

CHUYÊN ĐỀ 4

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Nắm vững cách giải phương trình bậc hai với hệ số thực trên tập số phức

❖ Kỹ năng

- + Giải được phương trình bậc hai với hệ số thực trên tập số phức và vận dụng vào giải được một số bài toán liên quan
- + Vận dụng định lý Vi-ét vào giải một số bài toán chứa nhiều biểu thức đối xứng đối với hai nghiệm của phương trình
- + Biết cách giải các phương trình quy về phương trình bậc hai đối với hệ số thực
- + Vận dụng các kiến thức đã học để giải quyết một số bài toán tổng hợp

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Căn bậc hai của một phức

Định nghĩa

Cho số phức w . Mỗi số phức z thỏa mãn $z^2 = w$ được gọi là một căn bậc hai của w

Tìm căn bậc hai của số phức w

- w là số thực.
 - Nếu $w < 0$ thì w có hai căn bậc hai là $i\sqrt{-w}$ và $-i\sqrt{-w}$
 - Nếu $w \geq 0$ thì w có hai căn bậc hai là $\sqrt{w}$ và $-\sqrt{w}$
- $w = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), $b \neq 0$

Nếu $z = x + iy$ là căn bậc hai của w thì $(x + iy)^2 = a + bi$

Do đó ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Mỗi nghiệm của hệ phương trình cho ta một căn bậc hai của w

2. Giải phương trình bậc hai với hệ số thực

Xét phương trình $az^2 + bz + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$)

Ta có $\Delta = b^2 - 4ac$

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm thực $x = -\frac{b}{2a}$
- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm thực phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình có hai nghiệm thực phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}; x_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Hệ thức Vi-ét đối với phương trình bậc hai với hệ số thực

Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm phân

biệt x_1, x_2 (thực hoặc phức) thì

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Nhận xét:

- Số 0 có đúng một căn bậc hai là 0
- Mỗi số phức khác 0 có hai căn bậc hai là hai số đối nhau (khác 0)

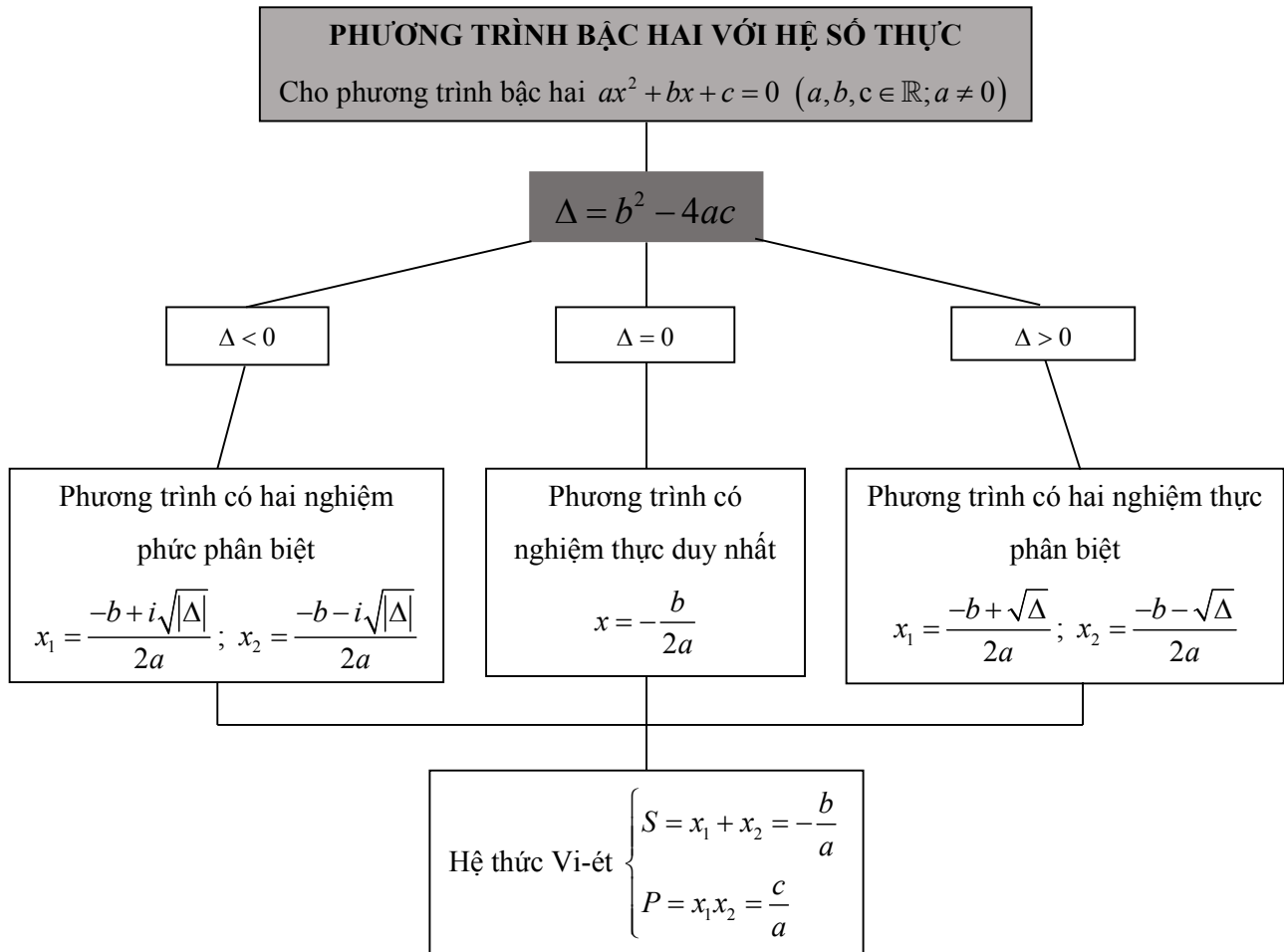
Chú ý:

