

BẤT ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN

Bài 1 [ĐỀ MH 2018]. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn

$$f(1)=0, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7 \text{ và } \int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}. \text{ Tính } \int_0^1 f(x) dx$$

A. $\frac{7}{5}$

B. 1

C. $\frac{7}{4}$

D. 7

Hướng dẫn giải:

Xét $I = \int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}.$

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^2 dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = f'(x) \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases} \rightarrow I = \frac{x^3}{3} \cdot f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 x^3 f'(x) dx = \frac{1}{3} \rightarrow \int_0^1 x^3 f'(x) dx = -1$

➤ Chứng minh BĐT tích phân sau: $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx \quad (*)$

Với mọi $t \in \mathbb{R}$ ta có: $0 \leq [tf(x) - g(x)]^2 = t^2 f^2(x) - 2tf(x)g(x) + g^2(x)$

Lấy tích phân 2 vế theo biến x ta được:

$$h(t) = t^2 \int_a^b f^2(x)dx - 2t \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \geq 0$$

$h(t)$ là tam thức bậc 2 luôn không âm nên ta có điều kiện:

$$\begin{cases} t^2 > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 - \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx \leq 0 \Leftrightarrow \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$$

Dấu “=” xảy ra khi $tf(x) = g(x)$

➤ Áp dụng: $1 = \left(\int_0^1 x^3 f'(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 x^6 dx \cdot \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{7} \cdot 7 = 1$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $f'(x) = kx^3$.

$$\text{Mặt khác: } \int_0^1 x^3 f'(x) dx = -1 \rightarrow k = -7 \rightarrow f'(x) = -7x^3 \rightarrow f(x) = \int -7x^3 dx = -\frac{7}{4}x^4 + C$$

$$\text{Mà } f(1) = 0 \text{ nên } C = \frac{7}{4} \rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(-\frac{7}{4}x^4 + \frac{7}{4}\right) dx = \frac{7}{5}$$

NHÂN XÉT: Thật ra BĐT (*) chính là hệ quả BĐT Holder về tích phân

BĐT Holder về tích phân phát biểu như sau:

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \text{ với } p, q > 1 \text{ thỏa } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi tồn tại hai số thực m, n không đồng thời bằng 0 sao cho $m|f(x)|^p = n|g(x)|^q$

Hệ quả: Với $p = q = 2$ thì BĐT trở thành $\left(\int f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int f^2(x) dx \cdot \int g^2(x) dx$

BTAD: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 (1-x)^2 f'(x) dx = -\frac{1}{3}$.

Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 f^2(x) dx$ là:

A. $\frac{f(0)+2}{3}$

B. $\frac{3f(0)+2}{3}$

C. $\frac{3f(0)-2}{3}$

D. $\frac{f(0)-2}{3}$

Bài 2. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0) = 0$,

$\max_{[0;1]} f'(x) = 6$ và $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3}$. Gọi M là giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^1 f^3(x) dx$.

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $M \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$

B. $M \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$

C. $M \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$

D. $M \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $f'(x) \leq 6, \forall x \in [0;1] \rightarrow f'(x)f(x) \leq 6f(x), \forall x \in [0;1]$ (1)

Lấy tích phân hai vế BĐT (1) ta được: $\int_0^x f'(t)f(t)dt \leq 6 \int_0^x f(t)dt, \forall x \in [0;1]$

$$\Leftrightarrow \frac{f^2(t)}{2} \Big|_0^x = \frac{f^2(x)}{2} - \frac{f^2(0)}{2} \leq 6 \int_0^x f(t)dt \Leftrightarrow f^2(x) \leq 12 \int_0^x f(t)dt \Leftrightarrow f^3(x) \leq 12f(x) \int_0^x f(t)dt \quad (2)$$

Lấy tích phân hai vế BĐT (2) ta được: $\int_0^1 f^3(x)dx \leq 12 \int_0^1 \underbrace{\left[f(x) \int_0^x f(t)dt \right]}_I dx$

Đặt $u = \int_0^x f(t)dt \rightarrow du = f(x).x'dx = f(x)dx$

$$\text{Suy ra } I = \int_0^{\int_0^1 f(t)dt} u du = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 f(t)dt \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 f(x)dx \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f^3(x)dx \leq 12 \cdot \frac{1}{18} = \frac{2}{3}$$

