

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và đồ thị hàm số: $y = -2x^3 + 3x^2 + 1$.

Câu 2. (1 điểm) Cho $\sin(\pi + \alpha) = \frac{-1}{3}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\tan\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)$.

Câu 3. (1 điểm)

a) Giải phương trình: $2\log_4(3x+1) - \log_2(3-x) = 1$.

b) Giải phương trình sau trên tập số phức: $(z^2 + i)(z^2 - 2iz - 1) = 0$.

Câu 4. (1 điểm) Tính tích phân: $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin x} dx$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(-4; 1; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{3}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng d. Tìm tọa độ điểm B thuộc d sao cho $AB = \sqrt{5}$.

Câu 6. (1 điểm) Cho A là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 2 chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Chọn ngẫu nhiên hai số từ tập A. Tính xác suất để hai số được chọn có tổng là một số chẵn.

Câu 7. (1 điểm) Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính thể tích của khối chóp S.ABC và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác nhọn ABC, gọi E, F lần lượt là hình chiếu của các đỉnh B, C lên các cạnh AC, AB. Các đường thẳng BC và EF lần lượt có phương trình là $BC: x - 4y - 12 = 0$, $EF: 8x + 49y - 6 = 0$, trung điểm I của EF nằm trên đường thẳng $\Delta: x - 12y = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết $BC = 2\sqrt{17}$ và đỉnh B có hoành độ âm.

Câu 9. (1 điểm) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (\sqrt{x+1} + \sqrt{y})^2 = \frac{4\sqrt{x} - \sqrt{x+1} + 3\sqrt{y} + 10}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + 2} \\ (\sqrt{x+1} + \sqrt{y} + 2)(\sqrt{x+4} + \sqrt{y+3})^2 = 64 \end{cases}$$

Câu 10. (1 điểm) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c = 1$ và $ab + bc + ca > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{2}{|a-b|} + \frac{2}{|b-c|} + \frac{2}{|c-a|} + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}$.

-----HẾT-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: **Số báo danh:**

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

Câu 1. Bạn đọc tự giải.

Câu 2. Ta có $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{3} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{3}$

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos \alpha < 0 \Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Suy ra $\tan\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\left(3\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -2\sqrt{2}$.

Câu 3.

a) Điều kiện: $-\frac{1}{3} < x < 3$

Với điều kiện trên BPT

$$\Leftrightarrow \log_2(3x+1) = \log_2[2(3-x)]$$

$$\Leftrightarrow 3x+1 = 2(3-x)$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

b)

$$(z^2 + i)(z^2 - 2iz - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = -i \\ z^2 - 2iz - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \\ z = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \\ z = i \end{cases}$$

Câu 4.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin x} dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2} dx = \int_0^{2\pi} \left|\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right| dx = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left|\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| dx \\ &= \sqrt{2} \left[\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) dx - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) dx \right] = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

Câu 5.

Đường thẳng d có VTCP là $\vec{u_d} = (-2; 1; 3)$

Vì $(P) \perp d$ nên (P) nhận $\vec{u_d} = (-2; 1; 3)$ làm VTPT

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $-2x + y + 3z - 18 = 0$

Vì $B \in d$ nên $B(-1-2t; 1+t; -3+3t)$

$AB = \sqrt{5}$ suy ra $t = 2$ hoặc $t = \frac{10}{7}$

Vậy $B(-5; 3; 3)$ hoặc $B\left(-\frac{27}{7}; \frac{17}{7}; \frac{9}{7}\right)$.

Câu 6.

