rightarrow |z - 1 + 2i| = |3w| = 6.$$

$\Rightarrow$ Điểm biểu diễn số phức z chạy trên đường tròn tâm $I(1; -2)$, bán kính $R = 6$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 61. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, a < 0$) thỏa mãn $1 + \overline{z} = |\overline{z} - i|^2 + (iz - 1)^2$. Tính $|z|$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\sqrt{5}$.

C. $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 1 + \overline{z} &= |\overline{z} - i|^2 + (iz - 1)^2 \Leftrightarrow 1 + a - bi = a^2 + (b+1)^2 - a^2 + (b+1)^2 - 2a(b+1)i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + a = 2(b+1)^2 \\ -b = -2a(b+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2(b+1)^2 - 1 \\ 1 - (b+1) = -2a(b+1) \end{cases} \end{aligned}$$

Thế $a = 2(b+1)^2 - 1$ vào phương trình dưới ta được

$$4(b+1)^3 - 3(b+1) + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b+1 = -1 \\ b+1 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \Rightarrow a = 1 \text{ (loại)} \\ b = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow |z| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 62. Cho số phức $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn phương trình $\frac{(|z|-1)(1+iz)}{z - \frac{1}{\bar{z}}} = i$. Tính $P = a+b$.

- A.** $P = 1 - \sqrt{2}$. **B.** $P = 1$. **C.** $P = 1 + \sqrt{2}$. **D.** $P = 0$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \frac{(|z|-1)(1+iz)}{z - \frac{1}{\bar{z}}} = i &\Leftrightarrow \frac{(|z|-1)(1+iz)\bar{z}}{z\bar{z} - 1} = i \quad (|z| \neq 1) \\ &\Leftrightarrow \frac{(|z|-1)(1+iz)\bar{z}}{|z|^2 - 1} = i \Leftrightarrow \frac{(1+iz)\bar{z}}{|z| + 1} = i \\ &\Leftrightarrow \bar{z} + i|z|^2 = i(|z| + 1) \Leftrightarrow a - bi + (a^2 + b^2)i = i(\sqrt{a^2 + b^2} + 1) \\ &\Leftrightarrow a + (-b + a^2 + b^2)i = i(\sqrt{a^2 + b^2} + 1) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b^2 - b = |b| + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \begin{cases} b < 0 \\ b = \pm 1 \text{ (loại)} \\ b > 0 \\ b^2 - 2b - 1 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \begin{cases} b = 1 + \sqrt{2} \text{ (nhận)} \\ b = 1 - \sqrt{2} \text{ (loại)} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $P = a + b = 1 + \sqrt{2}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 63. Gọi S là tập hợp tất cả các số phức thỏa mãn $\begin{cases} |\bar{z} - 2 + 5i| = 2 \\ |z - 5 - i| = 3 \end{cases}$. Hỏi tập S có bao nhiêu phần tử?

- A.** 0. **B.** 2. **C.** Vô số. **D.** 1.

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (a-2)^2 + (5-b)^2 = 4 \\ (a-5)^2 + (b-1)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{16}{5} \\ b = \frac{17}{5} \end{cases}.$$

Như vậy tập S chỉ có một phần tử là $z = \frac{16}{5} + \frac{17}{5}i$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 64. Cho số phức $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 1 + 2i - (1+i)|z| = 0$ và $|z| > 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$.

- A.** $P = -1$. **B.** $P = 3$. **C.** $P = -5$. **D.** $P = 7$.

Lời giải.

Ta có $z + 1 + 2i - (1+i)|z| = 0 \Leftrightarrow a + 1 - \sqrt{a^2 + b^2} + (b + 2 - \sqrt{a^2 + b^2})i = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 1 - \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \\ b + 2 - \sqrt{a^2 + b^2} = 0. \end{cases}$$

Suy ra $a + 1 = b + 2 \Leftrightarrow a = b + 1$, thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta được:

$$b + 2 - \sqrt{2b^2 + 2b + 1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b + 2 \geq 0 \\ 2b^2 + 2b + 1 = b^2 + 4b + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq -2 \\ \begin{cases} b = -1 \\ b = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \Rightarrow a = 0 \\ b = 3 \Rightarrow a = 4. \end{cases}$$

— Với $a = 0, b = -1$ ta có $|z| = 1$ (không thỏa mãn).

— Với $a = 4, b = 3$ ta có $|z| = 5$ (thỏa mãn).

Vậy $P = a + b = 3 + 4 = 7$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 65. Cho số phức z . Gọi A, B lần lượt là các điểm trong mặt phẳng Oxy biểu diễn các số phức z và $(1+i)z$. Tính $|z|$ biết diện tích tam giác OAB bằng 8.

A. $|z| = 4$.

B. $|z| = 2\sqrt{2}$.

C. $|z| = 4\sqrt{2}$.

D. $|z| = 2$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ với $z \neq 0$.

$(1+i)z = (1+i)(a+bi) = a-b + (a+b)i$.

Suy ra $A(a; b), B(a-b; a+b), \overrightarrow{AB} = (-b; a), AB = \sqrt{a^2 + b^2}$

Đường thẳng $AB: a(x-a) + b(y-b) = 0 \Leftrightarrow ax + by - a^2 - b^2 = 0$.

Chiều cao hạ từ O của tam giác OAB là $h = d(O, AB) = \frac{|-a^2 - b^2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Diện tích tam giác OAB bằng 8 nên

$$\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = 8 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 4 \Leftrightarrow |z| = 4.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 66. Giá trị của biểu thức $C_{100}^0 - C_{100}^2 + C_{100}^4 - C_{100}^6 + \dots - C_{100}^{98} + C_{100}^{100}$ bằng

A. -2^{100} .

B. -2^{50} .

C. 2^{100} .

D. 2^{50} .

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} (1+i)^{100} &= C_{100}^0 + iC_{100}^1 + i^2C_{100}^2 + \dots + i^{100}C_{100}^{100} \\ &= (C_{100}^0 - C_{100}^2 + C_{100}^4 - \dots + C_{100}^{100}) + (C_{100}^1 - C_{100}^3 + C_{100}^5 - \dots - C_{100}^{99})i \end{aligned}$$

Mặt khác $(1+i)^{100} = [(1+i)^2]^{50} = (2i)^{50} = -2^{50}$.

Vậy $C_{100}^0 - C_{100}^2 + C_{100}^4 - C_{100}^6 + \dots - C_{100}^{98} + C_{100}^{100} = -2^{50}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 67. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z| = 5$ và $z(2+i)(1-2i)$ là một số thực. Tính $P = |a| + |b|$.

A. $P = 8$.

B. $P = 4$.

C. $P = 5$.

D. $P = 7$.

Lời giải.

Ta có

$$z(2+i)(1-2i) = (a+bi)(4-3i) = 4a+3b + (-3a+4b)i. \quad (1)$$

Do $z(2+i)(1-2i)$ là một số thực nên từ (1) suy ra $-3a+4b=0 \Leftrightarrow b = \frac{3}{4}a$. (2)

Mặt khác $|z| = 5 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 25$. (3)

Thế (2) vào (3) ta được phương trình

$$a^2 + \left(\frac{3}{4}a\right)^2 = 25 \Leftrightarrow a^2 = 16 \Leftrightarrow a = \pm 4.$$

Với $a = 4 \Rightarrow b = 3$ và $a = -4 \Rightarrow b = -3$.

Vậy $P = |a| + |b| = 3 + 4 = 7$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 68. Số phức z có phần ảo lớn nhất thỏa mãn $|z-1-i| = 1$ là

A. $z = 2 + 2i$.

B. $z = 1 + 2i$.

C. $z = 2i$.

D. $z = -1 + 3i$.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, theo bài ra ta có

$$|(x-1) + (y-1)i| = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1.$$

Mà $(x-1)^2 \geq 0$ nên $(y-1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq y-1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 2$.

Vậy phần ảo của z có giá trị lớn nhất bằng 2.

Dấu bằng xảy ra khi $x = 1; y = 2$, hay $z = 1 + 2i$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 69. Gọi (C) là tập hợp các điểm trên mặt phẳng biểu diễn số phức $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $|z - 1| = 1$ và N là điểm biểu diễn số phức $z_0 = 1 - i$. Tìm điểm M thuộc (C) sao cho MN có độ dài lớn nhất

A. $M(1; 1)$.

B. $M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

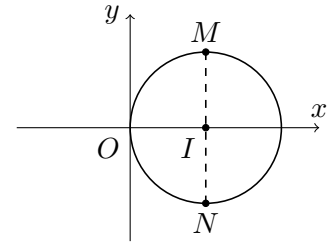
C. $M(1; 0)$.

D. $M(0; 0)$.

Lời giải.

Ta có $|z - 1| = 1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1$ nên tập hợp điểm (C) biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(1; 0)$, bán kính $R = 1$.

Điểm N có tọa độ là $N(1; -1)$ cũng thuộc (C) nên MN có độ dài lớn nhất khi MN là đường kính của đường tròn (C) hay I là trung điểm của MN nên tọa độ M là $M(1; 1)$.



Chọn đáp án **A**

□

Câu 70. Cho số phức z có điểm biểu diễn là $M(x; y)$ và thỏa mãn $|z - 2 + 3i| = |z - 2 - 3i|$. Biết $|z - 1 - 2i| + |z - 7 + 4i| = 6\sqrt{2}$, khi đó x thuộc khoảng

A. $(0; 2)$.

B. $(1; 3)$.

C. $(4; 8)$.

D. $(2; 4)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} |z - 2 + 3i| = |z - 2 - 3i| &\Leftrightarrow |x - 2 + (y + 3)i| = |x - 2 + (y - 3)i| \\ &\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = (x - 2)^2 + (y - 3)^2 \\ &\Leftrightarrow y = 0. \end{aligned}$$

Mặt khác, gọi $A(1; 2)$, $B(7; -4) \Rightarrow AB = 6\sqrt{2}$. Ta có

$$|z - 1 - 2i| + |z - 7 + 4i| = MA + MB \leq AB = 6\sqrt{2}.$$

Dấu “=” xảy ra khi M nằm trên đoạn AB . Khi đó,

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}, \text{ với } k \in [0; 1] \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 6k \\ 0 - 2 = -6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ k = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 71. Tìm số phức z thỏa mãn $|z - 3| = |z - 1|$ và $(z + 2)(\bar{z} - i)$ là số thực.

A. $z = 2$.

B. $z = -2 + 2i$.

C. $z = 2 - 2i$.

D. Không có z .

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi$, khi đó ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} |z - 3| = |z - 1| \\ \text{Im}[(z + 2)(\bar{z} - i)] = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} |z - 3|^2 = |z - 1|^2 \\ \text{Im}[(z + 2)(\bar{z} - i)] = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |(a + bi) - 3|^2 = |(a + bi) - 1|^2 \\ \text{Im}[(a + bi + 2)(\overline{a + bi} - i)] = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |(a + bi) - 3|^2 = |a - 1 + bi|^2 \\ \text{Im}[(a + 2 + bi)(a - (b + 1)i)] = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (a - 3)^2 + b^2 = (a - 1)^2 + b^2 \\ \text{Im}[(a + 2)a + b(b + 1) - i((a + 2)(b + 1) - ab)] = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 6a + 9 = a^2 - 2a + 1 \\ a + 2b + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy $z = a + bi = 2 - 2i$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 72. Gọi S là tập hợp các số thực m sao cho với mỗi $m \in S$ có đúng một số phức thỏa mãn $|z - m| = 4$ và $\frac{z}{z-6}$ là số thuần ảo. Tính tổng của các phần tử của tập S .

A. 0.

B. 12.

C. 6.

D. 14.

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), $z \neq 6$. $M(a; b)$ là điểm biểu diễn z . Khi đó ta có

$$\frac{z}{z-6} = \frac{a+bi}{(a+bi)-6} = \frac{(a+bi)(a-6-bi)}{(a-6+bi)(a-6-bi)} = \frac{a(a-6)+b^2+i(b(a-6)-ab)}{(a-6)^2+b^2}.$$

Để $\frac{z}{z-6}$ là số thuần ảo thì ta phải có $\begin{cases} a(a-6)+b^2=0 & (1) \\ (a-6)^2+b^2 \neq 0 \end{cases}$.

Suy ra điểm M thuộc đường tròn tâm $I(3; 0)$, bán kính $R=3$.

Từ $|z-m|=4 \Leftrightarrow |(a+bi)-m|=4 \Leftrightarrow (a-m)^2+b^2=16$ (2) suy ra điểm M thuộc đường tròn tâm $I'(m; 0)$, bán kính $R'=4$.

Để có đúng 1 điểm M thỏa mãn thì 2 đường tròn $(I; R)$ và $(I'; R')$ phải có 1 điểm chung duy nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases} II' = R + R' \\ II' = |R - R'| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m-3|=7 \\ |m-3|=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=10 \\ m=-4 \\ m=4 \\ m=2 \end{cases}.$$

Khi $m=10, m=2$ thì hai đường tròn tiếp xúc tại điểm $(6; 0)$, do vậy các trường hợp này bị loại.

Vậy tổng các phần tử của S là $4 - 4 = 0$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 73. Cho M là tập hợp các số phức z thỏa $|2z-i|=|2+iz|$. Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc tập hợp M sao cho $|z_1-z_2|=1$. Tính giá trị của biểu thức $P=|z_1+z_2|$.

A. $P=\sqrt{2}$.B. $P=\sqrt{3}$.C. $P=\frac{\sqrt{3}}{2}$.D. $P=2$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned} |2z-i| &= |2+iz| \\ \Leftrightarrow |2x+(2y-1)i| &= |2-y+xi| \\ \Leftrightarrow x^2+y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn (C) có tâm O và bán kính $R=1$.

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2 . Ta có A, B thuộc (C) và

$$|z_1-z_2|=1 \Leftrightarrow AB=1. \text{ Suy ra } \triangle OAB \text{ đều nên } P=|z_1+z_2| = |\vec{OA}+\vec{OB}| = 2|\vec{OH}| = \sqrt{3}.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 74. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $(1+i)z+\bar{z}$ là số thuần ảo và $|z-2i|=1$.

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. Vô số.

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi$ trong đó $a, b \in \mathbb{R}$, ta có $\bar{z} = a - bi$.

Số phức $(1+i)z+\bar{z} = (1+i)(a+bi) + (a-bi) = 2a-b+ai$ là số thuần ảo khi chỉ khi $2a-b=0 \Leftrightarrow b=2a$.

Mặt khác

$$\begin{aligned} |z-2i|=1 &\Leftrightarrow |a+bi-2i|=1 \Leftrightarrow a^2+(2a-2)^2=1 \\ &\Leftrightarrow 5a^2-8a+3=0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \Rightarrow b=2 \Rightarrow z=1+2i \\ a=\frac{3}{5} \Rightarrow b=\frac{6}{5} \Rightarrow z=\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy có 2 số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 75. Cho số phức w thỏa mãn $|w+2| \leq 1$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\bar{z}=2w+1-i$ là một hình tròn. Tính diện tích S của hình tròn đó.

A. $S = 2\pi$.

B. $S = 4\pi$.

C. 9π .

D. π .

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có

$$\bar{z} = 2w + 1 - i \Leftrightarrow x - yi = 2w + 1 - i \Leftrightarrow w = \frac{x-1}{2} - \frac{y-1}{2}i.$$

Lại có $|w + 2| \leq 1$ nên

$$\left(\frac{x-1}{2} + 2\right)^2 + \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 \leq 1 \Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-1)^2 = 4.$$

Nên tập hợp điểm biểu diễn z là hình tròn bán kính $R = 2$ có diện tích $S = 4\pi$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 76. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 3 + 2i = (|z| + 1)(1 + i)$ và $|z| > 1$. Tính $P = a - b$.

A. $P = -1$.

B. $P = -5$.

C. $P = 3$.

D. $P = 7$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} z + 3 + 2i &= (|z| + 1)(1 + i) \Leftrightarrow a + bi + 3 + 2i = (\sqrt{a^2 + b^2} + 1)(1 + i) \\ \Leftrightarrow a + bi + 3 + 2i &= \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b^2} \cdot i + 1 + i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a + 3 = \sqrt{a^2 + b^2} + 1 \\ b + 2 = \sqrt{a^2 + b^2} + 1 \end{cases} &\Rightarrow a - b = -1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 77. Xét các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 3 + 2i| = 5$. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = z + 1 - i$ là

A. Đường tròn tâm $I(-4; 3)$, bán kính $R = 5$.

B. Đường tròn tâm $I(3; -2)$, bán kính $R = 5$.

C. Đường tròn tâm $I(4; -3)$, bán kính $R = 5$.

D. Đường tròn tâm $I(-2; 1)$, bán kính $R = 5$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} w - 4 + 3i &= z - 3 + 2i \\ \Rightarrow |w - 4 + 3i| &= |z - 3 + 2i| = 5. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(4; -3)$, bán kính $R = 5$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 78. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 2$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (1 - i)\bar{z} + 2i$ là

A. một đường tròn.

B. một đường thẳng.

C. một elip.

D. một hypebol hoặc parabol.

Lời giải.

Ta có $(1 - i)\bar{z} = w - 2i \Rightarrow |w - 2i| = |(1 - i)\bar{z}| = 2\sqrt{2}$, suy ra tập hợp biểu diễn các số phức w là một đường tròn.

Chọn đáp án **A** □

Câu 79. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 1$, $|z_2| = 2$ và $|z_1 + z_2| = 3$. Giá trị của $|z_1 - z_2|$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. một giá trị khác.

Lời giải.

Đặt $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$. Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} a_1^2 + b_1^2 = 1 \\ a_2^2 + b_2^2 = 4 \\ (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + b_1^2 = 1 \\ a_2^2 + b_2^2 = 4 \\ 2a_1a_2 + 2b_1b_2 = 4 \end{cases}$$

Suy ra $|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} = 1$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 80. Cho số phức $z \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $(2+i)|z| = \frac{\sqrt{17}}{z} + 1 - 3i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $2 < |z| < 3$. B. $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$. C. $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{4}$. D. $0 < |z| < \frac{1}{2}$.

🔗 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}(2+i)|z| &= \frac{\sqrt{17}}{z} + 1 - 3i \\ \Leftrightarrow (2|z| - 1) + (|z| + 3)i &= \frac{\sqrt{17}}{z} \\ \Leftrightarrow \sqrt{(2|z| - 1)^2 + (|z| + 3)^2} &= \frac{\sqrt{17}}{|z|} \\ \Leftrightarrow (2|z| - 1)^2 + (|z| + 3)^2 &= \frac{17}{|z|^2} \\ \Leftrightarrow 5|z|^4 + 2|z|^3 + 10|z|^2 - 17 &= 0 \\ \Leftrightarrow |z| &= 1.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 81. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn: $|z - \bar{z} - 2i| = |z + \bar{z} - 6|$ và $|z - 6 - 2i| = 2\sqrt{2}$.

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

🔗 **Lời giải.**

Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}&\begin{cases} |z - \bar{z} - 2i| = |z + \bar{z} - 6| \\ |z - 6 - 2i| = 2\sqrt{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} |x + yi - (x - yi) - 2i| = |x + yi + (x - yi) - 6| \\ |x + yi - 6 - 2i| = 2\sqrt{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} |(2y - 2)i| = |2x - 6| \\ |(x - 6) + (y - 2)i| = 2\sqrt{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \sqrt{(2y - 2)^2} = \sqrt{(2x - 6)^2} \\ (x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 8 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -x + 4 \\ (x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 8 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} y = x - 2 \\ (x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 8 \\ y = -x + 4 \\ (x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 8 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x = 5 + \sqrt{3}; y = 3 + \sqrt{3} \\ x = 5 - \sqrt{3}; y = 3 - \sqrt{3} \\ x = 4; y = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 82. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z + 1 - 2i| = |z|$. Biết rằng tập hợp các điểm M là một đường thẳng, tìm phương trình đường thẳng đó.

- A. $2x + 4y + 5 = 0$. B. $2x - 4y + 5 = 0$. C. $2x - 4y + 3 = 0$. D. $2x - y + 1 = 0$.

🔗 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}
 & |z + 1 - 2i| = |z| \\
 \Leftrightarrow & |x + yi + 1 - 2i| = |x + yi| \\
 \Leftrightarrow & (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = x^2 + y^2 \\
 \Leftrightarrow & x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + y^2 \\
 \Leftrightarrow & 2x - 4y + 5 = 0.
 \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng có phương trình $2x - 4y + 5 = 0$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 83. Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 2i(\bar{z}) = 3(1 + i)$. Tính giá trị của biểu thức $P = 4x + 5y$.

A. $P = 12$.

B. $P = 8$.

C. $P = 9$.

D. $P = 21$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 & z + 2i(\bar{z}) = 3(1 + i) \\
 \Leftrightarrow & x + yi + 2i(x - yi) = 3(1 + i) \\
 \Leftrightarrow & x + yi + 2xi + 2y = 3 + 3i \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy $P = 4x + 5y = 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 9$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 84. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 2 + i - |z|(1 + i) = 0$ và $|z| > 1$. Tính $P = a + b$.

A. $P = -1$.

B. $P = -5$.

C. $P = 3$.

D. $P = 7$.

Lời giải.

Thay $z = a + bi$ vào phương trình ta có

$$\begin{aligned}
 & z + 2 + i - |z|(1 + i) = 0 \\
 \Leftrightarrow & a + bi + 2 + i - \sqrt{a^2 + b^2}(1 + i) = 0 \\
 \Leftrightarrow & (a + 2 - \sqrt{a^2 + b^2}) + i(b + 1 - \sqrt{a^2 + b^2}) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} a + 2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ b + 1 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 1 \\ b + 1 = \sqrt{2b^2 - 2b + 1} \end{cases} \\
 \Rightarrow & b^2 - 4b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \Rightarrow a = -1 \text{ (loại)} \\ b = 4 \Rightarrow a = 3 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy $P = 3 + 4 = 7$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 85. Tìm số các số phức thỏa mãn điều kiện $z^2 + 2\bar{z} = 0$.

A. 0.

B. 4.

C. 1.

D. 2.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi đó

$$\begin{aligned} z^2 + 2\bar{z} = 0 &\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi + 2(x - yi) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 0 \\ 2xy - 2y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 0 \\ 2y(x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 0 \\ \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 2x = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \begin{cases} x = 1 \\ y^2 = 3 \end{cases} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt{3} \end{cases}; \begin{cases} x = 1 \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy có 4 số phức thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án **B** □

Câu 86. Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là các nghiệm phức của phương trình $z^4 + z^2 - 6 = 0$. Tính $T = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2$.

- A. $T = 2$. B. $T = 14$. C. $T = 4$. D. $T = -2$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } z^4 + z^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = 2 \\ z^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\sqrt{2} \\ z = \sqrt{2} \\ z = -\sqrt{3}i \\ z = \sqrt{3}i \end{cases}$$

Do đó, phương trình đã cho có 4 nghiệm phức là $z_1 = -\sqrt{2}, z_2 = \sqrt{2}, z_3 = -\sqrt{3}i, z_4 = \sqrt{3}i$.

Vậy $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = -2$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 87. Các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $z \cdot \bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 5 + 12i$ thuộc đường nào trong các đường cho bởi phương trình sau đây?

- A. $y = 2x^2$. B. $(x - 1)^2 + y^2 = 5$. C. $y = 2x$. D. $y = -2x$.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Ta được

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} + 3(z - \bar{z}) &= 5 + 12i \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6yi &= 5 + 12i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 6y = 12 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Do đó, có hai điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán là $A(1; 2)$ và $B(-1; 2)$.

Dễ thấy A, B chỉ thuộc đường $y = 2x^2$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 88. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1 + 2i| \leq 2$. Trong hệ tọa độ Oxy , tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = 3z - 2 + i$ là hình tròn có diện tích bằng

- A. 25π . B. 16π . C. 36π . D. 9π .

Lời giải.

Giả sử số phức $w = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Gọi M là điểm biểu diễn số phức w suy ra điểm $M(x; y)$. Do giả thiết ta có

$$w = 3z - 2 + i \Leftrightarrow x + yi = 3z - 2 + i \Leftrightarrow 3z = x + 2 + (y - 1)i \Leftrightarrow z = \frac{x + 2}{3} + \left(\frac{y - 1}{3}\right)i$$

Khi đó $z - 1 + 2i = \frac{x + 2}{3} + \left(\frac{y - 1}{3}\right)i - 1 + 2i = \frac{x - 1}{3} + \left(\frac{y + 5}{3}\right)i$ suy ra

$$|z - 1 + 2i| \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{x - 1}{3}\right)^2 + \left(\frac{y + 5}{3}\right)^2} \leq 2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 5)^2 \leq 36$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w nằm trong đường tròn $(C) : (x-1)^2 + (y+5)^2 = 36$. Gọi R là bán kính đường tròn (C) suy ra $R = 6$ nên diện tích hình tròn bằng 36π .

Chọn đáp án **C**

□

Câu 89. Cho số phức $z = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{2018}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $z = -2^{1009}$.

B. $z = -2^{1009} + (2^{1009} + 1)i$.

C. $z = 2^{1009} + (2^{1009} + 1)i$.

D. $z = 2^{1009} + 2^{1009}i$.

Lời giải.

Ta có

$$1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{2018} = \frac{1 - (1+i)^{2019}}{1 - (1+i)} = \frac{1 - (1+i)^{2019}}{-i} = i - i \cdot (1+i)^{2019}$$

Vì $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$ suy ra $(1+i)^8 = 2^4$.

Mà $(1+i)^{2019} = [(1+i)^8]^{252} \cdot (1+i)^3$ suy ra $i \cdot (1+i)^{2019} = (2^4)^{252} \cdot 2i^2 \cdot (1+i) = -2^{1009}(1+i)$. Do đó $z = i + 2^{1009}(1+i) = 2^{1009} + (1 + 2^{1009})i$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 90. Cho số phức $z = a + bi$ thỏa mãn $z(1+2i)^2 + \bar{z} = -20 + 4i$. Giá trị của $a^2 - b^2$ bằng

A. 16.

B. 1.

C. 5.

D. 7.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & z(1+2i)^2 + \bar{z} = -20 + 4i \\ \Leftrightarrow & (a+bi)(-3+4i) + (a-bi) = -20 + 4i \\ \Leftrightarrow & (-3a-4b) + (4a-3b)i + (a-bi) = -20 + 4i \\ \Leftrightarrow & (-2a-4b) + (4a-4b)i = -20 + 4i \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -2a-4b = -20 \\ 4a-4b = 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a = 4 \\ b = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 91. Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 phân biệt thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$ và $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \bar{z}_3$. Biết z_1, z_2, z_3 lần lượt được biểu diễn bởi các điểm A, B, C trên mặt phẳng phức. Tính góc $\widehat{ACB}$.

A. 150° .

B. 90° .

C. 120° .

D. 45° .

Lời giải.

Viết $z_1 = a_1 + b_1i, z_2 = a_2 + b_2i, z_3 = a_3 + b_3i, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$. Khi đó, ta có hệ:

$$\begin{cases} a_1^2 + b_1^2 = 9 & (1) \\ a_2^2 + b_2^2 = 9 & (2) \\ a_3^2 + b_3^2 = 9 & (3) \\ a_1 + a_2 = a_3 & (4) \\ -b_1 - b_2 = -b_3 & (5). \end{cases}$$

Thế (4) và (5) vào (3), ta có $(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 = 9$ (6).

Thế (1) và (2) vào (6), ta có $2a_1a_2 + 2b_1b_2 = -9$.

$\overrightarrow{CA} = (a_1 - a_3; b_1 - b_3), \overrightarrow{CB} = (a_2 - a_3; b_2 - b_3)$.

Suy ra

$$\begin{aligned}\cos \widehat{ACB} &= \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|} = \frac{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3) + (b_1 - b_3)(b_2 - b_3)}{\sqrt{(a_1 - a_3)^2 + (b_1 - b_3)^2} \sqrt{(a_2 - a_3)^2 + (b_2 - b_3)^2}} \\ &= \frac{-a_2(-a_1) + (-b_2)(-b_1)}{\sqrt{(-a_2)^2 + (-b_2)^2} \sqrt{(-a_1)^2 + (-b_1)^2}} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2} \sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \\ &= \frac{9}{\sqrt{9} \sqrt{9}} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Vậy $\widehat{ACB} = 120^\circ$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 92. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 2| = |i - z|$ là đường thẳng có phương trình nào sau đây?

- A. $4x - 2y + 3 = 0$. B. $4x + 2y - 3 = 0$. C. $4x - 2y - 3 = 0$. D. $4x + 2y + 3 = 0$.

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Từ giả thiết ta được

$$(a + 2)^2 + b^2 = a^2 + (b - 1)^2 \Leftrightarrow 4a + 2b + 3 = 0.$$

Vậy các điểm biểu diễn số phức z nằm trên đường thẳng có phương trình

$$4x + 2y + 3 = 0.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 93. Tính $S = 1 + i + i^2 + \dots + i^{2017} + i^{2018}$.

- A. $S = -i$. B. $S = 1 + i$. C. $S = 1 - i$. D. $S = i$.

Lời giải.

Ta có $(i)^{4n} = 1$, $(i)^{4n+1} = i$, $(i)^{4n+2} = -1$, $(i)^{4n+3} = -i$. Do đó

$$S = 1 + i + i^2 + \dots + i^{2017} + i^{2018} = \frac{1 - i^{2019}}{1 - i} = \frac{1 + i}{1 - i} = i.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 94. Cho số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa $z + 2i + 1 = |z|(1 + i)$ và $|z| > 1$. Tính $P = a - b$.

- A. $P = -3$. B. $P = 3$. C. $P = -1$. D. $P = 1$.

Lời giải.

Từ giả thiết $z + 2i + 1 = |z|(1 + i)$ suy ra

$$(a + 1) + (b + 2)i = \sqrt{a^2 + b^2} + i \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 1 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ b + 2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -1 \\ a = b + 1 \\ (b + 2)^2 = (b + 1)^2 + b^2 \quad (1). \end{cases}$$

$$\text{Từ (1)} \Leftrightarrow b^2 - 2b - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ b = 3 \end{cases}$$

Khi $b = -1 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow |z| = 1$. Trường hợp này loại vì $|z| > 1$.

Khi $b = 3 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow |z| = 5 > 1$. Trường hợp này nhận, vậy $P = a - b = 1$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 95. Tìm các số phức z thỏa $2iz + 3\bar{z} = 5$.

- A. $z = -3 - 2i$. B. $z = 3 - 2i$. C. $z = -3 + 2i$. D. $z = 3 + 2i$.

Lời giải.

Gọi số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Từ giả thiết, ta có

$$2i(a + bi) + 3(a - bi) = 5 \Leftrightarrow (3a - 2b) + (2a - 3b)i = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2b = 5 \\ 2a - 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow z = 3 + 2i.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 96. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1 - 2i| + |\bar{z} - 3| = |\sqrt{7} + 3i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = |z - 2 - i|$.

A. $P = 2$.B. $P = \sqrt{2}$.C. $P = \sqrt{3}$.D. $P = 3$.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
 4 = |\sqrt{7} + 3i| &= |z - 1 - 2i| + |\bar{z} - 3| \\
 &= \sqrt{(a-1)^2 + (b-2)^2} + \sqrt{(a-3)^2 + b^2} \\
 &= \frac{1}{2} \left(2\sqrt{(a-1)^2 + (b-2)^2} \right) + \frac{1}{2} \left(2\sqrt{(a-3)^2 + b^2} \right) \\
 &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{4 + (a-1)^2 + (b-2)^2}{2} + \frac{4 + (a-3)^2 + b^2}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} [(a-2)^2 + (b-1)^2 + 6] = \frac{1}{2} (P^2 + 6) \\
 &\Rightarrow P \geq \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2 = \sqrt{(a-1)^2 + (b-2)^2} \\ 2 = \sqrt{(a-3)^2 + b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = (a-1)^2 + (b-2)^2 \\ (a-1)^2 + (b-2)^2 = (a-3)^2 + b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$$

Ta cũng có thể tìm giá trị lớn nhất của P . Ta có

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 = (ad - bc)^2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \geq ac + bd.$$

Ta đi chứng minh bất đẳng thức

$$\begin{aligned}
 \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} &\geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \\
 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} &\geq (a+c)^2 + (b+d)^2 \\
 \Leftrightarrow \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} &\geq ac + bd \text{ (luôn đúng, xem chứng minh trên).}
 \end{aligned}$$

Gọi $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned}
 4 = |\sqrt{7} + 3i| &= |z - 1 - 2i| + |\bar{z} - 3| \\
 &= |z - 1 - 2i| + |z - 3| \\
 &\geq \sqrt{(a-1)^2 + (b-2)^2} + \sqrt{(a-3)^2 + b^2} \\
 &\geq \sqrt{(a-1+a-3)^2 + (b-2+b)^2} \\
 &= 2\sqrt{(a-2)^2 + (b-1)^2} = 2|z - 2 - i| = 2P.
 \end{aligned}$$

Từ đây suy ra $P \leq 2$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 97. Cho các số phức z thỏa mãn $|z| = 12$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (8 - 6i)z + 2i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r = 120$.B. $r = 122$.C. $r = 12$.D. $r = 24\sqrt{7}$.

Lời giải.

Có $w = (8 - 6i)z + 2i \Leftrightarrow w - 2i = (8 - 6i)z \Rightarrow |w - 2i| = |8 - 6i| \cdot |z| = 10 \cdot 12 = 120$.

Từ đó ta suy ra tập hợp điểm biểu diễn w là đường tròn tâm $I(0; 2)$, bán kính $R = 120$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 98. Với x, y là hai số thực thỏa mãn $x(3 + 5i) + y(1 - 2i)^3 = 9 + 14i$. Giá trị của $2x - 3y$ bằng

A. $\frac{205}{109}$.B. $\frac{172}{61}$.C. $\frac{353}{61}$.D. $\frac{94}{109}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
x(3+5i) + y(1-2i)^3 &= 9+14i \Leftrightarrow x(3+5i) + y(-11+2i) = 9+14i \\
&\Leftrightarrow (3x-11y) + i(5x+2y) = 9+14i \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-11y=9 \\ 5x+2y=14 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{172}{61} \\ y=-\frac{3}{61} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } 2x-3y = 2 \cdot \frac{172}{61} - 3 \cdot \frac{-3}{61} = \frac{353}{61}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 99. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{5}$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (2+i)z - 3i$ là một đường tròn có bán kính bằng r . Tìm bán kính r .

A. $r = \sqrt{5}$.

B. $r = 5$.

C. $r = \sqrt{10}$.

D. $r = 25$.

Lời giải.

Biến đổi $w = (2+i)z - 3i \Leftrightarrow w + 3i = (2+i)z$.

Lấy mô-đun 2 vế, ta được $|w+3i| = |(2+i)z| = |2+i| \cdot |z| = 5$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(0; -3)$ và bán kính $r = 5$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 100. Có tất cả bao nhiêu số phức z thỏa $|z+3-i| = 2\sqrt{2}$ và z^2 thuần ảo?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \text{ thuần ảo} \Rightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ hay } x = -y.$$

$$\text{Với } y = x \Rightarrow |z+3-i| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow |x+xi+3-i| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow (x+3)^2 + (x-1)^2 = 8 \Leftrightarrow x = -1.$$

$$\text{Với } y = -x$$

$$\Rightarrow |z+3-i| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow |x-xi+3-i| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow (x+3)^2 + (x+1)^2 = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - \sqrt{3} \\ x = -2 + \sqrt{3} \end{cases}.$$

Vậy có ba số phức z thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 101. Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 2 - i - |z|(1-i) = 0$. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm M là điểm biểu diễn của số phức z . Hỏi M thuộc đường thẳng nào sau đây?

A. $x - y + 5 = 0$.

B. $x - y + 2 = 0$.

C. $x + y - 2 = 0$.

D. $x + y + 1 = 0$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } z + 2 - i - |z|(1-i) = 0 \Leftrightarrow x + yi + 2 - i - (1-i)\sqrt{x^2+y^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 2 - \sqrt{x^2+y^2} + (y-1+\sqrt{x^2+y^2})i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 - \sqrt{x^2+y^2} = 0 \\ y - 1 + \sqrt{x^2+y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow x + 2 - \sqrt{x^2+y^2} + y - 1 + \sqrt{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow x + y + 1 = 0.$$

Do đó M thuộc đường thẳng $x + y + 1 = 0$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 102. Cho các số phức z thỏa mãn $|z-i| = 5$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = iz + 1 - i$ là đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

A. $r = 20$.

B. $r = 5$.

C. $r = 22$.

D. $r = 4$.

Lời giải.

Ta có $w = iz + 1 - i \Leftrightarrow w + i = i(z-i)$. Suy ra $|w+i| = |i||z-i| = 5$.

Vậy tập hợp những điểm biểu diễn cho số phức w là đường tròn tâm $I(0; -1)$, bán kính $r = 5$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 103. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|2z-i| = |iz+2|$, biết $|z_1-z_2| = \sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức $A = |z_1 - 2z_2|$.

A. $A = \sqrt{5}$. B. $A = \frac{\sqrt{5}}{2}$. C. $A = \sqrt{3}$. D. $A = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

🔗 **Lời giải.**

Gọi $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i$ với $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$. Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} |2x_1 + (2y_1 - 1)i| = |2 - y_1 + x_1i| \\ |2x_2 + (2y_2 - 1)i| = |2 - y_2 + x_2i| \\ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = 1 \\ x_2^2 + y_2^2 = 1 \\ x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \end{cases}$$

Do đó, $A^2 = |z_1 - 2z_2|^2 = (x_1 - 2x_2)^2 + (y_1 - 2y_2)^2 = (x_1^2 + y_1^2) + 4(x_2^2 + y_2^2) - 4(x_1x_2 + y_1y_2) = 5$. Khi đó $A = \sqrt{5}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 104. Cho số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z - (2 + 3i)\bar{z} = -1 - 3i$. Tính giá trị của biểu thức $S = ab + 1$.

A. $S = 1$. B. $S = -1$. C. $S = -2$. D. $S = 0$.

🔗 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} z - (2 + 3i)\bar{z} &= -1 - 3i \\ \Leftrightarrow (a + bi) - (2 + 3i)(a - bi) &= -1 - 3i \\ \Leftrightarrow a + bi - 2a + 2bi - 3ai - 3b &= -1 - 3i \\ \Leftrightarrow (-a - 3b) + (3b - 3a) &= -1 - 3i \Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b = 1 \\ a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $S = ab + 1 = 1$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 105. Gọi z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 5$ và $|z_1 - z_2| = 8$. Tìm mô-đun của số phức $w = z_1 + z_2 - 2 + 4i$.

A. $|w| = 13$. B. $|w| = 10$. C. $|w| = 16$. D. $|w| = 6$.

🔗 **Lời giải.**

Gọi $I(1; -2)$ là điểm biểu diễn số phức $1 - 2i$ và A, B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 .

Vì $|z - 1 + 2i| = 5$ nên A, B thuộc $(I; 5)$ và $|z_1 - z_2| = 8$ nên $AB = 8$.

Ta có $|w| = |\vec{IA} + \vec{IB}| = 2IH$ với H là trung điểm AB .

Mà $IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

Vậy $|w| = 6$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 106. Gọi (H) là tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa $1 \leq |z - 1| \leq 2$ trong mặt phẳng phức. Tính diện tích hình (H) .

A. 2π . B. 3π . C. 4π . D. 5π .

🔗 **Lời giải.**

Giả sử $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, khi đó: $1 \leq |z - 1| \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq (x - 1)^2 + y^2 \leq 4$, suy ra điểm biểu diễn số phức z nằm trong hình vành khuyên giới hạn bởi 2 hình tròn đồng tâm $I(1; 0)$ có bán kính lần lượt là $R_1 = 1$ và $R_2 = 2$. Từ đó suy ra diện tích hình (H) là: $S = \pi R_2^2 - \pi R_1^2 = 3\pi$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 107. Cho số phức $z = a + bi$ (a, b là các số thực) thỏa mãn $z \cdot |z| + 2z + i = 0$. Tính giá trị của biểu thức $T = a + b^2$

A. $T = 4\sqrt{3} - 2$. B. $T = 3 + 2\sqrt{2}$. C. $T = 3 - 2\sqrt{2}$. D. $T = 4 + 2\sqrt{3}$.

🔗 **Lời giải.**

Ta có $(a + bi) \cdot \sqrt{a^2 + b^2} + 2(a + bi) + i = 0$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a \cdot \sqrt{a^2 + b^2} + 2a = 0 \\ b \cdot \sqrt{a^2 + b^2} + 2b + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \cdot |b| + 2b + 1 = 0 (*) \end{cases}$$

Với $b \geq 0$ thì $(*) \Leftrightarrow b^2 + 2b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = -1$ (loại)

Với $b < 0$ thì $(*) \Leftrightarrow -b^2 + 2b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = 1 \pm \sqrt{2}$. Nhận giá trị $b = 1 - \sqrt{2}$.

Vậy $T = a + b^2 = 3 - 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 108. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z - 1 - 3i| = 3\sqrt{2}$ và $(z + 2i)^2$ là số thuần ảo?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Ta có $|z - 1 - 3i| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 3)^2 = 18$. (1)

Mặt khác $(z + 2i)^2 = (a + (b + 2)i)^2 = a^2 - (b + 2)^2 + 2a(b + 2)i$ là số thuần ảo nên $\begin{cases} a = b + 2 \\ a = -b - 2 \end{cases}$.

+ Nếu $a = b + 2$ thế vào phương trình (1) ta có $(b + 1)^2 + (b - 3)^2 = 18 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 + \sqrt{5} \Rightarrow a = 3 + \sqrt{5} \\ b = 1 - \sqrt{5} \Rightarrow a = 3 - \sqrt{5} \end{cases}$.

+ Nếu $a = -b - 2$ thế vào phương trình (1) ta có $(b + 3)^2 + (b - 3)^2 = 18 \Leftrightarrow b = 0 \Rightarrow a = -2$.

Vậy có 3 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 109. Phương trình $z^2 + |z| = 0$ có mấy nghiệm trong tập số phức?

A. Có 2 nghiệm.

B. Có 3 nghiệm.

C. Có 1 nghiệm.

D. Có 4 nghiệm.

Lời giải.

Giả sử số phức z cần tìm có dạng $a + bi$, khi đó phương trình đã cho trở thành

$$a^2 + 2abi - b^2 + \sqrt{a^2 + b^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2 + \sqrt{a^2 + b^2}) + 2abi = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \\ 2ab = 0 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta thu được tập nghiệm là $(a; b) = \{(0; 0), (0; 1), (0; -1)\}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 110. Cho số phức z thỏa mãn các điều kiện $|z - 2| = |\bar{z}|$ và $(z - 3)(\bar{z} + 1 - 4i) \in \mathbb{R}$. Tìm phần ảo của số phức z .

A. -2.

B. -1.

C. 2.

D. 1.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Từ $|z - 2| = |\bar{z}|$ ta suy ra $(x - 2)^2 + y^2 = x^2 + y^2$, hay $x = 1$. Khi đó, $(z - 3)(\bar{z} + 1 - 4i) = (-2 + yi)(2 - (y + 4)i) = y^2 + 4y - 4 + 4(y + 2)i \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = -2$. Vậy, phần ảo của z bằng -2.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 111. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3| = 1$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w = (1 - \sqrt{3}i)z + 1 - 2i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r = 2$.

B. $r = 1$.

C. $r = 4$.

D. $r = \sqrt{2}$.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta suy ra $\frac{w - 1 + 2i}{1 - \sqrt{3}i} - 3 = z - 3$, hay $w - 1 + 2i - 3(1 - \sqrt{3}i) = (z - 3)(1 - \sqrt{3}i)$. Lấy mô-đun hai vế, ta suy ra $|w - 4 + (2 + 3\sqrt{3})i| = |(z - 3)(1 - \sqrt{3}i)| = 2$. Vậy, $r = 2$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 112. Cho A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $4 - 3i$, $(1 + 2i)i$ và $\frac{1}{i}$. Số phức có điểm biểu diễn D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành là

A. $-6 - 4i$.

B. $-6 + 3i$.

C. $6 - 5i$.

D. $4 - 2i$.

Lời giải.

Ta có $(1 + 2i)i = -2 + i$, $\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$.

Tọa độ của các điểm A, B, C là $A(4; -3)$, $B(-2; 1)$, $C(0; -1)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 4 = 0 + 2 \\ y_D + 3 = -1 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 6 \\ y_D = -5 \end{cases}.$$

Vậy D là điểm biểu diễn của số phức $z = 6 - 5i$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 113. Rút gọn biểu thức $M = (1 - i)^{2018}$ ta được

- A. $M = 2^{1009}$. B. $M = -2^{1009}$. C. $M = 2^{1009}i$. D. $M = -2^{1009}i$.

Lời giải.

Ta có $(1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i \Rightarrow (1 - i)^4 = (-2i)^2 = 2^2$. Từ đó

$$M = (1 - i)^{2018} = (1 - i)^{4 \cdot 504 + 2} = [(1 - i)^4]^{504} \cdot (1 - i)^2 = (2^2)^{504} \cdot (-2i) = -2^{1009}i.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 114. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2|z - i| = |z - \bar{z} + 2i|$ là

- A. Một đường thẳng. B. Một đường tròn. C. Một parabol. D. Một điểm.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có

$$\begin{aligned} 2|z - i| &= |z - \bar{z} + 2i| \\ \Leftrightarrow 2|x + (y - 1)i| &= |(2y + 2)i| \\ \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 &= (y + 1)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 &= y^2 + 2y + 1 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{4}x^2 \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một parabol.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 115. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $z^2 = |z|^2 + \bar{z}$?

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Ta có

$$\begin{aligned} z^2 = |z|^2 + \bar{z} &\Leftrightarrow (a + bi)^2 = a^2 + b^2 + a - bi \\ &\Leftrightarrow 2abi - b^2 = b^2 + a - bi \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2ab = -b \\ -b^2 = b^2 + a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \text{ hoặc } a = -\frac{1}{2} \\ 2b^2 + a = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{— } b = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow z = 0.$$

$$\text{— } a = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow z = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i.$$

Vậy có 3 số phức thỏa mãn.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 116. Số nguyên dương n thỏa mãn hệ thức: $C_{2n}^0 - C_{2n}^2 + C_{2n}^4 - C_{2n}^6 + C_{2n}^8 - C_{2n}^{10} + \dots + (-1)^n C_{2n}^{2n} = 2^{1008}$ là

- A. 2018. B. 2016. C. 1009. D. 1008.

Lời giải.

Xét khai triển

$$(1 + x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + C_{2n}^3 x^3 + C_{2n}^4 x^4 + C_{2n}^5 x^5 + \dots + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1} + C_{2n}^{2n} x^{2n}.$$

Cho $x = i$ ta có

$$\begin{aligned} (1 + i)^{2n} &= C_{2n}^0 + C_{2n}^1 i + C_{2n}^2 i^2 + C_{2n}^3 i^3 + C_{2n}^4 i^4 + C_{2n}^5 i^5 + C_{2n}^6 i^6 + \dots + C_{2n}^{2n-1} i^{2n-1} + C_{2n}^{2n} i^{2n} \\ &= C_{2n}^0 + C_{2n}^1 i - C_{2n}^2 - C_{2n}^3 i + C_{2n}^4 + C_{2n}^5 i - C_{2n}^6 + \dots - C_{2n}^{2n-1} i + (-1)^n C_{2n}^{2n} \\ &= C_{2n}^0 - C_{2n}^2 + C_{2n}^4 - C_{2n}^6 + \dots + (-1)^n C_{2n}^{2n} + i (C_{2n}^1 - C_{2n}^3 + C_{2n}^5 - \dots - C_{2n}^{2n-1}) \\ &= C_{2n}^0 - C_{2n}^2 + C_{2n}^4 - C_{2n}^6 + C_{2n}^8 - C_{2n}^{10} + \dots + (-1)^n C_{2n}^{2n}. \end{aligned}$$

Khi đó $(1+i)^{2n} = 2^{1008} \Leftrightarrow [(1+i)^2]^n = 2^{1008} \Leftrightarrow (2i)^n = 2^{1008} \Leftrightarrow 2^n i^n = 2^{1008} \Leftrightarrow n = 1008$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 117. Cho số phức $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, a > 0$) thỏa mãn $|z-1+2i| = 5$ và $z \cdot \bar{z} = 10$. Tính $P = a-b$.

A. $P = 4$.

B. $P = -4$.

C. $P = -2$.

D. $P = 2$.

Lời giải.

Gọi $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$\begin{aligned} \begin{cases} |z-1-2i| = 5 \\ z \cdot \bar{z} = 10 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + (b+2)^2 = 25 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 4b = 10 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b - 5 \\ 5b^2 - 20b + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \text{ (loại)} \\ b = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow P = 1 - 3 = -2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 118. Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $\log_{\frac{1}{3}} \frac{|z-2|+2}{4|z-2|-1} > 1$. Khi đó $(x; y)$ thỏa mãn hệ thức nào dưới đây?

A. $(x+2)^2 + y^2 > 49$. B. $(x+2)^2 + y^2 < 49$. C. $(x-2)^2 + y^2 < 49$. D. $(x-2)^2 + y^2 > 49$.

Lời giải.

Điều kiện $4|z-2|-1 > 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 > \frac{1}{16}$.

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \frac{|z-2|+2}{4|z-2|-1} > 1 &\Leftrightarrow \frac{|z-2|+2}{4|z-2|-1} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3|z-2|+6 < 4|z-2|-1 \Leftrightarrow |z-2| > 7 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 > 49. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 119. Cho số phức $u = 3+4i$. Nếu $z^2 = u$ thì ta có

A. $\begin{cases} z = 4+i \\ z = -4-i \end{cases}$

B. $\begin{cases} z = 1+2i \\ z = 2-i \end{cases}$

C. $\begin{cases} z = 2+i \\ z = -2-i \end{cases}$

D. $\begin{cases} z = 1+i \\ z = 1-i \end{cases}$

Lời giải.

$$\text{Với } z = a+bi, a, b \in \mathbb{R} \text{ ta có } z^2 = u \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi = 3 + 4i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 120. Tính môđun của số phức z thỏa mãn $3z \cdot \bar{z} + 2017(z - \bar{z}) = 48 - 2016i$

A. $|z| = 4$.

B. $|z| = \sqrt{2016}$.

C. $|z| = \sqrt{2017}$.

D. $|z| = 2$.

Lời giải.

Giả sử $z = a+bi$, từ giả thiết ta có $3|z|^2 = 48 - 2016i - 2b \cdot 2017i = 48$ (vì $|z|^2 \in \mathbb{R}$), suy ra $|z| = 4$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 121. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i| = \sqrt{5}$. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z+2|^2 - |z-i|^2$. Tính môđun của số phức $w = M+mi$.

A. $|w| = \sqrt{2315}$.

B. $|w| = \sqrt{1258}$.

C. $|w| = 3\sqrt{137}$.

D. $|w| = 2\sqrt{309}$.

Lời giải.

Đặt $z = x+yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $P = (x+2)^2 + y^2 - [x^2 + (y-1)^2] = 4x + 2y + 3$.

Mặt khác $|z-3-4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$.

Đặt $x = 3 + \sqrt{5} \sin t$ và $y = 4 + \sqrt{5} \cos t$ thỏa $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$.

Suy ra $P = 4\sqrt{5} \sin t + 2\sqrt{5} \cos t + 23$.

Xét hàm số $f(t) = 4\sqrt{5} \sin t + 2\sqrt{5} \cos t$.

Chia cả hai vế cho $\sqrt{(4\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2} = 10$ ta có

$$f(t) = 4\sqrt{5} \sin t + 2\sqrt{5} \cos t \Leftrightarrow \frac{f(t)}{10} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \sin t + \frac{\sqrt{5}}{5} \cos t.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} \cos u = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \sin u = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases} \text{ ta có}$$

$$\frac{f(t)}{10} = \cos u \sin t + \sin u \cos t \Leftrightarrow \frac{f(t)}{10} = \sin(t + u)$$

Suy ra

$$-1 \leq \frac{f(t)}{10} \leq 1 \Rightarrow -10 \leq f(t) \leq 10 \Rightarrow 13 \leq P \leq 33.$$

Vậy $M = \max P = 33$ và $m = \min P = 13$.

Khi đó $w = 33 + 13i$. Do đó $|w| = \sqrt{33^2 + 13^2} = \sqrt{1258}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 122. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 1 + 3i - |z|i = 0$. Tính $S = a + 3b$.

A. $S = \frac{7}{3}$. B. $S = -5$. C. $S = 5$. D. $S = -\frac{7}{3}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } z + 1 + 3i - |z|i = 0 \Leftrightarrow a + bi + 1 + 3i - i\sqrt{a^2 + b^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow a + 1 + (b + 3 - \sqrt{a^2 + b^2})i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 1 = 0 \\ b + 3 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b \geq -3 \\ (b + 3)^2 = 1 + b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow S = -5.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 123. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 2$. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức $w = 3 - 2i + (2 - i)z$ là một đường tròn bán kính r . Tính r .

A. $r = 7$. B. $r = 20$. C. $r = 2\sqrt{5}$. D. $r = \sqrt{7}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } w = 3 - 2i + (2 - i)z \Leftrightarrow z = \frac{w - 3 + 2i}{2 - i}.$$

$$\text{Suy ra } \Rightarrow |z| = \frac{|w - 3 + 2i|}{|2 - i|} \Rightarrow 2 = \frac{|w - 3 + 2i|}{\sqrt{5}} \Rightarrow |w - 3 + 2i| = 2\sqrt{5}.$$

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(3; -2)$, bán kính $r = 2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 124. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z| = |z + \bar{z}| = 1$?

A. 0. B. 1. C. 4. D. 3.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$, ta có $\bar{z} = a - bi$. Từ đó:

$$|z| = |z + \bar{z}| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ |2a| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$$

Do đó có 4 số phức thỏa mãn.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 125. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2|z - 1| = |z + \bar{z} + 2|$ trên mặt phẳng tọa độ là một

A. đường thẳng. B. đường tròn. C. parabol. D. hypebol.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$, ta có $\bar{z} = x - yi$. Từ đó:

$$\begin{aligned} 2|z - 1| &= |z + \bar{z} + 2| \Leftrightarrow 2|(x - 1) + yi| = |2x + 2| \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} &= |x + 1| \Leftrightarrow y^2 = 4x. \end{aligned}$$

Nên tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2|z - 1| = |z + \bar{z} + 2|$ trên mặt phẳng tọa độ là một parabol.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 126. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|iz - 2i + 1| = 2$ là đường tròn có tọa độ tâm là

- A. $(2; 1)$. B. $(2; -1)$. C. $(-2; -1)$. D. $(-2; 1)$.

Lời giải.

Gọi số phức $z = x + yi$; ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có: $|iz - 2i + 1| = 2 \Leftrightarrow |(1 - y) + (x - 2)i| = 2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn có tọa độ tâm là $(2; 1)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 127. Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z} - 2i)(z + 3)$ là một số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một phương trình đường tròn có bán kính bằng

- A. $\sqrt{13}$. B. $\sqrt{11}$. C. $\frac{\sqrt{11}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có $(\bar{z} - 2i)(z + 3) = x^2 + y^2 + 3x + 2y - (2x + 3y + 6)i$.