Mọi phương trình bậc n :

$$A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_{n-1} z + A_n = 0$$

luôn có n nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt) với n nguyên dương.

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Giải phương trình. Tính toán biểu thức nghiệm

Phương pháp giải

Cho phương trình:

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0)$$

- Giải phương trình bậc hai với hệ số thực
- Áp dụng các phép toán trên tập số phức để

biến đổi biểu thức

Ví dụ: Xét phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$

a) Giải phương trình trên tập số phức

b) Tính $|z_1| + |z_2|$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\Delta' = 1 - 5 = -4 = (2i)^2$

Phương trình có hai nghiệm là:

$$z_1 = 2 + 2i; z_2 = 2 - 2i$$

b) Ta có $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

$$\text{Suy ra } |z_1| + |z_2| = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tất cả các nghiệm phức của phương trình $z^2 + 5 = 0$ là

A. ± 5 B. $\pm 5i$ C. $\pm\sqrt{5}i$ D. $\pm\sqrt{5}$ **Hướng dẫn giải**

Ta có phương trình: $z^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -5 \Leftrightarrow z^2 = 5i^2 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{5}i \\ z = -\sqrt{5}i \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phức là $z_1 = \sqrt{5}i$ và $z_2 = -\sqrt{5}i$

Chọn C

Ví dụ 2. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $2z^2 + z + 1 = 0$. Giá trị của biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$ là

A. 2

B. 1

C. 4

D. 3

Hướng dẫn giải

Ta có $\Delta = -7 = (\sqrt{7}i)^2$ nên phương trình có hai nghiệm là:

$$z = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i; \quad z = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i$$

Suy ra $A = |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$

Chọn B

Ví dụ 3. Trong các số sau, số nào là nghiệm của phương trình $z^2 + 1 = z$ ($z \in \mathbb{C}$)?

A. $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ B. $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{1+\sqrt{2}i}{2}$ **Hướng dẫn giải**

Ta có $z^2 + 1 = z$ ($z \in \mathbb{C}$) $\Leftrightarrow z^2 - 2z \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3i^2}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}i}{2} \\ z - \frac{1}{2} = \frac{-\sqrt{3}i}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \\ z = \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \end{cases}$$

Chọn A

Ví dụ 4. Phương trình $z^2 + az + b = 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$) có nghiệm phức là $3 + 4i$. Giá trị của $a + b$ bằng

A. 31

B. 5

C. 19

D. 29

Hướng dẫn giải

Cách 1: Do $z = 3 + 4i$ là nghiệm của phương trình $z^2 + az + b = 0$ nên ta có:

$$(3 + 4i)^2 + a(3 + 4i) + b = 0 \Leftrightarrow (3a + b - 7) + (4a + 24)i = 0$$

Chú ý: Nếu z_0 là nghiệm của phương trình bậc hai với hệ số thực thì $\overline{z_0}$ cũng là

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a+b-7=0 \\ 4a+24=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-6 \\ b=25 \end{cases}$$

nghiệm của phương trình

Do đó $a+b=19$

Cách 2: Vì $z_1 = 3+4i$ là nghiệm của phương trình $z^2 + az + b = 0$ nên $z_2 = 3-4i$

cũng là nghiệm của phương trình đã cho

Áp dụng hệ thức Vi-ét vào phương trình trên ta có $\begin{cases} z_1 + z_2 = -a \\ z_1 \cdot z_2 = b \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3+4i) + (3-4i) = -a \\ (3+4i)(3-4i) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = 25 \end{cases} \Rightarrow a+b=19$$

