

**ĐỀ THI CHÍNH THỨC**

(Đề gồm có 02 trang)

**MÔN THI: TOÁN**

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

**Câu 1. (2,0 điểm)**

An và Bình cùng sống trong một căn nhà trên con đường dọc bờ biển. An làm việc ở một hòn đảo du lịch cách đường bờ biển 3 km. Hằng ngày, sau giờ làm An di chuyển bằng cáp treo từ đảo về ga cáp treo nằm trên đường bờ biển tại vị trí gần hòn đảo nhất, sau đó đón xe buýt về nhà cách ga cáp treo 14 km. Một ngày, do sự cố cáp treo nên An phải di chuyển bằng thuyền về bờ biển và nhờ Bình từ nhà đến đón tại bến thuyền. Biết rằng, thuyền và Bình xuất phát cùng thời điểm và khi thuyền đưa An về đến bến cũng là lúc Bình vừa đến; tốc độ của thuyền là 15 km/h còn Bình di chuyển với tốc độ 30 km/h; bến thuyền nằm trên đường bờ biển và quãng đường từ nhà An đến bến thuyền ngắn hơn quãng đường đến ga cáp treo.

Giả sử đường bờ biển là một đường thẳng và thuyền di chuyển trên một đường thẳng. Hãy tính khoảng cách giữa ga cáp treo và bến thuyền.

**Câu 2. (2,5 điểm)**

Mỗi tuần, một tổ sản xuất được nhà máy cung cấp tối đa 22 kg nguyên liệu X và 30 kg nguyên liệu Y để sản xuất 10 sản phẩm gồm các loại A, B và C. Biết rằng, để sản xuất một sản phẩm loại A cần 3 kg nguyên liệu X và 1 kg nguyên liệu Y; sản xuất một sản phẩm loại B cần 1 kg nguyên liệu X và 3 kg nguyên liệu Y; sản xuất một sản phẩm loại C cần 2 kg nguyên liệu X và 4 kg nguyên liệu Y. Tiền công sản xuất mỗi sản phẩm loại A, B, C lần lượt là 1,2 triệu đồng, 1,3 triệu đồng và 1,5 triệu đồng. Hỏi trong một tuần, tổ công nhân cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm mỗi loại để số tiền công nhận được là lớn nhất?

**Câu 3. (3,0 điểm)**

Xét một chất điểm chuyển động trên một trục số thẳng đứng, chiều dương hướng lên trên. Giả sử vị trí  $s(t)$  (mét) của chất điểm trên trục số đã chọn tại thời điểm  $t$  (giây) được cho bởi công thức  $s(t) = -t^3 + 9t^2 - 15t + 2$ ,  $t \geq 0$ .

- Hỏi trong khoảng thời gian nào thì chất điểm chuyển động lên trên?
- Trong 6 giây đầu tiên chất điểm di chuyển được quãng đường bao nhiêu mét?

**Câu 4. (3,5 điểm)**

1. Tổ I có 15 học sinh, trong đó có 7 học sinh nam và 8 học sinh nữ. Tổ II có 14 học sinh, trong đó có 5 học sinh nam và 9 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên mỗi tổ 3 học sinh. Tính xác suất để mỗi tổ đều có ít nhất một học sinh nam được chọn.

2. Tô màu tất cả các đỉnh của đa giác lồi  $A_1A_2...A_{10}$  (10 đỉnh) bằng hai màu xanh và đỏ (mỗi đỉnh tô một màu). Hỏi có bao nhiêu cách tô màu sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào của đa giác có cùng màu đỏ?

**Câu 5. (2,0 điểm)**

Cho hình lục giác đều  $L_1$  có cạnh bằng 2024. Nối trung điểm các cạnh kề nhau của  $L_1$  để được hình lục giác đều  $L_2$ . Từ hình lục giác đều  $L_2$  tiếp tục làm như trên ta được hình lục giác đều  $L_3$ . Lặp lại cách làm này ta thu được dãy vô hạn các hình lục giác đều  $L_1, L_2, L_3, \dots, L_n, \dots$ . Gọi  $S_i$  là diện tích hình lục giác đều  $L_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ). Tính tổng  $T = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n + \dots$

**Câu 6. (2,0 điểm)**

Cho tam giác  $ABC$  có cạnh  $BC = a$ ,  $AB = c$  thỏa mãn  $\sqrt{2a-c} \cdot \cos \frac{B}{2} = \sqrt{2a+c} \cdot \sin \frac{B}{2}$ , với  $2a > c$ . Chứng minh tam giác  $ABC$  cân.