Theo giả thiết ta có tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có phương trình là $x^2 + y^2 + 3x + 2y = 0$. Vậy bán kính của đường tròn là $R = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

Chọn đáp án **D** □

6 ĐÁP ÁN

1. B	2. C	3. D	4. D	5. B	6. A	7. D	8. C	9. A	10. D
11. C	12. D	13. B	14. B	15. D	16. B	17. D	18. D	19. A	20. C
21. D	22. B	23. B	24. D	25. C	26. A	27. D	28. C	29. B	30. A
31. B	32. C	33. B	34. B	35. A	36. C	37. D	38. D	39. B	40. A
41. A	42. A	43. D	44. A	45. D	46. B	47. A	48. C	49. C	50. C
51. B	52. D	53. A	54. C	55. C	56. C	57. D	58. C	59. D	60. A
61. A	62. C	63. D	64. D	65. A	66. B	67. D	68. B	69. A	70. D
71. C	72. A	73. B	74. A	75. B	76. A	77. C	78. A	79. B	80. B
81. D	82. B	83. C	84. D	85. B	86. D	87. A	88. C	89. C	90. D
91. C	92. D	93. D	94. D	95. D	96. B	97. A	98. C	99. B	100. C
101. D	102. B	103. A	104. A	105. D	106. B	107. C	108. C	109. B	110. A
111. A	112. C	113. D	114. C	115. D	116. D	117. C	118. D	119. C	120. A
121. B	122. B	123. C	124. C	125. C	126. A	127. D			

7 VẬN DỤNG CAO

Câu 1. Cho số phức z thỏa mãn $|z| \leq 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2|z + 1| + 2|z - 1| + |z - \bar{z} - 4i|$ bằng

- A. $4 + 2\sqrt{3}$. B. $2 + \sqrt{3}$. C. $4 + \frac{14}{\sqrt{15}}$. D. $2 + \frac{7}{\sqrt{15}}$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Theo giả thiết ta có $|z| \leq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x; y \leq 2$.

$$\begin{aligned}
 P &= 2|z + 1| + 2|z - 1| + |z - \bar{z} - 4i| \\
 &= 2|z + 1| + 2|\overline{z - 1}| + |2yi - 4i| \\
 &= 2(|z + 1| + |1 - \bar{z}| + |y - 2|) \\
 &\geq 2(|z - \bar{z} + 2| + |y - 2|) \\
 &\geq 2(2\sqrt{1 + y^2} + 2 - y).
 \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(y) = 2\sqrt{1 + y^2} + 2 - y$ trên đoạn $[-2; 2]$, ta có

$$f'(y) = \frac{2y}{\sqrt{1 + y^2} - 1}, f'(y) = 0 \Leftrightarrow 2y = \sqrt{1 + y^2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Mà $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2 + \sqrt{3}$, $f(-2) = 4 + 2\sqrt{5}$, $f(2) = 2\sqrt{5}$.

Suy ra $\min_{[-2; 2]} f(y) = 2 + \sqrt{3}$ khi $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Do đó $P \geq 2(2 + \sqrt{3}) = 4 + 2\sqrt{3}$.

Vậy min $P = 4 + 2\sqrt{3}$ khi $\begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ z = \bar{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = \frac{1}{\sqrt{3}}i$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 2. Cho hai số phức z_1, z_2 biết $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$ và $|z_1| = |z_2| = 1$. Tính $|z_1 - z_2|$.

- A. $|z_1 - z_2| = 1$. B. $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$. C. $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$. D. $|z_1 - z_2| = 3$.

Lời giải.

Gọi $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Ta có $|z_1 + z_2| = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{(a^2+b^2) + (c^2+d^2) + 2(ac+bd)} = \sqrt{3}$.

$|z_1| = |z_2| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{c^2+d^2} = 1$.

Suy ra $ac + bd = \frac{1}{2}$.

Từ đó ta có $|z_1 - z_2| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} = \sqrt{(a^2+b^2) + (c^2+d^2) - 2(ac+bd)} = 1$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn $|z+2-i| + |z-4-i| = 10$.

- A. 15π . B. 20π . C. 12π . D. Đáp án khác.

Lời giải.

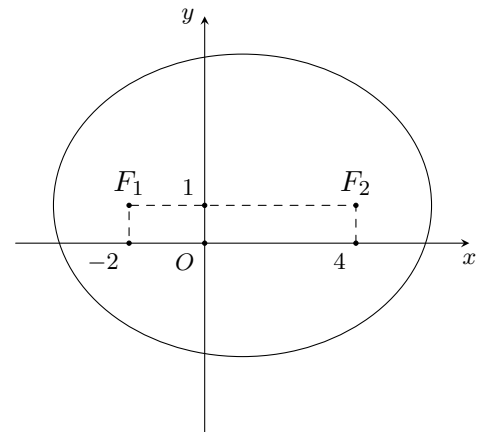
Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z , $F_1(-2; 1)$, $F_2(4; 1)$, ta có:

$F_1F_2 = 6$.

Điều kiện đã cho tương đương $MF_1 + MF_2 = 10$. Do đó tập hợp các điểm M là elip có $2c = F_1F_2 = 6 \Rightarrow c = 3$, $2a = 10 \Rightarrow a = 5$.

Suy ra $b = 4$.

Vậy diện tích elip là $S = \pi ab = 20\pi$.



Chọn đáp án **(B)** □

Câu 4. Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn phương trình $|z - 2 - 3i| = 5$ và $|z_1 - z_2| = 6$. Biết tập hợp các điểm M biểu diễn số phức $w = z_1 + z_2$ là một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

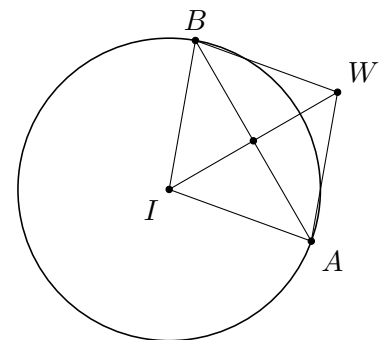
- A. 8. B. 4. C. $2\sqrt{2}$. D. 2.

Lời giải.

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2 . Từ các giả thiết z_1, z_2 thỏa mãn phương trình $|z - 2 - 3i| = 5$ và $|z_1 - z_2| = 6$ suy ra A, B thuộc đường tròn tâm $I(2; 3)$ (là điểm biểu diễn của số phức $z_0 = 2 + 3i$) bán kính $R = 5$ đồng thời thỏa mãn $AB = 6$.

Ta có

$$(w - z_0) - z_0 = (z_1 - z_0) + (z_2 - z_0)$$



nên $w - z_0$ có điểm biểu diễn W chính là đỉnh thứ tư của hình thoi $IAWB$. Do đó

$$\begin{aligned} |w - 2z_0|^2 &= IW^2 = 4IA^2 - AB^2 = 4 \cdot 5^2 - 6^2 = 64 \\ \Rightarrow |w - 2z_0| &= 8. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm M biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $J(4; 6)$, bán kính $r = 8$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 5. Cho hai điểm A và B là hai điểm biểu diễn hình học số phức theo thứ tự z_1, z_2 khác 0 và thỏa mãn đẳng thức $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2$. Hỏi ba điểm O, A, B tạo thành tam giác gì? (O là gốc tọa độ). Chọn phương án đúng nhất

A. Vuông cân tại O .B. Cân tại O .

C. Đều.

D. Vuông tại O .🔗 **Lời giải.**

$$\text{— } z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2 \Rightarrow (z_1 - z_2)^2 = -z_1 z_2 \Rightarrow |z_1 - z_2|^2 = |z_1||z_2|. \quad (1)$$

$$\text{— } z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2 \Rightarrow z_1(z_1 - z_2) = -z_2^2 \Rightarrow |z_1||z_1 - z_2| = |z_2|^2 \Rightarrow |z_1 - z_2|^2 = \frac{|z_2|^4}{|z_1|^2}. \quad (2)$$

$$\text{— Từ (1) và (2) } \Rightarrow |z_1|^3 = |z_2|^3 \Rightarrow |z_1| = |z_2|. \quad (3)$$

— Từ (1) và (3), suy ra $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2|$, hay $OA = OB = AB \Rightarrow \triangle OAB$ đều.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 6. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z^2 + 3| = 2|z + \bar{z}|$ và $|z - 4 + 3i| = 3$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

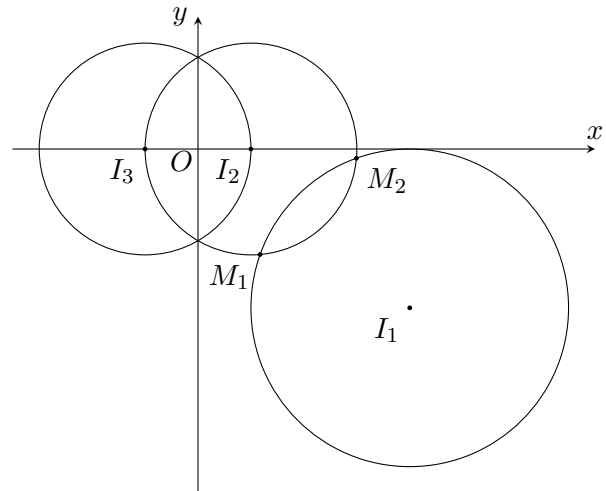
🔗 **Lời giải.**

Đặt $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Gọi M là điểm biểu diễn của z .

Ta có $|z - 4 + 3i| = 3$ nên M thuộc đường tròn $(\mathcal{C}_1)$ có tâm $I_1(4; -3)$ và bán kính $R_1 = 3$. (1)

Ta thấy

$$\begin{aligned} & |z^2 + 3| = 2|z + \bar{z}| \\ \Leftrightarrow & (x^2 - y^2 + 3)^2 + (2xy)^2 = 16x^2 \\ \Leftrightarrow & (x^2 - y^2)^2 + 9 + 6(x^2 - y^2) + 4x^2y^2 = 16x^2 \\ \Leftrightarrow & (x^2 + y^2)^2 + 9 - 6(x^2 + y^2) = 4x^2 \\ \Leftrightarrow & (x^2 + y^2 - 3)^2 = 4x^2 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 + y^2 - 3 = -2x \\ x^2 + y^2 - 3 = 2x \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 4 & (2) \\ (x+1)^2 + y^2 = 4 & (3) \end{cases} \end{aligned}$$



Hình 1

$$\text{Đặt } \begin{cases} (\mathcal{C}_2): (x-1)^2 + y^2 = 4 \\ (\mathcal{C}_3): (x+1)^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

Từ (1), (2) và (3), ta thấy M là điểm chung của $\begin{cases} (\mathcal{C}_1) \\ (\mathcal{C}_2) \end{cases}$ hay $\begin{cases} (\mathcal{C}_1) \\ (\mathcal{C}_3) \end{cases}$.

Từ hình 1, ta thấy có hai điểm M thỏa mãn, tức có hai số phức thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 7. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z - 3 - i) + 2i = (4 - i)z$?

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

🔗 **Lời giải.**

Ta có $|z|(z - 3 - i) + 2i = (4 - i)z \Leftrightarrow z(4 - |z| - i) = -3|z| + (2 - |z|)i$.

Đặt $t = |z|$, điều kiện $t \geq 0, t \in \mathbb{R}$. Lấy mô-đun hai vế ta được

$$\begin{aligned} t|4 - t - i| &= |-3t + (2 - t)i| \Leftrightarrow t\sqrt{(4 - t)^2 + 1} = \sqrt{9t^2 + (2 - t)^2} \\ &\Leftrightarrow t^4 - 8t^3 + 6t^2 + 4t - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (t - 1)(t^3 - 7t^2 - t + 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t \approx 7,081 \\ t \approx 0,61146 \\ t \approx -0,6928. \end{cases} \end{aligned}$$

Do đó, có 3 giá trị t thỏa mãn.

Mặt khác, với mỗi $t \geq 0$, ta có $z = \frac{-3t + (2 - t)i}{4 - t - i}$ nên có duy nhất một số phức z thỏa mãn.

Vậy có 3 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **B** □

Câu 8. Xét các số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = \sqrt{5}$. Tìm $P = 16a + 8b$ biết $|z + 1 + i| + |z - 1 + 4i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. -36.

B. $\sqrt{58}$.

C. 58.

D. 40.

Lời giải.

Ta có $|z - 1 + 2i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b + 2)^2 = 5 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2a - 4b$.

$M = |z + 1 + i| + |z - 1 + 4i| = \sqrt{(a + 1)^2 + (b + 1)^2} + \sqrt{(a - 1)^2 + (b + 4)^2}$.

Ta có

$$\begin{aligned} M^2 &\leq 2[(a + 1)^2 + (b + 1)^2 + (a - 1)^2 + (b + 4)^2] \\ &\leq 2[2(a^2 + b^2) + 10b + 19] \\ &\leq 2[2(2a - 4b) + 10b + 19] \\ &\leq 2[4a + 2b + 19] \\ &\leq 2[4(a - 1) + 2(b + 2) + 19]. \end{aligned}$$

Mặt khác $4(a - 1) + 2(b + 2) + 19 \leq \sqrt{(4^2 + 2^2)[(a - 1)^2 + (b + 2)^2]} + 19 = 29$ nên $M^2 \leq 58$.

Do đó M đạt giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{58}$ khi $\begin{cases} 4a + b = 10 \\ \sqrt{58} = \sqrt{4a - 2b + 2} + \sqrt{4b + 17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{45}{16} \\ b = -\frac{5}{8} \end{cases}$.

Suy ra $P = 16a + 8b = 40$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 9. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z^2 - 2z + 5| = |\bar{z} - 1 - 2i|$. Giá trị lớn nhất của $|z - 2 + 2i|$ bằng

A. $\sqrt{17} + 1$.

B. 5.

C. 2.

D. $\sqrt{13} + 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} |z^2 - 2z + 5| = |\bar{z} - 1 - 2i| &\Leftrightarrow |(z - 1)^2 - 4i^2| = |\bar{z} - 1 - 2i| \\ &\Leftrightarrow |z - 1 - 2i| \cdot |z - 1 + 2i| = |\bar{z} - 1 - 2i|. \quad (*) \end{aligned}$$

Mà với $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, ta có

$$|z - 1 + 2i| = \sqrt{(a - 1)^2 + (b + 2)^2} = \sqrt{(a - 1)^2 + (-b - 2)^2} = |\bar{z} - 1 - 2i|.$$

Do đó

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} |z - 1 - 2i| = 0 \\ |z - 1 + 2i| = 1. \end{cases}$$

• Trường hợp $|z - 1 + 2i| = 0 \Leftrightarrow z = 1 - 2i \Rightarrow |z - 2 + 2i| = |-1| = 1$.

• Trường hợp $|z - 1 - 2i| = 1$, ta có

$$\begin{aligned} |z - 2 + 2i + 1 - 4i| = 1 &\Rightarrow |z - 2 + 2i| - |1 - 4i| \leq 1 \\ &\Leftrightarrow |z - 2 + 2i| \leq 1 + |1 - 4i| = 1 + \sqrt{17}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} |z - 1 - 2i| = 1 \\ |z - 2 + 2i| = 1 + \sqrt{17} \end{cases}$. Điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn hệ này là giao điểm

của đường tròn tâm $I_1(1; 2)$, bán kính $R_1 = 1$ và đường tròn tâm $I_2(2; -2)$, bán kính $R_2 = 1 + \sqrt{17}$. Ta có $I_1I_2 = \sqrt{17} = R_2 - R_1$. Do đó M là điểm tiếp xúc trong của hai đường tròn này.

Vậy giá trị lớn nhất của $|z - 2 + 2i|$ bằng $1 + \sqrt{17}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 10. Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 không phải là số thuần thực, thỏa mãn điều kiện $z_1 + z_2 = 4$ và $|z_1 - 2| = |z_2 - 2| = |z_3 - 2| = 1$. Tính giá trị biểu thức $T = |z_3 - z_1|^2 + |z_3 - z_2|^2$.

A. $T = 12$.

B. $T = 1$.

C. $T = 4$.

D. $T = 8$.

Lời giải.

- Gọi A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2, z_3 trên mặt phẳng tọa độ.
- Từ giả thiết $|z_1 - 2| = |z_2 - 2| = |z_3 - 2| = 1$ suy ra A, B, C thuộc đường tròn tâm $I(2; 0)$ bán kính $R = 1$.
- Từ giả thiết $z_1 + z_2 = 4$ suy ra I là trung điểm của AB nên $AB = 2R = 2$.
- $T = |z_2 - z_1|^2 + |z_3 - z_2|^2 = AC^2 + BC^2 = AB^2 = 4R^2 = 4$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 11. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 2, |z_1 + z_2| = 2\sqrt{3}$. Tính $|z_1 - z_2|$.

- A. $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$. B. $|z_1 - z_2| = 2$. C. $|z_1 - z_2| = 3$. D. $|z_1 - z_2| = 0$.

Lời giải.

Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2 . Khi đó $OA = |z_1| = 2, OB = |z_2| = 2$.

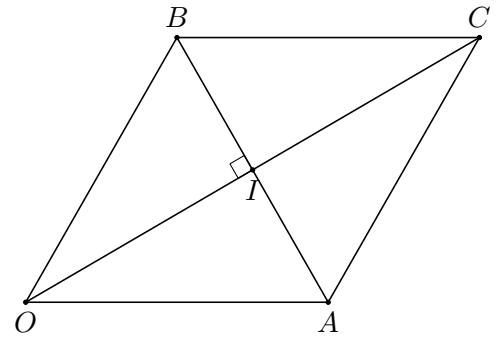
Dựng hình thoi $OACB$, khi đó C là điểm biểu diễn số phức $z_1 + z_2$.

Do đó $OC = |z_1 + z_2| = 2\sqrt{3}$.

Gọi I là tâm hình thoi $OACB$, ta có $OI = \frac{OC}{2} = \sqrt{3}$.

Từ đó $IA = \sqrt{OA^2 - OI^2} = 1$. Suy ra $AB = 2IA = 2$.

Bởi vậy $|z_1 - z_2| = AB = 2$.



Chọn đáp án **B** □

Câu 12. Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn ba điều kiện $|z_1 - 4 - 3i| = 5; |z_2 - 4 - 3i| = 5$ và $|z_1 - z_2| = 5$. Gọi S là tập hợp chứa tất cả các số kiểu $|z_1 + 3z_2|$. Có bao nhiêu số nguyên trong tập S ?

- A. 40. B. 38. C. 39. D. 37.

Lời giải.

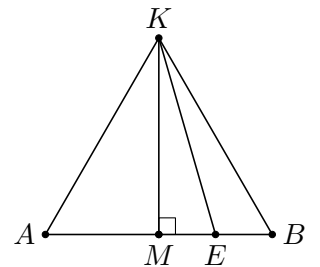
Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn của số phức $z_1; z_2$ và $K(4; 3)$.

Từ giả thiết ta có $AK = BK = 5$ và $AB = 5$.

Gọi E là điểm thỏa mãn $\vec{EA} + 3\vec{EB} = \vec{0} \Rightarrow \vec{EB} = \frac{1}{4}\vec{AB}$.

Ta có $|z_1 + 3z_2| = |\vec{OA} + 3\vec{OB}| = |\vec{OE} + \vec{EA} + 3\vec{OE} + 3\vec{EB}| = 4OE$.

ΔKAB đều cạnh bằng 5 có M là trung điểm AB và E là trung điểm MB .



Ta có

$$KE = \sqrt{KM^2 - ME^2} = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{5\sqrt{13}}{4}.$$

Suy ra E di động trên đường tròn tâm $K(4; 3)$ bán kính $r = \frac{5\sqrt{13}}{4}$. Ta có

$$OK - r \leq OE \leq OK + r \Leftrightarrow 4(OK - r) \leq 4OE \leq 4(OK + r) \Leftrightarrow 20 - 5\sqrt{13} \leq 4OE \leq 20 + 5\sqrt{13}.$$

Trong đoạn $[20 - 5\sqrt{13}; 20 + 5\sqrt{13}]$ có 37 số nguyên.

Chọn đáp án **D** □

Câu 13. Tính giá trị của biểu thức $P = C_{2018}^1 - C_{2018}^3 + \dots + (-1)^k C_{2018}^{2k+1} + \dots + C_{2018}^{2017}$.

- A. $P = 2^{1009}$. B. $P = 0$. C. $P = \frac{2^{2018} - 1}{2}$. D. $P = \frac{2^{2018} + 1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$(a + b)^{2018} = \sum_{k=0}^{2018} C_{2018}^k a^{2018-k} b^k.$$

Với $i^2 = -1$, ta có

$$(1 + i)^{2018} = C_{2018}^0 + C_{2018}^1 i + C_{2018}^2 i^2 + \dots + C_{2018}^{2018} i^{2018} \quad (1)$$

$$(1 - i)^{2018} = C_{2018}^0 - C_{2018}^1 i + C_{2018}^2 i^2 + \dots + C_{2018}^{2018} i^{2018} \quad (2)$$

Lấy (1) trừ (2) theo về ta được

$$(1+i)^{2018} - (1-i)^{2018} = 2i \left(C_{2018}^1 + C_{2018}^3 i^2 + C_{2018}^5 i^4 + \dots + C_{2018}^{2017} i^{2016} \right).$$

Mà

$$(i^2)^{2k} = 1, (i^2)^{2k+1} = -1, \text{ với mọi } k \in \mathbb{N}.$$

Suy ra,

$$P = \frac{(1+i)^{2018} - (1-i)^{2018}}{2i} = \frac{(2i)^{1009} - (-2i)^{1009}}{2i} = 2 \cdot (2i)^{1008} = 2^{1009}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 14. Tính tổng $S = C_{2018}^1 - 3C_{2018}^3 + 3^2C_{2018}^5 - \dots + 3^{1008}C_{2018}^{2017}$.

A. 2^{2017} .

B. 2^{2018} .

C. $2^{2017} - 1$.

D. $2^{2018} - 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} (1+i\sqrt{3})^{2018} &= C_{2018}^0 + i\sqrt{3}C_{2018}^1 + (i\sqrt{3})^2C_{2018}^2 + \dots + (i\sqrt{3})^{2018}C_{2018}^{2018} \\ \Leftrightarrow 2^{2018} \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{2018} &= (C_{2018}^0 - 3C_{2018}^2 + \dots - 3^{1009}C_{2018}^{2018}) + i\sqrt{3}(C_{2018}^1 - 3C_{2018}^3 + \dots + 3^{1008}C_{2018}^{2017}) \\ \Leftrightarrow 2^{2018} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) &= (C_{2018}^0 - 3C_{2018}^2 + \dots - 3^{1009}C_{2018}^{2018}) + i\sqrt{3}(C_{2018}^1 - 3C_{2018}^3 + \dots + 3^{1008}C_{2018}^{2017}) \\ \Rightarrow \frac{2^{2018}\sqrt{3}}{2} &= \sqrt{3}(C_{2018}^1 - 3C_{2018}^3 + 3^2C_{2018}^5 - \dots + 3^{1008}C_{2018}^{2017}) \\ \Leftrightarrow \sqrt{3}S &= \sqrt{3} \cdot 2^{2017} \\ \Leftrightarrow S &= 2^{2017}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 15. Cho $S = |-C_{2018}^0 + 3C_{2018}^2 - 3^2C_{2018}^4 + \dots - 3^{1008}C_{2018}^{2016} + 3^{1019}C_{2018}^{2018}|$. Hỏi S có bao nhiêu chữ số.

A. 607.

B. 608.

C. 609.

D. 610.

Lời giải.

Đặt $f(x) = (1+x)^{2018}$, ta có

$$f(x) = C_{2018}^0 + C_{2018}^1x + C_{2018}^2x^2 + \dots + C_{2018}^{2018}x^{2018}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} f(\sqrt{3}i) &= C_{2018}^0 + \sqrt{3}iC_{2018}^1 + 3i^2C_{2018}^2 + \dots + 3^{1009}i^{2018}C_{2018}^{2018} \\ &= C_{2018}^0 + \sqrt{3}iC_{2018}^1 - 3C_{2018}^2 + \dots - 3^{1009}C_{2018}^{2018}, \\ f(-\sqrt{3}i) &= C_{2018}^0 - \sqrt{3}iC_{2018}^1 + 3i^2C_{2018}^2 + \dots + 3^{1009}i^{2018}C_{2018}^{2018} \\ &= C_{2018}^0 - \sqrt{3}iC_{2018}^1 - 3C_{2018}^2 + \dots - 3^{1009}C_{2018}^{2018}. \end{aligned}$$

Suy ra $S = \frac{|f(\sqrt{3}i) + f(-\sqrt{3}i)|}{2}$. Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} f(\sqrt{3}i) &= (1+\sqrt{3}i)^{2018} = 2^{2018} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^{2018} \\ &= 2^{2018} \left(\cos \frac{2018\pi}{3} + i \sin \frac{2018\pi}{3} \right) = 2^{2018} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \\ f(-\sqrt{3}i) &= (1-\sqrt{3}i)^{2018} = 2^{2018} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right]^{2018} \\ &= 2^{2018} \left[\cos \left(-\frac{2018\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2018\pi}{3} \right) \right] = 2^{2018} \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \end{aligned}$$

Suy ra $S = 2^{2018}$. Ta có

$$\log S = \log (2^{2018}) \approx 607,4785.$$

Vậy S có 608 chữ số.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 16. Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn:
$$\begin{cases} |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \\ z_1^2 = z_2 \cdot z_3 \\ |z_1 - z_2| = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \end{cases}$$
. Tính giá trị của biểu thức $M = |z_2 - z_3| - |z_3 - z_1|$.

A. $-\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$. B. $-\sqrt{6} - \sqrt{2} + \sqrt{3}$. C. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2} - 2}{2}$. D. $\frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2} + 2}{2}$.

Lời giải.

Đặt $z_1 = a_1 + b_1i$; $z_2 = a_2 + b_2i$.

Theo giả thiết ta có:

$$|z_1| = |z_2| = 1 \Leftrightarrow a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = 1.$$

$$|z_1 - z_2| = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 + \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2(a_1a_2 + b_1b_2) = 2 + \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2(a_1a_2 + b_1b_2) = -\sqrt{3}.$$

$$\text{Suy ra } |z_1 + z_2| = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} = \sqrt{2 + 2(a_1a_2 + b_1b_2)} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.$$

Ta có:

$$\begin{aligned} M &= |z_2 - z_3| - |z_3 - z_1| = \left|z_2 - \frac{z_1^2}{z_2}\right| - \left|\frac{z_1^2}{z_2} - z_1\right| \\ &= \frac{|z_2 - z_1| \cdot |z_2 + z_1|}{|z_2|} - \frac{|z_1| |z_1 - z_2|}{|z_2|} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} - 1\right) = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2} + 2}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 17. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 5$. Phép tịnh tiến véc-tơ $\vec{v} = (1; 2)$ biến tập hợp biểu diễn số phức z thành tập hợp biểu diễn số phức z' . Tìm $P = \max |z - z'|$.

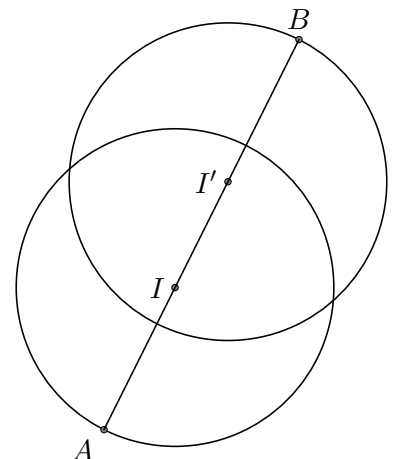
A. $P = 15$. B. $P = 12$. C. $P = 20 - \sqrt{5}$. D. $P = 10 + \sqrt{5}$.

Lời giải.

Xét hai đường tròn $(I; 5); (I'; 5)$ với $I(1; -2), I'(2; 0)$.

Khi đó $\max |z - z'| = AB$ với A, B là các giao điểm của đường thẳng II' với các đường tròn $(I; 5); (I'; 5)$ (A không nằm trong $(I'; 5)$ và B không nằm trong $(I; 5)$).

$$\text{Khi đó } AB = 2R + II' = 10 + \sqrt{5}$$



Chọn đáp án **D**

□

Câu 18. Cho số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| \leq 2$ và $|z - \bar{z}| \leq 2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $T = |z - 2i|$. Tổng $M + m$ bằng

A. $1 + \sqrt{10}$.

B. $\sqrt{2} + \sqrt{10}$.

C. 4.

D. 1.

Lời giải.

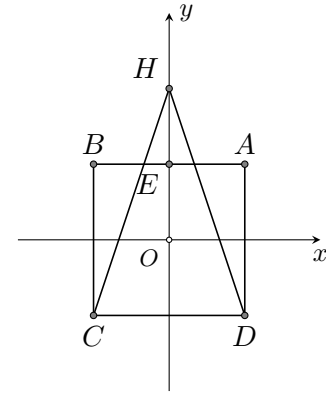
Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} |z + \bar{z}| \leq 2 \\ |z - \bar{z}| \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 1 \\ |y| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-1; 1] \\ y \in [-1; 1] \end{cases}.$$

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là điểm $E(x; y)$ nằm trong hình vuông $ABCD$ với $A(1; 1)$, $B(-1; 1)$, $C(-1; -1)$ và $D(1; -1)$ như hình vẽ.

Khi đó $T = |z - 2i| = EH$ với $H(0; 2)$.

Để thấy EH đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $E(0; 1)$ khi đó $m = \min EH = 1$.



Tương tự EH đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\begin{bmatrix} E(-1; -1) \\ E(1; -1) \end{bmatrix}$.

$$\text{Khi đó } M = \max EH = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}.$$

$$\text{Vậy } M + m = 1 + \sqrt{10}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 19. Cho số phức $z = (\sqrt{3} + \sqrt{5}i)^{2018}$. Biết phần ảo của z có dạng $z = a + b\sqrt{3} + c\sqrt{5} + d\sqrt{15}$, trong các số a, b, c, d có đúng bao nhiêu số bằng 0?

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải.

$$z = (\sqrt{3} + \sqrt{5}i)^{2018} = (-2 + 2\sqrt{15}i)^{1009} = 2^{1009} \sum_{k=0}^{1009} C_{1009}^k (-1)^{1009-k} \sqrt{15}^k i^k.$$

Phần ảo của z ứng với giá trị k là số lẻ nên $a = b = c = 0$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 20. Biết $2^n (C_n^0 + iC_n^1 - C_n^2 - iC_n^3 + \dots + i^k C_n^k + \dots + i^n C_n^n) = 32768i$, với C_n^k là các số tổ hợp chập k của n và $i^2 = -1$. Đặt $T_{k+1} = i^k C_n^k$, giá trị của T_8 bằng

A. $-330i$.

B. $-8i$.

C. $-36i$.

D. $-120i$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } 2^n (C_n^0 + iC_n^1 - C_n^2 - iC_n^3 + \dots + i^k C_n^k + \dots + i^n C_n^n) = 32768i$$

$$\Leftrightarrow 2^n (C_n^0 + iC_n^1 + i^2 C_n^2 + i^3 C_n^3 + \dots + i^k C_n^k + \dots + i^n C_n^n) = 32768i$$

$$\Leftrightarrow 2^n (1 + i)^n = 2^{15}i \Leftrightarrow (1 + i)^n = 2^{15-n}i: \text{ là số thuần ảo } (*)$$

Nếu $n = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}$ thì $(1 + i)^n = (1 + i)^{2m+1} = 2^m i^m (1 + i)$: không thuần ảo, sai so với (*).

Như vậy $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Khi đó $(*) \Leftrightarrow (1 + i)^{2m} = 2^{15-2m}i \Leftrightarrow 2^m i^m = 2^{15-2m}i \Leftrightarrow m = 5$.

Vậy $n = 10$, từ đó ta có $T_8 = i^7 C_{10}^7 = -8i$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 21. Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z - i| + |z + i| = 6$. Gọi S là đường cong tạo bởi tất cả các điểm biểu diễn số phức $(z - i)(i + 1)$ khi z thay đổi. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong S .

A. 12π .

B. $12\sqrt{2}\pi$.

C. $9\sqrt{2}\pi$.

D. 9π .

Lời giải.

Giả sử điểm $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $w = (z - i)(i + 1)$.

Khi đó $(z - i)(i + 1) = x + yi$ nên

$$\begin{cases} z - i = \frac{x + yi}{1 + i} \\ z + i = \frac{x + yi}{1 + i} + 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z - i = \frac{(x + yi)(1 - i)}{2} \\ z + i = \frac{(x - 2) + (y + 2)i}{1 + i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z - i = \frac{(x + yi)(1 - i)}{2} \\ z + i = \frac{[(x - 2) + (y + 2)i](1 - i)}{2} \end{cases}$$

Ta suy ra $|z - i| = |x + yi| \cdot \left| \frac{1 - i}{2} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x^2 + y^2}$.

Tương tự $|z + i| = |(x - 2) + (y + 2)i| \cdot \left| \frac{1 - i}{2} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 2)^2}$.

Do giả thiết $|z - i| + |z + i| = 6$ suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 2)^2} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 2)^2} = 6\sqrt{2}.$$

Giả sử $F_2(0; 0)$ và $F_1(2; -2)$, khi đó $MF_1 + MF_2 = 6\sqrt{2}$. Do đó tập hợp điểm M chuyển động trên elip nhận F_1, F_2 là tiêu điểm và có độ dài trục lớn là $6\sqrt{2}$.

Ta có $a = 3\sqrt{2}$ và $c = \frac{F_1F_2}{2} = \sqrt{2}$ nên $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 4$. Khi đó $S = \pi ab = 12\sqrt{2}\pi$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 22. Cho khai triển $(2018x^2 + x + 2018)^{2018} = a_0 + a_1x + \dots + a_{4036}x^{4036}$. Tính tổng $S = a_1 - a_3 + a_5 - \dots + a_{4035}$.

A. $S = 0$.

B. $S = -1$.

C. $S = 2^{2018}$.

D. $S = 1$.

Lời giải.

Cho $x = i$ ($i^2 = -1$) trong khai triển $(2018x^2 + x + 2018)^{2018} = a_0 + a_1x + \dots + a_{4036}x^{4036}$ ta được

$$\begin{aligned} i^{2018} &= a_0 + a_1i + a_2i^2 + \dots + a_{4036}i^{4036} \\ \Leftrightarrow -1 &= (a_0 - a_2 + a_4 - \dots + a_{4036}) + (a_1 - a_3 + a_5 - \dots + a_{4035})i \end{aligned}$$

Vậy $S = a_1 - a_3 + \dots + a_{4035} = 0$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 23. Cho z_1, z_2 là các số phức thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1$ và $|z_1 - 2z_2| = \sqrt{6}$. Tính giá trị của biểu thức $P = |2z_1 + z_2|$.

A. $P = 2$.

B. $P = \sqrt{3}$.

C. $P = 3$.

D. $P = 1$.

Lời giải.

Đặt $z_1 = a_1 + b_1i$; $z_2 = a_2 + b_2i$. Suy ra $a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = 1$.

$$\text{Và } |z_1 - 2z_2| = \sqrt{6} \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = -\frac{1}{4}.$$

Suy ra $P = |2z_1 + z_2| = 2$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để có đúng hai số phức z thỏa mãn $|z - (2m - 1) - i| = 10$ và $|z - 1 + i| = |\bar{z} - 2 + 3i|$.

A. 41.

B. 40.

C. 165.

D. 164.

Lời giải.

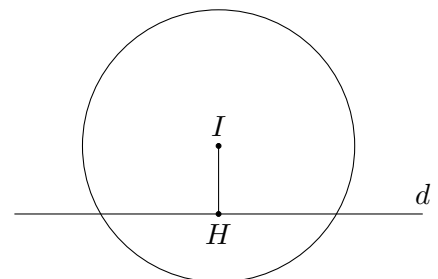
Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) có điểm biểu diễn là M . Ta có

$$|z - 1 + i| = |\bar{z} - 2 + 3i|$$

$$\Leftrightarrow |(a - 1) + (b + 1)i| = |(a - 2) + (3 - b)i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a - 1)^2 + (b + 1)^2} = \sqrt{(a - 2)^2 + (3 - b)^2}$$

$$\Leftrightarrow 2a + 8b - 11 = 0.$$



Suy ra điểm M thuộc đường thẳng $d: 2x + 8y - 11 = 0$.

Mặt khác, từ $|z - (2m - 1) - i| = 10$, suy ra điểm M thuộc đường tròn (C) tâm $I(2m - 1; 1)$, bán kính bằng 10. Vậy M là giao điểm của d và (C) .

Để tồn tại đúng hai số phức z , điều kiện là d phải cắt (C) tại đúng 2 điểm phân biệt. Điều này xảy ra khi

$$d(I, d) < 10 \Leftrightarrow \frac{|2(2m - 1) + 8 \cdot 1 - 11|}{\sqrt{2^2 + 8^2}} < 10 \Leftrightarrow \frac{5 - 10\sqrt{68}}{4} < m < \frac{5 + 10\sqrt{68}}{4}.$$

Vậy có $21 - (-19) + 1 = 41$ giá trị nguyên của m .

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 25. Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 6, |z_2| = 2$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1, iz_2 . Biết rằng $\widehat{MON} = 60^\circ$. Tính $T = |z_1^2 + 9z_2^2|$.

A. $T = 36\sqrt{2}$.

B. $T = 24\sqrt{3}$.

C. $T = 36\sqrt{3}$.

D. $T = 18$.

🔗 **Lời giải.**

Cách 1: P là điểm biểu diễn của số phức $3iz_1$.

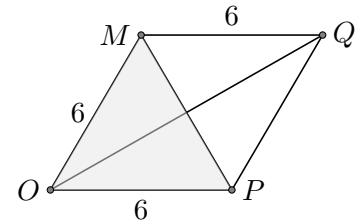
Q là điểm biểu diễn của số phức $z_1 + 3iz_2$.

Ta có $|z_1^2 + 9z_2^2| = |z_1 - 3iz_2| |z_1 + 3iz_2| = MP \cdot OQ$.

Theo giả thiết $\widehat{MON} = 60^\circ \Rightarrow MOP$ là tam giác đều, do đó $MP = 6$.

Ta có $OQ^2 = OM^2 + MP^2 - 2OM \cdot MQ \cdot \cos 120^\circ = 6^2 + 6^2 + 6^2 = 108$.

$\Rightarrow OQ = 6\sqrt{3} \Rightarrow |z_1^2 + 9z_2^2| = 36\sqrt{3}$.



Cách 2: (Cách này về ý tưởng giống với phương pháp tọa độ hóa mà ta sử dụng trong các bài toán Hình học)

Ta có thể chọn $z_1 = 6i$ và từ đây suy ra một số phức $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ (khi đó z_1 và z_2 thỏa mãn các điều kiện đề bài).

$\Rightarrow z_1^2 = -36$ và $z_2^2 = -2 + 2\sqrt{3}i$.

Suy ra $T = |z_1^2 + 9z_2^2| = |-54 + 18\sqrt{3}i| = \sqrt{54^2 + 3 \cdot 18^2} = 36\sqrt{3}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 26. Cho các số phức $z_1 = -3i, z_2 = 4 + i$ và z thỏa mãn $|z - i| = 2$. Biết biểu thức $T = |z - z_1| + 2|z - z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Hiệu $a - b$ bằng

A. $\frac{3 - 6\sqrt{13}}{17}$.

B. $\frac{6\sqrt{13} - 3}{17}$.

C. $\frac{3 + 6\sqrt{13}}{17}$.

D. $-\frac{3 + 6\sqrt{13}}{17}$.

🔗 **Lời giải.**

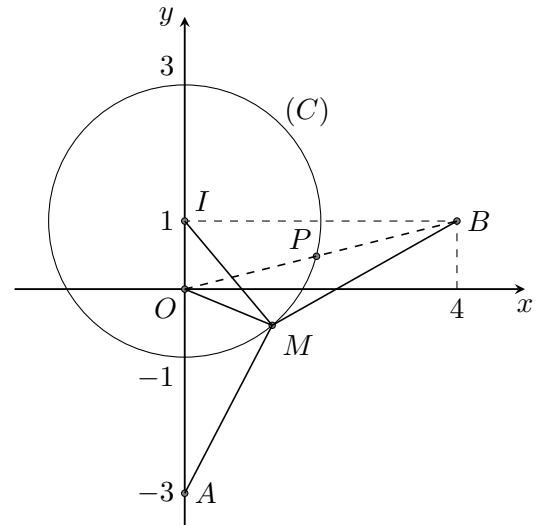
— Trong mặt phẳng Oxy , điểm $A(0; -3)$ biểu diễn số phức

$z_1 = -3i$; điểm $B(4; 1)$ biểu diễn số phức $z_2 = 4 + i$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức z . Giả thiết $|z - i| = 2 \Rightarrow$ tập hợp điểm M là đường tròn (C) tâm $I(0; 1)$, bán kính $R = 2$.

Ta có $T = |z - z_1| + 2|z - z_2| = AM + 2BM$.

Trong mặt phẳng Oxy , ta sẽ tìm vị trí điểm D sao cho khi M di chuyển trên đường tròn (C) ta luôn có $AM = 2DM$.



— Nhận thấy $IA = 4 = 2R$, nên trên tia IA lấy điểm D sao cho $ID = \frac{1}{2}R \Rightarrow D \equiv O$.

Khi đó $IO \cdot IA = R^2 = IM^2 \Rightarrow \triangle IAM \sim \triangle IMO \Rightarrow \frac{AM}{MO} = \frac{IO}{IM} = 2$.

Suy ra $T = 2(OM + BM) \geq 2OB$.

Do đó, $T_{\min} = 2OB$ khi O, M, B thẳng hàng theo thứ tự đó, hay $M \equiv P$ (như hình vẽ).

Phương trình đường thẳng OB : $x - 4y = 0$. Ta có $P \in OB \Rightarrow P(4t; t)$ (với $t > 0$).

$P \in (C): x^2 + (y - 1)^2 = 4 \Rightarrow (4t)^2 + (t - 1)^2 = 4 \Leftrightarrow 17t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1 + 2\sqrt{13}}{17}$.

$\Rightarrow M\left(\frac{4 + 8\sqrt{13}}{17}; \frac{1 + 2\sqrt{13}}{17}\right)$. Vậy $a - b = \frac{3 + 6\sqrt{13}}{17}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 27. Khai triển của biểu thức $(x^2 + x + 1)^{2018}$ được viết thành $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{4036}x^{4036}$. Tổng $S = a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \dots - a_{4034} + a_{4036}$ bằng

A. -2^{1009} .

B. 0.

C. 2^{1009} .

D. -1.

Lời giải.

Ta có $i^2 = -1$, $i^4 = 1 \Rightarrow i^{4m+2} = -1$, $i^{4m} = 1$ với mọi m nguyên dương.

Theo giả thiết thì $(x^2 + x + 1)^{2018} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{4036}x^{4036}$.

Cho $x = i$, thu được

$$\begin{aligned} [(i)^2 + i + 1]^{2018} &= a_0 + a_1i + a_2i^2 + a_3i^3 + a_4i^4 + \dots + a_{4034}i^{4034} + a_{4035}i^{4035} + a_{4036}i^{4036} \\ \Leftrightarrow i^{2018} &= a_0 + a_1i - a_2 + a_3i^3 + a_4 + \dots - a_{4034} + a_{4035}i^{4035} + a_{4036} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -1 = (a_0 - a_2 + a_4 + \dots - a_{4034} + a_{4036}) + (a_1i + a_3i^3 + \dots + a_{4035}i^{4035}). \quad (1)$$

Chú ý rằng với mọi $n = 2m + 1$ lẻ thì $i^n = i^{2m+1} = i^{2m}i = (-1)^mi$ là số thuần ảo, nên

$$(1) \Leftrightarrow -1 = a_0 - a_2 + a_4 - \dots - a_{4034} + a_{4036}.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 28. Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn điều kiện $|z_1| = 4, |z_2| = 3, |z_3| = 2$ và $|4z_1 \cdot z_2 + 16z_2 \cdot z_3 + 9z_1 \cdot z_3| = 48$. Giá trị của biểu thức $P = |z_1 + z_2 + z_3|$ bằng

A. 1.

B. 8.

C. 2.

D. 6.

Lời giải.

Đặt $z_1 = 4w_1, z_2 = 3w_2, z_3 = 2w_3$ với $|w_1| = |w_2| = |w_3| = 1$. Thu được

$$|4 \cdot 4w_1 \cdot 3w_2 + 16 \cdot 3w_2 \cdot 2w_3 + 9 \cdot 4w_1 \cdot 2w_3| = 48 \Leftrightarrow |2w_1w_2 + 4w_2w_3 + 3w_1w_3| = 2. \quad (1)$$

Nhân vào hai vế của (1) với $|\overline{w_1}\overline{w_2}\overline{w_3}|$, với chú ý rằng $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}, z \cdot \overline{z} = |z|^2, |w_i| = 1, w_i \cdot \overline{w_i} = |\overline{w_i}|^2 = 1$ ($i = 1, 2, 3$), $|z| = |\overline{z}|$, ta được

$$\begin{aligned} |2\overline{w_3} + 4\overline{w_1} + 3\overline{w_2}| &= 2 \Leftrightarrow |\overline{2w_3 + 4w_1 + 3w_2}| = 2 \\ \Leftrightarrow |2w_3 + 4w_1 + 3w_2| &= 2 \Leftrightarrow |z_1 + z_2 + z_3| = 2. \end{aligned}$$

Vậy $P = 2$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 29. Giả sử z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $|(2+i)|z|z - (1-2i)z| = |1+3i|$ và $|z_1 - z_2| = 1$. Tính $M = |2z_1 + 3z_2|$.

A. $M = 19$.

B. $M = 25$.

C. $M = 19$.

D. $M = \sqrt{19}$.

Lời giải.

Ta có $|(2+i)|z|z - (1-2i)z| = |1+3i| \Leftrightarrow |z[(2+i)|z| - 1+2i]| = |1+3i|$

$$\Leftrightarrow |z|\sqrt{(2|z|-1)^2 + (|z|+2)^2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow |z|^2(5|z|^2+5) = 10 \Leftrightarrow |z|^4 + |z|^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow |z| = 1.$$

Suy ra $|z_1| = |z_2| = 1$.

$$\text{Mặt khác } |2z_1 + 3z_2|^2 = (2z_1 + 3z_2)(2\overline{z_1} + 3\overline{z_2}) = 13 + 6(z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2)$$

$$\text{và } |z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = 2 - (z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2).$$

$$\text{Do đó } M^2 + 6|z_1 - z_2|^2 = 25 \Rightarrow M = \sqrt{19}.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 30. Biết số phức z có phần ảo khác 0 và thỏa mãn $|z - (2+i)| = \sqrt{10}$ và $z \cdot \overline{z} = 25$. Điểm nào sau đây biểu diễn số phức z trên?

A. $P(4; -3)$.

B. $N(3; -4)$.

C. $M(3; 4)$.

D. $Q(4; 3)$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$ và $y \neq 0$.

Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} |z - (2+i)| = \sqrt{10} \\ z \cdot \overline{z} = 25 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{10} \\ (x+yi)(x-yi) = 25 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 10 = 0 \quad (1) \\ x^2 + y^2 = 25 \quad (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Từ (1) ta có $y = 10 - 2x$, thay vào (2) ta được

$$x^2 + (10 - 2x)^2 = 25 \Leftrightarrow 5x^2 - 40x + 75 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \Rightarrow y = 0 \\ x = 3 \Rightarrow y = 4. \end{cases}$$

Như vậy $z = 3 + 4i$, nên điểm biểu diễn số phức z là điểm $M(3; 4)$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 31. Cho số phức z thỏa mãn $(z - 2 + i)(\bar{z} - 2 - i) = 25$. Biết tập hợp các điểm M biểu diễn số phức $w = 2\bar{z} - 2 + 3i$ là đường tròn có tâm $I(a; b)$ và bán kính c . Giá trị của $a + b + c$ bằng

- A. 18. B. 10. C. 20. D. 17.

Lời giải.

Ta có $(z - 2 + i)(\bar{z} - 2 - i) = \overline{z - 2 - i} \cdot (z - 2 - i) = |z - 2 - i|^2 = 25 \Rightarrow |z - 2 - i| = 5$.

Ta có $w - 2 - 5i = 2(\bar{z} - 2 - i) \Rightarrow |w - 2 - 5i| = 2|z - 2 - i| = 10$.

Tập hợp điểm biểu diễn w là đường tròn tâm $I(2; 5)$ và bán kính $R = 10$.

Vậy $a + b + c = 17$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 32. Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z_1 + z_2|$.

- A. $P = 4\sqrt{6}$. B. $P = 2\sqrt{26}$. C. $P = 5 + 3\sqrt{5}$. D. $P = 34 + 3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Đặt $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Ta có $z_1 + z_2 = 8 + 6i \Leftrightarrow (a + c) + (b + d)i = 8 + 6i \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 8 \\ b + d = 6 \end{cases}$.

$|z_1 - z_2| = |(a - c) + (b - d)i| = 2 \Leftrightarrow (a - c)^2 + (b - d)^2 = 4$.

Do đó, $(a - c)^2 + (b - d)^2 + (a + c)^2 + (b + d)^2 = 4 + 8^2 + 6^2 = 104 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 52$.

Suy ra $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 52$.

Ta có

$$\begin{aligned} (|z_1| + |z_2|)^2 &\leq 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) = 104 \\ \Leftrightarrow |z_1| + |z_2| &\leq \sqrt{104} = 2\sqrt{26}. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $|z_1| = |z_2|$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 33. Rút gọn tổng sau $S = C_{2018}^0 - 3C_{2018}^2 + 3^2C_{2018}^4 - 3^3C_{2018}^6 + \dots - 3^{1009}C_{2018}^{2018}$

- A. $S = 2^{2017}$. B. $S = 2^{2018}$. C. $S = -2^{2017}$. D. $S = -2^{2018}$.

Lời giải.

Ta có $(1 + x)^{2018} = C_{2018}^0 + C_{2018}^1x + C_{2018}^2x^2 + \dots + C_{2018}^{2018}x^{2018}$ (1).

Mặt khác $(1 - x)^{2018} = C_{2018}^0 - C_{2018}^1x + C_{2018}^2x^2 - \dots + C_{2018}^{2018}x^{2018}$ (2).

Cộng (1) và (2) ta được:

$$(1 + x)^{2018} + (1 - x)^{2018} = 2(C_{2018}^0 + C_{2018}^2x^2 + \dots + C_{2018}^{2018}x^{2018}) \quad (3).$$

Thay $x = i\sqrt{3}$ vào (3) ta được:

$$(1 + i\sqrt{3})^{2018} + (1 - i\sqrt{3})^{2018} = 2S \quad (4).$$

Cách 1:

Mà $(1 + i\sqrt{3})^3 = (1 - i\sqrt{3})^3 = -8 \Rightarrow (1 + i\sqrt{3})^{2016} = (1 - i\sqrt{3})^{2016} = (-8)^{672}$.

Suy ra, $(1 + i\sqrt{3})^{2018} + (1 - i\sqrt{3})^{2018}$

$$= (-8)^{672} ((1 + i\sqrt{3})^2 + (1 - i\sqrt{3})^2)$$

$$= (-8)^{672} \times (-4) = -2^{2018} \quad (5).$$

Từ (4) và (5) suy ra: $S = -2^{2017}$.

Cách 2:

$$\text{Ta có } \begin{cases} (1 + i\sqrt{3}) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ (1 - i\sqrt{3}) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1 + i\sqrt{3})^{2018} = 2^{2018} \left(\cos \frac{2018 \cdot \pi}{3} + i \sin \frac{2018 \cdot \pi}{3} \right) \\ (1 - i\sqrt{3})^{2018} = 2^{2018} \left(\cos \frac{2018 \cdot \pi}{3} - i \sin \frac{2018 \cdot \pi}{3} \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1 + i\sqrt{3})^{2018} = 2^{2018} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ (1 - i\sqrt{3})^{2018} = 2^{2018} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \end{cases} \quad (5).$$

Từ (4) và (5) suy ra: $S = -\frac{2^{2018}}{2} = -2^{2017}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 34. Cho các số phức z, w khác 0 và thỏa mãn: $|z - w| = 2|z| = |w|$. Tìm phần thực của số phức $u = \frac{z}{w}$.

A. $-\frac{1}{8}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. 1.

D. $\frac{1}{8}$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $\left|\frac{z}{w} - 1\right| = 1$ và $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{1}{2}$. (*)

$$\text{Đặt } \frac{z}{w} = x + yi, \text{ ta có (*) tương đương với } \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Trừ phương trình dưới cho phương trình trên ta được $x = \frac{1}{8}$.

Chọn đáp án **D**

Câu 35. Cho các số phức z thỏa mãn $|z - 1| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (1 + \sqrt{3}i)z + 2$ là một đường tròn. Tính bán kính R của đường tròn đó.

A. $R = 4$.

B. $R = 16$.

C. $R = 8$.

D. $R = 2$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } w - 2 = (1 + \sqrt{3}i)z \Leftrightarrow \frac{w - 2}{1 + \sqrt{3}i} = z \Leftrightarrow \frac{w - 2}{1 + \sqrt{3}i} - 1 = z - 1 \Rightarrow \left| \frac{w - 3 - \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i} \right| = |z - 1| \Leftrightarrow |w - 3 - \sqrt{3}i| =$$

$$|z - 1| \cdot |1 + \sqrt{3}i| = 4.$$

Từ đó suy ra bán kính $R = 4$.

Chọn đáp án **A**

Câu 36. Cho số phức z , biết rằng các điểm biểu diễn hình học của các số phức z, iz và $z + iz$ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 18. Tính mô-đun của số phức z .

A. $2\sqrt{3}$.

B. $3\sqrt{2}$.

C. 6.

D. 9.

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi$, với a, b là số thực. Gọi M, N, P lần lượt là điểm biểu diễn số phức z, iz và $z + iz$. Khi đó $M(a; b); N(-b; a); P(a - b; a + b)$. Suy ra $MN = \sqrt{2(a^2 + b^2)}$; $NP = PM = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Suy ra tam giác MNP vuông cân tại P .

$$\text{Ta có } S_{\triangle MNP} = 18 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot NP \cdot PM = 18 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 36 \Leftrightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 6.$$

Chọn đáp án **C**

Câu 37. Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn phương trình $|z - 2 - 3i| = 5$ và $|z_1 - z_2| = 6$. Biết tập hợp các điểm M biểu diễn số phức $\omega = z_1 + z_2$ là một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó

A. $R = 8$.

B. $R = 4$.

C. $R = 2\sqrt{2}$.

D. $R = 2$.

Lời giải.