Có $6.5 = 30$ số có 2 chữ số khác nhau được tạo thành từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 (không chứa chữ số 0), trong đó có 15 số chẵn và 15 số lẻ (vì số chữ số lẻ 1, 3, 5 bằng số chữ số chẵn 2, 4, 6)

Tập A có thêm 6 số có chứa chữ số 0 là 10, 20, 30, 40, 50, 60

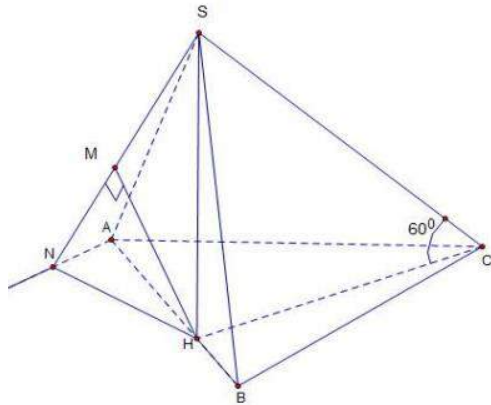
Do đó A có 36 số với 21 số chẵn và 15 số lẻ

Để chọn được 2 số có tổng chẵn, ta phải chọn được 2 số chẵn hoặc cả 2 số lẻ

Số cách chọn 2 số đều chẵn hoặc 2 số đều lẻ lần lượt là C_{21}^2 và C_{15}^2 .

Vậy xác suất cần tính là $\frac{C_{21}^2 + C_{15}^2}{C_{36}^2} = \frac{1}{2}$.

Câu 7.



Ta có HC là hình chiếu của SC trên mặt đáy (ABC) nên:

$$(\angle SC, (ABC)) = \angle SCH = 60^\circ$$

Xét tam giác BHC , ta có:

$$CH^2 = BH^2 + BC^2 - 2.BH.BC.\cos 60^\circ \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{7}}{3}$$

Trong tam giác vuông SHC , ta có:

$$SH = CH.\tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{21}}{3}$$

$$\text{Vậy: } V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SH = \frac{a^3\sqrt{7}}{12}$$

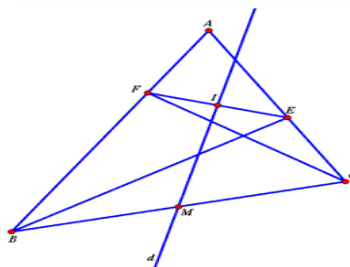
Kẻ $Ax \parallel BC$. Gọi N, M lần lượt là hình chiếu của H trên các cạnh Ax và SN .

$$\text{Vì } BC \parallel (SAN) \text{ và } BA = \frac{3}{2}HA \text{ nên } d(SA; BC) = d(B; (SNA)) = \frac{3}{2}d(H; (SNA))$$

$$\text{Ta có } AH = \frac{2a}{3}, HN = AH.\sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow MN = \frac{SH.HN}{\sqrt{SH^2 + HN^2}} = \frac{a\sqrt{42}}{12}$$

$$\text{Vậy } d(BC; SA) = \frac{a\sqrt{42}}{8}.$$

Câu 8.



Vì I thuộc Δ nên $I(12m; m)$, mà I thuộc EF nên ta có $m = \frac{6}{145}$, suy ra $I\left(\frac{72}{145}; \frac{6}{145}\right)$

Gọi d là đường thẳng đi qua I và vuông góc với EF , ta có $d: 49x - 8y - 24 = 0$

Đường thẳng d cắt BC tại trung điểm M của BC , do vậy $M(0; -3)$

Ta có $BM = \sqrt{17}$, $B(4b+12; b)$, $BM = \sqrt{(4b+12)^2 + (b+3)^2}$ nên ta có phương trình

$$(4b+12)^2 + (b+3)^2 = 17 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \Rightarrow B(4; -2) \\ b = -4 \Rightarrow B(-4; -4) \end{cases}$$

Chọn $B(-4; -4) \Rightarrow C(4; -2)$

Lấy $E\left(e; \frac{6-8e}{49}\right)$, ta có $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EC} = 0$ nên $E\left(\frac{16}{5}; \frac{-2}{5}\right)$ và $F\left(-\frac{64}{29}; \frac{14}{29}\right)$ hoặc $F\left(\frac{16}{5}; \frac{-2}{5}\right)$ và

$$E\left(-\frac{64}{29}; \frac{14}{29}\right)$$

Với $E\left(\frac{16}{5}; \frac{-2}{5}\right)$ và $F\left(-\frac{64}{29}; \frac{14}{29}\right)$. Ta có:

