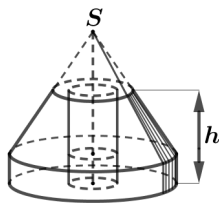


NÓN – TRỤ – CẦU

Vận dụng cao



Phần 1. Thể tích và các yếu tố liên quan

Phần 2. Vật thể tròn xoay

Phần 3. Ứng dụng thực tiễn

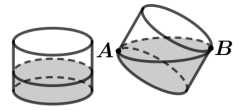
Phần 4. Các khối NÓN – TRỤ – CẦU tiếp xúc

Phần 5. Mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện

Phần 6. Bài toán cực trị

Phần 1. Thể tích và các yếu tố liên quan

Câu 1. Một chiếc thùng hình trụ có bán kính đáy $R = 20$, bên trong đựng một lượng nước. Biết rằng khi nghiêng thùng sao cho đường sinh của hình trụ tạo với mặt đáy góc 45° cho đến khi nước lặng thì mặt nước chạm vào hai điểm A và B nằm trên hai mặt đáy như hình vẽ bên. Thể tích của thùng đã cho bằng

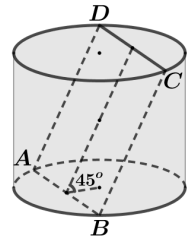


- A. 16000π . B. 12000π . C. 8000π . D. 6000π .

Câu 2. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.EFGH$. Tính tỉ số k giữa thể tích khối trụ ngoại tiếp và thể tích khối trụ nội tiếp hình lăng trụ trên.

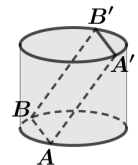
- A. $k = \sqrt{2}$. B. $k = 2$. C. $k = 2\sqrt{2}$. D. $k = 4$.

Câu 3. Cho một hình trụ tròn xoay và hình vuông $ABCD$ cạnh a có hai đỉnh liên tiếp A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Mặt phẳng $(ABCD)$ tạo với đáy hình trụ góc 45° như hình vẽ. Thể tích khối trụ bằng



- A. $\frac{\pi a^3}{16}$. B. $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{16}$. C. $\frac{3\pi a^3}{16}$. D. $\frac{3\sqrt{2}\pi a^3}{16}$.

Câu 4. Cho hình trụ có bán kính đáy là 4 cm, một mặt phẳng không vuông góc với đáy và cắt hai mặt đáy theo hai dây cung song song $AB, A'B'$ mà $AB = A'B' = 6$ cm. Biết diện tích tứ giác $ABB'A'$ bằng 60 cm^2 . Chiều cao của hình trụ đã cho bằng



- A. $4\sqrt{3}$ cm. B. $5\sqrt{3}$ cm. C. $6\sqrt{2}$ cm. D. $8\sqrt{2}$ cm.

Câu 5. Một thùng hình trụ có chiều cao $h = 3\text{m}$, bán kính đường tròn đáy $R = 1\text{m}$ chứa một lượng nước. Biết rằng nếu đặt thùng nằm ngang ta được chiều cao mực nước trong thùng là $d = 0,5\text{m}$. Hỏi thể tích lượng nước có trong thùng gần nhất với kết quả nào sau đây?

- A. $1,75\text{m}^3$. B. $1,8\text{m}^3$. C. $1,85\text{m}^3$. D. $1,9\text{m}^3$.

Câu 6. Cho một hình trụ có bán kính đáy bằng R và có chiều cao bằng $R\sqrt{3}$. Hai điểm A, B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy sao cho góc giữa AB và trục của hình trụ bằng 30° . Khoảng cách giữa AB và trục của hình trụ bằng

- A. R . B. $R\sqrt{3}$. C. $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{R\sqrt{3}}{4}$.

Câu 7. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O') , thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông. Gọi A, B là hai điểm lần lượt nằm trên hai đường tròn (O) và

(O'). Biết $AB = 2a$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OO' bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Bán kính đáy của hình trụ bằng

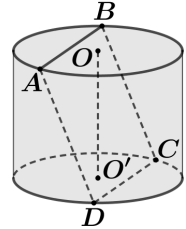
- A. $\frac{a\sqrt{14}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{14}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{2}a}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{14}}{4}$.

Câu 8. Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O' , bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a . Trên đường tròn tâm O lấy điểm A , trên đường tròn tâm O' lấy điểm B sao cho $AB = 2a$. Thể tích của khối tứ diện $OO'AB$ bằng

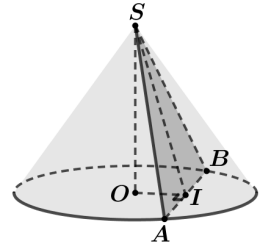
- A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

Câu 9. Một hình trụ có bán kính đáy $R = 70\text{cm}$ và chiều cao $h = 20\text{cm}$. Một hình vuông $ABCD$ có hai cạnh AB và CD lần lượt là các dây cung của hai đường tròn đáy. Biết mặt phẳng $(ABCD)$ không vuông góc với mặt đáy của hình trụ (tham khảo hình vẽ). Cạnh của hình vuông $ABCD$ có độ dài bằng

- A. 80cm . B. 100cm . C. $100\sqrt{2}\text{cm}$. D. 140cm .

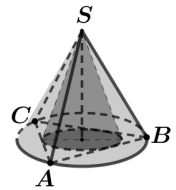


Câu 10. Cho hình nón có đỉnh S , trục SO , bán kính R , chiều cao h . Dây cung AB thuộc đường tròn đáy và cách O một khoảng $\frac{R}{2}$ như hình vẽ. Ký hiệu S_1, S_2 lần lượt là diện tích xung quanh của mặt nón và diện tích tam giác SAB . Biết $\frac{S_1}{S_2} = \frac{10\pi}{3\sqrt{3}}$, mệnh đề nào sau đây đúng?



- A. $h = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}R$. B. $h = \frac{\sqrt{11}}{8}R$. C. $h = (\sqrt{2} - 1)R$. D. $h = \frac{1}{3}R$.

Câu 11. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Hình nón có đỉnh S và có đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác ABC gọi là hình nón nội tiếp hình chóp $S.ABC$, hình nón có đỉnh S và có đường tròn đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC gọi là hình nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Tỷ số thể tích của hình nón nội tiếp và hình nón ngoại tiếp hình chóp đã cho bằng



- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{4}$.

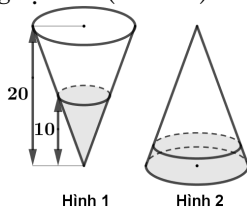
Câu 12. Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O . Dựng hai đường sinh SA và SB , biết tam giác SAB vuông và có diện tích bằng $4a^2$. Góc tạo bởi giữa trục SO và mặt phẳng (SAB) bằng 30° . Đường cao h của hình nón bằng

- A. $h = a\sqrt{2}$. B. $h = a\sqrt{3}$. C. $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $h = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Câu 13. Cho hình nón đỉnh S có đường cao SO . Gọi A, B là hai điểm thuộc đường tròn đáy của hình nón sao cho khoảng cách từ O đến AB bằng a và $\widehat{SAO} = 30^\circ$, $\widehat{SAB} = 60^\circ$. Độ dài đường sinh ℓ của hình nón bằng

- A. $\ell = a$. B. $\ell = a\sqrt{2}$. C. $\ell = a\sqrt{3}$. D. $\ell = 2a$.

Câu 14. Một cái phễu có dạng hình nón, chiều cao của phễu là 20 cm (Hình 1). Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của cột nước trong phễu là 10 cm. Nếu bịt kín miệng phễu rồi lật ngược lên (Hình 2).



Khi đó chiều cao cột nước trong phễu bằng giá trị nào sau đây ?

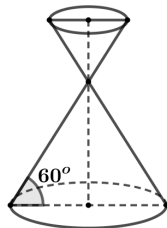
- A. 0,87 cm. B. 1,07 cm. C. 5 cm. D. 10 cm.

Câu 15. Hai chiếc ly đựng chất lỏng giống hệt nhau, mỗi chiếc có phần chứa chất lỏng là một khối nón có chiều cao 10 cm (mô tả như hình vẽ). Ban đầu chiếc ly thứ nhất chứa đầy chất lỏng, chiếc ly thứ hai để rỗng. Người ta chuyển chất lỏng từ ly thứ nhất sang ly thứ hai sao cho độ cao của cột chất lỏng trong ly thứ nhất còn 5 cm. Tính chiều cao h của cột chất lỏng trong ly thứ hai sau khi chuyển (độ cao của cột chất lỏng tính từ đỉnh của khối nón đến mặt chất lỏng - lượng chất lỏng coi như không hao hụt khi chuyển. Tính gần đúng h với sai số không quá 0,01 cm).



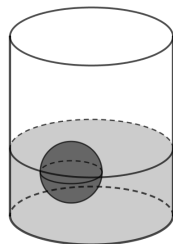
- A. 9,09 (cm). B. 9,18 (cm). C. 9,56 (cm). D. 9,57 (cm).

Câu 16. Cho một đồng hồ cát gồm 2 hình nón chung đỉnh ghép lại, trong đó đường sinh bất kỳ của hình nón tạo với đáy một góc 60° như hình bên. Biết rằng chiều cao của đồng hồ là 30cm và tổng thể tích của đồng hồ là $1000\pi(\text{cm}^3)$. Hỏi nếu cho đầy lượng cát vào phần trên thì khi chảy hết xuống dưới, khi đó tỉ lệ thể tích lượng cát chiếm chỗ và thể tích phần dưới là bao nhiêu ?



- A. $\frac{1}{3\sqrt{3}}$. B. $\frac{1}{8}$. C. $\frac{1}{27}$. D. $\frac{1}{64}$.

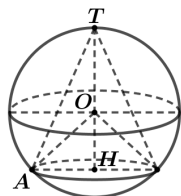
Câu 17. Để tính diện tích xung quanh của một khối cầu bằng đá, người ta thả nó vào trong một chiếc thùng hình trụ có chiều cao $h=2\text{m}$, bán kính đường tròn đáy bằng $R=0,5\text{m}$ và chứa một lượng nước có thể tích bằng $\frac{1}{8}$ thể tích khối trụ. Sau khi thả khối



cầu đá vào khối trụ người ta đo được mực nước trong khối trụ cao gấp ba lần mực nước ban đầu khi chưa thả khối cầu. Hỏi diện tích xung quanh của khối cầu gần bằng kết quả nào được cho dưới đây ?

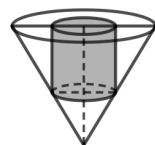
- A. $1,5\text{m}^2$. B. $1,7\text{m}^2$. C. $2,6\text{m}^2$. D. $3,4\text{m}^2$.

Câu 18. Cho mặt cầu (S) tâm O , bán kính $R=3$. Mặt phẳng (P) cách O một khoảng bằng 1 và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có tâm H . Gọi T là giao điểm của tia HO với (S) , tính thể tích V của khối nón đỉnh T , đáy là hình tròn (C) (như hình).



- A. $V = \frac{16\pi}{3}$. B. $V = \frac{32\pi}{3}$. C. $V = 16\pi$. D. $V = 32\pi$.

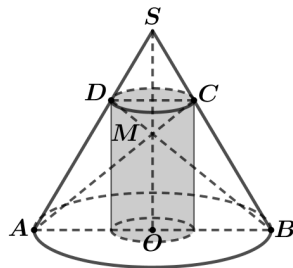
Câu 19. Một bình đựng nước dạng hình nón không nắp đựng đầy nước. Biết rằng chiều cao của bình gấp 3 lần bán kính đáy của nó. Người ta thả vào bình đó một khối trụ và đo được thể tích nước trào ra ngoài là $\frac{16\pi}{9} \text{ dm}^3$. Biết rằng một mặt của khối trụ nằm trên mặt



đáy của hình nón và khối trụ có chiều cao bằng đường kính đáy của hình nón (như hình vẽ). Tính bán kính đáy R của bình nước.

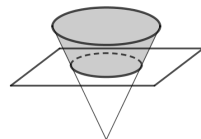
- A. $R = 2 \text{ dm}$. B. $R = 3 \text{ dm}$. C. $R = 4 \text{ dm}$. D. $R = 5 \text{ dm}$.

Câu 20. Xét một hình trụ nội tiếp trong hình nón như hình bên, trong đó S là đỉnh hình nón, O là tâm đường tròn mặt đáy. Các đoạn AB, CD lần lượt là đường kính của đường tròn đáy của hình nón và hình trụ. Biết AC, BD cắt nhau tại điểm $M \in SO$ và tỉ số thể tích của hình trụ và hình nón là $\frac{4}{9}$. Tỉ số $\frac{SM}{SO}$ bằng



- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{4}{5}$. C. $\frac{5}{6}$. D. $\frac{7}{9}$.

Câu 21. Cắt một hình nón bằng một mặt phẳng song song với đáy thì phần hình nón nằm giữa mặt phẳng và đáy gọi là hình nón cụt. Một chiếc cốc có dạng hình nón cụt cao 9cm , bán kính của đáy cốc và miệng cốc lần lượt là 3cm và 4cm . Hỏi chiếc cốc có thể chứa được lượng nước tối đa là bao nhiêu trong các lựa chọn sau ?



- A. 250 ml . B. 300 ml . C. 350 ml . D. 400 ml .

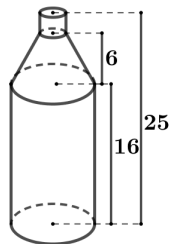
Câu 22. Phần không gian bên trong của chai nước ngọt có hình dạng như hình vẽ. Biết bán kính đáy và bán kính cổ chai lần lượt là $R = 5 \text{ cm}$, $r = 2 \text{ cm}$. Thể tích phần không gian bên trong của chai nước ngọt (giả sử độ dày của vỏ chai không đáng kể) bằng

A. $412\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$

B. $462\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$

C. $490\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$

D. $495\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$



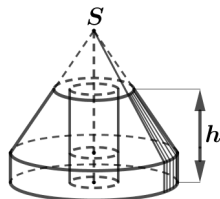
Câu 23. Để định vị một trụ điện, người ta cần đúc một khối bê tông có chiều cao $h = 1,5 \text{ m}$ gồm: Phần dưới có dạng hình trụ

bán kính $R = 1 \text{ m}$ và có chiều cao bằng $\frac{1}{3}h$; Phần trên có dạng

hình nón bán kính đáy bằng R đã bị cắt bỏ bớt một phần hình

nón có bán kính đáy bằng $\frac{1}{2}R$ ở phía trên (người ta gọi hình đó là hình nón cụt);

Phần ở giữa rỗng có dạng hình trụ, bán kính đáy bằng $\frac{1}{4}R$ (tham khảo hình vẽ bên).



Tính thể tích V của khối bê tông (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba).

A. $V = 2,814 \text{ m}^3.$

B. $V = 2,815 \text{ m}^3.$

C. $V = 3,109 \text{ m}^3.$

D. $V = 3,403 \text{ m}^3.$

Câu 24. Trong không gian cho một hình cầu $(\mathcal{S})$ tâm O có bán kính R và một điểm S cho trước sao cho $SO = 2R$. Từ S ta kẻ các tiếp tuyến đến mặt cầu với tiếp điểm thuộc đường tròn $(\mathcal{C}_1)$. Trên mặt phẳng (P) chứa đường tròn $(\mathcal{C}_1)$ ta lấy điểm E thay đổi nằm ngoài mặt cầu $(\mathcal{S})$. Gọi $(\mathcal{N})$ là hình nón có đỉnh là E và đáy là đường tròn $(\mathcal{C}_2)$ gồm các tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ E đến mặt cầu $(\mathcal{S})$. Biết rằng hai đường tròn $(\mathcal{C}_1)$ và $(\mathcal{C}_2)$ luôn có cùng bán kính, khi đó quỹ tích các điểm E là một đường tròn, đường tròn này có bán kính R' bằng

A. $\frac{3R}{2}.$

B. $\frac{R\sqrt{15}}{2}.$

C. $\frac{R\sqrt{17}}{2}.$

D. $\frac{R\sqrt{15}}{4}.$

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $BC = 2\sqrt{2}$ và $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Hình chiếu của S trên mặt phẳng đáy là trung điểm H của BC . Giả sử có mặt cầu tâm O , bán kính bằng 1 tiếp xúc với SA, SB và tia đối của SC lần lượt tại A_1, B_1, C_1 đồng thời mặt cầu tâm O đó cũng tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) (tham khảo hình vẽ).

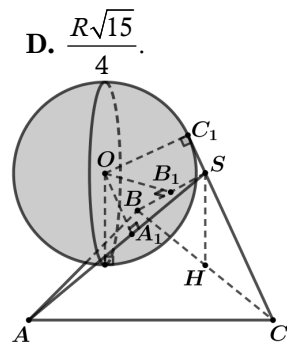
Thể tích của hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}.$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}.$

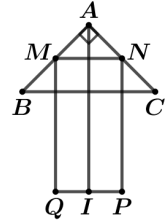
C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}.$

D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}.$



Phần 2. Vật thể tròn xoay

Câu 1. Cho tam giác vuông cân ABC có $AB = AC = a\sqrt{2}$ và hình chữ nhật $MNPQ$ với $MQ = 2MN$ được xếp chồng lên nhau sao cho M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC (như hình vẽ). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình trên quanh trục AI , với I là trung điểm PQ .

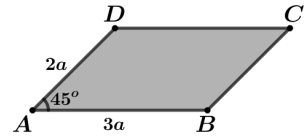


- A. $V = \frac{5\pi a^3}{6}$. B. $V = \frac{11\pi a^3}{6}$. C. $V = \frac{11\pi a^3}{8}$. D. $V = \frac{17\pi a^3}{24}$.

Câu 2. Cho hình thang $ABCD$ vuông A và B với $AB = BC = \frac{AD}{2} = a$. Quay hình thang và miền trong của nó quanh đường thẳng chứa cạnh BC . Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.

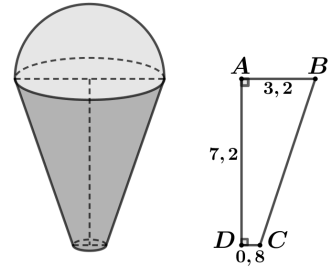
- A. $V = \frac{4\pi a^3}{3}$. B. $V = \frac{5\pi a^3}{3}$. C. $V = \frac{7\pi a^3}{3}$. D. $V = \pi a^3$.

Câu 3. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AD = 2a$, $AB = 3a$, $\widehat{BAD} = 45^\circ$ (như hình vẽ). Tính thể tích V của khối tròn xoay nhận được khi quay hình bình hành $ABCD$ quanh trục AB .



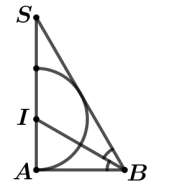
- A. $V = \frac{5\pi a^3}{2}$. B. $V = \frac{9\pi a^3}{2}$. C. $V = 5\pi a^3$. D. $V = 6\pi a^3$.

Câu 4. Một cơ sở sản xuất kem chuẩn bị làm 1000 chiếc kem giống nhau theo đơn đặt hàng. Cốc đựng kem có dạng hình tròn xoay được tạo thành khi quay hình thang $ABCD$ vuông tại A và D xung quanh trục AD (xem hình vẽ). Chiếc cốc có bề dày không đáng kể, chiều cao 7,2 cm; đường kính miệng cốc bằng 6,4 cm; đường kính đáy cốc bằng 1,6 cm. Kem được đổ đầy cốc và dư ra phía ngoài một lượng có dạng nửa hình cầu, có bán kính bằng bán kính miệng cốc. Cơ sở đó cần dùng lượng kem gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau



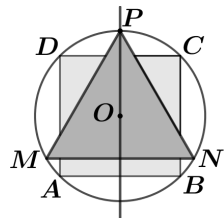
- A. 132 dm³. B. 170 dm³. C. 293 dm³. D. 954 dm³.

Câu 5. Cho tam giác SAB vuông tại A , $\widehat{ABS} = 60^\circ$, đường phân giác trong $\widehat{ABS}$ cắt SA tại I . Vẽ nửa đường tròn tâm I bán kính IA (như hình vẽ). Cho tam giác SAB và nửa đường tròn trên cùng quay quanh SA tạo nên khối cầu và khối nón tương ứng có thể tích là V_1 và V_2 . Khẳng định nào sau đây đúng ?



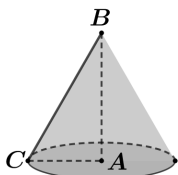
- A. $V_1 = 3V_2$. B. $2V_1 = 3V_2$. C. $4V_1 = 9V_2$. D. $9V_1 = 4V_2$.

Câu 6. Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn O , bán kính r ; tam giác đều MNP nội tiếp đường tròn đó và MN song song AB (như hình vẽ). Cho mô hình trên quay quanh đường thẳng OP . Kí hiệu V_1, V_2, V_3 là thể tích khối tròn xoay do hình vuông, hình tròn và tam giác đều tạo thành. Khẳng định nào sau đây đúng ?

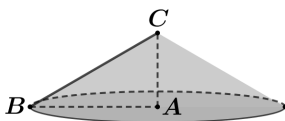


- A. $V_1 = V_2 + V_3$. B. $V_3 = V_2 + V_1$. C. $V_1^2 = V_2 \cdot V_3$. D. $V_3^2 = V_2 \cdot V_1$.

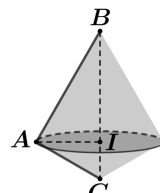
Câu 7. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AC = a$, $AB = a\sqrt{3}$. Gọi V_1, V_2, V_3 là thể tích các khối tròn xoay sinh bởi tam giác ABC kể cả các điểm trong khi lần lượt quay quanh các cạnh AB, AC, BC . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ?



Hình 1



Hình 2



Hình 3

- A. $\frac{1}{V_1} = \frac{1}{V_3} + \frac{1}{V_2}$. B. $\frac{1}{V_3} = \frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}$. C. $\frac{1}{V_2^2} = \frac{1}{V_3^2} + \frac{1}{V_1^2}$. D. $\frac{1}{V_3^2} = \frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2}$.

Câu 8. Cho hình tứ diện $ABCD$ có AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) và tam giác ABC vuông tại B . Biết $BC = a$, $AB = a\sqrt{3}$, $AD = 3a$. Quay các tam giác ABC và ABD (bao gồm cả điểm bên trong hai tam giác) xung quanh đường thẳng AB ta được hai khối tròn xoay. Thể tích phần chung của hai khối tròn xoay bằng

- A. $\frac{8a^3\pi\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{3a^3\pi\sqrt{3}}{16}$. C. $\frac{4a^3\pi\sqrt{3}}{16}$. D. $\frac{5a^3\pi\sqrt{3}}{16}$.

Câu 9. Ban đầu ta có một tam giác đều cạnh bằng 3 như hình 1. Tiếp theo ta chia mỗi cạnh của tam giác thành 3 đoạn bằng nhau, dựng một tam giác đều về phía bên ngoài có một cạnh là đoạn giữa, sau đó bỏ đi đoạn giữa ta được hình 2. Khi quay hình 2 xung quanh d ta được một khối tròn xoay có thể tích bằng



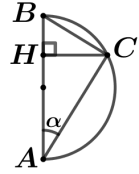
Hình 1



Hình 2

- A. $\frac{5\pi\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{5\pi\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{5\pi\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{9\pi\sqrt{3}}{8}$.