**Câu 7. (4,0 điểm)**

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật,  $SA \perp (ABCD)$ . Biết  $AB = a$ ,  $AD = a\sqrt{2}$  và khoảng cách từ  $A$  đến mặt phẳng  $(SBC)$  bằng  $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ .

- Tính thể tích khối chóp  $S.ABCD$  theo  $a$ .
- Tính cosin của góc phẳng nhị diện  $[B, SC, D]$ .

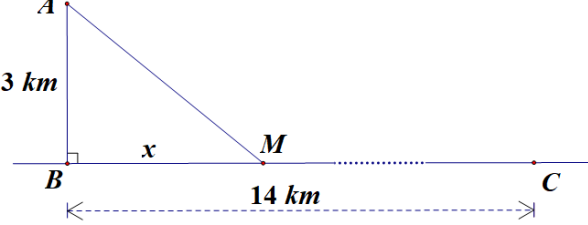
**Câu 8. (1,0 điểm)**

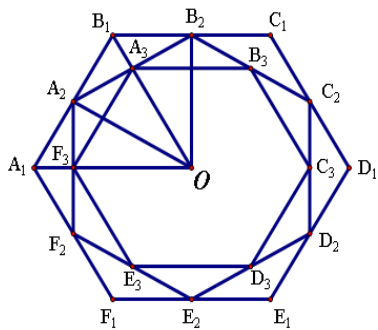
Với  $(x; y)$  là các cặp số thỏa mãn bất phương trình  $\frac{\ln(2x+y)}{\ln(x^2+2y^2)} \geq 1$ , tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $T = 2x + y$ .

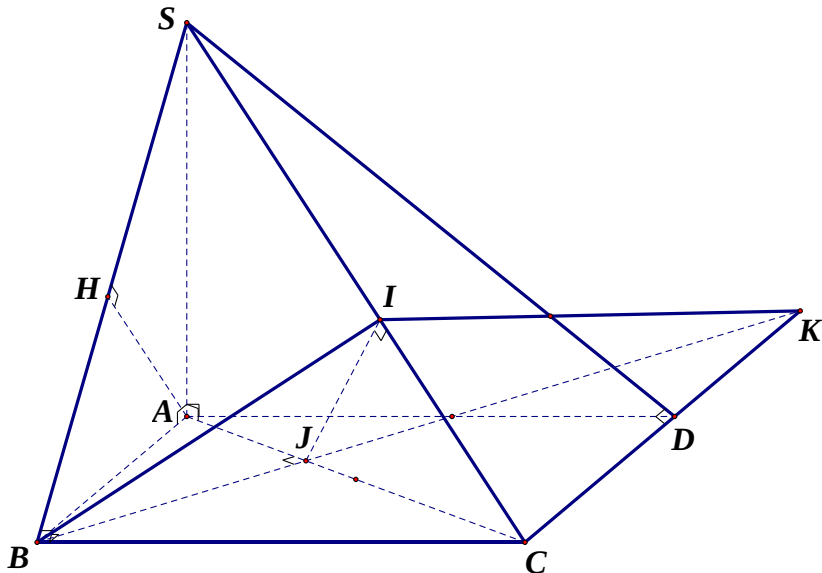
-----**HẾT**-----

Họ và tên thí sinh: ..... Số báo danh: .....

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHÍNH THỨC  
MÔN THI: TOÁN  
(Hướng dẫn chấm có 04 trang)