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2

$\Rightarrow A, B \in (C)$ có tâm $I(2; 3)$ và $R = 5$.

$$\text{Ta có } |\vec{IA}| = |\vec{IB}| = 5; |\vec{AB}| = |\vec{OB} - \vec{OA}| = |z_1 - z_2| = 6$$

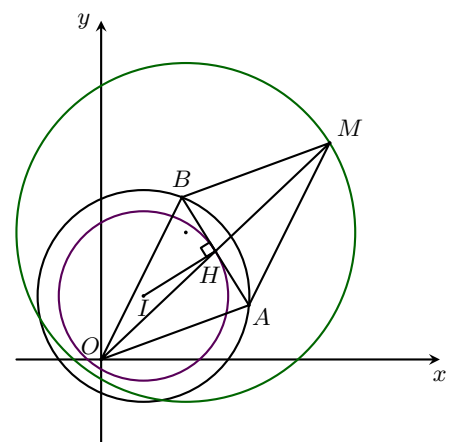
$$\text{Gọi } H \text{ là trung điểm } AB \text{ ta có } IH = \sqrt{IA^2 - \frac{AB^2}{4}} = 4.$$

Vậy H thuộc đường tròn I bán kính $R_1 = 4$.

$$\text{Ta có } \omega = z_1 + z_2 \Rightarrow \vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} = 2\vec{OH} \Rightarrow \vec{OM} = 2\vec{OH}.$$

Vậy M là ảnh của H qua phép vị tự tâm O tỷ số $k = 2$.

Vậy tập hợp M là đường tròn bán kính $R = kR_1 = 8$.



Chọn đáp án **A**

8 ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. B	4. A	5. C	6. B	7. B	8. D	9. A	10. C
11. B	12. D	13. A	14. A	15. B	16. D	17. D	18. A	19. D	20. B
21. B	22. A	23. A	24. A	25. C	26. C	27. D	28. C	29. D	30. C
31. D	32. B	33. C	34. D	35. A	36. C	37. A			

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TRÊN TẬP SỐ PHỨC

A KIẾN THỨC CƠ BẢN

1 CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC

Căn bậc hai của số phức $z = x + yi$ là một số phức $w = a + bi$ và tìm như sau

$$a + bi \Leftrightarrow x + yi = (a + bi)^2 \Leftrightarrow (a^2 - b^2) + (2ab) \cdot i = x + yi \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = x \\ 2ab = y \end{cases}$$

Giải hệ này ta tìm được a, b . Từ đó tìm được căn bậc hai của số phức z .

Ta có thể làm tương tự đối với các trường hợp căn bậc ba, bậc bốn.

2 CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm căn bậc hai của số phức $z = -3 + 4i$.

Lời giải.

Gọi $w = a + bi$ là căn bậc hai của số phức z khi đó

$$\begin{aligned} -3 + 4i &= (a + bi)^2 \Leftrightarrow (a^2 - b^2) + (2ab) \cdot i = -3 + 4i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{4}{a^2} + 3 = 0 \\ ab = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 + 3a^2 - 4 = 0 \\ ab = 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ a^2 = -4 \\ ab = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ a = \pm 2i \\ ab = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \Rightarrow b = \pm 2 \\ a = \pm 2i \Rightarrow b = \pm i. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy có hai căn bậc hai của số phức z là $w_1 = 1 + 2i$ và $w_2 = -1 - 2i$. □

Tìm căn bậc, căn bậc bốn của số phức $z = a + bi$ bằng máy tính bỏ túi: Để máy tính ở chế độ ra-đian **[SHIFT]** - **[MODE]** - **[4]** và để chế độ số phức **[SHIFT]** - **[MODE]** - **[2]**.

— Tìm căn bậc hai $\sqrt{|a + bi|} \angle \left(\frac{\arg(a + bi)}{2} + \frac{2\pi X}{2} \right)$ **[CALC]** $\begin{cases} X = 0 \Rightarrow w_1 = \dots \\ X = 1 \Rightarrow w_2 = \dots \end{cases}$

— Tìm căn bậc bốn $\sqrt[4]{|a + bi|} \angle \left(\frac{\arg(a + bi)}{4} + \frac{2\pi X}{4} \right)$ **[CALC]** $\begin{cases} X = 0 \Rightarrow w_1 = \dots \\ X = 1 \Rightarrow w_2 = \dots \\ X = 2 \Rightarrow w_3 = \dots \\ X = 3 \Rightarrow w_4 = \dots \end{cases}$

Trong đó $| \quad |$ bằng **[SHIFT]** - **[HYP]**; $\angle$ bằng **[SHIFT]** - **[(-)]**; $\arg(\quad)$ bằng **[SHIFT]** - **[2]** - **[1]**.

3 BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Tìm căn bậc hai của số phức sau

① $z = -5 + 12i$.

② $z = 8 + 6i$.

③ $z = 3 - 4i$.

④ $z = 33 - 56i$.

⑤ $z = 4 + 6\sqrt{5}i$.

⑥ $z = -1 - 2\sqrt{6}i$.

Lời giải.

- ① Gọi $w = a + bi$ là căn bậc hai của số phức z khi đó

$$\begin{aligned} -5 + 12i &= (a + bi)^2 \Leftrightarrow (a^2 - b^2) + (2ab) \cdot i = -5 + 12i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -5 \\ 2ab = 12 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{36}{a^2} + 5 = 0 \\ ab = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 + 5a^2 - 36 = 0 \\ ab = 6 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ a^2 = -9 \\ ab = 6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 2 \\ a = \pm 3i \\ ab = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 2 \Rightarrow b = \pm 3 \\ a = \pm 3i \Rightarrow b = \mp 2i. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy có hai căn bậc hai của số phức z là $w_1 = 2 + 3i$ và $w_2 = -2 - 3i$.

- ② Gọi $w = a + bi$ là căn bậc hai của số phức z khi đó

$$\begin{aligned} 8 + 6i &= (a + bi)^2 \Leftrightarrow (a^2 - b^2) + (2ab) \cdot i = 8 + 6i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 8 \\ 2ab = 6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{9}{a^2} - 8 = 0 \\ ab = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 8a^2 - 9 = 0 \\ ab = 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ a^2 = -1 \\ ab = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 3 \\ a = \pm i \\ ab = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 2 \Rightarrow b = \pm 1 \\ a = \pm i \Rightarrow b = \mp 3i. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy có hai căn bậc hai của số phức z là $w_1 = 3 + i$ và $w_2 = -3 - i$.

- ③ Gọi $w = a + bi$ là căn bậc hai của số phức z khi đó

$$\begin{aligned} 3 - 4i &= (a + bi)^2 \Leftrightarrow (a^2 - b^2) + (2ab) \cdot i = 3 - 4i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = -4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{4}{a^2} - 3 = 0 \\ ab = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 3a^2 - 4 = 0 \\ ab = -2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = -1 \\ a^2 = -4 \\ ab = -2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm i \\ a = \pm 2i \\ ab = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm i \Rightarrow b = \pm 2i \\ a = \pm 2i \Rightarrow b = \pm 2i. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy có hai căn bậc hai của số phức z là $w_1 = -2 + i$ và $w_2 = 2 - i$.

- ④ Gọi $w = a + bi$ là căn bậc hai của số phức z khi đó

$$\begin{aligned} 33 - 56i &= (a + bi)^2 \Leftrightarrow (a^2 - b^2) + (2ab) \cdot i = 33 - 56i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 33 \\ 2ab = -56 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{784}{a^2} - 33 = 0 \\ ab = -28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 33a^2 - 784 = 0 \\ ab = -28 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = -16 \\ a^2 = 49 \\ ab = -28 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 4i \\ a = \pm 7 \\ ab = -28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 4i \Rightarrow b = \pm 7i \\ a = \pm 7 \Rightarrow b = \mp 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy có hai căn bậc hai của số phức z là $w_1 = 7 - 4i$ và $w_2 = -7 + 4i$.

- ⑤ Gọi $w = a + bi$ là căn bậc hai của số phức z khi đó

$$\begin{aligned} 4 + 6\sqrt{5}i &= (a + bi)^2 \Leftrightarrow (a^2 - b^2) + (2ab) \cdot i = 4 + 6\sqrt{5}i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 4 \\ 2ab = 6\sqrt{5} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{45}{a^2} - 4 = 0 \\ ab = 3\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 4a^2 - 45 = 0 \\ ab = 3\sqrt{5} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ a^2 = -5 \\ ab = 3\sqrt{5} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 3 \\ a = \pm i\sqrt{5} \\ ab = 3\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 3 \Rightarrow b = \pm\sqrt{5} \\ a = \pm i\sqrt{5} \Rightarrow b = \mp 3i. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy có hai căn bậc hai của số phức z là $w_1 = 3 + \sqrt{5}i$ và $w_2 = -3 - \sqrt{5}i$.

⑥ Gọi $w = a + bi$ là căn bậc hai của số phức z khi đó

$$\begin{aligned} -1 - 2\sqrt{6}i &= (a + bi)^2 \Leftrightarrow (a^2 - b^2) + (2ab) \cdot i = -1 - 2\sqrt{6}i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -1 \\ 2ab = -2\sqrt{6} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{6}{a^2} + 1 = 0 \\ ab = -\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 + a^2 - 6 = 0 \\ ab = -\sqrt{6} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 2 \\ a^2 = -3 \\ ab = -\sqrt{6} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm\sqrt{2} \\ a = \pm i\sqrt{3} \\ ab = -\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm\sqrt{2} \Rightarrow b = \mp\sqrt{3} \\ a = \pm i\sqrt{3} \Rightarrow b = \pm i\sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy có hai căn bậc hai của số phức z là $w_1 = \sqrt{2} - i\sqrt{3}$ và $w_2 = -\sqrt{2} + i\sqrt{3}$.

□

4 CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Phương trình bậc hai với hệ số phức

Phương pháp giải:

Xét phương trình bậc hai $az^2 + bz + c = 0$ (1) với $a \neq 0$ có biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

— Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình (1) có nghiệm kép $z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$.

— Nếu $\Delta \neq 0$ và gọi δ là căn bậc hai của Δ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$ và $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$.

Ví dụ 1. Biết z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 4 = 0$. Tính $|z_1| + |z_2|$.

🔗 **Lời giải.**

Ta có $\Delta = b^2 - 4ac = -12$. Căn bậc hai của Δ là $\pm i\sqrt{12}$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt $z_1 = \frac{2 + i\sqrt{12}}{2}$ và $z_2 = \frac{2 - i\sqrt{12}}{2}$.

□

1 BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Giải các phương trình sau trên trường số phức $\mathbb{C}$.

- ① $z^2 - (1 + i)z + 6 + 3i = 0$.
- ② $z^2 + 3(1 + i)z + 5i = 0$.
- ③ $z^2 + (1 + i)z - 2 - i = 0$.
- ④ $z^2 - 8(1 - i)z + 63 - 16i = 0$.
- ⑤ $(2 - 3i)z^2 + (4i - 3)z + 1 - i = 0$.
- ⑥ $4z^2 + (12i - 4)z + 2i - 8 = 0$.

🔗 **Lời giải.**

- ① Ta có $\Delta = (1 + i)^2 - 4(6 + 3i) = -24 - 10i \neq 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt. Gọi $\delta = a + bi$ là căn bậc hai của số phức Δ khi đó

$$\begin{aligned} -24 - 10i &= (a + bi)^2 \Leftrightarrow (a^2 - b^2) + (2ab) \cdot i = -24 - 10i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -24 \\ 2ab = -10 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{25}{a^2} + 24 = 0 \\ ab = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 + 24a^2 - 25 = 0 \\ ab = -5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ a^2 = -25 \\ ab = -5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ a = \pm 5i \\ ab = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \Rightarrow b = \mp 5 \\ a = \pm 5i \Rightarrow b = \pm i \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra có hai căn bậc hai của số phức Δ là $\delta_1 = 1 - 5i$ và $\delta_2 = -1 + 5i$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $z_1 = 1 - 2i$ và $z_2 = 3i$.

- ② Ta có $\Delta = (3 + 3i)^2 - 4 \cdot 5i = -2i \neq 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Dễ thấy căn bậc hai của Δ là $-1 + i$ hoặc $1 - i$.

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $z_1 = 1 - 2i$ và $z_2 = -2 - i$.

- ③ Ta có $\Delta = (1 + i)^2 + 4(2 + i) = 8 + 6i \neq 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Gọi $\delta = a + bi$ là căn bậc hai của số phức Δ khi đó

$$\begin{aligned} 8 + 6i &= (a + bi)^2 \Leftrightarrow (a^2 - b^2) + (2ab) \cdot i = 8 + 6i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 8 \\ 2ab = 6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{9}{a^2} - 8 = 0 \\ ab = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 8a^2 - 9 = 0 \\ ab = 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = -1 \\ a^2 = 9 \\ ab = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm i \\ a = \pm 3 \\ ab = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm i \Rightarrow b = \mp 3i \\ a = \pm 3 \Rightarrow b = \pm 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra có hai căn bậc hai của số phức Δ là $\delta_1 = 3 + i$ và $\delta_2 = -3 - i$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $z_1 = 1$ và $z_2 = -2 - i$.

- ④ Ta có $\Delta = (8 - 8i)^2 - 4(63 - 16i) = -252 - 64i \neq 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Gọi $\delta = a + bi$ là căn bậc hai của số phức Δ khi đó

$$\begin{aligned} -252 - 64i &= (a + bi)^2 \Leftrightarrow (a^2 - b^2) + (2ab) \cdot i = -252 - 64i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -252 \\ 2ab = -64 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{1024}{a^2} + 252 = 0 \\ ab = -32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 + 252a^2 - 1024 = 0 \\ ab = -32 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ a^2 = -256 \\ ab = -32 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 2 \\ a = \pm 16i \\ ab = -32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 2 \Rightarrow b = \mp 16 \\ a = \pm 16i \Rightarrow b = \pm 2i. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra có hai căn bậc hai của số phức Δ là $\delta_1 = 2 - 16i$ và $\delta_2 = -2 + 16i$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $z_1 = 5 - 12i$ và $z_2 = 3 + 4i$.

- ⑤ Ta có $\Delta = (4i - 3)^2 - 4(1 - i)(2 - 3i) = -3 - 4i \neq 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Gọi $\delta = a + bi$ là căn bậc hai của số phức Δ khi đó

$$\begin{aligned} -3 - 4i &= (a + bi)^2 \Leftrightarrow (a^2 - b^2) + (2ab) \cdot i = -3 - 4i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = -4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{4}{a^2} + 3 = 0 \\ ab = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 + 3a^2 - 4 = 0 \\ ab = -2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ a^2 = -4 \\ ab = -2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ a = \pm 2i \\ ab = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \Rightarrow b = \mp 2 \\ a = \pm 2i \Rightarrow b = \pm i. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra có hai căn bậc hai của số phức Δ là $\delta_1 = 1 - 2i$ và $\delta_2 = -1 + 2i$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $z_1 = 1$ và $z_2 = -\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$.

- ⑥ Ta có $\Delta = (12i - 4)^2 - 16(2i - 8) = -128i \neq 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Gọi $\delta = a + bi$ là căn bậc hai của số phức Δ khi đó

$$\begin{aligned} -128i &= (a + bi)^2 \Leftrightarrow (a^2 - b^2) + (2ab) \cdot i = -128i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = -128 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 8i \\ a = -b = -8i. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra có hai căn bậc hai của số phức Δ là $\delta_1 = -8 + 8i$ và $\delta_2 = 8 - 8i$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $z_1 = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$ và $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

□

Bài 2. Giải các phương trình sau trên tập số phức.

① $z^3 - 2(1+i)z^2 + 4(1+i)z - 8i = 0.$

🔗 **Lời giải.**

Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} (z-2i)(z^2-2z+4) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} z=2i \\ z^2-2z+4=0. \end{cases} & \quad (1) \end{aligned}$$

Giải (1). $\Delta' = -3$ có một căn bậc hai là $\sqrt{3}i$ nên (1) có hai nghiệm phân biệt $z = 1 \pm \sqrt{3}i$. □

② $z^3 + (1+i)z^2 + (3+i)z + 3i = 0.$

🔗 **Lời giải.**

Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} (z+i)(z^2+z+3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} z=-i \\ z^2+z+3=0. \end{cases} & \quad (1) \end{aligned}$$

Giải (1). $\Delta = -11$ có một căn bậc hai là $\sqrt{11}i$ nên (1) có hai nghiệm phân biệt $z = \frac{-1 \pm \sqrt{11}i}{2}$. □

③ $z^3 + (2-2i)z^2 + (5-4i)z - 10i = 0.$

🔗 **Lời giải.**

Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} (z-2i)(z^2+2z+5) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} z=2i \\ z^2+2z+5=0. \end{cases} & \quad (1) \end{aligned}$$

Giải (1). $\Delta' = -4$ có một căn bậc hai là $2i$ nên (1) có hai nghiệm phân biệt $z = -1 \pm 2i$. □

Bài 3. Giải các phương trình sau trên tập số phức.

① $2z^3 - 5z^2 + 3z + 3 + (2z+1)i = 0.$

🔗 **Lời giải.**

Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} (2z+1)(z^2-3z+3+i) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} z=-\frac{1}{2} \\ z^2-3z+3+i=0. \end{cases} & \quad (1) \end{aligned}$$

Giải (1). $\Delta = -3-4i$, gọi $a+bi$ là một căn bậc hai của Δ , ta có

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{2}{a} \\ a^2 - \frac{4}{a^2} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a; b) = (1; -2) \\ (a; b) = (-1; 2). \end{cases}$$

Do đó Δ có một căn bậc hai là $1-2i$ nên (1) có hai nghiệm phân biệt $z = 1+i, z = 2-i$. □

② $z^3 - 2(1+i)z^2 + 3iz + 1 - i = 0.$

🔗Lời giải.

Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} (z-1)(z^2 - (1+2i)z - 1 + i) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z^2 - (1+2i)z - 1 + i = 0. \end{cases} & (1) \end{aligned}$$

Giải (1). $\Delta = 1$ có một căn bậc hai là 1 nên (1) có hai nghiệm phân biệt $z = i, z = 1 + i.$ □

③ $z^3 - (2i-1)z^2 + (3-2i)z + 3 = 0.$

🔗Lời giải.

Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} (z+1)(z^2 - 2iz + 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 \\ z^2 - 2iz + 3 = 0. \end{cases} & (1) \end{aligned}$$

Giải (1). $\Delta' = -4$ có một căn bậc hai là $2i$ nên (1) có hai nghiệm phân biệt $z = 3i, z = -i.$ □

Bài 4. Giải các phương trình sau trên tập số phức.

① $z^4 - z^3 + \frac{z^2}{2} + z + 1 = 0.$

🔗Lời giải.

Rõ ràng $z = 0$ không là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế cho z^2 ta được phương trình tương đương

$$\begin{aligned} z^2 - z + \frac{1}{2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(z - \frac{1}{z}\right)^2 - \left(z - \frac{1}{z}\right) + \frac{5}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Ta có $\Delta = -9 = (3i)^2$ nên $\begin{cases} z - \frac{1}{z} = \frac{1-3i}{2} \\ z - \frac{1}{z} = \frac{1+3i}{2} \end{cases}.$

— Với $z - \frac{1}{z} = \frac{1-3i}{2} \Leftrightarrow 2z^2 - (1-3i)z - 2 = 0, \Delta = 8-6i = (3-i)^2.$ Do đó $z = 1-i; z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$

— Với $z - \frac{1}{z} = \frac{1+3i}{2} \Leftrightarrow 2z^2 - (1+3i)z - 2 = 0, \Delta = 8+6i = (3+i)^2.$ Do đó $z = 1+i; z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$ □

② $(z-i)(z+2i)(z+4i)(z+7i) = 34.$

🔗Lời giải.

Phương trình tương đương với

$$(z^2 + 6iz + 7)(z^2 + 6iz - 8) = 34.$$

Đặt $z^2 + 6iz + 7 = t$ ta được phương trình

$$t(t-15) = 34 \Leftrightarrow t^2 - 15t - 34 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 17 \\ t = -2. \end{cases}$$

— Với $t = 17 \Rightarrow z^2 + 6iz - 10 = 0, \Delta' = 1 \Rightarrow z = -3i \pm 1.$

— Với $t = -2 \Rightarrow z^2 + 6iz + 7 = -2, \Delta' = -18 = (3\sqrt{2}i)^2 \Rightarrow z = -3i \pm 3\sqrt{2}i.$ □

Dạng 2. Tìm các thuộc tính của số phức thỏa mãn điều kiện K*Phương pháp giải:*

- **Bước 1:** Gọi số phức cần tìm là $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.
- **Bước 2:** Biến đổi điều kiện K (thường liên quan đến mô-đun, biểu thức có chứa $z, \bar{z}, |z|, \dots$) để đưa về phương trình hoặc hệ phương trình nhờ hai số phức bằng nhau, rồi suy ra x, y và z .

Trong tập số phức $\mathbb{C}$, cho số phức $z = x + yi$ có phần thực là x phần ảo là y với $x, y \in \mathbb{R}$ và $i^2 = -1$. Khi đó, ta cần nhớ

- Mô-đun của số phức $z = x + yi$ là $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Số phức liên hợp của $z = x + yi$ là $\bar{z} = x - yi$.
- Hai số phức $z_1 = x_1 + y_1i$ và $z_2 = x_2 + y_2i$ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi
$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

Trong tài liệu này, để cho ngắn gọn, ta kí hiệu phần thực và phần ảo của số phức z lần lượt là $\text{Re}(z)$ và $\text{Im}(z)$.

1 CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm phần thực, phần ảo, số phức liên hợp và tính mô-đun của số phức trong các trường hợp sau:

$$\textcircled{1} z = (2 + 4i) + 2i(1 - 3i).$$

$$\textcircled{2} z = \frac{2 - i}{1 - 2i} - \frac{1 + i}{3i}.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \text{ Ta có } z = 2 + 4i + 2i + 6 = 8 + 6i, \text{ nên } \bar{z} = 8 - 6i, \text{Re}(z) = 8, \text{Im}(z) = 6 \text{ và } |z| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$

$$\textcircled{2} \text{ Ta có } z = \frac{(2 - i)(1 + 2i)}{1 + 4} - \frac{(1 + i)i}{-3} = \frac{2 + 2 + (4 - 1)i}{5} + \frac{-1 + i}{3} = \frac{17}{15} + \frac{14}{15}i.$$

Suy ra $\bar{z} = \frac{17}{15} - \frac{14}{15}i$, $\text{Re}(z) = \frac{17}{15}$, $\text{Im}(z) = \frac{14}{15}$ và $|z| = \sqrt{\left(\frac{17}{15}\right)^2 + \left(\frac{14}{15}\right)^2} = \frac{7\sqrt{5}}{15}$.

□

Ví dụ 2. Tìm các số thực x, y thỏa mãn điều kiện:

$$\textcircled{1} (2 - i)x + (2 + y)i = 2 + 2i.$$

$$\textcircled{2} \frac{x - 2}{1 + i} + \frac{y - 3}{1 - i} = i.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \text{ Ta có}$$

$$\begin{aligned} (2 - i)x + (2 + y)i &= 2 + 2i \\ \Leftrightarrow 2x + (2 + y - x)i &= 2 + 2i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2 \\ 2 + y - x = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

② Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{x-2}{1+i} + \frac{y-3}{1-i} = i \\ \Leftrightarrow & (x-2)(1-i) + (y-3)(1+i) = i(1+1) \\ \Leftrightarrow & (x+y-5) + (y-x-1)i = 2i \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x+y-5=0 \\ y-x-1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4. \end{cases} \end{aligned}$$

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Tìm phần thực, phần ảo, số phức liên hợp và tính mô-đun của số phức trong các trường hợp sau.

① $z = (3-2i)^2 + (2+i)^3$.

🔗 **Lời giải.**

Ta có $z = (9-4-12i) + (8+12i-6-i) = 7-i$.

Suy ra $\bar{z} = 7+i$, $\text{Re}(z) = 7$, $\text{Im}(z) = -1$ và $|z| = \sqrt{7^2 + (-1)^2} = 5\sqrt{2}$. □

② $\omega = z_1 - 2z_2$, biết rằng $z_1 = 1+2i$, $z_2 = 2-3i$.

🔗 **Lời giải.**

Ta có $\omega = 1+2i-2(2-3i) = -3+8i$, nên $\bar{\omega} = -3-8i$, $\text{Re}(\omega) = -3$, $\text{Im}(\omega) = 8$ và $|\omega| = \sqrt{(-3)^2 + 8^2} = \sqrt{73}$. □

③ $z = (1+i)^n$, với $n \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $\log_4(n-3) + \log_4(n+9) = 3$.

🔗 **Lời giải.**

Ta có

$$\log_4(n-3) + \log_4(n+9) = 3 \Leftrightarrow (n-3)(n+9) = 4^3 \Leftrightarrow n = 7.$$

Do đó $z = (1+i)^7 = (2i)^3(1+i) = -8i(1+i) = 8-8i$. Suy ra $\bar{z} = 8+8i$, $\text{Re}(z) = 8$, $\text{Im}(z) = -8$ và $|z| = 8\sqrt{2}$. □

④ $z = \frac{(1+i)^{100}}{(1-i)^{96} - i(1+i)^{98}}$.

🔗 **Lời giải.**

Ta có

- $(1+i)^{100} = (2i)^{50} = 2^{50} \cdot (i^2)^{25} = -2^{50}$.
- $(1-i)^{96} = (-2i)^{48} = 2^{48} \cdot (i^2)^{24} = 2^{48}$.
- $i(1+i)^{98} = i(2i)^{49} = -2^{49} \cdot (i^2)^{24} = -2^{49}$.

Do đó $z = \frac{-2^{50}}{2^{48} + 2^{49}} = \frac{-2^2}{1+2} = -\frac{4}{3}$. Suy ra $\bar{z} = -\frac{4}{3}$, $\text{Re}(z) = -\frac{4}{3}$, $\text{Im}(z) = 0$ và $|z| = \frac{4}{3}$. □

⑤ $z = \left(\frac{z_1 - 3\bar{z}_2}{4z_2} \right)^{2015}$, với $z_1 = 4+3i$, $z_2 = -i$.

🔗 **Lời giải.**

Ta có $\frac{z_1 - 3\bar{z}_2}{4z_2} = \frac{4+3i-3i}{-4i} = i$.

Nên $z = i^{2015} = (i^2)^{1007} \cdot i = -i$. Suy ra $\bar{z} = i$, $\text{Re}(z) = 0$, $\text{Im}(z) = -1$ và $|z| = 1$. □

⑥ $\bar{z} = (\sqrt{2}+i)^2(1-i\sqrt{2})$.

🔗 **Lời giải.**

Ta có $\bar{z} = (2-1+2\sqrt{2}i)(1-i\sqrt{2}) = 1+4+(2\sqrt{2}-\sqrt{2})i = 5+\sqrt{2}i$.

Suy ra $z = 5-\sqrt{2}i$, $\text{Re}(z) = 5$, $\text{Im}(z) = -\sqrt{2}$, $|z| = 3\sqrt{3}$. □

$$\textcircled{7} \quad z = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i} \right)^3.$$

🔗 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } z = \frac{(1 + i\sqrt{3})^3}{(1 + i)^3} = \frac{1 + 3\sqrt{3}i - 9 - 3\sqrt{3}i}{1 + 3i - 3 - i} = \frac{-8}{-2 + 2i} = \frac{4}{1 - i} = \frac{4(1 + i)}{1 + 1} = 2 + 2i.$$

Suy ra $\bar{z} = 2 - 2i$, $\text{Re}(z) = \text{Im}(z) = 2$ và $|z| = 2\sqrt{2}$. □

Bài 2. Tìm các số thực x, y thỏa mãn điều kiện.

$$\textcircled{1} \quad (1 - 2i)x + (1 + 2y)i = 1 + i.$$

🔗 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} (1 - 2i)x + (1 + 2y)i &= 1 + i \\ \Leftrightarrow x + (1 + 2y - 2x)i &= 1 + i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 1 + 2y - 2x = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

□

$$\textcircled{2} \quad \frac{x - 3}{3 + i} + \frac{y - 3}{3 - i} = i.$$

🔗 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{x - 3}{3 + i} + \frac{y - 3}{3 - i} &= i \\ \Leftrightarrow (x - 3)(3 - i) + (y - 3)(3 + i) &= i(9 + 1) \\ \Leftrightarrow (3x + 3y - 18) + (y - x)i &= 10i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3y - 18 = 0 \\ y - x = 10 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 8. \end{cases} \end{aligned}$$

□

Bài 3. Tính $P = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)^3 + \left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right)^4 + \left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right)^5$, biết $z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

🔗 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} &= \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{-1 + i\sqrt{3}} = \frac{(-1 + i\sqrt{3})^2 + 4}{2(-1 + i\sqrt{3})} = \frac{(1 - 3 + 4 - 2\sqrt{3}i)(-1 - i\sqrt{3})}{2(1 + 3)} \\ &= \frac{-2(1 - \sqrt{3}i)(1 + \sqrt{3}i)}{8} = \frac{-(1 + 3)}{4} = -1. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} z^2 + \frac{1}{z^2} &= \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 = -1; \\ z^3 + \frac{1}{z^3} &= \left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - 3\left(z + \frac{1}{z}\right) = 2; \\ z^4 + \frac{1}{z^4} &= \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)^2 - 2 = -1. \end{aligned}$$

Do đó $P = (-1)^2 + (-1)^3 + 2^4 + (-1)^5 = 15$. □

Bài 4. Tìm phần thực, phần ảo, số phức liên hợp và tính mô-đun của số phức trong các trường hợp sau.

① $\omega = z_1 \cdot z_2$, biết rằng $z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = 3 - 4i$.

🔗Lời giải.

Ta có $\omega = (2 + 5i) \cdot (3 - 4i) = 6 + 20 + (15 - 8)i = 26 + 7i$.

Suy ra $\bar{\omega} = 26 - 7i$, $\text{Re}(\omega) = 26$, $\text{Im}(\omega) = 7$ và $|\omega| = \sqrt{26^2 + 7^2} = 5\sqrt{29}$. □

② $z = (2 - 4i)(5 + 2i) + \frac{4 - 2i}{1 + i}$.

🔗Lời giải.

Ta có $z = 10 + 8 + (4 - 20)i + \frac{2(2 - i)(1 - i)}{1 + 1} = 18 - 16i + (2 - 1) + (-2 - 1)i = 19 - 19i$.

Suy ra $\bar{z} = 19 + 19i$, $\text{Re}(z) = 19$, $\text{Im}(z) = -19$ và $|z| = \sqrt{19^2 + (-19)^2} = 19\sqrt{2}$. □

③ $\bar{z} = (1 + i)^{2020}$.

🔗Lời giải.

Ta có $\bar{z} = (1 + 2i - 1)^{1010} = 2^{1010}(i^2)^{505} = -2^{1010}$. Nên $z = -2^{1010}$, $\text{Re}(z) = -2^{1010}$, $\text{Im}(z) = 0$ và $|z| = 2^{1010}$. □

④ $z = 1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + (1 + i)^3 + \dots + (1 + i)^{20}$.

🔗Lời giải.

Theo công thức tổng của một cấp số nhân ta có

$$z = \frac{1[1 - (1 + i)^{21}]}{1 - (1 + i)} = \frac{1 - (2i)^{10}(1 + i)}{-i} = [1 + 2^{10}(1 + i)]i = -2^{10} + (2^{10} + 1)i.$$

Suy ra $\bar{z} = -2^{10} - (2^{10} + 1)i$, $\text{Re}(z) = -2^{10}$, $\text{Im}(z) = 1 + 2^{10}$, $|z| = \sqrt{2^{20} + (2^{10} + 1)^2}$. □

Bài 5. Tìm các số thực x, y thỏa mãn điều kiện.

① $\frac{x + yi}{1 - i} = 3 + 2i$.

🔗Lời giải.

Ta có

$$\frac{x + yi}{1 - i} = 3 + 2i \Leftrightarrow x + yi = (3 + 2i)(1 - i) \Leftrightarrow x + yi = 3 + 2 + (2 - 3)i \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -1. \end{cases}$$

□

② $(-1 + 4i)x + (1 + 2i)^3y = 2 + 9i$.

🔗Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & (-1 + 4i)x + (1 + 2i)^3y = 2 + 9i \\ \Leftrightarrow & (-1 + 4i)x + (1 + 6i - 12 - 8i)y = 2 + 9i \\ \Leftrightarrow & (-x - 11y) + (4x - 2y)i = 2 + 9i \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -x - 11y = 2 \\ 4x - 2y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{95}{46} \\ y = -\frac{17}{46}. \end{cases} \end{aligned}$$

□

Bài 6. Tìm x, y để hai số phức $z_1 = 9y^2 - 4 - 10xi^5$ và $z_2 = 8y^2 + 20i^{11}$ là liên hợp của nhau.

🔗Lời giải.

Ta có $\begin{cases} z_1 = 9y^2 - 4 - 10xi^5 = 9y^2 - 4 - 10xi \\ z_2 = 8y^2 + 20i^{11} = 8y^2 - 20i. \end{cases}$

Do đó $z_1 = \bar{z}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 9y^2 - 4 = 8y^2 \\ -10x = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = \pm 2. \end{cases}$ □

Trong bài toán tìm thuộc tính của số phức z thỏa điều kiện K cho trước, nếu K là thuần z (tất cả đều z) hoặc thuần $\bar{z}$ thì đó là bài toán giải phương trình bậc nhất (phép cộng - trừ - nhân - chia số phức) với ẩn z (hoặc $\bar{z}$). Còn nếu chứa hai loại trở lên ($z, \bar{z}, |z|$) thì ta sẽ gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$. Từ đó sử dụng các phép toán trên số phức để đưa về hai số phức bằng nhau khi và chỉ khi thực = thực, ảo = ảo để giải hệ phương trình tìm $x, y \Rightarrow z$ cần tìm.

Bài 7. Tìm phần thực, phần ảo, số phức liên hợp và tính mô-đun của số phức trong các trường hợp:

① $(1 - i)z + (2 - i) = 4 - 5i$. (TN - 2011)

🔗Lời giải.

Ta có $(1 - i)z + (2 - i) = 4 - 5i \Leftrightarrow (1 - i)z = 2 - 4i \Leftrightarrow z = \frac{2 - 4i}{1 - i} = 3 - i$.

Vậy số phức $z = 3 - i$ có phần thực là 3, phần ảo là -1, số phức liên hợp là $\bar{z} = 3 + i$, mô-đun là $|z| = \sqrt{10}$. $\square$

② $2z - i\bar{z} = 2 + 5i$. (CĐ - 2014)

🔗Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$. Ta có

$$2z - i\bar{z} = 2 + 5i \Leftrightarrow 2(x + yi) - i(x - yi) = 2 + 5i \Leftrightarrow 2x - y + (2y - x)i = 2 + 5i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2y - x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = 3 + 4i.$$

Vậy số phức $z = 3 + 4i$ có phần thực là 3, phần ảo là 4, số phức liên hợp là $\bar{z} = 3 - 4i$, mô-đun là $|z| = 5$. $\square$

③ $(1 + i)^2(2 - i)z = 8 + i + (1 + 2i)z$. (CĐ - 2009)

🔗Lời giải.

Ta có $(1 + i)^2(2 - i)z = 8 + i + (1 + 2i)z \Leftrightarrow (2 + 4i)z - (1 + 2i)z = 8 + i \Leftrightarrow (1 + 2i)z = 8 + i \Leftrightarrow z = \frac{8 + i}{1 + 2i} = 2 - 3i$.

Vậy số phức $z = 2 - 3i$ có phần thực là 2, phần ảo là -3, số phức liên hợp là $\bar{z} = 2 + 3i$, mô-đun là $|z| = \sqrt{13}$. $\square$

④ $(2 - 3i)z + (4 + i)\bar{z} = -(1 + 3i)^2$. (CĐ - 2010)

🔗Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$. Ta có

$$\begin{aligned} (2 - 3i)z + (4 + i)\bar{z} &= -(1 + 3i)^2 \Leftrightarrow (2 - 3i)(x + yi) + (4 + i)(x - yi) = 8 - 6i \\ &\Leftrightarrow 6x + 4y - (2x + 2y)i = 8 - 6i \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 4y = 8 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z = -2 + 5i.$$

Vậy số phức $z = -2 + 5i$ có phần thực là -2, phần ảo là 5, số phức liên hợp là $\bar{z} = -2 - 5i$, mô-đun là $|z| = \sqrt{29}$. $\square$

⑤ $z + (2 + i)\bar{z} = 3 + 5i$. (A, A1 - 2014)

🔗Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$. Ta có

$$z + (2 + i)\bar{z} = 3 + 5i \Leftrightarrow x + yi + (2 + i)(x - yi) = 3 + 5i \Leftrightarrow 3x + y + (x - y)i = 3 + 5i \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 3 \\ x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = 2 - 3i.$$

Vậy số phức $z = 2 - 3i$ có phần thực là 2, phần ảo là -3, số phức liên hợp là $\bar{z} = 2 + 3i$, mô-đun là $|z| = \sqrt{13}$. $\square$

⑥ $2z + 3(1 - i)\bar{z} = 1 - 9i$. (B - 2014)

🔗Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$. Ta có

$$2z + 3(1 - i)\bar{z} = 1 - 9i \Leftrightarrow 2(x + yi) + 3(1 - i)(x - yi) = 1 - 9i \Leftrightarrow 5x - 3y - (3x + y)i = 1 - 9i \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 3x + y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = 2 + 3i.$$

Vậy số phức $z = 2 + 3i$ có phần thực là 2, phần ảo là 3, số phức liên hợp là $\bar{z} = 2 - 3i$, mô-đun là $|z| = \sqrt{13}$. $\square$

⑦ $(3z - \bar{z})(1 + i) - 5z = 8i - 1$. (D - 2014)

🔗Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$. Ta có

$$\begin{aligned} (3z - \bar{z})(1 + i) - 5z &= 8i - 1 \Leftrightarrow (2x + 4yi)(1 + i) - 5(x + yi) = 8i - 1 \\ &\Leftrightarrow -3x - 4y + (2x - y)i = 8i - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 2x - y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z = 3 - 2i.$$

Vậy số phức $z = 3 - 2i$ có phần thực là 3, phần ảo là -2, số phức liên hợp là $\bar{z} = 3 + 2i$, mô-đun là $|z| = \sqrt{13}$. $\square$

⑧ $z - (2 + 3i)\bar{z} = 1 - 9i$. (D - 2011 CB)

🔗Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$. Ta có

$$z - (2 + 3i)\bar{z} = 1 - 9i \Leftrightarrow x + yi - (2 + 3i)(x - yi) = 1 - 9i \Leftrightarrow -x - 3y - (3x - 3y)i = 1 - 9i \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 3y = 1 \\ 3x - 3y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = 2 - i.$$

Vậy số phức $z = 2 - i$ có phần thực là 2, phần ảo là -1, số phức liên hợp là $\bar{z} = 2 + i$, mô-đun là $|z| = \sqrt{5}$. $\square$

⑨ $(2z - 1)(1 + i) + (\bar{z} + 1)(1 - i) = 2 - 2i$. (A - 2011 NC)

🔗Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$. Ta có

$$\begin{aligned} (2z - 1)(1 + i) + (\bar{z} + 1)(1 - i) &= 2 - 2i \Leftrightarrow (2x - 1 + 2yi)(1 + i) + (x + 1 - yi)(1 - i) = 2 - 2i \\ &\Leftrightarrow 3x - 3y + (x + y - 2)i = 2 - 2i \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y = 2 \\ x + y - 2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i.$$

Vậy số phức $z = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$ có phần thực là $\frac{1}{3}$, phần ảo là $-\frac{1}{3}$, số phức liên hợp là $\bar{z} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i$, mô-đun là $|z| = \frac{\sqrt{2}}{3}$. $\square$

⑩ $z\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 4 - 3i$.

🔗Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$. Ta có

$$z\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 4 - 3i \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6yi = 4 - 3i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 6y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\sqrt{15}}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = \pm \frac{\sqrt{15}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Kết luận

— Số phức $z = \frac{\sqrt{15}}{2} - \frac{1}{2}i$ có phần thực là $\frac{\sqrt{15}}{2}$, phần ảo là $-\frac{1}{2}$, số phức liên hợp là $\bar{z} = \frac{\sqrt{15}}{2} + \frac{1}{2}i$, mô-đun là $|z| = 2$.

— Số phức $z = -\frac{\sqrt{15}}{2} - \frac{1}{2}i$ có phần thực là $-\frac{\sqrt{15}}{2}$, phần ảo là $-\frac{1}{2}$, số phức liên hợp là $\bar{z} = -\frac{\sqrt{15}}{2} + \frac{1}{2}i$, mô-đun là $|z| = 2$.

□

(11) $z^3 = 18 + 26i$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có

$$z^3 = 18 + 26i \Leftrightarrow (x + yi)^3 = 18 + 26i \Leftrightarrow x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i = 18 + 26i \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 18 & (1) \\ 3x^2y - y^3 = 26 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra $13(x^3 - 3xy^2) - 9(3x^2y - y^3) = 0 \Leftrightarrow 13x^3 - 27x^2y - 39xy^2 + 9y^3 = 0 \Rightarrow x = 3y$, thay vào (1), ta được $27y^3 - 9y^3 = 18 \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow z = 3 + i$.

Do đó, ta có $z^3 = 18 + 26i \Leftrightarrow z^3 = (3 + i)^3 \Leftrightarrow (z - 3 - i)[z^2 + (3 + i)z + 8 + 6i] = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 + i \\ z^2 + (3 + i)z + 8 + 6i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 + i \\ z = \frac{-3 + \sqrt{3} - (1 + 3\sqrt{3})i}{2} \\ z = \frac{-3 - \sqrt{3} - (1 - 3\sqrt{3})i}{2} \end{cases}$$

Kết luận

— Số phức $z = 3 + i$ có phần thực là 3, phần ảo là 1, số phức liên hợp là $\bar{z} = 3 - i$, mô-đun là $|z| = \sqrt{10}$.

— Số phức $z = \frac{-3 + \sqrt{3} - (1 + 3\sqrt{3})i}{2}$ có phần thực là $\frac{-3 + \sqrt{3}}{2}$, phần ảo là $-\frac{1 + 3\sqrt{3}}{2}$, số phức liên hợp là $\bar{z} = \frac{-3 + \sqrt{3} + (1 + 3\sqrt{3})i}{2}$, mô-đun là $|z| = \sqrt{10}$.

— Số phức $z = \frac{-3 - \sqrt{3} - (1 - 3\sqrt{3})i}{2}$ có phần thực là $\frac{-3 - \sqrt{3}}{2}$, phần ảo là $-\frac{1 - 3\sqrt{3}}{2}$, số phức liên hợp là $\bar{z} = \frac{-3 - \sqrt{3} + (1 - 3\sqrt{3})i}{2}$, mô-đun là $|z| = \sqrt{10}$.

Vậy số phức

□

(12) $z^2 + |z| = 0$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ta có

$$z^2 + |z| = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} + 2xyi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow z = 0$ hoặc $z = i$ hoặc $z = -i$.

Kết luận

— Số phức $z = 0$ có phần thực là 0, phần ảo là 0, số phức liên hợp là $\bar{z} = 0$, mô-đun là $|z| = 0$.

- Số phức $z = i$ có phần thực là 0, phần ảo là 1, số phức liên hợp là $\bar{z} = -i$, mô-đun là $|z| = 1$.
- Số phức $z = -i$ có phần thực là 0, phần ảo là -1 , số phức liên hợp là $\bar{z} = i$, mô-đun là $|z| = 1$.

□

(13) $z^2 = |z|^2 + \bar{z}$. (A - 2011 CB)

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ta có

$$\begin{aligned} z^2 = |z|^2 + \bar{z} &\Leftrightarrow (x + yi)^2 = x^2 + y^2 + x - yi \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = x^2 + y^2 + x - yi \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = x^2 + y^2 + x \\ 2xy = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y^2 \\ (2x + 1)y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \pm \frac{1}{2} \end{cases}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z = 0; z = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i.$$

Kết luận

- Số phức $z = 0$ có phần thực là 0, phần ảo là 0, số phức liên hợp là $\bar{z} = 0$, mô-đun là $|z| = 0$.
- Số phức $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ có phần thực là $-\frac{1}{2}$, phần ảo là $\frac{1}{2}$, số phức liên hợp là $\bar{z} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, mô-đun là $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Số phức $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ có phần thực là $-\frac{1}{2}$, phần ảo là $-\frac{1}{2}$, số phức liên hợp là $\bar{z} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, mô-đun là $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

□

(14) $(z + 1)^2 + |z - 1|^2 + 10i = \bar{z} + 3$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$. Ta có

$$\begin{aligned} (z + 1)^2 + |z - 1|^2 + 10i = \bar{z} + 3 &\Leftrightarrow (x + yi + 1)^2 + (x - 1)^2 + y^2 + 10i = x - yi + 3 \\ &\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 1 + 2xyi + 2yi + 2x + x^2 - 2x + 1 + y^2 + 10i = x + 3 - yi \\ &\Leftrightarrow 2x^2 + 2 + (2xy + 2y + 10)i = x + 3 - yi \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2 = x + 3 \\ 2xy + 2y + 10 = -y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -5 \end{cases}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z = 1 - 2i; z = -\frac{1}{2} - 5i.$$

Kết luận

- Số phức $1 - 2i$ có phần thực là 1, phần ảo là -2 , số phức liên hợp là $\bar{z} = 1 + 2i$, mô-đun là $|z| = \sqrt{5}$.
- Số phức $-\frac{1}{2} - 5i$ có phần thực là $-\frac{1}{2}$, phần ảo là -5 , số phức liên hợp là $\bar{z} = -\frac{1}{2} + 5i$, mô-đun là $|z| = \frac{\sqrt{101}}{2}$.

□

⑮ $\bar{z} - \frac{5 + i\sqrt{3}}{z} - 1 = 0. \text{ (B - 2011 CB)}$

🔗Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$. Ta có

$$\begin{aligned}\bar{z} - \frac{5 + i\sqrt{3}}{z} - 1 = 0 &\Leftrightarrow z\bar{z} - z = 5 + i\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - yi = 5 + i\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - x = 5 \\ y = -\sqrt{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -\sqrt{3} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 2 \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow z = -1 - i\sqrt{3}; z = 2 - i\sqrt{3}.$$

Kết luận

- Số phức $-1 - i\sqrt{3}$ có phần thực là -1 , phần ảo là $-\sqrt{3}$, số phức liên hợp là $\bar{z} = -1 + i\sqrt{3}$, mô-đun là $|z| = 2$.
- Số phức $2 - i\sqrt{3}$ có phần thực là 2 , phần ảo là $-\sqrt{3}$, số phức liên hợp là $\bar{z} = 2 + i\sqrt{3}$, mô-đun là $|z| = \sqrt{7}$.

□

⑯ $\frac{iz - (1 + 3i)\bar{z}}{1 + i} = |z|^2.$

🔗Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi, |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{iz - (1 + 3i)\bar{z}}{1 + i} = |z|^2 &\Leftrightarrow (1 + i)(x + yi) - (4 + 2i)(x - yi) = 2(x^2 + y^2) \\ &\Leftrightarrow -3x - 3y + (5y - x)i = 2x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 3y = 2x^2 + 2y^2 \\ 5y - x = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -\frac{45}{26} \\ y = -\frac{9}{26} \end{cases}.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow z = 0; z = -\frac{45}{26} - \frac{9}{26}i.$$

Kết luận

- Số phức $z = 0$ có phần thực là 0 , phần ảo là 0 , số phức liên hợp là $\bar{z} = 0$, mô-đun là $|z| = 0$.
- Số phức $-\frac{45}{26} - \frac{9}{26}i$ có phần thực là $-\frac{45}{26}$, phần ảo là $-\frac{9}{26}$, số phức liên hợp là $\bar{z} = -\frac{45}{26} + \frac{9}{26}i$, mô-đun là $|z| = \frac{9\sqrt{26}}{26}$.

□

⑰ $z + \frac{1 + i}{(1 - i)\bar{z}} = (1 - i)|z|.$

🔗Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ta có

$$\begin{aligned} z + \frac{1+i}{(1-i)\bar{z}} &= (1-i)|z| \stackrel{z \neq 0}{\Leftrightarrow} z\bar{z} + i = (1-i)|z|\bar{z} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + i = (1-i)(x-yi)\sqrt{x^2 + y^2} \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + i = (x-y)\sqrt{x^2 + y^2} - (x+y)\sqrt{x^2 + y^2}i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = (x-y)\sqrt{x^2 + y^2} \\ 1 = -(x+y)\sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = x-y \\ y^2 - x^2 = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq y \\ xy = 0 \\ y^2 - x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

$\Rightarrow z = -i$.

Vậy số phức $z = -i$ có phần thực là 0, phần ảo là -1 , số phức liên hợp là $\bar{z} = i$, mô-đun là $|z| = 1$. $\square$

(18) $z + i - (i+1) \cdot \frac{\bar{z}}{z} = \bar{z}$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ta có

$$\begin{aligned} z + i - (i+1) \cdot \frac{\bar{z}}{z} &= \bar{z} \stackrel{z \neq 0}{\Leftrightarrow} z^2 + iz - (i+1)\bar{z} = z\bar{z} \Leftrightarrow (x+yi)^2 + i(x+yi) - (i+1)(x-yi) = x^2 + y^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi + xi - y - xi - y - x + yi = x^2 + y^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - x - 2y = x^2 + y^2 \\ 2xy + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 + 2y + x = 0 \\ (2x+1)y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2} \end{cases}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z = -\frac{1}{2} + \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}i.$$

Kết luận

- Số phức $z = -\frac{1}{2} + \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}i$ có phần thực là $-\frac{1}{2}$, phần ảo là $\frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$, số phức liên hợp là $\bar{z} = -\frac{1}{2} - \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}i$, mô-đun là $|z| = \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}{2}$.
- Số phức $z = -\frac{1}{2} + \frac{-1 - \sqrt{2}}{2}i$ có phần thực là $-\frac{1}{2}$, phần ảo là $\frac{-1 - \sqrt{2}}{2}$, số phức liên hợp là $\bar{z} = -\frac{1}{2} - \frac{-1 - \sqrt{2}}{2}i$, mô-đun là $|z| = \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}{2}$.

$\square$

Bài 8. Tìm số phức và các thuộc tính của nó trong các trường hợp sau:

(1) $w = 1 + z + z^2$, với $\frac{5(\bar{z} + i)}{z + 1} = 2 - i$. (**A - 2012 NC**)

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{5(\bar{z} + i)}{z + 1} &= 2 - i \stackrel{z \neq -1}{\Leftrightarrow} 5(x - yi + i) = (2 - i)(x + yi + 1) \Leftrightarrow 3x - y - 2 + (x - 7y + 6)i = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y - 2 = 0 \\ x - 7y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

$\Rightarrow z = 1 + i$. Do đó, ta có $w = 1 + z + z^2 = 1 + 1 + i + (1 + i)^2 = 2 + 3i$.

Vậy số phức $w = 2 + 3i$ có phần thực là 2, phần ảo là 3, số phức liên hợp là $\bar{w} = 2 - 3i$, mô-đun là $|w| = \sqrt{13}$. $\square$

② $w = \bar{z} + iz$, với $\bar{z} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 - i}$.

🔗Lời giải.

Ta có $\bar{z} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 - i} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \bar{z} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} - \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i$.

Do đó, ta có $w = \bar{z} + iz = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i + i\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} - \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + i$.

Vậy số phức $w = 1 + i$ có phần thực là 1, phần ảo là 1, số phức liên hợp là $\bar{w} = 1 - i$, mô-đun là $|w| = \sqrt{2}$. $\square$

③ $w = \bar{z} + iz$, với $\bar{z} = \frac{(1 - i\sqrt{3})^3}{1 - i}$. (A - 2010 NC)

🔗Lời giải.

Ta có $\bar{z} = \frac{(1 - i\sqrt{3})^3}{1 - i} = \frac{-8}{1 - i} = -4 - 4i \Rightarrow z = -4 + 4i$.

Do đó, ta có $w = \bar{z} + iz = -4 - 4i + i(-4 + 4i) = -8 - 8i$.

Vậy số phức $w = -8 - 8i$ có phần thực là -8, phần ảo là -8, số phức liên hợp là $\bar{w} = -8 + 8i$, mô-đun là $|w| = 8\sqrt{2}$. $\square$

④ $w = \frac{\bar{z} - 2z + 1}{z^2}$, với $(1 + i)(z - i) + 2z = 2i$. (D 2013)

🔗Lời giải.

Ta có $(1 + i)(z - i) + 2z = 2i \Leftrightarrow (3 + i)z = -1 + 3i \Leftrightarrow z = \frac{-1 + 3i}{3 + i} = i$.

Do đó, ta có $w = \frac{\bar{z} - 2z + 1}{z^2} = \frac{-i - 2i + 1}{i^2} = -1 + 3i$.

Vậy số phức $w = -1 + 3i$ có phần thực là -1, phần ảo là 3, số phức liên hợp là $\bar{w} = -1 - 3i$, mô-đun là $|w| = \sqrt{10}$. $\square$

⑤ $w = z + \frac{4}{z + 1}$, với $1 + \bar{z} = |\bar{z} - i|^2 + (iz - 1)^2$.

🔗Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$. Ta có

$$\begin{aligned} 1 + \bar{z} &= |\bar{z} - i|^2 + (iz - 1)^2 \Leftrightarrow 1 + x - yi = |x - yi - i|^2 + (xi - y - 1)^2 \\ &\Leftrightarrow 1 + x - yi = x^2 + (y + 1)^2 - x^2 + (y + 1)^2 - 2x(y + 1)i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + x = 2(y + 1)^2 \\ y = 2x(y + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(y + 1)^2 - 1 \\ 4(y + 1)^3 - 2(y + 1) - y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow z = 1 - 2i$ hoặc $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

Với $z = 1 - 2i$, ta có $w = z + \frac{4}{z + 1} = 1 - 2i + \frac{4}{1 - 2i + 1} = 2 - i$.

Với $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, ta có $w = z + \frac{4}{z + 1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{4}{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i + 1} = \frac{7}{2} + \frac{7}{2}i$.

Kết luận

— Số phức $w = 2 - i$ có phần thực là 2, phần ảo là -1, số phức liên hợp là $\bar{w} = 2 + i$, mô-đun là $|w| = \sqrt{5}$.

— Số phức $w = \frac{7}{2} + \frac{7}{2}i$ có phần thực là $\frac{7}{2}$, phần ảo là $\frac{7}{2}$, số phức liên hợp là $\bar{w} = \frac{7}{2} - \frac{7}{2}i$, mô-đun là $|w| = \frac{7\sqrt{2}}{2}$.

□

- ⑥ $w = b + ci$, với $\frac{(1 + i\sqrt{3})^{12}(2 - i)}{(1 - i\sqrt{3})^6(1 + i)^6}$ là nghiệm của phương trình $z^2 + 8bz + 64c = 0$.

🔗Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{(1 + i\sqrt{3})^{12}(2 - i)}{(1 - i\sqrt{3})^6(1 + i)^6} = 8 + 16i.$$

Theo đề bài, ta có

$$\begin{aligned} (8 + 16i)^2 + 8b(8 + 16i) + 64c &= 0 \Leftrightarrow -192 + 256i + 64b + 128bi + 64c = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -192 + 64b + 64c = 0 \\ 256 + 128b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = 5. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow w = -2 + 5i.$$

Vậy số phức $w = -2 + 5i$ có phần thực là -2 , phần ảo là 5 , số phức liên hợp là $\bar{w} = -2 - 5i$, mô-đun là $|w| = \sqrt{29}$. □

Bài 9. Tìm số phức và các thuộc tính khi nó thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- ① $|z| = 5$ và phần thực bằng 2 lần phần ảo.