Chọn C

Ví dụ 5. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 + 6z + 34 = 0$. Giá trị của $|z_0 + 2 - i|$ là

A. $\sqrt{17}$

B. 17

C. $2\sqrt{17}$

D. $\sqrt{37}$

Hướng dẫn giải

Ta có $\Delta' = -25 = (5i)^2$. Phương trình có hai nghiệm là $z = -3 + 5i$; $z = -3 - 5i$

Do đó $z_0 = -3 + 5i \Rightarrow |z_0 + 2 - i| = |-1 + 4i| = \sqrt{17}$

Chọn A

Ví dụ 6. Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$

Tọa độ điểm biểu diễn số phức $\frac{7-4i}{z_1}$ trên mặt phẳng phức là

A. $P(3;2)$

B. $N(1;-2)$

C. $Q(3;-2)$

D. $M(1;2)$

Hướng dẫn giải

Ta có $z^2 - 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 + 2i \\ z = 1 - 2i \end{cases}$

Theo yêu cầu của bài toán ta chọn $z_1 = 1 - 2i$. Khi đó:

$$\frac{7-4i}{z_1} = \frac{7-4i}{1-2i} = \frac{(7-4i)(1+2i)}{1^2+2^2} = 3+2i$$

Vậy điểm biểu diễn của số phức là $P(3;2)$

Chọn A

Ví dụ 7. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Giá trị của biểu thức

$(z_1 - 1)^{2019} + (z_2 - 1)^{2019}$ bằng

A. 2^{1009}

B. 2^{1010}

C. 0

D. -2^{1010}

Hướng dẫn giải

Xét phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0 \Leftrightarrow (z-2)^2 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 2+i \\ z_2 = 2-i \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó ta có: } (z_1 - 1)^{2019} + (z_2 - 1)^{2019} &= (1+i)^{2019} + (1-i)^{2019} \\ &= (1+i) \cdot \left((1+i)^2\right)^{1009} + (1-i) \cdot \left((1-i)^2\right)^{1009} \\ &= (1+i) \cdot (2i)^{1009} + (1-i) \cdot (-2i)^{1009} \\ &= (2i)^{1009} ((1+i) - (1-i)) = (2i)^{1010} = (i^2)^{505} \cdot 2^{1010} = -2^{1010} \end{aligned}$$

Chọn D



Bài tập tự luyện dạng 1

Bài tập cơ bản

Câu 1: Nghiệm của phương trình $z^2 - z + 1 = 0$ trên tập số phức là

A. $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

B. $z = \sqrt{3} + i$; $z = \sqrt{3} - i$

C. $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

D. $z = 1 + \sqrt{3}i$; $z = 1 - \sqrt{3}i$

Câu 2: Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 10 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = |z_1|^2 + |z_2|^2$

A. $P = 20$

B. $P = 40$

C. $P = \sqrt{0}$

D. $P = 2\sqrt{10}$

Câu 3: Phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$ có hai nghiệm là z_1, z_2 . Giá trị của $|z_1 - z_2|$ bằng

A. 4

B. 3

C. 6

D. 2

Câu 4: Biết số phức $z = -3 + 4i$ là một nghiệm của phương trình $z^2 + az + b = 0$, trong đó a, b là các số thực. Giá trị của $a - b$ là

A. -31

B. -19

C. 1

D. -11

Câu 5: Kí hiệu z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $2z^2 - 6z + 5 = 0$. Hỏi điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức iz_0 ?

A. $M_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$

B. $M_2\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$

C. $M_3\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

D. $M_4\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$

Câu 6: Cho z là nghiệm phức của phương trình $x^2 + x + 1 = 0$. Giá trị của biểu thức $P = z^4 + 2z^3 - z$ là

A. $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

C. $2i$

D. 2

Câu 7: Kí hiệu z_0 là số phức có phần ảo âm của phương trình $9z^2 + 6z + 37 = 0$. Tọa độ của điểm biểu diễn số phức $w = iz_0$ là

A. $\left(-2; -\frac{1}{3}\right)$

B. $\left(-\frac{1}{3}; -2\right)$

C. $\left(2; -\frac{1}{3}\right)$

D. $\left(-\frac{1}{3}; 2\right)$

Câu 8: Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 3z + 5 = 0$. Giá trị của $|z_1| + |z_2|$ bằng