| Câu             | Ý | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                           | Điểm                |
|-----------------|---|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| 1<br>(2,0 điểm) |   | <p>Kí hiệu A là hòn đảo, B là ga cáp treo, C là nhà An và M là bến thuyền (như hình vẽ).<br/>Đặt <math>BM = x</math> (km), (<math>0 &lt; x &lt; 14</math>).</p>  | 0,5                 |
|                 |   | Thời gian di chuyển của Bình và thuyền lần lượt là: $\frac{14-x}{30}$ (giờ) và $\frac{\sqrt{x^2+9}}{15}$ (giờ)                                                                                                                                     | 0,5                 |
|                 |   | Từ giả thiết, ta có PT: $\frac{\sqrt{x^2+9}}{15} = \frac{14-x}{30} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+9} = 14-x$                                                                                                                                           | 0,5                 |
|                 |   | <p>Ta được PT: <math>3x^2 + 28x - 160 = 0 \Leftrightarrow x = 4</math> (thỏa mãn) hoặc <math>x = -\frac{40}{3}</math> (loại)<br/>           Vậy khoảng cách giữa bến thuyền và ga cáp treo bằng 4 km.</p>                                          | 0,5                 |
| 2<br>(2,5 điểm) |   | Gọi $x, y$ lần lượt là số sản phẩm loại A, B sản xuất mỗi tuần, thì số sản phẩm loại C sản xuất mỗi tuần là $10 - x - y$ . Khi đó: $0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 10, 0 \leq x + y \leq 10$                                                      | 0,25                |
|                 |   | Số lượng nguyên liệu X cần sử dụng: $3x + y + 2(10 - x - y) = x - y + 20$ (kg)                                                                                                                                                                     | 0,25                |
|                 |   | Số lượng nguyên liệu Y cần sử dụng: $x + 3y + 4(10 - x - y) = -3x - y + 40$ (kg)                                                                                                                                                                   |                     |
|                 |   | Từ giả thiết bài toán ta có: $x - y + 20 \leq 22 \Leftrightarrow x - y \leq 2$<br>$-3x - y + 40 \leq 30 \Leftrightarrow 3x + y \geq 10$                                                                                                            | 0,25                |
|                 |   | Từ đó ta thu được hệ bất phương trình: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 10 \\ 0 \leq x + y \leq 10 \quad (*) \\ x - y \leq 2 \\ 3x + y \geq 10 \end{cases}$                                                                        | 0,5                 |
|                 |   | Tiền công nhận được hàng tuần là:<br>$F(x; y) = 1,2x + 1,3y + 1,5(10 - x - y) = 15 - 0,3x - 0,2y$ (triệu đồng)                                                                                                                                     | 0,25                |
|                 |   | Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $F(x; y)$ khi $(x; y)$ thỏa mãn hệ bất phương trình (*)                                                                                                                                                            |                     |
|                 |   | Xác định đúng miền nghiệm của (*) và tìm được tọa độ các đỉnh $M(0;10), N(3;1), P(6;4)$ .                                                                                                                                                          | 0,5                 |
| 3<br>(3,0 điểm) | a | Tính đúng giá trị $F$ tại các đỉnh: $F(0;10) = 13; F(3;1) = 13,9; F(6;4) = 12,4$                                                                                                                                                                   | 0,25                |
|                 |   | So sánh và kết luận đúng số sản phẩm A cần sản xuất là 3, số sản phẩm B là 1 và số sản phẩm C là 6.                                                                                                                                                | 0,25                |
|                 | b | Ta có $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 18t - 15; v(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 5$<br>Chất điểm chuyển động lên trên (theo chiều dương) khi $v > 0$ , khi đó $t \in (1; 5)$<br>Bảng biến thiên:                                                  | 0,75<br>0,75<br>0,5 |

