

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề có 01 trang)

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề

Câu I (5,0 điểm).

1. Giải phương trình: $\sin^2 3x \cos 2x + \sin^2 x = 0$.
2. Cho x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 3x + a = 0$, x_3 và x_4 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 12x + b = 0$. Biết rằng x_1, x_2, x_3, x_4 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm a, b .

Câu II (3,0 điểm).

1. Cho k là số tự nhiên thỏa mãn: $5 \leq k \leq 2014$.
Chứng minh rằng: $C_5^0 C_{2014}^k + C_5^1 C_{2014}^{k-1} + \dots + C_5^5 C_{2014}^{k-5} = C_{2019}^k$.
2. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực:
$$m(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}.$$

Câu III (3,0 điểm).

Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = \sin 1$; $u_n = u_{n-1} + \frac{\sin n}{n^2}$, với $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Chứng minh rằng dãy số (u_n) xác định như trên là một dãy số bị chặn.

Câu IV (3,0 điểm). Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABC đều cạnh bằng a và tam giác BCD cân tại D với $DC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

1. Chứng minh rằng: $AD \perp BC$.
2. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD , tính cosin góc giữa hai đường thẳng AG và CD , biết góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) bằng 30° .

Câu V (3,0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với $A(2;1)$, $B(1;-2)$, trọng tâm G của tam giác nằm trên đường thẳng $x + y - 2 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh C biết diện tích tam giác ABC bằng $\frac{27}{2}$.

Câu VI (3,0 điểm). Cho các số dương a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{4}{a^2 + b^2} + 1\right) \left(\frac{4}{b^2 + c^2} + 1\right) \left(\frac{4}{c^2 + a^2} + 1\right) \geq 3(a + b + c)^2.$$

-----HẾT-----

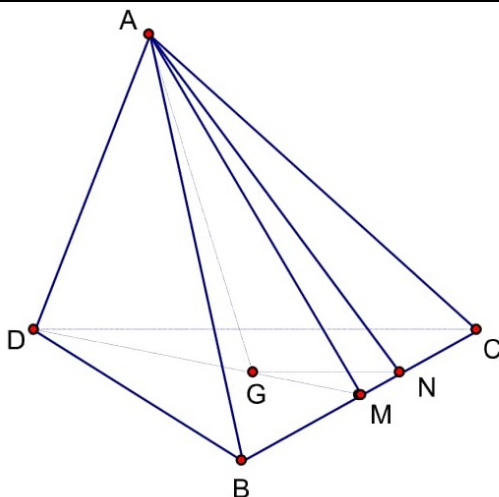
Thí sinh không được sử dụng tài liệu và MTCT.

