

Đề chính thức
(Gồm có 01 trang)

(Thời gian làm bài: 120 phút, không kể giao đề)

Câu 1 (3,0 điểm)

Giải phương trình: $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x + (2 + \sqrt{3}) \sin x - \cos x = 1 + \sqrt{3}$.

Câu 2 (3,0 điểm)

Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 4 = 0$ (x là ẩn và m là tham số). Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho phương trình đã cho có hai nghiệm không âm x_1, x_2 . Tính theo m giá trị của biểu thức $P = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ và tìm giá trị nhỏ nhất của P .

Câu 3 (4,0 điểm) 1. Giải phương trình: $\sqrt{3x+1} + \sqrt{5x+4} = 3x^2 - x + 3$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + x^3y - xy^2 + xy - y = 1 \\ x^4 + y^2 - xy(2x-1) = 1 \end{cases}$$

Câu 4. (3,0 điểm):

Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số mà không có chữ số nào lặp lại đúng 3 lần.

Câu 5 (3,0 điểm):

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(-1;-1)$ và đường tròn (T) có phương trình $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$. Gọi B, C là hai điểm phân biệt thuộc (T). Viết phương trình đường thẳng BC biết rằng $I(1;1)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Câu 6 (4,0 điểm):

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng a . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AD, BB', C'D'. Xác định thiết diện cắt bởi mặt phẳng (MNP) với hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, tính theo a diện tích thiết diện đó.

-----Hết-----

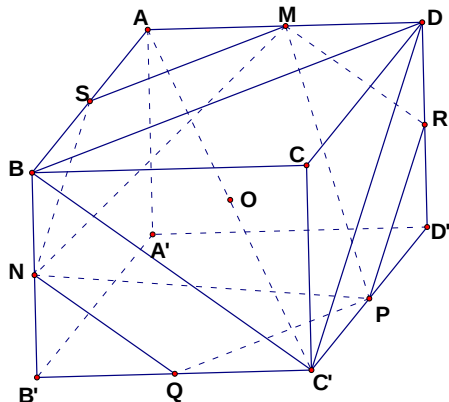
Họ và tên thí sinhSBD:

(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm, TS không dùng MTBT)

(Thời gian làm bài: 120 phút, không kể giao đề)

Câu	Nội dung	Điểm
1	Ta có $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x + (2 + \sqrt{3}) \sin x - \cos x = 1 + \sqrt{3}$	
	$\Leftrightarrow 2 \sin x \cdot \cos x - \cos x + \sqrt{3}(1 - 2 \sin^2 x) + (2 + \sqrt{3}) \sin x - \sqrt{3} - 1 = 0$	
	$\Leftrightarrow \cos x(2 \sin x - 1) - (2 \sin x - 1)(\sqrt{3} \sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow (2 \sin x - 1)(\cos x - \sqrt{3} \sin x + 1) = 0$	
	$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \vee \sqrt{3} \sin x - \cos x = 1$	1,0
	+) $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$	1,0
	+) $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$	1,0
	Vậy phương trình đã cho có các họ nghiệm là $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$	
2	*) Phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 4 = 0$ (1) có hai nghiệm không âm	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m^2 + 2m - 4 \geq 0 \\ S = 2m \geq 0 \\ P = m^2 - 2m + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 2.$	1,5
	*) Theo định lý Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = 2m; x_1 x_2 = m^2 - 2m + 4$. Do đó $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2} = \sqrt{x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2}} = \sqrt{2m + 2\sqrt{(m-1)^2 + 3}}$ Do $m \geq 2 \Rightarrow \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \geq \sqrt{8}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m = 2$.	1,5
3.1	Giải phương trình: $\sqrt{3x+1} + \sqrt{5x+4} = 3x^2 - x + 3$ (1)	
	*) Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{3}$	
	Khi đó (1) $\Leftrightarrow (\sqrt{3x+1} - 1) + (\sqrt{5x+4} - 2) = 3x^2 - x$	
	$\Leftrightarrow \frac{3x}{\sqrt{3x+1}+1} + \frac{5x}{\sqrt{5x+4}+2} = x(3x-1)$	0,5
		0,5