A. $2\sqrt{5}$

B. $\sqrt{5}$

C. 3

D. 10

Câu 9: Kí hiệu z_1 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Giá trị của $|z_1 + 2 + 6i|$ bằng

A. 5

B. $\sqrt{5}$

C. $\sqrt{73}$

D. 73

Câu 10: Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $9z^2 + 6z + 4 = 0$. Giá trị của biểu thức $\frac{1}{|z_1|} + \frac{1}{|z_2|}$ bằng

A. $\frac{4}{3}$

B. 3

C. $\frac{3}{2}$

D. 6

Câu 11: Ký hiệu z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Giá trị của $|z_1| \cdot |z_2|$ bằng

A. 5

B. $\frac{5}{2}$

C. 10

D. 20

Câu 12: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Giá trị của biểu thức $|z_1|^2 + z_1 \cdot z_2$ là

A. 5

B. 10

C. 15

D. 0

Bài tập nâng cao

Câu 13: Phương trình $z^2 - 3z + 4 = 0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 . Giá trị của $|z_1 \cdot z_2|^2$ bằng

A. 27

B. 64

C. 16

D. 8

Câu 14: Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 3 = 0$. Môđun của $z_1^3 \cdot z_2^4$ bằng

A. 81

B. 16

C. $27\sqrt{3}$

D. $8\sqrt{2}$

Câu 15: Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $az^2 + bz + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$). Giá trị của biểu thức $M = |z_1 + z_2|^2 + (z_1 - z_2)^2 - (|z_1| + |z_2|)^2$ bằng

A. $4\frac{c}{a}$

B. $-4\frac{c}{a}$

C. $\frac{c}{4a}$

D. $-4\left|\frac{c}{a}\right|$

Câu 16: Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2 + 2z + 5 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $w = i^{2019}z_0$?

A. $M(-2; 1)$

B. $M(2; 1)$

C. $M(-2; -1)$

D. $M(2; -1)$

Câu 17: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 4z + 13 = 0$ và A, B lần lượt là hai điểm biểu diễn cho hai số phức z_1, z_2 trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Diện tích tam giác OAB bằng

A. 13

B. 12

C. $\frac{13}{2}$

D. 6

Câu 18: Gọi z là một nghiệm của phương trình $z^2 - z + 1 = 0$. Giá trị của biểu thức $M = z^{2019} + z^{2018} + \frac{1}{z^{2019}} + \frac{1}{z^{2018}} + 5$ bằng

- A. 5 B. 2 C. 7 D. 1

Câu 19: Trong tập các số phức, cho phương trình $z^2 - 6z + m = 0$, $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Gọi m_0 là một giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2}$. Hỏi trong khoảng $(0; 20)$ có bao nhiêu giá trị $m_0 \in \mathbb{N}$?

- A. 13 B. 11 C. 12 D. 10

Câu 20: Gọi z_1 và z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 + 4z + 5 = 0$.

Tính $w = (1 + z_1)^{100} + (1 + z_2)^{100}$

- A. $w = 2^{50}i$ B. $w = -2^{51}$ C. $w = 2^{51}$ D. $w = -2^{50}i$

Dạng 2: Định lí Vi-ét và ứng dụng



Phương pháp giải

Định lí Vi-ét: Cho phương trình:

$$az^2 + bz + c = 0; a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$$

có hai nghiệm phức z_1, z_2 thì
$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Ví dụ: Phương trình $z^2 - 4z + 24 = 0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 nên

$$z_1 + z_2 = 4; z_1 \cdot z_2 = 24$$

Chú ý: Học sinh hay nhầm lẫn: $z_1 + z_2 = \frac{b}{a}$



Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Giá trị của biểu thức $z_1^2 + z_2^2$ bằng

- A. 14 B. -9 C. -6 D. 7

Hướng dẫn giải

Gọi z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$

Theo định lí Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2 \\ z_1 \cdot z_2 = 5 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2 = 2^2 - 2 \cdot 5 = -6$$

Chọn C

Ví dụ 2: Phương trình bậc hai nào sau đây có nghiệm là $1 + 2i$?