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

Hướng dẫn chấm – Toán 11

Câu	Nội dung	Điểm
Câu I. (5đ)	Giải phương trình: $\sin^2 3x \cos 2x + \sin^2 x = 0$.	
1. (3đ)	$\sin^2 3x \cos 2x + \sin^2 x = 0 \quad (1)$ Ta có: $\sin 3x = (1 + 2 \cos 2x) \sin x$. $(1) \Leftrightarrow ((1 + 2 \cos 2x)^2 \cos 2x + 1) \sin^2 x = 0$ $\Leftrightarrow (1 + \cos 2x)(1 + 4 \cos^2 2x) \sin^2 x = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$	1.0đ 1.0đ 1.0đ
2. (2đ)	Cho x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 3x + a = 0$, x_3 và x_4 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 12x + b = 0$. Biết rằng x_1, x_2, x_3, x_4 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm a, b . Gọi q là công bội của CSN $\Rightarrow x_2 = x_1 q; x_3 = x_1 q^2; x_4 = x_1 q^3$ Theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = a \\ x_3 + x_4 = 12 \\ x_3 x_4 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(1 + q) = 3 \\ x_1 x_2 = a \\ x_1 q^2(1 + q) = 12 \\ x_3 x_4 = b \end{cases}$ Suy ra $q^2 = 4$ $+q = 2 \Rightarrow x_1 = 1$, giải ra được $a = 2, b = 32$ $+q = -2 \Rightarrow x_1 = -3$, giải ra được $a = -18, b = -288$	 1.0đ 1.0đ
Câu II. (3đ)		
1. (1.5đ)	Cho k là số tự nhiên thỏa mãn: $5 \leq k \leq 2014$ Chứng minh rằng: $C_5^0 C_{2014}^k + C_5^1 C_{2014}^{k-1} + \dots + C_5^5 C_{2014}^{k-5} = C_{2019}^k$ Ta có: $(1+x)^5(1+x)^{2014} = (1+x)^{2019}$ $M = (1+x)^5 = C_5^0 + C_5^1 x + C_5^2 x^2 + C_5^3 x^3 + C_5^4 x^4 + C_5^5 x^5$ $N = (1+x)^{2014} = C_{2014}^0 + C_{2014}^1 x + \dots + C_{2014}^k x^k + \dots + C_{2014}^{2013} x^{2013} + C_{2014}^{2014} x^{2014}$ $P = (1+x)^{2019} = C_{2019}^0 + C_{2019}^1 x + \dots + C_{2019}^k x^k + \dots + C_{2019}^{2018} x^{2018} + C_{2019}^{2019} x^{2019}$ Ta có hệ số của x^k trong P là C_{2019}^k , $P = M.N$ Mà số hạng chứa x^k trong $M.N$ là: $C_5^0 C_{2014}^k x^k + C_5^1 C_{2014}^{k-1} x^{k-1} + C_5^2 C_{2014}^{k-2} x^{k-2} + C_5^3 C_{2014}^{k-3} x^{k-3} + C_5^4 C_{2014}^{k-4} x^{k-4} + C_5^5 C_{2014}^{k-5} x^{k-5}$ Vậy: $C_5^0 C_{2014}^k + C_5^1 C_{2014}^{k-1} + \dots + C_5^5 C_{2014}^{k-5} = C_{2019}^k$	 0.5đ 0.5đ 0.5đ
2. (1.5đ)	Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực: $m(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$	
	ĐK: $-1 \leq x \leq 1$, Đặt $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$, t liên tục trên $[-1; 1]$ và $t \geq 0$ $\Rightarrow t^2 = 2 - 2\sqrt{1-x^4} \leq 2 \Rightarrow t \in [0; \sqrt{2}]$ Pttt: $m(t+2) = -t^2 + t + 2 \Leftrightarrow m = \frac{-t^2 + t + 2}{t+2}$ Xét $f(t) = \frac{-t^2 + t + 2}{t+2}; t \in [0; \sqrt{2}]$, $f(t)$ liên tục trên $[0; \sqrt{2}]$ $f'(t) = \frac{-t^2 - 4t}{(t+2)^2} < 0, \forall t \in (0; \sqrt{2})$	 0.5đ 0.5đ

	$\Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $[0; \sqrt{2}]$ Vậy pt đã cho có nghiệm thực khi $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1 \leq m \leq 1 = f(0)$	0.5đ
Câu III. (3đ)	Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = \sin 1$; $u_n = u_{n-1} + \frac{\sin n}{n^2}$, với mọi $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Chứng minh rằng dãy số (u_n) xác định như trên là một dãy số bị chặn.	
	Ta có: $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2, \forall n \in N^*$, vì $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n.(n-1)} =$ $= 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2$ Bằng qui nạp ta CM được: $u_n = \frac{\sin 1}{1^2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{n^2}$ Suy ra : $-2 < -\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) \leq u_n \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2, \forall n \in N^*$ Vậy dãy số (u_n) xác định như trên là một dãy số bị chặn.	1.0đ 1.0đ 1.0đ
Câu IV. (3đ)	Cho tứ diện ABCD có tam giác ABC đều cạnh bằng a và tam giác BCD cân tại D với $DC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.	
1. (1đ)	Chứng minh rằng: $AD \perp BC$.	
	Gọi M là trung điểm BC, ta có: $\triangle ABC$ đều nên $AM \perp BC$, $\triangle DBC$ cân nên $DM \perp BC \Rightarrow BC \perp (AMD) \Rightarrow BC \perp AD$.	1.0đ
2. (2đ)	Gọi G là trọng tâm tam giác BCD, tính cosin góc giữa hai đường thẳng AG và CD, biết góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) bằng 30° .	
		