Câu 10. Cho nửa đường tròn đường kính $AB=2R$ và điểm C thay đổi trên nửa đường tròn đó, đặt $\alpha=\widehat{CAB}$ và gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB (như hình vẽ). Tìm α sao cho thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay tam giác ACH quanh trục AB đạt giá trị lớn nhất.



A. $\alpha = 45^\circ$.

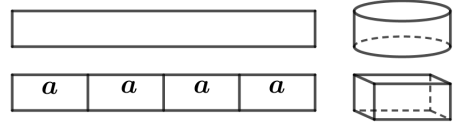
B. $\alpha = 60^\circ$.

C. $\arctan\sqrt{2}$.

D. $\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Phần 3. Ứng dụng thực tiễn

Câu 1. Bé Bách có một tấm bìa có chiều dài 20 cm; chiều rộng 1 cm. Bé muốn gấp một cái hộp nhỏ xinh để bỏ kẹp tóc vào hộp đó tặng quà cho mẹ ngày 20 tháng 10. Anh Siêu đã chỉ



cho bé hai cách gấp hộp. Cách thứ nhất là bé cuốn tấm bìa thành một cái hộp hình trụ không có hai đáy có thể tích V_1 . Cách thứ hai là bé gấp tấm bìa một hình hộp chữ nhật có thể tích V_2 có các kích thước như hình vẽ. Hãy tìm tỉ số thể tích của hai hộp để biết được gấp theo cách nào sẽ có thể tích lớn hơn.

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{\pi}$.

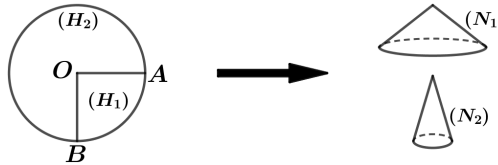
B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi}{4}$.

C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{4}$.

D. $\frac{V_1}{V_2} = 4$.

Câu 2. Một tấm tôn hình tròn tâm O , bán kính R được chia thành hai hình $(\mathcal{H}_1)$ và $(\mathcal{H}_2)$ như hình vẽ. Cho biết góc $\widehat{AOB} = 90^\circ$. Từ hình $(\mathcal{H}_1)$ gò tấm tôn để được hình nón $(\mathcal{N}_1)$ không đáy và từ hình $(\mathcal{H}_2)$ gò tấm tôn để được hình nón $(\mathcal{N}_2)$ không đáy.

Ký hiệu V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hình nón $(\mathcal{N}_1), (\mathcal{N}_2)$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng



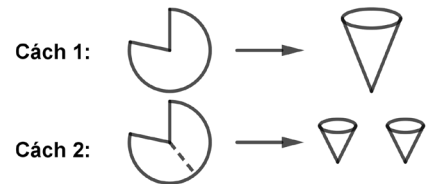
A. 2.

B. 3.

C. $\frac{3\sqrt{105}}{5}$.

D. $\frac{7\sqrt{105}}{9}$.

Câu 3. Từ cùng một tấm kim loại dẻo hình quạt (như hình vẽ) có kích thước bán kính $R=5$ và chu vi của hình quạt là $P=8\pi+10$, người ta gò tấm kim loại thành những chiếc phễu theo hai cách:

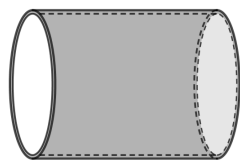


Cách 1. Gò tấm kim loại ban đầu thành mặt xung quanh của một cái phễu.

Cách 2. Chia đôi tấm kim loại thành hai phần bằng nhau rồi gò thành mặt xung quanh của hai cái phễu. Gọi V_1 là thể tích của cái phễu thứ nhất, V_2 là tổng thể tích của hai cái phễu ở cách thứ hai. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

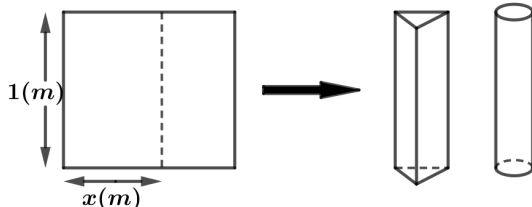
- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{7}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2\sqrt{2}}{7}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sqrt{21}}{7}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$.

Câu 4. Để làm cống thoát nước cho một khu vực dân cư người ta cần đúc 500 ống hình trụ có đường kính trong và chiều cao của mỗi ống bằng 1 m, độ dày của thành ống là 10 cm. Chọn mác bê tông là 250 (tức mỗi khối bê tông là 7 bao xi măng). Hỏi phải chuẩn bị bao nhiêu bao xi măng để làm đủ số ống nói trên ?



- A. ≈ 1110 (bao). B. ≈ 1200 (bao). C. ≈ 1210 (bao). D. ≈ 4210 (bao).

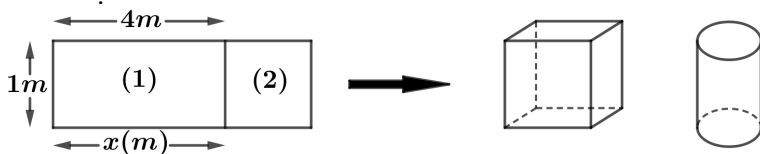
Câu 5. Cắt một miếng tôn hình vuông cạnh 1 m thành hai hình chữ nhật, trong đó một hình có chiều rộng x (m), gọi miếng tôn này là miếng tôn thứ nhất. Người ta gò miếng tôn thứ nhất



thành một lăng trụ tam giác đều, miếng còn lại gò thành một hình trụ (như hình vẽ). Tìm x để tổng thể tích khối lăng trụ và khối trụ thu được là nhỏ nhất.

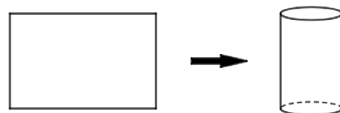
- A. $x = \frac{9}{\sqrt{3}\pi + 9}$. B. $x = \frac{1}{3\sqrt{3}\pi + 1}$. C. $x = \frac{9}{9\pi + \sqrt{3}}$. D. $x = \frac{1}{\pi + \sqrt{3}}$.

Câu 6. Một tấm tôn hình chữ nhật có chiều dài 4m, chiều rộng 1m. Một người thợ muốn cắt tấm tôn này thành hai phần như hình vẽ. Người thợ gò phần 1 thành hình trụ có đáy hình vuông và phần 2 thành hình trụ có đáy hình tròn. Tìm x để tổng thể tích của hai khối trụ là nhỏ nhất.



- A. $x = \frac{4\pi}{\pi + 4}$. B. $x = \frac{8}{\pi + 4}$. C. $x = \frac{16}{\pi + 4}$. D. $x = \frac{16\pi}{\pi + 4}$.

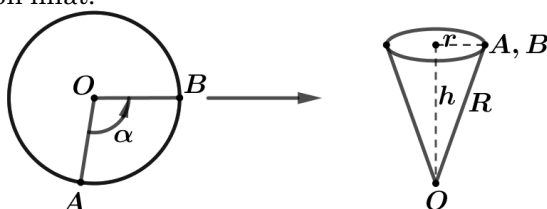
Câu 7. Từ một tấm tôn hình chữ nhật người ta cuộn thành một chiếc thùng hình trụ không đáy (như hình vẽ). Biết tấm tôn có chu vi bằng 120 cm. Để chiếc thùng có thể tích lớn nhất thì chiều dài, rộng của mảnh tôn lần lượt là



- A. 35 cm; 25 cm. B. 30 cm; 30 cm. C. 40 cm; 20 cm. D. 50 cm; 10 cm.

Câu 8. Bạn An có một tấm bìa hình tròn như hình vẽ, An muốn biến hình tròn đó thành một cái phễu hình nón. Khi đó An phải cắt hình quạt tròn OAB rồi dán hai bán

kính OA, OB lại với nhau. Gọi α là góc ở tâm hình quạt tròn dùng làm phễu. Tìm α để thể tích phễu là lớn nhất.



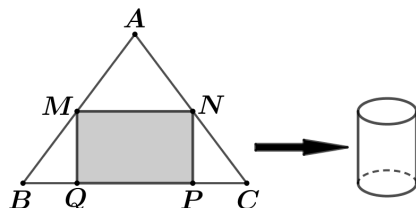
A. $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

B. $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

C. $\alpha = \frac{2\sqrt{6}\pi}{3}$.

D. $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Câu 9. Có tấm bìa hình tam giác vuông cân ABC có cạnh huyền BC bằng a . Người ta muốn cắt tấm bìa đó thành hình chữ nhật $MNPQ$ rồi cuộn lại thành một hình trụ không đáy như hình vẽ. Diện tích hình chữ nhật đó bằng bao nhiêu để diện tích xung quanh của hình trụ là lớn nhất?



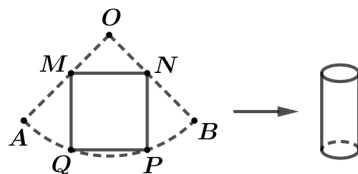
A. $\frac{a^2}{2}$.

B. $\frac{a^2}{4}$.

C. $\frac{a^2}{8}$.

D. $\frac{a^2}{12}$.

Câu 10. Cho tấm tôn hình nón có bán kính đáy là $r = \frac{2}{3}$, độ dài đường sinh $\ell = 2$. Người ta cắt theo một đường sinh và trải phẳng ra được một hình quạt. Gọi M, N thứ tự là trung điểm của OA, OB .



Hỏi khi cắt hình quạt theo hình chữ nhật $MNPQ$ (hình vẽ) và tạo thành hình trụ (không đáy) có đường PN trùng MQ thì được khối trụ có thể tích bằng

A. $\frac{3(\sqrt{13}-1)}{4\pi}$.

B. $\frac{3(\sqrt{13}-1)}{8\pi}$.

C. $\frac{\sqrt{13}-1}{9\pi}$.

D. $\frac{5(\sqrt{13}-1)}{12\pi}$.

Phần 4. Các khối NÓN – TRỤ – CẦU tiếp xúc

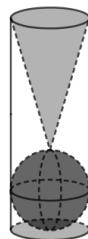
Câu 1. Trên bàn có một cốc nước hình trụ chứa đầy nước, có chiều cao bằng 3 lần đường kính của đáy; Một viên bi và một khối nón đều bằng thủy tinh. Biết viên bi là một khối cầu có đường kính bằng đường kính của cốc nước. Người ta từ từ thả vào cốc nước viên bi và khối nón đó (như hình vẽ) thì thấy nước trong cốc tràn ra ngoài. Tính tỉ số thể tích của lượng nước còn lại trong cốc và lượng nước ban đầu (bỏ qua bề dày của lớp vỏ thủy tinh).

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{4}{9}$.

D. $\frac{5}{9}$.

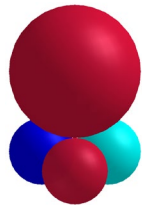


Câu 2. Một cái ống nghiệm hình trụ có bán kính trong lòng ống là R , ống nghiệm đang chứa một lượng nước có chiều cao h . Người ta thả 3 viên bi có cùng bán kính R vào ống nghiệm thì mực nước dâng lên vừa đủ phủ kín viên bi cao nhất như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng?



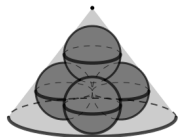
- A. $h = 3R$. B. $h = 2R$. C. $h = \sqrt{2}R$. D. $h = \sqrt[3]{3}R$.

Câu 3. Ba quả bóng dạng hình cầu có bán kính bằng 1 đôi một tiếp xúc nhau và tiếp xúc với mặt phẳng (P) . Mặt cầu (S) bán kính bằng 2 tiếp xúc với ba quả bóng trên. Gọi M là điểm bất kì trên (S) , MH là khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) . Giá trị lớn nhất của MH bằng



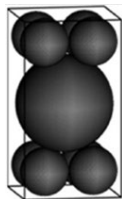
- A. $3 + \frac{\sqrt{30}}{2}$. B. $3 + \frac{\sqrt{69}}{3}$. C. $3 + \frac{\sqrt{123}}{4}$. D. $\frac{52}{9}$.

Câu 4. Có một hình nón chứa bốn quả bóng bàn bằng nhau, đường kính mỗi quả bóng bàn là 4. Các quả bóng bàn tiếp xúc với nhau, ba quả tiếp xúc với đáy của hình nón đồng thời bốn quả tiếp xúc với mặt xung quanh của hình nón như hình vẽ. Chiều cao của hình nón bằng



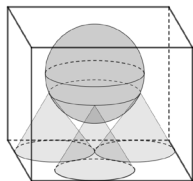
- A. $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + 2$. B. $2\sqrt{3} + \frac{4}{\sqrt{3}}$. C. $2\sqrt{3} + \frac{4}{\sqrt{3}} + 2$. D. $2\sqrt{3} + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + 2$.

Câu 5. Một khối hộp chữ nhật có kích thước $4\text{cm} \times 4\text{cm} \times h\text{cm}$ chứa một quả cầu lớn và tám quả cầu nhỏ. Biết quả cầu lớn có bán kính $R = 2\text{cm}$ và quả cầu nhỏ có bán kính $r = 1\text{cm}$; các quả cầu tiếp xúc nhau và tiếp xúc các mặt của hình hộp (như hình vẽ). Tìm h .



- A. $h = 2(1 + 2\sqrt{2})$ (cm). B. $h = 2(1 + \sqrt{7})$ (cm).
C. $h = 2(3 + \sqrt{7})$ (cm). D. $h = 8$ (cm).

Câu 6. Một bể hình hộp chữ nhật chứa đầy nước. Người ta cho ba khối nón giống nhau có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân vào bể sao cho ba đường tròn đáy của ba khối nón tiếp xúc với nhau, một khối nón có đường tròn đáy chỉ tiếp xúc với một cạnh của đáy bể và hai khối nón còn lại có đường tròn đáy tiếp xúc với hai cạnh của đáy bể (tham khảo hình vẽ). Sau đó người ta đặt lên



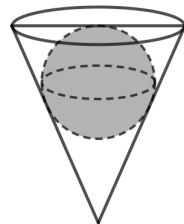
đỉnh của ba khối nón một khối cầu có bán kính bằng $\frac{4}{3}$ lần bán kính đáy của khối nón. Biết khối cầu vừa đủ ngập trong nước (mặt trên của bể là tiếp diện của mặt cầu) và lượng nước tràn ra là $\frac{337\pi}{3} (\text{cm}^3)$. Thể tích lượng nước ban đầu ở trong bể xấp xỉ

- A. $885,2 (\text{cm}^3)$. B. $1106,2 (\text{cm}^3)$. C. $1174,2 (\text{cm}^3)$. D. $1209,2 (\text{cm}^3)$.

Câu 7. Cho hình nón có bán kính đáy $R = 5a$, độ dài đường sinh $\ell = 13a$. Thể tích khối cầu nội tiếp hình nón bằng

- A. $\frac{40\pi a^3}{9}$. B. $\frac{400\pi a^3}{27}$. C. $\frac{4000\pi a^3}{27}$. D. $\frac{4000\pi a^3}{81}$.

Câu 8. Một bình đựng nước dạng hình nón (không có đáy), đựng đầy nước. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng một nửa chiều cao của bình nước và đo được thể tích tràn ra là $\frac{32\pi}{3} (\text{dm}^3)$. Biết rằng khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh



của hình nón và toàn bộ khối cầu chìm trong nước, trong đó mặt nước là tiết diện của khối cầu (hình vẽ bên). Thể tích nước còn lại trong bình bằng

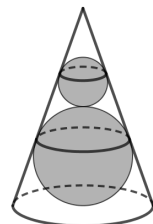
- A. $\frac{16\pi}{3} (\text{dm}^3)$. B. $\frac{32\pi}{3} (\text{dm}^3)$. C. $\frac{40\pi}{3} (\text{dm}^3)$. D. $\frac{64\pi}{3} (\text{dm}^3)$.

Câu 9. Một cái ly nước dạng hình nón, đựng đầy nước. Người ta thả vào đó một khối cầu không thấm nước, có đường kính bằng chiều cao của bình nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là V . Biết rằng khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón và đúng một nửa khối cầu chìm trong nước như hình vẽ. Thể tích nước còn lại trong ly bằng



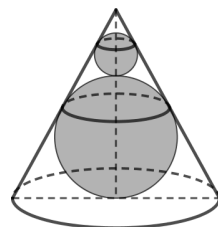
- A. V . B. $\frac{1}{\pi}V$. C. $\frac{1}{3}V$. D. $\frac{1}{6}V$.

Câu 10. Người ta đặt được vào trong một hình nón hai khối cầu có bán kính lần lượt là a và $2a$ sao cho các khối cầu đều tiếp xúc với mặt xung quanh của hình nón, hai khối cầu tiếp xúc với nhau và khối cầu lớn tiếp xúc với đáy của hình nón (tham khảo hình vẽ). Bán kính đáy của hình nón đã cho bằng



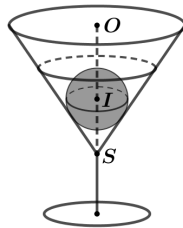
- A. $a\sqrt{5}$. B. $2\sqrt{2}a$. C. $3a$. D. $\frac{8a}{3}$.

Câu 11. Người ta chế tạo ra một món đồ chơi cho trẻ em theo các công đoạn như sau: Trước tiên, chế tạo ra một hình nón tròn xoay có góc ở đỉnh là $2\alpha = 60^\circ$ bằng thủy tinh cho trong suốt. Sau đó đặt hai quả cầu nhỏ bằng thủy tinh có bán kính lớn, nhỏ khác nhau sao cho hai mặt cầu tiếp xúc với nhau và đều tiếp xúc với mặt nón, quả cầu lớn tiếp xúc với cả mặt đáy của hình nón (hình vẽ). Biết rằng chiều cao của hình nón là 9 cm. Bỏ qua bề dày của các lớp vỏ thủy tinh, tổng thể tích của hai khối cầu bằng



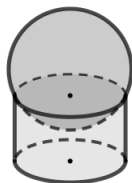
- A. $\frac{38\pi}{3} (\text{cm}^3)$. B. $\frac{40\pi}{3} (\text{cm}^3)$. C. $\frac{100\pi}{3} (\text{cm}^3)$. D. $\frac{112\pi}{3} (\text{cm}^3)$.

Câu 12. Một ly nước có dạng như hình vẽ. Phần phía trên chứa nước có dạng hình nón đỉnh S với đường kính đáy và chiều cao SO cùng bằng 8cm. Ban đầu ly chứa lượng nước có chiều cao 4cm so với đỉnh S . Cho vào ly nước một viên bi sắt hình cầu thì nước dâng lên vừa phủ kín viên bi. Tính bán kính r của viên bi làm tròn đến hai chữ số thập phân.



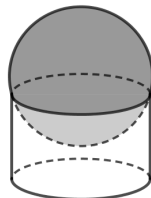
- A. $r = 1,23\text{cm}$. B. $r = 1,28\text{cm}$. C. $r = 1,53\text{cm}$. D. $r = 1,78\text{cm}$.

Câu 13. Một chiếc chén hình trụ có chiều cao bằng đường kính quả bóng bàn. Người ta đặt quả bóng lên chiếc chén thấy phần ở ngoài của quả bóng có chiều cao bằng $\frac{3}{4}$ chiều cao của nó. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của quả bóng và chiếc chén. Khi đó



- A. $3V_1 = 2V_2$. B. $9V_1 = 8V_2$. C. $16V_1 = 9V_2$. D. $27V_1 = 8V_2$.

Câu 14. Một quả cầu có thể tích $\frac{256}{3}\pi \text{ (cm}^3\text{)}$ được đặt vào một chiếc cốc có dạng hình trụ với đường kính đáy là 6 cm như hình vẽ. Phần nhô ra khỏi chiếc cốc của quả cầu bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



- A. 2,00 cm. B. 4,00 cm. C. 4,65 cm. D. 6,65 cm.

Câu 15. Một hình cầu nội tiếp trong một hình nón cụt. Hình cầu nội tiếp trong hình nón cụt là hình cầu tiếp xúc với hai đáy của hình nón cụt và tiếp với mặt xung quanh của hình nón cụt (tham khảo hình vẽ). Biết rằng thể tích khối nón cụt gấp đôi thể tích của khối cầu. Tỷ lệ giữa bán kính đáy lớn và bán kính đáy nhỏ của hình nón cụt bằng



- A. $\sqrt{3}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. D. $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Phần 5. Mặt cầu ngoại tiếp khối chóp

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $BC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC) . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh bên SB và SC . Thể tích của khối cầu ngoại tiếp chóp $A.HKCB$ bằng

- A. $\sqrt{2}\pi a^3$. B. $\frac{\pi a^3}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$. D. $\frac{\pi a^3}{6}$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và $BD = a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy là trung điểm OD . Đường thẳng SD tạo với mặt đáy một góc bằng 60° . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

- A. a . B. $\frac{a}{2}$. C. $\frac{a}{3}$. D. $\frac{a}{4}$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Đường thẳng SA vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm SC , mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A và M đồng thời song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại E, F . Bán kính mặt cầu đi qua năm điểm S, A, E, M, F bằng

- A. a . B. $a\sqrt{2}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Đường thẳng SA vuông góc đáy $(ABCD)$. Gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng SB . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $HBCD$ bằng

- A. a . B. $a\sqrt{2}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

- A. $\frac{\pi a^3}{3}$. B. $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$. C. $\frac{\pi a^3}{6}$. D. $\frac{11\sqrt{11}\pi a^3}{162}$.

Câu 6. Cho hình chóp $O.ABC$ có $OA = OB = OC = a$, $\widehat{AOB} = 60^\circ$, $\widehat{BOC} = 90^\circ$, $\widehat{COA} = 120^\circ$. Gọi S là trung điểm của OB . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{7}}{2}$. C. $\frac{a}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{7}}{4}$.

Câu 7. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên bằng $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Gọi D là điểm đối xứng của B qua C . Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABD$ bằng

- A. $\frac{a\sqrt{37}}{6}$. B. $\frac{a\sqrt{35}}{7}$. C. $\frac{a\sqrt{36}}{7}$. D. $\frac{a\sqrt{39}}{7}$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với $AD = DC = CB = 1$, $AB = 2$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , hình chiếu vuông góc của S xuống mặt $(ABCD)$ là trung điểm của OA . Đường thẳng SC tạo với mặt đáy $(ABCD)$ một góc bằng 60° . Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

- A. $\frac{17\pi\sqrt{59}}{54}$. B. $\frac{31\pi\sqrt{61}}{81}$. C. $\frac{31\pi\sqrt{51}}{162}$. D. $\frac{61\pi\sqrt{61}}{162}$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = \frac{1}{2}AD = a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy. Gọi E là trung điểm của AD . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ECD$ bằng

A. $\frac{\sqrt{114}}{2}a$.

B. $\frac{\sqrt{114}}{4}a$.

C. $\frac{\sqrt{114}}{6}a$.

D. $\frac{\sqrt{114}}{8}a$.

Câu 10. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh $2a$. Mặt bên tạo với đáy góc 60° . Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên SD . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $HADC$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$.

B. $\frac{a\sqrt{21}}{6}$.

C. $\frac{11a\sqrt{5}}{20}$.

D. $\frac{11a\sqrt{5}}{50}$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CMN$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{37}}{6}$.