- A. $z^2 - 2z + 3 = 0$ B. $z^2 + 2z + 5 = 0$
C. $z^2 - 2z + 5 = 0$ D. $z^2 + 2z + 3 = 0$

Chúng ta có thể giải từng phương trình:

$$+) z^2 - 2z + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - 1)^2 = 2i^2$$

$$\Leftrightarrow z - 1 = \pm i\sqrt{2}$$

Hướng dẫn giải

Phương trình bậc hai có hai nghiệm phức là liên hợp của nhau nên phương

trình bậc hai có nghiệm $1+2i$ thì nghiệm còn lại là $1-2i$

Khi đó tổng và tích của hai nghiệm lần lượt là 2; 5

Vậy số phức $1+2i$ là nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$

Chọn C

$$\Leftrightarrow z = 1 \pm i\sqrt{2}$$

$$+) z^2 + 2z + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z+1)^2 = 4i^2$$

$$\Leftrightarrow z+1 = \pm 2i$$

$$\Leftrightarrow z = -1 \pm 2i$$

$$+) z^2 - 2z + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z-1)^2 = 4i^2$$

$$\Leftrightarrow z-1 = \pm 2i$$

$$\Leftrightarrow z = 1 \pm 2i$$

$$+) z^2 + 2z + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z+1)^2 = 2i^2$$

$$\Leftrightarrow z+1 = \pm i\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow z = -1 \pm i\sqrt{2}$$

Ví dụ 3: Kí hiệu z_1, z_2 là nghiệm phức của phương trình $2z^2 + 4z + 3 = 0$. Tính giá trị biểu thức

$$P = |z_1 z_2 + i(z_1 + z_2)|$$

A. $P = 1$

B. $P = \frac{7}{2}$

C. $P = \sqrt{3}$

D. $P = \frac{5}{2}$

Hướng dẫn giải

Ta có z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $2z^2 + 4z + 3 = 0$

$$\text{Theo định lý Vi-ét ta có } \begin{cases} z_1 + z_2 = -2 \\ z_1 \cdot z_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } P = |z_1 z_2 + i(z_1 + z_2)| = \left| \frac{3}{2} + i(-2) \right| = \left| \frac{3}{2} - 2i \right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + (-2)^2} = \frac{5}{2}$$

Chọn D

Ví dụ 4: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 7 = 0$.

Cách khác:

Giá trị của $P = z_1^3 + z_2^3$ bằng

Ta có:

$$z^2 - 4z + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z-2)^2 = 3i^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 2 - \sqrt{3}i \\ z_2 = 2 + \sqrt{3}i \end{cases}$$

Do đó:

A. -20

B. 20

C. $14\sqrt{7}$

D. $28\sqrt{7}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Theo định lý Vi-ét ta có } \begin{cases} z_1 + z_2 = 4 \\ z_1 \cdot z_2 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\text{Suy ra } z_1^3 + z_2^3 &= (z_1 + z_2)(z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2) \\ &= (z_1 + z_2)((z_1 + z_2)^2 - 3z_1 z_2) \\ &= 4.(4^2 - 3.7) = -20\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_1^3 + z_2^3 &= (2 - \sqrt{3}i)^3 + (2 + \sqrt{3}i)^3 \\ &= -20\end{aligned}$$

Chọn A

Ví dụ 5: Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2 - 2z + 27 = 0$. Giá trị của $z_1|z_2| + z_2|z_1|$ bằng

A. 2

B. 6

C. $3\sqrt{6}$

D. $\sqrt{6}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng định lý Vi-ét, ta có $z_1 + z_2 = \frac{2}{3}$ và $z_1.z_2 = 9$

$$\text{Mà } |z_1| = |z_2| = \sqrt{|z_1||z_2|} = \sqrt{|z_1.z_2|} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{Do đó } z_1|z_2| + z_2|z_1| = z_1.3 + z_2.3 = 3(z_1 + z_2) = 3.\frac{2}{3} = 2$$

Chọn A

Ví dụ 6: Cho số thực $a > 2$ và gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + a = 0$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $z_1 + z_2$ là số thực

B. $z_1 - z_2$ là số ảo

C. $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ là số ảo

D. $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ là số thực

Hướng dẫn giải

Ta có $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} = 2$. Đáp án A đúng

Phương trình bậc hai với hệ số thực có hai nghiệm là số phức liên hợp. Gọi $z_1 = x + yi$; $x, y \in \mathbb{R}$ là một nghiệm, nghiệm còn lại là $z_2 = x - yi$

Suy ra $z_1 - z_2 = 2yi$ là số ảo. Đáp án B đúng

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1.z_2} = \frac{(z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2}{z_1.z_2} = \frac{4 - 2a}{a} \in \mathbb{R}$$

Vậy C là đáp án sai và D đúng

Chọn C

Bài tập tự luyện dạng 2

Bài tập cơ bản

Câu 1: Phương trình nào dưới đây nhận hai số phức $-i\sqrt{3}$ và $i\sqrt{3}$ làm nghiệm?