	$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0(TM) \\ \frac{3}{\sqrt{3x+1}+1} + \frac{5}{\sqrt{5x+4}+2} = 3x-1 (*) \end{cases}$ + Với $x=1$: $VT(*)=2=VP(*)$ nên $x=1$ là một nghiệm của $(*)$ + Nếu $x>1$ thì $VT(*)<2<VP(*)$, + Nếu $x<1$ thì $VT(*)>2>VP(*)$. Vậy (1) có 2 nghiệm $x=0$; $x=1$	0,5 0,5
3.2	2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + x^3y - xy^2 + xy - y = 1 \\ x^4 + y^2 - xy(2x-1) = 1 \end{cases} \quad (2)$ *) Ta có $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - y) + xy(x^2 - y) + xy = 1 \\ (x^2 - y)^2 + xy = 1 \end{cases}$ Đặt $\begin{cases} a = x^2 - y \\ b = xy \end{cases}$. Hệ trở thành: $\begin{cases} a + ab + b = 1 \\ a^2 + b = 1 \end{cases} \quad (3)$ *) Hệ $(3) \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + a^2 - 2a = 0 \\ b = 1 - a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a^2 + a - 2) = 0 \\ b = 1 - a^2 \end{cases}$ Từ đó tìm ra $(a; b) \in \{(0; 1); (1; 0); (-2; -3)\}$ *) Với $(a; b) = (0; 1)$ ta có hệ $\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.$ Với $(a; b) = (1; 0)$ ta có hệ $\begin{cases} x^2 - y = 1 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = (0; -1); (1; 0); (-1; 0).$ *) Với $(a; b) = (-2; -3)$ ta có hệ $\begin{cases} x^2 - y = -2 \\ xy = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{x} \\ x^3 + 2x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{x} \\ (x+1)(x^2 - x + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1; y = 3.$ *) Kết luận: Hệ có 5 nghiệm $(x; y) \in \{(1; 1); (0; -1); (1; 0); (-1; 0); (-1; 3)\}.$	0,5 0,5 0,5 0,5 0,5
4	*) Có $9.10^3 = 9000$ số tự nhiên có 4 chữ số. *) Khi số 1 lặp lại 3 lần, có $C_4^3 = 4$ cách chọn vị trí cho số 1 và 9 cách chọn chữ số còn lại (bao gồm cả trường hợp số 0 đứng đầu) suy ra có $9.C_4^3 - 1 = 35$ số mà số 1 lặp lại đúng 3 lần (không kể số 0 đứng đầu). *) Tương tự với các chữ số 2, 3, ..., 8, 9 mỗi số cũng lặp lại đúng 3 lần Do đó có $35.9 = 315$ số. *) Khi số 0 lặp lại 3 lần, có 1 cách chọn vị trí cho 3 số 0 và 9 cách chọn cho chữ số còn lại (là số đứng đầu). Theo quy tắc cộng, có $315 + 9 = 324$ số mà có một chữ số lặp lại đúng 3 lần *) Vậy, số các số thỏa mãn yêu cầu là $9000 - 324 = 8676$ số.	0,5 0,5 0,5 0,5 0,5
5	*) Đường tròn (T) có tâm $K(3; 2)$, bán kính $R = 5$ *) Đường thẳng AI đi qua hai điểm A và I có phương trình $x - y = 0$, AI cắt (T) tại hai điểm $A(-1; -1)$ và $A'(6; 6)$	0,5 0,5

	Ta có $A'B = A'C$ (1) và $\begin{cases} \widehat{ABI} = \widehat{IBC} \\ \widehat{A'BC} = \widehat{BAI} \end{cases} \Rightarrow \widehat{A'IB} = \widehat{ABI} + \widehat{BAI} = \widehat{IBC} + \widehat{A'BC}$ $\Rightarrow \Delta A'BI$ là tam giác cân tại $A' \Rightarrow A'B = A'I$ (2) *) Từ (1), (2) suy ra $A'B = A'I = A'C$ hay các điểm B, I, C thuộc đường tròn tâm A', bán kính $A'I$ có phương trình là $(x-6)^2 + (y-6)^2 = 50$ *) Tọa độ B, C thỏa mãn hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y = 12 \\ (x-6)^2 + (y-6)^2 = 50 \end{cases}$ (3) Giải hệ (3) ta tìm được $B(7;-1)$, $C(-1;5)$ (hoặc $B(-1;5)$, $C(7;-1)$) *) Do đó phương trình đường thẳng BC là $3x + 4y - 17 = 0$	0,5 0,5 0,5 0,5
6	 *) Gọi S là trung điểm của AB, khi đó $MS \parallel BD \Rightarrow MS \parallel mp(BC'D)$ và $NS \parallel C'D \Rightarrow NS \parallel mp(BC'D)$ suy ra $(MNS) \parallel (BC'D)$. *) Do $(MNS) \parallel BC'$ nên (MNS) cắt $(BCC'B')$ theo giao tuyến qua N song song với BC' cắt $B'C'$ tại Q. *) Do $(MNS) \parallel BD$ và $B'D'$ nên $mp(MNS)$ cắt $mp(A'B'C'D')$ theo giao tuyến qua Q song song với $B'D'$ cắt $D'C'$ tại P', do P' là trung điểm của $C'D'$ nên P' trùng với P. *) Do $(MNS) \parallel C'D$ nên (MNS) cắt $(CDD'C')$ theo giao tuyến qua P song song với $C'D$ cắt DD' tại R. *) Do đó thiết diện cắt bởi (MNP) và hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ theo một lục giác đều $MSNQPR$ cạnh $MR = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và có tâm là O suy ra: $S_{MSNQPR} = 6S_{OMS} = 6 \cdot \frac{1}{2} OM \cdot OS \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}. \text{ Vậy } S_{MSNQPR} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$	1,0 0,5 0,5 0,5 0,5 1,0

Ghi chú:

- 1) Thí sinh làm theo cách khác đáp án mà đúng thì cho điểm theo thành phần đã nêu.
- 2) Câu HHKG thí sinh không vẽ hình hoặc vẽ sai cơ bản thì không chấm điểm