B. $\frac{a\sqrt{29}}{8}$.

C. $\frac{5a\sqrt{3}}{12}$.

D. $\frac{a\sqrt{93}}{12}$.

Câu 12. Cho tứ diện đều $ABCD$ có mặt cầu nội tiếp là (S_1) và mặt cầu ngoại tiếp là (S_2) . Một hình lập phương ngoại tiếp (S_2) và nội tiếp mặt cầu (S_3) . Gọi r_1, r_2, r_3 lần lượt là bán kính các mặt cầu $(S_1), (S_2), (S_3)$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $\frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{3}$ và $\frac{r_2}{r_3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

B. $\frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{3}$ và $\frac{r_2}{r_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

C. $\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{3}$ và $\frac{r_2}{r_3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

D. $\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{3}$ và $\frac{r_2}{r_3} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2 và hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{AHB} = 150^\circ$, $\widehat{BHC} = 120^\circ$, $\widehat{CHA} = 90^\circ$. Biết tổng diện tích mặt cầu ngoại tiếp các hình chóp $S.HAB$, $S.HBC$, $S.HCA$ là $\frac{124}{3}\pi$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{9}{2}$.

B. $\frac{4}{3}$.

C. $\frac{9}{4}$.

D. 4.

Câu 14. Cho tứ diện $ABCD$ với $AB = a, CD = b$ và các cạnh còn lại có độ dài bằng nhau. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD và $MN = m$. Biết rằng tồn tại một mặt cầu tiếp xúc với 6 cạnh của tứ diện đã cho. Hệ thức nào sau đây đúng ?

A. $ab = m^2$.

B. $ab = 2m^2$.

C. $2ab = m^2$.

D. $3ab = 2m^2$.

Câu 15. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC và P là điểm thuộc tia đối của SC sao cho $SC = 3SP$. Biết rằng trong các mặt cầu đi qua A, M, N thì mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AMNP$ có bán kính nhỏ nhất. Thể tích của hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{16}$.

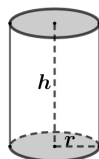
B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{32}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{48}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{96}$.

Phần 6. Bài toán cực trị

Câu 1. Một hình trụ có thể tích V không đổi. Tìm mối quan hệ giữa bán kính r của đáy và chiều cao h của hình trụ khi diện tích toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất.

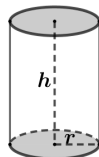


- A. $h = r$. B. $h = \sqrt{2}r$. C. $h = \sqrt{3}r$. D. $h = 2r$.

Câu 2. Một hộp sữa hình trụ có thể tích V (không đổi) được làm từ một tấm tôn có diện tích đủ lớn. Nếu hộp sữa chỉ kín một đáy thì để tốn ít vật liệu nhất, hệ thức giữa bán kính đáy r và đường cao h là

- A. $h = r$. B. $h = \sqrt{2}r$. C. $h = \sqrt{3}r$. D. $h = 2r$.

Câu 3. Trong số các hình trụ có diện tích toàn phần đều bằng S thì bán kính r và chiều cao h của khối trụ có thể tích lớn nhất là



- A. $r = \sqrt{\frac{S}{2\pi}}; h = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{2\pi}}$. B. $r = \sqrt{\frac{S}{2\pi}}; h = 2\sqrt{\frac{S}{2\pi}}$.
C. $r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}; h = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$. D. $r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}; h = 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$.

Câu 4. Người ta thiết kế một thùng chứa hình trụ (như hình vẽ) có thể tích V không đổi. Biết rằng giá của vật liệu làm mặt đáy và nắp của thùng bằng nhau và đắt gấp 3 lần so với giá vật liệu để làm mặt xung quanh của thùng (chi phí cho mỗi đơn vị diện tích). Gọi chiều cao



của thùng là h và bán kính đáy là r . Tính tỷ số $\frac{h}{r}$ sao cho chi phí vật liệu sản xuất thùng nhỏ nhất.

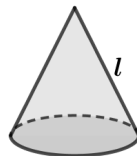
- A. $\frac{h}{r} = 1$. B. $\frac{h}{r} = 2$. C. $\frac{h}{r} = 6$. D. $\frac{h}{r} = 9$.

Câu 5. Nam muốn xây một bình chứa hình trụ có thể tích 72m^3 . Đáy làm bằng bê tông giá 100 nghìn đồng/ m^2 , thành làm bằng tôn giá 90 nghìn đồng/ m^2 , nắp bằng nhôm giá 140 nghìn đồng/ m^2 . Vậy đáy của hình trụ có bán kính bằng bao nhiêu để chi phí xây dựng là thấp nhất?

- A. $\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$. B. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$. C. $\frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$. D. $\frac{3}{2\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$.

Câu 6 Trong tất cả các hình nón có độ dài đường sinh bằng ℓ . Hình nón có thể tích lớn nhất bằng

- A. $\frac{\pi \ell^3 \sqrt{3}}{9}$. B. $\frac{2\pi \ell^3 \sqrt{3}}{9}$.
C. $\frac{\pi \ell^3 \sqrt{3}}{27}$. D. $\frac{2\pi \ell^3 \sqrt{3}}{27}$.



Câu 7. Trong các hình nón cùng có diện tích toàn phần bằng S . Hình nón có thể tích lớn nhất khi (r, ℓ lần lượt là bán kính đáy và đường sinh của hình nón)

- C. $\ell = r$. D. $\ell = 2r$. B. $\ell = 2\sqrt{2}r$. A. $\ell = 3r$.

Câu 8. Cho hình nón đỉnh S có đáy là đường tròn tâm O . Thiết diện qua trục hình nón là một tam giác cân với cạnh đáy bằng a và có diện tích là a^2 . Gọi A, B là hai điểm bất kỳ trên đường tròn (O). Thể tích khối chóp $S.OAB$ đạt giá trị lớn nhất bằng

- A. $\frac{a^3}{2}$. B. $\frac{a^3}{6}$. C. $\frac{a^3}{12}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Câu 9. Cho mặt cầu (S) bán kính $R = 5$ cm. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có chu vi bằng 8π cm. Bốn điểm A, B, C, D thay đổi sao cho A, B, C thuộc đường tròn (C), điểm D thuộc (S) ($D \notin (C)$) và tam giác ABC đều. Thể tích lớn nhất của tứ diện $ABCD$ bằng

- A. $20\sqrt{3} \text{ cm}^3$. B. $32\sqrt{3} \text{ cm}^3$. D. $60\sqrt{3} \text{ cm}^3$. D. $96\sqrt{3} \text{ cm}^3$.

Câu 10. Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 9, hình chóp có thể tích lớn nhất bằng

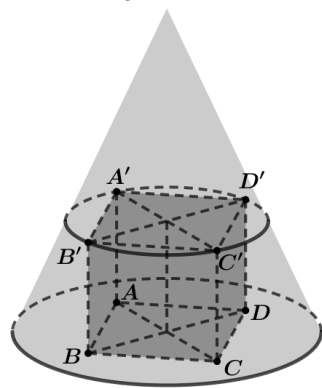
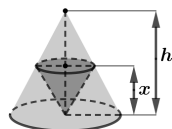
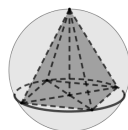
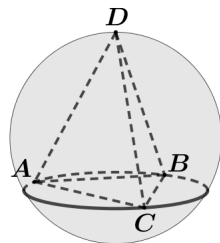
- A. 484. B. 529.
C. 576. D. 625.

Câu 11. Cho hình nón ($\mathcal{N}_1$) có đỉnh S , chiều cao h . Một hình nón ($\mathcal{N}_2$) có đỉnh là tâm của đáy ($\mathcal{N}_1$) và có đáy là một thiết diện song song với đáy của ($\mathcal{N}_1$) như hình vẽ. Khối nón ($\mathcal{N}_2$) có thể tích lớn nhất khi chiều cao x bằng

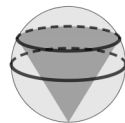
- A. $\frac{h}{2}$. B. $\frac{h}{3}$. C. $\frac{2h}{3}$. D. $\frac{h\sqrt{3}}{3}$.

Câu 12. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 1. Gọi ($\mathcal{N}$) là một hình nón có tâm đường tròn đáy trùng với tâm của hình vuông $ABCD$, đồng thời các điểm A', B', C', D' nằm trên các đường sinh của hình nón như hình vẽ. Thể tích khối nón ($\mathcal{N}$) có giá trị nhỏ nhất bằng

- A. $\frac{2\pi}{3}$. B. $\frac{3\pi}{4}$.
C. $\frac{9\pi}{8}$. D. $\frac{9\pi}{16}$.



Câu 13. Trong các hình nón nội tiếp một hình cầu có bán kính bằng R không đổi, tính chiều cao h và bán kính mặt đáy r của hình nón có thể tích lớn nhất.



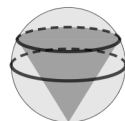
A. $h = \frac{4}{3}R$; $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$.

B. $h = \frac{3}{2\sqrt{2}}R$; $r = \frac{3}{4}R$.

C. $h = \frac{4}{3}R$; $r = \frac{\sqrt{2}}{3}R$.

D. $h = \frac{3}{2}R$; $r = \frac{1}{2}R$.

Câu 14. Cho mặt cầu (S) có bán kính R không đổi, hình nón (N) bất kì nội tiếp mặt cầu (S) như hình vẽ. Thể tích khối nón (N) là



V_1 ; thể tích phần còn lại là V_2 . Giá trị lớn nhất của $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{32}{49}$.

B. $\frac{32}{76}$.

C. $\frac{49}{81}$.

D. $\frac{32}{81}$.

Câu 15. Một hạt ngọc trai hình cầu có bán kính R được bọc trong một hộp trang sức dạng hình nón ngoại tiếp mặt cầu như hình vẽ. Hỏi nhà sản xuất phải thiết kế hộp trang sức hình nón có chiều cao h như thế nào để hộp quà đó có thể tích nhỏ nhất.



A. $h = 2\sqrt{2}R$.

B. $h = 3R$.

C. $h = 4R$.

D. $h = 5R$.

Câu 16. Cho nửa hình cầu bán kính R không đổi. Một hình nón có chiều cao h , bán kính đáy là r tiếp xúc với nửa hình cầu như hình vẽ (hai đường tròn đáy là đồng tâm và cùng thuộc một mặt phẳng). Khi diện tích xung quanh của hình nón là nhỏ nhất, khẳng định nào sau đây đúng?



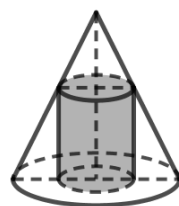
A. $h = r$.

B. $h = \sqrt{2}r$.

C. $h = \sqrt{3}r$.

D. $h = 2\sqrt{3}r$.

Câu 17. Cho một hình nón có chiều cao h và bán kính của đường tròn đáy là R . Một mặt phẳng (P) thay đổi song song với mặt chứa đáy của hình nón và cắt hình nón theo một đường tròn giao tuyến (C) . Dựng hình trụ $(\mathcal{H})$ có một đáy là đường tròn (C) và đáy còn lại nằm trên mặt đáy của hình nón như hình vẽ. Khi khối trụ $(\mathcal{H})$ có thể tích lớn nhất, gọi h' là chiều cao



của $(\mathcal{H})$ và R' là bán kính đáy của $(\mathcal{H})$. Khẳng định nào sau đây đúng?

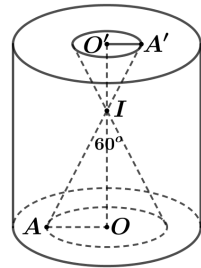
A. $h' = \frac{1}{2}h$; $R' = \frac{1}{2}R$.

B. $h' = \frac{1}{3}h$; $R' = \frac{2}{3}R$.

C. $h' = \frac{1}{4}h$; $R' = \frac{3}{4}R$.

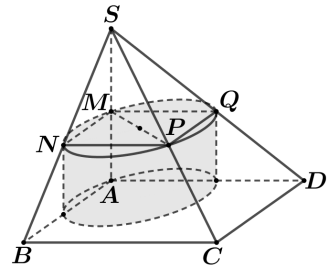
D. $h' = \frac{3}{4}h$; $R' = \frac{1}{4}R$.

Câu 18. Cho khối gỗ hình trụ có bán kính 3(cm) và chiều cao 6(cm), đáy là hai hình tròn tâm O và O' . Đục khối gỗ này tạo ra hai khối nón có đỉnh nằm trên OO' và đáy trùng với hai đáy của khối gỗ sao cho góc ở đỉnh bằng 60° (như hình vẽ) và $OI = x$ ($3\sqrt{2} < x < 3\sqrt{3}$). Giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích xung quanh hai hình nón đã đục bằng



- A. $12\pi(\text{cm}^2)$. B. $14\pi(\text{cm}^2)$. C. $44\pi(\text{cm}^2)$. D. $72\pi(\text{cm}^2)$.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$. Cạnh bên $SA = 4a$ và vuông góc với đáy. Gọi M là một điểm trên cạnh SA (khác A và S). Mặt phẳng (α) qua M và vuông góc với SA cắt SB, SC, SD lần lượt tại N, P, Q . Hình trụ $(\mathcal{H})$ có đáy là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MNPQ$ và có một đường



sinh là MA như hình vẽ. Khi khối trụ $(\mathcal{H})$ có thể tích lớn nhất thì tỉ số $\frac{SM}{SA}$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{3}{4}$.

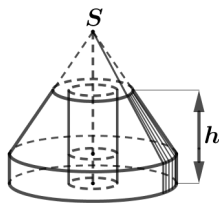
Câu 20. Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R)$, chiều cao bằng đường kính đáy. Trên đường tròn tâm O lấy điểm A , trên đường tròn tâm O' lấy điểm B . Thể tích của khối tứ diện $OO'AB$ có giá trị lớn nhất bằng

- A. $\frac{R^3}{2}$. B. $\frac{R^3}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}R^3}{3}$. D. $\frac{R^3}{6}$.

----- HẾT -----

NÓN – TRỤ – CẦU

Vận dụng cao



Phần 1. Thể tích và các yếu tố liên quan

Phần 2. Vật thể tròn xoay

Phần 3. Ứng dụng thực tiễn

Phần 4. Các khối NÓN – TRỤ – CẦU tiếp xúc

Phần 5. Mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện

Phần 6. Bài toán cực trị

Phần 1. Thể tích và các yếu tố liên quan

Câu 1. Một chiếc thùng hình trụ có bán kính đáy $R = 20$, bên trong đựng một lượng nước. Biết rằng khi nghiêng thùng sao cho đường sinh của hình trụ tạo với mặt đáy góc 45° cho đến khi nước lặng thì mặt nước chạm vào hai điểm A và B nằm trên hai mặt đáy như hình vẽ bên. Thể tích của thùng đã cho bằng

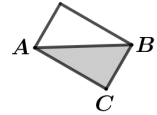


- A. 16000π . B. 12000π . C. 8000π . D. 6000π .

Lời giải. Xét phần mặt cắt và kí hiệu các điểm như hình vẽ.

Ta có $\widehat{BAC} = 45^\circ$ suy ra $\triangle ABC$ vuông cân nên $BC = CA = 40$.

Vậy thể tích thùng nước $V = \pi \left(\frac{AC}{2} \right)^2 \cdot BC = 16000\pi$. **Chọn A.**



Câu 2. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.EFGH$. Tính tỉ số k giữa thể tích khối trụ ngoại tiếp và thể tích khối trụ nội tiếp hình lăng trụ trên.

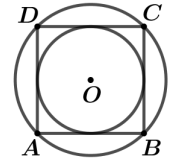
- A. $k = \sqrt{2}$. B. $k = 2$. C. $k = 2\sqrt{2}$. D. $k = 4$.

Lời giải. Hai khối trụ có chung đường cao nên

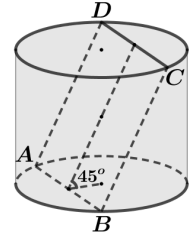
$$k = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi R^2 h}{\pi r^2 h} = \left(\frac{R}{r} \right)^2 = 2$$

với $R = \frac{AC}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2}$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy;

$r = \frac{AB}{2}$ là bán kính đường tròn nội tiếp đáy. **Chọn B.**



Câu 3. Cho một hình trụ tròn xoay và hình vuông $ABCD$ cạnh a có hai đỉnh liên tiếp A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Mặt phẳng $(ABCD)$ tạo với đáy hình trụ góc 45° như hình vẽ. Thể tích khối trụ bằng



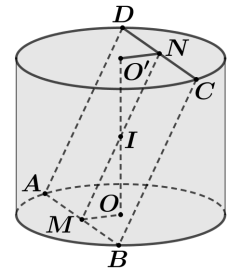
- A. $\frac{\pi a^3}{16}$. B. $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{16}$. C. $\frac{3\pi a^3}{16}$. D. $\frac{3\sqrt{2}\pi a^3}{16}$.

Lời giải. Tam giác IOM vuông cân có $IM = \frac{a}{2}$, suy ra

$$IO = OM = \frac{a}{2\sqrt{2}} \Rightarrow OO' = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Tam giác cân OAB , có $\begin{cases} OM = \frac{a}{2\sqrt{2}} \\ AB = a \end{cases} \Rightarrow OA = OB = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Vậy $V = \pi R^2 h = \pi OA^2 \cdot OO' = \frac{3\sqrt{2}\pi a^3}{16}$. **Chọn D.**

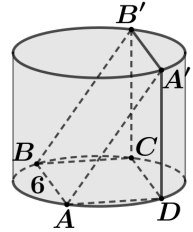
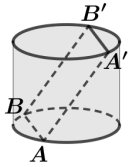


Câu 4. Cho hình trụ có bán kính đáy là 4 cm, một mặt phẳng không vuông góc với đáy và cắt hai mặt đáy theo hai dây cung song song $AB, A'B'$ mà $AB = A'B' = 6\text{ cm}$. Biết diện tích tứ giác $ABB'A'$ bằng 60 cm^2 . Chiều cao của hình trụ đã cho bằng

- A. $4\sqrt{3}\text{ cm}$. B. $5\sqrt{3}\text{ cm}$. C. $6\sqrt{2}\text{ cm}$. D. $8\sqrt{2}\text{ cm}$.

Lời giải. Dựng đường sinh $B'C$ và $A'D$, suy ra tứ giác $A'B'CD$ là hình chữ nhật. Suy ra $ABCD$ là hình bình hành và nội tiếp được nên là hình chữ nhật. Từ đó chứng minh được $ABB'A'$ là hình chữ nhật. Do đó $S_{ABB'A'} = AB.BB' \Rightarrow BB' = \frac{60}{6} = 10\text{ cm}$

$\xrightarrow{AB=6, AC=2R=8} B'C^2 = 6\sqrt{2}\text{ cm}$. **Chọn C.**



Câu 5. Một thùng hình trụ có chiều cao $h = 3\text{ m}$, bán kính đường tròn đáy $R = 1\text{ m}$ chứa một lượng nước. Biết rằng nếu đặt thùng nằm ngang ta được chiều cao mực nước trong thùng là $d = 0,5\text{ m}$. Hỏi thể tích lượng nước có trong thùng gần nhất với kết quả nào sau đây ?

- A. $1,75\text{ m}^3$. B. $1,8\text{ m}^3$. C. $1,85\text{ m}^3$. D. $1,9\text{ m}^3$.

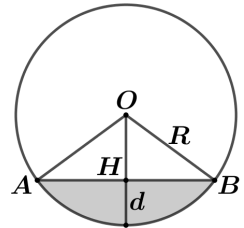
Lời giải. Xét mặt cắt vuông góc với trục của hình trụ và kí hiệu như hình vẽ.

$$\text{Ta có } \cos \widehat{HOB} = \frac{OH}{OB} = \frac{R-d}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{HOB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ.$$

$$\text{Suy ra } S_{\text{quat } AOB} = \frac{1}{3} \text{ hình tròn đáy} = \frac{1}{3}\pi.$$

$$\text{Suy ra diện phần gạch sọc bằng: } S = S_{\text{quat } AOB} - S_{\Delta AOB} = \frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Vậy thể tích lượng nước trong thùng: } V = S.h = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1,84\text{ m}^3. \text{ **Chọn C.**}$$



Câu 6. Cho một hình trụ có bán kính đáy bằng R và có chiều cao bằng $R\sqrt{3}$. Hai điểm A, B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy sao cho góc giữa AB và trục của hình trụ bằng 30° . Khoảng cách giữa AB và trục của hình trụ bằng

- A. R . B. $R\sqrt{3}$. C. $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{R\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải. Kẻ đường sinh AA' . Suy ra $OO' \parallel (ABA')$. Khi đó

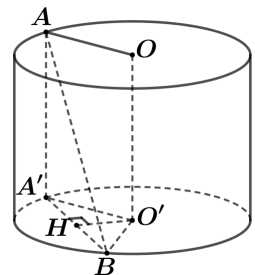
$$d[OO', AB] = d[OO', (ABA')] = d[O', (ABA')].$$

Gọi H là trung điểm $A'B$, ta có

$$\begin{cases} O'H \perp A'B \\ O'H \perp AA' \end{cases} \Rightarrow O'H \perp (ABA') \text{ nên } d[O', (ABA')] = O'H.$$

Tam giác vuông ABA' , có $BA' = AA' \tan 30^\circ = R$.

Suy ra tam giác $A'BO'$ đều, có cạnh bằng R nên $O'H = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. **Chọn C.**



Câu 7. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O') , thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông. Gọi A, B là hai điểm lần lượt nằm trên hai đường tròn (O) và (O') . Biết $AB = 2a$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OO' bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Bán kính đáy của hình trụ bằng

- A. $\frac{a\sqrt{14}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{14}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{2}a}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{14}}{4}$.

Lời giải. Đặt $OA = O'B = R$, suy ra $OO' = 2R$.

Tương tự như bài trước. Kẻ đường sinh $AA' \longrightarrow BA' = \sqrt{4a^2 - 4R^2}$.

Xét tam giác cân $A'O'B$, có
$$\begin{cases} A'O' = BO' = R \\ A'B = \sqrt{4a^2 - 4R^2} \longrightarrow R = \frac{a\sqrt{14}}{4} \\ O'H = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ Chọn D.}$$

Câu 8. Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O' , bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a . Trên đường tròn tâm O lấy điểm A , trên đường tròn tâm O' lấy điểm B sao cho $AB = 2a$. Thể tích của khối tứ diện $OO'AB$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

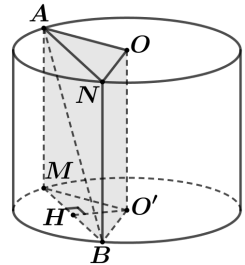
Lời giải. Kẻ đường sinh AM và BN như hình vẽ.

Ta có $V_{OO'AB} = \frac{1}{2} \cdot V_{A.OO'BN} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} V_{AON.MO'B} \right) = \frac{1}{3} \cdot V_{AON.MO'B} = V_{A.MO'B}$.

Tương tự như bài trước. Tính được $MB = a\sqrt{3}$.

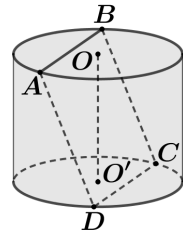
Xét tam giác cân $MO'B$, có
$$\begin{cases} O'M = O'B = a \\ MB = a\sqrt{3} \end{cases} \longrightarrow O'H = \frac{a}{2}.$$

Khi đó $V_{OO'AB} = V_{A.MO'B} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{a}{2} \right) \times a = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **Chọn D.**



Câu 9. Một hình trụ có bán kính đáy $R = 70\text{cm}$ và chiều cao $h = 20\text{cm}$. Một hình vuông $ABCD$ có hai cạnh AB và CD lần lượt là các dây cung của hai đường tròn đáy. Biết mặt phẳng $(ABCD)$ không vuông góc với mặt đáy của hình trụ (tham khảo hình vẽ). Cạnh của hình vuông $ABCD$ có độ dài bằng

- A. 80cm. B. 100cm. C. $100\sqrt{2}\text{cm}$. D. 140cm.