	Theo gt ta có góc giữa MA và MD bằng 30° . Kẻ GN//CD, nối AN +TH1: góc DAM bằng 30° , ta có: $MD = a \Rightarrow MG = \frac{a}{3}, \triangle ABC$ đều nên $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Áp dụng định lí cosin cho $\triangle AMG$ ta có $AG = \frac{a\sqrt{13}}{6}, GN = \frac{CD}{3} = \frac{a\sqrt{5}}{6}$. $\triangle ANC$ có $AN = \frac{a\sqrt{7}}{3}$. Trong $\triangle ANG$ có $\cos(\angle AGN) = \frac{-5}{\sqrt{65}}$. Gọi góc $(AG; CD) = \alpha$ thì $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{65}}$ +TH2: Góc AMD bằng 150° . Tính tương tự ta có: thì $\cos \alpha = \frac{13}{7\sqrt{5}}$	0.5đ 0.5đ 0.5đ

		0.5đ
Câu V. (3đ)	Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC, với A(2; 1), B(1;-2), trọng tâm G của tam giác nằm trên đường thẳng $x + y - 2 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh C biết diện tích tam giác ABC bằng $\frac{27}{2}$.	
	Gọi M là trung điểm AB, ta có : $M\left(\frac{3}{2}; \frac{-1}{2}\right)$. Gọi C(a ; b), suy ra $G\left(\frac{a+3}{3}; \frac{b-1}{3}\right) \in d \Rightarrow \frac{a+3}{3} + \frac{b-1}{3} - 2 = 0 \Rightarrow a + b - 4 = 0, (1),$ mặt khác $AB : 3x - y - 5 = 0 \Rightarrow d(C; AB) = \frac{ 3a - b - 5 }{\sqrt{10}},$ Diện tích $S = \frac{1}{2} AB \cdot d(C; AB) = \frac{27}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{10} \frac{ 3a - b - 5 }{\sqrt{10}} = \frac{27}{2} \Rightarrow 3a - b - 5 = 27, (2)$ Từ (1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases} a + b = 4 \\ 3a - b = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = -5 \end{cases} \Rightarrow C(9; -5)$ $\begin{cases} a + b = 4 \\ 3a - b = -22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-9}{2} \\ b = \frac{17}{2} \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{-9}{2}; \frac{17}{2}\right)$	1.0đ 1.0đ 1.0đ
Câu VI. (3đ)	Cho các số dương a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng: $\left(\frac{4}{a^2 + b^2} + 1\right)\left(\frac{4}{b^2 + c^2} + 1\right)\left(\frac{4}{c^2 + a^2} + 1\right) \geq 3(a + b + c)^2$. Đẳng thức xảy ra khi nào? Từ giả thiết ta có $0 < a^2, b^2, c^2 < 3$. Áp dụng BĐT Cauchy ta có : $\frac{4}{3 - a^2} + (3 - a^2) \geq 4 \Rightarrow \frac{4}{3 - a^2} + 1 \geq 2 + a^2.$ Tương tự: $\frac{4}{3 - b^2} + 1 \geq 2 + b^2; \frac{4}{3 - c^2} + 1 \geq 2 + c^2$ Do đó: $\left(\frac{4}{a^2 + b^2} + 1\right)\left(\frac{4}{b^2 + c^2} + 1\right)\left(\frac{4}{c^2 + a^2} + 1\right) \geq (a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2), (1)$ Áp dụng BĐT Bun... ta có: $(a^2 + 2)(b^2 + 2) = (a^2 + 1)(b^2 + 1) + a^2 + b^2 + 3 \geq (a + b)^2 + \frac{1}{2}(a + b)^2 + 3$ $= \frac{3}{2}((a + b)^2 + 2) \Rightarrow (a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq \frac{3}{2}((a + b)^2 + 2)(c^2 + 2)$ $\geq \frac{3}{2}(\sqrt{2}(a + b) + \sqrt{2}c)^2 = 3(a + b + c)^2, (2)$ Từ (1) và (2) ta được BĐT cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$	1.0đ 1.0đ 1.0đ