🔗Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Theo giả thiết ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a = 2b \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ b = \pm\sqrt{5}. \end{cases}$$

$$\text{Với } b = \sqrt{5}, a = 2\sqrt{5}, z = 2\sqrt{5} + \sqrt{5}i.$$

$$\text{Với } b = -\sqrt{5}, a = -2\sqrt{5}, z = -2\sqrt{5} - \sqrt{5}i. \quad \square$$

- ② $|z - 2 + i| = 2$ và phần ảo nhỏ hơn phần thực 3 đơn vị.

🔗Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Theo giả thiết ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a - b = 3 \\ \sqrt{(a - 2)^2 + (b + 1)^2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a - 3 \\ (a - 2)^2 + (a - 2)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a - 3 \\ \begin{cases} a = 2 + \sqrt{2} \\ a = 2 - \sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Với } a = 2 + \sqrt{2}, b = -1 + \sqrt{2}, z = 2 + \sqrt{2} + (-1 + \sqrt{2})i.$$

$$\text{Với } a = 2 - \sqrt{2}, b = -1 - \sqrt{2}, z = 2 - \sqrt{2} - (1 + \sqrt{2})i. \quad \square$$

- ③ $|z + 2i - 1| - \sqrt{5}|\bar{z} - 2 + 3i| = 0$. và phần thực bằng 2 lần phần ảo.

🔗Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Theo giả thiết ta có hệ phương trình

$$\begin{aligned} &\begin{cases} a = 2b \\ \sqrt{(a - 1)^2 + (b + 2)^2} - \sqrt{5}[(a - 2)^2 + (3 - b)^2] = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ (2b - 1)^2 + (b + 2)^2 - 5[(2b - 2)^2 + (3 - b)^2] = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ \begin{cases} b = 2 \\ b = \frac{3}{2} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Với } b = 2, a = 4, z = 4 + 2i.$$

$$\text{Với } b = \frac{3}{2}, a = 3, z = 3 + \frac{3}{2}i. \quad \square$$

④ $|z + 1 - 2i| = 5$ và $z \cdot \bar{z} = 34$.

🔗Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Theo giả thiết ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 34 \\ \sqrt{(a+1)^2 + (b-2)^2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 34 \\ a = 2b - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b - 7 \\ (2b-7)^2 + b^2 = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b - 7 \\ \begin{cases} b = \frac{3}{5} \\ b = 5 \end{cases} \end{cases}$$

Với $b = \frac{3}{5}$, $a = -\frac{29}{5}$, $z = -\frac{29}{5} + \frac{3}{5}i$.

Với $b = 5$, $a = 3$, $z = 3 + 5i$. □

⑤ $|z - (2 + i)| = \sqrt{10}$ và $z \cdot \bar{z} = 25$.

🔗Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Theo giả thiết ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 25 \\ \sqrt{(a-2)^2 + (b-1)^2} = \sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 25 \\ b = 10 - 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 10 - 2a \\ a^2 + (10-2a)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 10 - 2a \\ \begin{cases} a = 3 \\ a = 5 \end{cases} \end{cases}$$

Với $a = 3$, $b = 4$, $z = 3 + 4i$.

Với $a = 5$, $b = 0$, $z = 5$. □

⑥ $|z + 1 - 2i| = |\bar{z} - 2 - i|$ và $|z - 1| = \sqrt{5}$.

🔗Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Theo giả thiết ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{(a+1)^2 + (b-2)^2} = \sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2} \\ \sqrt{(a-1)^2 + b^2} = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ (a-1)^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ \begin{cases} b = -1 \\ b = 2 \end{cases} \end{cases}$$

Với $a = b = -1$, $z = -1 - i$.

Với $a = b = 2$, $z = 2 + 2i$. □

⑦ $2|z - i| = |z - \bar{z} + 2i|$ và $|z^2 - \bar{z}^2| = 4$.

🔗Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$2|z - i| = |z - \bar{z} + 2i| \Leftrightarrow 2\sqrt{a^2 + (b-1)^2} = \sqrt{(2b+2)^2}.$$

$$|z^2 - \bar{z}^2| = 4 \Leftrightarrow |ab| = 1. \text{ Ta có hệ phương trình}$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{a^2 + (b-1)^2} = \sqrt{(2b+2)^2} \\ |ab| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{a^2}{4} \\ |ab| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt[3]{4} \\ b = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \end{cases}$$

Suy ra $z = \sqrt[3]{4} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}i$. □

⑧ $|z| = 1$ và $|z^2 - \bar{z}^2| = \sqrt{3}$ với phần thực dương và phần ảo âm.

🔗Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, a > 0, b < 0$). Theo giả thiết ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ |ab| = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{3}{16a^2} \\ a^2 + \frac{3}{16a^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{3}{16a^2} \\ \begin{cases} a^2 = \frac{1}{4} \\ a^2 = \frac{3}{4} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{3}{16a^2} \\ \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ a = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Với } a = \frac{1}{2}, b = -\frac{\sqrt{3}}{2}, z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

$$\text{Với } a = \frac{\sqrt{3}}{2}, b = -\frac{1}{2}, z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

□

Bài 10. Tìm số phức và các thuộc tính khi nó thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

Nhận xét. Số phức là thuần ảo khi phần thực bằng 0 và số phức là thuần thực khi phần ảo bằng 0

- ① $|z| = \sqrt{2}$ và $\bar{z}^2$ là số thuần ảo.

🔗 **Lời giải.**

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ta có $\bar{z}^2 = a^2 - b^2 - 2abi$, theo giả thiết $\bar{z}^2$ thuần ảo suy ra $a^2 - b^2 = 0$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ a^2 - b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm 1. \end{cases}$$

Suy ra $z = 1 \pm i, z = -1 \pm i$.

□

- ② $|z - i| = \sqrt{2}$ và $(z - 1)(\bar{z} + i)$ là số thực. (D-2010 CB)

🔗 **Lời giải.**

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$(z - 1)(\bar{z} + i) = a^2 + b^2 - a - b + (a + b - 1)i$ là số thực $\Leftrightarrow b = 1 - a$. Theo giả thiết ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} b = 1 - a \\ a^2 + (b - 1)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 - a \\ a = \pm 1 \end{cases}.$$

Với $a = 1, b = 0, z = 1$.

Với $a = -1, b = 2, z = -1 + 2i$.

□

- ③ $(1 - 3i)z$ là số thực và $|\bar{z} - 2 + 5i| = 1$.

🔗 **Lời giải.**

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$(1 - 3i)z = (1 - 3i)(a + bi) = a + 3b + (b - 3a)i \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b = 3a$. Theo giả thiết ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} b = 3a \\ (a - 2)^2 + (5 - b)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a \\ \begin{cases} a = 2 \\ a = \frac{7}{5} \end{cases} \end{cases}.$$

Với $a = 2, b = 6, z = 2 + 6i$.

Với $a = \frac{7}{5}, b = \frac{21}{5}, z = \frac{7}{5} + \frac{21}{5}i$.

□

- ④ $(z - 1)(\bar{z} + 2i)$ là số thực và $|z - 1| = \sqrt{5}$

🔗 **Lời giải.**

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$(z - 1)(\bar{z} + 2i) = a^2 + b^2 - a - 2b + (2a + b - 2)i$ là số thực $\Leftrightarrow b = 2 - 2a$. Theo giả thiết ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} b = 2 - 2a \\ (a - 1)^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - 2a \\ \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases} \end{cases}.$$

Với $a = 0, b = 2, z = 2i$.

Với $a = 2, b = -2, z = 2 - 2i$.

□

- ⑤ $|z - \bar{z} + 1 - i| = \sqrt{5}$ và $(2 - z)(i + \bar{z})$ là số ảo.

🔗Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$(2 - z)(i + \bar{z}) = -a^2 - b^2 + 2a + b + (2 - a - 2b)i$ là số ảo suy ra $-a^2 - b^2 + 2a + b = 0$.

$|z - \bar{z} + 1 - i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a + 1)^2 + (2b - 1)^2 = 5$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -a^2 - b^2 + 2a + b = 0 \\ 1^2 + (2b - 1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a^2 - b^2 + 2a + b = 0 \\ \begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases} \end{cases}.$$

$$\text{Với } b = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ a = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \\ z = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i. \end{cases}$$

$$\text{Với } b = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ a = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \\ z = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i. \end{cases}$$

□

- ⑥ $2|z - i| = |z - \bar{z} + 2i|$ và $(2 - z)(i + \bar{z})$ là số thực.

🔗Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$(2 - z)(i + \bar{z}) = -a^2 - b^2 + 2a + b + (2 - a - 2b)i$ là số thực suy ra $a = 2 - 2b$.

Theo giả thiết ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a = 2 - 2b \\ 2\sqrt{a^2 + (b - 1)^2} = |2b + 2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - 2b \\ 4[(2 - 2b)^2 + (b - 1)^2] = (2b + 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - 2b \\ b = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Với } b = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, a = -1 - \sqrt{5}, z = -1 - \sqrt{5} + \frac{3 + \sqrt{5}}{2}i.$$

$$\text{Với } b = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, a = -1 + \sqrt{5}, z = -1 + \sqrt{5} + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}i.$$

□

Bài 11. Tìm z thỏa: $|z - 3i| = |1 - i\bar{z}|$ và $z - \frac{9}{z}$ là số thuần ảo.

🔗Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ta có $z - \frac{9}{z} = \frac{(z^2 - 9)\bar{z}}{|z|^2} = \frac{(a^2 + b^2 - 9)a + (a^2 + b^2 + 9)bi}{a^2 + b^2}$ là số thuần ảo suy ra

$$(a^2 + b^2 - 9)a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a^2 + b^2 = 9. \end{cases}$$

$$|z - 3i| = |1 - i\bar{z}| \Leftrightarrow a^2 + (b - 3)^2 = (b - 1)^2 + a^2 \Leftrightarrow b = 2.$$

Với $a = 0, b = 2, z = 2i$.

Với $a^2 + b^2 = 9, b = 2, z = \pm\sqrt{5} + 2i$.

□

Bài 12. Tìm số phức z sao cho $|z + 1 - 2i| = |\bar{z} + 3 + i|$ và $\frac{z - 2i}{\bar{z} + i}$ là số thuần ảo.

🔗Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ta có $\frac{z - 2i}{\bar{z} + i} = \frac{(a + (b - 2)i)(a + (b - 1)i)}{a^2 + (b - 1)^2}$, là số thuần ảo khi và chỉ khi $a^2 - (b - 2)(b - 1) = 0$.

$|z + 1 - 2i| = |\bar{z} + 3 + i| \Leftrightarrow (a + 1)^2 + (b - 2)^2 = (a + 3)^2 + (b - 1)^2 \Leftrightarrow b = -2a - \frac{5}{2}$. Ta nhận được hệ phương

trình

$$\begin{cases} b = -2a - \frac{5}{2} \\ a^2 - (b-2)(b-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-16 + \sqrt{67}}{6} \\ b = \frac{17 - \sqrt{67}}{6} \\ a = \frac{-16 - \sqrt{67}}{6} \\ b = \frac{17 + \sqrt{67}}{6} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } z = \frac{-16 \pm \sqrt{67}}{6} + \frac{17 \mp \sqrt{67}}{6}i.$$

□

Bài 13. Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$. Chứng minh rằng $|z_1| = |z_2|$.

Lời giải.

Đặt $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ ($a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$).

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (|z_1| + |z_2|)^2 \\ \Leftrightarrow (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 &= a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + 2\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} \\ \Leftrightarrow a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 &= 2\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{a_1^2 + b_1^2} - \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \right)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow |z_1| &= |z_2|. \end{aligned}$$

□

Bài 14. ① Tìm các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $4z_1 - 3 \cdot i^{2013} = iz_1 + 5$ và $\frac{z_2}{z_1} - z_1^{2013} = 4$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 4z_1 - 3 \cdot i^{2013} &= iz_1 + 5 \Leftrightarrow (4 - i)z_1 = 5 + 3i \Leftrightarrow z_1 = \frac{5 + 3i}{4 - i} = 1 + i \\ \Rightarrow z_1^{2014} &= (1 + i)^{2014} = (2i)^{1007} = -2^{1007}i \\ \Rightarrow z_2 &= 4z_1 + z_1^{2014} = 4 + (4 - 2^{1007})i. \end{aligned}$$

□

$$\textcircled{2} \quad \left| \frac{z - 12}{z - 8i} \right| = \frac{5}{3} \text{ và } \left| \frac{z - 4}{z - 8} \right| = 1.$$

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, a > 0, b < 0$). Theo giả thiết ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 9(a - 12)^2 + 9b^2 = 25a^2 + 25(b - 8)^2 \\ (a - 4)^2 + b^2 = (a - 8)^2 + b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 8 \\ b = 17 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } z = 6 + 8i, z = 6 + 17i.$$

□

Bài 15. Giả sử z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|6z_1 - i| = |2 + 3iz_1|$, $|6z_2 - i| = |2 + 3iz_2|$ và $|z_1 - z_2| = \frac{1}{3}$. Tính mô đun của $z_1 + z_2$.

Lời giải.

Đặt $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ ($a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$). Ta có

$$\begin{cases} |6z_1 - i| = |2 + 3iz_1| \\ |6z_2 - i| = |2 + 3iz_2| \\ |z_1 - z_2| = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + b_1^2 = \frac{1}{9} \\ a_2^2 + b_2^2 = \frac{1}{9} \\ (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = \frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + b_1^2 = \frac{1}{9} \\ a_2^2 + b_2^2 = \frac{1}{9} \\ 2(a_1a_2 + b_1b_2) = \frac{1}{9} \end{cases}.$$

Suy ra $a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + 2(a_1a_2 + b_1b_2) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow |z_1 + z_2| = \frac{\sqrt{3}}{3}$. $\square$

Bài 16. Cho số phức z thỏa mãn $(1 - z)(i + \bar{z})$ là số thuần ảo. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z - i|$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ta có $(1 - z)(i + \bar{z}) = -a^2 - b^2 + a + b - (a + b - 1)i$, là số thuần ảo khi và chỉ khi

$$-a^2 - b^2 + a + b = 0 \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} P^2 &= a^2 + (b - 1)^2 = a - b + 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right) - \left(b - \frac{1}{2}\right) + 1 \leq \sqrt{2 \left[\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2\right]} + 1 = 2 \\ \Rightarrow 0 &\leq P \leq \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Vậy $P_{\min} = 0$ khi $z = i$, $P_{\max} = \sqrt{2}$ khi $\begin{cases} a - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - b > 0 \\ \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = 1$. $\square$

Bài 17. Biết $\frac{z - 2i}{z - 2}$ là số thuần ảo. Tìm giá trị lớn nhất $T_{\max}$ của biểu thức $T = |z - 1| + |z - i|$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ta có $\frac{z - 2i}{z - 2} = \frac{(a + (b - 2)i)(a - 2 - bi)}{(a - 2)^2 + b^2}$, là số thuần ảo khi và chỉ khi

$$a(a - 2) + (b - 2)b = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2a - 2b = 0 \Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 1)^2 = 2.$$

Ta lại có

$$\begin{aligned} T^2 &= (|z - 1| + |z - i|)^2 = |2z - 1 - i|^2 = |2a - 1 - i + 2bi|^2 = 4(a^2 + b^2) - 4(a + b) + 4 = 4(a + b) + 4 \\ &= 4(a - 1) + 4(b - 1) + 12 \\ &\leq 4\sqrt{2[(a - 1)^2 + (b - 1)^2]} + 12 = 20. \end{aligned}$$

Suy ra $T_{\max} = 2\sqrt{5}$ khi $a - 1 = b - 1 = 1 \Leftrightarrow a = b = 2 \Leftrightarrow z = 2 + 2i$. $\square$

Dạng 3. Biểu diễn hình học của số phức và bài toán liên quan

Phương pháp giải:

Loại 1 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức $z = x + yi$ thỏa mãn điều kiện K cho trước.

- Bước 1. Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).
- Bước 2. Biến đổi điều kiện K để tìm mối liên hệ giữa x, y và kết luận.

Mối liên hệ giữa x và y	Kết luận tập hợp điểm $M(x; y)$
• $Ax + By + C = 0$.	Là đường thẳng $d: Ax + By + C = 0$.
• $\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \end{cases}$	Là đường tròn (C) có tâm $I(a; b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.
• $\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c \leq 0 \end{cases}$	Là hình tròn (C) có tâm $I(a; b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.
• $R_1^2 \leq (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R_2^2$.	Là những điểm thuộc miền vành khăn tạo bởi hai đường tròn đồng tâm $I(a; b)$ và bán kính lần lượt R_1 và R_2 .
• $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$.	Là một parabol (P) có đỉnh $S\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.
• $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ với} \\ MF_1 + MF_2 = 2a \\ F_1F_2 = 2c < 2a \end{cases}$	Là một elip có trục thực là $2a$, trục ảo là $2b$ và tiêu cự $2c = 2\sqrt{a^2 - b^2}$ với $a > b > 0$.
• $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ với} \\ MF_1 - MF_2 = 2a \\ F_1F_2 = 2c > 2a \end{cases}$	Là một hypebol có trục thực là $2a$, trục ảo là $2b$ và tiêu cự $2c = 2\sqrt{a^2 + b^2}$ với $a, b > 0$.
• $MA = MB$	Là đường trung trực của đoạn thẳng AB .

Loại 2. Tìm số phức z có mô-đun nhỏ nhất, lớn nhất thỏa mãn tính chất K cho trước.

Bước 1. Tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z để được mối liên hệ giữa x và y .

Bước 2. Dựa vào mối liên hệ giữa x và y ở bước 1, để tìm $|z|_{\min}, |z|_{\max}$.

Thông thường với loại này, người ra đề hay cho tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường thẳng hoặc đường tròn. Khi đó, ta có hai hướng xử lý: một là sử dụng phương pháp hình học, hai là sử dụng phương pháp đại số (bất đẳng thức).

Nhóm I (Loại đề cho trực tiếp)

Bài 1. Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2i| = \sqrt{5}$ và điểm biểu diễn của z thuộc đường thẳng $d: 3x - y + 1 = 0$.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$. Theo bài ra ta có hệ

$$\begin{cases} a^2 + (b-2)^2 = 5 \\ 3a - b + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + (b-2)^2 = 5 \\ b = 3a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + (3a-1)^2 = 5 \\ b = 3a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, b = 4 \\ a = -\frac{2}{5}, b = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

Vậy có hai số phức z thỏa mãn bài toán là $z = 1 + 4i$ và $z = -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$. □

Bài 2. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(1 - 2i)z - \frac{2-i}{1+i} = (3-i)z$. Tìm tọa độ điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$(-2 - i)z = \frac{2-i}{1+i} \Leftrightarrow z = \frac{i-2}{(1+i)(2+i)} = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}i.$$

Do đó điểm biểu diễn của số phức z là điểm $M\left(\frac{1}{10}; \frac{7}{10}\right)$. □

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z| = |\bar{z} - 2 + 3i|$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Giả thiết tương đương với

$$x^2 + y^2 = (x - 2)^2 + (-y + 3)^2 \Leftrightarrow 4x + 6y - 13 = 0.$$

Vậy, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z là đường thẳng có phương trình $4x + 6y - 13 = 0$. $\square$

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - (3 - 4i)| = 2$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Giả thiết tương đương với $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 4$.

Vậy, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - (3 - 4i)| = 2$ là đường tròn (C) có tâm $I(3; -4)$, bán kính $R = 2$. $\square$

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - i| = |(1 + i)z|$.

Lời giải.

Vì $|(1 + i)z| = |1 + i| \cdot |z| = \sqrt{2}|z|$, do đó nếu gọi $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ ta có

$$|z - i| = |(1 + i)z| \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 2(x^2 + y^2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0.$$

Vậy, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán là đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0$. $\square$

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện

$$\left| \frac{z}{z - i} \right| = 3.$$

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$\left| \frac{z}{z - i} \right| = 3 \Leftrightarrow |z| = 3|z - i| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9[x^2 + (y - 1)^2] \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{9}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}.$$

Vậy, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z là đường tròn (C) : $x^2 + \left(y - \frac{9}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$. $\square$

Bài 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z| \leq 2$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Ta có

$$|z| \leq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4.$$

Vậy, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z là phần trong của hình tròn tâm $O(0; 0)$, bán kính $r = 2$. $\square$

Bài 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $1 < |z - 1| < 2$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Ta có

$$1 < |z - 1| < 2 \Leftrightarrow 1 < (x - 1)^2 + y^2 < 4.$$

Vậy, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z là phần trong của hình tròn $(x - 1)^2 + y^2 = 4$ và không thuộc hình tròn $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. $\square$

Bài 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $\frac{z + i}{z - i}$ là số thuần ảo.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\frac{z + i}{z - i} = \frac{x + (y + 1)i}{x + (y - 1)i} = \frac{[x + (y + 1)i] \cdot [x - (y - 1)i]}{x^2 + (y - 1)^2} = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y - 1)^2} + \frac{2x}{x^2 + (y - 1)^2} \cdot i.$$

Do đó $\frac{z+i}{z-i}$ là số thuần ảo khi và chỉ khi $x^2 + y^2 - 1 = 0, x \neq 0$, tức là tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z là đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 = 1, (x \neq 0)$. $\square$

Bài 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-i| + |z+i| = 4$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned} |z-i| + |z+i| = 4 &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = 4 \\ &\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 16 - 8\sqrt{x^2 + (y+1)^2} + x^2 + (y+1)^2 \\ &\Leftrightarrow 4[x^2 + (y+1)^2] = (4+y)^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1. \end{aligned}$$

Vậy, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z là đường Elip (E): $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. $\square$

Bài 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $2|z-i| = |z-\bar{z}+2i|$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$. Ta có

$$2|z-i| = |z-\bar{z}+2i| \Leftrightarrow 4[x^2 + (y-1)^2] = (2y+2)^2 \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{4}.$$

Vậy, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z là đường Parabol (P): $y = \frac{x^2}{4}$. $\square$

Bài 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z^2 - (\bar{z})^2| = 4$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$. Ta có

$$|z^2 - (\bar{z})^2| = 4 \Leftrightarrow 4|xy| = 4 \Leftrightarrow xy = \pm 1.$$

Vậy, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z là đường (H): $y = \pm \frac{1}{x}$. $\square$

Bài 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $(1+i)z + (1-i)\bar{z} = 2|z+1|$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$. Ta có

$$(1+i)z + (1-i)\bar{z} = 2|z+1| \Leftrightarrow 2x - 2y = 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy = -2x - 1 \\ x \geq y \end{cases} \quad (1).$$

+ Nhận thấy $x = 0$ không thỏa mãn (1) nên ta xét $x \neq 0$.

+ Nếu $x < 0$ thì từ (1) suy ra $2x^2 + 2x + 1 \leq 0$ (mâu thuẫn!).

+ Nếu $x > 0$ thì từ (1) suy ra $2x^2 + 2x + 1 \geq 0$ (luôn đúng).

Vậy, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z là đường cong (H): $y = \frac{-2x-1}{2x}, (x > 0)$. $\square$

Bài 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+\bar{z}| + (z+\bar{z})i = 2z$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$. Ta có

$$|z+\bar{z}| + (z+\bar{z})i = 2z \Leftrightarrow |2x| + 2xi = 2x + 2yi \Leftrightarrow \begin{cases} |2x| = 2x \\ 2x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow y = x \quad (x \geq 0).$$

Vậy, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z là phần đường thẳng $y = x, (x \geq 0)$. $\square$

Bài 15. Cho số phức $z = m + (m - 3)i$, ($m \in \mathbb{R}$).

- ① Tìm tất cả các tham số m để điểm biểu diễn số phức z nằm trên đường phân giác thứ hai $y = -x$.
- ② Tìm tất cả các tham số m để điểm biểu diễn số phức z nằm trên đường hypebol (H): $y = -\frac{2}{x}$.

Lời giải.

- ① Điểm biểu diễn của số phức z là $M(m; m-3)$. Yêu cầu bài toán tương đương với $m-3 = -m \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$.
- ② Điểm biểu diễn của số phức z là $M(m; m-3)$. Yêu cầu bài toán tương đương với

$$m-3 = -\frac{2}{m} \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}.$$

□

Bài 16. Xét các điểm A, B, C trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn lần lượt các số phức: $z_1 = \frac{4i}{i-1}$, $z_2 = (1-i)(1+2i)$ và $z_3 = \frac{2+6i}{3-i}$.

- ① Chứng minh rằng $\triangle ABC$ là tam giác vuông.
- ② Tìm số phức biểu diễn điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

Lời giải.

- ① Ta có $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = 3 + i$, $z_3 = 2i$. Suy ra $A(2; -2)$, $B(3; 1)$, $C(0; 2)$.
Tính được $AB = BC = \sqrt{10}$, $AC = \sqrt{20}$. Nhận thấy $AB^2 + BC^2 = AC^2$ nên $\triangle ABC$ vuông cân tại B .
- ② Gọi $D(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Điều kiện cần và đủ để $ABCD$ là hình vuông là

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow (1; 3) = (x; y-2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y-2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow z = 1 + 5i.$$

□

Bài 17. Cho các điểm A, B, C, D, M, N, P nằm trong mặt phẳng phức lần lượt biểu diễn các số phức $1+3i$, $-2+2i$, $-4-2i$, $1-7i$, $-3+4i$, $1-3i$ và $-3+2i$. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm và tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp được mà ta phải tìm tâm và bán kính. Tìm điểm Q trong mặt phẳng phức sao cho $MNPQ$ là hình bình hành.

Lời giải.

Ta có $A(1; 3)$, $B(-2; 2)$, $C(-4; -2)$, $D(1; -7)$, $M(-3; 4)$, $N(1; -3)$ và $P(-3; 2)$.

Gọi trọng tâm tam giác ABC và tam giác MNP lần lượt là G, G' . Ta có

$$\begin{cases} x_G = \frac{1-2-4}{3} = -\frac{5}{3} \\ y_G = \frac{3+2-2}{3} = 1 \end{cases}; \begin{cases} x_{G'} = \frac{-3+1-3}{3} = -\frac{5}{3} \\ y_{G'} = \frac{4-3+2}{3} = 1 \end{cases}.$$

Từ đó suy ra $G \equiv G'$.

Giả sử điểm $I(x; y)$ sao cho $IA^2 = IB^2 = IC^2 = ID^2$. Khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (1-x)^2 + (3-y)^2 = (-2-x)^2 + (2-y)^2 \\ (-2-x)^2 + (2-y)^2 = (-4-x)^2 + (-2-y)^2 \\ (-4-x)^2 + (-2-y)^2 = (1-x)^2 + (-7-y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 2y = 2 \\ 4x + 8y = -12 \\ 10x - 10y = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}.$$

Do đó, tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm $I(1; -2)$, bán kính $R = IA = 5$.

Gọi $Q(a; b)$. $MNPQ$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} \Leftrightarrow (4; -7) = (a+3; b-2) \Leftrightarrow \begin{cases} a+3 = 4 \\ b-2 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \end{cases} \Rightarrow Q(1; -5).$$

□

Nhóm II (loại đề cho gián tiếp)

Bài 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức w thỏa mãn điều kiện $w = (1 - 2i)z + 3$, biết z là số phức thỏa mãn $|z + 2| = 5$.

Lời giải.

Ta có $w = (1 - 2i)z + 3 \Rightarrow z = \frac{w - 3}{1 - 2i}$. Do đó

$$|z + 2| = 5 \Leftrightarrow \left| \frac{w - 3}{1 - 2i} + 2 \right| = 5 \Leftrightarrow |w - 1 - 4i| = 5|1 - 2i| \Leftrightarrow |w - 1 - 4i| = 5\sqrt{5} \quad (1).$$

Đặt $w = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có $(1) \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 125$.

Vậy, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức w là đường tròn có phương trình $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 125$. $\square$

Bài 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức w thỏa mãn điều kiện $w = (1 + i\sqrt{3})z + 2$, biết z là số phức thỏa mãn $|z - 1| = 2$.

Lời giải.

Ta có $w = (1 + i\sqrt{3})z + 2 \Rightarrow z = \frac{w - 2}{1 + i\sqrt{3}}$. Do đó

$$|z - 1| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{w - 2}{1 + i\sqrt{3}} - 1 \right| = 2 \Leftrightarrow |z - 3 - i\sqrt{3}| = 2|1 + i\sqrt{3}| \Leftrightarrow |z - 3 - i\sqrt{3}| = 4 \quad (1).$$

Đặt $w = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có $(1) \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 16$.

Vậy, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức w là đường tròn có phương trình $(x - 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 16$. $\square$

Bài 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức w thỏa mãn điều kiện $w = \bar{z} + 1 - i$, biết z là số phức thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 3$.

Lời giải.

Ta có $w = \bar{z} + 1 - i \Rightarrow \bar{z} = w - 1 + i \Leftrightarrow z = \overline{w - 1 + i}$. Do đó

$$|z - 1 + 2i| = 3 \Leftrightarrow |\overline{w} - 1 - i - 1 + 2i| = 3 \Leftrightarrow |\overline{w} - 2 + i| = 3 \quad (1).$$

Đặt $w = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có $(1) \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$.

Vậy, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức w là đường tròn có phương trình $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$. $\square$

Bài 21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức w thỏa mãn điều kiện $w = 2z - i$, biết z là số phức thỏa mãn $|z - 1| = 2$.

Lời giải.

Ta có $z = \frac{w + i}{2}$ nên $|z - 1| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{w + i}{2} - 1 \right| = 2 \Leftrightarrow |w - 2 + i| = 4 \quad (1).$

Đặt $w = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có $(1) \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$.

Vậy, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức w là đường tròn có phương trình $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$. $\square$

Bài 22. Trong mặt phẳng Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức w thỏa điều kiện $|w - iz - \bar{z}| = 2$, biết z là số phức $z = \frac{(1 + \sqrt{3}i)^3}{16(1 + i)^5}$.

Lời giải.

Ta có, $z = \frac{(1 + \sqrt{3}i)^3}{16(1 + i)^5} = \frac{1}{16} - \frac{1}{16}i$. Khi đó, $|w - iz - \bar{z}| = 2 \Leftrightarrow \left| w - i\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{16}i\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16}i\right) \right| = 2$
 $\Leftrightarrow |w| = 2$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức w là $(C): x^2 + y^2 = 4$. $\square$

Bài 23. Trong mặt phẳng Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức w thỏa điều kiện $w = (1 + 2i)z + 1$, biết z là số phức thỏa $|z + 1|^2 = \frac{z\bar{z}}{2}$.

Lời giải.

Đặt $w = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) Ta có, $w = (1 + 2i)z + 1 \Leftrightarrow z = \frac{w - 1}{1 + 2i}$.

Khi đó

$$\begin{aligned} |z + 1|^2 = \frac{z\bar{z}}{2} &\Leftrightarrow |z + 1|^2 = \frac{|z|^2}{2} \Leftrightarrow 2 \left| \frac{w - 1}{1 + 2i} + 1 \right|^2 = \left| \frac{w - 1}{1 + 2i} \right|^2 \\ &\Leftrightarrow 2|w + 2i|^2 = |w - 1|^2 \Leftrightarrow 2[x^2 + (y + 2)^2] = (x - 1)^2 + y^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 8y + 7 = 0. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức w là đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 8y + 7 = 0$. $\square$

Bài 24. Trong mặt phẳng Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức w thỏa điều kiện $w = (1 + i\sqrt{3})z + 2$, biết z là số phức thỏa $|z - 1| \leq 2$.

Lời giải.

Ta có,

$$\begin{aligned} w = (1 + i\sqrt{3})z + 2 &\Leftrightarrow w = (1 + i\sqrt{3})(z - 1) + 3 + i\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow w - (3 + i\sqrt{3}) = (1 + i\sqrt{3})(z - 1) \\ &\Leftrightarrow |w - (3 + i\sqrt{3})| = 2|z - 1| \leq 4. \end{aligned}$$

. Vậy tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức w là hình tròn $(C): (x - 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2 \leq 16$ $\square$

Bài 25. Trong mặt phẳng Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức w thỏa điều kiện $w = (1 + i)z + 1$, biết z là số phức thỏa $|z - 1| \leq 1$.

Lời giải.

Ta có,

$$\begin{aligned} w = (1 + i)z + 1 &\Leftrightarrow w = (1 + i)(z - 1) + 2 + i \\ &\Leftrightarrow w - (2 + i) = (1 + i)(z - 1) \\ &\Leftrightarrow |w - (2 + i)| = \sqrt{2}|z - 1| \leq \sqrt{2}. \end{aligned}$$

. Vậy tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức w là hình tròn $(C): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 \leq 2$. $\square$

Bài 26. Trong mặt phẳng Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức w thỏa điều kiện $w = \bar{z} + 1 - i$, với số phức z thỏa mãn:

① $|3z + i|^2 \leq z \cdot \bar{z} + 9$.

Lời giải.

Đặt $w = x + yi$, ($x; y \in \mathbb{R}$).

Ta có $w = \bar{z} + 1 - i \Leftrightarrow \bar{z} = (x - 1) + (y + 1)i \Leftrightarrow z = (x - 1) - (y + 1)i$.

Khi đó,

$$\begin{aligned} |3z + i|^2 \leq z \cdot \bar{z} + 9 &\Leftrightarrow |3z + i|^2 \leq |z|^2 + 9 \\ &\Leftrightarrow |3(x - 1) - 3(y + 1)i + i|^2 \leq (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + 9 \\ &\Leftrightarrow 9(x - 1)^2 + (-3y - 2)^2 \leq (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + 9 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + \frac{5}{4}y + \frac{1}{4} \leq 0. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức w là $(C): x^2 + y^2 - 2x + \frac{5}{4}y + \frac{1}{4} \leq 0$. $\square$

② $|2z + i|^2 \leq 3z \cdot \bar{z} + 1$.

Lời giải.

Đặt $w = x + yi$, ($x; y \in \mathbb{R}$).

Ta có $w = \bar{z} + 1 - i \Leftrightarrow \bar{z} = (x - 1) + (y + 1)i \Leftrightarrow z = (x - 1) - (y + 1)i$.

Khi đó,

$$\begin{aligned} |2z + i|^2 \leq 3z \cdot \bar{z} + 1 &\Leftrightarrow |2z + i|^2 \leq 3|z|^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow |2(x - 1) - 2(y + 1)i + i|^2 \leq 3(x - 1)^2 + 3(y + 1)^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow 4(x - 1)^2 + (-2y - 1)^2 \leq 3(x - 1)^2 + 3(y + 1)^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow 4(x^2 - 2x + 1) + 4y^2 + 4y + 1 \leq 3x^2 - 6x + 3 + 3y^2 + 6y + 4 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 \leq 0. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức w là hình tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 \leq 0$. $\square$

Bài 27. Trong mặt phẳng phức, hãy tìm số phức z có mô-đun nhỏ nhất. Biết rằng số phức z thỏa mãn điều kiện:

① $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$.

🔗Lời giải.

Đặt $z = x + iy$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có

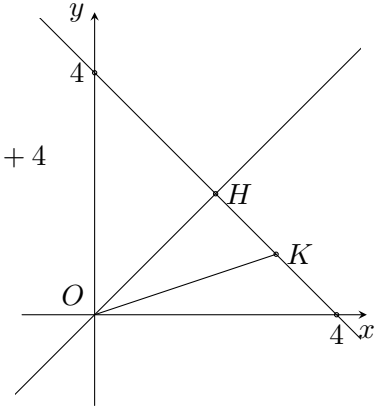
$$\begin{aligned} |z - 2 - 4i| = |z - 2i| &\Leftrightarrow |(x - 2) + (y - 4)i| = |x + (y - 2)i| \\ &\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = x^2 + (y - 2)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + y^2 - 4y + 4 \\ &\Leftrightarrow x + y - 4 = 0. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức z là đường thẳng $\Delta: x + y - 4 = 0$. Gọi K là điểm biểu diễn cho số phức z và H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng Δ thì $OK \geq OH$ nên H là điểm biểu diễn cho số phức có mô-đun nhỏ nhất.

Gọi d là đường thẳng qua gốc tọa độ và vuông góc với đường thẳng $x + y - 4 = 0$ thì $d: x - y = 0$.

Khi đó, tọa độ điểm H thỏa mãn $\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2. \end{cases}$

Vậy $z = 2 + 2i$ và $|z|_{\min} = 2\sqrt{2}$.



□

② $|z - i| = |\bar{z} - 2 - 3i|$.

🔗Lời giải.

Đặt $z = x + iy$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có,

$$\begin{aligned} |z - i| = |\bar{z} - 2 - 3i| &\Leftrightarrow |x + (y - 1)i| = |(x - 2) + (-y - 3)i| \\ &\Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = (x - 2)^2 + (-y - 3)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 \\ &\Leftrightarrow x - 2y - 3 = 0. \end{aligned}$$

Gọi d là đường thẳng qua gốc tọa độ và vuông góc với đường thẳng Δ thì

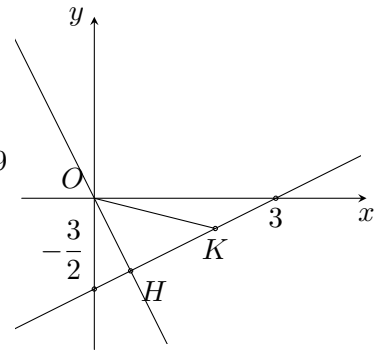
$d: 2x + y = 0$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức z là đường thẳng $\Delta: x - 2y - 3 = 0$. Gọi K là điểm biểu diễn cho số phức z và H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng Δ thì $OK \geq OH$ nên H là điểm biểu diễn cho số phức có mô-đun nhỏ nhất.

Gọi z là số phức có mô-đun nhỏ nhất thì điểm biểu diễn cho z là điểm H có tọa độ thỏa mãn

$$\begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = -\frac{6}{5}. \end{cases}$$

Vậy $z = \frac{3}{5} - \frac{6}{5}i$ và $|z|_{\min} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.



□

③ $|iz - 3| = |z - 2 - i|$.

🔗Lời giải.

Đặt $z = x + iy$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi đó,

$$\begin{aligned} |iz - 3| = |z - 2 - i| &\Leftrightarrow |i(x + iy) - 3| = |(x + iy) - 2 - i| \\ &\Leftrightarrow |(-y - 3) + ix| = |(x - 2) + (y - 1)i| \Leftrightarrow (-y - 3)^2 + x^2 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2 \\ &\Leftrightarrow y^2 + 6y + 9 + x^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 \\ &\Leftrightarrow x + 2y + 1 = 0. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức z là đường thẳng $d: x + 2y + 1 = 0$.

Ta có $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2y - 1)^2 + y^2} = \sqrt{5\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{5}} \geq \sqrt{\frac{1}{5}}$.

Vậy $|z|_{\min} = \sqrt{\frac{1}{5}}$ khi $y = -\frac{2}{5}$, suy ra $x = -\frac{1}{5}$.

Vậy $z = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$. □

④ $(z-1)(\bar{z}+2i)$ là số thực.

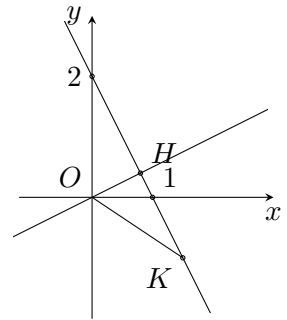
🔗Lời giải.

Đặt $z = x + iy$, ($x; y \in \mathbb{R}$). Khi đó,

$$\begin{aligned}(z-1)(\bar{z}+2i) &= [(x-1) + iy][x + (2-y)i] \\ &= x(x-1) + (x-1)(2-y)i + xyi - y(2-y) \\ &= x(x-1) - y(2-y) + (2x+y-2)i.\end{aligned}$$

Vì $(z-1)(\bar{z}+2i)$ là số thực nên $2x+y-2=0$.

Gọi d là đường thẳng qua gốc tọa độ và vuông góc với đường thẳng $2x+y-2=0$ thì $d: x-2y=0$.



Gọi K là điểm biểu diễn cho số phức z và H là hình chiếu vuông góc của O lên Δ thì $OK \geq OH$ nên H là điểm biểu diễn cho số phức có mô-đun nhỏ nhất. Gọi z là số phức có mô-đun nhỏ nhất thì tọa

độ điểm biểu diễn cho z là điểm H thỏa mãn $\begin{cases} 2x+y-2=0 \\ x-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{4}{5} \\ y=\frac{2}{5} \end{cases}$.

Vậy $z = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$ và $|z|_{\min} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. □

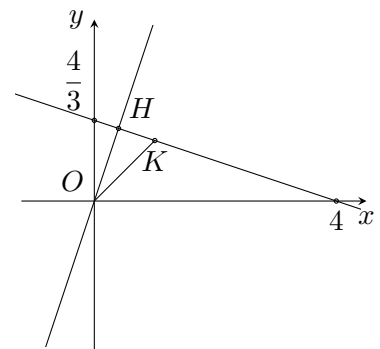
⑤ $\left| \frac{z+1-5i}{\bar{z}+3-i} \right| = 1$.

🔗Lời giải.

Đặt $z = x + iy$, ($x; y \in \mathbb{R}$). Khi đó,

$$\begin{aligned}\left| \frac{z+1-5i}{\bar{z}+3-i} \right| = 1 &\Leftrightarrow |z+1-5i| = |\bar{z}+3-i| \\ &\Leftrightarrow |(x+1) + (y-5)i| = |(x+3) + (-y-1)i| \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-5)^2 = (x+3)^2 + (-y-1)^2 \\ &\Leftrightarrow x+3y-4=0.\end{aligned}$$

Gọi d là đường thẳng qua gốc tọa độ và vuông góc với đường thẳng $x+3y-4=0$ thì $d: 3x-y=0$.



Gọi z là số phức có mô-đun nhỏ nhất thì tọa độ điểm biểu diễn cho z thỏa $\begin{cases} x+3y-4=0 \\ 3x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{5} \\ y=\frac{6}{5} \end{cases}$.

Vậy $z = \frac{2}{5} + \frac{6}{5}i$ và $|z|_{\min} = \frac{\sqrt{40}}{5}$. □

Bài 28. Trong mặt phẳng phức, hãy tìm số phức z có mô-đun nhỏ nhất và mô-đun lớn nhất. Biết rằng số phức z thỏa mãn điều kiện:

① $|z-2-4i| = \sqrt{5}$.

🔗Lời giải.

Đặt $z = x + iy$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi đó, $|z - 2 - 4i| = \sqrt{5}$
 $\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 5$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn cho z là đường tròn
 $(C): (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 5$.

Gọi d là đường thẳng đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ và tâm
 $I(2;4)$ của (C) thì $d: \begin{cases} x = 2t \\ y = 4t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.

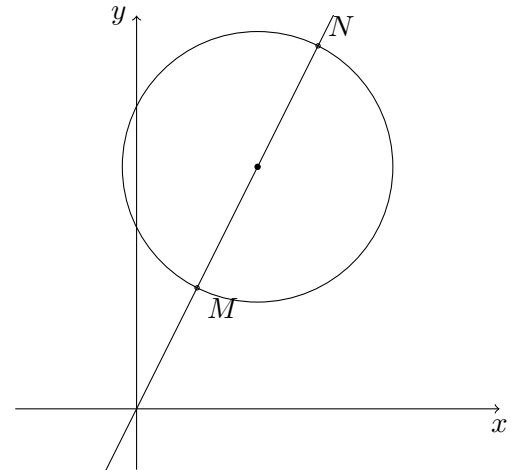
Thế $x = 2t$ và $y = 4t$ vào phương trình của (C) ta được

$$(2t - 2)^2 + (4t - 4)^2 = 5 \Leftrightarrow 20t^2 - 40t + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

☉ Với $t = \frac{1}{2}$ thì $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$. Ta có $z = 1 + 2i$ và $|z|_{\min} = \sqrt{5}$.

☉ Với $t = \frac{3}{2}$ thì $\begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \end{cases}$. Ta có $z = 3 + 6i$ và $|z|_{\max} = 3\sqrt{5}$.

□



② $\left| \frac{(1+i)z}{1-i} + 2 \right| = 1$.

🔗Lời giải.

Đặt $z = x + iy$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi đó,

$$\left| \frac{(1+i)z}{1-i} + 2 \right| = 1 \Leftrightarrow |1+i| \cdot \left| z + \frac{2-2i}{1+i} \right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z - 2i| = 1 \Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 1.$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn cho z là $(C): x^2 + (y - 2)^2 = 1$. Gọi d

là đường thẳng đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ và tâm $I(0;2)$ thì $d: \begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \end{cases}$,

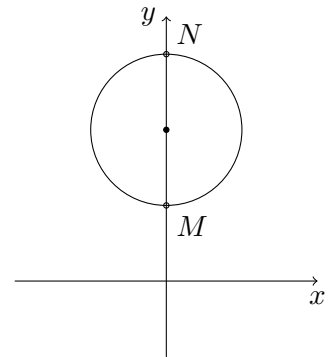
$(t \in \mathbb{R})$. Thế $x = 0$ và $y = 2t$ vào phương trình của (C) ta có $(2t - 2)^2 = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

☉ Với $t = \frac{1}{2}$ thì $z = i$, $|z|_{\min} = 1$.

☉ Với $t = \frac{3}{2}$ thì $z = 3i$, $|z|_{\max} = 3$.

□



③ $|z - 2 + 2i| = 2\sqrt{2}$.

🔗Lời giải.

Đặt $z = x + iy$, ($x; y \in \mathbb{R}$). Khi đó, $|z - 2 + 2i| = 2\sqrt{2}$
 $\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 8$.

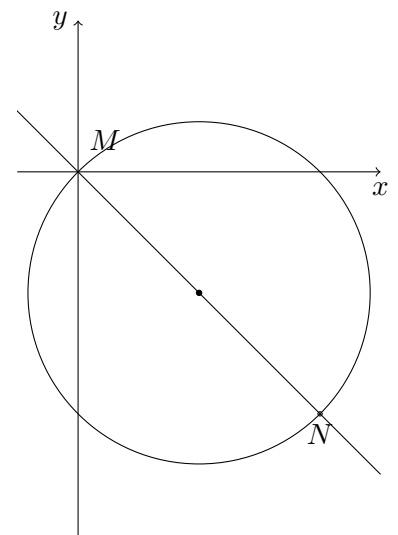
Vậy tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức z là
 $(C): (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 8$.

Gọi d là đường thẳng đi qua gốc tọa độ và tâm $I(2; -2)$ của (C) thì
 $d: \begin{cases} x = 2t \\ y = -2t \end{cases}$, ($t \in \mathbb{R}$). Thế $x = 2t$ và $y = -2t$ vào phương trình của

$$(C) \text{ ta được } (2t - 2)^2 + (2 - 2t)^2 = 8 \Leftrightarrow 8t^2 - 16t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2. \end{cases}$$

☑ Với $t = 0$ thì $z = 0$, $|z|_{\min} = 0$.

☑ Với $t = 2$ thì $z = 4 - 4i$, $|z|_{\max} = 4\sqrt{2}$.



□

④ $\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{|z - 3 + 4i| + 1}{2|z - 3 + 4i| + 8} \right) = 1$.

🔗Lời giải.

Đặt $z = x + iy$, ($x; y \in \mathbb{R}$). Khi đó,

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{|z - 3 + 4i| + 1}{2|z - 3 + 4i| + 8} \right) &= 1 \\ \Leftrightarrow |z - 3 + 4i| + 1 &= \frac{2}{3}|z - 3 + 4i| + \frac{8}{3} \\ \Leftrightarrow 3|z - 3 + 4i| + 3 &= 2|z - 3 + 4i| + 8 \\ \Leftrightarrow 3(x - 3)^2 + 3(y + 4)^2 + 3 &= 2(x - 3)^2 + 2(y + 4)^2 + 8 \\ \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 4)^2 &= 5. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức z là $(C): (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 5$.

Gọi d là đường thẳng đi qua gốc tọa độ và tâm $I(3; -4)$ của (C) thì $d: \begin{cases} x = 3t \\ y = -4t \end{cases}$, ($t \in \mathbb{R}$). Thế $x = 3t$ và $y = -4t$ vào phương trình của (C) ta có: $(3t - 3)^2 + (4 - 4t)^2 = 5 \Leftrightarrow 5t^2 - 10t + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{5 + \sqrt{5}}{5} \\ t = \frac{5 - \sqrt{5}}{5}. \end{cases}$$

☑ Với $t = \frac{5 + \sqrt{5}}{5}$ thì $z = \frac{3(5 + \sqrt{5})}{5} - \frac{4(5 + \sqrt{5})}{5}i$, $|z|_{\max} = 5 + \sqrt{5}$.

☑ Với $t = \frac{5 - \sqrt{5}}{5}$ thì $z = \frac{3(5 - \sqrt{5})}{5} - \frac{4(5 - \sqrt{5})}{5}i$, $|z|_{\min} = 5 - \sqrt{5}$.

□

⑤ $|z + 1| = \left| \frac{z + \bar{z}}{2} + 3 \right|$.

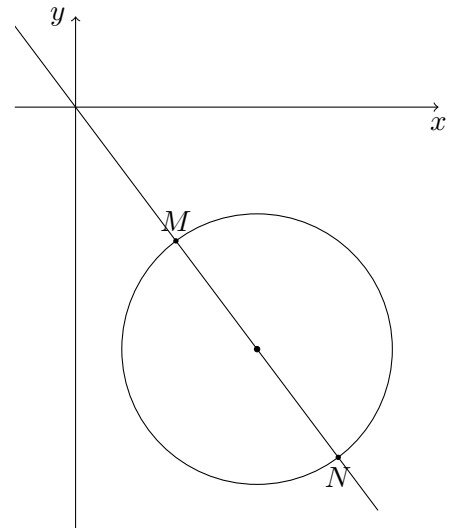
🔗Lời giải.

☑ Cách 1.

Đặt $z = x + iy$, ($x; y \in \mathbb{R}$). Khi đó, $|z + 1| = \left| \frac{z + \bar{z}}{2} + 3 \right| \Leftrightarrow |(x + 1) + iy| = |x + 3| \Leftrightarrow 4x - y^2 + 8 = 0$.

Khi đó, $|z|^2 = x^2 + y^2 = x^2 + 4x + 8 = (x + 2)^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow |z|_{\min} = 2$ khi $x = -2, y = 0$ nên $z = -2$.

☑ Cách 2.



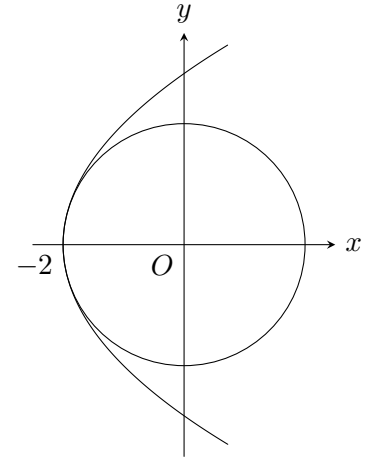
Đặt $z = x + iy$, ($x; y \in \mathbb{R}$).

Khi đó, $|z + 1| = \left| \frac{z + \bar{z}}{2} + 3 \right| \Leftrightarrow |(x + 1) + iy| = |x + 3| \Leftrightarrow 4x - y^2 + 8 = 0$.

Xét đường tròn tâm $O(0; 0)$ và bán kính bằng 2. Xét hệ

$$\begin{cases} 4x - y^2 + 8 = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Ta được $x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$. Vậy $z = -2$, $|z|_{\min} = 2$.



□

⑥ $|z + 1 + 2i| = 1$.

🔗Lời giải.

Đặt $z = x + iy$, ($x; y \in \mathbb{R}$). Khi đó, $|z + 1 + 2i| = 1 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn cho z là $(C): (x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$. Gọi d là đường thẳng đi qua gốc tọa độ và tâm $I(-1; -2)$ của (C) thì $d: \begin{cases} x = -t \\ y = -2t \end{cases}$, ($t \in \mathbb{R}$). Thế $x = -t$ và $y = -2t$ vào phương

$$\text{trình của } (C) \text{ ta được } (1 - t)^2 + (2 - 2t)^2 = 1 \Leftrightarrow 5t^2 - 10t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{5 + \sqrt{5}}{5} \\ t = \frac{5 - \sqrt{5}}{5} \end{cases}.$$

(a) Với $t = \frac{5 + \sqrt{5}}{5}$ thì $z = -\frac{5 + \sqrt{5}}{5} - 2 \cdot \frac{5 + \sqrt{5}}{5}i$ và $|z|_{\max} = \sqrt{5} + 1$.

(b) Với $t = \frac{5 - \sqrt{5}}{5}$ thì $z = -\frac{5 - \sqrt{5}}{5} - 2 \cdot \frac{5 - \sqrt{5}}{5}i$ và $|z|_{\min} = \sqrt{5} - 1$.

□

Bài 29. Hãy tìm số phức w với $w = z - (3 - 2i)$ có mô-đun nhỏ nhất, trong đó số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - i| = |z + 1|$.

🔗Lời giải.

Đặt $z = x + iy$, ($x; y \in \mathbb{R}$). Khi đó, $|z - i| = |z + 1| \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = (x + 1)^2 + y^2 \Leftrightarrow y = -x$.

Ta có, $w = z - (3 - 2i) = (x - 3) + (y + 2)i = (x - 3) + (2 - x)i \Leftrightarrow |w| = \sqrt{(x - 3)^2 + (2 - x)^2} = \sqrt{2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $|z|_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ khi $z = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}i$.

□

Bài 30. Trong tất cả các số phức z thỏa mãn $|z - 1| = 1$, tìm số phức z sao cho số phức $z - i$ có mô-đun nhỏ nhất.

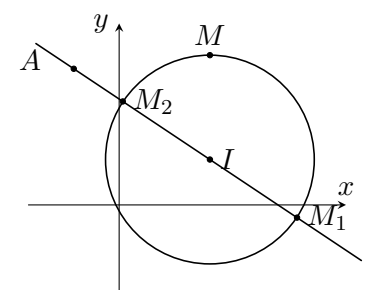
🔗Lời giải.

Đặt $z = x + iy$, ($x; y \in \mathbb{R}$). Khi đó, $|z - 1| = 1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1$.

Ta có kết quả sau: Trong các số phức z thỏa mãn $|z - z_1| = r_1$. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = |z - z_2|$.

Gọi I , A và M là các điểm biểu diễn cho z_1 , z_2 và z . Khi đó, $IA = |z_1 - z_2| =$

$$r_2 \text{ nên } \begin{cases} \max P = AM_1 = r_1 + r_2 \\ \min P = AM_2 = |r_1 - r_2|. \end{cases}$$



Áp dụng ta có $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $I(1; 0)$, $A(0; 1)$ và $IA = |z_1 - z_2| = \sqrt{2}$ nên $|z - i|_{\min} = |1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$.

Ta có đường thẳng qua hai điểm A , I là $d: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \end{cases}$, ($t \in \mathbb{R}$). Thế $x = t$, $y = 1 - t$ vào phương trình

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1 \text{ ta được } (t - 1)^2 + (1 - t)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ t = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

☉ Với $t = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ thì $M_1\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ và $AM_1 = \sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2} + 1$.