A. $z^2 + 5 = 0$

B. $z^2 + 3 = 0$

C. $z^2 + 9 = 0$

D. $z^2 + \sqrt{3} = 0$

Câu 2: Phương trình bậc hai nào dưới đây nhận hai số phức $2-3i$ và $2+3i$ làm nghiệm?

- A. $z^2 + 4z + 3 = 0$ B. $z^2 + 4z + 13 = 0$ C. $z^2 - 4z + 13 = 0$ D. $z^2 - 4z + 3 = 0$

Câu 3: Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 3z + 5 = 0$. Giá trị của $|z_1 \cdot z_2|$ bằng

- A. 5 B. $-\frac{1}{2}$ C. 3 D. $\frac{1}{2}$

Bài tập nâng cao

Câu 4: Gọi z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Giá trị của biểu thức $P = z_1^4 + z_2^4$ là

- A. -14 B. $-14i$ C. 14 D. $14i$

Câu 5: Cho số phức z_0 có $|z_0| = 2018$. Diện tích của đa giác có các đỉnh là các điểm biểu diễn của z_0 và các nghiệm của phương trình $\frac{1}{z+z_0} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z_0}$ được viết dạng $n\sqrt{3}$, $n \in \mathbb{N}$. Chữ số hàng đơn vị của n là

- A. 9 B. 8 C. 3 D. 2

Câu 6: Cho phương trình $z^2 + mz + 5 = 0$ trong đó m là tham số thực. Tìm m để phương trình có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_1^2 + z_2^2 = -6$

- A. $m = \pm 2$ B. $m = \pm 4$ C. $m = -3$ D. $m = 3$

Câu 7: Có bao nhiêu giá trị thực của a sao cho phương trình $z^2 - az + 2a - a^2 = 0$ có hai nghiệm phức có môđun bằng 1?

- A. 1 B. 4 C. 2 D. 3

Câu 8: Gọi z_1, z_2 là nghiệm phức của phương trình $z^2 + 4z + 7 = 0$. Số phức $\overline{z_1 z_2} + \overline{z_1} z_2$ bằng

- A. 2 B. 10 C. $2i$ D. $10i$

Dạng 3: Phương trình quy về phương trình bậc hai



Phương pháp giải

- Nắm vững cách giải phương trình bậc hai với hệ số thực trên tập số phức
- Nắm vững cách giải một số phương trình quy về bậc hai, hệ phương trình đại số bậc cao;...

Ví dụ: Giải phương trình: $z^4 - z^2 - 6 = 0$ trên tập số phức.

Hướng dẫn giải

Đặt $z^2 = t$, ta có phương trình:

$$t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -2 \end{cases}$$

Với $t = 3$ ta có $z^2 = 3 \Rightarrow z = \pm\sqrt{3}$

Với $t = -2$ ta có $z^2 = -2 \Rightarrow z = \pm i\sqrt{2}$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm $z = \pm\sqrt{3}$;
 $z = \pm i\sqrt{2}$



Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Tổng môđun bốn nghiệm phức của phương trình $2z^4 - 3z^2 - 2 = 0$ là

- A. $3\sqrt{2}$ B. $5\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{5}$ D. $2\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } 2z^4 - 3z^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = 2 \\ z^2 = -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}i^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{2} \\ z = -\sqrt{2} \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ z = -\frac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$$

Khi đó, tổng môđun bốn nghiệm phức của phương trình đã cho bằng $|\sqrt{2}| + |-\sqrt{2}| + \left|\frac{\sqrt{2}}{2}i\right| + \left|-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right| = 3\sqrt{2}$

Chọn A

Ví dụ 2: Kí hiệu z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4 + 4z^2 - 5 = 0$. Giá trị của $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2$ bằng

A. $2 + 2\sqrt{5}$

B. 12

C. 0

D. $2 + \sqrt{5}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } z^4 + 4z^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = 1 \\ z^2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z = -1 \\ z = \sqrt{5}i \\ z = -\sqrt{5}i \end{cases}$$

Phương trình có bốn nghiệm lần lượt là: $z_1 = 1, z_2 = -1, z_3 = -i\sqrt{5}, z_4 = i\sqrt{5}$

$$\text{Do đó: } |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 = 1^2 + 1^2 + (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 = 12$$

Chọn B

Ví dụ 3: Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là các nghiệm phức của phương trình $(z^2 + z)^2 + 4(z^2 + z) - 12 = 0$. Giá trị của biểu thức $S = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2$ là