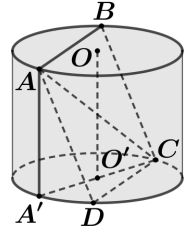
Lời giải. Dựng đường sinh AA' , ta có

$$\begin{cases} CD \perp AA' \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (AA'D) \Rightarrow CD \perp A'D.$$

Suy ra $A'C$ là đường kính đáy nên $A'C = 2R = 140\text{cm}$.

Tam giác vuông $AA'C$, có $AC = \sqrt{AA'^2 + A'C^2} = 100\sqrt{2}\text{cm}$.

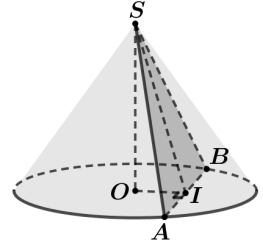
Suy ra cạnh hình vuông bằng 100cm . **Chọn B.**



Câu 10. Cho hình nón có đỉnh S , trục SO , bán kính R , chiều cao h . Dây cung AB thuộc đường tròn đáy và cách O một khoảng $\frac{R}{2}$ như hình vẽ. Ký hiệu S_1, S_2 lần lượt là diện tích xung quanh của mặt nón và diện tích tam giác SAB . Biết

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{10\pi}{3\sqrt{3}}, \text{ mệnh đề nào sau đây đúng?}$$

- A. $h = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}R$. B. $h = \frac{\sqrt{11}}{8}R$. C. $h = (\sqrt{2} - 1)R$. D. $h = \frac{1}{3}R$.



Lời giải. Đường sinh của hình nón $\ell = SB = SA = \sqrt{R^2 + h^2}$.

Khi đó $S_1 = \pi R \ell = \pi R \sqrt{R^2 + h^2}$.

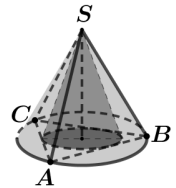
Pytago, ta được $SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = \sqrt{h^2 + \frac{R^2}{4}}$ và $IA = \sqrt{OA^2 - OI^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = R\sqrt{3}$.

Khi đó $S_2 = \frac{1}{2}AB \cdot SI = \frac{1}{2}R\sqrt{3} \cdot \sqrt{h^2 + \frac{R^2}{4}}$.

Theo đề $\frac{S_1}{S_2} = \frac{10\pi}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3\sqrt{3} \cdot \pi R \sqrt{R^2 + h^2} = 10\pi \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{h^2 + \frac{R^2}{4}} \longrightarrow h = \frac{R\sqrt{11}}{8}$. **Chọn B.**

Câu 11. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Hình nón có đỉnh S và có đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác ABC gọi là hình nón nội tiếp hình chóp $S.ABC$, hình nón có đỉnh S và có đường tròn đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC gọi là hình nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Tỷ số thể tích của hình nón nội tiếp và hình nón ngoại tiếp hình chóp đã cho bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{4}$.



Lời giải. Hai hình nón có cùng chiều cao nên tỷ số thể tích bằng tỷ số diện tích mặt đáy. Vì tam giác ABC đều nên bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\frac{2}{3}$ đường cao của

tam giác; bán kính đường tròn nội tiếp bằng $\frac{1}{3}$ đường cao của tam giác.

Suy ra $\frac{r}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{4}$. **Chọn D.**

Câu 12. Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O . Dựng hai đường sinh SA và SB , biết tam giác SAB vuông và có diện tích bằng $4a^2$. Góc tạo bởi giữa trục SO và mặt phẳng (SAB) bằng 30° . Đường cao h của hình nón bằng

- A. $h = a\sqrt{2}$. B. $h = a\sqrt{3}$. C. $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $h = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

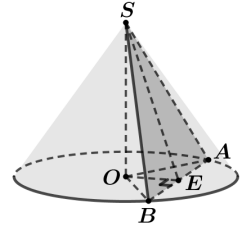
Lời giải. Gọi E là trung điểm AB .

Tam giác SAB vuông cân tại S nên $AB = 2SE$.

$$\text{Ta có } S_{\triangle SAB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot SE \Leftrightarrow 4a^2 = \frac{1}{2} \cdot 2SE \cdot SE \Rightarrow SE = 2a.$$

Dễ dàng xác định được: $30^\circ = \widehat{SOE} = \widehat{OSE}$.

Tam giác vuông SOE , có $SO = SE \cdot \cos \widehat{OSE} = a\sqrt{3}$. **Chọn B.**



Câu 13. Cho hình nón đỉnh S có đường cao SO . Gọi A, B là hai điểm thuộc đường tròn đáy của hình nón sao cho khoảng cách từ O đến AB bằng a và $\widehat{SAO} = 30^\circ$, $\widehat{SAB} = 60^\circ$. Độ dài đường sinh ℓ của hình nón bằng

- A. $\ell = a$. B. $\ell = a\sqrt{2}$. C. $\ell = a\sqrt{3}$. D. $\ell = 2a$.

Lời giải. Gọi I là trung điểm AB , suy ra $OI \perp AB$ nên $OI = a$.

$$\text{Đặt } OA = R \xrightarrow{\triangle SOA} SA = \frac{OA}{\cos 30^\circ} = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

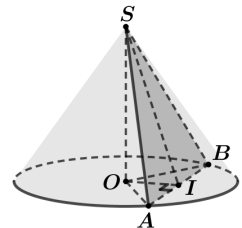
Tam giác SAB cân và có $\widehat{SAB} = 60^\circ$ nên là tam giác đều.

$$\text{Suy ra } AI = \frac{1}{2} SA = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

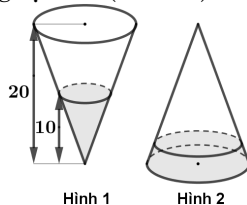
Trong tam giác vuông OIA , ta có

$$OA^2 = OI^2 + IA^2 \Leftrightarrow R^2 = a^2 + \frac{R^2}{3} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{2}}.$$

Suy ra $\ell = SA = a\sqrt{2}$. **Chọn B.**



Câu 14. Một cái phễu có dạng hình nón, chiều cao của phễu là 20 cm (Hình 1). Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của cột nước trong phễu là 10 cm. Nếu bịt kín miệng phễu rồi lật ngược lên (Hình 2).



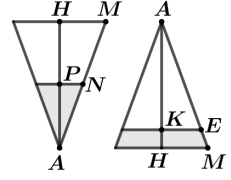
Khi đó chiều cao cột nước trong phễu bằng giá trị nào sau đây ?

- A. 0,87 cm. B. 1,07 cm. C. 5 cm. D. 10 cm.

Lời giải. Xét phần mặt cắt và kí hiệu các điểm như hình vẽ.

Gọi V, V_1, V_2 lần lượt là thể tích của phễu, của phần chứa

nước, và phần không chứa nước. Ta có
$$\begin{cases} V = \frac{1}{3}\pi HM^2 \cdot AH \\ V_1 = \frac{1}{3}\pi PN^2 \cdot AP \end{cases}.$$

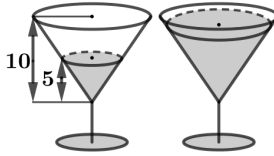


Suy ra
$$\frac{V_1}{V} = \frac{PN^2 \cdot AP}{HM^2 \cdot AH} = \left(\frac{AP}{AH}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \longrightarrow \frac{V_2}{V} = \frac{7}{8}.$$

Khi lật ngược phễu, ta có
$$\frac{V_2}{V} = \left(\frac{AK}{AH}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{7}{8} = \left(\frac{AK}{AH}\right)^3 \Leftrightarrow AK = \sqrt[3]{\frac{7}{8}} \cdot AH \approx 19,13(\text{cm}).$$

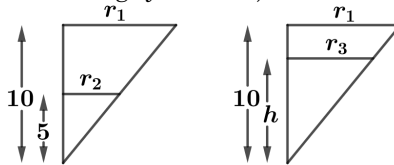
Suy ra $HK = 0,87(\text{cm})$. **Chọn A.**

Câu 15. Hai chiếc ly đựng chất lỏng giống hệt nhau, mỗi chiếc có phần chứa chất lỏng là một khối nón có chiều cao 10 cm (mô tả như hình vẽ). Ban đầu chiếc ly thứ nhất chứa đầy chất lỏng, chiếc ly thứ hai để rỗng. Người ta chuyển chất lỏng từ ly thứ nhất sang ly thứ hai sao cho độ cao của cột chất lỏng trong ly thứ nhất còn 5 cm. Tính chiều cao h của cột chất lỏng trong ly thứ hai sau khi chuyển (độ cao của cột chất lỏng tính từ đỉnh của khối nón đến mặt chất lỏng - lượng chất lỏng coi như không hao hụt khi chuyển. Tính gần đúng h với sai số không quá 0,01 cm).



A. 9,09 (cm). B. 9,18 (cm). C. 9,56 (cm). D. 9,57 (cm).

Lời giải. Gọi r_1, r_2 và r_3 theo thứ tự là bán kính của chiếc ly, bán kính của khối chất lỏng còn lại trong ly thứ nhất và bán kính của khối chất lỏng trong ly thứ hai (sau khi chuyển chất lỏng từ ly thứ nhất sang ly thứ hai).



Ta có
$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2} \longrightarrow r_2 = \frac{r_1}{2} \text{ và } \frac{r_3}{r_1} = \frac{h}{10} \longrightarrow r_3 = \frac{r_1 h}{10}.$$

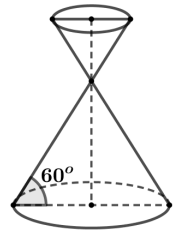
Thể tích của khối chất lỏng được chuyển từ ly thứ nhất sang ly thứ hai là

$$V = \frac{1}{3}\pi(r_1^2 \cdot 10 - r_2^2 \cdot 5) = \frac{35}{12}\pi r_1^2. \quad (1)$$

Mặt khác, ta có
$$V = \frac{1}{3}\pi r_3^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{r_1 h}{10}\right)^2 h = \frac{1}{300}\pi r_1^2 h^3. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có
$$\frac{1}{300}\pi r_1^2 h^3 = \frac{35}{12}\pi r_1^2 \Leftrightarrow h^3 = 875 \Leftrightarrow h \approx 9,56(\text{cm}).$$
 Chọn C.

Câu 16. Cho một đồng hồ cát gồm 2 hình nón chung đỉnh ghép lại, trong đó đường sinh bất kỳ của hình nón tạo với đáy một góc 60° như hình bên. Biết rằng chiều cao của đồng hồ là 30cm và tổng thể tích của đồng hồ là $1000\pi (\text{cm}^3)$. Hỏi nếu cho đầy lượng cát vào phần trên thì khi chảy hết xuống dưới, khi đó tỉ lệ thể tích lượng cát chiếm chỗ và thể tích phần dưới là bao nhiêu ?



- A. $\frac{1}{3\sqrt{3}}$. B. $\frac{1}{8}$. C. $\frac{1}{27}$. D. $\frac{1}{64}$.

Lời giải. Gọi bán kính của hình nón lớn và nón nhỏ lần lượt là x, y .
Suy ra chiều cao của hình nón lớn và nón nhỏ lần lượt là $x\sqrt{3}, y\sqrt{3}$.

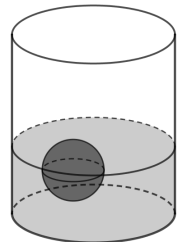
Theo giả thiết, ta có

$$\begin{cases} x\sqrt{3} + y\sqrt{3} = 30 \\ \frac{1}{3}\pi x^2 \cdot x\sqrt{3} + \frac{1}{3}\pi y^2 \cdot y\sqrt{3} = 1000\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 10\sqrt{3} \\ x^3 + y^3 = 1000\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{20\sqrt{3}}{3}, y = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

Do hai hình nón đồng dạng nên tỉ số cần tính bằng $\left(\frac{y}{x}\right)^3 = \frac{1}{8}$. **Chọn B.**

Câu 17. Để tính diện tích xung quanh của một khối cầu bằng đá, người ta thả nó vào trong một chiếc thùng hình trụ có chiều cao $h=2\text{m}$, bán kính đường tròn đáy bằng $R=0,5\text{m}$ và chứa một lượng nước có thể tích bằng $\frac{1}{8}$ thể tích khối trụ. Sau khi thả khối



cầu đá vào khối trụ người ta đo được mực nước trong khối trụ cao gấp ba lần mực nước ban đầu khi chưa thả khối cầu. Hỏi diện tích xung quanh của khối cầu gần bằng kết quả nào được cho dưới đây ?

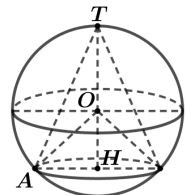
- A. $1,5\text{m}^2$. B. $1,7\text{m}^2$. C. $2,6\text{m}^2$. D. $3,4\text{m}^2$.

Lời giải. Thể tích khối trụ $V = \pi R^2 h = \frac{1}{2}\pi$. Suy ra thể tích lượng nước $V' = \frac{V}{8} = \frac{1}{16}\pi$.

Từ giả thiết suy ra thể tích khối cầu: $V_{\text{Cau}} = 2V' \Leftrightarrow \frac{4}{3}\pi R_{\text{Cau}}^3 = 2 \times \frac{1}{16}\pi \longrightarrow R_{\text{Cau}} = \sqrt[3]{\frac{3}{32}}$.

Vậy diện tích xung quanh của khối cầu là $S = 4\pi R_{\text{Cau}}^2 \approx 2,6\text{m}^2$. **Chọn C.**

Câu 18. Cho mặt cầu (S) tâm O , bán kính $R=3$. Mặt phẳng (P) cách O một khoảng bằng 1 và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có tâm H . Gọi T là giao điểm của tia HO với (S) , tính thể tích V của khối nón đỉnh T , đáy là hình tròn (C) (như hình).



- A. $V = \frac{16\pi}{3}$. B. $V = \frac{32\pi}{3}$. C. $V = 16\pi$. D. $V = 32\pi$.

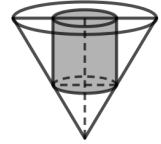
Lời giải. Từ giả thiết suy ra $OH = 1$.

Suy ra chiều cao hình nón $h = TO + OH = 3 + 1 = 4$.

Bán kính đường tròn đáy hình nón $r = AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = 2\sqrt{2}$.

Vậy thể tích khối nón cần tính $V_{\text{Nón}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot (2\sqrt{2})^2 \cdot 4 = \frac{32\pi}{3}$. **Chọn B.**

Câu 19. Một bình đựng nước dạng hình nón không nắp đựng đầy nước. Biết rằng chiều cao của bình gấp 3 lần bán kính đáy của nó. Người ta thả vào bình đó một khối trụ và đo được thể tích nước trào ra ngoài là $\frac{16\pi}{9} \text{ dm}^3$. Biết rằng một mặt của khối trụ nằm trên mặt



đáy của hình nón và khối trụ có chiều cao bằng đường kính đáy của hình nón (như hình vẽ). Tính bán kính đáy R của bình nước.

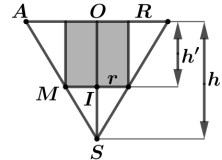
- A. $R = 2 \text{ dm}$. B. $R = 3 \text{ dm}$. C. $R = 4 \text{ dm}$. D. $R = 5 \text{ dm}$.

Lời giải. Gọi h, h' lần lượt là chiều cao của khối nón và khối trụ; R, r lần lượt là bán kính đáy của khối nón và khối trụ. Khi đó $h = 3R, h' = 2R$.

Xét phần mặt cắt và gọi các điểm như hình vẽ.

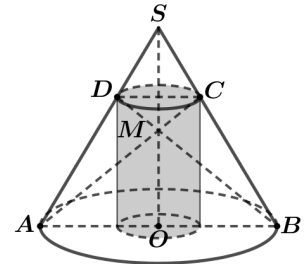
Theo giả thiết $V_{\text{trụ}} = \pi r^2 h' = \frac{16\pi}{9}$. Ta sẽ chuyển $V_{\text{trụ}}$ theo R .

Cụ thể:
$$\begin{cases} h' = 2R \\ \frac{r}{R} = \frac{SI}{SO} = \frac{h-h'}{h} = \frac{3R-2R}{3R} = \frac{1}{3} \longrightarrow r = \frac{1}{3}R \end{cases}$$



Khi đó $V_{\text{trụ}} = \pi \cdot \frac{R^2}{9} \cdot 2R = \frac{16\pi}{9} \longrightarrow R = 2 \text{ dm}$. **Chọn A.**

Câu 20. Xét một hình trụ nội tiếp trong hình nón như hình bên, trong đó S là đỉnh hình nón, O là tâm đường tròn mặt đáy. Các đoạn AB, CD lần lượt là đường kính của đường tròn đáy của hình nón và hình trụ. Biết AC, BD cắt nhau tại điểm $M \in SO$ và tỉ số thể tích của hình trụ và hình nón là $\frac{4}{9}$. Tỉ số $\frac{SM}{SO}$ bằng



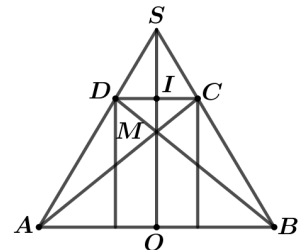
- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{4}{5}$. C. $\frac{5}{6}$. D. $\frac{7}{9}$.

Lời giải. Gọi I là trung điểm DC .

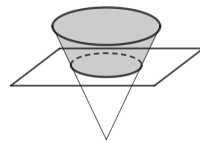
Đặt $t = \frac{SI}{SO} = \frac{ID}{OA} = \frac{IM}{MO} \longrightarrow \begin{cases} ID = tOA \\ IO = (1-t)SO \end{cases}$

Theo giả thiết ta có $\frac{\pi \cdot t^2 \cdot OA^2 \cdot (1-t)SO}{\frac{1}{3}\pi \cdot OA^2 \cdot SO} = \frac{4}{9} \longrightarrow t = \frac{2}{3}$.

Suy ra $\frac{SI}{SO} = \frac{IM}{MO} = \frac{2}{3} \longrightarrow \frac{SM}{SO} = \frac{4}{5}$. **Chọn B.**



Câu 21. Cắt một hình nón bằng một mặt phẳng song song với đáy thì phần hình nón nằm giữa mặt phẳng và đáy gọi là hình nón cắt. Một chiếc cốc có dạng hình nón cắt cao 9cm, bán kính của đáy cốc và miệng cốc lần lượt là 3cm và 4cm. Hỏi chiếc cốc có thể chứa được lượng nước tối đa là bao nhiêu trong các lựa chọn sau ?

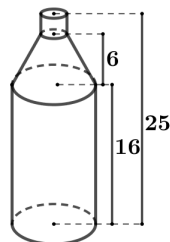


- A. 250 ml. B. 348 ml. C. 349 ml. D. 350 ml.

Lời giải. Gọi R, r, h lần lượt là bán kính mặt đáy lớn, bán kính mặt đáy nhỏ và chiều cao của hình nón cắt. Ta thiết lập được công thức tính thể tích của khối nón cắt là $V = \frac{1}{3}\pi(R^2 + r^2 + Rr)h$ (lấy khối nón lớn trừ đi khối nón nhỏ).

Áp dụng với $R = 4$ cm, $r = 3$ cm, $h = 9$ cm. Ta được $V \approx 348,7 \text{ cm}^3 = 348,7 \text{ ml}$. **Chọn B.**

Câu 22. Phần không gian bên trong của chai nước ngọt có hình dạng như hình vẽ. Biết bán kính đáy và bán kính cổ chai lần lượt là $R = 5$ cm, $r = 2$ cm. Thể tích phần không gian bên trong của chai nước ngọt (giả sử độ dày của vỏ chai không đáng kể) bằng



- A. $412\pi \text{ (cm}^3\text{)}$. B. $462\pi \text{ (cm}^3\text{)}$.
C. $490\pi \text{ (cm}^3\text{)}$. D. $495\pi \text{ (cm}^3\text{)}$.

Lời giải. Xét phần mặt cắt và kí hiệu như hình vẽ.

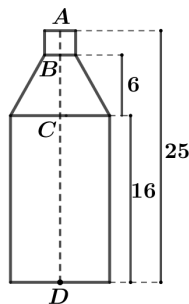
Thể tích khối trụ có đường cao CD là: $V_1 = \pi R^2 \cdot CD = 400\pi \text{ (cm}^3\text{)}$.

Thể tích khối trụ có đường cao AB là: $V_2 = \pi r^2 \cdot AB = 12\pi \text{ (cm}^3\text{)}$.

Thể tích phần nón cắt có đường cao BC là:

$$V = \frac{1}{3}\pi(R^2 + r^2 + Rr) \cdot BC = 78\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Vậy thể tích chai nước là: $V = V_1 + V_2 + V_3 = 490\pi \text{ (cm}^3\text{)}$. **Chọn C.**

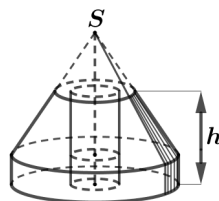


Câu 23. Để định vị một trụ điện, người ta cần đúc một khối bê tông có chiều cao $h = 1,5$ m gồm: Phần dưới có dạng hình trụ

bán kính $R = 1$ m và có chiều cao bằng $\frac{1}{3}h$; Phần trên có dạng

hình nón bán kính đáy bằng R đã bị cắt bỏ bớt một phần hình

nón có bán kính đáy bằng $\frac{1}{2}R$ ở phía trên (người ta gọi hình đó là hình nón cắt);



Phần ở giữa rỗng có dạng hình trụ, bán kính đáy bằng $\frac{1}{4}R$ (tham khảo hình vẽ bên).

Tính thể tích V của khối bê tông (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba).

- A. $V = 2,814 \text{ m}^3$. B. $V = 2,815 \text{ m}^3$. C. $V = 3,109 \text{ m}^3$. D. $V = 3,403 \text{ m}^3$.