Nhận xét: Ta có thể chỉ ra 1 hàm số $f(x)$ thỏa mãn đủ kiện đề cho và xảy ra dấu "=",
hàm đó là: $f(x) \approx -28,815042623089894049x^3 + 35,5890622041211331x^2 - 8,6518534912024751x$

$$\text{- Chú ý: } \left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt \right)' = f(g(x)).g'(x) - f(h(x)).h'(x)$$

Bài 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0) = \frac{6-4\sqrt{2}}{3}$,
 $f(1) = 2$ và $f'(x) > 0, \forall x \in [0;1]$. Biết tích phân $\int_0^1 \sqrt{2+2\sqrt{2x-x^2} + [f'(x)]^2} dx$ đạt giá
trị nhỏ nhất, khi đó hãy tính $f(2)$?

A. $f(2) = \frac{6+4\sqrt{2}}{3}$ B. $f(2) = \frac{6+2\sqrt{2}}{3}$ C. $f(2) = \frac{3+2\sqrt{2}}{2}$ D.

$$f(2) = \frac{3+\sqrt{2}}{2}$$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } I = \int_0^1 \sqrt{2+2\sqrt{2x-x^2} + [f'(x)]^2} dx = \int_0^1 \sqrt{(\sqrt{2-x} + \sqrt{x})^2 + [f'(x)]^2} dx$$

$$\text{Ta có: } \sqrt{(\sqrt{2-x} + \sqrt{x})^2 + [f'(x)]^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} [\sqrt{2-x} + \sqrt{x} + f'(x)]$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \sqrt{(\sqrt{2-x} + \sqrt{x})^2 + [f'(x)]^2} dx \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 [\sqrt{2-x} + \sqrt{x} + f'(x)] dx$$

$$\text{Mà: } \int_0^1 [\sqrt{2-x} + \sqrt{x} + f'(x)] dx = \int_0^1 (\sqrt{2-x} + \sqrt{x}) dx + \int_0^1 f'(x) dx = \frac{4\sqrt{2}}{3} + f(1) - f(0) = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Do đó } I \geq \frac{8}{3}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi: } f'(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{x} \rightarrow f(x) = \frac{2}{3} (\sqrt{x^3} - \sqrt{(2-x)^3}) + C$$

$$\text{Ta có: } f(1) = 2 \Leftrightarrow C = 2 \rightarrow f(x) = \frac{2}{3} (\sqrt{x^3} - \sqrt{(2-x)^3}) + 2 \rightarrow f(2) = \frac{6+4\sqrt{2}}{3}$$

Bài 4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn

$$\int_x^1 f(t) dt \geq \frac{1-x^2}{2}, \forall x \in [0;1]. \text{ Gọi } m \text{ là giá trị nhỏ nhất của tích phân } \int_0^1 f^2(x) dx. \text{ Khẳng}$$

định nào sau đây đúng?

A. $m \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$

B. $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$

C. $m \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$

D. $m \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Theo hệ quả BĐT Holder: } \left(\int_0^1 xf(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 x^2 dx \cdot \int_0^1 f^2(x) dx \rightarrow \int_0^1 f^2(x) dx \geq 3 \left(\int_0^1 xf(x) dx \right)^2$$

Giờ ta chỉ việc tìm min của tích phân $\int_0^1 xf(x) dx$ là giải quyết được bài toán

Biên soạn: Phạm Minh Tuấn

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, khi đó ta có: $\int_0^1 [xF(x)]' dx = xF(x) \Big|_0^1 = F(1)$

$$\text{Mà } \int_0^1 [xF(x)]' dx = \int_0^1 xF'(x) dx + \int_0^1 F(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx + \int_0^1 F(x) dx$$

$$\text{Suy ra } F(1) = \int_0^1 xf(x) dx + \int_0^1 F(x) dx \quad (1)$$

$$\text{Từ đề: } \int_x^1 f(t) dt \geq \frac{1-x^2}{2} \Leftrightarrow F(1) - F(x) \geq \frac{1-x^2}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 F(1) dx - \int_0^1 F(x) dx \geq \int_0^1 \frac{1-x^2}{2} dx = \frac{1}{3}$$

$$\text{Tương đương } F(1) - \int_0^1 F(x) dx \geq \int_0^1 \frac{1-x^2}{2} dx = \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\text{Thay (1) vào (2) ta được: } \int_0^1 xf(x) dx \geq \frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f^2(x) dx \geq 3 \left(\frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{3}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $f(x) = x$