A. $S = 18$

B. $S = 16$

C. $S = 17$

D. $S = 15$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } (z^2 + z)^2 + 4(z^2 + z) - 12 = 0$$

$$\text{Đặt } t = z^2 + z, \text{ ta có } t^2 + 4t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -6 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} z^2 + z - 2 = 0 \\ z^2 + z + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = -2 \\ z_3 = \frac{-1 + i\sqrt{23}}{2} \\ z_4 = \frac{-1 - i\sqrt{23}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } S = 1^2 + (-2)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{23}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{23}}{2}\right)^2 = 17$$

Chọn C

Ví dụ 4: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $\frac{|z|^4}{z^2} + \bar{z} = -4$. Khi đó $|z_1 + z_2|$ bằng

A. 1**B.** 4**C.** 8**D.** 2**Hướng dẫn giải**

Điều kiện: $z \neq 0$

$$\text{Ta có: } \frac{|z|^4}{z^2} + \bar{z} = -4 \Leftrightarrow \left(\frac{|z|^2}{z} \right)^2 + \bar{z} = -4 \Leftrightarrow \left(\frac{z \cdot \bar{z}}{z} \right)^2 + \bar{z} = -4$$

$$\Leftrightarrow \bar{z}^2 + \bar{z} + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{z} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i \\ \bar{z} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i \\ z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i \end{cases}$$

$$\text{Vậy } |z_1 + z_2| = \left| -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i \right| = |-1| = 1$$

Chọn A

Ví dụ 5: Cho số thực a , biết rằng phương trình $z^4 + az^2 + 1 = 0$ có bốn nghiệm z_1, z_2, z_3, z_4 thỏa mãn $(z_1^2 + 4)(z_2^2 + 4)(z_3^2 + 4)(z_4^2 + 4) = 441$. Tìm a

A. $\begin{cases} a = 1 \\ a = -\frac{19}{2} \end{cases}$

B. $\begin{cases} a = -1 \\ a = \frac{19}{2} \end{cases}$

C. $\begin{cases} a = -1 \\ a = -\frac{19}{2} \end{cases}$

D. $\begin{cases} a = 1 \\ a = \frac{19}{2} \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Nhận xét: $z^2 + 4 = z^2 - (2i)^2 = (z + 2i)(z - 2i)$

Đặt $f(x) = x^4 + ax^2 + 1$, ta có:

$$(z_1^2 + 4)(z_2^2 + 4)(z_3^2 + 4)(z_4^2 + 4) = \prod_{k=1}^4 (z_k + 2i) \cdot \prod_{k=1}^4 (z_k - 2i) = f(-2i) \cdot f(2i)$$

$$= (16i^4 + 4ai^2 + 1)(16i^4 + 4ai^2 + 1) = (17 - 4a)^2$$

Theo giả thiết, ta có $(17 - 4a)^2 = 441 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = \frac{19}{2} \end{cases}$

Chọn B

Ví dụ 6: Cho số phức z thỏa mãn $11z^{2018} + 10iz^{2017} + 10iz - 11 = 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2 \leq |z| < 3$

B. $0 \leq |z| < 1$

C. $1 < |z| < 2$

D. $\frac{1}{2} \leq |z| < \frac{3}{2}$

Hướng dẫn giải

Ta có $z^{2017}(11z + 10i) = 11 - 10iz \Leftrightarrow z^{2017} = \frac{11 - 10iz}{11z + 10i} \Rightarrow |z|^{2017} = \left| \frac{11 - 10iz}{11z + 10i} \right|$

$$\text{Đặt } z = a + bi \text{ có } \left| \frac{11-10iz}{11z+10i} \right| = \left| \frac{11-10i(a+bi)}{11(a+bi)+10i} \right| = \sqrt{\frac{(10b+11)^2 + 100a^2}{121a^2 + (11b+10)^2}} = \sqrt{\frac{100(a^2+b^2) + 220b + 121}{121(a^2+b^2) + 220b + 100}}$$

$$\text{Đặt } t = |z| \text{ (} t \geq 0 \text{)} \text{ ta có phương trình } t^{2017} = \sqrt{\frac{100t^2 + 220b + 121}{121t^2 + 220b + 100}}$$

$$\text{Nếu } t \geq 1 \Rightarrow VT \geq 1; VP \leq 1$$

$$\text{Nếu } t \leq 1 \Rightarrow VT \leq 1; VP \geq 1$$

$$\text{Nếu } t = 1 \Rightarrow |z| = 1$$

Chọn D

Bài tập tự luyện dạng 3

Câu 1: Gọi z_1, z_2, z_3 là các nghiệm của phương trình $iz^3 - 2z^2 + (1-i)z + i = 0$. Biết z_1 là số thuần ảo.