☉ Với $t = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ thì $M_2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ và $AM_2 = \sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2} - 1$.

Vậy $z = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$. □

Bài 31. Cho các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1 + 2i| = \sqrt{5}$. Tìm số phức w có mô-đun lớn nhất, biết rằng $w = z + 1 + i$.

Lời giải.

Đặt $z = x + iy$, ($x; y \in \mathbb{R}$). Khi đó, $|z - 1 + 2i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$.

Gọi $I(1; -2)$, $A(-1; -1)$. Khi đó phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm I và A là $d: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 + t \end{cases}$,

($t \in \mathbb{R}$) Thế $x = 1 - 2t$ và $y = -2 + t$ vào phương trình $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$ ta được $t^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$.

☉ Với $t = 1$ thì $M_1(-1; -1)$ và $AM_1 = 0$.

☉ Với $t = -1$ thì $M_2(3; -3)$ và $AM_2 = 2\sqrt{5}$.

Vậy $z = 3 - 3i$. □

Bài 32. Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện $|2z + 1| = |z + \bar{z} + 3|$ sao cho số phức $w = z - 8$ có mô-đun nhỏ nhất.

Lời giải.

Đặt $z = x + iy$, ($x; y \in \mathbb{R}$). Khi đó, $|2z + 1| = |z + \bar{z} + 3| \Leftrightarrow |(2x + 1) + 2yi| = |2x + 3| \Leftrightarrow (2x + 1)^2 + 4y^2 = (2x + 3)^2 \Leftrightarrow y^2 = 2x + 2$.

Khi đó, $|z - 8|^2 = (x - 8)^2 + y^2 = (x - 8)^2 + 2x + 2 = x^2 - 14x + 66 = (x - 7)^2 + 17 \geq 17$.

Vậy $|z - 8|_{\min} = \sqrt{17}$ khi $x = 7$ và $y = \pm 4$.

Kết luận có hai số phức thỏa là $z = 7 + 4i$ và $z = 7 - 4i$. □

Bài 33. Cho số phức $z = x + 2yi$, ($x; y \in \mathbb{R}$) thay đổi thỏa mãn $|z| = 1$. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x - y$.

Lời giải.

Đặt $z = x + iy$, ($x; y \in \mathbb{R}$). Khi đó, $|z| = 1 \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 = 1$. (1)

Từ $P = x - y$ ta có $y = x - P$ thế vào (1) ta được $x^2 + 4(x - P)^2 = 1 \Leftrightarrow 5x^2 - 8xP + 4P^2 - 1 = 0$ (2)

Phương trình (2) có nghiệm khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 5 - 4P^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{5}}{2} \leq P \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Vậy $\min P = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ và $\max P = \frac{\sqrt{5}}{2}$. □

Bài 34. Tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức z sao cho $|z - 1 - 2i| = 2\sqrt{2}$, (*). Từ đó hãy tìm số phức z thỏa (*) để phần ảo của z bằng 4.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$.

Do $|z - 1 - 2i| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(a - 1)^2 + (b - 2)^2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 2)^2 = 8$.

Vậy tập hợp điểm M biểu diễn số phức z thỏa $|z - 1 - 2i| = 2\sqrt{2}$ là đường tròn (C) tâm $I(1; 2)$ và bán kính

$$R = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Do } z \text{ có phần ảo } b = 4 \text{ nên } (a-1)^2 + 4 = 8 \Leftrightarrow (a-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a-1 = 2 \\ a-1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -1. \end{cases}$$

Vậy có hai số phức là $z = -1 + 4i$; $z = 3 + 4i$. □

Dạng 4. Phương trình bậc hai và bậc cao trong số phức

Phương pháp giải:

Xét phương trình bậc hai $az^2 + bz + c = 0$, (*) với $a \neq 0$ có biệt số $\Delta = b^2 - 4ac$. Khi đó:

- ① Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình (*) có nghiệm kép $z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$.
- ② Nếu $\Delta \neq 0$ và gọi δ là một căn bậc hai của Δ thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt là $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$ hoặc $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$.

① Hệ thức Vi-ét vẫn đúng trong trường phức $\mathbb{C}$: $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ và $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

② Căn bậc hai của số phức $z = x + yi$ là một số phức w và tìm như sau:

+ Bước 1. Đặt $w = a + bi$ với $x, y, a, b \in \mathbb{R}$ là một căn bậc hai của số phức z .

+ Bước 2. Biến đổi $w^2 = x + yi = (a + bi)^2 \Leftrightarrow (a^2 - b^2) + 2abi = x + yi \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = x \\ 2ab = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dots \\ b = \dots \end{cases}$

+ Bước 3. Kết luận các căn bậc hai của số phức z là $w = a + bi$.

Ta có thể làm tương tự đối với trường hợp căn bậc ba, căn bậc bốn. Ngoài cách tìm căn bậc hai của số phức như trên, ta có thể tách ghép đưa về số chính phương dựa vào hằng đẳng thức.

1 CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm căn bậc hai của số phức $z = 16 - 30i$.

Lời giải.

Đặt $w = a + bi$ là căn bậc hai của số phức $z = 16 - 30i$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó } (a + bi)^2 = 16 - 30i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi = 16 - 30i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 16 & (1) \\ 2ab = -30 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow a = -\frac{15}{b} \text{ thay vào (1), ta có } \frac{225}{b^2} - b^2 = 16 \Rightarrow b^4 + 16b^2 - 225 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 9 \\ b^2 = -25 \text{ (VN)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3 \\ b = 3. \end{cases}$$

Với $b = -3 \Rightarrow a = 5$. Với $b = 3 \Rightarrow a = -5$. Vậy $w = -5 + 3i$, $w = 5 - 3i$. □

Ví dụ 2. Giải phương trình: $z^2 + 2z + 5 = 0$ trên tập số phức $\mathbb{C}$.

Lời giải.

Ta có $\Delta' = -4 = 4i^2$ nên $\delta = 2i$ là một căn bậc hai của Δ' . Vậy phương trình có hai nghiệm phức phân biệt $x_{1,2} = -1 \pm 2i$. □

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Tìm căn bậc hai của các số phức sau:

① $z = -5 + 12i$.

② $z = 8 + 6i$.

③ $z = 3 - 4i$.

④ $z = 33 - 56i$.

⑤ $z = 4 + 6\sqrt{5}i$.

⑥ $z = -1 - 2\sqrt{6}i$.

Lời giải.

① $z = -5 + 12i$.

Đặt $w = a + bi$ là căn bậc hai của số phức $z = -5 + 12i$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó } (a + bi)^2 = -5 + 12i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi = -5 + 12i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -5 & (1) \\ 2ab = 12 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow a = \frac{6}{b} \text{ thay vào (1), ta có } \frac{36}{b^2} - b^2 = -5 \Rightarrow b^4 - 5b^2 - 36 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 9 \\ b^2 = -4 \text{ (VN)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3 \\ b = 3. \end{cases}$$

Với $b = -3 \Rightarrow a = -2$. Với $b = 3 \Rightarrow a = 2$. Vậy $w = 2 + 3i, w = -2 - 3i$.

② $z = 8 + 6i$.

Đặt $w = a + bi$ là căn bậc hai của số phức $z = 8 + 6i$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó } (a + bi)^2 = 8 + 6i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi = 8 + 6i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 8 & (1) \\ 2ab = 6 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow a = \frac{3}{b} \text{ thay vào (1), ta có } \frac{9}{b^2} - b^2 = 8 \Rightarrow b^4 + 8b^2 - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 1 \\ b^2 = -9 \text{ (VN)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ b = 1. \end{cases}$$

Với $b = -1 \Rightarrow a = -3$. Với $b = 1 \Rightarrow a = 3$. Vậy $w = 3 + i, w = -3 - i$.

③ $z = 3 - 4i$.

Đặt $w = a + bi$ là căn bậc hai của số phức $z = 3 - 4i$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó } (a + bi)^2 = 3 - 4i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi = 3 - 4i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 & (1) \\ 2ab = -4 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow a = \frac{-2}{b} \text{ thay vào (1), ta có } \frac{4}{b^2} - b^2 = 3 \Rightarrow b^4 + 3b^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 1 \\ b^2 = -4 \text{ (VN)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ b = 1. \end{cases}$$

Với $b = -1 \Rightarrow a = 2$. Với $b = 1 \Rightarrow a = -2$. Vậy $w = 2 - i, w = -2 + i$.

④ $z = 33 - 56i$.

Đặt $w = a + bi$ là căn bậc hai của số phức $z = 33 - 56i$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó } (a + bi)^2 = 33 - 56i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi = 33 - 56i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 33 & (1) \\ 2ab = -56 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow a = \frac{-28}{b} \text{ thay vào (1), ta có } \frac{784}{b^2} - b^2 = 33 \Rightarrow b^4 + 33b^2 - 784 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 16 \\ b^2 = -49 \text{ (VN)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b = -4 \\ b = 4. \end{cases}$$

Với $b = -4 \Rightarrow a = 7$. Với $b = 4 \Rightarrow a = -7$. Vậy $w = 7 - 4i, w = -7 + 4i$.

⑤ $z = 4 + 6\sqrt{5}i$.

Đặt $w = a + bi$ là căn bậc hai của số phức $z = 4 + 6\sqrt{5}i$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó } (a + bi)^2 = 4 + 6\sqrt{5}i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi = 4 + 6\sqrt{5}i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 4 & (1) \\ 2ab = 6\sqrt{5} & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow a = \frac{3\sqrt{5}}{b} \text{ thay vào (1), ta có } \frac{49}{b^2} - b^2 = 4 \Rightarrow b^4 + 4b^2 - 49 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 5 \\ b^2 = -9 \text{ (VN)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\sqrt{5} \\ b = \sqrt{5}. \end{cases}$$

Với $b = -\sqrt{5} \Rightarrow a = -3$. Với $b = \sqrt{5} \Rightarrow a = 3$. Vậy $w = -3 - \sqrt{5}i, w = 3 + \sqrt{5}i$.

⑥ $z = -1 - 2\sqrt{6}i$.

Đặt $w = a + bi$ là căn bậc hai của số phức $z = -1 - 2\sqrt{6}i$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó } (a + bi)^2 = -1 - 2\sqrt{6}i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi = -1 - 2\sqrt{6}i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -1 & (1) \\ 2ab = -2\sqrt{6} & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow a = \frac{-\sqrt{6}}{b} \text{ thay vào (1), ta có } \frac{6}{b^2} - b^2 = -1 \Rightarrow b^4 - b^2 - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 3 \\ b^2 = -2 \text{ (VN)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\sqrt{3} \\ b = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Với $b = -\sqrt{3} \Rightarrow a = \sqrt{2}$. Với $b = \sqrt{3} \Rightarrow a = -\sqrt{2}$. Vậy $w = \sqrt{2} - \sqrt{3}i, w = -\sqrt{2} + \sqrt{3}i$.

□

Bài 2. Tìm căn bậc ba của các số phức sau:

① $z = -i$.

- ② $z = -27$.
- ③ $z = 2 + 2i$.
- ④ $z = -46 + 9i$.

🔗Lời giải.

- ① $z = -i$.

Đặt $w = a + bi$ là căn bậc ba của số phức $z = -i$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó } (a + bi)^3 = -i \Leftrightarrow a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i = -i \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 3ab^2 = 0 & (1) \\ 3a^2b - b^3 = -1 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (1), suy ra } a(a^2 - 3b^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a^2 - 3b^2 = 0. \end{cases}$$

Với $a = 0$ thay vào (2), ta có $-b^3 = -1 \Leftrightarrow b = 1$. Vậy $w = i$.

$$\text{Với } a^2 - 3b^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 3b^2 \text{ thay vào (2), ta có } 9b^3 - b^3 = -1 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2} \Rightarrow a^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } w = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

- ② $z = -27$.

Đặt $w = a + bi$ là căn bậc ba của số phức $z = -27$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó } (a + bi)^3 = -27 \Leftrightarrow a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i = -27 \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 3ab^2 = -27 & (1) \\ 3a^2b - b^3 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (2), suy ra } b(3a^2 - b^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 3a^2 - b^2 = 0. \end{cases}$$

Với $b = 0$ thay vào (1), ta có $a^3 = -27 \Leftrightarrow a = -3$. Vậy $w = -3$.

$$\text{Với } 3a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow b^2 = 3a^2 \text{ thay vào (1), ta có } a^3 - 9a^3 = -27 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2} \Rightarrow b^2 = \frac{27}{4} \Rightarrow b = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } w = \frac{3}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}i.$$

- ③ $z = 2 + 2i$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = \sqrt[3]{2+2i} \\ y = \sqrt[3]{2-2i}. \end{cases}$$

$$\text{Ta có } (x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = 4 + 6(x + y).$$

$$\text{Suy ra ta có phương trình } (x + y)^3 - 6(x + y) - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y = -2 \\ x + y = 1 + \sqrt{3} \\ x + y = 1 - \sqrt{3}. \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác } xy = \sqrt[3]{2+2i} \cdot \sqrt[3]{2-2i} = 2.$$

$$\begin{aligned} &+ \text{ Với } x + y = -2 \text{ và } xy = 2. \text{ Khi đó } x, y \text{ là nghiệm của phương trình } X^2 + 2X + 2 = 0 \Rightarrow \\ &\quad \begin{cases} X = -1 + i \\ X = -1 - i. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Kiểm tra ta thấy } w = \sqrt[3]{2+2i} = -1 + i.$$

$$\begin{aligned} &+ \text{ Với } x + y = 1 + \sqrt{3} \text{ và } xy = 2. \text{ Khi đó } x, y \text{ là nghiệm của phương trình } X^2 - (1 + \sqrt{3})X + 2 = 0. \\ &\text{Ta có } \Delta = (1 + \sqrt{3})^2 - 8 = -4 + 2\sqrt{3} = (4 - 2\sqrt{3})i^2 = (\sqrt{3} - 1)^2 i^2. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó ta có hai nghiệm } \begin{cases} X = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}i \\ X = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3} - 1}{2}i. \end{cases}$$

$$\text{Kiểm tra ta thấy } w = \sqrt[3]{2+2i} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}i.$$

$$\begin{aligned} &+ \text{ Với } x + y = 1 - \sqrt{3} \text{ và } xy = 2. \text{ Khi đó } x, y \text{ là nghiệm của phương trình } X^2 + (1 - \sqrt{3})X + 2 = 0. \\ &\text{Ta có } \Delta = (1 - \sqrt{3})^2 - 8 = -8 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2 i^2. \end{aligned}$$

Do đó ta có hai nghiệm
$$\begin{cases} X = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3} + 1}{2}i \\ X = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3} + 1}{2}i. \end{cases}$$

Kiểm tra ta thấy $w = \sqrt[3]{2 + 2i} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3} + 1}{2}i$.

④ $z = -46 + 9i$.

Đặt $\begin{cases} x = \sqrt[3]{-46 + 9i} \\ y = \sqrt[3]{-46 - 9i}. \end{cases}$

Ta có $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = -92 + 39(x + y)$.

Suy ra ta có phương trình $(x + y)^3 - 39(x + y) + 92 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ x + y = -2 + 3\sqrt{3} \\ x + y = -2 - 3\sqrt{3}. \end{cases}$

Mặt khác $xy = \sqrt[3]{-46 + 9i} \cdot \sqrt[3]{-46 - 9i} = 13$.

+ Với $x + y = 4$ và $xy = 13$. Khi đó x, y là nghiệm của phương trình $X^2 - 4X + 13 = 0 \Rightarrow \begin{cases} X = 2 + 3i \\ X = 2 - 3i. \end{cases}$

Kiểm tra ta thấy $w = \sqrt[3]{-46 + 9i} = 2 + 3i$.

+ Với $x + y = -2 + 3\sqrt{3}$ và $xy = 13$. Khi đó x, y là nghiệm của phương trình $X^2 - (-2 + 3\sqrt{3})X + 13 = 0$.

Ta có $\Delta = 31 - 12\sqrt{3} - 52 = -21 - 12\sqrt{3} = (21 + 12\sqrt{3})i^2$.

Do đó ta có hai nghiệm
$$\begin{cases} X = \frac{-2 + 3\sqrt{3} + \sqrt{21 + 12\sqrt{3}}i}{2} \\ X = \frac{-2 + 3\sqrt{3} - \sqrt{21 + 12\sqrt{3}}i}{2}. \end{cases}$$

Kiểm tra ta thấy $w = \sqrt[3]{-46 + 9i} = \frac{-2 + 3\sqrt{3} - \sqrt{21 + 12\sqrt{3}}i}{2}$.

+ Với $x + y = -2 - 3\sqrt{3}$ và $xy = 13$. Khi đó x, y là nghiệm của phương trình $X^2 + (2 + 3\sqrt{3})X + 13 = 0$.

Ta có $\Delta = 31 + 12\sqrt{3} - 52 = -21 + 12\sqrt{3} = (21 - 12\sqrt{3})i^2$.

Do đó ta có hai nghiệm
$$\begin{cases} X = \frac{-2 - 3\sqrt{3} + \sqrt{21 - 12\sqrt{3}}i}{2} \\ X = \frac{-2 - 3\sqrt{3} - \sqrt{21 - 12\sqrt{3}}i}{2}. \end{cases}$$

Kiểm tra ta thấy $w = \sqrt[3]{-46 + 9i} = \frac{-2 - 3\sqrt{3} + \sqrt{21 - 12\sqrt{3}}i}{2}$.

□

Bài 3. Giải các phương trình sau trên trường số phức $\mathbb{C}$:

① $2x^2 - 5x + 4 = 0$.

② $x^2 - 4x + 7 = 0$.

③ $x^2 - 2x + 2 = 0$.

④ $8z^2 - 4z + 1 = 0$.

⑤ $2z^2 - iz + 1 = 0$.

⑥ $(z - i)^2 + 4 = 0$.

⑦ $z^4 + 7z^2 + 10 = 0$.

⑧ $z^4 + z^2 - 6 = 0$.

⑨ $(z + i)^4 + 4z^2 = 0$.

Lời giải.

① $2x^2 - 5x + 4 = 0$.

Ta có $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = -7 = 7i^2$ nên $\delta = \sqrt{7}i$ là một căn bậc hai của Δ .

Vậy phương trình có hai nghiệm phức phân biệt $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{7}i}{4} = \frac{5}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4}i$.

② $x^2 - 4x + 7 = 0$.

Ta có $\Delta' = (-2)^2 - 1 \cdot 7 = -3 = 3i^2$ nên $\delta = \sqrt{3}i$ là một căn bậc hai của Δ' .

Vậy phương trình có hai nghiệm phức phân biệt $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}i$.

③ $x^2 - 2x + 2 = 0$.

Ta có $\Delta' = (-1)^2 - 1 \cdot 2 = -1 = i^2$ nên $\delta = i$ là một căn bậc hai của Δ' .

Vậy phương trình có hai nghiệm phức phân biệt $x_{1,2} = 1 \pm i$.

④ $8z^2 - 4z + 1 = 0$.

Ta có $\Delta' = (-2)^2 - 8 \cdot 1 = -4 = 4i^2$ nên $\delta = 2i$ là một căn bậc hai của Δ' .

Vậy phương trình có hai nghiệm phức phân biệt $z_{1,2} = \frac{2 \pm 2i}{8} = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}i$.

⑤ $2z^2 - iz + 1 = 0$.

Ta có $\Delta = (-i)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -9 = 9i^2$ nên $\delta = 3i$ là một căn bậc hai của Δ .

Vậy phương trình có hai nghiệm phức phân biệt $z_1 = \frac{i + 3i}{4} = i$ và $z_2 = \frac{i - 3i}{4} = -\frac{1}{2}i$.

⑥ $(z - i)^2 + 4 = 0$.

Ta có $(z - i)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (z - i)^2 = -4 \Leftrightarrow \begin{cases} z - i = 2i \\ z - i = -2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3i \\ z = -i \end{cases}$.

⑦ $z^4 + 7z^2 + 10 = 0$.

Đặt $t = z^2$, khi đó phương trình trở thành $t^2 + 7t + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = -5 \end{cases}$.

Với $t = -2 \Rightarrow z^2 = -2 \Rightarrow z^2 = 2i^2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{2}i$.

Với $t = -5 \Rightarrow z^2 = -5 \Rightarrow z^2 = 5i^2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{5}i$.

⑧ $z^4 + z^2 - 6 = 0$.

Đặt $t = z^2$, khi đó phương trình trở thành $t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -3 \end{cases}$.

Với $t = 2 \Rightarrow z^2 = 2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{2}$.

Với $t = -3 \Rightarrow z^2 = -3 \Rightarrow z^2 = 3i^2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{3}i$.

⑨ $(z + i)^4 + 4z^2 = 0$.

Ta có $(z + i)^2 + 4z^2 = 0 \Leftrightarrow (z + i)^4 = 4i^2z^2 \Leftrightarrow \begin{cases} (z + i)^2 = 2iz \\ (z + i)^2 = -2iz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 - 1 = 0 & (1) \\ z^2 + 4iz - 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Theo (1) thì $z^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 = 1 \Leftrightarrow z_{1,2} = \pm 1$.

Theo (2), ta có $\Delta' = (2i)^2 + 1 = -3 = 3i^2$ nên $\delta = \sqrt{3}i$ là một căn bậc hai của Δ' .

Khi đó phương trình (2) có hai nghiệm phức phân biệt là $z_{3,4} = -2i \pm \sqrt{3}i = (-2 \pm \sqrt{3})i$.

□

Bài 4. Giải các phương trình sau trên trường số phức $\mathbb{C}$:

① $\frac{4z - 3 - 7i}{z - i} = z - 2i$.

② $z^2 - (1 + i)z + 6 + 3i = 0$.

③ $z^2 + 3(1 + i)z + 5i = 0$.

④ $z^2 + (1 + i)z - 2 - i = 0$.

⑤ $z^2 - 8(1 - i)z + 63 - 16i = 0$.

⑥ $(2 - 3i)z^2 + (4i - 3)z + 1 - i = 0$.

⑦ $2(1 + i)z^2 - 4(2 - 4i)z - 10 + 14i = 0$.

Lời giải.

① $\frac{4z - 3 - 7i}{z - i} = z - 2i$.

Ta có $\frac{4z - 3 - 7i}{z - i} = z - 2i \Rightarrow z^2 - (3i + 4)z + 1 + 7i = 0$.

Khi đó $\Delta = (3i + 4)^2 - 4(1 + 7i) = 3 - 4i$ nên $\delta = 2 - i$ là một căn bậc hai của Δ .

Vậy phương trình có hai nghiệm phức phân biệt $z = \frac{3i + 4 + 2 - i}{2} = 3 + i$ hoặc $z = \frac{3i + 4 - 2 + i}{2} = 1 + 2i$.

② $z^2 - (1 + i)z + 6 + 3i = 0$.

Ta có $\Delta = (1 + i)^2 - 4(6 + 3i) = 1 + 2i - 1 - 24 - 12i = -24 - 10i$.

Gọi $\delta = 1 - 5i$ là một căn bậc hai của Δ .

Vậy phương trình có hai nghiệm phức là $z_1 = \frac{1 + i + 1 - 5i}{2} = 1 - 2i$ hoặc $z_2 = \frac{1 + i - 1 + 5i}{2} = 3i$.

③ $z^2 + 3(1+i)z + 5i = 0$.

Ta có $\Delta = 9(1+i)^2 - 4 \cdot 5i = 18i - 20i = -2i$.

Gọi $\delta = 1 - i$ là một căn bậc hai của Δ .

Vậy phương trình có hai nghiệm phức là $z_1 = \frac{-3-3i+1-i}{2} = -1-2i$ hoặc $z_2 = \frac{-3-3i-1+i}{2} = -2-i$.

④ $z^2 + (1+i)z - 2-i = 0$.

Ta có $\Delta = (1+i)^2 - 4(-2-i) = 1+2i-1+8+4i = 8+6i$.

Gọi $\delta = 3+i$ là một căn bậc hai của Δ .

Vậy phương trình có hai nghiệm phức là $z_1 = \frac{-1-i+3+i}{2} = 1$ hoặc $z_2 = \frac{-1-i-3-i}{2} = -2-i$.

⑤ $z^2 - 8(1-i)z + 63 - 16i = 0$.

Ta có $\Delta' = 16(1-i)^2 - (63-16i) = 16-32i-16-63+16i = -63-16i$.

Gọi $\delta = 1-8i$ là một căn bậc hai của Δ' .

Vậy phương trình có hai nghiệm phức là $z_1 = 4(1-i)+1-8i = 5-12i$ hoặc $z_2 = 4(1-i)-1+8i = 3+4i$.

⑥ $(2-3i)z^2 + (4i-3)z + 1-i = 0$.

Ta có $\Delta = (4i-3)^2 - 4(2-3i)(1-i) = -16-24i+9+4+20i = -3-4i$.

Gọi $\delta = 1-2i$ là một căn bậc hai của Δ .

Vậy phương trình có hai nghiệm là $z_1 = \frac{-4i+3+1-2i}{2(2-3i)} = \frac{4-6i}{4-6i} = 1$ hoặc $z_2 = \frac{-4i+3-1+2i}{2(2-3i)} = -\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$.

⑦ $2(1+i)z^2 - 4(2-4i)z - 10 + 14i = 0$.

Ta có $a-b+c = 2+2i+8-16i-10+14i = 0$.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $z_1 = -1$ và $z_2 = -\frac{-10+14i}{2+2i} = -1-6i$.

□

Bài 5. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Hãy tính giá trị của biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

Lời giải.

Ta có $\Delta' = -9 = 9i^2$ nên $\delta = 3i$ là một căn bậc hai của Δ' .

Khi đó phương trình có hai nghiệm phức là $z_1 = -1-3i$ và $z_2 = -1+3i$.

Vậy $A = |z_1|^2 + |z_2|^2 = (\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 = 20$.

□

Bài 6. Cho z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $2z^2 - 4z + 11 = 0$. Hãy tính giá trị của biểu thức

$$M = \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{(z_1 + z_2)^{2012}}.$$

Lời giải.

Ta có $\Delta' = 4-22 = -18 = 18i^2$ nên $\delta = 3\sqrt{2}i$ là một căn bậc hai của Δ' .

Khi đó phương trình có hai nghiệm phức phân biệt là $z_1 = 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$ và $z_2 = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$.

Do đó $(z_1 + z_2)^{2012} = 2^{2012}$. Vậy $M = \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{(z_1 + z_2)^{2012}} = \frac{\frac{11}{2} + \frac{11}{2}}{2^{2012}} = \frac{11}{2^{2012}}$.

□

Bài 7. Tìm số phức z và w thỏa $z + w = 4 - i$ và $z^3 + w^3 = 7 + 28i$.

Lời giải.

Ta có $z^3 + w^3 = 7 + 28i \Leftrightarrow (z+w)(z^2 + w^2 - zw) = 7 + 28i \Leftrightarrow z^2 + w^2 - zw = \frac{7+28i}{4-i} = 7i$.

Mặt khác $z^2 + w^2 - zw = 7i \Leftrightarrow (z+w)^2 - 3zw = 7i \Leftrightarrow zw = \frac{7i - (4-i)^2}{-3} = 5 - 5i$.

Khi đó z và w là hai nghiệm của phương trình $X^2 - (4-i)X + 5-5i = 0$.

Ta có $\Delta = (4-i)^2 - 4(5-5i) = -5 + 12i$ nên $\delta = 2+3i$ là một căn bậc hai của Δ .

Khi đó phương trình có hai nghiệm $X = \frac{4-i+2+3i}{2} = 3+i$ hoặc $X = \frac{4-i-2-3i}{2} = 1-2i$.

Vậy $\begin{cases} z = 3+i \\ w = 1-2i \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} z = 1-2i \\ w = 3+i \end{cases}$.

□

Dạng 5. Phương trình quy về bậc hai*Phương pháp giải:*

Trong giải phương trình bậc cao, nếu đề cho phương trình có một nghiệm thuần ảo, ta thế $z = bi$ vào phương trình và giải tìm $b \Rightarrow z = bi$. Do có nghiệm $z = bi$ nên chia Hoocner để đưa về phương trình bậc thấp hơn mà đã biết cách giải để tìm nghiệm còn lại. Còn nếu đề bài cho biết có 1 nghiệm thực. Khi đó cần đến khả năng nhẩm nghiệm của phương trình bậc cao (nếu có i thì ta sẽ nhẩm nghiệm sao cho triệt tiêu đi i).

Bài 1. Giải các phương trình sau, biết rằng chúng có một nghiệm thuần ảo.

$$\textcircled{1} \quad z^3 - 2(1+i)z^2 + 4(1+i)z - 8i = 0.$$

$$\textcircled{2} \quad z^3 + (1+i)z^2 + (3+i)z + 3i = 0.$$

$$\textcircled{3} \quad z^3 + (2-2i)z^2 + (5-4i)z - 10i = 0.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \quad z^3 - 2(1+i)z^2 + 4(1+i)z - 8i = 0.$$

Giả sử phương trình có một nghiệm thuần ảo là $z = bi$ nên ta có:

$$(bi)^3 - 2(1+i)(bi)^2 + 4(1+i)bi - 8i = 0 \Leftrightarrow -b^3i + 2b^2 + 2b^2i + 4bi - 4b - 8i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2 - 4b = 0 \\ -b^3 + 2b^2 + 4b - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = 2 \\ b = 2 \\ b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow b = 2.$$

$$\text{Khi đó phương trình đã cho trở thành } (z-2i)(z^2-2z+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z-2i = 0 \\ z^2-2z+4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2i \\ z = 1 \pm i\sqrt{3} \end{cases}.$$

$$\textcircled{2} \quad z^3 + (1+i)z^2 + (3+i)z + 3i = 0.$$

Giả sử phương trình có một nghiệm thuần ảo là $z = bi$ nên ta có:

$$(bi)^3 + (1+i)(bi)^2 + (3+i)bi + 3i = 0 \Leftrightarrow -b^3i - b^2 - b^2i + 3bi - b + 3i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -b^2 - b = 0 \\ -b^3 - b^2 + 3b + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = -1 \\ b = -1 \\ b = \pm\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow b = -1.$$

$$\text{Khi đó phương trình đã cho trở thành } (z+i)(z^2+z+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z+i = 0 \\ z^2+z+3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -i \\ z = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{11}}{2} \end{cases}.$$

$$\textcircled{3} \quad z^3 + (2-2i)z^2 + (5-4i)z - 10i = 0.$$

Giả sử phương trình có một nghiệm thuần ảo là $z = bi$ nên ta có:

$$(bi)^3 + (2-2i)(bi)^2 + (5-4i)bi - 10i = 0 \Leftrightarrow -b^3i - 2b^2 + 2b^2i + 5bi + 4b - 10i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2b^2 + 4b = 0 \\ -b^3 + 2b^2 + 5b - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = 2 \\ b = 2 \\ b = \pm\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow b = 2.$$

$$\text{Khi đó phương trình đã cho trở thành } (z-2i)(z^2+2z+5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z-2i = 0 \\ z^2+2z+5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2i \\ z = -1 \pm 2i \end{cases}.$$

□

Bài 2. Giải các phương trình sau, biết rằng chúng có một nghiệm thực.

$$\textcircled{1} \quad 2z^3 - 5z^2 + 3z + 3 + (2z+1)i = 0.$$

$$\textcircled{2} \quad z^3 - 2(1+i)z^2 + 3iz + 1 - i = 0.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \quad 2z^3 - 5z^2 + 3z + 3 + (2z + 1)i = 0.$$

Vì $2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 5\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right)i = 0$ nên $z = -\frac{1}{2}$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

$$\text{Khi đó phương trình đã cho trở thành } (2z + 1)(2z^2 - 6z + 6 + 2i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2z + 1 = 0 & (1) \\ 2z^2 - 6z + 6 + 2i = 0 & (2). \end{cases}$$

Với (1), ta có $2z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2}$.

Với (2), thì $\Delta' = 9 - 2(6 + 2i) = -3 - 4i$.

Khi đó gọi δ là căn bậc hai của Δ' thì $\delta = 1 - 2i$.

Vậy phương trình (2) có hai nghiệm phức phân biệt $z = \frac{3 + 1 - 2i}{2} = 2 - i$ và $z = \frac{3 - 1 + 2i}{2} = 1 + i$.

$$\textcircled{2} \quad z^3 - 2(1 + i)z^2 + 3iz + 1 - i = 0.$$

Vì $1 + (-2 - 2i) + 3i + 1 - i = 0$ nên phương trình có một nghiệm là $z = 1$.

$$\text{Khi đó phương trình đã cho trở thành } (z - 1)(z^2 - (1 + 2i)z + i - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z - 1 = 0 & (1) \\ z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0 & (2). \end{cases}$$

Với (1) thì $z - 1 = 0 \Leftrightarrow z = 1$.

Với (2) thì $\Delta = (1 + 2i)^2 - 4(i - 1) = 1$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $z = \frac{1 + 2i + 1}{2} = 1 + i$ và $z = \frac{1 + 2i - 1}{2} = i$.

□

Bài 3. Giải các phương trình sau trên tập số phức $\mathbb{C}$

$$\textcircled{1} \quad z^3 - (2i - 1)z^2 + (3 - 2i)z + 3 = 0$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} z^3 - (2i - 1)z^2 + (3 - 2i)z + 3 = 0 &\Leftrightarrow (z^3 + z^2) - 2iz(z + 1) + 3(z + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (z + 1)(z^2 - 2iz + 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 \\ z = -i \\ z = 3i. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $z = -1, z = -i, z = 3i$.

□

$$\textcircled{2} \quad iz^3 + z^2 - (1 + 4i)z - 2 = 0$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} iz^3 + z^2 - (1 + 4i)z - 2 = 0 &\Leftrightarrow (iz^3 - 4iz) + (z^2 - z - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow iz(z - 2)(z + 2) + (z - 2)(z + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (z - 2)[iz(z + 2) + (z + 1)] = 0 \\ &\Leftrightarrow (z - 2)[iz^2 + (2i + 1)z + 1] = 0. \end{aligned}$$

— Với $z - 2 = 0 \Leftrightarrow z = 2$.

— Với $iz^2 + (2i + 1)z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-2 \pm \sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

Vậy phương trình có nghiệm là $z = 2, z = \frac{-2 \pm \sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

□

$$\textcircled{3} \quad z^4 - z^3 + \frac{z^2}{2} + z + 1 = 0$$

Lời giải.

Ta thấy $z = 0$ không phải là nghiệm của phương trình, do đó phương trình tương đương với

$$z^2 + \frac{1}{z^2} - \left(z - \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2} = 0. \quad (1)$$

Đặt $w = z - \frac{1}{z} \Rightarrow z^2 + \frac{1}{z^2} = w^2 + 2$. Thay vào phương trình (1) ta được $w^2 - w + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow w = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$.

$$\text{— Với } w = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i, \text{ ta có } z - \frac{1}{z} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \Leftrightarrow z^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)z - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 + i \\ z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i. \end{cases}$$

$$\text{— Với } w = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i, \text{ ta có } z - \frac{1}{z} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \Leftrightarrow z^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right)z - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - i \\ z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i. \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $z = 1 \pm i, z = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$. □

$$\textcircled{4} \quad 4z^4 - (6 + 10i)z^3 + (15i - 8)z^2 + (6 + 10i)z + 4 = 0$$

Lời giải.

Ta thấy $z = 0$ không là nghiệm của phương trình, do đó ta có

$$4\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - (6 + 10i)\left(z - \frac{1}{z}\right) + (15i - 8) = 0. \quad (1)$$

Đặt $w = z - \frac{1}{z}$, thay vào (1) ta được $4(w^2 + 2) - (6 + 10i)w + 15i - 8 = 0 \Leftrightarrow 4w^2 - (6 + 10i)w + 15i = 0$

$$0 \Leftrightarrow \begin{cases} w = \frac{3}{2} \\ w = \frac{5i}{2}. \end{cases}$$

$$\text{— Với } w = \frac{3}{2}, \text{ ta có } z - \frac{1}{z} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow z^2 - \frac{3}{2}z - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{2} \\ z = 2. \end{cases}$$

$$\text{— Với } w = \frac{5i}{2}, \text{ ta có } z - \frac{1}{z} = \frac{5i}{2} \Leftrightarrow z^2 - \frac{5i}{2}z - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{i}{2} \\ z = 2i. \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $z = \pm 1 - 3i, z = (-3 \pm 3\sqrt{2})i$. □

$$\textcircled{5} \quad (z - i)(z + 2i)(z + 4i)(z + 7i) = 34$$

Lời giải.

Ta có $(z - i)(z + 2i)(z + 4i)(z + 7i) = 34 \Leftrightarrow (z^2 + 6iz + 7)(z^2 + 6iz - 8) = 34$.

Đặt $w = z^2 + 6iz + 7$, ta có $w(w - 15) = 34 \Leftrightarrow w^2 - 15w - 34 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} w = 17 \\ w = -2. \end{cases}$

— Với $w = 17$, ta có $z^2 + 6iz + 7 = 17 \Leftrightarrow z^2 + 6iz - 10 = 0 \Leftrightarrow z = \pm 1 - 3i$.

— Với $w = -2$, ta có $z^2 + 6iz + 7 = -2 \Leftrightarrow z^2 + 6iz + 9 = 0 \Leftrightarrow z = (-3 \pm 3\sqrt{2})i$.

Vậy phương trình có nghiệm là $z = \pm 1 - 3i, z = (-3 \pm 3\sqrt{2})i$. □

$$\textcircled{6} \quad (z^2 + 3z + 2)(z^2 + 11z + 30) = 60$$

Lời giải.

Ta có $(z^2 + 3z + 2)(z^2 + 11z + 30) = 60 \Leftrightarrow (z + 1)(z + 2)(z + 5)(z + 6) = 60 \Leftrightarrow (z^2 + 7z + 6)(z^2 + 7z + 10) = 60$.

Đặt $w = z^2 + 7z + 8$, ta có $(w + 2)(w - 2) = 60 \Leftrightarrow w^2 = 64 \Leftrightarrow w = \pm 8$.

— Với $w = 8$, ta có $z^2 + 7z + 8 = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z = -7. \end{cases}$

— Với $w = -8$, ta có $z^2 + 7z + 8 = -8 \Leftrightarrow z^2 + 7z + 16 = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2}i$.

Vậy phương trình có nghiệm là $z = 0, z = -7, z = -\frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2}i$. □

Dạng 6. Dạng lượng giác của số phức

Phương pháp giải:

Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Đặt $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Khi đó

① Dạng lượng giác của số phức z là $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

② Một argument của số phức z là φ .

③ $\tan \varphi = \frac{b}{a}$.

④ $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$.

Ví dụ 1. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4 = 0$. Viết dạng lượng giác của z_1 và z_2 .

Lời giải.

Ta có $z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 1 + \sqrt{3}i \\ z_2 = -1 + \sqrt{3}i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ z_2 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right). \end{cases}$ □

Ví dụ 2. Viết số phức z dưới dạng lượng giác, biết rằng $|z - 1| = |z - i\sqrt{3}|$ và $i\bar{z}$ có một argument bằng $\frac{\pi}{6}$.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$ (với $a, b \in \mathbb{R}$). Ta có

$$|z - 1| = |z - i\sqrt{3}| \Leftrightarrow |(a - 1) + bi| = |a + (b - \sqrt{3})i| \Leftrightarrow (a - 1)^2 + b^2 = a^2 + (b - \sqrt{3})^2 \Leftrightarrow 2a - 1 = \sqrt{3}(2b - \sqrt{3}) \Leftrightarrow a = \sqrt{3}b - 1.$$

Ta lại có $i\bar{z} = b + ai \Rightarrow \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b^2 = 3a^2 \Rightarrow b = \pm \sqrt{3}a$.

— Với $b = \sqrt{3}a$, ta có $a = 3a - 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$. Do đó $b = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$.

— Với $b = -\sqrt{3}a$, ta có $a = -3a - 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$. Do đó $b = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow z = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$.

Vậy $z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ và $z = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$. □

Ví dụ 3. Tìm số phức z , biết rằng $|1 - 2z| = |i - 2\bar{z}|$ và $\frac{z + 3}{z - 3}$ có một argument bằng $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$ (với $a, b \in \mathbb{R}$). Ta có

$$|1 - 2z| = |i - 2\bar{z}| \Leftrightarrow |(1 - 2a) - 2bi| = |-2a + (2b + 1)i| \Leftrightarrow (2a - 1)^2 + 4b^2 = 4a^2 + (2b + 1)^2 \Leftrightarrow 4a - 1 = -4b - 1 \Leftrightarrow a = -b.$$

Ta lại có $\frac{z+3}{z-3} = \frac{(a+3)+bi}{(a-3)+bi} = \frac{[(a+3)+bi][(a-3)-bi]}{(a-3)^2+b^2} = \frac{(a^2+b^2-9)-6bi}{(a-3)^2+b^2}$. Suy ra

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{2a^2-9}{\sqrt{(2a^2-9)^2+36a^2}} \Leftrightarrow (2a^2-9)^2 = 36a^2 \Leftrightarrow 2a^2-9 = \pm 6a.$$

— Với $2a^2-9 = 6a \Leftrightarrow 2a^2-6a-9=0 \Leftrightarrow a = \frac{3 \pm 3\sqrt{3}}{2}$.

– Nếu $a = \frac{3+3\sqrt{3}}{2}$ thì $b = -\frac{3+3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z = \frac{3+3\sqrt{3}}{2} - \frac{3+3\sqrt{3}}{2}i$.

– Nếu $a = \frac{3-3\sqrt{3}}{2}$ thì $b = -\frac{3-3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z = \frac{3-3\sqrt{3}}{2} - \frac{3-3\sqrt{3}}{2}i$.

— Với $2a^2-9 = -6a \Leftrightarrow 2a^2+6a-9=0 \Leftrightarrow a = \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}}{2}$.

– Nếu $a = \frac{-3+3\sqrt{3}}{2}$ thì $b = \frac{3-3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z = \frac{-3+3\sqrt{3}}{2} + \frac{3-3\sqrt{3}}{2}i$.

– Nếu $a = \frac{-3-3\sqrt{3}}{2}$ thì $b = \frac{3+3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z = \frac{-3-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3+3\sqrt{3}}{2}i$.

Vậy có 4 số phức thỏa mãn là $z = \frac{3 \pm 3\sqrt{3}}{2} - \frac{3 \pm 3\sqrt{3}}{2}i$ và $z = \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}}{2} + \frac{3 \mp 3\sqrt{3}}{2}i$. □

Ví dụ 4. Tìm số phức z , biết rằng $|z| = |2\bar{z} - \sqrt{3} + i|$ và $\frac{(1+i)z}{1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i}$ có một argument bằng $-\frac{\pi}{6}$.

🔗Lời giải.

Gọi $z = a + bi$ (với $a, b \in \mathbb{R}$). Ta có

$$|z| = |2\bar{z} - \sqrt{3} + i| \Leftrightarrow |a+bi| = |(2a-\sqrt{3})+(-2b+1)i| \Leftrightarrow a^2+b^2 = (2a-\sqrt{3})^2+(2b-1)^2 \Leftrightarrow 3a^2+3b^2-4\sqrt{3}a-4b+4=0. \quad (1)$$

Ta lại có

$$\begin{aligned} \frac{(1+i)z}{1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i} &= \frac{[(1+i)(a+bi)][1-\sqrt{3}-(1+\sqrt{3})i]}{8} \\ &= \frac{[(a-b)+(a+b)i][1-\sqrt{3}-(1+\sqrt{3})i]}{8} \\ &= \frac{(a+\sqrt{3}b)+(-\sqrt{3}a+b)i}{4}. \end{aligned}$$

Suy ra $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}a+b}{a+\sqrt{3}b} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}a+b}{a+\sqrt{3}b} \Rightarrow a = \sqrt{3}b$.

Thay vào (1) ta được

$$9b^2+3b^2-12b^2-4b+4=0 \Leftrightarrow b=1 \Rightarrow a=\sqrt{3}.$$

Vậy $z = \sqrt{3} + i$. □

Ví dụ 5. Tìm số phức z thỏa mãn $|z-1| = |z-3|$ và một argument của $z-3$ bằng một argument của $z+3$ cộng với $\frac{\pi}{2}$.

🔗Lời giải.

Gọi $z = a + bi$ (với $a, b \in \mathbb{R}$). Ta có

$$|z-1| = |z-3| \Leftrightarrow |(a-1)+bi| = |(a-3)+bi| \Leftrightarrow (a-1)^2+b^2 = (a-3)^2+b^2 \Leftrightarrow 2(2a-4)=0 \Leftrightarrow a=2.$$

Lại có $z - 3 = (a - 3) + bi$ và $z + 3 = (a + 3) + bi$.

Gọi φ_1, φ_2 lần lượt là argument của $z - 3$ và $z + 3$. Theo đề bài ta có

$$\varphi_1 = \varphi_2 + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \sin \varphi_1 = \sin \left(\varphi_2 + \frac{\pi}{2} \right) \Leftrightarrow \sin \varphi_1 = \cos \varphi_2.$$

Do vậy

$$\frac{b}{\sqrt{(a-1)^2 + b^2}} = \frac{a+3}{\sqrt{(a+3)^2 + b^2}} \Leftrightarrow \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} = \frac{5}{\sqrt{25+b^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ b\sqrt{25+b^2} = 5\sqrt{1+b^2} \end{cases} \Leftrightarrow b = \sqrt{5}.$$

Vậy $z = 2 + i\sqrt{5}$. □

Ví dụ 6. Cho số phức z thỏa mãn $|z| + (1 + i\sqrt{3})z = 3$. Hãy tìm mô-đun của số phức $w = z + z^2 + z^{123}$.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$ (với $a, b \in \mathbb{R}$). Ta có

$$|z| + (1 + i\sqrt{3})z = 3 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} + (1 + i\sqrt{3})(a + bi) = 3 \Leftrightarrow (\sqrt{a^2 + b^2} + a - b\sqrt{3}) + (a\sqrt{3} + b)i = 3.$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} + a - b\sqrt{3} = 3 \\ b + a\sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} + a - b\sqrt{3} = 3 \\ b = -a\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } 2|a| + 4a = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 6a = 3 \text{ (nếu } a \geq 0) \\ 2a = 3 \text{ (nếu } a \leq 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn } a \geq 0) \\ a = \frac{3}{2} \text{ (không thỏa mãn } a \leq 0) \end{cases}$$

$$\text{Với } a = \frac{1}{2} \text{ thì } b = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right). \text{ Khi đó}$$

$$w = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{123\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{123\pi}{3}\right) = -1 - \sqrt{3}i \Rightarrow |w| = 2.$$

Vậy $|w| = 2$. □

Ví dụ 7. Tìm argument âm lớn nhất của số phức $z = (1 + i\sqrt{3})^{10}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow (1 + i\sqrt{3})^{10} = 2^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{3} + i\sin\frac{10\pi}{3}\right).$$

Ta thấy $\frac{10\pi}{3} + k2\pi < 0 \Rightarrow k < -\frac{5}{3}$. Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = -2, -3, \dots$. Do đó, argument âm lớn nhất của số phức $z = (1 + i\sqrt{3})^{10}$ là $-\frac{2\pi}{3}$. □

Ví dụ 8. Tìm số phức z thỏa mãn $|z + 3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$ và có argument dương nhỏ nhất.

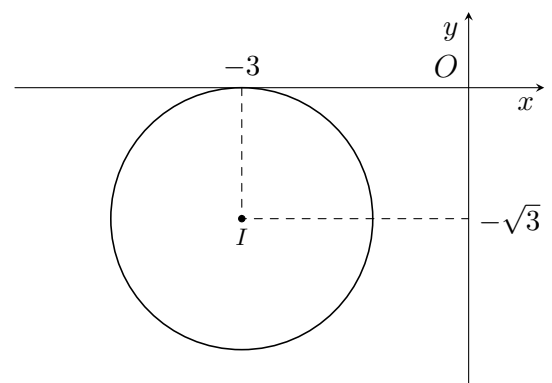
Lời giải.

Gọi $z = a + bi$ (với $a, b \in \mathbb{R}$). Ta có

$$|z + 3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{3} \Leftrightarrow (a + 3)^2 + (b + \sqrt{3})^2 = 3.$$

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z , khi đó $M(a; b)$ nằm trên đường tròn tâm $I(-3; -\sqrt{3})$ có bán kính $R = \sqrt{3}$. Để thấy đường tròn tâm I bán kính $R = \sqrt{3}$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm $M_0(-3; 0)$.

Vì argument của z là góc tạo bởi $\overrightarrow{OM}$ và tia Ox nên điểm biểu diễn số phức có argument dương nhỏ nhất trùng với điểm M_0 , hay $z = -3$.



□

Ví dụ 9. Tìm các số nguyên dương n thỏa mãn $z = \left(\frac{3-i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-3i}\right)^n$ là số thực.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{3-i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-3i} = \frac{\sqrt{3}-i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-i)(1+i\sqrt{3})}{4} = \frac{2\sqrt{3}+2i}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Suy ra } z = \left(\frac{3-i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-3i}\right)^n = \cos \frac{n\pi}{6} + i \sin \frac{n\pi}{6}.$$

Do đó, để z là số thực thì $\sin \frac{n\pi}{6} = 0 \Leftrightarrow \frac{n\pi}{6} = k\pi \Leftrightarrow n = 6k$. Do $n \in \mathbb{N}^*$ nên $k \geq 1$ ($k \in \mathbb{Z}$). $\square$

Ví dụ 10. Cho số phức $z_1 = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^n$ là số thực và số phức $z_2 = \left(\frac{5-i}{2-3i}\right)^{n+2}$ là số ảo. Hãy tìm số nguyên dương n nhỏ nhất.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{\sqrt{3}-i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-i)(1+i\sqrt{3})}{4} = \frac{2\sqrt{3}+2i}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow z_1 = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^n = \cos \frac{n\pi}{6} + i \sin \frac{n\pi}{6}.$$

$$\text{Do đó, để } z \text{ là số thực thì } \sin \frac{n\pi}{6} = 0 \Leftrightarrow \frac{n\pi}{6} = k\pi \Leftrightarrow n = 6k \quad (k \in \mathbb{N}^*). \quad (1)$$

$$\text{Mà } \frac{5-i}{2-3i} = \frac{(5-i)(2+3i)}{13} = \frac{13+13i}{13} = 1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

$$z_2 = 2^{\frac{n+2}{2}} \left(\cos \frac{(n+2)\pi}{4} + i \sin \frac{(n+2)\pi}{4}\right).$$

$$\text{Để } z_2 \text{ là số thuần ảo thì } \cos \frac{(n+2)\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{(n+2)\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow n = 4k \quad (k \in \mathbb{N}^*). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán là $n = 12$. $\square$

Ví dụ 11. Cho số phức z thỏa mãn $z^2 - 2z + 4 = 0$. Tìm số phức $w = \left(\frac{1+\sqrt{3}-z}{2+z}\right)^7$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } z^2 - 2z + 4 = 0 \Leftrightarrow z = 1 \pm i\sqrt{3}.$$

— Với $z = 1 + i\sqrt{3}$, ta có

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{3}-z}{2+z} = \frac{\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}} = \frac{1-i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(1-i)(\sqrt{3}-i)}{4} = \frac{\sqrt{3}-1-i(1+\sqrt{3})}{4}.$$

$$\text{Gọi } \varphi \text{ là argument của số phức } z_1, \text{ khi đó } \tan \varphi = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{3}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{3}} = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{7\pi}{12}.$$

$$\text{Suy ra } \varphi = \frac{7\pi}{12}. \text{ Từ đó ta có } z_1 = \frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12}\right) \Rightarrow$$

$$w = \frac{\sqrt{2}}{2^4} \left(\cos \frac{49\pi}{12} + i \sin \frac{49\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2^4} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right)$$

— Với $z = 1 - i\sqrt{3}$, ta có

$$z_2 = \frac{1+\sqrt{3}-z}{2+z} = \frac{\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}} = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{4} = \frac{\sqrt{3}-1+i(1+\sqrt{3})}{4}.$$

$$\text{Gọi } \varphi \text{ là argument của số phức } z_2, \text{ khi đó } \tan \varphi = -\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -\frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{3}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{3}} = -\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$\tan\left(-\frac{7\pi}{12}\right). \text{ Suy ra } \varphi = -\frac{7\pi}{12}. \text{ Từ đó ta có } z_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{-7\pi}{12} + i \sin \frac{-7\pi}{12}\right) \Rightarrow$$

$$w = \frac{\sqrt{2}}{2^4} \left(\cos \frac{-49\pi}{12} + i \sin \frac{-49\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2^4} \left(\cos \frac{-\pi}{12} + i \sin \frac{-\pi}{12}\right).$$

Vậy có 4 số phức thỏa mãn là $w = \frac{\sqrt{2}}{2^4} \left(\cos \frac{\pm\pi}{12} + i \sin \frac{\pm\pi}{12}\right)$. □

Ví dụ 12. Cho số phức z thỏa mãn $2|z| + \sqrt{3}iz = 4 - z$. Tìm số phức $w = z^{2012} + \frac{1}{z^{2013}}$.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$ (với $a, b \in \mathbb{R}$). Ta có

$$2|z| + \sqrt{3}iz = 4 - z \Leftrightarrow 2\sqrt{a^2 + b^2} + i\sqrt{3}(a + bi) = 4 - (a + bi) \Leftrightarrow (2\sqrt{a^2 + b^2} - b\sqrt{3}) + a\sqrt{3}i = (4 - a) - bi.$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} 2\sqrt{a^2 + b^2} - b\sqrt{3} = 4 - a \\ a\sqrt{3} = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{a^2 + b^2} - b\sqrt{3} = 4 - a \\ b = -a\sqrt{3}. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } |a| + a = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 \text{ (nếu } a \geq 0) \\ 0 = 1 \text{ (nếu } a \leq 0) \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn } a \geq 0).$$

$$\text{Với } a = \frac{1}{2} \text{ thì } b = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \text{ và } \frac{1}{z} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}. \text{ Khi đó}$$

$$w = \cos \frac{2012\pi}{3} - i \sin \frac{2012\pi}{3} + \cos \frac{2013\pi}{3} + i \sin \frac{2013\pi}{3} = \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} + \cos \pi + i \sin \pi = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

$$\text{Vậy } w = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \quad \square$$

Ví dụ 13. Tìm phần thực và phần ảo của các số phức sau

① $z = (\sqrt{3} + i)^8$

② $z = \frac{(1 + i)^{10}}{(\sqrt{3} + i)^9}$

Lời giải.