Lời giải. Thể tích của phần dưới có dạng hình trụ: $V_1 = \pi R^2 \frac{h}{3} = \pi \cdot 1 \cdot \frac{1,5}{3} = \frac{\pi}{2} \text{ (m}^3\text{)}.$

Thể tích của phần nón cụt có $R=1, r=\frac{R}{2}=\frac{1}{2}$ và chiều cao bằng $\frac{2}{3}h=1$ là

$$V_2 = \frac{\pi}{3} \left(1 + \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{7\pi}{12} \text{ (m}^3\text{)}.$$

Thể tích của phần ở giữa rỗng có dạng hình trụ: $V_3 = \pi \left(\frac{R}{4} \right)^2 h = \frac{3}{32} \pi \text{ (m}^3\text{)}.$

Vậy thể tích cần tính $V = V_1 + V_2 - V_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{12} - \frac{3}{32}\pi = \frac{95}{96}\pi \approx 3,109 \text{ (m}^3\text{)}.$ **Chọn C.**

Câu 24. Trong không gian cho một hình cầu $(\mathcal{S})$ tâm O có bán kính R và một điểm S cho trước sao cho $SO = 2R$. Từ S ta kẻ các tiếp tuyến đến mặt cầu với tiếp điểm thuộc đường tròn $(\mathcal{C}_1)$. Trên mặt phẳng (P) chứa đường tròn $(\mathcal{C}_1)$ ta lấy điểm E thay đổi nằm ngoài mặt cầu $(\mathcal{S})$. Gọi $(\mathcal{N})$ là hình nón có đỉnh là E và đáy là đường tròn $(\mathcal{C}_2)$ gồm các tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ E đến mặt cầu $(\mathcal{S})$. Biết rằng hai đường tròn $(\mathcal{C}_1)$ và $(\mathcal{C}_2)$ luôn có cùng bán kính, khi đó quỹ tích các điểm E là một đường tròn, đường tròn này có bán kính R' bằng

A. $\frac{3R}{2}.$

B. $\frac{R\sqrt{15}}{2}.$

C. $\frac{R\sqrt{17}}{2}.$

D. $\frac{R\sqrt{15}}{4}.$

Lời giải. Gọi bán kính của $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ lần lượt là r_1, r_2 .

Gọi C là tâm của $(\mathcal{C}_1)$ và D là một điểm trên $(\mathcal{C}_1)$.

Suy ra $\triangle SOD$ vuông tại D nên ta có $CD \cdot OS = DO \cdot DS$

$$\longrightarrow r_1 = CD = \frac{DO \cdot DS}{OS} = \frac{R \cdot \sqrt{OS^2 - R^2}}{OS} = R \sqrt{1 - \frac{R^2}{OS^2}}.$$

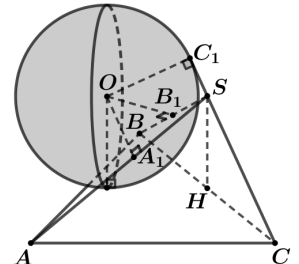
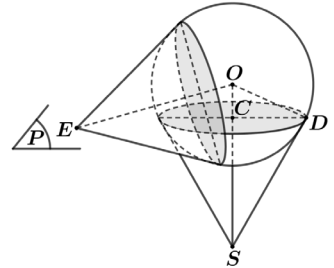
Tương tự, ta tính được $r_2 = R \sqrt{1 - \frac{R^2}{OE^2}}.$

Theo giả thiết: $r_1 = r_2$ suy ra $OE = OS = 2R \longrightarrow E$ di động trên đường tròn giao tuyến của mặt cầu tâm O bán kính $2R$ với mặt phẳng (P) .

Lại có: $OC = \frac{OD^2}{OS} = \frac{R}{2} \longrightarrow R' = \sqrt{OE^2 - OC^2} = \sqrt{4R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{15}}{2}.$ **Chọn B.**

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $BC = 2\sqrt{2}$ và $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Hình chiếu của S trên mặt phẳng đáy là trung điểm H của BC . Giả sử có mặt cầu tâm O , bán kính bằng 1 tiếp xúc với SA, SB và tia đối của SC lần lượt tại A_1, B_1, C_1 đồng thời mặt cầu tâm O đó cũng tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) (tham khảo hình vẽ).

Thể tích của hình chóp $S.ABC$ bằng



A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải. Dựng (α) là mặt phẳng qua S và song song với (ABC) . Ta chứng minh $O \in (\alpha)$. Khi đó

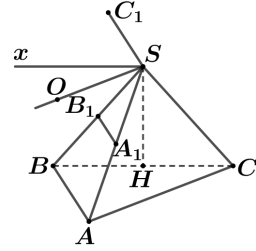
$$d[S, (ABC)] = d[O, (ABC)] = 1. \text{ Suy ra } V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Thật vậy: • Tam giác SBC có SH là đường cao và cũng là đường trung tuyến nên SH là đường phân giác của góc $\widehat{BSC}$. (1)

• Hai góc $\widehat{BSC}$ và $\widehat{C_1SB_1}$ là hai góc kề bù. (2)

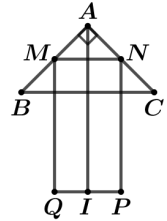
• Tam giác B_1SC_1 cân tại S . (3)

Từ (1), (2) và (3), suy ra mặt phẳng phân giác của $\widehat{C_1SB_1}$ (cũng là mặt phẳng trung trực của B_1C_1) đi qua S và vuông góc với SH . Mặt phẳng này trùng với mặt phẳng (α) đã dựng ở trên. Vì $OB_1 = OC_1$ nên suy ra $O \in (\alpha)$. **Chọn B.**



Phân 2. Vật thể tròn xoay

Câu 1. Cho tam giác vuông cân ABC có $AB = AC = a\sqrt{2}$ và hình chữ nhật $MNPQ$ với $MQ = 2MN$ được xếp chồng lên nhau sao cho M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC (như hình vẽ). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình trên quanh trục AI , với I là trung điểm PQ .



A. $V = \frac{5\pi a^3}{6}$.

B. $V = \frac{11\pi a^3}{6}$.

C. $V = \frac{11\pi a^3}{8}$.

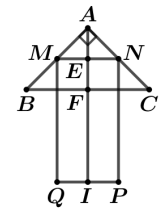
D. $V = \frac{17\pi a^3}{24}$.

Lời giải. Ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a \rightarrow MN = a, MQ = 2a$.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm MN và BC .

$$\text{Tính được } AF = \frac{BC}{2} = a, EF = \frac{a}{2} \Rightarrow IF = \frac{3}{2}a.$$

$$\text{Khi đó } V = \frac{1}{3}\pi FB^2 \cdot AF + \pi IQ^2 \cdot IF = \frac{17}{24}\pi a^3. \text{ Chọn D.}$$



Câu 2. Cho hình thang $ABCD$ vuông A và B với $AB = BC = \frac{AD}{2} = a$. Quay hình thang và miền trong của nó quanh đường thẳng chứa cạnh BC . Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.

A. $V = \frac{4\pi a^3}{3}$.

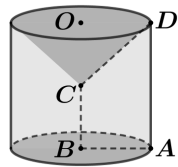
B. $V = \frac{5\pi a^3}{3}$.

C. $V = \frac{7\pi a^3}{3}$.

D. $V = \pi a^3$.

Lời giải. Thể tích khối tròn xoay tạo thành bằng thể tích hình trụ có bán kính đáy AB và đường sinh AD trừ đi phần thể tích hình nón có bán kính đáy $OD = AB$ và đường cao $OC = AD - BC$.

Vậy $V = \pi AB^2 \cdot AD - \frac{1}{3} \pi OD^2 \cdot OC = \pi a^2 \cdot 2a - \frac{1}{3} \pi a^2 \cdot a = \frac{5\pi a^3}{3}$. **Chọn B.**



Câu 3. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AD = 2a$, $AB = 3a$, $\widehat{BAD} = 45^\circ$ (như hình vẽ). Tính thể tích V của khối tròn xoay nhận được khi quay hình bình hành $ABCD$ quanh trục AB .

A. $V = \frac{5\pi a^3}{2}$.

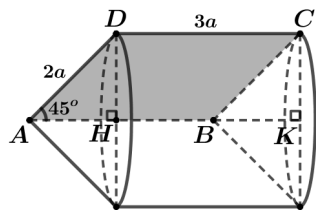
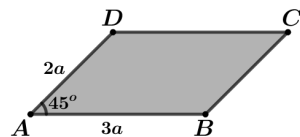
B. $V = \frac{9\pi a^3}{2}$.

C. $V = 5\pi a^3$.

D. $V = 6\pi a^3$.

Lời giải. Gọi H là hình chiếu vuông góc của D lên cạnh $AB \Rightarrow DH = a\sqrt{2}$. Khối tròn xoay nhận được khi quay hình bình hành $ABCD$ quanh trục AB có thể tích đúng bằng thể tích khối trụ có đường sinh DC và bán kính đáy DH (hai hình nón bù trừ nhau).

Vậy $V = \pi DH^2 \cdot HK = \pi DH^2 \cdot DC = \pi (a\sqrt{2})^2 \cdot 3a = 6\pi a^3$. **Chọn D.**



Câu 4. Một cơ sở sản xuất kem chuẩn bị làm 1000 chiếc kem giống nhau theo đơn đặt hàng. Cốc đựng kem có dạng hình tròn xoay được tạo thành khi quay hình thang $ABCD$ vuông tại A và D xung quanh trục AD (xem hình vẽ). Chiếc cốc có bề dày không đáng kể, chiều cao 7,2 cm; đường kính miệng cốc bằng 6,4 cm; đường kính đáy cốc bằng 1,6 cm. Kem được đổ đầy cốc và dư ra phía ngoài một lượng có dạng nửa hình cầu, có bán kính bằng bán kính miệng cốc. Cơ sở đó cần dùng lượng kem gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau

A. 132 dm³.

B. 170 dm³.

C. 293 dm³.

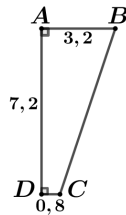
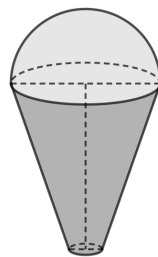
D. 954 dm³.

Lời giải. Thể tích của một chiếc kem cần tính bao gồm:

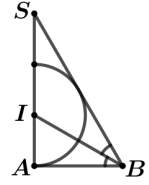
- Thể tích của hình nón cụt có lớn $R = 3,2$ cm, $r = 0,8$ cm và $h = 7,2$ cm.
- Thể tích của nửa khối cầu có bán kính $R = 3,2$ cm.

Suy ra $V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2) + \frac{2}{3} \pi R^3 \approx 170 \text{ cm}^3$.

Vậy thể tích của 1000 chiếc kem là: $170 \cdot 10^3 \text{ cm}^3 = 170 \text{ dm}^3$. **Chọn B.**



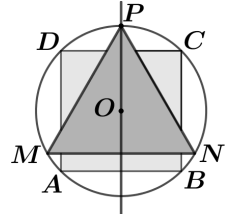
Câu 5. Cho tam giác SAB vuông tại A , $\widehat{ABS} = 60^\circ$, đường phân giác trong $\widehat{ABS}$ cắt SA tại I . Vẽ nửa đường tròn tâm I bán kính IA (như hình vẽ). Cho tam giác SAB và nửa đường tròn trên cùng quay quanh SA tạo nên khối cầu và khối nón tương ứng có thể tích là V_1 và V_2 . Khẳng định nào sau đây đúng ?



- A. $V_1 = 3V_2$. B. $2V_1 = 3V_2$. C. $4V_1 = 9V_2$. D. $9V_1 = 4V_2$.

Lời giải. Ta có
$$\begin{cases} V_1 = \frac{4}{3}\pi IA^3 = \frac{4}{3}\pi (AB \tan 30^\circ)^3 = \frac{4\sqrt{3}}{27}\pi AB^3 \\ V_2 = \frac{1}{3}\pi AB^2 \cdot SA = \frac{1}{3}\pi AB^2 \cdot AB \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi \cdot AB^3 \end{cases} \longrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{9}. \text{ Chọn D.}$$

Câu 6. Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn O , bán kính r ; tam giác đều MNP nội tiếp đường tròn đó và MN song song AB (như hình vẽ). Cho mô hình trên quay quanh đường thẳng OP . Kí hiệu V_1, V_2, V_3 là thể tích khối tròn xoay do hình vuông, hình tròn và tam giác đều tạo thành. Khẳng định nào sau đây đúng ?



- A. $V_1 = V_2 + V_3$. B. $V_3 = V_2 + V_1$. C. $V_1^2 = V_2 \cdot V_3$. D. $V_3^2 = V_2 \cdot V_1$.

Lời giải. Gọi Q, I lần lượt là trung điểm của MN, AB .

Thể tích khối cầu (tạo bởi khi quay hình tròn quanh trục OP) là $V_2 = \frac{4\pi r^3}{3}$.

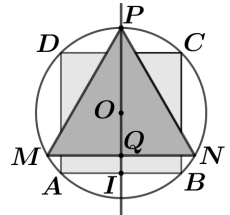
Ta có $AC = 2r \Rightarrow$ cạnh hình vuông bằng $\sqrt{2}r$ nên

$$V_1 = \pi IB^2 \cdot BC = \pi \left(\frac{\sqrt{2}r}{2} \right)^2 \cdot \sqrt{2}r = \frac{\pi \sqrt{2}r^3}{2}.$$

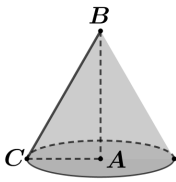
Ta có $OP = r \Rightarrow PQ = \frac{3}{2}r \Rightarrow$ cạnh tam giác đều bằng $\sqrt{3}r$ nên

$$V_3 = \frac{1}{3}\pi QN^2 \cdot PQ = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{3}r}{2} \right)^2 \cdot \frac{3r}{2} = \frac{3\pi r^3}{8}.$$

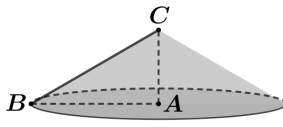
Vậy $V_1^2 = V_2 \cdot V_3$. **Chọn C.**



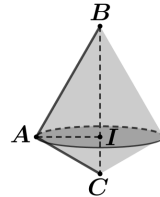
Câu 7. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AC = a, AB = a\sqrt{3}$. Gọi V_1, V_2, V_3 là thể tích các khối tròn xoay sinh bởi tam giác ABC kể cả các điểm trong khi lần lượt quay quanh các cạnh AB, AC, BC . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ?



Hình 1



Hình 2



Hình 3

A. $\frac{1}{V_1} = \frac{1}{V_3} + \frac{1}{V_2}$. B. $\frac{1}{V_3} = \frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}$. C. $\frac{1}{V_2^2} = \frac{1}{V_3^2} + \frac{1}{V_2^2}$. D. $\frac{1}{V_3^2} = \frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2}$.

Lời giải. Khi tam giác ABC quay quanh cạnh AB ta được khối nón có chiều cao $h_1 = AB = a\sqrt{3}$ và có bán kính đáy là $R_1 = AC = a$ (Hình 1) nên $V_1 = \frac{1}{3}\pi R_1^2 h_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3$.

Khi tam giác ABC quay quanh cạnh AC ta được khối nón có chiều cao $h_2 = AC = a$ và có bán kính đáy là $R_2 = AB = a\sqrt{3}$ (Hình 2) nên $V_2 = \frac{1}{3}\pi R_2^2 h_2 = \pi a^3$.

Hạ đường cao AI của tam giác ABC . Khi quay tam giác ABC quanh cạnh BC ta được hai khối nón sinh bởi hai tam giác ABI và ACI . Hai khối nón này có chung đường tròn đáy có bán kính bằng độ dài đoạn AI (Hình 3). Do đó ta có

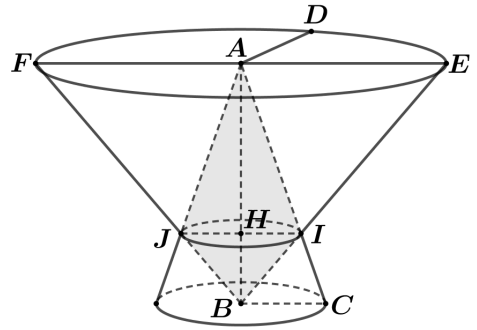
$$V_3 = \frac{1}{3}\pi AI^2 \cdot BI + \frac{1}{3}\pi AI^2 \cdot CI = \frac{1}{3}\pi AI^2 (BI + CI) = \frac{1}{3}\pi AI^2 BC = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 2a = \frac{\pi a^3}{2}.$$

Từ đó suy ra $\frac{1}{V_3} = \frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}$. **Chọn D.**

Câu 8. Cho hình tứ diện $ABCD$ có AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) và tam giác ABC vuông tại B . Biết $BC = a$, $AB = a\sqrt{3}$, $AD = 3a$. Quay các tam giác ABC và ABD (bao gồm cả điểm bên trong hai tam giác) xung quanh đường thẳng AB ta được hai khối tròn xoay. Thể tích phần chung của hai khối tròn xoay bằng

A. $\frac{8a^3\pi\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{3a^3\pi\sqrt{3}}{16}$. C. $\frac{4a^3\pi\sqrt{3}}{16}$. D. $\frac{5a^3\pi\sqrt{3}}{16}$.

Lời giải. Khi quay tam giác ABD quanh AB ta được khối nón đỉnh B có đường cao BA , đáy là đường tròn bán kính $AD = 3a$. Biểu diễn các điểm như hình vẽ. Gọi $I = AC \cap BE$, $IH \perp AB$ ($H \in AB$). Phần chung của hai khối nón khi quay tam giác ABC và tam giác ABD quanh AB là hai khối nón có đỉnh A và đỉnh B , có đáy là đường tròn bán kính IH .



Ta có $\triangle IBC \sim \triangle IEA \Rightarrow \frac{IC}{IA} = \frac{BC}{AE} = \frac{1}{3} \longrightarrow IA = 3IC$.

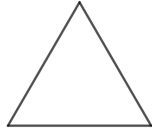
Lại có $IH \parallel BC \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{IH}{BC} = \frac{AI}{AC} = \frac{3}{4} \longrightarrow IH = \frac{3 \cdot BC}{4} = \frac{3a}{4}$.

Khi đó thể tích phần chung: $V = \frac{1}{3}\pi IH^2 \cdot AH + \frac{1}{3}\pi IH^2 \cdot BH$

$$= \frac{1}{3}\pi IH^2 \cdot (AH + BH) = \frac{1}{3}\pi IH^2 \cdot AB = \frac{3a^3\pi\sqrt{3}}{16}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 9. Ban đầu ta có một tam giác đều cạnh bằng 3 như hình 1. Tiếp theo ta chia mỗi cạnh của tam giác thành 3 đoạn bằng nhau, dựng một tam giác đều về phía bên

ngoài có một cạnh là đoạn giữa, sau đó bỏ đi đoạn giữa ta được hình 2. Khi quay hình 2 xung quanh d ta được một khối tròn xoay có thể tích bằng



Hình 1



Hình 2

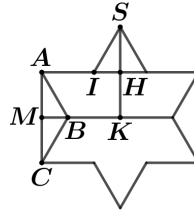
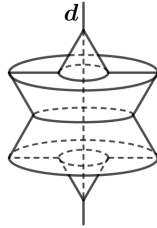
A. $\frac{5\pi\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{5\pi\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{5\pi\sqrt{3}}{6}$.

D. $\frac{9\pi\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải. Kí hiệu các điểm như hình vẽ.



Ta có thể tích khối tròn xoay tạo thành bằng 2 lần thể tích nửa trên (hình $SIABK$ quay quanh trục SK).

Tam giác SIH quay quanh trục SK tạo thành khối nón có $r_1 = IH = \frac{1}{2}$, $h_1 = SH = \frac{\sqrt{3}}{2}$

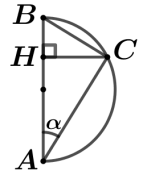
nên $V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{24}$.

Hình thang vuông $HABK$ quay quanh trục HK tạo thành hình nón cụt có

$R = AH = \frac{3}{2}$, $r = BK = 1$, $h = HK = SH = \frac{\sqrt{3}}{2}$ nên $V_2 = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr) = \frac{19\pi\sqrt{3}}{24}$.

Vậy thể tích khối tròn xoay tạo thành: $V = 2(V_1 + V_2) = \frac{5\sqrt{3}\pi}{3}$. **Chọn B.**

Câu 10. Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$ và điểm C thay đổi trên nửa đường tròn đó, đặt $\alpha = \widehat{CAB}$ và gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB (như hình vẽ). Tìm α sao cho thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay tam giác ACH quanh trục AB đạt giá trị lớn nhất.



A. $\alpha = 45^\circ$.

B. $\alpha = 60^\circ$.

C. $\arctan\sqrt{2}$.

D. $\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải. Ta có
$$\begin{cases} AC = AB \cos \alpha = 2R \cos \alpha \\ CH = AC \sin \alpha = 2R \cos \alpha \sin \alpha. \text{ Vật thể tròn xoay tạo thành khi quay} \\ AH = AC \cos \alpha = 2R \cos^2 \alpha \end{cases}$$

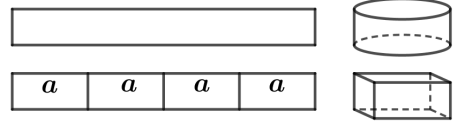
tam giác ACH quanh trục AB là một khối nón có bán kính đường tròn đáy $r = HC$,

$$\begin{aligned} \text{chiều cao } h = AH \text{ nên } V &= \frac{1}{3}\pi CH^2 \cdot AH = \frac{4}{3}R^3 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot (2 - 2\cos^2 \alpha) \\ &\leq \frac{4}{3}R^3 \cdot \frac{(\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 - 2\cos^2 \alpha)^3}{27} = \frac{32R^3}{81}. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 2 - 2\cos^2 \alpha \Leftrightarrow \tan^2 \alpha = \frac{1}{2} \longrightarrow \alpha = \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}$. **Chọn D.**

Phần 3. Ứng dụng thực tiễn

Câu 1. Bé Bách có một tấm bìa có chiều dài 20 cm; chiều rộng 1 cm. Bé muốn gấp một cái hộp nhỏ xinh để bỏ kẹp tóc vào hộp đó tặng quà cho mẹ ngày 20 tháng 10. Anh Siêu đã chỉ



cho bé hai cách gấp hộp. Cách thứ nhất là bé cuốn tấm bìa thành một cái hộp hình trụ không có hai đáy có thể tích V_1 . Cách thứ hai là bé gấp tấm bìa một hình hộp chữ nhật có thể tích V_2 có các kích thước như hình vẽ. Hãy tìm tỉ số thể tích của hai hộp để biết được gấp theo cách nào sẽ có thể tích lớn hơn.

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{\pi}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi}{4}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{4}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = 4$.

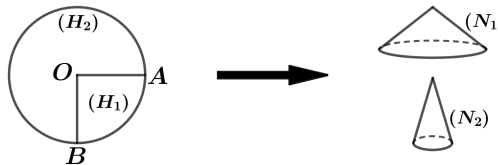
Lời giải. Chiều dài của tấm bìa là 20 cm, suy ra

- $20 = 2\pi \cdot R \Leftrightarrow R = \frac{10}{\pi}$ (R là bán kính đường tròn đáy hình trụ).
- Theo đề bài thì hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông (hình vẽ) nên cạnh của hình vuông bằng $\frac{20}{4} = 5$.

Khi đó $\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1 \cdot 1}{S_2 \cdot 1} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi R^2}{5^2} = \frac{4}{\pi}$. **Chọn A.**

Câu 2. Một tấm tôn hình tròn tâm O , bán kính R được chia thành hai hình $(\mathcal{H}_1)$ và $(\mathcal{H}_2)$ như hình vẽ. Cho biết góc $\widehat{AOB} = 90^\circ$. Từ hình $(\mathcal{H}_1)$ gò tấm tôn để được hình nón $(\mathcal{N}_1)$ không đáy và từ hình $(\mathcal{H}_2)$ gò tấm tôn để được hình nón $(\mathcal{N}_2)$ không đáy.