$BE: x - 2y - 4 = 0$, $CF: 2x + 5y + 2 = 0$ suy ra $A\left(\frac{16}{9}; -\frac{10}{9}\right)$ (loại vì $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} < 0 \Rightarrow A > 90^\circ$)

Với $E\left(-\frac{64}{29}; \frac{14}{29}\right)$ và $F\left(\frac{16}{5}; \frac{-2}{5}\right)$ suy ra $A(0; 6)$

Vậy $A(0; 6)$, $B(-4; -4)$, $C(4; -2)$.

Câu 9.

$$\begin{cases} (\sqrt{x+1} + \sqrt{y})^2 = \frac{4\sqrt{x} - \sqrt{x+1} + 3\sqrt{y} + 10}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + 2} \\ (\sqrt{x+1} + \sqrt{y} + 2)(\sqrt{x+4} + \sqrt{y+3})^2 = 64 \end{cases}$$

Điều kiện xác định phương trình: $x, y \geq 0$

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt{x+1} + \sqrt{y})^2 - 4 = \frac{4\sqrt{x} - \sqrt{x+1} + 3\sqrt{y} + 10}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + 2} - 4$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1} + \sqrt{y} - 2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{y} + 2) + \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{y} - 2}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + 2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 2$$

Thay vào (2) ta được: $(\sqrt{x+4} + \sqrt{y+3})^2 = 16 \Leftrightarrow \sqrt{x+4} + \sqrt{y+3} = 4$

Do đó ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 2 \\ \sqrt{x+4} + \sqrt{y+3} = 4 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \sqrt{x+1} \geq 0 \\ b = \sqrt{y} \geq 0 \end{cases} \text{ khi đó ta có } \begin{cases} a + b = 2 \\ \sqrt{a^2 + 3} + \sqrt{b^2 + 3} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - a \\ \sqrt{a^2 + 3} + \sqrt{a^2 - 4a + 7} = 4 (*) \end{cases}$$

Phương trình (*) có nghiệm kép $a = 1$ nên ta dùng AG - GM để đánh giá:

Ta có

$$(*) \Leftrightarrow 2\sqrt{a^2+3} + 2\sqrt{a^2-4a+7} - 8 = 0$$

$$VT \leq \frac{4+a^2+3}{2} + \frac{4+a^2-4a+7}{2} - 8 = (a-1)^2 \geq 0 = VP$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \sqrt{a^2+3} \\ 2 = \sqrt{a^2-4a+7} \\ (a-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a=1 \Rightarrow b=1$$

Suy ra $x = 0$ và $y = 1$.

Câu 10.

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a > b > c$. Khi đó:

$$P = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{a-c} + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}$$

$$\text{Sử dụng bất đẳng thức } \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \geq \frac{4}{m+n} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+n^2}} \quad (m, n > 0)$$

Đẳng thức xảy ra khi $m = n$. Ta có:

$$\begin{aligned} & 2\left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c}\right) + \frac{2}{a-c} + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}} \geq \frac{10}{a-c} + \frac{10}{2\sqrt{ab+bc+ca}} \\ & \geq \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(a-c)^2 + 4(ab+bc+ca)}} = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(a+c)(a+c+4b)}} = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(1-b)(1+3b)}} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Ta lại có: } 3(1-b)(1+3b) \leq \frac{(3-3b+1+3b)^2}{4} = 4$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{(1-b)(1+3b)} \leq \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $P \geq 10\sqrt{6}$

Đẳng thức xảy ra khi $a-b=b-c$, $3-3b=1+3b$ và $a+b+c=1$

$$\Leftrightarrow a = \frac{2+\sqrt{6}}{6}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{2-\sqrt{6}}{6} \text{ hoặc các hoán vị.}$$

Vậy GTNN của P là $10\sqrt{6}$.