① Ta có $\sqrt{3} + i = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow z = \frac{1}{2^8} \left(\cos \frac{8\pi}{3} + i \sin \frac{8\pi}{3}\right) = \frac{1}{2^8} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$

$$\text{Vậy } \operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2^9}, \operatorname{Im}(z) = \frac{\sqrt{3}}{2^9}.$$

② Ta có

$$(1 + i)^2 = 2i \Rightarrow (1 + i)^{10} = (2i)^5 = 32i,$$

$$\sqrt{3} + i = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow (\sqrt{3} + i)^9 = \frac{1}{2^9} \left(\cos \frac{9\pi}{3} + i \sin \frac{9\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2^9}.$$

$$\text{Do vậy } z = \frac{(1 + i)^{10}}{(\sqrt{3} + i)^9} = -2^{14}i \Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) = -2^{14}. \quad \square$$

Ví dụ 14. Tìm phần thực và phần ảo của các số phức sau

① $w = z^{2014} + \frac{1}{z^{2014}}$ biết $z + \frac{1}{z} = 1$

② $z = \frac{(1 + i)^{2012}}{(\sqrt{3} + i)^{2011}}$

Lời giải.

① Ta có $z + \frac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} \pm i \sin \frac{\pi}{3}$.

— Với $z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow w = \cos \frac{2014\pi}{3} + i \sin \frac{2014\pi}{3} + \cos \frac{2014\pi}{3} - i \sin \frac{2014\pi}{3} = -1$.
Do đó $Re(z) = -1, Im(z) = 0$.

— Với $z = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow w = \cos \frac{2014\pi}{3} - i \sin \frac{2014\pi}{3} + \cos \frac{2014\pi}{3} + i \sin \frac{2014\pi}{3} = -1$.
Do đó $Re(z) = -1, Im(z) = 0$.

② Ta có

$$(1+i)^2 = 2i \Rightarrow (1+i)^{2012} = (2i)^{1006} = -2^{1006},$$

$$\sqrt{3} + i = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \Rightarrow (\sqrt{3} + i)^{2011} = \frac{1}{2^{2011}} \left(\cos \frac{2011\pi}{3} + i \sin \frac{2011\pi}{3} \right) = \frac{1}{2^{2011}} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right).$$

$$\text{Do vậy } z = \frac{(1+i)^{2012}}{(\sqrt{3}+i)^{2011}} = -2^{3017} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -2^{3016} + 2^{3016} \cdot \sqrt{3}i \Rightarrow Re(z) = -2^{3016}, Im(z) = 2^{3016} \cdot \sqrt{3}.$$

□

B CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 NHẬN BIẾT

Câu 1. Cho số phức z thỏa mãn $(1+3i)z - 5 = 7i$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\bar{z} = -\frac{13}{5} + \frac{4}{5}i$. B. $\bar{z} = -\frac{13}{5} - \frac{4}{5}i$. C. $\bar{z} = -\frac{13}{5} + \frac{4}{5}i$. D. $\bar{z} = \frac{13}{5} + \frac{4}{5}i$.

🔗 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } (1+3i)z - 5 = 7i \Leftrightarrow z = \frac{5+7i}{1+3i} = \frac{13}{5} - \frac{4}{5}i \Rightarrow \bar{z} = \frac{13}{5} + \frac{4}{5}i.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 2. Cho số phức z thỏa mãn phương trình $(3+2i)z + (2-i)^2 = 4+i$. Tìm tọa độ điểm M biểu diễn số phức z .

A. $M(-1; 1)$. B. $M(-1; -1)$. C. $M(1; 1)$. D. $M(1; -1)$.

🔗 **Lời giải.**

$$\text{Ta có: } (3+2i)z + (2-i)^2 = 4+i \Leftrightarrow z = \frac{4+i-(2-i)^2}{(3+2i)} \Leftrightarrow z = 1+i.$$

Vậy điểm biểu diễn cho số phức z là $M(1; 1)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 3. Tìm phần thực của số phức z thỏa mãn $(5-i)z = 7-17i$.

A. -2 . B. 3 . C. -3 . D. 2 .

🔗 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } z = \frac{7-17i}{5-i} = \frac{(7-17i)(5+i)}{26} = 2-3i.$$

Phần thực của z là 2 .

Chọn đáp án **D**

□

Câu 4. Số phức liên hợp của số phức z biết $z = (1+i)(3-2i) + \frac{1}{3+i}$ là

A. $\frac{53}{10} - \frac{9}{10}i$. B. $\frac{13}{10} - \frac{9}{10}i$. C. $\frac{13}{10} + \frac{9}{10}i$. D. $\frac{53}{10} + \frac{9}{10}i$.

🔗 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } z = 5+i + \frac{3-i}{10} = \frac{53}{10} + \frac{9}{10}i \text{ nên } \bar{z} = \frac{53}{10} - \frac{9}{10}i.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 5. Tìm phần ảo của số phức z , biết $(1-i)z = 3+i$.

A. -1 . B. 1 . C. -2 . D. 2 .

🔗 **Lời giải.**

Ta có $(1-i)z = 3+i \Leftrightarrow z = \frac{3+i}{1-i} = \frac{(3+i)(1+i)}{2} = \frac{2+4i}{2} = 1+2i$.

Vậy phần ảo của số phức là 2.

Chọn đáp án **D** □

Câu 6. Cho số phức z thỏa mãn phương trình $(3+2i)z + (2-i)^2 = 4+i$. Tọa độ điểm M biểu diễn số phức z là

A. $M(-1; 1)$.

B. $M(-1; -1)$.

C. $M(1; 1)$.

D. $M(1; -1)$.

Lời giải.

Ta có

$$(3+2i)z + (2-i)^2 = 4+i \Leftrightarrow (3+2i)z = 4+i - (2-i)^2 \Leftrightarrow z = \frac{1+5i}{3+2i} = \frac{(1+5i)(3-2i)}{13} = 1+i.$$

Vậy điểm biểu diễn số phức z là $M(1; 1)$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 7. Cho số phức z thỏa mãn $z(2-i) + 13i = 1$. Tính mô-đun của số phức z .

A. $|z| = 34$.

B. $|z| = \sqrt{34}$.

C. $|z| = \frac{\sqrt{34}}{3}$.

D. $|z| = \frac{5\sqrt{34}}{3}$.

Lời giải.

$$Ta\ có\ z(2-i) + 13i = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1-13i}{2-i} = 3-5i.$$

Khi đó $|z| = \sqrt{34}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 8. Tìm phần ảo của số phức z biết $z(2-i) + 13i = 1$.

A. $-5i$.

B. $5i$.

C. -5 .

D. 5 .

Lời giải.

$$Ta\ có\ z(2-i) + 13i = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1-13i}{2-i} = 3-5i.$$

Vậy phần ảo của z bằng -5 .

Chọn đáp án **C** □

Câu 9. Cho số phức $z = \frac{2-6i}{(1+i)^2}$, khi đó số phức liên hợp của z là

A. $\bar{z} = -3+i$.

B. $\bar{z} = 3-i$.

C. $\bar{z} = -3-i$.

D. $\bar{z} = 3+i$.

Lời giải.

$$Ta\ có\ z = \frac{2-6i}{2i} = -i-3 \Rightarrow \bar{z} = -3+i.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 10. Cho số phức z thỏa mãn $z(2-i) + 13i = 1$. Tính mô-đun của số phức z .

A. $|z| = 34$.

B. $|z| = \frac{5\sqrt{34}}{3}$.

C. $|z| = \sqrt{34}$.

D. $|z| = \frac{\sqrt{34}}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} z(2-i) + 13i = 1 &\Leftrightarrow z = \frac{1-13i}{2-i} \Leftrightarrow z = \frac{(1-13i) \cdot (2+i)}{(2-i) \cdot (2+i)} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{1}{5}(2-26i+i+13) \Leftrightarrow z = 3-5i. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } |z| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} \Leftrightarrow |z| = \sqrt{34}.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 11. Tìm số phức z thỏa mãn $z + 4 - 2i = \frac{10+20i}{3-i}$.

A. $z = -3+9i$.

B. $z = 1-3i$.

C. $z = 46-52i$.

D. $z = 5+5i$.

Lời giải.

$$Ta\ có\ z + 4 - 2i = \frac{10+20i}{3-i} \Leftrightarrow z + 4 - 2i = 1 + 7i \Leftrightarrow z = -3 + 9i.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 12. Cho số phức z thỏa mãn $(2 + i)z = 3 - 4i$. Tìm phần thực của z .

- A. $\frac{2}{25}$. B. $-\frac{11}{5}$. C. $\frac{2}{5}$. D. $\frac{11}{5}$.

Lời giải.

Ta có

$$(2 + i)z = 3 - 4i \Leftrightarrow z = \frac{3 - 4i}{2 + i} = \frac{2}{5} - \frac{11}{5}i.$$

Suy ra phần thực của z bằng $\frac{2}{5}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 13. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(1 + 3i)z - 3 + 2i = 2 + 7i$. Giá trị của $a + b$ là

- A. $\frac{11}{5}$. B. 1. C. $\frac{19}{5}$. D. 3.

Lời giải.

Ta có phương trình ban đầu tương đương với

$$(1 + 3i)z = 5 + 5i \Leftrightarrow z = \frac{5 + 5i}{1 + 3i} \Leftrightarrow z = 2 - i.$$

Suy ra $a = 2, b = -1$ nên $a + b = 2 - 1 = 1$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 14. Tìm phần thực, phần ảo của số phức $z = \frac{3 - i}{1 + i} + \frac{2 + i}{i}$.

- A. Phần thực là 2, phần ảo là -4 . B. Phần thực là 2, phần ảo là $4i$.
C. Phần thực là 2, phần ảo là 4. D. Phần thực là 2, phần ảo là $-4i$.

Lời giải.

Ta có $z = \frac{(3 - i)(1 - i)}{2} + \frac{(2 + i)(-i)}{1} = 2 - 4i$. Vậy số phức z có phần thực là 2, phần ảo là -4 .

Chọn đáp án **A** □

Câu 15. Tìm phần ảo của số phức $\bar{z}$, biết $z = \frac{(1 + i)3i}{1 - i}$.

- A. 3. B. -3 . C. 0. D. -1 .

Lời giải.

Ta có $z = \frac{(1 + i)3i}{1 - i} = \frac{3(-1 + i)}{1 - i} = -3 \Rightarrow \bar{z} = -3 + 0i$. Vậy phần ảo của $\bar{z}$ bằng 0.

Chọn đáp án **C** □

Câu 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm M biểu diễn cho số phức z thỏa mãn $(1 - i)z + (2 - i)^2 = 5 - 4i$ là

- A. $M(1; 1)$. B. $M(1; 2)$. C. $M(1; -1)$. D. $M(-1; 1)$.

Lời giải.

Ta có $z = \frac{5 - 4i - (2 - i)^2}{1 - i} = 1 + i \Rightarrow M = (1; 1)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 17. Tìm phần ảo của số phức $z = 2017 - 2018i$.

- A. -2018 . B. 2017. C. 2018. D. $-2018i$.

Lời giải.

Phần ảo của $z = 2017 - 2018i$ là -2018 .

Chọn đáp án **A** □

Câu 18. Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i, z_2 = 3 - i$. Tìm số phức $z = \frac{z_2}{z_1}$.

- A. $z = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$. B. $z = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$. C. $z = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$. D. $z = -\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$.

Lời giải.

Ta có $z = \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_2 \cdot \bar{z}_1}{z_1 \cdot \bar{z}_1} = \frac{(3 - i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{1 - 7i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 19. Tìm phần ảo của số phức $z = \frac{3}{i}$.

A. -1.

B. 1.

C. -3.

D. 3.

Lời giải.

Ta có $z = \frac{3}{i} \Leftrightarrow z = \frac{-3i}{-i^2} = -3i$. Phần ảo của z bằng -3.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 20. Số phức liên hợp của số phức $z = \frac{2}{1+i}$ là số phức nào trong các số phức dưới đây?

A. $\frac{-2}{1-i}$.B. $1-i$.C. $\frac{-2}{1+i}$.D. $1+i$.

Lời giải.

Ta có $z = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1-i$. Suy ra $\bar{z} = 1+i$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 21. Tổng phần thực và phần ảo của số phức $z = \frac{1+5i}{2i}$ bằng

A. 3.

B. -2.

C. 2.

D. -3.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$.

Ta có $z = \frac{1+5i}{2i} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}i$.

Suy ra $a = \frac{5}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$.

Vậy $a + b = 2$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 22. Cho số phức $z = 1+i$. Tính mô-đun của số phức $w = \frac{\bar{z} + 2i}{z - 1}$.

A. $|w| = \sqrt{2}$.B. $|w| = \sqrt{3}$.C. $|w| = 1$.D. $|w| = 2$.

Lời giải.

$w = \frac{1-i+2i}{1+i-i} = 1+i \Rightarrow |w| = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 23. Cho số phức z thỏa mãn $(2+i)z = 9-8i$. Mô-đun của số phức $w = z + 1+i$ bằng

A. 3.

B. 5.

C. 6.

D. 4.

Lời giải.

Ta có $(2+i)z = 9-8i \Leftrightarrow z = \frac{9-8i}{2+i} = 2-5i$.

Do đó $w = z + 1+i = 3-4i$.

Vậy $|w| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 24. Tìm số phức liên hợp của số phức z thỏa $(-7+6i)z = 1-2i$.

A. $\bar{z} = -\frac{19}{85} + \frac{8}{85}i$.B. $\bar{z} = -\frac{19}{85} - \frac{8}{85}i$.C. $\bar{z} = \frac{19}{85} - \frac{8}{85}i$.D. $\bar{z} = \frac{19}{85} + \frac{8}{85}i$.

Lời giải.

Ta có $(-7+6i)z = 1-2i \Leftrightarrow z = \frac{1-2i}{-7+6i} = \frac{-19+8i}{85} = -\frac{19}{85} + \frac{8}{85}i$. Vậy $\bar{z} = -\frac{19}{85} - \frac{8}{85}i$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 25. Cho $z = 1+3i$. Tính $\frac{1}{z}$.

A. $\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$.B. $\frac{1}{10}i - \frac{3}{10}$.C. $\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i$.D. $-\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i$.

Lời giải.

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{1-3i}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{1-3i}{10} = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 26. Số phức $z = \frac{2+i}{4+3i}$ bằng

- A. $\frac{11}{25} - \frac{2}{25}i$. B. $\frac{11}{5} + \frac{2}{5}i$. C. $\frac{11}{25} + \frac{2}{25}i$. D. $\frac{11}{5} - \frac{2}{5}i$.

Lời giải.

$$\text{Có } z = \frac{2+i}{4+3i} = \frac{(2+i)(4-3i)}{4^2+3^2} = \frac{11-2i}{25} = \frac{11}{25} - \frac{2}{25}i.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 27. Cho hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$ ($z' \neq 0$, $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$). Số phức $\frac{z}{z'}$ có phần thực là

- A. $\frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2}$. B. $\frac{2bb'}{a'^2 + b'^2}$. C. $\frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2}$. D. $\frac{a + a'}{a^2 + b^2}$.

Lời giải.

$$\frac{z}{z'} = \frac{a + bi}{a' + b'i} = \frac{(a + bi)(a' - b'i)}{a'^2 + b'^2} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \frac{a'b - ab'}{a'^2 + b'^2}i.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 28. Số phức $z = \frac{4-3i}{i}$ có phần thực là

- A. 3. B. -3. C. -4. D. 4.

Lời giải.

$$\text{Ta có } z = \frac{4-3i}{i} = \frac{-i(4-3i)}{-i^2} = \frac{-4i+3i^2}{1} = -3-4i. \text{ Vậy phần thực của số phức } z \text{ là } -3.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 29. Cho số phức $z = 1 + i$. Số phức nghịch đảo của z là

- A. $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$. B. $1-i$. C. $\frac{1-i}{2}$. D. $\frac{-1+i}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Số phức nghịch đảo của } z \text{ là } \frac{1}{z} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1-i}{2}.$$

Chọn đáp án **C**

□

2 ĐÁP ÁN

1. D	2. C	3. D	4. A	5. D	6. C	7. B	8. C	9. A	10. C
11. A	12. C	13. B	14. A	15. C	16. A	17. A	18. C	19. C	20. D
21. C	22. A	23. B	24. B	25. C	26. A	27. C	28. B	29. C	

3 THÔNG HIỂU

Câu 1. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $a + (b-1)i = \frac{1+3i}{1-2i}$. Giá trị nào dưới đây là mô-đun của z ?

- A. 5. B. 1. C. $\sqrt{10}$. D. $\sqrt{5}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } a + (b-1)i = \frac{1+3i}{1-2i} \Leftrightarrow a + (b-1)i = -1 + i \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2. \end{cases}$$

Vậy mô-đun của z là $\sqrt{5}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 2. Tính mô-đun của số phức z biết $\bar{z} + 1 = \frac{2-3i}{1+i}$.

- A. $|z| = \frac{\sqrt{34}}{2}$. B. $|z| = \sqrt{34}$. C. $|z| = \frac{\sqrt{26}}{2}$. D. $|z| = \frac{\sqrt{34}}{4}$.

Lời giải.

$$\bar{z} + 1 = \frac{2-3i}{1+i} \Leftrightarrow \bar{z} = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i \Rightarrow z = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i \Rightarrow |z| = \frac{\sqrt{34}}{2}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 3. Cho số phức z thỏa mãn $(1+3i)z - 5 = 7i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\bar{z} = -\frac{13}{5} + \frac{4}{5}i$.

B. $\bar{z} = +\frac{13}{5} - \frac{4}{5}i$.

C. $\bar{z} = -\frac{13}{5} - \frac{4}{5}i$.

D. $\bar{z} = \frac{13}{5} + \frac{4}{5}i$.

Lời giải.

Ta có $z = \frac{5+7i}{1+3i} = \frac{13}{5} - \frac{4}{5}i \Rightarrow \bar{z} = \frac{13}{5} + \frac{4}{5}i$.

Chọn đáp án **D** □**Câu 4.** Cho số phức z thỏa mãn $z(2-i) + 13i = 1$. Tính mô-đun của số phức z .

A. $|z| = 34$.

B. $|z| = \sqrt{34}$.

C. $|z| = \frac{\sqrt{34}}{3}$.

D. $|z| = \frac{5\sqrt{34}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $z(2-i) + 13i = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1-13i}{2-i}$.

Suy ra $|z| = \frac{|1-13i|}{|2-i|} = \frac{\sqrt{1+(-13)^2}}{\sqrt{2+(-1)^2}} = \sqrt{34}$.

Chọn đáp án **B** □**Câu 5.** Cho hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$. Số phức $\frac{z}{z'}$ có phần thực là

A. $\frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2}$.

B. $\frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2}$.

C. $\frac{a + a'}{a^2 + b^2}$.

D. $\frac{2bb'}{a'^2 + b'^2}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{z}{z'} = \frac{a+bi}{a'+b'i} = \frac{(a+bi)(a'-b'i)}{a'^2+b'^2} = \frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2} + \frac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2}i$.

Do đó phần thực của $\frac{z}{z'}$ bằng $\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}$.

Chọn đáp án **A** □**Câu 6.** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(2-i)z = (4+i)z + 3 - 2i$. Giá trị của $|4\bar{z} + i|$ là

A. $\sqrt{26}$.

B. $\sqrt{30}$.

C. $\sqrt{17}$.

D. $\sqrt{15}$.

Lời giải.

Ta có $(2-i)z = (4+i)z + 3 - 2i \Leftrightarrow z(-2-2i) = 3-2i \Leftrightarrow z = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4}i$.

Do đó $|4\bar{z} + i| = \left| 4\left(-\frac{1}{4} - \frac{5}{4}i\right) + i \right| = |-1-4i| = \sqrt{17}$.

Chọn đáp án **C** □**Câu 7.** Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Dưới đây có bao nhiêu mệnh đề đúng?I. Mô-đun của z là một số thực dương.

II. $z^2 = |z|^2$.

III. $|\bar{z}| = |iz| = |z|$.

IV. Điểm $M(-a; b)$ biểu diễn số phức $\bar{z}$.

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải.

Mệnh đề I sai, cụ thể mô-đun của số 0 bằng 0 chứ không phải là số thực dương.

Mệnh đề II sai vì $|z|^2$ là số thực, z^2 có thể không là số thực, chẳng hạn $(1+i)^2 \neq |1+i|^2$.Mệnh đề III đúng vì $|iz| = |i| \cdot |z| = |z| = |\bar{z}|$.Mệnh đề IV sai và điểm biểu diễn của $\bar{z}$ là $(a; -b)$.Chọn đáp án **C** □**Câu 8.** Cho số phức z thỏa mãn $(1 - \sqrt{3}i)^2 z = 3 - 4i$. Mô-đun của z bằng

A. $\frac{5}{4}$.

B. $\frac{5}{2}$.

C. $\frac{2}{5}$.

D. $\frac{4}{5}$.

Lời giải.

Ta có

$$(1 - \sqrt{3}i)^2 z = 3 - 4i \Leftrightarrow z = \frac{3 - 4i}{(1 - \sqrt{3}i)^2} = \frac{-3 + 4\sqrt{3}}{8} + \frac{4 + 3\sqrt{3}}{8}i.$$

Vậy mô-đun của z là

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{-3 + 4\sqrt{3}}{8}\right)^2 + \left(\frac{4 + 3\sqrt{3}}{8}\right)^2} = \frac{5}{4}.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 9. Cho số phức z khác 0. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\frac{z}{\bar{z}}$ là số thuần ảo. B. $z - \bar{z}$ là số ảo. C. $z \cdot \bar{z}$ là số thực. D. $z + \bar{z}$ là số thực.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ta có: $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{z^2}{z \cdot \bar{z}} = \frac{z^2}{|z|^2} = \frac{a^2 - b^2 + 2abi}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \frac{2ab}{a^2 + b^2}i$, ($a^2 + b^2 \neq 0$).

$$\text{--- } \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{z}{\bar{z}} \text{ là số thuần ảo.}$$

$$\text{--- } \begin{cases} a^2 - b^2 \neq 0 \\ a^2 + b^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{z}{\bar{z}} \text{ không là số thuần ảo.}$$

Do đó nhận định $\frac{z}{\bar{z}}$ là số thuần ảo là sai.

Ta có: $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$ là một số thực nên nhận định $z \cdot \bar{z}$ là số thực là đúng.

Ta có: $z + \bar{z} = 2a$ là số thực nên nhận định $z + \bar{z}$ là số thực là đúng.

Ta có: $z - \bar{z} = 2bi$ là số ảo nên nhận định $z - \bar{z}$ là số ảo là đúng.

Chọn đáp án **A** □

Câu 10. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 - 3z + 4 = 0$. Tính $w = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + iz_1z_2$.

- A. $w = -\frac{3}{4} + 2i$. B. $w = \frac{3}{4} + 2i$. C. $w = 2 + \frac{3}{2}i$. D. $w = \frac{3}{2} + 2i$.

Lời giải.

Theo định lí Viète, ta có Khi đó $\begin{cases} z_1 + z_2 = \frac{3}{2} \\ z_1z_2 = 2 \end{cases}$. Suy ra

$$w = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + iz_1z_2 = \frac{z_1 + z_2}{z_1z_2} + iz_1z_2 = \frac{3}{4} + 2i.$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 11. Trong mặt phẳng Oxy , gọi M là điểm biểu diễn số phức $w = \frac{2z + \bar{z} + 1 - i}{z^2 + i}$ trong đó z là số phức thỏa mãn $(1 - i)(z - i) = 2 - i + z$. Gọi N là điểm trong mặt phẳng sao cho $(\vec{Ox}, \vec{ON}) = 2\varphi$, trong đó $\varphi = (\vec{Ox}, \vec{OM})$ là góc lượng giác tạo thành khi quay tia Ox tới vị trí tia OM . Điểm N nằm trong góc phần tư nào?

- A. Góc phần tư thứ (IV). B. Góc phần tư thứ (I).
C. Góc phần tư thứ (II). D. Góc phần tư thứ (III).

Lời giải.

Ta có $(1 - i)(z - i) = 2 - i + z \Rightarrow z = 3i \Rightarrow w = -\frac{7}{82} - \frac{19}{82}i \Rightarrow M\left(-\frac{7}{82}; -\frac{19}{82}\right) \Rightarrow \tan \varphi = \frac{19}{7}$.

Suy ra $\sin 2\varphi = \frac{2 \tan \varphi}{1 + \tan^2 \varphi} = \frac{133}{205}$ và $\cos 2\varphi = \frac{1 - \tan^2 \varphi}{1 + \tan^2 \varphi} = -\frac{156}{205}$.

Vậy N thuộc góc phần tư thứ (II).

Chọn đáp án **C** □

Câu 12. Cho số phức z thỏa mãn $(2 + 3i)z = z - 1$. Mô-đun của $\bar{z}$ bằng

- A. $\frac{1}{10}$. B. $\sqrt{10}$. C. 1. D. $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Lời giải.

Ta có

$$(2 + 3i)z = z - 1 \Leftrightarrow (1 + 3i)z = -1 \Leftrightarrow z = \frac{-1}{1 + 3i} = -\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i.$$

Suy ra

$$|\bar{z}| = |z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 13. Viết số phức $z = \frac{(2-3i)(4-i)}{3+2i}$ dưới dạng $z = a + bi$ với a, b là các số thực. Tìm a, b .

- A. $a = -1; b = -4$. B. $a = 1; b = -4$. C. $a = -1; b = 4$. D. $a = 1; b = 4$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } z = \frac{(2-3i)(4-i)}{3+2i} = \frac{5-14i}{3+2i} = \frac{(5-14i)(3-2i)}{13} = \frac{-13-52i}{13} = -1-4i.$$

Do đó điểm biểu diễn cho số phức z có tọa độ $(-1; -4)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 14. Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-1| = 2$. Biết rằng tập hợp các số phức $w = (1+\sqrt{3}i)z+2$ là đường tròn có bán kính bằng R . Tính R .

- A. $R = 8$. B. $R = 2$. C. $R = 16$. D. $R = 4$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } z = \frac{w-2}{1+\sqrt{3}i}.$$

Suy ra

$$|z-1| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{w-2}{1+\sqrt{3}i} - 1 \right| = 2 \Leftrightarrow |w-3-\sqrt{3}i| = 4.$$

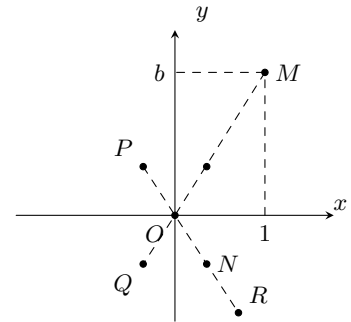
Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức w là đường tròn tâm $I(3; \sqrt{3})$, bán kính $R = 4$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 15.

Trong mặt phẳng phức, cho số phức z có điểm biểu diễn là M . Biết rằng số phức $w = \frac{1}{z}$ được biểu diễn bởi một trong bốn điểm N, P, Q, R như hình vẽ bên. Hỏi điểm biểu diễn của w là điểm nào?

- A. N . B. P . C. Q . D. R .



Lời giải.

Viết $z = 1 + bi$, với $b \in \mathbb{R}, b > 0$.

$$\text{Suy ra } w = \frac{1}{z} = \frac{1}{1+bi} = \frac{1-bi}{1^2+b^2} = \frac{1}{1+b^2} - \frac{b}{1+b^2}i.$$

Suy ra điểm biểu diễn cho w là điểm có tọa độ $\left(\frac{1}{1+b^2}; \frac{-b}{1+b^2}\right)$.

Do $\left(\frac{1}{1+b^2}\right)^2 + \left(\frac{-b}{1+b^2}\right)^2 = 1$ và $b > 0$ nên điểm biểu diễn cho w thuộc góc phần tư thứ IV của mặt phẳng tọa độ và nằm trên đường tròn tâm O , bán kính bằng 1.

Vậy điểm biểu diễn cho w là N .

Chọn đáp án **A** □

Câu 16. Cho 3 số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ |z_1| = |z_2| = |z_3| = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$.

Tính $A = |z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2$.

- A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $\frac{8}{3}$. D. $\frac{3}{8}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} z_1 + z_2 = -z_3 \\ z_1 + z_3 = -z_2 \\ z_2 + z_3 = -z_1 \end{cases} \Rightarrow A = |-z_1|^2 + |-z_2|^2 + |-z_3|^2 = \frac{8}{3}.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 17. Cho số phức z thỏa mãn $z(2-i) + 13i = 1$. Tính mô-đun của số phức z .

- A. $|z| = \frac{5\sqrt{34}}{3}$. B. $|z| = 34$. C. $|z| = \frac{\sqrt{34}}{3}$. D. $|z| = \sqrt{34}$.

Lời giải.

Ta có $z(2-i) + 13i = 1 \Rightarrow z = \frac{1-13i}{2-i} = 3-5i$. Do đó $|z| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 18. Cho số phức z thỏa mãn $z + (2+i)\bar{z} = 3+5i$. Tính môđun của số phức z .

- A. $|z| = 13$. B. $|z| = 5$. C. $|z| = \sqrt{13}$. D. $|z| = \sqrt{5}$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

Khi đó

$$z + (2+i)\bar{z} = 3+5i \Leftrightarrow a+bi + (2+i)(a-bi) = 3+5i \Leftrightarrow \begin{cases} a+2a+b=3 \\ b+a-2b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=5 \\ 3a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}$$

Vậy $|z| = \sqrt{13}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 19. Tìm phần ảo của số phức z , biết $(2-i)z = 1+3i$.

- A. 3. B. $\frac{7}{5}i$. C. $\frac{7}{5}$. D. $-\frac{1}{5}$.

Lời giải.

Ta có $(2-i)z = 1+3i \Leftrightarrow z = \frac{1+3i}{2-i} = -\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$. Vậy z có phần ảo là $\frac{7}{5}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 20. Cho số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z|(2+i) = z - 1 + i(2z+3)$. Tính $S = a + b$.

- A. $S = 1$. B. $S = -5$. C. $S = -1$. D. $S = 7$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} |z|(2+i) = z - 1 + i(2z+3) &\Leftrightarrow (2|z|+1) + (|z|-3)i = (1+2i)z \quad (1) \\ &\Rightarrow |(2|z|+1) + (|z|-3)i|^2 = |(1+2i)z|^2 \\ &\Leftrightarrow (2|z|+1)^2 + (|z|-3)^2 = 5|z|^2 \\ &\Leftrightarrow |z| = 5. \end{aligned}$$

Thay $|z| = 5$ vào (1), ta được $z = 3 - 4i$.

Vậy $S = a + b = -1$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 21. Cho số phức z thỏa mãn $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2019}$. Tính z^4 .

- A. -1. B. i . C. $-i$. D. 1.

Lời giải.

Ta có $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{2i}{2} = i \Rightarrow z = i^{2019} = (i^4)^{504} \cdot i^3 = -i \Rightarrow z^4 = (-i)^4 = 1$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 22. Nghịch đảo $\frac{1}{z}$ của số phức $z = 1 + 3i$ bằng

- A. $\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{10}}i$. B. $\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{3}{\sqrt{10}}i$. C. $\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$. D. $\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i$.

Lời giải.

Ta có $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{1-3i}{1+9} = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 23. Cho số phức z thỏa mãn $(3+2i)z + (2-i)^2 = 4+i$. Môđun của số phức $w = (z+1)\bar{z}$ bằng

- A. 2. B. $\sqrt{10}$. C. $\sqrt{5}$. D. 4.

Lời giải.

Ta có $(3+2i)z + (2-i)^2 = 4+i \Leftrightarrow z = \frac{4+i-(2-i)^2}{3+2i} = 1+i$.

Suy ra $|w| = |(z+1)\bar{z}| = |z+1| \cdot |\bar{z}| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{10}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 24. Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z} + 2z = 3 + i$. Giá trị của biểu thức $z + \frac{1}{z}$ bằng

- A. $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$. B. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. C. $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$. D. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$.

Ta có $\bar{z} + 2z = 3 + i \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow z = 1 + i$.

Do đó $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

Vậy ta có $z + \frac{1}{z} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 25. Tính mô-đun của số phức z , biết $(1 - 2i)z + 2 - i = -12i$.

- A. 5. B. $\sqrt{7}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $(1 - 2i)z + 2 - i = -12i \Leftrightarrow z = \frac{-2 - 11i}{1 - 2i} = 4 - 3i$.

Vậy $|z| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 26. Cho số phức $z = \frac{3i}{3+i} - i$. Mô-đun của số phức $\bar{z}$ là

- A. $\frac{\sqrt{370}}{10}$. B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$. C. $\sqrt{10}$. D. $\frac{-3}{10} + \frac{1}{10}i$.

Lời giải.

Ta có $z = \frac{3i}{3+i} - i \Leftrightarrow z = \frac{1}{3+i} = \frac{3}{10} - \frac{1}{10}i \Rightarrow \bar{z} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i$.

Vậy $|\bar{z}| = \sqrt{\frac{9}{100} + \frac{1}{100}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 27. Tìm điểm biểu diễn của số phức $\bar{z}$ là số phức liên hợp của z , biết $(4+3i)z - (3+4i)(2+i) = 9-9i$.

- A. $(2; -1)$. B. $(2; 1)$. C. $(-2; -1)$. D. $(-2; 1)$.

Lời giải.

Ta có $(4+3i)z - (3+4i)(2+i) = 9-9i \Rightarrow z = \frac{9-9i + (3+4i)(2+i)}{4+3i} = 2-i \Rightarrow \bar{z} = 2+i$.

Vậy điểm biểu diễn của $\bar{z}$ là $(2; 1)$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 28. Tìm số phức $\bar{z}$, biết $(2-5i)z - 3 + 2i = 5 + 7i$.

- A. $\bar{z} = -\frac{9}{29} + \frac{50}{29}i$. B. $\bar{z} = -\frac{9}{29} - \frac{50}{29}i$. C. $\bar{z} = \frac{9}{29} - \frac{50}{29}i$. D. $\bar{z} = \frac{9}{29} + \frac{50}{29}i$.

Lời giải.

Ta có $(2-5i)z - 3 + 2i = 5 + 7i \Rightarrow z = \frac{5i+8}{2-5i} = \frac{(5i+8)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)} = -\frac{9}{29} + \frac{50}{29}i \Rightarrow \bar{z} = -\frac{9}{29} - \frac{50}{29}i$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 29. Tìm tọa độ của điểm biểu diễn số phức $z = \frac{3+4i}{1-i}$ trên mặt phẳng tọa độ.

- A. $Q\left(\frac{1}{2}; -\frac{7}{2}\right)$. B. $N\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$. C. $P\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$. D. $M\left(-\frac{1}{2}; -\frac{7}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có $z = \frac{3+4i}{1-i} = \frac{(3+4i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}i$ nên tọa độ của điểm biểu diễn số phức z là $\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 30. Cho số phức $z = 7 - i$. Tìm số phức $w = \frac{1}{z}$.

- A. $w = \frac{7}{50} - \frac{1}{50}i$. B. $w = -\frac{1}{50} + \frac{7}{50}i$. C. $w = \frac{1}{50} + \frac{7}{50}i$. D. $w = \frac{7}{50} + \frac{1}{50}i$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } w = \frac{1}{z} = \frac{1}{7-i} = \frac{7+i}{(7-i)(7+i)} = \frac{7}{50} + \frac{1}{50}i.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 31. Trong mặt phẳng phức Oxy , tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|(1+i)z - 4 + 2i| = 4\sqrt{2}$ là một đường tròn. Xác định tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn đó.

- A. $I(1; -3), R = 4$. B. $I(4; -2), R = 4\sqrt{2}$. C. $I(1; -3), R = 2$. D. $I(-1; 3), R = 4$.

Lời giải.Gọi điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z .

$$\begin{aligned} |(1+i)z - 4 + 2i| = 4\sqrt{2} &\Leftrightarrow \frac{|(1+i)z - 4 + 2i|}{|1+i|} = \frac{4\sqrt{2}}{|1+i|} \\ &\Leftrightarrow |z - 1 + 3i| = 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 4^2. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(1; -3)$, bán kính $R = 4$.Chọn đáp án **(A)** □

Câu 32. Cho số phức z thỏa mãn $\left|\frac{z-1}{2-i} + i\right| = \sqrt{5}$. Biết rằng tập hợp biểu diễn số phức $w = (1-i)z + 2i$ có dạng $(x+2)^2 + y^2 = m$. Tìm m .

- A. $m = 96$. B. $m = 92$. C. $m = 50$. D. $m = 100$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } w = (1-i)z + 2i \Rightarrow z = \frac{w-2i}{1-i}. \text{ Do đó, ta có}$$

$$\begin{aligned} \left|\frac{z-1}{2-i} + i\right| = \sqrt{5} &\Leftrightarrow \left|\frac{z+2i}{2-i}\right| = \sqrt{5} \\ &\Leftrightarrow |z+2i| = 5 \\ &\Leftrightarrow \left|\frac{w-2i}{1-i} + 2i\right| = 5 \\ &\Leftrightarrow |w+2| = 5\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn $(x+2)^2 + y^2 = 50$.Vậy $m = 50$.Chọn đáp án **(C)** □

Câu 33. Cho số phức z thỏa mãn hệ thức $(i+3)z + \frac{2+i}{i} = (2-i)\bar{z}$. Tính mô-đun của số phức $w = z-i$.

- A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{\sqrt{26}}{5}$. C. $\frac{\sqrt{26}}{25}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{5}$.

Lời giải.Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có

$$\begin{aligned} (i+3)z + \frac{2+i}{i} &= (2-i)\bar{z} \Leftrightarrow (i+3)(x+yi) - 2i + 1 = (2-i)(x-yi) \\ &\Leftrightarrow (x+1) + (2x+5y-2)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ 2x+5y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=\frac{4}{5} \end{cases}. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } z = -1 + \frac{4}{5}i \Rightarrow w = z - i = -1 - \frac{1}{5}i.$$

$$\text{Bởi vậy } |w| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{26}}{5}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 34. Cho số phức z thỏa mãn $|(1-i)z - 4 + 2i| = 2$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng tọa độ Oxy là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của đường tròn đó.

- A. $I(3; -1), R = \sqrt{2}$. B. $I(3; -1), R = 2$. C. $I(3; 1), R = \sqrt{2}$. D. $I(3; 1), R = 2$.

Lời giải.

Chia hay về của đẳng thức $|(1-i)z - 4 + 2i| = 2$ cho $|1-i|$ ta được $|z - (3+i)| = \sqrt{2}$. Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(3; 1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 35. Tìm số phức z thỏa mãn $(1-i)(z+1-2i) - 3+2i = 0$.

- A. $z = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}i$. B. $z = 4 - 3i$. C. $z = 4 + 3i$. D. $z = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$.

Lời giải.

Ta có $(1-i)(z+1-2i) - 3+2i = 0 \Leftrightarrow z+1-2i = \frac{3-2i}{1-i} \Leftrightarrow z = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 36. Cho số phức z thỏa mãn $(1+3i)z - 5 = 7i$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\bar{z} = -\frac{13}{5} + \frac{4}{5}i$. B. $\bar{z} = \frac{13}{5} - \frac{4}{5}i$. C. $\bar{z} = \frac{13}{5} + \frac{4}{5}i$. D. $\bar{z} = -\frac{13}{5} - \frac{4}{5}i$.

Lời giải.

Ta có $z = \frac{5+7i}{1+3i} = \frac{13}{5} - \frac{4}{5}i \Rightarrow \bar{z} = \frac{13}{5} + \frac{4}{5}i$

Chọn đáp án **C** □

Câu 37. Số phức nào dưới đây thỏa mãn phương trình $(1-2i)z = 3z - 2i$?

- A. $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. B. $z = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$. C. $z = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$. D. $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}(1-2i)z &= 3z - 2i \Leftrightarrow (1-2i)z - 3z = -2i \\ &\Leftrightarrow (-2-2i)z = -2i \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-2i}{-2-2i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 38. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z| = 1$ và $z \notin \mathbb{R}$ thì $\frac{z^2-1}{z}$

- A. Lấy mọi giá trị phức. B. Lấy mọi giá trị thực.
C. Bằng 0. D. Là số thuần ảo.

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi \Rightarrow z - \bar{z} = 2bi$.

Ta có $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 1$.

Ta lại có $\frac{z^2-1}{z} = \frac{z^2\bar{z}-\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{z-\bar{z}}{1} = z - \bar{z} = 2bi$ là số thuần ảo.

Chọn đáp án **D** □

Câu 39. Tìm phần ảo của số phức $z = \frac{2-9i}{1+6i}$.

- A. $-\frac{52}{37}$. B. $\frac{52}{37}$. C. $-\frac{21}{37}$. D. $\frac{21}{37}$.

Lời giải.

$$z = \frac{2-9i}{1+6i} = \frac{(2-9i)(1-6i)}{(1+6i)(1-6i)} = -\frac{52}{37} - \frac{21}{37}i.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 40. Cho số phức $z = a + bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$, thỏa mãn $(1+i)z + 2\bar{z} = 3 + 2i$. Tính $S = a + b$.

- A. $S = \frac{1}{2}$. B. $S = -1$. C. $S = 1$. D. $S = -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}(1+i)z + 2\bar{z} &= 3 + 2i \\ \Leftrightarrow (1+i)(a+bi) + 2(a-bi) &= 3 + 2i \\ \Leftrightarrow (3a-b) + (a-b)i &= 3 + 2i\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b = 3 \\ a - b = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Do đó $S = a + b = -1$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 41. Cho số phức z thỏa mãn $(1 + 2i)z = (1 + 2i) - (-2 + i)$. Mô-đun của z bằng

A. 2.

B. 1.

C. $\sqrt{2}$.

D. $\sqrt{10}$.

Lời giải.

Ta có $(1 + 2i)z = (1 + 2i) - (-2 + i) \Leftrightarrow (1 + 2i)z = 3 + i \Leftrightarrow z = \frac{3 + i}{1 + 2i} = 1 - i$.

Vậy $|z| = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 42. Tính số phức $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2018} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2018}$ có kết quả là

A. 2.

B. -2.

C. 2i.

D. $1 + i$.

Lời giải.

$z = i^{2018} + (-i)^{2018} = -2$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 43. Giả sử $\frac{1}{(1-i)^9} = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó

A. $a = \frac{1}{32}; b = \frac{-1}{32}$.

B. $a = 0; b = \frac{1}{32}$.

C. $a = \frac{1}{32}; b = 0$.

D. $a = b = \frac{1}{32}$.

Lời giải.

Ta có $(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i \Rightarrow (1-i)^4 = 4 \Rightarrow (1-i)^8 = 16$.

Khi đó

$$\frac{1}{(1-i)^9} = \frac{1}{16(1-i)} = \frac{1+i}{32}.$$

Vậy $a = b = \frac{1}{32}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 44. Cho các số phức z thỏa mãn $|z - 1| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (1 + \sqrt{3}i)z + 2$ là một đường tròn. Tính bán kính R của đường tròn đó.

A. $R = 4$.

B. $R = 16$.

C. $R = 8$.

D. $R = 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} w - 2 &= (1 + \sqrt{3}i)z \\ \Leftrightarrow \frac{w - 2}{1 + \sqrt{3}i} &= z \\ \Leftrightarrow \frac{w - 2}{1 + \sqrt{3}i} - 1 &= z - 1 \\ \Rightarrow \left| \frac{w - 3 - \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i} \right| &= |z - 1| \\ \Leftrightarrow |w - 3 - \sqrt{3}i| &= |z - 1| \cdot |1 + \sqrt{3}i| = 4. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra bán kính $R = 4$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 45. Trong tập các số phức, cho phương trình $z^2 - 4z + (m - 2)^2 = 0, m \in \mathbb{R}$ (1). Gọi m_0 là một giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2|$. Hỏi trong đoạn $[0; 2018]$ có bao nhiêu giá trị nguyên của m_0 ?

A. 2019.

B. 2015.

C. 2014.

D. 2018.

Lời giải.

$$\Delta' = 4 - (m - 2)^2 = 4m - m^2.$$

Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$ thì phương trình (1) luôn có 2 nghiệm thực phân biệt z_1, z_2 .

$$\text{Khi đó } |z_1| = |z_2| \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = z_2 \\ z_1 = -z_2 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0. \end{cases} \quad (\text{Điều này không xảy ra}).$$

Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < 0 \end{cases}$ thì phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phức phân biệt z_1, z_2 .

$$z_1 = 2 + \sqrt{m^2 - 4m} \cdot i \text{ và } z_2 = 2 - \sqrt{m^2 - 4m} \cdot i$$

$$\Rightarrow |z_1| = |z_2| = \sqrt{4 + m^2 - 4m} = |m - 2|.$$

Vậy $\begin{cases} m > 4 \\ m < 0 \end{cases}$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn điều kiện bài toán.

Kết hợp điều kiện suy ra $4 < m \leq 2018$, suy ra có 2014 số m_0 nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **C** □

Câu 46. Tính tổng $S = 1 + i^3 + i^6 + \dots + i^{2016}$.

A. $S = 1$.

B. $S = -1$.

C. $S = i$.

D. $S = -i$.

Lời giải.

Ta có $1, i^3, i^6, \dots, i^{2016}$ là một cấp số nhân có 673 số hạng với $u_1 = 1$ và $q = i^3$ nên

$$S = \frac{1 - (i^3)^{673}}{1 - i^3} = \frac{1 - i^3 \cdot (-i)^{672}}{1 + i} = \frac{1 - i^3}{1 + i} = 1.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 47. Phần ảo của số phức $z = \frac{1 - (1 - i)^{33}}{1 - i} + \overline{(1 - 2i)}$ là

A. $\frac{5}{2}$.

B. $\frac{5}{2}i$.

C. $-\frac{3}{2}i$.

D. $-\frac{3}{2}$.

Lời giải.

$$z = \frac{1}{1 - i} - (1 - i)^{32} + 1 + 2i = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i - (1 - i)^{32} = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i - (-2i)^{16} = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i - (-4)^8.$$

Vậy phần ảo của số phức z là $\frac{5}{2}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 48. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi (H) là tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = (1 + \sqrt{3}i)z + 2$ thỏa mãn $|z - 1| \leq 2$. Tính diện tích của hình (H) .

A. 8π .

B. 18π .

C. 16π .

D. 4π .

Lời giải.

$$\text{Ta có } w = (1 + \sqrt{3}i)(z - 1) + 3 + \sqrt{3}i \Leftrightarrow w - 3 - \sqrt{3}i = (1 + \sqrt{3}i)(z - 1),$$

$$\text{Lấy mô-đun 2 vế, ta được } |w - 3 - \sqrt{3}i| = |1 + \sqrt{3}i| \cdot |z - 1| \leq 2 \cdot 2 = 4.$$

Do đó, (H) là hình tròn bán kính 4 nên diện tích hình (H) bằng 16π .

Chọn đáp án **C** □

Câu 49. Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z} = \frac{(1 + \sqrt{3}i)^3}{1 + i}$. Tính mô-đun của số phức $\bar{z} - iz$.

A. $8\sqrt{2}$.

B. 8.

C. 16.

D. -8 .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \bar{z} = -4 + 4i, \text{ suy ra } z = -4 - 4i. \text{ Vậy } |\bar{z} - iz| = |-8 + 8i| = 8\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 50. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(1 - 3i)z + (2 + 3i)\bar{z} = 12 - i$. Tính $P = a^2 - b^3$.

A. -3 .

B. -1 .

C. 1.

D. 3.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 12 - i &= (1 - 3i)z + (2 + 3i)\bar{z} = (1 - 3i)(a + bi) + (2 + 3i)(a - bi) \\ &= (3a + 6b) - bi. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{cases} 3a + 6b = 12 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1. \end{cases}$$

Vậy $P = a^2 - b^3 = 3$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 51. Tìm tọa độ điểm M là điểm biểu diễn số phức z biết z thỏa mãn phương trình $(1+i)\bar{z} = 3-5i$.

- A. $M(-1; 4)$. B. $M(-1; -4)$. C. $M(1; 4)$. D. $M(1; -4)$.

Lời giải.

Ta có $\bar{z} = \frac{3-5i}{1+i} = -1-4i \Rightarrow z = -1+4i \Rightarrow M(-1; 4)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 52. Phần thực và phần ảo của số phức $z = \frac{\sqrt{3}+i}{1-i}$ lần lượt bằng bao nhiêu?

- A. $\sqrt{3}-1$ và $\sqrt{3}+1$. B. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ và $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ và $\sqrt{3}+1$. D. $\sqrt{3}-1$ và $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$z = \frac{\sqrt{3}+i}{1-i} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i.$$

Do đó phần thực và phần ảo của số phức z lần lượt bằng $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ và $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 53. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện

$$\left| \frac{z}{z-1} \right| = 3 \text{ là}$$

- A. Đường tròn $x^2 + y^2 - \frac{9}{4}x - \frac{9}{8} = 0$. B. Đường tròn $x^2 + y^2 - \frac{9}{4}x + \frac{9}{8} = 0$.
C. Đường tròn $x^2 + y^2 + \frac{9}{4}x + \frac{9}{8} = 0$. D. Đường tròn tâm $I\left(0; \frac{9}{8}\right)$ và bán kính $R = \frac{1}{8}$.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có

$$\begin{aligned} & \left| \frac{z}{z-1} \right| = 3 \\ \Leftrightarrow & |z| = 3|z-1| \\ \Leftrightarrow & x^2 + y^2 = 9(x-1)^2 + 9y^2 \\ \Leftrightarrow & 8x^2 + 8y^2 - 18x + 9 = 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 + y^2 - \frac{9}{4}x + \frac{9}{8} = 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 54. Cho số phức z thỏa mãn $(2+i)z + \frac{2(1+2i)}{1+i} = 7+8i$. Tính mô-đun của số phức $w = z+1-2i$.

- A. 7. B. $\sqrt{7}$. C. 25. D. 4.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} (2+i)z + \frac{2(1+2i)}{1+i} &= 7+8i \Leftrightarrow (2+i)z + 3+i = 7+8i \\ \Leftrightarrow & (2+i)z = 4+7i \\ \Leftrightarrow & z = \frac{4+7i}{2+i} = 3+2i. \end{aligned}$$

Suy ra $w = z+1-2i = 3+2i+1-2i = 4 \Rightarrow |w| = 4$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 55. Cho số phức z thỏa mãn $(1 + 2i)z = 8 + i$. Số phức liên hợp $\bar{z}$ của z là

- A. $\bar{z} = -2 - 3i$. B. $\bar{z} = -2 + 3i$. C. $\bar{z} = 2 + 3i$. D. $\bar{z} = 2 - 3i$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } (1 + 2i)z = 8 + i \Leftrightarrow z = \frac{8 + i}{1 + 2i} = 2 - 3i \Rightarrow \bar{z} = 2 + 3i.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 56. Cho số phức $z = 2 + 3i$, khi đó $\frac{z}{\bar{z}}$ bằng

- A. $\frac{5 - 12i}{13}$. B. $\frac{-5 - 12i}{13}$. C. $\frac{-5 + 12i}{13}$. D. $\frac{5 - 6i}{11}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{z}{\bar{z}} = \frac{2 + 3i}{2 - 3i} = \frac{(2 + 3i)^2}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \frac{4 + 12i + 9i^2}{4 - 9i^2} = \frac{-5 + 12i}{13}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 57. Tính mô-đun của số phức thỏa mãn: $z(2 - i) + 13i = 1$.

- A. $|z| = \frac{\sqrt{34}}{3}$. B. $|z| = \frac{5\sqrt{34}}{2}$. C. $|z| = 34$. D. $|z| = \sqrt{34}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } z(2 - i) + 13i = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1 - 13i}{2 - i} = 3 - 5i.$$

$$\text{Khi đó } |z| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 58. Số phức $z = \frac{2 - 3i}{1 + i}$ có mô-đun bằng

- A. $|z| = \frac{\sqrt{26}}{3}$. B. $|z| = 3\sqrt{26}$. C. $|z| = 2\sqrt{26}$. D. $|z| = \frac{\sqrt{26}}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } z = \frac{2 - 3i}{1 + i} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i. \text{ Khi đó, } |z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{26}}{2}.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 59. Tìm phần thực và ảo của số phức $z = \frac{3 - i}{1 + i} + \frac{2 + i}{i}$.

- A. Phần thực bằng 2; phần ảo bằng $-4i$. B. Phần thực bằng 2; phần ảo bằng -4 .
C. Phần thực bằng 2; phần ảo bằng $4i$. D. Phần thực bằng -2 ; phần ảo bằng 4 .

Lời giải.

$$z = \frac{(3 - i)i + (2 + i)(1 + i)}{(1 + i)i} = \frac{2 + 6i}{-1 + i} = 2 - 4i.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 60. Tìm số phức z thỏa mãn $(3 + i)\bar{z} + (1 + 2i)z = 3 - 4i$.

- A. $z = 2 + 5i$. B. $z = 2 + 3i$. C. $z = -1 + 5i$. D. $z = -2 + 3i$.

Lời giải.

$$\text{Gọi } z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} (3 + i)\bar{z} + (1 + 2i)z &= 3 - 4i \\ \Leftrightarrow (3 + i)(x - yi) + (1 + 2i)(x + yi) &= 3 - 4i \\ \Leftrightarrow 4x - y + (3x - 2y)i &= 3 - 4i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y = 3 \\ 3x - 2y = -4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases} \\ \Rightarrow z &= 2 + 5i. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 61. Tính môđun của số phức z thỏa mãn $(1+i)z + 3 = -2i$.

- A. $|z| = \frac{5}{2}$. B. $|z| = \frac{\sqrt{26}}{2}$. C. $|z| = \sqrt{26}$. D. $|z| = \sqrt{13}$.

Lời giải.

Ta có $(1+i)z = -3-2i$, suy ra $|(1+i)z| = |-3-2i|$, hay $|z| = \frac{|-3-2i|}{|1+i|} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{26}}{2}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 62. Cho số phức z thỏa $2z + 3\bar{z} = 10 + i$. Tính $|z|$.

- A. $|z| = 1$. B. $|z| = 3$. C. $|z| = \sqrt{3}$. D. $|z| = \sqrt{5}$.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

Khi đó từ giả thiết ta suy ra

$$\begin{aligned} 2(a+bi) + 3(a-bi) &= 10+i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+3a=10 \\ 2b-3b=1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases} \end{aligned}$$

Do đó $|z| = \sqrt{5}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 63. Cho số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(1+i)z + 2\bar{z} = 3 + 2i$. Tính $S = a + b$.

- A. $S = -\frac{1}{2}$. B. $S = 1$. C. $S = \frac{1}{2}$. D. $S = -1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} (1+i)z + 2\bar{z} = 3 + 2i &\Leftrightarrow (1+i)(a+bi) + 2(a-bi) = 3 + 2i \\ &\Leftrightarrow (a-b) + (a+b)i + 2a - 2bi = 3 + 2i \\ &\Leftrightarrow 3a - b + (a-b)i = 3 + 2i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b = 3 \\ a - b = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $T = a + b = -1$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 64. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 5$ và $|z+3| = |z+3-10i|$. Tìm số phức $w = z - 4 + 3i$.

- A. $w = -1 + 7i$. B. $w = -3 + 8i$. C. $w = 1 + 3i$. D. $w = -4 + 8i$.

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Từ $|z| = 5 \Leftrightarrow |a+bi| = 5 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 25$

$$\begin{aligned} |z+3| = |z+3-10i| &\Leftrightarrow |a+bi+3| = |a+bi+3-10i| \\ &\Leftrightarrow (a+3)^2 + b^2 = (a+3)^2 + (b-10)^2 \\ &\Leftrightarrow b = 5. \end{aligned}$$

$$\text{Từ } \begin{cases} a^2 + b^2 = 25 \\ b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 5 \end{cases}$$

Vậy $w = 5i - 4 + 3i = 5i - 4 + 3i = -4 + 8i$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 65. Cho số phức $z_1 = a - 2i$, $z_2 = 1 + bi$. Tìm phần ảo của số phức $\bar{z}$, biết $z_1 z + z_2 z = 1 + i$.