Ký hiệu V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hình nón $(\mathcal{N}_1), (\mathcal{N}_2)$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng



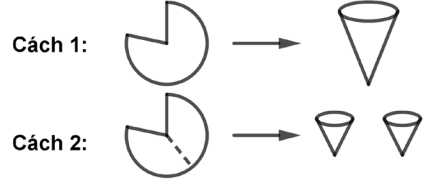
A. 2. B. 3. C. $\frac{3\sqrt{105}}{5}$. D. $\frac{7\sqrt{105}}{9}$.

Lời giải. Hai hình nón có độ dài đường sinh bằng nhau: $\ell_1 = \ell_2 = R$.

Gọi r_1, r_2 lần lượt là bán kính đáy của hình nón $(\mathcal{N}_1), (\mathcal{N}_2)$.

Ta có
$$\begin{cases} 2\pi r_1 = \frac{3}{4} \cdot 2\pi R \longrightarrow r_1 = \frac{3R}{4} \\ 2\pi r_2 = \frac{1}{4} \cdot 2\pi R \longrightarrow r_2 = \frac{R}{4} \end{cases}.$$
 Khi đó
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi r_1^2 \sqrt{\ell_1^2 - r_1^2}}{\frac{1}{3}\pi r_2^2 \sqrt{\ell_2^2 - r_2^2}} = \frac{3\sqrt{105}}{5}.$$
 Chọn C.

Câu 3. Từ cùng một tấm kim loại dẻo hình quạt (như hình vẽ) có kích thước bán kính $R=5$ và chu vi của hình quạt là $P=8\pi+10$, người ta gò tấm kim loại thành những chiếc phễu theo hai cách:



Cách 1. Gò tấm kim loại ban đầu thành mặt xung quanh của một cái phễu.

Cách 2. Chia đôi tấm kim loại thành hai phần bằng nhau rồi gò thành mặt xung quanh của hai cái phễu. Gọi V_1 là thể tích của cái phễu thứ nhất, V_2 là tổng thể tích

của hai cái phễu ở cách thứ hai. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{7}.$ B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2\sqrt{2}}{7}.$ C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$ D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2\sqrt{21}}{7}.$

Lời giải. Chu vi của hình quạt = độ dài cung + $2R$. Suy ra độ dài cung tròn $\ell = 8\pi$.

Cách 1: Chu vi đường tròn đáy của cái phễu là 8π .

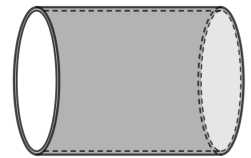
Ta có $2\pi r_1 = 8\pi \rightarrow r_1 = 4 \rightarrow h_1 = \sqrt{R^2 - r_1^2} = 3 \rightarrow V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 3 = 16\pi.$

Cách 2: Chu vi đường tròn đáy của mỗi phễu nhỏ là 4π .

Ta có $2\pi r_2 = 4\pi \rightarrow r_2 = 2 \rightarrow h_2 = \sqrt{R^2 - r_2^2} = \sqrt{21} \rightarrow V_2 = 2 \times \left(\frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot \sqrt{21} \right) = \frac{8\sqrt{21}}{3}\pi.$

Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2\sqrt{21}}{7}.$ **Chọn D.**

Câu 4. Để làm cống thoát nước cho một khu vực dân cư người ta cần đúc 500 ống hình trụ có đường kính trong và chiều cao của mỗi ống bằng 1 m, độ dày của thành ống là 10 cm. Chọn mác bê tông là 250 (tức mỗi khối bê tông là 7 bao xi măng). Hỏi phải chuẩn bị bao nhiêu bao xi măng để làm đủ số ống nói trên ?



A. ≈ 1110 (bao). B. ≈ 1200 (bao). C. ≈ 1210 (bao). D. ≈ 4210 (bao).

Lời giải. Thể tích khối trụ có bán kính đáy 0,6 m là: $V_1 = \pi R_1^2 h = \pi (0,6)^2 \cdot 1 = \frac{9}{25}\pi.$

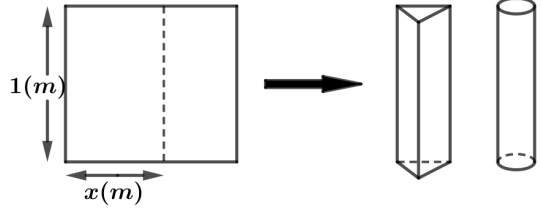
Thể tích khối trục có bán kính đáy 0,5 m là: $V_2 = \pi R_2^2 h = \pi (0,5)^2 \cdot 1 = \frac{1}{4}\pi.$

Lượng bê tông cho một ống là: $V = V_1 - V_2 = \left(\frac{9}{25} - \frac{1}{4}\right)\pi = \frac{11}{100}\pi \text{ (m}^3\text{)}.$

Lượng bê tông để làm 500 ống là: $\frac{11}{100}\pi \times 500 = 55\pi \text{ (m}^3\text{)}.$

Vậy số lượng bao xi măng cần chuẩn bị là: $55\pi \cdot 7 \approx 1210 \text{ (bao)}.$ **Chọn C.**

Câu 5. Cắt một miếng tôn hình vuông cạnh 1 m thành hai hình chữ nhật, trong đó một hình có chiều rộng $x \text{ (m)}$, gọi miếng tôn này là miếng tôn thứ nhất. Người ta gò miếng tôn thứ nhất



thành một lăng trụ tam giác đều, miếng còn lại gò thành một hình trụ (như hình vẽ). Tìm x để tổng thể tích khối lăng trụ và khối trụ thu được là nhỏ nhất.

A. $x = \frac{9}{\sqrt{3}\pi + 9}.$ B. $x = \frac{1}{3\sqrt{3}\pi + 1}.$ C. $x = \frac{9}{9\pi + \sqrt{3}}.$ D. $x = \frac{1}{\pi + \sqrt{3}}.$

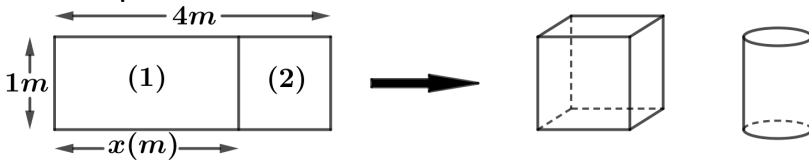
Lời giải. Chu vi tam giác đáy của lăng trụ là x , mà đáy của lăng trụ là tam giác đều nên có diện tích bằng $\frac{x^2\sqrt{3}}{36}.$

Gọi r là bán kính đáy của hình trụ. Suy ra $2\pi r = 1 - x \Rightarrow r = \frac{1-x}{2\pi}.$

Tổng thể tích của hai khối: $\frac{x^2\sqrt{3}}{36} \cdot 1 + \pi \left(\frac{1-x}{2\pi}\right)^2 \cdot 1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{36} + \frac{1}{4\pi}\right)x^2 - \frac{1}{2\pi}x + \frac{1}{4\pi} = f(x).$

Đây là hàm bậc hai nên $f(x) \geq f\left(\frac{9}{\sqrt{3}\pi + 9}\right), \forall x \in (0;1).$ **Chọn A.**

Câu 6. Một tấm tôn hình chữ nhật có chiều dài 4m, chiều rộng 1m. Một người thợ muốn cắt tấm tôn này thành hai phần như hình vẽ. Người thợ gò phần 1 thành hình trụ có đáy hình vuông và phần 2 thành hình trụ có đáy hình tròn. Tìm x để tổng thể tích của hai khối trụ là nhỏ nhất.



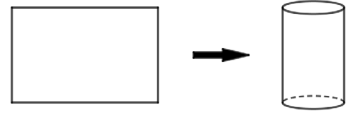
A. $x = \frac{4\pi}{\pi + 4}.$ B. $x = \frac{8}{\pi + 4}.$ C. $x = \frac{16}{\pi + 4}.$ D. $x = \frac{16\pi}{\pi + 4}.$

Lời giải. Gọi r là bán kính đáy của hình trụ. Suy ra $2\pi r = 4 - x \Rightarrow r = \frac{4-x}{2\pi}.$

Tổng thể tích của hai khối: $\left(\frac{x}{4}\right)^2 \cdot 1 + \pi \left(\frac{4-x}{2\pi}\right)^2 \cdot 1 = \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4\pi}\right)x^2 - \frac{2}{\pi}x + \frac{4}{\pi} = f(x).$

Đây là hàm bậc hai nên $f(x) \geq f\left(\frac{16}{4+\pi}\right), \forall x \in (0;4)$. **Chọn C.**

Câu 7. Từ một tấm tôn hình chữ nhật người ta cuộn thành một chiếc thùng hình trụ không đáy (như hình vẽ). Biết tấm tôn có chu vi bằng 120 cm. Để chiếc thùng có thể tích lớn nhất thì chiều dài, rộng của mảnh tôn lần lượt là



- A. 35 cm; 25 cm. B. 30 cm; 30 cm. C. 40 cm; 20 cm. D. 50 cm; 10 cm.

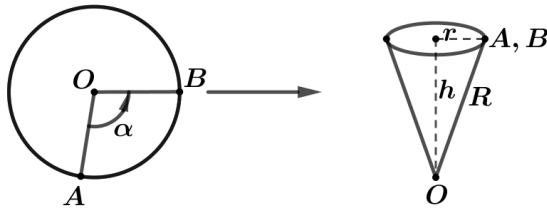
Lời giải. Gọi chiều dài tấm tôn là x (cm) ($0 < x < 60$). Suy ra chiều rộng: $60 - x$ (cm).

Giả sử quấn cạnh có chiều dài là $x \Rightarrow$ bán kính đáy $r = \frac{x}{2\pi}$ và chiều cao $h = 60 - x$.

$$\text{Khi đó } V = \pi r^2 h = \frac{-x^3 + 60x^2}{4\pi} = \frac{x \cdot x \cdot (120 - 2x)}{8\pi} \stackrel{\text{CosI}}{\leq} \frac{(x + x + 120 - 2x)^3}{8\pi \cdot 27} = \frac{8000}{\pi} (\text{cm}^3).$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 120 - 2x \Leftrightarrow x = 40$ (cm). **Chọn C.**

Câu 8. Bạn An có một tấm bìa hình tròn như hình vẽ, An muốn biến hình tròn đó thành một cái phễu hình nón. Khi đó An phải cắt hình quạt tròn OAB rồi dán hai bán kính OA, OB lại với nhau. Gọi α là góc ở tâm hình quạt tròn dùng làm phễu. Tìm α để thể tích phễu là lớn nhất.



A. $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

B. $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

C. $\alpha = \frac{2\sqrt{6}\pi}{3}$.

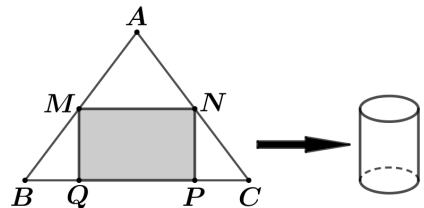
D. $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Lời giải. Thể tích của phễu $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(R^2 - h^2)h$.

Khảo sát ta thấy V đạt GTLN khi $h = \frac{R}{\sqrt{3}}$. Suy ra $r = \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Ta có $\ell_{AB} =$ chu vi đường tròn đáy của hình nón $\Leftrightarrow R\alpha = 2\pi r \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi\sqrt{6}}{3}$. **Chọn C.**

Câu 9. Có tấm bìa hình tam giác vuông cân ABC có cạnh huyền BC bằng a . Người ta muốn cắt tấm bìa đó thành hình chữ nhật $MNPQ$ rồi cuộn lại thành một hình trụ không đáy như hình vẽ. Diện tích hình chữ nhật đó



bằng bao nhiêu để diện tích xung quanh của hình trụ là lớn nhất?

A. $\frac{a^2}{2}$.

B. $\frac{a^2}{4}$.

C. $\frac{a^2}{8}$.

D. $\frac{a^2}{12}$.

Lời giải. Kẻ đường cao AH cắt MN tại K như hình vẽ.

Tam giác ABC vuông cân nên $AH = BH = CH = \frac{a}{2}$.

Đặt $MK = x$ $\left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$. Suy ra $AK = MK = x \Rightarrow KH = \frac{a}{2} - x$.

Chu vi đáy hình trụ bằng $2MK = 2x$.

$$\text{Do đó } S_{\text{xq}} = 2x.KH = 2x.\left(\frac{a}{2} - x\right) \leq 2 \frac{\left(x + \frac{a}{2} - x\right)^2}{4} = \frac{a^2}{8}.$$

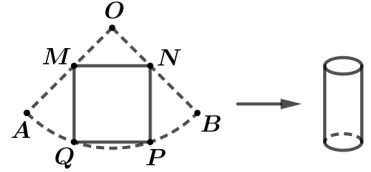
$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = \frac{a}{4}. \text{ Khi đó } \begin{cases} MN = 2x = \frac{a}{2} \\ KH = \frac{a}{4} \end{cases} \Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{a^2}{8}. \text{ Chọn C.}$$

Nhận xét: Diện tích xung quanh của hình trụ chính là diện tích của hình chữ nhật.

Câu 10. Cho tấm tôn hình nón có bán kính đáy là

$r = \frac{2}{3}$, độ dài đường sinh $\ell = 2$. Người ta cắt theo một

đường sinh và trải phẳng ra được một hình quạt. Gọi M, N thứ tự là trung điểm của OA, OB .



Hỏi khi cắt hình quạt theo hình chữ nhật $MNPQ$ (hình vẽ) và tạo thành hình trụ (không đáy) có đường PN trùng MQ thì được khối trụ có thể tích bằng bao nhiêu ?

A. $\frac{3(\sqrt{13}-1)}{4\pi}$.

B. $\frac{3(\sqrt{13}-1)}{8\pi}$.

C. $\frac{\sqrt{13}-1}{9\pi}$.

D. $\frac{5(\sqrt{13}-1)}{12\pi}$.

Lời giải. Độ dài cung $\widehat{AB}$ bằng chu vi đáy của hình nón và bằng $2\pi.\frac{2}{3} = \frac{4\pi}{3}$.

$$\text{Ta có } \ell_{\widehat{AB}} = OA.\widehat{AOB} \Leftrightarrow \frac{4\pi}{3} = \ell.\widehat{AOB} \Rightarrow \widehat{AOB} = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{ONM} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{ONP} = 120^\circ.$$

Áp dụng định lí cosin trong tam giác OAB , ta được $AB = 2\sqrt{3} \Rightarrow MN = \sqrt{3}$.

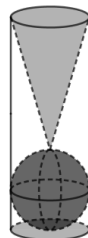
Áp dụng định lí cosin trong tam giác ONP , ta được $NP = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$.

Khi đó hình chữ nhật $MNPQ$ được cuốn thành mặt trụ có chiều cao $h = NP = \frac{\sqrt{13}-1}{2}$,

bán kính đáy $R = \frac{MN}{2\pi} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$. Vậy thể tích khối trụ $V = \frac{3(\sqrt{13}-1)}{8\pi}$. **Chọn B.**

Phần 4. Các khối NÓN – TRỤ – CẦU tiếp xúc

Câu 1. Trên bàn có một cốc nước hình trụ chứa đầy nước, có chiều cao bằng 3 lần đường kính của đáy; Một viên bi và một khối nón đều bằng thủy tinh. Biết viên bi là một khối cầu có đường kính bằng đường kính của cốc nước. Người ta từ từ thả vào cốc nước viên bi và khối nón đó (như hình vẽ) thì thấy nước trong cốc tràn ra ngoài. Tính tỉ số thể tích của lượng nước còn lại trong cốc và lượng nước ban đầu (bỏ qua bề dày của lớp vỏ thủy tinh).



- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{4}{9}$. D. $\frac{5}{9}$.

Lời giải. Gọi bán kính đáy của cốc hình trụ là R . Suy ra chiều cao của cốc nước hình trụ là $6R$; bán kính của viên bi là R ; bán kính đáy hình nón là R ; chiều cao của hình nón là $4R$.

Thể tích khối nón là $V_{\text{nón}} = \frac{4\pi}{3}R^3$. Thể tích của viên bi là $V_{\text{cầu}} = \frac{4\pi}{3}R^3$.

Thể tích của cốc (thể tích lượng nước ban đầu) là $V = 6\pi R^3$.

Suy ra thể tích nước còn lại: $V' = V - (V_{\text{nón}} + V_{\text{cầu}}) = \frac{10}{3}\pi R^3$. Vậy $\frac{V'}{V} = \frac{5}{9}$. **Chọn D.**

Câu 2. Một cái ống nghiệm hình trụ có bán kính trong lòng ống là R , ống nghiệm đang chứa một lượng nước có chiều cao h . Người ta thả 3 viên bi có cùng bán kính R vào ống nghiệm thì mực nước dâng lên vừa đủ phủ kín viên bi cao nhất như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng?



- A. $h = 3R$. B. $h = 2R$. C. $h = \sqrt{2}R$. D. $h = \sqrt[3]{3}R$.

Lời giải. Gọi h' là chiều cao của mực nước trong ống nghiệm sau khi thả 3 viên bi vào ống nghiệm. Khi đó $h' = 6R$.

Thể tích phần trụ có hai đáy là hai mặt nước là: $V_1 = 6R \cdot \pi R^2 = 6\pi R^3$.

Thể tích ba viên bi là: $V_2 = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^3$.

Suy ra thể tích lượng nước ban đầu trong ống nghiệm là: $V = V_1 - V_2 = 2\pi R^3$.

Mà $V = h\pi R^2$ nên ta có $h\pi R^2 = 2\pi R^3 \longrightarrow h = 2R$. **Chọn B.**

Câu 3. Ba quả bóng dạng hình cầu có bán kính bằng 1 đôi một tiếp xúc nhau và tiếp xúc với mặt phẳng (P). Mặt cầu (S) bán kính bằng 2 tiếp xúc với ba quả bóng trên. Gọi M là điểm bất kì trên (S), MH là khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P). Giá trị lớn nhất của MH bằng

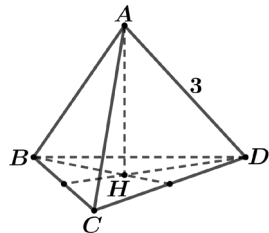


- A. $3 + \frac{\sqrt{30}}{2}$. B. $3 + \frac{\sqrt{69}}{3}$. C. $3 + \frac{\sqrt{123}}{4}$. D. $\frac{52}{9}$.

Lời giải. Gọi tâm của ba mặt cầu bé bán kính $r=1$ lần lượt là B, C, D ; tâm của mặt cầu lớn bán kính $R=2$ là A .

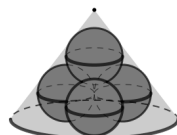
Do ba mặt cầu bé tiếp xúc với nhau nên tam giác BCD đều có cạnh bằng 2.

Mặt cầu lớn tiếp xúc với ba mặt cầu bé nên tứ diện $ABCD$ có cạnh bên $AB=AC=AD=3$.



Khi đó khoảng cách thỏa mãn bài toán là: $R+r+d_{[A,(BCD)]}=3+\frac{\sqrt{69}}{3}$. **Chọn B.**

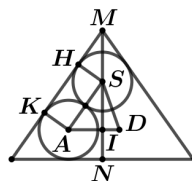
Câu 4. Có một hình nón chứa bốn quả bóng bàn bằng nhau, đường kính mỗi quả bóng bàn là 4. Các quả bóng bàn tiếp xúc với nhau, ba quả tiếp xúc với đáy của hình nón đồng thời bốn quả tiếp xúc với mặt xung quanh của hình nón như hình vẽ. Chiều cao của hình nón bằng



- A. $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+2$. B. $2\sqrt{3}+\frac{4}{\sqrt{3}}$. C. $2\sqrt{3}+\frac{4}{\sqrt{3}}+2$. D. $2\sqrt{3}+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+2$.

Lời giải. Gọi A, B, C, S lần lượt là tâm của bốn quả cầu. Khi đó khối chóp $ABCD$ là tứ diện đều cạnh bằng 4, gọi D là trung điểm của BC .

Xét phần mặt cắt (mặt cắt là mặt trung trực của BC) và kí hiệu như hình vẽ. Với M là đỉnh của hình nón; I là chân đường cao xuất phát từ đỉnh S của tứ diện $S.ABC$; H, K là hình chiếu vuông góc của S, A trên đường sinh của hình nón.

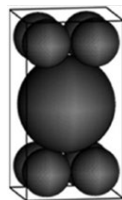


Vì $S.ABC$ là tứ diện đều có cạnh bằng 4 nên suy ra $SI=\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

Ta có $\triangle MHS \sim \triangle SIA \Rightarrow \frac{SM}{SH} = \frac{AS}{AI} \longrightarrow SM=2\sqrt{3}$.

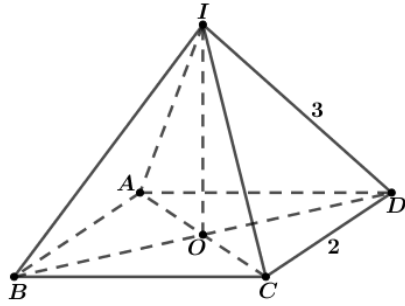
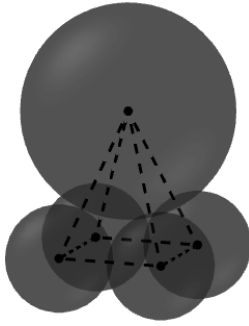
Vậy chiều cao của hình nón: $h=MN=SM+SI+IN=2\sqrt{3}+\frac{4\sqrt{6}}{3}+2$. **Chọn D.**

Câu 5. Một khối hộp chữ nhật có kích thước $4\text{cm} \times 4\text{cm} \times h\text{cm}$ chứa một quả cầu lớn và tám quả cầu nhỏ. Biết quả cầu lớn có bán kính $R=2\text{cm}$ và quả cầu nhỏ có bán kính $r=1\text{cm}$; các quả cầu tiếp xúc nhau và tiếp xúc các mặt của hình hộp (như hình vẽ). Tìm h .



- A. $h=2(1+2\sqrt{2})$ (cm). B. $h=2(1+\sqrt{7})$ (cm).
C. $h=2(3+\sqrt{7})$ (cm). D. $h=8$ (cm).

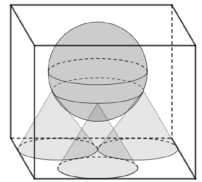
Lời giải. Gọi tâm của quả cầu lớn là I , tâm của bốn quả cầu nhỏ nằm bên dưới lần lượt là A, B, C, D . Khi đó $I.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều và có độ dài các cạnh như hình vẽ bên dưới.



Ta có $CD = r + r = 2\text{cm}$ và $ID = R + r = 3\text{cm}$.

Gọi $O = AC \cap BD$. Tính được $IO = \sqrt{7}$. Vậy $h = 2(1 + \sqrt{7})$ (cm). **Chọn B.**

Câu 6. Một bể hình hộp chữ nhật chứa đầy nước. Người ta cho ba khối nón giống nhau có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân vào bể sao cho ba đường tròn đáy của ba khối nón tiếp xúc với nhau, một khối nón có đường tròn đáy chỉ tiếp xúc với một cạnh của đáy bể và hai khối nón còn lại có đường tròn đáy tiếp xúc với hai cạnh của đáy bể (tham khảo hình vẽ). Sau đó người ta đặt lên



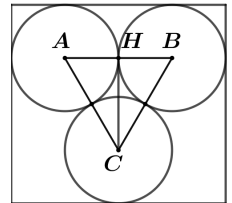
đỉnh của ba khối nón một khối cầu có bán kính bằng $\frac{4}{3}$ lần bán kính đáy của khối nón. Biết khối cầu vừa đủ ngập trong nước (mặt trên của bể là tiếp diện của mặt cầu) và lượng nước tràn ra là $\frac{337\pi}{3}$ (cm³). Thể tích lượng nước ban đầu ở trong bể xấp xỉ

- A. 885,2 (cm³). B. 1106,2 (cm³). C. 1174,2 (cm³). D. 1209,2 (cm³).