Bài 5. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$,

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx = \frac{e^2 - 1}{4}. \text{ Tính } \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $\frac{e^2}{4}$

B. $\frac{e}{2}$

C. $e - 2$

D. $\frac{e-1}{2}$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Xét } I = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx, \text{ đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = (x+1)e^x dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = xe^x \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I = xe^x f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 xe^x f'(x) dx = \frac{e^2 - 1}{4} \rightarrow \int_0^1 xe^x f'(x) dx = -\frac{e^2 - 1}{4}$$

Áp dụng hệ quả BĐT holder:

Biên soạn: Phạm Minh Tuấn

$$\left(\frac{e^2-1}{4}\right)^2 = \left(\int_0^1 x e^x f'(x) dx\right)^2 \leq \int_0^1 x^2 e^{2x} dx \cdot \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \left(\frac{e^2-1}{4}\right)^2$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $f'(x) = kxe^x$. Mà $\int_0^1 x e^x f'(x) dx = -\frac{e^2-1}{4} \rightarrow k = -1$

Suy ra $f(x) = \int -xe^x dx = (1-x)e^x + C$. Mà $f(1) = 0 \rightarrow C = 0$

Vậy $f(x) = (1-x)e^x \rightarrow \int_0^1 (1-x)e^x dx = e - 2$

Bài 6. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương và liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(0) = 1$,

$3 \int_0^1 \left[f'(x) f^2(x) + \frac{1}{9} \right] dx \leq 2 \int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx$. Tính $\int_0^1 f^3(x) dx$.

A. $\frac{5}{4}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{8}{5}$

D. $\frac{7}{6}$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Đề} \Leftrightarrow 3 \int_0^1 f'(x) f^2(x) dx + \frac{1}{3} \leq 2 \int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx$$

$$\text{Áp dụng hệ quả BĐT holder: } \int_0^1 dx \cdot \int_0^1 f'(x) f^2(x) dx \geq \left(\int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx \right)^2$$

$$\text{Suy ra } 2 \int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx \geq 3 \left(\int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx \right)^2 + \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3 \left(\int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx - \frac{1}{3} \right)^2 \leq 0$$

$$\text{Hay } \int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx = \frac{1}{3}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx = \frac{1}{3} \rightarrow k = \frac{1}{3} \\ \sqrt{f'(x)} f(x) = k \end{cases}$$

$$\text{Xét } \sqrt{f'(x)} f(x) = \frac{1}{3} \Rightarrow \int f'(x) f^2(x) dx = \int \frac{1}{9} dx \Leftrightarrow \frac{f^3(x)}{3} = \frac{1}{9} x + C \rightarrow f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{3} x + 3C}$$

Biên soạn: Phạm Minh Tuấn

Vì $f(0) = 1$ nên $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{3}x + 1} \rightarrow \int_0^1 f^3(x) dx = \frac{7}{6}$

Bài 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(a; b)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$ và $f'(x) + f^2(x) \geq -1, \forall x \in (a; b)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = b - a$.

A. $-\frac{\pi}{2}$

B. $-\pi$

C. π

D. $\frac{\pi}{2}$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $f'(x) + f^2(x) \geq -1 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} \geq -1$

Lấy tích phân hai vế ta được:

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} \geq \int_a^b -1 dx \Leftrightarrow \arctan f(x) \Big|_a^b \geq a - b \Leftrightarrow b - a \geq \arctan f(b) - \arctan f(a)$$

Vì $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$ nên $b - a \geq \pi$

Nhận xét: Khi hàm số $f(x) = \cot x$ cận $b = \pi, a = 0$ thì dấu “=” xảy ra

Bài 8. Cho hàm số $f(x)$ dương và liên tục trên $[1; 3]$ thỏa mãn $\max_{[1; 3]} f(x) = 2$

$\min_{[1; 3]} f(x) = \frac{1}{2}$ và biểu thức $S = \int_1^3 f(x) dx \cdot \int_1^3 \frac{1}{f(x)} dx$ đạt GTLN, khi đó hãy tính $\int_1^3 f(x) dx$

A. $\frac{7}{5}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{5}{2}$

Hướng dẫn giải

Từ đề suy ra $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 2, \forall x \in [1; 3]$ nên $\frac{\left(f(x) - \frac{1}{2}\right)(f(x) - 2)}{f(x)} \leq 0, \forall x \in [1; 3]$