Đặt $P = |z_2 - z_3|$, hãy chọn khẳng định đúng?

A. $4 < P < 5$

B. $2 < P < 3$

C. $3 < P < 4$

D. $1 < P < 2$

Câu 2: Kí hiệu z_1, z_2, z_3 và z_4 là các nghiệm phức của phương trình $z^4 - 5z^2 - 36 = 0$. Tính tổng

$$T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|.$$

A. $T = 4$

B. $T = 6$

C. $T = 10$

D. $T = 8$

Câu 3: Gọi A, B, C là các điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2, z_3 là nghiệm của phương trình $z^3 - 6z^2 + 12z - 7 = 0$. Tính diện tích S của tam giác ABC

A. $S = 3\sqrt{3}$

B. $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

C. $S = 1$

D. $S = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

Câu 4: Cho số phức z thỏa mãn $11z^{2018} + 10iz^{2017} + 10iz - 11 = 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $|z| = \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right)$

B. $|z| = (1; 2)$

C. $|z| = [0; 1)$

D. $|z| = [2; 3)$

Câu 5: Cho phương trình $z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 9 = 0$ có bốn nghiệm phức phân biệt là z_1, z_2, z_3, z_4 .

Tính giá trị của biểu thức $T = (z_1^2 + 4)(z_2^2 + 4)(z_3^2 + 4)(z_4^2 + 4)$

A. $T = 2i$

B. $T = 1$

C. $T = -2i$

D. $T = 0$

Câu 6: Biết $z_1, z_2 = 5 - 4i$ và z_3 là ba nghiệm của phương trình $z^3 + bz^2 + cz + d = 0$ ($b, c, d \in \mathbb{R}$), trong đó z_3 là nghiệm có phần ảo dương. Phần ảo của số phức $w = z_1 + 3z_2 + 2z_3$ bằng

A. -12

B. -8

C. -4

D. 0

Câu 7: Cho số phức z thỏa mãn $11z^{10} + 10iz^9 + 10iz - 11 = 0$. Tính môđun của số phức z

A. $|z| = 10$

B. $|z| = 1$

C. $|z| = 11$

D. $|z| = \sqrt{221}$

Câu 8: Cho số phức z thỏa mãn $z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$. Tìm phần thực của số phức $W = z(z^2 - z + 1)$

A. Phần thực bằng 1

B. Phần thực bằng 0

C. Phần thực bằng 2

D. Phần thực bằng $\frac{1}{2}$

Câu 9: Kí hiệu $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$ là các nghiệm phức của phương trình

$$z^6 + 2016z^5 + 2017z^4 + 2018z^3 + 2017z^2 + 2016z + 1 = 0$$

Tính $T = (z_1^2 + 1)(z_2^2 + 1)(z_3^2 + 1)(z_4^2 + 1)(z_5^2 + 1)(z_6^2 + 1)$

A. $T = 2018^2$

B. $T = 2017^2$

C. $T = 2016^2$

D. $T = 2014^2$

Câu 10: Kí hiệu z_1, z_2, z_3, z_4 là các nghiệm của phương trình $\left(\frac{z-1}{2z-i}\right)^4 = 1$. Tính giá trị của biểu thức

$T = (z_1^2 + 1)(z_2^2 + 1)(z_3^2 + 1)(z_4^2 + 1)$

A. $T = -6375$

B. $T = 6375$

C. $T = -\frac{17}{9}$

D. $T = \frac{17}{9}$

Câu 11: Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, a > 0$) có $|z| = 1$. Kí hiệu a_0 là phần thực của biểu thức

$z^3 - 2z + \bar{z}$. Giá trị nhỏ nhất của $\frac{a_0 + 1}{a}$ là

A. -4

B. -1

C. 0

D. 1

Câu 12: Cho số thực z thỏa mãn $5z^3 = (i+4)|z| + 2(i-4)$. Phần thực của số phức z^3 là

A. $\frac{12}{5}$

B. $-\frac{4}{5}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{1}{5}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Dạng 1: Giải phương trình, tính toán biểu thức nghiệm

1- C	2- A	3- C	4- B	5- A	6- D	7- C	8- A	9- A	10- B
11- C	12- B	13- D	14- C	15- D	16- A	17- D	18- B	19- D	20- B

Dạng 2: Định lí Vi – ét và ứng dụng

1- B	2- C	3- A	4- A	5- C	6- A	7- A	8- A		
------	------	------	------	------	------	------	------	--	--

Dạng 3: Phương trình quy về phương trình bậc hai

1- B	2- C	3- D	4- A	5- B	6- C	7- B	8- D	9- D	10- D
11- B	12- B								