| Câu                                                                                                                                                                        | Ý                                                                                                                                            | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Điểm |           |    |           |           |        |  |   |   |   |   |   |        |   |  |  |  |    |  |  |  |  |    |  |  |           |  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|-----------|----|-----------|-----------|--------|--|---|---|---|---|---|--------|---|--|--|--|----|--|--|--|--|----|--|--|-----------|--|
|                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                              | <table><tr><td><math>t</math></td><td>0</td><td>1</td><td>5</td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>v(t)</math></td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr><tr><td><math>s(t)</math></td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td>27</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>-5</td><td></td><td></td><td><math>-\infty</math></td></tr></table> | $t$  | 0         | 1  | 5         | $+\infty$ | $v(t)$ |  | - | 0 | + | 0 | - | $s(t)$ | 2 |  |  |  | 27 |  |  |  |  | -5 |  |  | $-\infty$ |  |
| $t$                                                                                                                                                                        | 0                                                                                                                                            | 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 5    | $+\infty$ |    |           |           |        |  |   |   |   |   |   |        |   |  |  |  |    |  |  |  |  |    |  |  |           |  |
| $v(t)$                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                              | -                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 0    | +         | 0  | -         |           |        |  |   |   |   |   |   |        |   |  |  |  |    |  |  |  |  |    |  |  |           |  |
| $s(t)$                                                                                                                                                                     | 2                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |      |           | 27 |           |           |        |  |   |   |   |   |   |        |   |  |  |  |    |  |  |  |  |    |  |  |           |  |
|                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | -5   |           |    | $-\infty$ |           |        |  |   |   |   |   |   |        |   |  |  |  |    |  |  |  |  |    |  |  |           |  |
|                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                              | - Từ $t = 0$ đến $t = 1$ , chất điểm chuyển động từ vị trí $s(0) = 2$ đến vị trí $s(1) = -5$ , đi được quãng đường 7 mét                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0,25 |           |    |           |           |        |  |   |   |   |   |   |        |   |  |  |  |    |  |  |  |  |    |  |  |           |  |
|                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                              | - Từ $t = 1$ đến $t = 5$ , chất điểm chuyển động từ vị trí $s(1) = -5$ đến vị trí $s(5) = 27$ , đi được quãng đường 32 mét                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0,25 |           |    |           |           |        |  |   |   |   |   |   |        |   |  |  |  |    |  |  |  |  |    |  |  |           |  |
|                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                              | - Từ $t = 5$ đến $t = 6$ , chất điểm chuyển động từ vị trí $s(5) = 27$ đến vị trí $s(6) = 20$ , đi được quãng đường 7 mét                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0,25 |           |    |           |           |        |  |   |   |   |   |   |        |   |  |  |  |    |  |  |  |  |    |  |  |           |  |
|                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                              | Vậy trong 6 giây đầu tiên, chất điểm di chuyển được quãng đường $7 + 32 + 7 = 46$ mét.                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 0,25 |           |    |           |           |        |  |   |   |   |   |   |        |   |  |  |  |    |  |  |  |  |    |  |  |           |  |
| 4<br>(3,5 điểm)                                                                                                                                                            | 1                                                                                                                                            | Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{15}^3 \cdot C_{14}^3$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 0,25 |           |    |           |           |        |  |   |   |   |   |   |        |   |  |  |  |    |  |  |  |  |    |  |  |           |  |
|                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                              | Gọi tên các biến cố như sau:<br>A: “Có ít nhất một học sinh nam tổ I được chọn”; B: “Có ít nhất một học sinh nam tổ II được chọn”; C: “Mỗi tổ đều có ít nhất một học sinh nam được chọn”<br>Lúc đó: $C = A \cap B$                                                                                                                                                                                 | 0,25 |           |    |           |           |        |  |   |   |   |   |   |        |   |  |  |  |    |  |  |  |  |    |  |  |           |  |
|                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                              | $P(\overline{A}) = \frac{C_8^3}{C_{15}^3} = \frac{8}{65} \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{57}{65}$                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 0,75 |           |    |           |           |        |  |   |   |   |   |   |        |   |  |  |  |    |  |  |  |  |    |  |  |           |  |
|                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                              | $P(\overline{B}) = \frac{C_9^3}{C_{14}^3} = \frac{3}{13} \Rightarrow P(B) = 1 - P(\overline{B}) = \frac{10}{13}$                                                                                                                                                                                                                                                                                   |      |           |    |           |           |        |  |   |   |   |   |   |        |   |  |  |  |    |  |  |  |  |    |  |  |           |  |
|                                                                                                                                                                            | Vì $A, B$ độc lập nên $P(C) = P(A) \cdot P(B) = \frac{57}{65} \cdot \frac{10}{13} = \frac{114}{169}$ .                                       | 0,75                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |      |           |    |           |           |        |  |   |   |   |   |   |        |   |  |  |  |    |  |  |  |  |    |  |  |           |  |
|                                                                                                                                                                            | 2                                                                                                                                            | - Không có đỉnh màu đỏ: 1 cách                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 0,25 |           |    |           |           |        |  |   |   |   |   |   |        |   |  |  |  |    |  |  |  |  |    |  |  |           |  |
|                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                              | - Có nhiều hơn 5 đỉnh màu đỏ: 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |      |           |    |           |           |        |  |   |   |   |   |   |        |   |  |  |  |    |  |  |  |  |    |  |  |           |  |
|                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                              | - Có đúng năm đỉnh màu đỏ: 2 cách                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 0,25 |           |    |           |           |        |  |   |   |   |   |   |        |   |  |  |  |    |  |  |  |  |    |  |  |           |  |
|                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                              | - Có đúng một đỉnh màu đỏ: 10 cách                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |      |           |    |           |           |        |  |   |   |   |   |   |        |   |  |  |  |    |  |  |  |  |    |  |  |           |  |
|                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                              | - Có đúng hai đỉnh màu đỏ: $C_{10}^2 - 10 = 35$ cách.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 0,25 |           |    |           |           |        |  |   |   |   |   |   |        |   |  |  |  |    |  |  |  |  |    |  |  |           |  |
| - Có đúng ba đỉnh màu đỏ: 50 cách ( $C_6^2 + C_7^3 = 50$ )                                                                                                                 |                                                                                                                                              | 0,25                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |      |           |    |           |           |        |  |   |   |   |   |   |        |   |  |  |  |    |  |  |  |  |    |  |  |           |  |
| - Có đúng bốn đỉnh màu đỏ: 25 cách ( $C_5^3 + C_6^4 = 25$ )                                                                                                                | 0,25                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |      |           |    |           |           |        |  |   |   |   |   |   |        |   |  |  |  |    |  |  |  |  |    |  |  |           |  |
| Vậy số cách tô màu thỏa mãn yêu cầu là: 123 cách.                                                                                                                          | 0,25                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |      |           |    |           |           |        |  |   |   |   |   |   |        |   |  |  |  |    |  |  |  |  |    |  |  |           |  |
| 5<br>(2,0 điểm)                                                                                                                                                            | Gọi $O$ là tâm của $L_1$ , đồng thời cũng là tâm các hình lục giác $L_i, i = 1, 2, \dots$                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 0,25 |           |    |           |           |        |  |   |   |   |   |   |        |   |  |  |  |    |  |  |  |  |    |  |  |           |  |
|                                                                                                                                                                            | Ta có $S_1 = 6 \cdot \frac{A_1 B_1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{2024^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 0,25 |           |    |           |           |        |  |   |   |   |   |   |        |   |  |  |  |    |  |  |  |  |    |  |  |           |  |
|                                                                                                                                                                            | $L_2$ có cạnh: $A_2 B_2 = OA_2 = \frac{A_1 B_1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{2024 \cdot \sqrt{3}}{2}$                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 0,5  |           |    |           |           |        |  |   |   |   |   |   |        |   |  |  |  |    |  |  |  |  |    |  |  |           |  |
|                                                                                                                                                                            | Do đó $S_2 = 6 \cdot \frac{A_2 B_2^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{2024^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{4} = S_1 \cdot \frac{3}{4}$ |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |      |           |    |           |           |        |  |   |   |   |   |   |        |   |  |  |  |    |  |  |  |  |    |  |  |           |  |
|                                                                                                                                                                            | $L_3$ có cạnh $A_3 B_3 = OA_3 = \frac{A_2 B_2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot 2024}{4}$                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |      |           |    |           |           |        |  |   |   |   |   |   |        |   |  |  |  |    |  |  |  |  |    |  |  |           |  |
| Do đó $S_3 = 6 \cdot \frac{A_3 B_3^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{2024^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = S_1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$ | 0,25                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |      |           |    |           |           |        |  |   |   |   |   |   |        |   |  |  |  |    |  |  |  |  |    |  |  |           |  |