Lấy tích phân 2 vế ta được: $\int_1^3 \frac{\left(f(x) - \frac{1}{2}\right)(f(x) - 2)}{f(x)} dx \leq 0 \Leftrightarrow \int_1^3 \frac{1}{f(x)} dx \leq 5 - \int_1^3 f(x) dx$

Tương đương $\int_1^3 f(x)dx \int_1^3 \frac{1}{f(x)}dx \leq 5 \int_1^3 f(x)dx - \left(\int_1^3 f(x)dx \right)^2 \leq \frac{25}{4} - \left(\int_1^3 f(x)dx - \frac{5}{2} \right)^2 \leq \frac{25}{4}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\int_1^3 f(x)dx = \frac{5}{2}$

Bài 9. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[1;2]$ thỏa mãn $\int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2 dx \leq \frac{x_2^3 - x_1^3}{3}$

với mọi $x_1, x_2 \in [1;2]$ sao cho $x_1 \leq x_2$. Tìm GTLN của tích phân $\int_1^2 f(x)dx$.

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{5}{3}$

D. $\frac{5}{2}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int_{x_1}^{x_2} x^2 dx = \frac{x_2^3 - x_1^3}{3} \rightarrow \int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2 dx \leq \int_{x_1}^{x_2} x^2 dx \leftrightarrow \int_{x_1}^{x_2} (x^2 - [f(x)]^2) dx \geq 0$

Do hàm $f(x) = x^2 - [f(x)]^2$ liên tục trên $[1;2]$ nên:

$$x^2 - [f(x)]^2 \geq 0 \leftrightarrow |f(x)| \leq x, \forall x \in [1;2]$$

Từ đó suy ra $\int_1^2 f(x)dx \leq \int_1^2 |f(x)|dx \leq \int_1^2 xdx = \frac{3}{2}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $f(x) = x$; $x_1 = 1; x_2 = 2$

Bài 10. Cho hai hàm số $f(x)$ không âm và liên tục trên $[0;1]$. Đặt $g(x) = 1 + 2 \int_0^x f(t)dt$

và ta giả sử rằng luôn có $g(x) \geq [f(x)]^2, \forall x \in [0;1]$. Tìm GTLN của tích phân

$\int_0^1 g(x)dx$.

A. $\frac{7}{3}$

B. $\frac{8}{5}$

C. $\frac{5}{3}$

D. $\frac{13}{6}$

Hướng dẫn giải

Gọi $F(x)$ là một hàm số thỏa mãn $F(x) = \int_0^x f(t)dt \rightarrow \begin{cases} F'(x) = f(x) \\ g(x) = 1 + 2F(x) \end{cases}$

Ta có $1 + 2F(x) = g(x) \geq [f(x)]^2 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\sqrt{1+2F(x)}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{F'(x)}{\sqrt{1+2F(x)}} - 1 \leq 0$

Nháp: xét $\frac{F'(x)}{\sqrt{1+2F(x)}} = 1 \rightarrow \int \frac{F'(x)}{\sqrt{1+2F(x)}} dx = x + C \rightarrow \sqrt{1+2F(x)} = x + C$

Xét hàm số $h(x) = \sqrt{1+2F(x)} - (x + C), x \in [0; 1]$

Ta có $h'(x) = \frac{2F'(x)}{2\sqrt{1+2F(x)}} - 1 \leq 0$ nên $h(x)$ nghịch biến trên $[0; 1]$.

Suy ra $h(x) \leq h(0) = \sqrt{1+2F(0)} - C$

Ta có $F(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$ nên $h(x) \leq \sqrt{1} - C$. Ta chọn C sao cho $\sqrt{1} - C = 0 \rightarrow C = 1$

Vậy $\sqrt{1+2F(x)} \leq x + 1 \rightarrow g(x) \leq (x + 1)^2 \rightarrow \int_0^1 g(x)dx \leq \frac{7}{3}$

BTAD: [ĐỀ VTED] Cho hàm số $f(x)$ không âm và liên tục trên $[0; 1]$. Đặt

$g(x) = 1 + 2 \int_0^x f(t)dt$ và ta giả sử rằng luôn có $g(x) \geq [f(x)]^3, \forall x \in [0; 1]$. Tìm GTLN

của tích phân $\int_0^1 \sqrt[3]{[g(x)]^2} dx$.

A. $\frac{5}{3}$

B. 4

C. $\frac{4}{3}$

D. 5