- A. $\frac{a+b-1}{(a+1)^2 + (b-2)^2}$. B. $\frac{a-b+3}{(a+1)^2 + (b-2)^2}$. C. $\frac{b-a-3}{(a+1)^2 + (b-2)^2}$. D. $\frac{1-a-b}{(a+1)^2 + (b-2)^2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} z &= \frac{1+i}{z_1+z_2} = \frac{1+i}{a+1+(b-2)i} \\ &= \frac{(1+i)[a+1-(b-2)i]}{(a+1)^2 + (b-2)^2} \\ &= \frac{a+1+b-2+(a+1-b+2)i}{(a+1)^2 + (b-2)^2} \\ &= \frac{a+b-1+(a-b+3)i}{(a+1)^2 + (b-2)^2} \\ \Rightarrow \bar{z} &= \frac{a+b-1-(a-b+3)i}{(a+1)^2 + (b-2)^2}. \end{aligned}$$

Vậy phần ảo của số phức $\bar{z}$ là $\frac{b-a-3}{(a+1)^2 + (b-2)^2}$.

Chọn đáp án **C**

Câu 66. Tìm phần ảo của số phức z thỏa mãn $z + 2\bar{z} = (2-i)^3(1-i)$.

- A. -9. B. 9. C. 13. D. -13.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} z + 2\bar{z} &= (2-i)^3(1-i) \Leftrightarrow x + yi + 2(x-yi) = (2-11i)(1-i) \\ &\Leftrightarrow 3x - yi = -9 - 13i \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -9 \\ -y = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 13. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phần ảo của số phức z là 13.

Chọn đáp án **C**

Câu 67. Số phức z thỏa $\frac{\bar{z}}{4-3i} + (2-3i) = 5-2i$. Mô-đun của z bằng

- A. $|z| = 10\sqrt{2}$. B. $|z| = \sqrt{10}$. C. $|z| = 250$. D. $|z| = 5\sqrt{10}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{\bar{z}}{4-3i} + (2-3i) &= 5-2i \Leftrightarrow \frac{\bar{z}}{4-3i} = 3+i \\ &\Leftrightarrow \bar{z} = (3+i)(4-3i) \\ &\Leftrightarrow \bar{z} = 15-5i \Leftrightarrow z = 15+5i. \end{aligned}$$

Vậy mô-đun của số phức z là $|z| = \sqrt{15^2 + 5^2} = 5\sqrt{10}$.

Chọn đáp án **D**

Câu 68. Cho số phức z thỏa mãn $(2+i)\bar{z} = 2+11i$. Tính giá trị của biểu thức $A = |z| + |\bar{z}|$.

- A. 5. B. $\sqrt{10}$. C. 10. D. $\sqrt{5}$.

Lời giải.

$$(2+i)\bar{z} = 2+11i \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{2+11i}{2+i} = 3+4i \Rightarrow z = 3-4i.$$

Giá trị biểu thức $A = |z| + |\bar{z}| = 5 + 5 = 10$.

Chọn đáp án **C**

Câu 69. Tìm số phức z thỏa mãn $(3-2i)z - 2 = z + 18i$.

- A. $z = -4 + 5i$. B. $z = 4 + 5i$. C. $z = 4 - 5i$. D. $z = -4 - 5i$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } (3-2i)z - 2 = z + 18i \Leftrightarrow z = \frac{2+18i}{2-2i} = -4+5i.$$

Chọn đáp án **A**

Câu 70. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tìm mô-đun của số phức $w = \bar{z} + \frac{13}{z}$.

A. $\sqrt{10}$.

B. $2\sqrt{5}$.

C. 4.

D. $2\sqrt{13}$.

Lời giải.

Ta có: $w = 2 + 3i + \frac{13}{2 - 3i} = 4 + 6i$. Vậy $|z| = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 71. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = \frac{13}{12 + 5i}$.

A. $\bar{z} = \frac{13}{12 - 5i}$.

B. $\bar{z} = \frac{12}{13} - \frac{5}{13}i$.

C. $\bar{z} = \frac{13}{12} + \frac{13}{5}i$.

D. $\bar{z} = \frac{13}{12} - \frac{13}{5}i$.

Lời giải.

Ta có $z = \frac{13}{12 + 5i} = \frac{12}{13} - \frac{5}{13}i \Rightarrow \bar{z} = \frac{12}{13} + \frac{5}{13}i$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 72. Số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) là nghiệm của phương trình $(1 + 2i)z - 8 - i = 0$. Tính $S = a + b$.

A. $S = -1$.

B. $S = 1$.

C. $S = -5$.

D. $S = 5$.

Lời giải.

Vì $(1 + 2i)z - 8 - i = 0 \Leftrightarrow z = \frac{8 + i}{1 + 2i} = \frac{(8 + i)(1 - 2i)}{1 + 4} = \frac{10 - 15i}{5} = 2 - 3i$ nên $\begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$.

Vậy $S = a + b = -1$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 73. Trong tập hợp số phức, phương trình $\frac{4}{z + 1} = 1 - i$ có nghiệm là

A. $z = 2 - i$.

B. $z = 5 - 3i$.

C. $z = 1 + 2i$.

D. $z = 3 + 2i$.

Lời giải.

Điều kiện $z \neq -1$.

Phương trình $\frac{4}{z + 1} = 1 - i \Leftrightarrow z + 1 = \frac{4}{1 - i} \Leftrightarrow z = \frac{4}{1 - i} - 1 = 1 + 2i$.

Chọn đáp án **C**

□

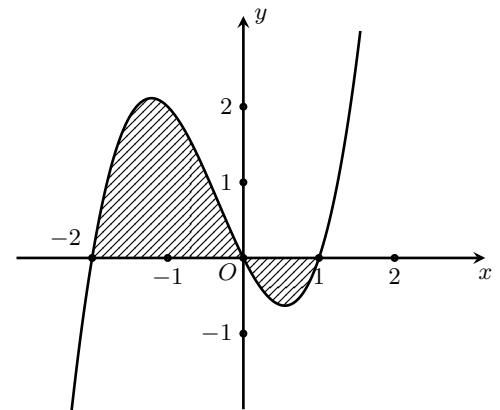
Câu 74. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ, diện tích hình phẳng phần tô đậm được tính theo công thức

A. $S = \int_{-2}^1 f(x) dx$.

B. $S = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx$.

C. $S = \int_0^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx$.

D. $S = \int_{-2}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx$.



Lời giải.

Ta có $S = \int_{-2}^0 |f(x)| dx + \int_0^1 |f(x)| dx$.

Từ đồ thị hàm số suy ra $f(x) \geq 0, \forall x \in [-2; 0]$ và $f(x) \leq 0, \forall x \in [0; 1]$.

Suy ra $S = \int_{-2}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 75. Tìm số phức z thỏa mãn $(1 - 2i)z = 3 + i$.

A. $z = 1 - i$.

B. $z = 1 + i$.

C. $z = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$.

D. $z = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } (1 - 2i)z = 3 + i \Leftrightarrow z = \frac{3 + i}{1 - 2i} \Leftrightarrow z = \frac{(3 + i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} \Leftrightarrow z = \frac{1}{5}(1 + 7i).$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 76. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(1 + 2i)z + i\bar{z} = 7 + 5i$. Tính $S = 4a + 3b$.

A. $S = 7$.B. $S = 24$.C. $S = -7$.D. $S = 0$.**Lời giải.**

Đặt $z = a + bi$. Ta có:

$$(1 + 2i)(a + bi) + i(a - bi) = 7 + 5i \Leftrightarrow a + bi + 2ai + 2bi^2 + ai - bi^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a + bi + 2ai - 2b + ai + b = 7 + 5i$$

$$\Leftrightarrow (a - b) + (3a + b)i = 7 + 5i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 7 \\ 3a + b = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -4. \end{cases}$$

Vậy $S = 4a + 3b = 0$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 77. Cho số phức z thỏa mãn $(1 + i)z + 2\bar{z} = 3 - 2i$. Tính mô-đun của số phức z .

A. $|z| = \frac{1}{2}\sqrt{106}$.B. $|z| = \frac{53}{2}$.C. $|z| = \frac{41}{8}$.D. $|z| = \frac{1}{4}\sqrt{2}$.**Lời giải.**

Bằng cách lấy liên hợp 2 vế đối với phương trình đã cho, ta thu được thêm một phương trình. Kết hợp chúng lại, ta giải được $2z = 5 + 9i$. Suy ra $|z| = \frac{1}{2}\sqrt{106}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 78. Cho số thực x, y thỏa mãn $2x + y + (2y - x)i = x - 2y + 3 + (y + 2x + 1)i$. Khi đó giá trị của $M = x^2 + 4xy - y^2$ bằng

A. -1 .B. 1 .C. 0 .D. -2 .**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} 2x + y + (2y - x)i &= x - 2y + 3 + (y + 2x + 1)i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = x - 2y + 3 \\ 2y - x = y + 2x + 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 3 \\ 3x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $M = -1$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 79. Số phức liên hợp của số phức $z = \frac{(1 - \sqrt{3}i)^3}{1 - i}$ là

A. $4 + 4i$.B. $4 - 4i$.C. $-4 - 4i$.D. $-4 + 4i$.**Lời giải.**

Ta có

$$z = \frac{(1 - \sqrt{3}i)^3}{1 - i} = \frac{1 - 3\sqrt{3}i + 3(\sqrt{3}i)^2 - (\sqrt{3}i)^3}{1 - i} = \frac{-8}{1 - i} = \frac{-8(1 + i)}{2} = -4 - 4i.$$

Suy ra $\bar{z} = -4 + 4i$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 80. Cho số phức z , biết $\bar{z} = 2 - i + \frac{i}{1 + i}$. Phần ảo của số phức z^2 là

A. $\frac{5}{2}$.B. $\frac{5}{2}i$.C. $-\frac{5}{2}$.D. $-\frac{5}{2}i$.**Lời giải.**

$$\bar{z} = 2 - i + \frac{i(1 - i)}{2} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}i \Rightarrow z = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Phần ảo của z^2 là $2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 81. Cho số phức $z = mi$ với $m \neq 0$ là tham số thực. Tìm phần ảo của số phức $\frac{1}{z}$.

A. $-\frac{1}{m}$.

B. $\frac{1}{m}$.

C. $-\frac{1}{m}i$.

D. $\frac{1}{m}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{1}{z} = \frac{1}{mi} = -\frac{i}{m} \Rightarrow$ phần ảo của $\frac{1}{z}$ là $-\frac{1}{m}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 82. Cho số phức $(1-i)z = 4+2i$. Tìm mô-đun của số phức $w = z+3$.

A. 5.

B. $\sqrt{10}$.

C. 25.

D. $\sqrt{7}$.

Lời giải.

Đặt $z = a+bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

Khi đó

$$\begin{aligned} (1-i)z &= 4+2i \Leftrightarrow (1-i)(a+bi) = 4+2i \\ \Leftrightarrow a+b+(b-a)i &= 4+2i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ -a+b=2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases} &\Rightarrow z=1+3i \Rightarrow w=4+3i \\ \Rightarrow |\omega| &= 5. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 83.

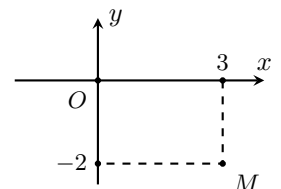
Cho số phức z có biểu diễn hình học là điểm M như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $z = -3+2i$.

B. $z = 3+2i$.

C. $z = -3-2i$.

D. $z = 3-2i$.



Lời giải.

Ta thấy điểm $M(3; -2)$ do đó $z = 3-2i$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 84. Cho số phức $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $\left| \frac{z-1}{z-i} \right| = 1$ và $\left| \frac{z-3i}{z+i} \right| = 1$.

Tính $P = a+b$.

A. $P = 7$.

B. $P = -1$.

C. $P = 1$.

D. $P = 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} \left| \frac{z-1}{z-i} \right| = 1 \\ \left| \frac{z-3i}{z+i} \right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z-1| = |z-i| \\ |z-3i| = |z+i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ 8b=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow a+b=2.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 85. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 - 3z + 4 = 0$.

Tính $w = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + iz_1z_2$.

A. $w = -\frac{3}{4} + 2i$.

B. $w = \frac{3}{4} + 2i$.

C. $w = 2 + \frac{3}{2}i$.

D. $w = \frac{3}{2} + 2i$.

Lời giải.

Phương trình $2z^2 - 3z + 4 = 0$ có 2 nghiệm phức $z_1 = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{23}}{4}i$, $z_2 = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{23}}{4}i$

Khi đó $\begin{cases} z_1 + z_2 = \frac{3}{2} \\ z_1 z_2 = 2 \end{cases}$. Suy ra $w = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + iz_1 z_2 = \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} + iz_1 z_2 = \frac{3}{4} + 2i$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 86. Cho số phức z thỏa mãn $(1 + 3i)z - 5 = 7i$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A. $\bar{z} = -\frac{13}{5} + \frac{4}{5}i$. B. $\bar{z} = \frac{13}{5} - \frac{4}{5}i$. C. $\bar{z} = -\frac{13}{5} - \frac{4}{5}i$. D. $\bar{z} = \frac{13}{5} + \frac{4}{5}i$.

Lời giải.

Ta có $z = \frac{5 + 7i}{1 + 3i} = \frac{13}{5} - \frac{4}{5}i \Rightarrow \bar{z} = \frac{13}{5} + \frac{4}{5}i$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 87. Tính mô-đun số phức nghịch đảo của số phức $z = (1 - 2i)^2$.

- A. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. B. $\sqrt{5}$. C. $\frac{1}{25}$. D. $\frac{1}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{1}{z} = \frac{1}{(1 - 2i)^2} = \frac{(1 + 2i)^2}{(1 - 2i)^2 \cdot (1 + 2i)^2} = \frac{-3 + 4i}{25}$.

Nên $\left| \frac{1}{z} \right| = \left| \frac{-3 + 4i}{25} \right| = \frac{1}{5}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 88. Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z} = \frac{(1 + \sqrt{3}i)^3}{1 - i}$. Tìm mô-đun của $\bar{z} + iz$.

- A. $4\sqrt{2}$. B. 4. C. $8\sqrt{2}$. D. 8.

Lời giải.

Ta có $\bar{z} = \frac{(1 + \sqrt{3}i)^3}{1 - i} = -4 - 4i \Rightarrow z = -4 + 4i \Rightarrow \bar{z} + iz = -8 - 8i$.

Suy ra $|\bar{z} + iz| = |-8 - 8i| = 8\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 89. Cho số phức z thỏa: $(1 + \sqrt{3}i)^2 z = 3 - 4i$. Mô-đun của z bằng

- A. $\frac{2}{5}$. B. $\frac{4}{5}$. C. $\frac{5}{4}$. D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải.

Ta có $(1 + \sqrt{3}i)^2 z = 3 - 4i \Leftrightarrow (-2 + 2\sqrt{3}i)z = 3 - 4i \Leftrightarrow z = \frac{3 - 4i}{-2 + 2\sqrt{3}i} = -\frac{3 + 4\sqrt{3}}{8} + \frac{4 - 3\sqrt{3}}{8}i$.

$\Rightarrow |z| = \sqrt{\left(\frac{3 + 4\sqrt{3}}{8}\right)^2 + \left(\frac{4 - 3\sqrt{3}}{8}\right)^2} = \frac{5}{4}$.

Chọn đáp án **(C)** □

4 ĐÁP ÁN

1. D	2. A	3. D	4. B	5. A	6. C	7. C	8. A	9. A	10. B
11. C	12. D	13. A	14. D	15. A	16. C	17. D	18. C	19. C	20. C
21. D	22. D	23. B	24. A	25. A	26. B	27. B	28. B	29. C	30. D
31. A	32. C	33. B	34. C	35. D	36. C	37. A	38. D	39. C	40. B
41. C	42. B	43. D	44. A	45. C	46. A	47. A	48. C	49. A	50. D
51. A	52. B	53. B	54. D	55. C	56. C	57. D	58. D	59. B	60. A
61. B	62. D	63. D	64. D	65. C	66. C	67. D	68. C	69. A	70. D
71. A	72. A	73. C	74. D	75. C	76. D	77. A	78. A	79. D	80. A
81. A	82. A	83. D	84. D	85. B	86. D	87. D	88. C	89. C	

5 VẬN DỤNG THẤP

Câu 1. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|^2 = 2|z + \bar{z}| + 4$ và $|z - 1 - i| = |z - 3 + 3i|$?

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải.Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$|z|^2 = 2|z + \bar{z}| + 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4|x| + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4 = 0, & x \geq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + 4x - 4 = 0, & x < 0 & (2). \end{cases}$$

Theo đề ta có

$$\begin{aligned} |z - 1 - i| = |z - 3 + 3i| &\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = (x - 3)^2 + (y + 3)^2 \\ &\Leftrightarrow 4x = 8y + 16 \\ &\Leftrightarrow x = 2y + 4 \quad (3). \end{aligned}$$

+ Thay (3) vào (1) ta được

$$(2y + 4)^2 + y^2 - 4(2y + 4) - 4 = 0 \Leftrightarrow 5y^2 + 8y - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{24}{5} & (\text{nhận}) \\ y = -2 \Rightarrow x = 0 & (\text{nhận}). \end{cases}$$

+ Thay (3) vào (2) ta được

$$(2y + 4)^2 + y^2 + 4(2y + 4) - 4 = 0 \Leftrightarrow 5y^2 + 24y + 28 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \Rightarrow x = 0 & (\text{loại}) \\ y = -\frac{14}{5} \Rightarrow x = -\frac{8}{5} & (\text{nhận}). \end{cases}$$

Vậy có 3 số phức thỏa điều kiện.

Chọn đáp án **B** □**Câu 2.** Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|2z - i| = 4$ là một đường tròn có bán kính bằngA. $2\sqrt{2}$.B. $4\sqrt{2}$.

C. 4.

D. 2.

Lời giải.Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó } |2z - i| = 4 \Leftrightarrow |2x + 2yi - i| = 4 \Leftrightarrow 4x^2 + (2y - 1)^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 4.$$

Vậy tập hợp điểm cần tìm là một đường tròn có bán kính $R = 2$.Chọn đáp án **D** □**Câu 3.** Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn $\bar{z} - \frac{5 + i\sqrt{3}}{z} - 1 = 0$. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 1.

B. $1 - 2\sqrt{3}i$.C. $-3 - 2\sqrt{3}i$.D. $1 - \sqrt{3}i$.**Lời giải.**Gọi $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) và $a^2 + b^2 \neq 0$.

Ta có

$$\begin{aligned} \bar{z} - \frac{5 + i\sqrt{3}}{z} - 1 = 0 &\Leftrightarrow a - bi - \frac{5 + i\sqrt{3}}{a + bi} - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 5 - i\sqrt{3} - a - bi = 0 \\ &\Leftrightarrow (a^2 + b^2 - a - 5) - (b + \sqrt{3})i = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - a - 5 = 0 \\ b + \sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a - 2 = 0 \\ b = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -\sqrt{3} \\ a = 2 \\ b = -\sqrt{3} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} z = -1 - i\sqrt{3} \\ z = 2 - i\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow S = \{-1 - i\sqrt{3}; 2 - i\sqrt{3}\}.$$

Khi đó tổng giá trị các phần tử của S là $1 - 2\sqrt{3}i$.Chọn đáp án **B** □

Câu 4. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + 2 + 3i| = 5$ và $\frac{z}{z-2}$ là số thuần ảo?

A. 0.

B. Vô số.

C. 2.

D. 1.

Lời giải.

Đặt $z = x + iy, (x, y \in \mathbb{R})$. Điều kiện $z \neq 2$

$$\text{Ta có } |z + 2 + 3i| = 5 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x + 6y = 12. \quad (1)$$

$$\frac{z}{z-2} = \frac{x + yi}{x - 2 + yi} = \frac{x^2 - 2x + y^2}{(x-2)^2 + y^2} + \frac{-2yi}{(x-2)^2 + y^2}.$$

$$\text{Vì } z \text{ là số thuần ảo nên } \frac{x^2 - 2x + y^2}{(x-2)^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 = 0. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - x. \text{ Thay vào (1) ta được } x^2 - 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2. \end{cases}$$

Với $x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow z = 1 + i$.

Với $x = 2 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = 2$ (loại).

Vậy có một số phức z thỏa mãn đề.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 5. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + 2 + 3i| = 5$ và $\frac{z}{z-2}$ là số thuần ảo.

A. 0.

B. vô số.

C. 2.

D. 1.

Lời giải.

Xét số phức $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$. Điều kiện $z \neq 2$.

$$\text{Ta có } |z + 2 + 3i| = 5 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x + 6y = 12. \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \frac{z}{z-2} = \frac{x + yi}{x - 2 + yi} = \frac{(x + yi)(x - 2 - yi)}{(x-2)^2 + y^2} = \frac{x^2 - 2x + y^2 - 2yi}{(x-2)^2 + y^2}.$$

$$\text{Vì } \frac{z}{z-2} \text{ là số thuần ảo nên } x^2 - 2x + y^2 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) có } x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - x. \text{ Thay vào (1) được } 2x^2 - 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Với $x = 1$ ta có $y = 1$, từ đó có $z = 1 + i$.

Với $x = 2$ ta có $y = 0$, từ đó có $z = 2$ (loại).

Chọn đáp án **D**

□

Câu 6. Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn $\bar{z} - \frac{5 + i\sqrt{3}}{z} - 1 = 0$. Tính tổng tất cả các phần tử của S

A. $1 - 2\sqrt{3}i$.B. $-3 - 2\sqrt{3}i$.

C. 1.

D. $1 - i\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi \quad (a, b \in \mathbb{R})$.

$$\bar{z} - \frac{5 + i\sqrt{3}}{z} - 1 = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - a - bi = 5 + i\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - a = 5 \\ b = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a - 2 = 0 \\ b = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \\ b = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy $z_1 = -1 - i\sqrt{3}$ và $z_2 = 2 - i\sqrt{3}$.

Suy ra $z_1 + z_2 = 1 - 2\sqrt{3}i$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 7. Cho số phức z thỏa mãn $|z + i| = 1$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (3 + 4i)z + 2 + i$ là một đường tròn tâm I . Điểm I có tọa độ là

A. $(6; -2)$.B. $(6; 2)$.C. $(2; 1)$.D. $(-2; -1)$.

Lời giải.

Ta có

$$w = (3 + 4i)z + 2 + i \Leftrightarrow z = \frac{w - 2 - i}{3 + 4i} \Leftrightarrow z + i = \frac{w - 2 - i}{3 + 4i} + i = \frac{w - 6 + 2i}{3 + 4i}.$$

Lấy mô-đun hai vế ta được

$$|z + i| = \left| \frac{w - 6 + 2i}{3 + 4i} \right| \Leftrightarrow 1 = \frac{|w - 6 + 2i|}{|3 + 4i|} \Leftrightarrow |w - 6 + 2i| = 5.$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn w là đường tròn tâm $I(6; -2)$, bán kính $r = 5$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 8. Cho số phức z thỏa điều kiện $|z| = 10$ và $w = (6 + 8i) \cdot \bar{z} + (1 - 2i)^2$. Tập hợp điểm biểu diễn cho số phức w là đường tròn có tâm là

- A. $I(-3; -4)$. B. $I(3; 4)$. C. $I(1; -2)$. D. $I(6; 8)$.

Lời giải.

Chú ý: Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z thỏa $|z - (a + bi)| = R$ là đường tròn tâm $I(a; b)$ bán kính R .
 Hằng thức đã cho tương đương với

$$w + 3 + 4i = (6 + 8i) \cdot \bar{z} \Rightarrow |w - (-3 - 4i)| = |6 + 8i| \cdot |\bar{z}| = 10 \cdot 10 = 100.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn cho số phức w là đường tròn có tâm là $I(-3; -4)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 9. Cho số thực $a > 2$ và gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + a = 0$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $z_1 + z_2$ là số thực. B. $z_1 - z_2$ là số ảo. C. $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ là số ảo. D. $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ là số thực.

Lời giải.

Xét phương trình $z^2 - 2z + a = 0$ có $\Delta' = 1 - a < 0, \forall a > 2$.

Do đó phương trình có hai nghiệm phức là: $z_1 = 1 + \sqrt{a-1}i, z_2 = 1 - \sqrt{a-1}i$. Khi đó ta có

$$\text{— } z_1 + z_2 = 1 + \sqrt{a-1}i + 1 - \sqrt{a-1}i = 2 \text{ là số thực.}$$

$$\text{— } z_1 - z_2 = 1 + \sqrt{a-1}i - 1 + \sqrt{a-1}i = 2\sqrt{a-1}i \text{ là số ảo } \forall a > 2.$$

$$\text{— } \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \frac{1 + \sqrt{a-1}i}{1 - \sqrt{a-1}i} + \frac{1 - \sqrt{a-1}i}{1 + \sqrt{a-1}i} = \frac{4 - 2a}{a} \text{ là một số thực, } \forall a > 2.$$

Vậy mệnh đề “ $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ là số ảo” là **sai**.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 10. Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = \sqrt{3}$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Tính $|z_1 + z_2|$.

- A. 2. B. 3. C. $\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) = 4 \Rightarrow z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 2.$$

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) = 8.$$

Vậy $|z_1 + z_2| = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 11. Cho số phức z thỏa mãn $|z + 1| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (1 + i\sqrt{8})z + i$ là một đường tròn. Bán kính r của đường tròn đó là

- A. 3. B. 6. C. 9. D. 36.

Lời giải.

$$\text{Ta có } w = (1 + i\sqrt{8})z + i \Leftrightarrow z = \frac{w - i}{1 + i\sqrt{8}} \Leftrightarrow z + 1 = \frac{w + 1 + (\sqrt{8} - 1)i}{1 + i\sqrt{8}}.$$

$$\text{Vì } |z + 1| = 2 \text{ nên } \left| \frac{w + 1 + (\sqrt{8} - 1)i}{1 + i\sqrt{8}} \right| = |z + 1| \Leftrightarrow |w + 1 + (\sqrt{8} - 1)i| = 6. \quad (*)$$

Đặt $w = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$. Thay vào (*) ta được

$$|x + yi + 1 + (\sqrt{8} - 1)i| = 6 \Leftrightarrow |(x + 1) + (y + \sqrt{8} - 1)i| = 6 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + \sqrt{8} - 1)^2 = 36.$$

Vậy $r = 6$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 12. Cho số phức z thỏa mãn $(z + 3 - i)(\bar{z} + 3i + 1)$ là một số thực. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường thẳng. Khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng đó bằng

A. $4\sqrt{2}$.

B. 0.

C. $2\sqrt{2}$.D. $3\sqrt{2}$.

Lời giải.

— Đặt $z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$.

— Số phức $(z + 3 - i)(\bar{z} + 3i + 1) = [x + 3 + (y - 1)i][x + 1 + (3 - y)i]$ có phần ảo là $(x + 3)(3 - y) + (y - 1)(x + 1)$.

— Theo đề $(z + 3 - i)(\bar{z} + 3i + 1)$ là số thực nên phần ảo bằng 0

$$(x + 3)(3 - y) + (y - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x - y - 4 = 0.$$

— Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là đường thẳng $(\Delta): x - y - 4 = 0$.

— Vậy $d[O; \Delta] = \frac{|4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 13. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 + 3i| \leq 3$. Trong mặt phẳng Oxy tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = 2z + 1 - i$ là hình có diện tích.

A. $S = 25\pi$.B. $S = 16\pi$.C. $S = 9\pi$.D. $S = 36\pi$.

Lời giải.

Giả sử $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$w = 2z + 1 - i \Rightarrow z = \frac{x - 1 + (y + 1)i}{2}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} |z - 2 + 3i| \leq 3 &\Leftrightarrow \left| \frac{x - 1 + (y + 1)i}{2} - 2 + 3i \right| \leq 3 \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{x - 5 + (y + 7)i}{2} \right| \leq 3 \\ &\Leftrightarrow (x - 5)^2 + (y + 7)^2 \leq 36. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là hình tròn có bán kính $R = 6$.

Diện tích hình tròn $S = 36\pi$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 14. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z - 3i| = 5$ và $\frac{z}{z - 4}$ là số thuần ảo.

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. Vô số.

Lời giải.

Điều kiện $z \neq 4$.

Vì $\frac{z}{z - 4}$ là số thuần ảo nên $\frac{z}{z - 4} = ai$ với $a \in \mathbb{R}$, suy ra $z = \frac{4ai}{-1 + ai}$. Khi đó

$$\begin{aligned} |z - 3i| = 5 &\Leftrightarrow \left| \frac{4ai}{-1 + ai} - 3i \right| = 5 \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{3a + (3 + 4a)i}{-1 + ai} \right| = 5 \\ &\Leftrightarrow \frac{9a^2 + (3 + 4a)^2}{1 + a^2} = 25 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Vậy có duy nhất số phức z thỏa mãn bài ra.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 15. Trong mặt phẳng Oxy , gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $z_1, z_2, z_1 + z_2$. Xét các mệnh đề sau

$$\textcircled{1} |z_1| = |z_2| \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = z_2 \\ z_1 = -z_2 \end{cases};$$

$$\textcircled{2} |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|;$$

$$\textcircled{3} \text{ Nếu } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \text{ thì } z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1} = 0;$$

$$\textcircled{4} OC^2 + AB^2 = 2(OA^2 + OB^2).$$

Trong các mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải.

Gọi $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i$ ($x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$), ta có

— $|z_1| = |z_2| = r \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = r^2 \Rightarrow A, B$ nằm trên đường tròn tâm O , bán kính r , do đó mệnh đề 1) sai.

— $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2) = \overrightarrow{OC}$, suy ra $OACB$ là hình bình hành, khi đó $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| = OC \leq OA + AC = OA + OB = |z_1| + |z_2|$, do đó mệnh đề 2) đúng.

— $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$, khi đó $z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1} = (x_1 + y_1i)(x_2 - y_2i) + (x_1 - y_1i)(x_2 + y_2i) = 2(x_1x_2 + y_1y_2) = 0$, suy ra mệnh đề 3) đúng.

— $OC^2 + AB^2 = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 2(x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2) = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) = 2(OA^2 + OB^2)$, do đó mệnh đề 4) đúng.

Vậy có 3 mệnh đề đúng trong các mệnh đề đã cho.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 16. Cho số phức z có mô-đun bằng $2\sqrt{2}$. Biết rằng tập hợp điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức $w = (1 - i)(z + 1) - i$ là đường tròn có tâm $I(a; b)$, bán kính R . Tổng $a + b + R$ bằng

A. 5.

B. 7.

C. 1.

D. 3.

Lời giải.

— Ta có $z = \frac{w + i}{1 - i} - 1 = \frac{w - 1 + 2i}{1 - i}$.

— Mà $|z| = 2\sqrt{2} \Rightarrow \left| \frac{w - 1 + 2i}{1 - i} \right| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|w - 1 + 2i|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

— Ta có

$$\begin{aligned} |w - 1 + 2i| = 4 &\Leftrightarrow |x + yi - 1 + 2i| = 4 \quad (w = x + yi, x, y \in \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 2)^2} = 4 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16. \end{aligned}$$

— Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(1; -2)$ và bán kính $R = 4$. Suy ra $a + b + R = 3$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 17. Cho z_1, z_2 là hai số phức liên hợp của nhau đồng thời thỏa mãn $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$ và $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{3}$. Tính mô-đun của số phức z_1 .

A. $|z_1| = 3$.

B. $|z_1| = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

C. $|z_1| = 2$.

D. $|z_1| = \sqrt{5}$.

Lời giải.

Giả sử $z_1 = a + bi$, với $(a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow z_2 = a - bi$.

Ta có $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{3} \Rightarrow |b| = \sqrt{3}$.

Ta có $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{a - bi} = \frac{(a + bi)(a^2 - b^2 + 2abi)}{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2} \in \mathbb{R}$.

Suy ra $2a^2b + b(a^2 - b^2) = 0 \Leftrightarrow 3a^2 = b^2 \Rightarrow a^2 = 1$.

Vậy $|z_1| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 18. Số phức z thỏa mãn $|z - 1| = 5$, $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \frac{5}{17}$ và z có phần ảo dương. Tìm tổng phần thực và phần ảo của z .

A. 2.

B. 4.

C. 6.

D. 8.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ và $y > 0$.

Từ

$$|z - 1| = 5 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x = 24. \quad (1)$$

Từ

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \frac{5}{17} \Leftrightarrow \frac{\bar{z}}{|z|^2} + \frac{z}{|z|^2} = \frac{5}{17} \Leftrightarrow 2x = \frac{5}{17}(x^2 + y^2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{34}{5}x = 0. \quad (2)$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế, ta được $x = 5$, $y = 3$. Vậy $x + y = 8$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 19. Tìm phần thực của số phức z , biết $z + \frac{|z|^2}{z} = 10$.

A. 20.

B. 10.

C. 5.

D. 15.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi \neq 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$), ta có

$$\begin{aligned} z + \frac{|z|^2}{z} = 10 &\Leftrightarrow z^2 + |z|^2 = 10z \\ &\Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi + a^2 + b^2 = 10a + 10bi \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 - 10a = 0 \\ 2ab = 10b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy z có phần thực bằng 5.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 20. Cho số phức z thỏa $\frac{z}{z^2}$ là số thực, $|z - \bar{z}| = 3\sqrt{2}$. Tính $|z|$.

A. $|z| = 3\sqrt{2}$.B. $|z| = \sqrt{6}$.C. $|z| = 2\sqrt{3}$.D. $|z| = \sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có $|z - \bar{z}| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow |2yi| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow |y| = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

$$\text{Khi đó, } \frac{z}{z^2} = \frac{x + yi}{x^2 - y^2 - 2xyi} = \frac{(x + yi)(x^2 - y^2 + 2xyi)}{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} = \frac{x^3 - 3xy^2 - (y^3 - 3x^2y)i}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Vì $\frac{z}{z^2}$ là số thực nên

$$y^3 - 3x^2y = 0 \Rightarrow y^2 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{y^2}{3} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy } |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{3}{2}} = \sqrt{6}.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\frac{z + 4i}{z - 4i}$ là một số thực dương.

A. Trục Oy bỏ đi đoạn IJ (với I là điểm biểu diễn $4i$, J là điểm biểu diễn $-4i$).

B. Trục Oy bỏ đi đoạn IJ (với I là điểm biểu diễn $2i$, J là điểm biểu diễn $-2i$).

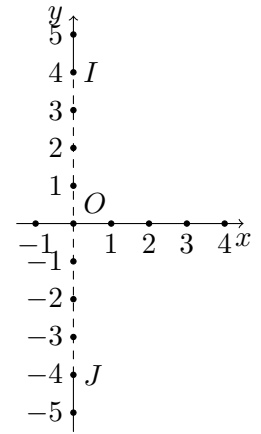
C. Đoạn IJ (với I là điểm biểu diễn $4i$, J là điểm biểu diễn $-4i$).

D. Trục Ox bỏ đi đoạn nối IJ (với I là điểm biểu diễn 4 , J là điểm biểu diễn -4).

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ và $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Ta có

$$\begin{aligned} \frac{z+4i}{z-4i} &= \frac{x+yi+4i}{x+iy-4i} = \frac{x+(y+4)i}{x+(y-4)i} \\ &= \frac{[x+(y+4)i][x-(y-4)i]}{[x+(y-4)i][x-(y-4)i]} \\ &= \frac{x^2 - x(y-4)i + x(y+4)i + (y+4)(y-4)}{x^2 + (y-4)^2} \\ &= \frac{x^2 + y^2 - 16}{x^2 + (y-4)^2} + \frac{8x}{x^2 + (y-4)^2}i. \end{aligned}$$



Để $\frac{z+4i}{z-4i}$ là một số thực dương khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 - 16 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 - 16 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y < -4 \\ y > 4 \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z là trục Oy bỏ đi đoạn IJ (với I là điểm biểu diễn $4i$, J là điểm biểu diễn $-4i$).

Chọn đáp án **A**

□

Câu 22. Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 3$, $|z_2| = 4$ và chúng được biểu diễn trong mặt phẳng phức lần lượt là các điểm M, N . Biết góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{ON}$ bằng 60° . Tìm môđun của số phức $z = \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$.

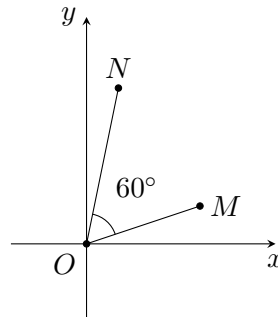
A. $|z| = \sqrt{3}$.

B. $|z| = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

C. $|z| = \frac{\sqrt{481}}{13}$.

D. $|z| = 4\sqrt{3}$.

Lời giải.



Đặt $z_1 = 3(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $z_2 = 4(\cos(\varphi \pm 60^\circ) + i \sin(\varphi \pm 60^\circ))$, ta có

$$z = \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} = \frac{1 + \frac{z_2}{z_1}}{1 - \frac{z_2}{z_1}} = \frac{1 + \frac{4}{3}(\cos 60^\circ \pm i \sin 60^\circ)}{1 - \frac{4}{3}(\cos 60^\circ \pm i \sin 60^\circ)} = \frac{1 + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1 - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{5 \pm 2i\sqrt{3}}{1 \mp 2i\sqrt{3}}$$

Suy ra $|z| = \frac{\sqrt{481}}{13}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 23. Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ và $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $|z_1 + z_2 + z_3| < |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$.

B. $|z_1 + z_2 + z_3| \neq |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$.

C. $|z_1 + z_2 + z_3| > |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$.

D. $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1| &= |z_1 z_2 z_3| \left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right| \\
 &= \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^3 \left| \frac{\bar{z}_1}{|z_1|^2} + \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2} + \frac{\bar{z}_3}{|z_3|^2} \right| \\
 &= \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^3 \left| \frac{\bar{z}_1}{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^2} + \frac{\bar{z}_2}{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^2} + \frac{\bar{z}_3}{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^2} \right| \\
 &= \frac{2\sqrt{2}}{3} |\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3| = \frac{2\sqrt{2}}{3} |z_1 + z_2 + z_3| \\
 &= \frac{2\sqrt{2}}{3} |z_1 + z_2 + z_3| = 0 = |z_1 + z_2 + z_3|.
 \end{aligned}$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 24. Cho số phức z thỏa mãn $\left| \frac{2\bar{z} - z + 3i}{z + i} \right| = 3$. Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức là

- A.** Một Parabol. **B.** Một đường thẳng. **C.** Một đường tròn. **D.** Một Elip.

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi \in \mathbb{C}$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

Ta có

$$\begin{aligned}
 &\left| \frac{2\bar{z} - z + 3i}{z + i} \right| = 3 \\
 \Leftrightarrow &\frac{|2\bar{z} - z + 3i|}{|z + i|} = 3 \\
 \Leftrightarrow &\frac{|2(a - bi) - (a + bi) + 3i|}{|a + bi + i|} = 3 \\
 \Leftrightarrow &|2(a - bi) - (a + bi) + 3i| = 3|a + bi + i| \\
 \Leftrightarrow &\sqrt{a^2 + (3 - 3b)^2} = 3\sqrt{a^2 + (b + 1)^2} \\
 \Leftrightarrow &8a^2 - 36b = 0 \\
 \Leftrightarrow &b = \frac{2}{9}a^2
 \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức là một Parabol.

Chọn đáp án **A** □

Câu 25. Cho số phức $z = \frac{m+1}{1+m(2i-1)}$, ($m \in \mathbb{R}$). Tìm các giá trị nguyên của m để $|z - i| < 1$ là

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** Vô số.

Lời giải.

$$Ta \text{ có } z - i = \frac{m+1}{1+m(2i-1)} - i = \frac{3m+1+(m-1)i}{1+2mi-m}.$$

Theo giả thiết có

$$\begin{aligned}
 |z - i| < 1 &\Leftrightarrow \frac{3m+1+(m-1)i}{1+2mi-m} < 1 \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{(3m+1)^2 + (m-1)^2} < \sqrt{(1-m)^2 + (2m)^2} \\
 &\Leftrightarrow 5m^2 + 6m + 1 < 0 \\
 &\Leftrightarrow -1 < m < -\frac{1}{5}.
 \end{aligned}$$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên không có giá trị nào thỏa mãn.

Chọn đáp án **A** □

Câu 26. Cho số phức $z = 1 - i$ và $\bar{z}$ là số phức liên hợp của z . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $|\bar{z}| < 2$. B. $\frac{z^3}{\bar{z}^3} = i$. C. z^2 là số thuần ảo. D. $\bar{z}^4$ là số thuần ảo.

Lời giải.

Ta có $\bar{z}^4 = (1 + i)^4 = ((1 + i)^2)^2 = (2i)^2 = -4$ không phải số thuần ảo. Do đó mệnh đề $\bar{z}^4$ là số thuần ảo sai.

Chọn đáp án **D** □

Câu 27. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $\frac{|z|^2}{z} + 2iz + \frac{2(z+i)}{1-i} = 0$. Tính $P = \frac{a}{b}$.

- A. $P = \frac{3}{5}$. B. $P = \frac{1}{5}$. C. $P = 5$. D. $P = -\frac{1}{5}$.

Lời giải.

Vì $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ nên

$$\begin{aligned} \frac{|z|^2}{z} + 2iz + \frac{2(z+i)}{1-i} &= 0 \\ \Leftrightarrow \bar{z} + 2iz + \frac{2(z+i)}{1-i} &= 0 \\ \Leftrightarrow a - bi + 2i(a + bi) + \frac{2(a + bi + i)(1 + i)}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow (2a - 3b - 1) + (3a + 1)i &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 3b - 1 = 0 \\ 3a + 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = -\frac{5}{9} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{a}{b} = \frac{3}{5}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 28. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $az^2 + z + \frac{1}{a} = 0$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$). Biết $|z_1| + |z_2| = 2$, khi đó a nhận giá trị bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. 2. C. 3. D. 1.

Lời giải.

Theo giả thiết

$$\begin{aligned} az^2 + z + \frac{1}{a} = 0 &\Leftrightarrow a^2z^2 + az + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \left(az + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} az + \frac{1}{2} = \frac{i\sqrt{3}}{2} \\ az + \frac{1}{2} = -\frac{i\sqrt{3}}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{2a}(-1 + i\sqrt{3}) \\ z = -\frac{1}{2a}(1 + i\sqrt{3}) \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Vì $|z_1| + |z_2| = 2$ nên từ (1) suy ra $\frac{1}{2a}(2 + 2) = 2 \Leftrightarrow a = 1$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 29. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z + 2 + i - |z|(1 + i) = 0$?

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó, từ giả thiết ta suy ra

$$\begin{aligned}
 & z + 2 + i - |z|(1 + i) = 0 \\
 \Leftrightarrow & a + bi + 2 + i - \sqrt{a^2 + b^2}(1 + i) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} a + 2 - \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \\ b + 1 - \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} a + 2 - \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \\ b = a + 1 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} a + 2 = \sqrt{a^2 + (a + 1)^2} \\ b = a + 1 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} a \geq -2 \\ (a + 2)^2 = a^2 + (a + 1)^2 \\ b = a + 1 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} a \geq -2 \\ a^2 - 2a - 3 = 0 \\ b = a + 1 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} a = -1, b = 0 \\ a = 3, b = 4. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy có 2 số phức z thỏa bài toán.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 30. Cho số phức z thỏa mãn $(2 + i)|z| = \frac{\sqrt{17}}{z} + 1 - 3i$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = (3 - 4i)z - 1 + 2i$ là đường tròn tâm I , bán kính R . Khi đó

A. $I(-1; -2), R = \sqrt{5}$. **B.** $I(1; 2), R = \sqrt{5}$. **C.** $I(-1; 2), R = 5$. **D.** $I(1; -2), R = 5$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 (2 + i)|z| = \frac{\sqrt{17}}{z} + 1 - 3i & \Leftrightarrow (2|z| - 1) + (|z| + 3)i = \frac{\sqrt{17}}{z} \\
 \Rightarrow |(2|z| - 1) + (|z| + 3)i| &= \left| \frac{\sqrt{17}}{z} \right| \\
 \Rightarrow \sqrt{(2|z| - 1)^2 + (|z| + 3)^2} &= \frac{\sqrt{17}}{|z|} \\
 \Rightarrow 5|z|^2 + 2|z| + 10 &= \frac{17}{|z|^2} \\
 \Rightarrow 5|z|^4 + 2|z|^3 + 10|z|^2 - 17 &= 0 \quad (*).
 \end{aligned}$$

Đặt $x = |z|, x > 0$. Xét hàm số $f(x) = 5x^4 + 2x^3 + 10x^2 - 17$ với $x > 0$.

Có $f'(x) = 20x^3 + 6x^2 + 20x > 0, \forall x > 0$ nên $f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$, mà $f(1) = 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 1$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Do vậy phương trình (*) có nghiệm duy nhất $|z| = 1$.

$$\begin{aligned}
 w = (3 - 4i)z - 1 + 2i & \Leftrightarrow w + 1 - 2i = (3 - 4i)z \\
 \Rightarrow |w + 1 - 2i| &= |(3 - 4i)z| = 5
 \end{aligned}$$

Do đó, tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(-1; 2)$, bán kính $R = 5$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 31. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z - i}{z + i} \right| = 1$.

A. Hình chữ nhật giới hạn bởi các đường $x = \pm 1, y = \pm 1$.

B. Trục Ox .

C. Đường tròn $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

D. Hai đường thẳng $y = \pm 1$, trừ điểm $(0; -1)$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$ là số phức thỏa mãn bài toán.

Khi đó, điểm $M(x; y)$ biểu diễn cho số phức z trong mặt phẳng Oxy .

Điều kiện $z \neq -i$ suy ra $M(x; y) \neq (0; -1)$.

Khi đó,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{z-i}{z+i} \right| = 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{|z-i|}{|z+i|} = 1 \\ \Leftrightarrow & |z-i| = |z+i| \\ \Leftrightarrow & |x+yi-i| = |x+yi+i| \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \\ \Leftrightarrow & y = 0. \end{aligned}$$

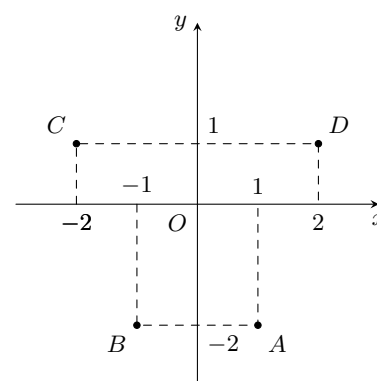
Vì điểm $(0; -1) \notin Ox$ nên tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là trục Ox .

Chọn đáp án **B**

□

Câu 32.

Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $z - (2+3i)\bar{z} = 1-9i$. Số phức $w = \frac{5}{iz}$ có điểm biểu diễn là điểm nào trong các điểm A, B, C, D ở hình bên?



A. Điểm C .

B. Điểm A .

C. Điểm D .

D. Điểm B .

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Theo đề bài ta có

$$a + bi - (2 + 3i)(a - bi) = 1 - 9i \Leftrightarrow -a - 3b + (3b - 3a)i = 1 - 9i \Leftrightarrow \begin{cases} -a - 3b = 1 \\ 3b - 3a = -9. \end{cases}$$

Giải hệ ta được $a = 2, b = -1$. Suy ra $w = \frac{5}{i(2-i)} = 1 - 2i$.

Vậy điểm biểu diễn số phức w là điểm $A(1; -2)$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 33. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) có phần thực dương và thỏa mãn $z + 2 + i - |z|(1+i) = 0$. Tính $P = a + b$.

A. $P = 7$.

B. $P = -1$.

C. $P = -5$.

D. $P = 3$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$). Theo đề ta có

$$\begin{aligned} a + bi + 2 + i - \sqrt{a^2 + b^2}(1 + i) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2 - \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \\ b + 1 - \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2 = b + 1 \\ b + 1 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 1 > 0 \\ (b + 1)^2 = (b - 1)^2 + b^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 1 \\ b > 1 \\ b^2 - 4b = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow b = 4, a = 3. \end{aligned}$$

Vậy $P = 7$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 34. Cho số phức z thỏa mãn $(3 - 4i)z - \frac{4}{|z|} = 8$. Tính $|z|$.

A. $|z| = 2\sqrt{2}$.

B. $|z| = \frac{1}{2}$.

C. $|z| = \sqrt{2}$.

D. $|z| = 2$.

Lời giải.

Ta biến đổi giả thiết về $(3 - 4i)z = 8 + \frac{4}{|z|}$.

Lấy mô-đun hai vế ta được

$$\begin{aligned} |(3 - 4i)z| &= \left| 8 + \frac{4}{|z|} \right| \\ \Leftrightarrow |3 - 4i| \cdot |z| &= 8 + \frac{4}{|z|} \\ \Leftrightarrow 5|z| &= 8 + \frac{4}{|z|} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 2 & (\text{Thỏa mãn}) \\ |z| = -\frac{2}{5} & (\text{Loại}). \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 35. Gọi z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn điều kiện $|z - 5 - 3i| = 5$ và $|z_1 - z_2| = 8$. Quỹ tích các điểm biểu diễn số phức $w = z_1 + z_2$ là đường tròn có phương trình nào sau đây?

A. $(x - 10)^2 + (y - 6)^2 = 36$.

B. $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

C. $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{16}{9}$.

D. $(x + 10)^2 + (y - 6)^2 = 16$.

Lời giải.

Gọi A, B lần lượt là hai điểm biểu diễn hai số phức z_1, z_2 , I là điểm biểu diễn số phức $5 + 3i$.

Từ giả thiết ta có $IA = IB = 5$ và $AB = 8$. Vậy AB là một dây cung có độ dài bằng 8 của đường tròn tâm I , bán kính $R = 5$.

Ta có

$$w = z_1 + z_2 \Leftrightarrow w - 10 - 6i = (z_1 - 5 - 3i) + (z_2 - 5 - 3i).$$

Lấy mô-đun hai vế ta được

$$|w - 10 - 6i| = |(z_1 - 5 - 3i) + (z_2 - 5 - 3i)| = |\vec{AI} + \vec{BI}|.$$

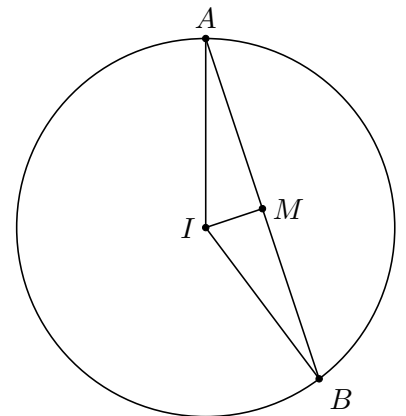
Ta gọi M là trung điểm của AB , khi đó $\vec{AI} + \vec{BI} = 2\vec{MI}$.

Vậy

$$|w - 10 - 6i| = 2MI = 2\sqrt{IA^2 - AM^2} = 2\sqrt{5^2 - 4^2} = 6.$$

Từ đó suy ra quỹ tích điểm biểu diễn w là đường tròn tâm $(10; 6)$ và bán kính bằng 6.

Chọn đáp án **A** □



Câu 36. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $\frac{|z|^2}{z} + 2iz + \frac{2(z+i)}{1-i} = 0$. Tính tỉ số $\frac{a}{b}$.

A. 5. B. $\frac{3}{5}$. C. $-\frac{3}{5}$. D. -5.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{|z|^2}{z} + 2iz + \frac{2(z+i)}{1-i} = 0 &\Leftrightarrow \frac{z \cdot \bar{z}}{z} + 2iz + \frac{2(z+i)(1+i)}{2} \\ &\Leftrightarrow \bar{z} + 2iz + z + iz + i - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\bar{z} + z) + 3iz + i - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (2a - 3b - 1) + (3a + 1)i = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 3b = 1 \\ 3a + 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = -\frac{5}{9} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tỉ số $\frac{a}{b} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{5}{9}} = \frac{3}{5}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 37. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + z_2| = 1$, $|z_1 - z_2| = 2$ và $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = 4$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $2 < |z_1| < 3$. B. $3 < |z_1| < 4$. C. $4 < |z_1| < 6$. D. $1 < |z_1| < 2$.

Lời giải.

Ta có $2(|z_1|^2 + |z_2|^2) = |z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 5 \Rightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 = \frac{5}{2}$.

Mà $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = 4 \Leftrightarrow |z_1| = 4|z_2| \Leftrightarrow |z_1|^2 = 16|z_2|^2$.

Vậy ta có $\begin{cases} |z_1|^2 + |z_2|^2 = \frac{5}{2} \\ |z_1|^2 = 16|z_2|^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1|^2 = \frac{40}{17} \\ |z_2|^2 = \frac{5}{34} \end{cases} \Rightarrow |z_1| = 2\sqrt{\frac{10}{17}}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 38. Cho số phức z có môđun bằng 1 và có phần thực bằng a .

Tính biểu thức $z^3 + \frac{1}{z^3}$ theo a .

A. $8a^3 - 3a$. B. $8a^3 - 6a$. C. $a^3 + 6a$. D. $a^3 + 3a$.

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi$, ta có $|z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1 \Leftrightarrow b^2 = 1 - a^2$.

Ta có

$$\begin{aligned} z^3 + \frac{1}{z^3} &= z^3 + \frac{\bar{z}^3}{z^3 \cdot \bar{z}^3} = z^3 + \bar{z}^3 \\ &= (a + bi)^3 + (a - bi)^3 = 8a^3 - 6a. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 39. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + 2 + 3i| = 5$ và $\frac{z}{z-2}$ là số thuần ảo?

A. 2. B. vô số. C. 1. D. 0.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$). Điều kiện $z \neq 2$.

Ta có $|z + 2 + 3i| = 5 \Leftrightarrow (a + 2)^2 + (b + 3)^2 = 25$

Và $\frac{z}{z-2} = \frac{a+bi}{a-2+bi} = \frac{(a+bi)(a-2-bi)}{(a-2)^2 + b^2} = \frac{a^2 - 2a + b^2 + 2bi}{(a-2)^2 + b^2} = \frac{a^2 - 2a + b^2}{(a-2)^2 + b^2} + \frac{2bi}{(a-2)^2 + b^2}$ là số

(1)

thuần ảo nên có $a^2 - 2a + b^2 = 0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases} (a+2)^2 + (b+3)^2 = 25 \\ a^2 - 2a + b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + 4a + 6b - 12 = 0 \\ a^2 + b^2 - 2a = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 2a = 0 \\ 6a + 6b - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + (2-a)^2 - 2a = 0 \\ b = 2-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases} \\ b = 2-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Với $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$ ta được $z = 1 + i$ thỏa mãn.

Với $\begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases}$ ta được $z = 2$ không thỏa mãn điều kiện, loại.