| Câu                 | Ý | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Điểm        |
|---------------------|---|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
|                     |   | <p>Lập luận tương tự, diện tích của <math>L_n</math> là: <math>S_n = S_1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}</math> với <math>\forall n \in \mathbb{N}^*</math>.</p> <p>Suy ra <math>T = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n + \dots = S_1 + S_1 \cdot \frac{3}{4} + S_1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + S_1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + \dots</math></p> <p>Tổng trên là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu bằng <math>S_1</math> và công bội <math>q = \frac{3}{4}</math>. Do đó, <math>T = \frac{S_1}{1 - \frac{3}{4}} = 4S_1 = 6.2024^2 \cdot \sqrt{3}</math>.</p> | 0,25<br>0,5 |
| 6<br>(2,0 điểm)     |   | Bình phương hai vế ta được: $(2a - c) \cdot \cos^2 \frac{B}{2} = (2a + c) \cdot \sin^2 \frac{B}{2}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 0,25        |
|                     |   | $\Leftrightarrow (2a - c) \cdot (1 + \cos B) = (2a + c) \cdot (1 - \cos B) \Leftrightarrow 2a \cdot \cos B = c$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0,75        |
|                     |   | $\Leftrightarrow 2a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = c$ (với $AC = b$ )                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 0,5         |
|                     |   | $\Leftrightarrow a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 0,25        |
|                     |   | Vậy tam giác $ABC$ cân tại $C$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0,25        |
| Câu 7<br>(4,0 điểm) |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |             |
|                     | a | Do $BC \perp AB, BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 0,5         |
|                     |   | Dựng $AH \perp SB$ tại $H$ . Ta có $AH \perp BC$ suy ra $AH \perp (SBC)$ , do đó $AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 0,5         |
|                     |   | Trong tam giác vuông $SAB$ ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{SA^2}$ , suy ra $SA = a\sqrt{2}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0,5         |
|                     |   | Thể tích khối chóp: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{2a^3}{3}$ (đvtt).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 0,5         |
|                     | b | <p>Trên mặt phẳng đáy, qua <math>B</math> dựng đường thẳng vuông góc với <math>AC</math> tại <math>J</math>, cắt <math>CD</math> tại <math>K</math>. Gọi <math>I</math> là hình chiếu của <math>J</math> trên <math>SC</math>.</p> <p>Do <math>BK \perp AC, BK \perp SA</math> nên <math>BK \perp SC</math>. Mặt khác, <math>SC \perp IJ</math> suy ra <math>SC \perp (BIK)</math> tại <math>I</math>. Từ đó ta có <math>[B, SC, D] = BIK</math></p>                                                                                                                                                     | 0,75        |
|                     |   | Ta có $SB = a\sqrt{3}, SC = a\sqrt{5}, SD = 2a$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0,25        |