Lời giải. Gọi bán kính đường tròn đáy của khối nón là r (cm), suy ra chiều cao của khối nón là $h = r$ (do thiết diện là tam giác vuông cân) và bán kính mặt cầu là $\frac{4}{3}r$ (cm). Xét mặt đáy và ký hiệu như hình vẽ.

Suy ra chiều dài hình chữ nhật (mặt đáy) là $4r$ (cm); chiều rộng hình chữ nhật (mặt đáy) là $2r + CH = 2r + \sqrt{3}r = (2 + \sqrt{3})r$ (cm).

Mặt phẳng (α) qua ba đỉnh của khối nón, cắt mặt cầu theo thiết diện là một đường tròn có bán kính bằng bán kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ nên bằng $\frac{2r\sqrt{3}}{3}$ (cm). Do đó khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt



phẳng (α) bằng $\sqrt{\left(\frac{4}{3}r\right)^2 - \left(\frac{2r\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2r}{3}$.

Suy ra chiều cao của hình hộp chữ nhật bằng: $r + \frac{2r}{3} + \frac{4r}{3} = 3r$.

Thể tích ba khối nón và khối cầu $V' = \pi r^3 + \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{4}{3}r\right)^3 = \frac{337\pi}{81}r^3 \stackrel{\text{giả thiết}}{=} \frac{337\pi}{3} \longrightarrow r = 3$.

Thể khối hình hộp chữ nhật $V = 12r^3(2 + \sqrt{3})r^3 = 324(2 + \sqrt{3}) \approx 1209,2 \text{ (cm}^3\text{)}$. **Chọn D.**

Câu 7. Cho hình nón có bán kính đáy $R = 5a$, độ dài đường sinh $\ell = 13a$. Thể tích khối cầu nội tiếp hình nón bằng

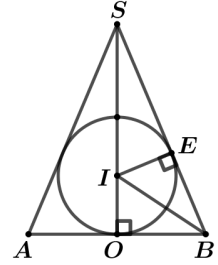
- A. $\frac{40\pi a^3}{9}$. B. $\frac{400\pi a^3}{27}$. C. $\frac{4000\pi a^3}{27}$. D. $\frac{4000\pi a^3}{81}$.

Lời giải. Ta cần tìm bán kính của mặt cầu. Xét mặt cắt qua trục của hình nón và ký hiệu như hình vẽ.

Từ giả thiết, suy ra chiều cao của hình nón $h = \sqrt{\ell^2 - R^2} = 12a$.

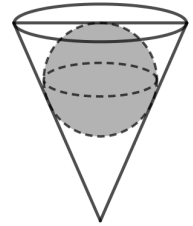
Ta có $hR = S_{\triangle SAB} = pr$ với r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác SAB và cũng là bán kính của hình cầu nội tiếp hình nón,

p là nửa chu vi tam giác SAB . Suy ra $r = \frac{hR}{p} = \frac{10a}{3}$.



Thể tích khối cầu: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{10a}{3}\right)^3 = \frac{4000\pi a^3}{81}$. **Chọn D.**

Câu 8. Một bình đựng nước dạng hình nón (không có đáy), đựng đầy nước. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng một nửa chiều cao của bình nước và đo được thể tích tràn ra là $\frac{32\pi}{3} \text{ (dm}^3\text{)}$. Biết rằng khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón và toàn bộ khối cầu chìm trong nước, trong đó mặt nước là tiết diện của khối cầu (hình vẽ bên). Thể tích nước còn lại trong bình bằng



- A. $\frac{16\pi}{3} \text{ (dm}^3\text{)}$. B. $\frac{32\pi}{3} \text{ (dm}^3\text{)}$. C. $\frac{40\pi}{3} \text{ (dm}^3\text{)}$. D. $\frac{64\pi}{3} \text{ (dm}^3\text{)}$.

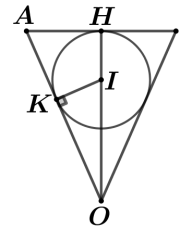
Lời giải. Xét phần thiết diện qua trục và kí hiệu các điểm như hình.

Gọi R là bán kính khối cầu. Theo đề, ta có $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32\pi}{3} \Rightarrow R = 2$.

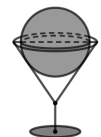
Khi đó $OH = 4R = 8$.

Do $\triangle OKI \sim \triangle OHA$ nên $\frac{OI}{OA} = \frac{IK}{AH} \Leftrightarrow \frac{6}{\sqrt{AH^2 + 8^2}} = \frac{2}{AH} \Rightarrow AH = 2\sqrt{2}$.

Thể tích nước còn lại trong bình: $\frac{\pi}{3} \cdot AH^2 \cdot OH - \frac{32\pi}{3} = \frac{32\pi}{3}$. **Chọn B.**



Câu 9. Một cái ly nước dạng hình nón, đựng đầy nước. Người ta thả vào đó một khối cầu không thấm nước, có đường kính bằng chiều cao của bình nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là V . Biết rằng khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón và đúng một nửa khối cầu chìm trong nước như hình vẽ. Thể tích nước còn lại trong ly bằng



A. V .

B. $\frac{1}{\pi}V$.

C. $\frac{1}{3}V$.

D. $\frac{1}{6}V$.

Lời giải. Gọi bán kính mặt cầu là R , suy ra thể tích khối cầu $V_{(S)} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

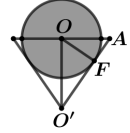
Suy ra thể tích nước tràn ra ngoài: $V = \frac{V_{(S)}}{2} = \frac{2}{3}\pi R^3$.

Xét phần mặt cắt qua trục hình nón và kí hiệu như hình vẽ.

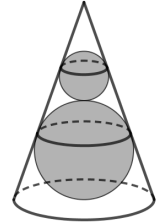
Ta có $\frac{1}{OF^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OO'^2} \xrightarrow{OF=R, OO'=2R} OA^2 = \frac{4R^2}{3}$.

Suy ra thể tích khối nón: $V_{(N)} = \frac{1}{3}\pi \cdot OA^2 \cdot OO' = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{4R^2}{3} \cdot 2R = \frac{8R^3}{9}$.

Vậy thể tích nước còn lại trong ly: $V_{(N)} - V = \frac{2}{9}\pi R^3 = \frac{V}{3}$. **Chọn C.**



Câu 10. Người ta đặt được vào trong một hình nón hai khối cầu có bán kính lần lượt là a và $2a$ sao cho các khối cầu đều tiếp xúc với mặt xung quanh của hình nón, hai khối cầu tiếp xúc với nhau và khối cầu lớn tiếp xúc với đáy của hình nón (tham khảo hình vẽ). Bán kính đáy của hình nón đã cho bằng



A. $a\sqrt{5}$.

B. $2\sqrt{2}a$.

C. $3a$.

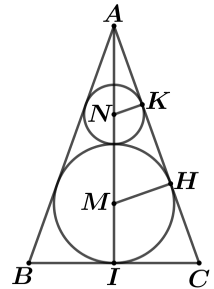
D. $\frac{8a}{3}$.

Lời giải. Xét phần thiết diện qua trục và kí hiệu các điểm như hình vẽ, trong đó A là đỉnh của hình nón và BC là đường kính đáy của hình nón có tâm đáy là I . Gọi M, N lần lượt là tâm của hai khối cầu có bán kính $2a, a$; H, K lần lượt là điểm tiếp xúc của AC với hai đường tròn tâm M, N .

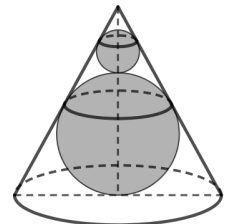
Vì $NK = \frac{MH}{2}$ và $NK \parallel MH \rightarrow NK$ là đường trung bình trong tam giác AMH suy ra N là trung điểm AM .

Khi đó $AM = 2MN = 6a \Rightarrow AI = 8a$.

Mặt khác $\triangle AIC \sim \triangle AHM \Rightarrow \frac{IC}{HM} = \frac{AI}{AH} \Leftrightarrow \frac{IC}{2a} = \frac{8a}{\sqrt{(6a)^2 - (2a)^2}} \Rightarrow IC = 2a\sqrt{2}$. **Chọn B.**



Câu 11. Người ta chế tạo ra một món đồ chơi cho trẻ em theo các công đoạn như sau: Trước tiên, chế tạo ra một hình nón tròn xoay có góc ở đỉnh là $2\alpha = 60^\circ$ bằng thủy tinh cho trong suốt. Sau đó đặt hai quả cầu nhỏ bằng thủy tinh có bán kính lớn, nhỏ khác nhau sao cho hai mặt cầu tiếp xúc với nhau và đều tiếp xúc với mặt nón, quả cầu lớn tiếp xúc với cả mặt đáy của hình nón (hình vẽ). Biết rằng chiều cao của hình nón là 9 cm. Bỏ qua bề dày của các lớp vỏ thủy tinh, tổng thể tích của hai khối cầu bằng



A. $\frac{38\pi}{3}(\text{cm}^3)$. B. $\frac{40\pi}{3}(\text{cm}^3)$. C. $\frac{100\pi}{3}(\text{cm}^3)$. D. $\frac{112\pi}{3}(\text{cm}^3)$.

Lời giải. Xét phần thiết diện qua trục và kí hiệu như hình vẽ.

Ta có $\triangle SAB$ đều có chiều cao $h = 9 \text{ cm}$ nên bán kính đường tròn nội tiếp $r = \frac{h}{3} = 3$.

Tương tự $\triangle SEF$ đều có chiều cao $h' = 9 - 2r = 3$ nên có bán kính đường tròn nội tiếp $r' = \frac{h'}{3} = 1$.

Thể tích hai khối cầu bằng: $\frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{4}{3}\pi r'^3 = \frac{112\pi}{3}(\text{cm}^3)$. **Chọn D.**

Cách 2. (Dùng khi góc ở đỉnh khác 60°) Gọi N, r_1 là tâm và bán kính của quả cầu nhỏ; M, r_2 là tâm và bán kính của quả cầu lớn. Do các mặt cầu tiếp xúc với nhau và tiếp xúc với mặt nón nên tam giác SQN vuông tại Q , tam giác SPM vuông tại P .

Hình nón tròn xoay có góc ở đỉnh là $2\alpha = 60^\circ$ nên $\widehat{ASO} = 30^\circ$.

Ta có $r_2 = MP = SM \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2}SM = \frac{1}{2}(SO - r_2) \Rightarrow r_2 = 3$;

$$r_1 = NQ = SN \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2}SN = \frac{1}{2}(SO - r_1 - 2r_2) \Rightarrow r_1 = 1.$$

Câu 12. Một ly nước có dạng như hình vẽ. Phần phía trên chứa nước có dạng hình nón đỉnh S với đường kính đáy và chiều cao SO cùng bằng 8 cm . Ban đầu ly chứa lượng nước có chiều cao 4 cm so với đỉnh S . Cho vào ly nước một viên bi sắt hình cầu thì nước dâng lên vừa phủ kín viên bi. Tính bán kính r của viên bi làm tròn đến hai chữ số thập phân.

A. $r = 1,23 \text{ cm}$. B. $r = 1,28 \text{ cm}$. C. $r = 1,53 \text{ cm}$. D. $r = 1,78 \text{ cm}$.

Lời giải. Đặt α bằng nửa góc ở đỉnh của hình nón.

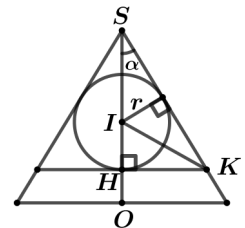
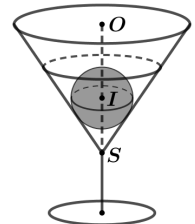
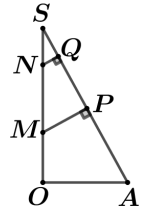
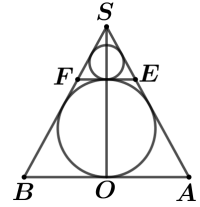
Suy ra $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ (do chiều cao bằng đường kính).

Ban đầu lượng nước có chiều cao 4 cm nên bán kính của đường tròn giao tuyến (mặt nước với ly) bằng $4 \cdot \tan \alpha = 2 \text{ cm}$. Suy ra thể tích lượng nước ban đầu $V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 4 = \frac{16\pi}{3}$.

Thể tích viên bi sắt là: $V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Đặt $SH = h$ là chiều cao mực nước sau khi thả viên bi, ta có

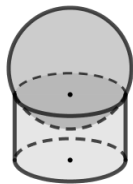
$$h = SI + IH = \sqrt{IM^2 + SM^2} + IH \xrightarrow[\substack{IH=r \\ SM=\frac{IM}{\tan \alpha}=2r,}]{IH=r} h = (\sqrt{5} + 1)r; \quad HK = SH \cdot \tan \alpha = \frac{h}{2}.$$



Suy ra thể tích ly nước sau khi thả viên bi: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot HK^2 \cdot SH = \frac{\pi}{12}h^3 = \frac{\pi}{12}(1+\sqrt{5})^3 r^3$.

Ta có: $V = V_1 + V_2 \Leftrightarrow \frac{\pi}{12}(1+\sqrt{5})^3 r^3 = \frac{16\pi}{3} + \frac{4}{3}\pi r^3 \xrightarrow{\text{CASIO}} x \simeq 1,53(\text{cm})$. **Chọn C.**

Câu 13. Một chiếc chén hình trụ có chiều cao bằng đường kính quả bóng bàn. Người ta đặt quả bóng lên chiếc chén thấy phần ở ngoài của quả bóng có chiều cao bằng $\frac{3}{4}$ chiều cao của nó. Gọi V_1 , V_2 lần



lượt là thể tích của quả bóng và chiếc chén. Khi đó

- A. $3V_1 = 2V_2$. B. $9V_1 = 8V_2$. C. $16V_1 = 9V_2$. D. $27V_1 = 8V_2$.

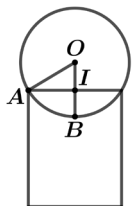
Lời giải. Gọi h là chiều cao của hình trụ, r là bán kính của chén hình trụ, R là bán kính của quả bóng. Suy ra $h = 2R$.

Xét phần thiết diện qua trục và kí hiệu như hình vẽ.

Ta có $OA = OB = R = \frac{h}{2}$.

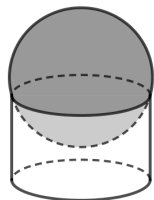
Từ giả thiết suy ra $IB = \frac{h}{4} \longrightarrow OI = \frac{h}{4}$.

Bán kính đáy của chén hình trụ là $r = IA = \sqrt{OA^2 - OI^2} = \frac{h\sqrt{3}}{4}$.



Vậy tỉ số thể tích: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\pi r^2 h} = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{h}{2}\right)^3 : \pi \left(\frac{h\sqrt{3}}{4}\right)^2 h = \frac{8}{9} \longrightarrow 9V_1 = 8V_2$. **Chọn B.**

Câu 14. Một quả cầu có thể tích $\frac{256}{3}\pi (\text{cm}^3)$ được đặt vào một chiếc cốc có dạng hình trụ với đường kính đáy là 6 cm như hình vẽ. Phần nhô ra khỏi chiếc cốc của quả cầu bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



- A. 2,00 cm. B. 4,00 cm. C. 4,65 cm. D. 6,65 cm.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra quả cầu có bán kính $r = 4$ (cm).

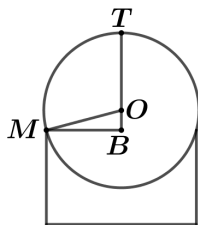
Xét phần thiết diện qua trục và kí hiệu như hình vẽ.

Khi đó $OM = r = 4$ cm; $BM = 3$ cm.

Tam giác vuông OBM , có $OB = \sqrt{OM^2 - MB^2} = \sqrt{7}$ (cm).

Vậy chiều cao của quả cầu nhô ra khỏi miệng cốc bằng

$$TB = TO + OB = r + OB = 4 + \sqrt{7} (\text{cm}) \approx 6,65 (\text{cm}). \quad \textbf{Chọn D.}$$



Câu 15. Một hình cầu nội tiếp trong một hình nón cụt. Hình cầu nội tiếp trong hình nón cụt là hình cầu tiếp xúc với hai đáy của hình nón cụt và tiếp với mặt xung quanh của hình nón cụt (tham khảo hình vẽ). Biết rằng thể tích khối nón cụt gấp đôi thể tích của khối cầu. Tỉ lệ giữa bán kính đáy lớn và bán kính đáy nhỏ của hình nón cụt bằng



A. $\sqrt{3}$.

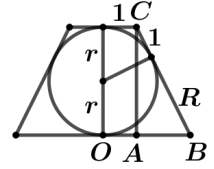
B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

D. $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải. Chuẩn hóa bán kính đáy nhỏ của hình nón bằng 1. Gọi bán kính đáy lớn của hình nón là $R > 1$, r là bán kính của hình cầu. Suy ra chiều cao của hình nón cắt là $h = 2r$.

Xét mặt cắt qua trục của hình nón cắt và kí hiệu như hình vẽ.



Tam giác vuông ABC , có $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow (R+1)^2 = (R-1)^2 + (2r)^2 \Rightarrow r = \sqrt{R}$.

Thể tích khối cầu: $V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\pi R\sqrt{R}}{3}$.

Thể tích khối nón cắt: $V_2 = \frac{\pi}{3}(R^2 + 1^2 + R \cdot 1) \cdot 2r = \frac{2\pi}{3} \cdot \sqrt{R}(R^2 + R + 1)$.

Theo giả thiết, ta có $V_2 = 2V_1 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} \cdot \sqrt{R}(R^2 + R + 1) = \frac{8\pi R\sqrt{R}}{3} \xrightarrow{R>1} R = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Vậy tỉ số cần tính: $\frac{R}{1} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **Chọn D.**

Phần 5. Mặt cầu ngoại tiếp khối chóp

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $BC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh bên SB và SC . Thể tích của khối cầu ngoại tiếp chóp $A.HKCB$ bằng

A. $\sqrt{2}\pi a^3$.

B. $\frac{\pi a^3}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

D. $\frac{\pi a^3}{6}$.

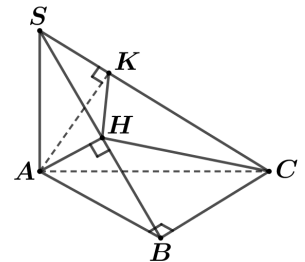
Lời giải. Theo giả thiết, ta có $\widehat{ABC} = 90^\circ$ và $\widehat{AKC} = 90^\circ$. (1)

Do $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \text{ do } BC \perp (SAB) \end{cases} \Rightarrow AH \perp HC$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra ba điểm B, H, K cùng nhìn xuống

AC dưới một góc 90° nên $R = \frac{AC}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$. **Chọn C.**



Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và $BD = a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy là trung điểm OD . Đường thẳng SD tạo với mặt đáy một góc bằng 60° . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

A. a .

B. $\frac{a}{2}$.

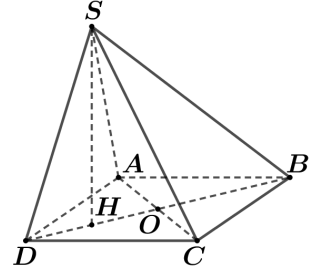
C. $\frac{a}{3}$.

D. $\frac{a}{4}$.

Lời giải. Xác định được $60^\circ = \widehat{SD, (ABCD)} = \widehat{SDH}$.

Tính được $SH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$; $SD = \frac{a}{2}$ và $SB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $SB^2 + SD^2 = a^2 = BD^2$. Suy ra tam giác SBD vuông tại S . Vậy các đỉnh S, A, C cùng nhìn xuống BD dưới một góc vuông nên $R = \frac{1}{2}BD = \frac{a}{2}$. **Chọn B.**



Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Đường thẳng SA vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm SC , mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A và M đồng thời song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại E, F . Bán kính mặt cầu đi qua năm điểm S, A, E, M, F bằng

- A. a . B. $a\sqrt{2}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải. Dễ thấy $EF \parallel BD$.

Mà $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC \longrightarrow EF \perp SC$. (1)

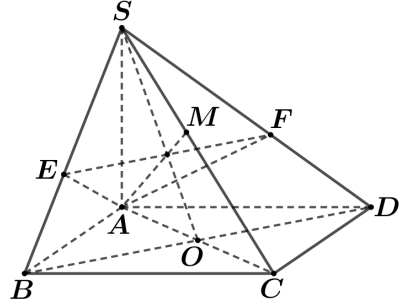
Tam giác SAC cân tại $A \longrightarrow AM \perp SC$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $SC \perp (\alpha) \Rightarrow SC \perp AE$.

Lại có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE$.

Từ đó suy ra $AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SB$.

Tương tự ta cũng có $AF \perp SD$. Vậy các đỉnh E, M, F cùng nhìn SA dưới một góc vuông nên $R = \frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. **Chọn D.**



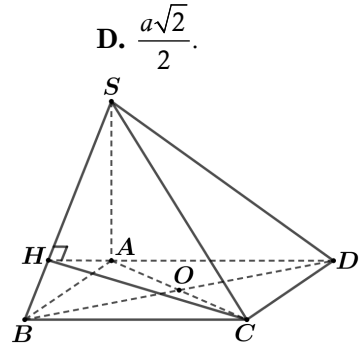
Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Đường thẳng SA vuông góc đáy $(ABCD)$. Gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng SB . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $HBCD$ bằng

- A. a . B. $a\sqrt{2}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải. Gọi $O = AC \cap BD$. Vì $ABCD$ là hình vuông nên $OB = OD = OC$. (1)

Dễ dàng chứng minh được $AH \perp HC$ nên tam giác AHC vuông tại H và có O là trung điểm cạnh huyền AC nên suy ra $OH = OC$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $R = OH = OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. **Chọn D.**



Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

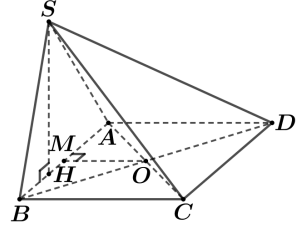
- A. $\frac{\pi a^3}{3}$. B. $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$. C. $\frac{\pi a^3}{6}$. D. $\frac{11\sqrt{11}\pi a^3}{162}$.

Lời giải. Gọi $O = AC \cap BD$. Suy ra $OA = OB = OC = OD$. (1)

Gọi M là trung điểm AB , do tam giác SAB vuông tại S nên $MS = MA = MB$.

Gọi H là hình chiếu của S trên AB . Từ giả thiết suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Ta có $\begin{cases} OM \perp AB \\ OM \perp SH \end{cases} \Rightarrow OM \perp (SAB)$ nên OM là trục của tam giác



SAB , suy ra $OA = OB = OS$. (2)

Từ (1) và (2), ta có $OS = OA = OB = OC = OD$. Vậy O là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$, bán kính $R = OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ nên $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$. **Chọn B.**

Câu 6. Cho hình chóp $O.ABC$ có $OA = OB = OC = a$, $\widehat{AOB} = 60^\circ$, $\widehat{BOC} = 90^\circ$, $\widehat{COA} = 120^\circ$. Gọi S là trung điểm của OB . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{7}}{2}$. C. $\frac{a}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{7}}{4}$.