Vậy có 1 số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 40. Tích phần thực và phần ảo của số phức z thỏa mãn $\frac{2|z|^2}{\bar{z}} + iz + \frac{z-i}{1-i} = -1 + 2i$ là

A. 1.

B. 0.

C. $-\sqrt{3}$.

D. $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có phương trình

$$2z + iz + \frac{z}{1-i} = \frac{i}{1-i} - 1 + 2i$$

$$\Leftrightarrow z \left(2 + i + \frac{1}{1-i} \right) = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i \Leftrightarrow z \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}i \right) = \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}i \right) i \Leftrightarrow z = i.$$

Vậy $z = i$, suy ra tích phần thực và phần ảo bằng $0 \cdot 1 = 0$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 41. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z}{z-i} \right| = 3$ là đường nào?

A. Một đường thẳng.

B. Một đường parabol.

C. Một đường tròn.

D. Một đường elip.

Lời giải.

Cách 1: Giả sử $z = a + bi$ trong đó $(a, b \in \mathbb{R}, z \neq i)$.

Từ giả thiết ta có:

$$|z| = 3|z-i| \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 9a^2 + 9(b-1)^2 \Leftrightarrow 8a^2 + 8b^2 - 18b + 9 = 0 \Leftrightarrow a^2 + \left(b - \frac{9}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}.$$

Do đó tập hợp điểm biểu diễn điểm z là một đường tròn.

Cách 2: Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn của z, i trong mặt phẳng phức.

Khi đó $AO = |z|$ và $AB = |z-i|$.

Từ đề bài ta có $\frac{AO}{AB} = 3$.

Như vậy, tập hợp điểm A là đường tròn Apollonius của đoạn thẳng OB với tỉ số 3.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 42. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - z_2| = |z_1| = |z_2| > 0$. Tính $A = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^4$.

A. 1.

B. $1-i$.

C. -1 .

D. $1+i$.

Lời giải.

Cách 1: Do $|z_1| = |z_2| > 0$ nên $z_2, z_1 \neq 0$.

Từ đẳng thức $|z_1 - z_2| = |z_1| = |z_2|$, ta có $\left| \frac{z_1}{z_2} - 1 \right| = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = 1$.

Đặt $w = \frac{z_1}{z_2}$. Bài toán trở thành: Cho số phức w thỏa mãn $|w-1| = |w| = 1$. Tính $A = w^4 + \frac{1}{w^4}$.

Trong mặt phẳng phức, ta gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn của số phức $w, 1$.

Khi đó $|w| = OA, 1 = OB, |w-1| = AB$. Suy ra $\triangle OAB$ là tam giác đều.

Do đó, w chỉ có thể là $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ hoặc $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó, ta luôn có $w\bar{w} = 1$, $w + \bar{w} = 1$ và $(w - \bar{w})^2 = -3$.

Ta có

$$A = \left(w^2 - \frac{1}{w^2}\right)^2 + 2 = (w^2 - \bar{w}^2)^2 + 2 = (w - \bar{w})^2 (w + \bar{w})^2 + 2 = 1^2 \cdot (-3) + 2 = -1.$$

Cách 2: Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2 trong mặt phẳng phức.

Khi đó $|z_1| = OA$, $|z_2| = OB$ và $|z_1 - z_2| = AB$. Suy ra $\triangle OAB$ là tam giác đều.

Không mất tổng quát ta có thể giả sử $z_1 = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ và $z_2 = r(\cos \psi + i \sin \psi)$ trong đó $r > 0$ và $\varphi - \psi = \frac{\pi}{3}$.

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi) = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}. \\ \frac{z_2}{z_1} &= \cos(\psi - \varphi) + i \sin(\psi - \varphi) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^4 = \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right) + \left(\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right) = -1.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 43. Trong mặt phẳng phức, cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + i| \leq \sqrt{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|z + 1| \leq \sqrt{2}$.

B. $|z + i| \leq \sqrt{2}$.

C. $|2z + 1 - i| \leq 2$.

D. $|2z - 1 + i| \leq 3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa $|z - 1 + i| \leq \sqrt{2}$ là hình tròn (1) tâm $I(1; -2)$ bán kính $r = \sqrt{2}$.

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa $|2z - 1 + i| \leq 3\sqrt{2}$ là hình tròn (2) có tâm $I_1\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $r_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Nhận thấy hình tròn (1) nằm trong hình tròn (2).

Chọn đáp án **D**

□

Câu 44. Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $z_1, z_2 \neq 0$ và $z_2^2 - 2z_1z_2 + 2z_1^2 = 0$. Tính $\left|\frac{z_2}{z_1}\right|$.

A. $\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \sqrt{3}$.

B. $\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = 2\sqrt{2}$.

C. $\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

D. $\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \sqrt{2}$.

Lời giải.

$$z_2^2 - 2z_1z_2 + 2z_1^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2 - 2\left(\frac{z_2}{z_1}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{z_2}{z_1} = 1 \pm i \Rightarrow \left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \sqrt{2}.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 45. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z| = 1$ và $\left|\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}\right| = 1$?

A. 6.

B. 4.

C. 10.

D. 8.

Lời giải.

• Giả sử $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Ta có $|z| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.

• $\left|\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z^2 + \bar{z}^2|}{|z| \cdot |\bar{z}|} = 1 \Leftrightarrow |z^2 + \bar{z}^2| = 1 \Leftrightarrow |2(x^2 - y^2)| = 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = \pm \frac{1}{2}$.

$$\bullet \text{ Ta có } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = \pm \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{3}{4}, y^2 = \frac{1}{2} \\ x^2 = \frac{1}{4}, y^2 = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}, y = \frac{1}{2} \\ x = \frac{\sqrt{3}}{2}, y = -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, y = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, y = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{1}{2}, y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x = -\frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

• Vậy có 8 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 46. Cho số phức z , biết rằng các điểm biểu diễn hình học của các số phức $z; iz$ và $z + iz$ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 18. Tính mô-đun của số phức z .

A. $2\sqrt{3}$.

B. $3\sqrt{2}$.

C. 6.

D. 9.

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi$, với a, b là số thực. Gọi M, N, P lần lượt là điểm biểu diễn số phức z, iz và $z + iz$. Khi đó $M(a; b); N(-b; a); P(a - b; a + b)$.

Suy ra $MN = \sqrt{2(a^2 + b^2)}; NP = PM = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Suy ra tam giác MNP vuông cân tại P .

Ta có $S_{\triangle MNP} = 18 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot NP \cdot PM = 18 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 36 \Leftrightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 6$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 47. Cho số phức $z = a + bi$ (với a, b là số nguyên) thỏa mãn $(1 - 3i)z$ là số thực và $|\bar{z} - 2 + 5i| = 1$. Khi đó $a + b$ bằng

A. 9.

B. 8.

C. 7.

D. 6.

Lời giải.

Ta có $(1 - 3i)z = (a + 3b) + (b - 3a)i$, $\bar{z} - 2 + 5i = (a - 2) + (5 - b)i$.

Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} b - 3a = 0 \\ (a - 2)^2 + (5 - b)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a \\ 5a^2 - 17a + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a \\ \begin{cases} a = \frac{7}{5} \text{ (loại)} \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 6 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy $a + b = 8$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 48. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 3$. Tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = z(1 + i)$ là đường tròn nào dưới đây?

A. Tâm $I(3; -1)$, $R = 3\sqrt{2}$.

B. Tâm $I(-3; 1)$, $R = 3$.

C. Tâm $I(-3; 1)$, $R = 3\sqrt{2}$.

D. Tâm $I(3; -1)$, $R = 3$.

Lời giải.

Ta có $w = z(1 + i) \Leftrightarrow z = \frac{w}{1 + i}$. Thay z vào điều kiện $|z - 1 + 2i| = 3$, ta được

$$\begin{aligned} \left| \frac{w}{1 + i} - 1 + 2i \right| = 3 &\Leftrightarrow \left| \frac{1}{1 + i} \right| \cdot |w - 3 + i| = 3 \\ &\Leftrightarrow |w - 3 + i| = 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Giả sử số phức $w = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Ta được

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = (3\sqrt{2})^2.$$

Vậy tập hợp của số phức w là đường tròn tâm $I(3; -1)$, bán kính $R = 3\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 49. Cho $i + 2i^2 + 3i^3 + \dots + 2018i^{2018} = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ và i là đơn vị ảo. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a = -1010$.

B. $a = -1009$.

C. $a = 1010$.

D. $a = 1009$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2018}$.

$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + 2018x^{2017}$.

$$\Rightarrow xf'(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + 2018x^{2018} \quad (1)$$

Mặt khác: $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2018} = \frac{x^{2019} - 1}{x - 1}$.

$$f'(x) = \left(\frac{x^{2019} - 1}{x - 1} \right)' = \frac{2019x^{2018}(x - 1) - (x^{2019} - 1)}{(x - 1)^2}.$$

$$\Rightarrow xf'(x) = x \frac{2019x^{2018}(x - 1) - (x^{2019} - 1)}{(x - 1)^2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + 2018x^{2018} = x \frac{2019x^{2018}(x - 1) - (x^{2019} - 1)}{(x - 1)^2} \quad (3)$$

Thay $x = i$ vào (3) ta được

$$i + 2i^2 + 3i^3 + \dots + 2018i^{2018} = i \cdot \frac{2019i^{2018}(i - 1) - (i^{2019} - 1)}{(i - 1)^2} = -1010 + 1009i.$$

Vậy $a = -1010$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 50. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình tròn $(C): x^2 + y^2 = 8$ và parabol $(P): y = \frac{x^2}{2}$ chia hình tròn thành hai phần. Gọi S_1 là diện tích phần nhỏ, S_2 là diện tích phần lớn. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$?

A. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{9\pi - 2}$.

B. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{9\pi + 2}$.

C. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi - 2}{9\pi + 2}$.

D. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 1}{9\pi - 1}$.

Lời giải.

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = \pm 2 \end{cases}.$$

Phương trình nửa đường tròn phía trên Ox là $y = \sqrt{8 - x^2}$.

$$\text{Khi đó } S_1 = \int_{-2}^2 \left(\sqrt{8 - x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx.$$

Trong đó

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \sqrt{8 - x^2} dx &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{8(1 - \sin^2 t)} \cdot 2\sqrt{2} \cos t dt \\ &= 8 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt = 4 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt = 2\pi + 4. \end{aligned}$$

Khi đó $S_1 = 2\pi + 4 - \frac{8}{3} = 2\pi + \frac{4}{3}$. Hình tròn có bán kính $R = \sqrt{8}$ nên có diện tích là 8π .

$$\text{Do đó } S_2 = 8\pi - \left(2\pi + \frac{4}{3} \right) = 6\pi - \frac{4}{3}. \text{ Vậy } \frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{9\pi - 2}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 51. Tìm số phức z biết $z = \frac{3 + 4i}{i^{2019}}$

A. $z = 4 - 3i$.

B. $z = -4 + 3i$.

C. $z = 3 - 4i$.

D. $z = 3 + 4i$.

Lời giải.

Ta có: $i^{2019} = i \cdot i^{2018} = i \cdot (i^2)^{1009} = i \cdot (-1)^{1009} = -i$.

KHi đó: $z = \frac{3+4i}{i^{2019}} = \frac{3+4i}{-i} = -4+3i$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 52. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2i| = |z+2|$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z+2i| + |z-5+9i|$.

A. $\sqrt{70}$.

B. $4\sqrt{5}$.

C. $\sqrt{74}$.

D. $3\sqrt{10}$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} |z-2i| &= |z+2| \\ \Leftrightarrow |(x+yi)-2i| &= |x+yi+2| \\ \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 &= (x+2)^2 + y^2 \\ \Leftrightarrow x+y &= 0. \end{aligned}$$

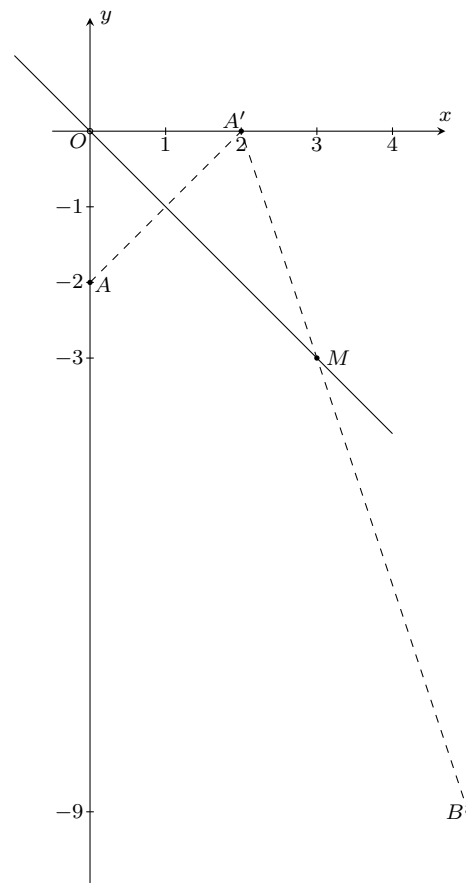
$P = |z+2i| + |z-5+9i| = |z-(-2i)| + |z-(5-9i)|$.

Xét $A(0; -2), B(5; -9)$. Bài toán trở thành cho điểm $M(x; y)$ thuộc đường thẳng $x+y=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $MA+MB$.

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua đường thẳng $x+y=0 \Rightarrow A'(2; 0) \Rightarrow \overrightarrow{A'B} = (3; -9) \Rightarrow A'B = 3\sqrt{10}$.

$MA+MB = MA'+MB \geq A'B$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $3\sqrt{10}$.



Chọn đáp án **(D)** □

Câu 53. Có tất cả bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+3i| = \sqrt{13}$ và $\frac{z}{z+2}$ là số thuần ảo?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. Vô số.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

$$|z+3i| = \sqrt{13} \Leftrightarrow a^2 + (b+3)^2 = 13 \quad (1).$$

$$w = \frac{z}{z+2} = \frac{a+bi}{a+2+bi} = \frac{(a+bi)(a+2-bi)}{(a+2)^2+b^2} = \frac{a^2+2a+b^2+2bi}{(a+2)^2+b^2} \quad (z \neq -2).$$

$$w \text{ là số thuần ảo} \Leftrightarrow a^2+2a+b^2=0 \quad (2).$$

Lấy (1) - (2) ta được $6a-2b=4 \Leftrightarrow a=3b-2$.

$$\text{Thay } a=3b-2 \text{ vào (1) ta được } 10b^2-6b=0 \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ b=\frac{3}{5} \end{cases}.$$

$$b=0 \Rightarrow a=-2 \Rightarrow z=-2 \text{ (loại)}.$$

$$b=\frac{3}{5} \Rightarrow a=-\frac{1}{5} \Rightarrow z=-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i \text{ (nhận)}.$$

Vậy có 1 số phức thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 54. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $\left| \frac{z-1}{z-i} \right| = 1$ và $\left| \frac{z-3i}{z+i} \right| = 1$. Tính $P = a + b$.

A. $P = 7$. B. $P = -1$. C. $P = 1$. D. $P = 2$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\begin{cases} |z-1| = |z-i| \\ |z-3i| = |z+i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + b^2 = a^2 + (b-1)^2 \\ a^2 + (b-3)^2 = a^2 + (b+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1.$$

Vậy $P = 1 + 1 = 2$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 55. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\left| \frac{(12-5i)z + 17 + 7i}{z - 2 - i} \right| = 13$ có phương trình nào sau đây?

A. (d): $6x + 4y - 3 = 0$.

B. (d): $x + 2y - 1 = 0$.

C. (C): $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$.

D. (C): $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(12-5i)z + 17 + 7i}{z - 2 - i} \right| = 13 \\ \Leftrightarrow & |12-5i||z+1+i| = 13|z-2-i| \\ \Leftrightarrow & |z+1+i| = |z-2-i| \\ \Leftrightarrow & 6x + 4y - 3 = 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 56. Cho số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $\frac{|z|^2}{z} + 2iz + \frac{2(z+i)}{1-i} = 0$. Khi đó $\frac{a}{b}$ bằng

A. 5. B. $-\frac{3}{5}$. C. $\frac{3}{5}$. D. -5.

Lời giải.

Thay $|z|^2 = z\bar{z}$ vào biểu thức ở đề bài ta có

$$\begin{aligned} \frac{z\bar{z}}{z} + 2iz + \frac{2(z+i)}{1-i} = 0 & \Leftrightarrow \bar{z} + 2iz + \frac{2(z+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 0 \\ & \Leftrightarrow \bar{z} + 2iz + (1+i)z + i - 1 = 0 \\ & \Leftrightarrow \bar{z} + z + 3iz + i - 1 = 0 \\ & \Leftrightarrow 2a + 3i(a+bi) + i - 1 = 0 \\ & \Leftrightarrow 2a - 3b - 1 + i(3a+1) = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 3b - 1 = 0 \\ 3a + 1 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = -\frac{5}{9} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $\frac{a}{b} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{5}{9}} = \frac{3}{5}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 57. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$ biết rằng z thỏa mãn điều kiện $\left| \frac{-2-3i}{3-2i}z + 1 \right| = 1$.

A. 2.

B. 3.

C. $\sqrt{2}$.

D. 1.

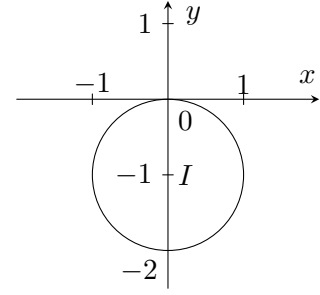
Lời giải.

Ta có

$$\left| \frac{-2-3i}{3-2i} z + 1 \right| = 1 \Leftrightarrow |-iz + 1| = 1 \Leftrightarrow |-i| \cdot \left| z - \frac{1}{i} \right| = 1$$

$$\Leftrightarrow |z + i| = 1.$$

Gọi $z = x + yi$ (với $x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow M(x; y)$ nằm trên đường tròn tâm $I(0; -1)$, bán kính bằng 1 $\Rightarrow$ giá trị lớn nhất của $|z|$ là 2.



Chọn đáp án **(A)** □

Câu 58. Cho số phức z thỏa mãn $|z| + z + 5i = 25$. Khi đó mô-đun z bằng

A. 12.

B. 10.

C. 11.

D. 13.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$|z| + z + 5i = 25 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + x + yi + 5i = 25$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + x = 25 \\ y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 25} = 25 - x \\ y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 25 = (25 - x)^2 \\ x \leq 25 \\ y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = -5 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } z = 12 - 5i \Rightarrow |z| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = 13.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 59. Xét số phức z thỏa mãn $|z + 1 - 3i| = 5$. Khi đó, tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn có

A. tâm $I(1; -3)$, bán kính $R = 25$.

B. tâm $I(-1; 3)$, bán kính $R = 25$.

C. tâm $I(-1; 3)$, bán kính $R = 5$.

D. tâm $I(1; -3)$, bán kính $R = 5$.

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$|z + 1 - 3i| = 5 \Leftrightarrow |(x + 1) + (y - 3)i| = 5 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 5^2.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I(-1; 3)$, bán kính $R = 5$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 60. Số phức $z = (1 + i) + (1 + i)^2 + \dots + (1 + i)^{2018}$ có phần ảo bằng

A. $2^{1009} - 1$.

B. $2^{1009} + 1$.

C. $1 - 2^{1009}$.

D. $-2^{1009} - 1$.

Lời giải.

Ta có

$$z = (1 + i) + (1 + i)^2 + \dots + (1 + i)^{2018} = (1 + i) \frac{(1 + i)^{2018} - 1}{(1 + i) - 1} = \frac{(1 + i)^{2019} - 1 - i}{i}.$$

$$(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i \Rightarrow (1 + i)^4 = (2i)^2 = -2^2$$

$$\Rightarrow (1 + i)^{2019} = (1 + i)^{4 \cdot 504 + 3} = (1 + i)^{4 \cdot 504} \times (1 + i)^2 \times (1 + i) = 2^{1009} \cdot i \cdot (1 + i).$$

$$\Rightarrow z = 2^{1009}(1 + i) - \frac{1}{i} - 1 = 2^{1009}(1 + i) + i - 1 = (2^{1009} - 1) + (2^{1009} + 1)i.$$

Vậy phần ảo của z bằng $2^{1009} + 1$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 61. Cho số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $|z|(2 + i) = z - 1 + i(2z + 3)$. Tính $S = 3a + 5b$.

A. $S = -11$.

B. $S = -5$.

C. $S = -1$.

D. $S = 1$.

Lời giải.

ta có

$$\begin{aligned} |z|(2 + i) = z - 1 + i(2z + 3) &\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2}(2 + i) = a + bi - 1 + (2a + 2bi + 3)i \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b^2}i = a - 2b - 1 + (2a + b + 3)i. \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó suy ra } \begin{cases} a - 2b - 1 = 2\sqrt{a^2 + b^2} \\ 2a + b + 3 = \sqrt{a^2 + b^2}. \end{cases}$$

Giải hệ ta được $a = 3$ và $b = -4$, từ đó suy ra $S = 3a + 5b = -11$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 62. Cho số phức z thỏa mãn $|z - |z|| = \sqrt{2}$. Biết rằng phần thực của z bằng a . Tính $|z|$ theo a .

A. $|z| = \frac{1}{a-1}$. B. $|z| = \frac{a - \sqrt{a^2 + 1}}{2}$. C. $|z| = \frac{a + \sqrt{a^2 + 1}}{2}$. D. $|z| = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$.

Lời giải.

Ta thấy

$$\begin{aligned} & |z - |z|| = \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow & |z - |z||^2 = 2 \\ \Leftrightarrow & (z - |z|) \cdot (\overline{z - |z|}) = 2 \\ \Leftrightarrow & (z - |z|) \cdot (\bar{z} - |z|) = 2 \\ \Leftrightarrow & |z|^2 - a \cdot |z| - 1 = 0 \\ \Rightarrow & |z| = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 63. Cho số phức z thỏa mãn $\frac{\bar{z} + i}{z - 1} = 2 - i$. Tìm số phức $w = 1 + z + z^2$.

A. $w = 5 + 2i$. B. $w = 5 - 2i$. C. $w = \frac{9}{2} + 2i$. D. $w = \frac{9}{2} - 2i$.

Lời giải.

Điều kiện $z \neq 1$.

Ta có $\frac{\bar{z} + i}{z - 1} = 2 - i \Leftrightarrow \bar{z} + i = (2 - i)(z - 1)$. (1)

Gọi $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$\begin{aligned} (1) & \Leftrightarrow a - bi + i = (2 - i)(a + bi - 1) \\ & \Leftrightarrow a - bi + i = 2a + 2bi - 2 - ai - bi^2 + i \\ & \Leftrightarrow 2 - a - b + (a - 3b)i = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - a - b = 0 \\ a - 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow z = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i. \end{aligned}$$

Suy ra $w = 1 + z + z^2 = 1 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right) + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right)^2 = \frac{9}{2} + 2i$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 64. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2| = 2$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = \frac{1}{2}(1 + i)z$ trên mặt phẳng tọa độ (Oxy) là một đường cong có độ dài bằng

A. 4. B. $2\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{2}\pi$. D. 4π .

Lời giải.

Ta có $w = \frac{1}{2}(1 + i)z \Rightarrow z = \frac{2w}{1 + i}$. Ta có $|z - 2| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{2w}{1 + i} - 2 \right| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{2w - 2(1 + i)}{1 + i} \right| = 2 \Leftrightarrow \frac{|2w - 2(1 + i)|}{|1 + i|} = 2 \Leftrightarrow \frac{|2| \cdot |w - (1 + i)|}{|1 + i|} = 2 \Leftrightarrow |w - 1 - i| = \sqrt{2}$.

Tập hợp biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(1; 1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$. Chu vi đường tròn $P = 2\pi R = 2\sqrt{2}\pi$.

Cách 2: Ta có

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2}(1 + i)(z - 2) + (1 + i) \\ \Leftrightarrow & w - 1 - i = \frac{1}{2}(1 + i)(z - 2) \\ \Rightarrow & |w - 1 - i| = \frac{1}{2} \cdot |1 + i| \cdot |z - 2| = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Tập hợp biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(1; 1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$. Chu vi đường tròn $P = 2\pi R = 2\sqrt{2}\pi$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 65. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z-i}{z+i} \right| =$

1.

- A. Hai đường thẳng $y = \pm 1$, trừ điểm $(0; -1)$.
- B. Hình chữ nhật giới hạn bởi các đường thẳng $x = \pm 1, y = \pm 1$.
- C. Đường tròn $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$.
- D. Trục Ox .

Lời giải.

— Đặt $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow z + i \neq 0 \Leftrightarrow a + (b+1)i \neq 0 \Leftrightarrow a^2 + (b+1)^2 \neq 0$.

— Ta có $\left| \frac{z-i}{z+i} \right| = \frac{|z-i|}{|z+i|}$ nên

$$\begin{aligned} \left| \frac{z-i}{z+i} \right| = 1 &\Leftrightarrow \frac{|z-i|}{|z+i|} = 1 \Leftrightarrow |z-i| = |z+i| \\ &\Leftrightarrow |a + (b-1)i| = |a + (b+1)i| \\ &\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + (b-1)^2} = \sqrt{a^2 + (b+1)^2} \\ &\Leftrightarrow b = 0 \text{ (thỏa mãn điều kiện } a^2 + (b+1)^2 \neq 0). \end{aligned}$$

— Vậy tập hợp điểm biểu diễn của số phức z là đường thẳng $y = 0$, chính là trục Ox .

Chọn đáp án **D**

□

Câu 66. Cho số phức z có môđun bằng $2\sqrt{2}$. Biết rằng tập hợp điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức $w = (1-i)(z+1) - i$ là đường tròn có tâm $I(a; b)$, bán kính R . Tổng $a + b + R$ bằng

- A. 5.
- B. 7.
- C. 1.
- D. 3.

Lời giải.

Ta có $w = (1-i)(z+1) - i \Leftrightarrow w + i = (1-i)z + 1 - i \Leftrightarrow w - (1-2i) = (1-i)z$.

Do đó

$$|w - (1-2i)| = |(1-i)z| = |1-i| \cdot |z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} \cdot 2\sqrt{2} = 4.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức w là đường tròn có tâm $I(1; -2)$, bán kính $R = 4$. Do đó $a + b + R = 3$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 67. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1| = 5, \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \frac{5}{17}$ và z có phần ảo dương. Tìm tổng phần thực và phần ảo của z là

- A. 2.
- B. 4.
- C. 6.
- D. 8.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R}; b > 0)$. Từ giả thiết ta có

$$|z-1| = 5 \Leftrightarrow |a-1+bi| = 5 \Leftrightarrow (a-1)^2 + b^2 = 25 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2a = 24 \Leftrightarrow 5a^2 + 5b^2 - 10a = 120 \quad (1)$$

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \frac{5}{17} \Leftrightarrow 17(z + \bar{z}) = 5z \cdot \bar{z} \Leftrightarrow 17(2a) = 5(a^2 + b^2) \Leftrightarrow 5a^2 + 5b^2 - 34a = 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $24a = 120 \Leftrightarrow a = 5$.

Thay vào phương trình (2) ta được $125 + 5b^2 - 170 = 0 \Leftrightarrow b^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ b = -3. \end{cases}$

Vì z có phần ảo dương nên $b = 3$. Vậy $a + b = 8$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 68. Cho z_1, z_2 là hai số phức liên hợp của nhau đồng thời thỏa mãn $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$ và $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{3}$. Tính môđun của số phức z_1 .

- A. $|z_1| = 3$.
- B. $|z_1| = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
- C. $|z_1| = 2$.
- D. $|z_1| = \sqrt{5}$.

Lời giải.

Gọi $z_1 = a + bi$ trong đó $a, b \in \mathbb{R}$.

Do z_1, z_2 là hai số phức liên hợp của nhau nên $z_2 = a - bi$.

Ta có $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow |2bi| = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow b^2 = 3$.

Lại có $\frac{z_1}{z_2^2} = \frac{a + bi}{(a - bi)^2} = \frac{(a + bi)^3}{(a - bi)^2(a + bi)^2} = \frac{a^3 - 3ab^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{b(3a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)^2}i$

do $\frac{z_1}{z_2^2} \in \mathbb{R}$ nên $\begin{cases} b(3a^2 - b^2) = 0 \\ a \neq 0, b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b^2 = 3a^2 \end{cases}$ mà theo trên ta có $b^2 = 3 \Rightarrow a^2 = 1$.

Khi đó $|z_1| = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 69. Biết số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $M = |z + 2|^2 - |z - i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính mô-đun của số phức $z + i$.

A. $|z + i| = \sqrt{61}$.

B. $|z + i| = 5\sqrt{2}$.

C. $|z + i| = 3\sqrt{5}$.

D. $|z + i| = 2\sqrt{41}$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Tập hợp điểm P biểu diễn số phức z là đường tròn (C) có tâm $(3; 4)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

Theo giả thiết ta có

$$M = |z + 2|^2 - |z - i|^2 = (x + 2)^2 + y^2 - [x^2 + (y - 1)^2] = 4x + 2y + 3 \Rightarrow 4x + 2y + 3 - M = 0 \quad (d)$$

Cần tìm điều kiện của M để đường thẳng (d) và (C) có điểm chung, tức là

$$d(I, (P)) \leq R \Leftrightarrow \frac{|4 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 - M|}{\sqrt{4^2 + 2^2}} \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow |23 - M| \leq 10 \Rightarrow -10 \leq 23 - M \leq 10 \Rightarrow 13 \leq M \leq 33.$$

$$M \text{ đạt max khi } \begin{cases} 4x + 2y - 30 = 0 \\ (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow x = 5; y = -5 \Rightarrow |z + i| = |5 - 5i + i| = \sqrt{61}.$$

Chọn đáp án **A**

□

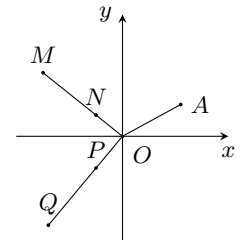
Câu 70. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Biết điểm A trong hình dưới đây biểu diễn số phức z . Hỏi điểm nào trong hình bên biểu diễn số phức $w = \frac{1}{iz}$.

A. Điểm M .

B. Điểm N .

C. Điểm P .

D. Điểm Q .

**Lời giải.**

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Dựa vào điểm A ta có $x > y > 0$.

$$|w| = \left| \frac{1}{iz} \right| = \frac{1}{1 \cdot |z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} < OA \Rightarrow \text{chỉ có thể nhận hai điểm } N, P.$$

$$w = \frac{1}{iz} = \frac{1}{i(x + yi)} = \frac{1}{-(y - xi)} = \frac{-(y + xi)}{y^2 + x^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2} + \frac{-x}{x^2 + y^2}i.$$

Phần thực và phần ảo của w đều âm nên điểm P thỏa mãn.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 71. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|^2 = |z + \bar{z}| + |z - \bar{z}|$ và z^2 là số thuần ảo?

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$ ($\forall a, b \in \mathbb{R}$) thỏa điều kiện đề bài

$$z^2 = (a + bi)^2 = a^2 + 2abi + (bi)^2 = (a^2 - b^2) + (2ab)i.$$

$$z^2 \text{ là số thuần ảo} \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow |a| = |b|.$$

$$\begin{aligned} |z|^2 &= |z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{a^2 + b^2} \right)^2 &= |(a + bi) + (a - bi)| + |(a + bi) - (a - bi)| \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 &= 2|a| + 2|b|. \end{aligned}$$

$$\text{Mà } |a| = |b| \Rightarrow a^2 + a^2 = 2|a| + 2|a| \Leftrightarrow a^2 = 2|a|. \quad (1)$$

Trường hợp 1: $a \geq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow a^2 = 2a \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \Rightarrow b^2 = 0 \Rightarrow b = 0 \\ a = 2 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ b = -2. \end{cases} \end{cases} (*)$$

Trường hợp 2: $a \leq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow a^2 = -2a \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \Rightarrow b^2 = 0 \Rightarrow b = 0 \\ a = -2 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ b = -2. \end{cases} \end{cases} (**)$$

Từ (*) và (**) $\Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z = 2 + 2i \\ z = 2 - 2i \\ z = -2 + 2i \\ z = -2 - 2i \end{cases}$. Vậy có 5 số phức z thỏa mãn điều kiện đề bài.

Chọn đáp án **D**

□

6 ĐÁP ÁN

1. B	2. D	3. B	4. D	5. D	6. A	7. A	8. A	9. C	10. D
11. B	12. C	13. D	14. C	15. B	16. D	17. C	18. D	19. C	20. B
21. A	22. C	23. D	24. A	25. A	26. D	27. A	28. D	29. B	30. C
31. B	32. B	33. A	34. D	35. A	36. B	37. D	38. B	39. C	40. B
41. C	42. C	43. D	44. D	45. D	46. C	47. B	48. A	49. A	50. A
51. B	52. D	53. B	54. D	55. A	56. C	57. A	58. D	59. C	60. B
61. A	62. D	63. C	64. C	65. D	66. D	67. D	68. C	69. A	70. C
71. D									

7 VẬN DỤNG CAO

Câu 1. Cho số phức $z = 1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + \dots + 2018i^{2017}$ có phần thực là a và phần ảo là b . Tính $b - a$.

A. 1.

B. -1.

C. 1010.

D. -2017.

Lời giải.

Với $x \neq 1$ ta có $1 + x + x^2 + \dots + x^{2018} = \frac{x^{2019} - 1}{x - 1}$, suy ra

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + 2018x^{2017} = \frac{2018x^{2019} - 2019x^{2018} + 1}{(x - 1)^2}.$$

$$\text{Do đó } z = 1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + \dots + 2018i^{2017} = \frac{2018i^{2019} - 2019i^{2018} + 1}{(x - 1)^2} = 1009 + 1010i.$$

Vậy $b - a = 1$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 2. Cho z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn điều kiện $|z - 5 - 3i| = 5$ đồng thời $|z_1 - z_2| = 8$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = z_1 + z_2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có phương trình

A. $(x - 10)^2 + (y - 6)^2 = 16$.

B. $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 9$.

C. $(x - 10)^2 + (y - 6)^2 = 36$.

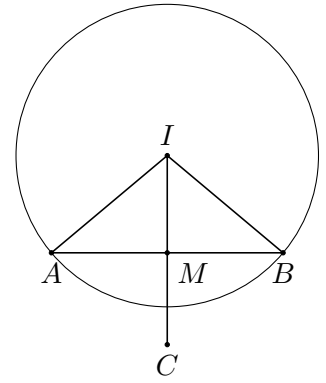
D. $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Thay vào $|z - 5 - 3i| = 5$ ta được

$$|x + yi - 5 - 3i| = 5 \Leftrightarrow |(x - 5) + (y - 3)i| = 5 \Leftrightarrow (x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 25.$$

Giả sử $z_1 = x_1 + y_1i$ có điểm biểu diễn là A và $z_2 = x_2 + y_2i$ có điểm biểu diễn là B suy ra A và B thuộc đường tròn (C) tâm $I(5; 3)$ bán kính $R = 5$.



Mà

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2| = 8 &\Leftrightarrow |(x_1 + y_1i) - (x_2 + y_2i)| = 8 \\ &\Leftrightarrow |(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i| = 8 \Leftrightarrow \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 8 \\ &\Leftrightarrow AB = 8. \end{aligned}$$

Gọi M là trung điểm của AB và C là điểm đối xứng của I qua M .

Vì $IACB$ là hình bình hành nên $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{IC} \Leftrightarrow |\vec{IA} + \vec{IB}| = |\vec{IC}| = IC$.

$$\begin{cases} \vec{IA} = (x_1 - 5; y_1 - 3) \\ \vec{IB} = (x_2 - 5; y_2 - 3) \end{cases} \Rightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = (x_1 + x_2 - 10; y_1 + y_2 - 6).$$

$$\text{Do đó } |\vec{IA} + \vec{IB}| = \sqrt{(x_1 + x_2 - 10)^2 + (y_1 + y_2 - 6)^2},$$

$$IC = 2IM = 2\sqrt{IA^2 - AM^2} = 2\sqrt{5^2 - 4^2} = 6.$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{(x_1 + x_2 - 10)^2 + (y_1 + y_2 - 6)^2} = 6 \Leftrightarrow (x_1 + x_2 - 10)^2 + (y_1 + y_2 - 6)^2 = 36.$$

Vậy điểm biểu diễn số phức $w = z_1 + z_2$ thuộc đường tròn $(x - 10)^2 + (y - 6)^2 = 36$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 3. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z - 4 - i) + 2i = (5 - i)z$?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Lời giải.

Ta có

$$|z|(z - 4 - i) + 2i = (5 - i)z \Leftrightarrow z(|z| - 5 + i) = 4|z| + (|z| - 2)i.$$

Lấy môđun 2 vế ta được

$$|z|\sqrt{(|z| - 5)^2 + 1} = \sqrt{(4|z|)^2 + (|z| - 2)^2}.$$

Đặt $t = |z|$, $t \geq 0$ ta được

$$t\sqrt{(t - 5)^2 + 1} = \sqrt{(4t)^2 + (t - 2)^2} \Leftrightarrow (t - 1)(t^3 - 9t^2 + 4) = 0.$$

Phương trình có 3 nghiệm phân biệt $t \geq 0$ vậy có 3 số phức z thỏa mãn.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 4. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z - 5 - i) + 2i = (6 - i)z$?

A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Lời giải.

$$\text{Ta có } |z|(z - 5 - i) + 2i = (6 - i)z \Leftrightarrow (|z| - 6 + i)z = 5|z| + (|z| - 2)i \quad (1).$$

$$\text{Lấy môđun hai vế của (1) ta có } \sqrt{(|z| - 6)^2 + 1} \cdot |z| = \sqrt{25|z|^2 + (|z| - 2)^2}.$$

Bình phương hai vế và rút gọn ta được

$$\begin{aligned} |z|^4 - 12|z|^3 + 11|z|^2 + 4|z| - 4 &= 0 \Leftrightarrow (|z| - 1)(|z|^3 - 11|z|^2 + 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ |z|^3 - 11|z|^2 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ |z| \approx 10,967 \\ |z| \approx 0,62 \\ |z| \approx -0,587. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Mà } |z|(z - 5 - i) + 2i = (6 - i)z \Leftrightarrow z = \frac{(5 + i)|z| + 2i}{|z| - 6 + i}.$$

Do $|z| \geq 0$ nên ta có ba số phức thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 5. Cho số phức $z = \left(\frac{2+6i}{3-i}\right)^m$ (m nguyên dương). Có bao nhiêu giá trị $m \in [1; 50]$ để z là số thuần ảo?

A. 25.

B. 24.

C. 26.

D. 50.

Lời giải.

$$\frac{2+6i}{3-i} = \frac{(2+6i)(3+i)}{10} = 2i, (2i)^m \text{ là số thuần ảo khi } m \text{ là số lẻ.}$$

Số số nguyên dương lẻ $\in [1; 50]$ là 25.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 6. Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 + 2z + 2| = |z + 1 - i|$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$.

A. $\sqrt{2} + 1$.

B. 2.

C. $\sqrt{2} + 2$.D. $\sqrt{2} - 1$.

Lời giải.

Ta có $z^2 + 2z + 2 = (z+1)^2 + 1 = (z+1)^2 - i^2 = (z+1+i)(z+1-i)$. Do đó

$$\begin{aligned} |z^2 + 2z + 2| = |z + 1 - i| &\Leftrightarrow \left| \frac{z^2 + 2z + 2}{z + 1 - i} \right| = 1 \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{(z+1+i)(z+1-i)}{z+1-i} \right| = 1 \\ &\Leftrightarrow |z+1+i| = 1. \end{aligned}$$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(-1; -1)$, bán kính $r = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của $|z|$ là $OI + r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} + 1 = \sqrt{2} + 1$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 7. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z - 3i| = 5$ và $\frac{z}{z-4}$ là số thuần ảo?

A. Vô số.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải.

Điều kiện xác định $z \neq 4$. Đặt $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Theo giả thiết ta có

$$|z - 3i| = 5 \Rightarrow |a + (b-3)i| = 5 \Leftrightarrow a^2 + (b-3)^2 = 25.$$

$$\text{Lại có: } \frac{z}{z-4} = \frac{a+bi}{(a-4)+bi} = \frac{(a+bi)(a-4-bi)}{(a-4)^2+b^2} = \frac{a^2-4a+b^2}{(a-4)^2+b^2} + \frac{-4b}{(a-4)^2+b^2}i.$$

Theo giả thiết, suy ra $a^2 - 4a + b^2 = 0$.

Ta có hệ

$$\begin{cases} a^2 + (b-3)^2 = 25 \\ a^2 - 4a + b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 + \frac{3}{2}b \\ 13b^2 + 24b = 0 \end{cases}$$

Giải hệ ta được $a = 4, b = 0$ và $a = \frac{16}{13}, b = -\frac{24}{13}$. Vì $z \neq 4$ là số thuần ảo nên $a = \frac{16}{13}; b = -\frac{24}{13}$.

$$\text{Vậy } z = \frac{16}{13} - \frac{24}{13}i.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 8. Cho z và w là hai số phức liên hợp thỏa mãn $\frac{z}{w^2}$ là số thực và $|z - w| = 2\sqrt{3}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $3 < |z| < 4$.B. $|z| < 1$.C. $1 < |z| < 3$.D. $|z| > 4$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $z = \bar{w}, w = \bar{z}, |z| = |w|$.

$$\text{Từ } |z - w| = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow (z - w)(\bar{z} - \bar{w}) = 12 \Leftrightarrow |z|^2 + |w|^2 - z\bar{w} - \bar{z}w = 12 \Leftrightarrow 2|z|^2 - z^2 - w^2 = 12 \quad (*).$$

Do $\frac{z}{w^2}$ là số thực nên $\frac{z}{w^2} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}^2} = \frac{\bar{z}}{w^2}$. Từ đó suy ra $\frac{z}{w^2} = \frac{w}{z^2}$ hay

$$z^3 = w^3 \Leftrightarrow (z - w)(z^2 + zw + w^2) = 0.$$

Vậy $z^2 + w^2 = -zw = -|z|^2$. Thay vào (*) ta được $|z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 9. Cho z và w là hai số phức liên hợp thỏa mãn $\frac{z}{w^2}$ là số thực và $|z - w| = 2\sqrt{3}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $|z| < 1$.

B. $3 < |z| < 4$.

C. $|z| > 4$.

D. $1 < |z| < 3$.

Lời giải.Từ giả thiết ta có $z = \bar{w}$, $\bar{z} = w$ và $|z| = |w|$.

$$\text{Từ } |z - w| = 2 \Leftrightarrow (z - w)(\bar{z} - \bar{w}) = 4 \Leftrightarrow |z|^2 + |w|^2 - z\bar{w} - \bar{z}w = 4 \Leftrightarrow 2|z|^2 - z^2 - \bar{z}^2 = 4 \quad (*).$$

Do $\frac{z}{w^2}$ là số thực nên $\frac{z}{w^2} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}^2} = \frac{\bar{z}}{w^2}$. Từ đó suy ra $\frac{z}{w^2} = \frac{w}{z^2}$, hay

$$z^3 = w^3 \Leftrightarrow (z - w)(z^2 - zw + w^2) = 0.$$

Vậy $z^2 + w^2 = zw = |z|^2$. Thay vào (*) ta có

$$|z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2.$$

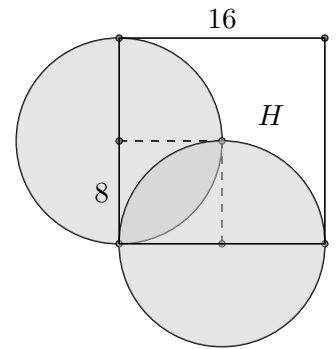
Chọn đáp án **D** □**Câu 10.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi (H) là phần mặt phẳng chứa các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $\frac{z}{16}$ và $\frac{16}{\bar{z}}$ có phần thực và phần ảo đều thuộc đoạn $[0; 1]$. Tính diện tích S của (H) .

A. $S = 256$.

B. $S = 64\pi$.

C. $S = 16(4 - \pi)$.

D. $S = 32(6 - \pi)$.

Lời giải.Giả sử số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.Vì $\frac{z}{16}$ có phần thực và phần ảo thuộc $[0; 1]$ nên $0 \leq a; b \leq 16$.Vì $\frac{16}{\bar{z}}$ có phần thực và phần ảo thuộc $[0; 1]$ nên $0 \leq \frac{16a}{a^2 + b^2}; \frac{16b}{a^2 + b^2} \leq 1$.Từ đây ta rút ra hệ thức: $\begin{cases} 16a \leq a^2 + b^2 \\ 16b \leq a^2 + b^2 \end{cases}$ hay $\begin{cases} (a - 4)^2 + b^2 \geq 0 \\ a^2 + (b - 4)^2 \geq 0 \end{cases}$.Suy ra, miền (H) , miền biểu diễn số phức z là miền mà sau khi lấy hình vuông bỏ đi hai nửa hình tròn như hình vẽ bên.

$$\text{Ta có } S_H = 16 \cdot 16 - 8 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 64\pi = 192 - 32\pi = 32(6 - \pi).$$

Chọn đáp án **D** □**Câu 11.** Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, a > 0$) thỏa $z\bar{z} - 12|z| + (z - \bar{z}) = 13 - 10i$. Tính $S = a + b$.

A. $S = -17$.

B. $S = 5$.

C. $S = 7$.

D. $S = 17$.

Lời giải.Từ $z\bar{z} - 12|z| + (z - \bar{z}) = 13 - 10i$ lấy liên hợp hai vế ta được $z\bar{z} - 12|z| + (\bar{z} - z) = 13 + 10i$ (*).

$$\text{Khi đó } 2|z|^2 - 24|z| - 26 = 0 \Rightarrow |z| = 13.$$

Từ (*) ta có $z - \bar{z} = -10i \Rightarrow b = -5 \Rightarrow a = 12 \Rightarrow S = 7$.Chọn đáp án **C** □**Câu 12.** Tìm phần ảo của số phức z biết z thỏa mãn $|z - 2i| = |\bar{z} + 2 + 4i|$ và $\frac{z - i}{\bar{z} + i}$ là số thuần ảo.

A. $\frac{5}{12}$.

B. $\frac{5}{2}$.

C. $-\frac{3}{17}$.

D. $-\frac{3}{2}$.

Lời giải.Giả sử $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } |z - 2i| = |\bar{z} + 2 + 4i| \Leftrightarrow a^2 + (b - 2)^2 = (a + 2)^2 + (4 - b)^2 \Leftrightarrow b - a = 4 \Leftrightarrow b = a + 4.$$

$$\text{Đồng thời } \frac{z - i}{\bar{z} + i} = \frac{a + (b - 1)i}{a + (1 - b)i} = \frac{[a + (b - 1)i]^2}{a^2 + (b - 1)^2} = \frac{a^2 - (b - 1)^2 + 2a(b - 1)i}{a^2 + (b - 1)^2}$$

Khi đó số phức $\frac{z - i}{\bar{z} + i}$ là số thuần ảo khi $a^2 - (b - 1)^2 = 0$, thay $b = a + 4$ vào ta được

$$a^2 - (a + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{2} \Rightarrow b = \frac{5}{2}.$$

Chọn đáp án **B** □**Câu 13.** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + 2|z - \bar{z}| = 8$ và $|z| = 2$?

A. 2.

B. 4.

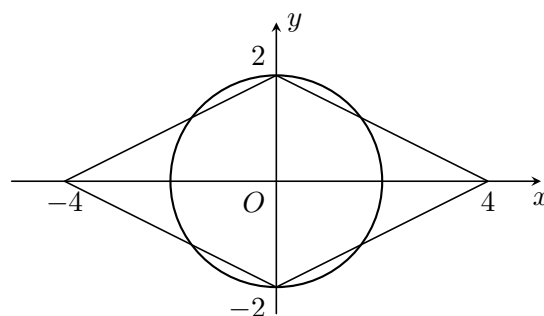
C. 6.

D. 8.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$, ta được

$$\begin{aligned} & \begin{cases} |x| + 2|y| = 4 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = 4 - 2|y| \\ (4 - 2|y|)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} |x| = 4 - 2|y| \\ 5|y|^2 - 16|y| + 12 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} |x| = 4 - 2|y| \\ |y| = 2 \vee |y| = \frac{6}{5} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} |x| = 0 \\ |y| = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} |x| = \frac{8}{5} \\ |y| = \frac{6}{5} \end{cases}. \end{aligned}$$



Vậy có 6 số phức thỏa mãn.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 14. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - 2| = 6 - |z + 2|$ là elip có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Tổng $a^2 + b^2$ bằng

A. 5.

B. 14.

C. 41.

D. 13.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Điểm $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z .

Đặt $F_1(-2; 0)$ và $F_2(2; 0)$. Ta có $F_1F_2 = 4$ và

$$|z - 2| = 6 - |z + 2| \Leftrightarrow |z - 2| + |z + 2| = 6 \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 6.$$

Như vậy, tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là elip có độ dài trục lớn $2a = 6$, tiêu cự $2c = 4$.

Từ đó suy ra $a = 3$, $c = 2$ nên $b = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$. Vậy $a^2 + b^2 = 9 + 5 = 14$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 15. Cho số phức z . Gọi A, B lần lượt là các điểm trong mặt phẳng Oxy biểu diễn các số phức z và $(1 + i)z$. Biết diện tích $\triangle OAB$ bằng 10, tính $|z|$.

A. $2\sqrt{5}$.

B. 4.

C. $2\sqrt{2}$.

D. 5.

Lời giải.

Phân tích: Đã biết nếu $A(z_1)$, $B(z_2)$ thì $OA = |z_1|$, $OB = |z_2|$ và $AB = |z_2 - z_1|$.

Như vậy tính được độ dài ba cạnh của $\triangle OAB$ theo $|z|$ và biết diện tích $\triangle OAB$.

Từ đó dễ dàng tính được $|z|$.

Ta có $OA = |z|$; $OB = |(1 + i)z| = |1 + i||z| = |z|\sqrt{2}$; $AB = |(1 + i)z - z| = |z|$.

$$\Rightarrow \begin{cases} OA^2 + AB^2 = 2|z|^2 = OB^2 \\ OA = AB \end{cases} \Rightarrow \triangle OAB \text{ vuông cân tại } A$$

$$\Rightarrow 10 = \frac{1}{2}OA \cdot AB \Rightarrow |z|^2 = 20 \Rightarrow |z| = 2\sqrt{5}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 16. Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn phương trình $|z| = 1$ và $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_3}$. Gọi A, B, C là các điểm lần lượt biểu diễn các số phức z_1, z_2, z_3 . Tính số đo góc $\widehat{ACB}$.

A. 45° .

B. 60° .

C. 90° .

D. 120° .

Lời giải.

Vì các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn phương trình $|z| = 1$

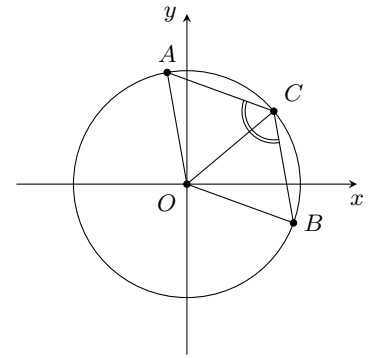
$\Rightarrow A, B, C$ thuộc đường tròn tâm O (O là gốc tọa độ, bán kính $R = 1$).

Ta có: $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_3} \Leftrightarrow \frac{\bar{z}_1}{|z_1|^2} + \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{\bar{z}_3}{|z_3|^2} \Leftrightarrow z_1 + z_2 = z_3 \Rightarrow \vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$.

$\Rightarrow AOBC$ là hình bình hành $\Rightarrow AO = CB, AC = OB$

$\Rightarrow OA = OB = OC = AC = BC$

$\Rightarrow \triangle OAC, \triangle OBC$ là các tam giác đều $\Rightarrow \widehat{ACB} = 120^\circ$.



Chọn đáp án **D**

□

Câu 17. Gọi z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $|z + 2 - 3i| = 5$ và $|z_1 - z_2| = 8$. Tìm mô-đun của số phức $w = z_1 + z_2 + 4 - 6i$?

A. 3.

B. 6.

C. 10.

D. 13.

Lời giải.

Phân tích: Khai thác giả thiết thấy $A(z_1), B(z_2)$ thuộc đường tròn (C) tâm $I(-2+3i)$ bán kính $R = 5$.

Biến đổi kết luận được: $\frac{w}{2} = \left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) - (-2 + 3i)$.

Lý do của việc chia hai vế cho số 2 là nhận thấy $M\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right)$ chính là trung điểm của AB và điểm biểu diễn số phức $-2 + 3i$ là tâm của (C) .

Từ đó $\left|\frac{w}{2}\right| = IM$ và việc tính IM rất đơn giản.

Gọi $A(z_1), B(z_2), I(-2+3i)$ và M là trung điểm của AB .

Ta có M là điểm biểu diễn số phức $\frac{z_1 + z_2}{2}$; $IM =$

$$\left|\frac{z_1 + z_2}{2} - (-2 + 3i)\right|$$

$\Rightarrow |w| = 2IM$.

Mặt khác vì $|z + 2 - 3i| = 5$ và $|z_1 - z_2| = 8$ nên A, B thuộc đường tròn tâm I bán kính $R = 5$ và $AB = 8$.

Vì M là trung điểm $AB \Rightarrow IM \perp AB \Rightarrow IM = \sqrt{R^2 - \frac{AB^2}{4}} = 3 \Rightarrow |w| = 6$.

□

Câu 18. Gọi z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 5$ và $|z_1 - z_2| = 8$. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w = z_1 + z_2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có phương trình nào dưới đây?

A. $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 36$.

B. $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 25$.

C. $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 36$.

D. $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

Lời giải.

Phân tích: Câu này được phát triển từ câu 6.

Gọi $A(z_1), B(z_2), I(1-2i)$ và M là trung điểm của AB .

Ta có M là điểm biểu diễn số phức $\frac{z_1 + z_2}{2}$.

$$IM = \left|\frac{z_1 + z_2}{2} - (1 - 2i)\right|$$

$$\Rightarrow |w - (2 - 4i)| = 2IM$$

Mặt khác vì $|z - (1 - 2i)| = 5$ và $|z_1 - z_2| = 8$ nên A, B thuộc đường tròn tâm I bán kính $R = 5$ và $AB = 8$.

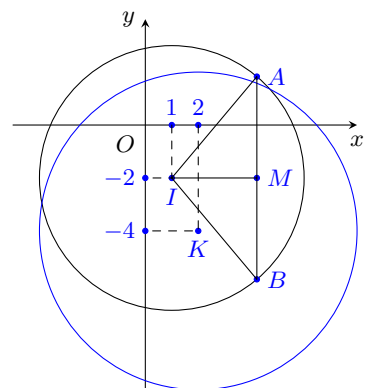
Vì M là trung điểm $AB \Rightarrow IM \perp AB \Rightarrow IM = \sqrt{R^2 - \frac{AB^2}{4}} = 3$

$$\Rightarrow |w - (2 - 4i)| = 6$$

$\Rightarrow N(w)$ thuộc đường tròn tâm $K(2; -4)$ bán kính $R' = 6$.

Chọn đáp án **C**

□



8 ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. B	4. B	5. A	6. A	7. C	8. C	9. D	10. D
------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------

- | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 11. C | 12. B | 13. C | 14. B | 15. A | 16. D | 18. C |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|