| Câu                 | Ý | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Điểm |
|---------------------|---|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|                     |   | <p>Trong tam giác vuông <math>SBC</math>: <math>\frac{1}{BI^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{BC^2} \Rightarrow BI = \frac{a\sqrt{30}}{5}</math></p> <p>Trong tam giác vuông <math>IBC</math>: <math>IC = \sqrt{BC^2 - BI^2} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |      |
|                     |   | <p>Hai tam giác vuông <math>SDC</math> và <math>KIC</math> đồng dạng, suy ra: <math>KC = \frac{SC.IC}{DC} = 2a</math>,</p> <p><math>KI = \frac{SD.IC}{DC} = \frac{4a\sqrt{5}}{5}</math></p> <p>Trong tam giác vuông <math>BCK</math>: <math>BK = \sqrt{BC^2 + KC^2} = a\sqrt{6}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0,5  |
|                     |   | Từ đó, theo định lí côsin ta có: $\cos BIK = \frac{IB^2 + IK^2 - BK^2}{2IB.IK} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 0,5  |
| Câu 8<br>(1,0 điểm) |   | <p><i>Trường hợp 1:</i> <math>x^2 + 2y^2 &gt; 1</math></p> <p>Bất phương trình trở thành: <math>2x + y \geq x^2 + 2y^2</math></p> <p>Đặt <math>\sqrt{2}y = z</math>, ta được: <math>x^2 + z^2 &gt; 1</math></p> <p><math>2x + \frac{z}{\sqrt{2}} \geq x^2 + z^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(z - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \leq \frac{9}{8}</math></p> <p>Tập hợp các điểm <math>M(x; z)</math> là miền <math>(H)</math> bao gồm miền ngoài của hình tròn <math>(C_1): x^2 + z^2 = 1</math> và miền trong của hình tròn <math>(C_2): (x-1)^2 + \left(z - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{9}{8}</math></p> | 0,25 |
|                     |   | <p>Hệ <math>\begin{cases} T = 2x + \frac{z}{\sqrt{2}} \\ (x-1)^2 + \left(z - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \leq \frac{9}{8} \\ x^2 + z^2 &gt; 1 \end{cases}</math> có nghiệm khi đường thẳng <math>\Delta: 2x + \frac{z}{\sqrt{2}} - T = 0</math> có điểm chung với miền <math>(H)</math>. Để <math>T</math> đạt giá trị lớn nhất thì đường thẳng <math>\Delta: 2x + \frac{z}{\sqrt{2}} - T = 0</math> tiếp xúc với đường tròn <math>(C_2)</math> (suy ra từ hình vẽ)</p>                                                                                                                                             | 0,25 |
|                     |   | <p>hay <math>d(I; \Delta) = \frac{3}{2\sqrt{2}}</math> với <math>I\left(1; \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)</math> là tâm của đường tròn <math>(C_2)</math></p> <p>Ta tính được: <math>\left T - \frac{9}{4}\right  = \frac{9}{4} \Leftrightarrow T = \frac{9}{2}</math> hoặc <math>T = 0</math> (loại)</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 0,25 |
|                     |   | <p><i>Trường hợp 2:</i> <math>0 &lt; x^2 + 2y^2 &lt; 1</math></p> <p>Bất phương trình trở thành: <math>2x + y \leq x^2 + 2y^2 \Rightarrow T = 2x + y &lt; 1 &lt; \frac{9}{2}</math></p> <p>Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức <math>T = 2x + y</math> là <math>\frac{9}{2}</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 0,25 |

----- HẾT -----