Lời giải.

Công thức tìm nhanh bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $R = \sqrt{x^2 + r^2}$ với

- r là bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.
- $x = \frac{SO^2 - r^2}{2h}$: S là đỉnh hình chóp, O là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy, h là chiều cao khối chóp.

Xét bài toán. Cho hình chóp $S.ABCDEF$ có đường cao SH , tâm đường tròn ngoại tiếp đáy là O . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

- Qua O kẻ đường thẳng d song song với SH thì d

là trục đường tròn ngoại tiếp đáy.

- Gọi I trên d là tâm mặt cầu cần tìm, đặt $\overline{OI} = x$.

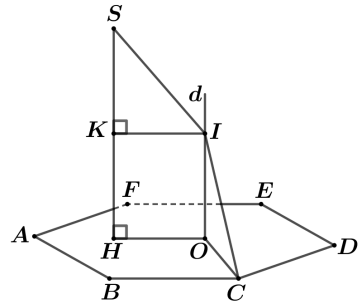
Khi $x \geq 0$ thì $\overline{OI}$ và $\overline{HS}$ cùng chiều;

Khi $x < 0$ thì $\overline{OI}$ và $\overline{HS}$ ngược chiều.

- Kẻ $IK \perp SH$ thì $IK = OH$, $SK = |SH - x|$.

- Ta có $IS = IC \Leftrightarrow IK^2 + SK^2 = OI^2 + OC^2$

$$\Leftrightarrow OH^2 + (SH - x)^2 = x^2 + OC^2$$



$$\Leftrightarrow x = \frac{OH^2 + SH^2 - OC^2}{2SH} \Leftrightarrow x = \frac{SO^2 - OC^2}{2SH} = \frac{SO^2 - r^2}{2h}.$$

• Bán kính mặt cầu cần tìm: $R = \sqrt{x^2 + OC^2} = \sqrt{x^2 + r^2}.$

Áp dụng. Tính được $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, $AC = a\sqrt{3}$ nên tam giác ABC vuông tại B .

Gọi H là trung điểm AC suy ra H là tâm đường tròn

ngoại tiếp tam giác đáy nên $r = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$

Từ giả thiết suy ra $OH \perp (ABC)$ và tính được $OH = \frac{a}{2}.$

Gọi M là trung điểm BH suy ra $SM \perp (ABC)$ và $SM = \frac{OH}{2} = \frac{a}{4}.$

Trong tam giác vuông SMH tính được $SH = \frac{a}{2}.$

Vậy ta có $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $h = \frac{a}{4}$ và $SH = \frac{a}{2}$ nên suy ra $R = \frac{a\sqrt{7}}{2}$. **Chọn B.**

Câu 7. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên bằng $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Gọi D là điểm đối xứng của B qua C . Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp

hình chóp $S.ABD$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{37}}{6}.$

B. $\frac{a\sqrt{35}}{7}.$

C. $\frac{a\sqrt{36}}{7}.$

D. $\frac{a\sqrt{39}}{7}.$

Lời giải. Dễ thấy C là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD nên $r = CB = a$. Tam giác vuông SHC có

$$SC = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \text{ và } HC = \frac{a}{\sqrt{3}} \text{ nên suy ra } SH = a.$$

Vậy $r = a$, $h = a$ và $SC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ nên $R = \frac{\sqrt{37}}{6}$. **Chọn A.**

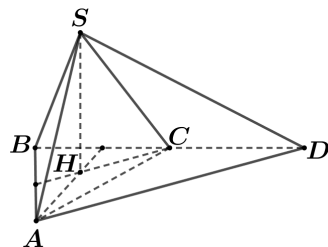
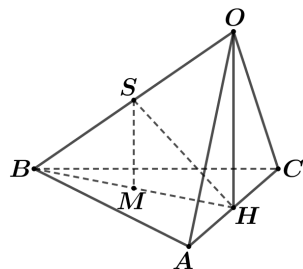
Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với $AD = DC = CB = 1$, $AB = 2$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , hình chiếu vuông góc của S xuống mặt $(ABCD)$ là trung điểm của OA . Đường thẳng SC tạo với mặt đáy $(ABCD)$ một góc bằng 60° . Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{17\pi\sqrt{59}}{54}.$

B. $\frac{31\pi\sqrt{61}}{81}.$

C. $\frac{31\pi\sqrt{51}}{162}.$

D. $\frac{61\pi\sqrt{61}}{162}.$

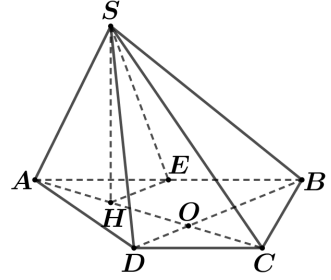


Lời giải. Gọi E là trung điểm AB . Dễ thấy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn tâm E nên $r = EA = 1$. Tam giác ABC vuông tại C suy ra

$$AC = \sqrt{3} \Rightarrow HC = \frac{2}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\widehat{SC, (ABCD)} = 60^\circ} SH = 2.$$

$$\text{Ta có } HE = \frac{BO}{2} = \frac{AC}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \xrightarrow{\Delta SHE} SE = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}.$$

Vậy ta có $r = 1$, $h = 2$ và $SE = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$ nên suy ra $R = \frac{\sqrt{61}}{6} \Rightarrow V = \frac{61\pi\sqrt{61}}{162}$. **Chọn D.**



Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = \frac{1}{2}AD = a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy. Gọi E là trung điểm của AD . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ECD$ bằng

A. $\frac{\sqrt{114}}{2}a$.

B. $\frac{\sqrt{114}}{4}a$.

C. $\frac{\sqrt{114}}{6}a$.

D. $\frac{\sqrt{114}}{8}a$.

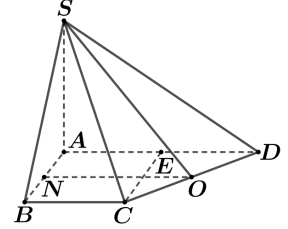
Lời giải. Tam giác ECD vuông tại E nên $r = \frac{1}{2}CD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chiều cao $h = SA = a\sqrt{6}$.

Gọi N là trung điểm AB . Khi đó

$$SO = \sqrt{SA^2 + AO^2} = \sqrt{SA^2 + (AN^2 + NO^2)} = \frac{a\sqrt{34}}{2}.$$

Suy ra $R = \frac{\sqrt{114}}{6}a$. **Chọn C.**



Câu 10. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh $2a$. Mặt bên tạo với đáy góc 60° . Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên SD . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $HADC$ bằng

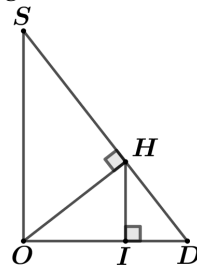
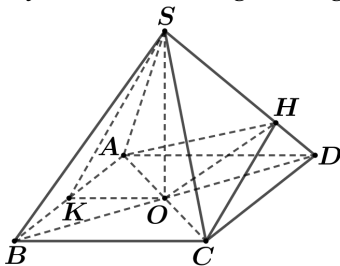
A. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$.

B. $\frac{a\sqrt{21}}{6}$.

C. $\frac{11a\sqrt{5}}{20}$.

D. $\frac{11a\sqrt{5}}{50}$.

Lời giải. Dễ thấy O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC nên $r = AO = a\sqrt{2}$.



Gọi K là trung điểm AB . Xác định được $60^\circ = \widehat{(SAB)}, \widehat{(ABCD)} = \widehat{SKO}$.

Suy ra $SO = a\sqrt{3} \Rightarrow SD = a\sqrt{5}$.

Kẻ $HI \perp OD$ suy ra $HI \perp (ADC)$. Ta có $\frac{HI}{SO} = \frac{HD}{SD} = \frac{OD^2}{SD^2} = \frac{2}{5}$ suy ra $HI = \frac{2a\sqrt{3}}{5}$.

Trong tam giác vuông SOD có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OD^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$.

Vậy ta có $r = a\sqrt{2}$, $h = \frac{2a\sqrt{3}}{5}$ và $OH = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$ nên suy ra $R = \frac{a\sqrt{21}}{3}$. **Chọn A.**

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CMN$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{37}}{6}$.

B. $\frac{a\sqrt{29}}{8}$.

C. $\frac{5a\sqrt{3}}{12}$.

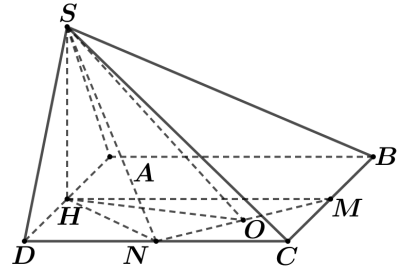
D. $\frac{a\sqrt{93}}{12}$.

Lời giải. Đáy là tam giác CMN vuông tại C nên

$$r = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{4}BD = \frac{a\sqrt{2}}{4}. \text{ Chiều cao } h = SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN là trung điểm MN ;

Áp dụng công thức đường trung tuyến trong tam giác HMN tính được $HO^2 = \frac{5a^2}{8}$.



Trong tam giác vuông SHO có $SO^2 = SH^2 + HO^2 = \frac{11a^2}{8}$.

Vậy ta có $r = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $SO^2 = \frac{11a^2}{8}$ nên suy ra $R = \frac{a\sqrt{93}}{12}$. **Chọn D.**

Câu 12. Cho tứ diện đều $ABCD$ có mặt cầu nội tiếp là (S_1) và mặt cầu ngoại tiếp là (S_2) . Một hình lập phương ngoại tiếp (S_2) và nội tiếp mặt cầu (S_3) . Gọi r_1, r_2, r_3 lần lượt là bán kính các mặt cầu $(S_1), (S_2), (S_3)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{3}$ và $\frac{r_2}{r_3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

B. $\frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{3}$ và $\frac{r_2}{r_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

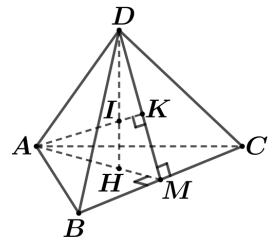
C. $\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{3}$ và $\frac{r_2}{r_3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

D. $\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{3}$ và $\frac{r_2}{r_3} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Lời giải. Tứ diện đều nên suy ra tâm mặt cầu ngoại tiếp, nội tiếp tứ diện trùng nhau và là trọng tâm của tứ diện. Gọi các điểm như hình vẽ, khi đó: $r_1 = IK$, $r_2 = IA$.

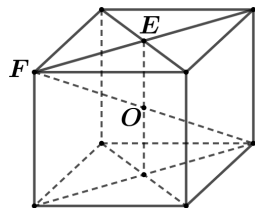
$$\text{Ta có } \frac{r_1}{r_2} = \sin \widehat{IDK} = \frac{HM}{AM} \stackrel{AM=DM}{=} \frac{HM}{DM} = \frac{1}{3}.$$

Mặt cầu ngoại tiếp, mặt cầu nội tiếp hình lập phương đều có tâm là O . Gọi các điểm như hình vẽ, khi đó: $r_2 = OE$, $r_3 = OF$.



Ta có $\frac{r_2}{r_3} = \sin \widehat{EFO} = \frac{OE}{OF} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy $\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{3}$ và $\frac{r_2}{r_3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **Chọn C.**



Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2 và hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{AHB} = 150^\circ$, $\widehat{BHC} = 120^\circ$, $\widehat{CHA} = 90^\circ$. Biết tổng diện tích mặt cầu ngoại tiếp các hình chóp $S.HAB$, $S.HBC$, $S.HCA$ là $\frac{124}{3}\pi$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{9}{2}$.

B. $\frac{4}{3}$.

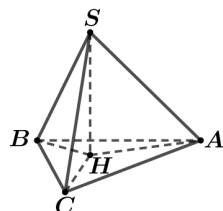
C. $\frac{9}{4}$.

D. 4.

Lời giải. Gọi r_1, r_2, r_3 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác HAB, HBC và HCA .

Áp dụng định lí hàm số sin, ta tìm được $r_1 = 2$; $r_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $r_3 = 1$.

Gọi R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp các hình chóp $S.HAB, S.HBC$ và $S.HCA$.



Đặt $SH = 2x > 0$. Suy ra $R_1 = \sqrt{r_1^2 + \frac{SH^2}{4}} = \sqrt{x^2 + 4}$, $R_2 = \sqrt{x^2 + \frac{4}{3}}$, $R_3 = \sqrt{x^2 + 1}$.

Theo đề, ta có $4\pi R_1^2 + 4\pi R_2^2 + 4\pi R_3^2 = 4\pi \left(3x^2 + \frac{19}{3} \right) = \frac{124\pi}{3} \longrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SH = \frac{4}{3}$. **Chọn B.**

Câu 14. Cho tứ diện $ABCD$ với $AB = a, CD = b$ và các cạnh còn lại có độ dài bằng nhau. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD và $MN = m$. Biết rằng tồn tại một mặt cầu tiếp xúc với 6 cạnh của tứ diện đã cho. Hệ thức nào sau đây đúng ?

A. $ab = m^2$.

B. $ab = 2m^2$.

C. $2ab = m^2$.

D. $3ab = 2m^2$.

Lời giải. Gọi I là trung điểm của MN , E là hình chiếu của I lên BC .

Tam giác ACD và BCD lần lượt cân tại A và B nên

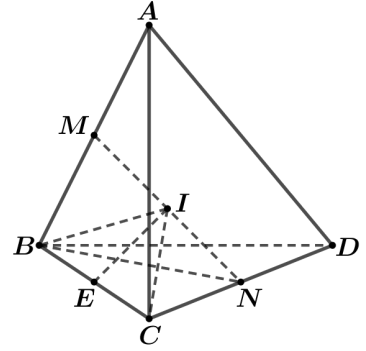
$$\begin{cases} BN \perp CD \\ AN \perp CD \end{cases} \rightarrow CD \perp MN. \text{ Tương tự ta cũng có } AB \perp MN$$

nên MN là đoạn vuông góc chung của AB và CD

$\rightarrow I$ là tâm của mặt cầu thỏa yêu cầu bài toán.

$$\text{Ta có } \triangle IEC = \triangle INC \rightarrow EC = CN = \frac{b}{2} \text{ và}$$

$$\triangle BIE = \triangle BIM \rightarrow BM = BE = \frac{a}{2}.$$



Suy ra các cạnh còn lại bằng nhau và bằng $BC = BE + EC = \frac{a+b}{2}$.

$$\text{Ta có: } m^2 = MN^2 = BN^2 - BM^2 = BC^2 - CN^2 - BM^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} = \frac{ab}{2}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 15. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC và P là điểm thuộc tia đối của SC sao cho $SC = 3SP$. Biết rằng trong các mặt cầu đi qua A, M, N thì mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AMNP$ có bán kính nhỏ nhất. Thể tích của hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{16}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{32}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{48}$.

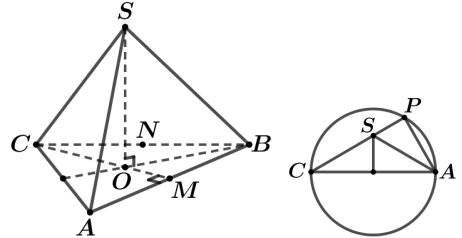
D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{96}$.

Lời giải. Gọi (S_0) là mặt cầu đường kính AC ; (S) là mặt cầu đi qua A, M, N suy ra (S) chứa đường tròn đường kính AC .

Trong các mặt cầu chứa đường tròn đường kính AC thì mặt cầu có bán kính nhỏ nhất chính là mặt cầu (S_0) .

Từ giả thiết suy ra $P \in (S_0) \rightarrow CP \perp AP$.

Đặt $SP = x \Rightarrow SC = 3x$.



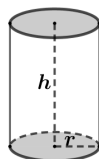
Trong $\triangle APC$ có $AP^2 = AC^2 - CP^2 = a^2 - 16x^2$; $\triangle APS$ có $SA^2 = AP^2 + SP^2 = a^2 - 15x^2$.

Mà $SA = SC$ nên $a^2 - 15x^2 = 9x^2 \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{12} \Rightarrow SC = \frac{a\sqrt{6}}{4} \Rightarrow SO = \sqrt{SC^2 - CO^2} = \frac{a\sqrt{6}}{12}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SO = \frac{a^3\sqrt{2}}{48}$. **Chọn C.**

Phần 6. Bài toán cực trị

Câu 1. Một hình trụ có thể tích V không đổi. Tìm mối quan hệ giữa bán kính r của đáy và chiều cao h của hình trụ khi diện tích toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất.



- A. $h = r$. B. $h = \sqrt{2}r$. C. $h = \sqrt{3}r$. D. $h = 2r$.

Lời giải. Ta có $V = \pi r^2 h \longrightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}$.

Diện tích toàn phần: $S_{\text{tp}} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\frac{V}{r} + 2\pi r^2 = \frac{V}{r} + \frac{V}{r} + 2\pi r^2 \geq 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$.

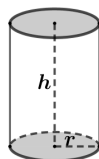
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{V}{r} = 2\pi r^2 \xrightarrow{\text{do } V = \pi r^2 h} \pi rh = 2\pi r^2 \Leftrightarrow h = 2r$. **Chọn D.**

Câu 2. Một hộp sữa hình trụ có thể tích V (không đổi) được làm từ một tấm tôn có diện tích đủ lớn. Nếu hộp sữa chỉ kín một đáy thì để tốn ít vật liệu nhất, hệ thức giữa bán kính đáy r và đường cao h là

- A. $h = r$. B. $h = \sqrt{2}r$. C. $h = \sqrt{3}r$. D. $h = 2r$.

Lời giải. Tương tự như bài trên với chú ý $S = 2\pi rh + \pi r^2$. **Chọn A.**

Câu 3. Trong số các hình trụ có diện tích toàn phần đều bằng S thì bán kính r và chiều cao h của khối trụ có thể tích lớn nhất là



- A. $r = \sqrt{\frac{S}{2\pi}}; h = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{2\pi}}$. B. $r = \sqrt{\frac{S}{2\pi}}; h = 2\sqrt{\frac{S}{2\pi}}$.
C. $r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}; h = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$. D. $r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}; h = 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$.

Lời giải. Ta có $S_{\text{tp}} = 2\pi rh + 2\pi r^2 \longrightarrow h = \frac{S_{\text{tp}} - 2\pi r^2}{2\pi r}$.

Khi đó $V = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot \frac{S_{\text{tp}} - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{1}{2}(rS_{\text{tp}} - 2\pi r^3)$.

Xét hàm $f(r) = rS_{\text{tp}} - 2\pi r^3$. Ta có $f'(r) = -6\pi r^2 + S_{\text{tp}}; f'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{S_{\text{tp}}}{6\pi}}$.

Lập bảng biến thiên ta thấy V_{max} tại $r = \sqrt{\frac{S_{\text{tp}}}{6\pi}}$. Suy ra $h = 2\sqrt{\frac{S_{\text{tp}}}{6\pi}} = 2r$. **Chọn D.**

Câu 4. Người ta thiết kế một thùng chứa hình trụ (như hình vẽ) có thể tích V không đổi. Biết rằng giá của vật liệu làm mặt đáy và nắp của thùng bằng nhau và đắt gấp 3 lần so với giá vật liệu để làm mặt xung quanh của thùng (chi phí cho mỗi đơn vị diện tích). Gọi chiều cao của thùng là h và bán kính đáy là r . Tính tỷ số $\frac{h}{r}$ sao cho chi phí vật liệu sản xuất



thùng nhỏ nhất.

A. $\frac{h}{r} = 1$.

B. $\frac{h}{r} = 2$.

C. $\frac{h}{r} = 6$.

D. $\frac{h}{r} = 9$.

Lời giải. Ta có $V = \pi r^2 h \longrightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}$.

Gọi t là giá tiền của một đơn vị diện tích vật liệu để làm mặt xung quanh, suy ra giá tiền của một đơn vị diện tích vật liệu để làm mặt đáy là $3t$.

Diện tích mặt xung quanh $S_1 = 2\pi r h \longrightarrow$ giá tiền mặt xung quanh là $T_1 = 2\pi r h \times t$.

Diện tích hai mặt đáy $S_2 = 2\pi r^2 \longrightarrow$ giá tiền hai mặt đáy là $T_2 = 2\pi r^2 \times 3t$.

$$\begin{aligned} \text{Tổng tiền hoàn thành sản phẩm: } T &= T_1 + T_2 = 2t(\pi r h + 3\pi r^2) = 2t\left(\frac{V}{r} + 3\pi r^2\right) \\ &= 2t\left(\frac{V}{2r} + \frac{V}{2r} + 3\pi r^2\right) \geq 2t \times 3\sqrt[3]{\frac{3}{4}\pi V^2}. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{V}{2r} = 3\pi r^2 \xleftarrow{\text{do } V = \pi r^2 h} h = 6r$. **Chọn C.**

Câu 5. Nam muốn xây một bình chứa hình trụ có thể tích 72m^3 . Đáy làm bằng bê tông giá 100 nghìn đồng/ m^2 , thành làm bằng tôn giá 90 nghìn đồng/ m^2 , nắp bằng nhôm giá 140 nghìn đồng/ m^2 . Vậy đáy của hình trụ có bán kính bằng bao nhiêu để chi phí xây dựng là thấp nhất?

A. $\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$.

C. $\frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$.

D. $\frac{3}{2\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$.

Lời giải. Ta có $V = \pi r^2 h \longrightarrow h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{72}{\pi r^2}$.

$$\begin{aligned} \text{Tổng chi phí xây dựng là: } P &= 100\pi r^2 + 90.2\pi r h + 140\pi r^2 = 240\pi r^2 + 90.2\pi r \cdot \frac{72}{\pi r^2} \\ &= 240\pi r^2 + \frac{12960}{r} = 240\pi r^2 + \frac{6480}{r} + \frac{6480}{r} \geq 6480\sqrt[3]{\pi}. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 240\pi r^2 = \frac{6480}{r} \Leftrightarrow r = \frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$. **Chọn C.**

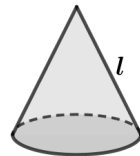
Câu 6 Trong tất cả các hình nón có độ dài đường sinh bằng ℓ . Hình nón có thể tích lớn nhất bằng

A. $\frac{\pi \ell^3 \sqrt{3}}{9}$.

B. $\frac{2\pi \ell^3 \sqrt{3}}{9}$.

C. $\frac{\pi \ell^3 \sqrt{3}}{27}$.

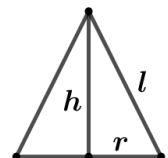
D. $\frac{2\pi \ell^3 \sqrt{3}}{27}$.



Lời giải. Gọi h ($0 < h < \ell$) là chiều cao hình nón, suy ra bán kính $r = \sqrt{\ell^2 - h^2}$.

Suy ra thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(\ell^2 h - h^3) = \frac{1}{3}\pi \cdot f(h)$.

Xét hàm $f(h) = \ell^2 h - h^3$ trên $(0; \ell)$, ta được $\max f(h) = f\left(\frac{\ell}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\ell^3}{3\sqrt{3}}$.



Vậy $V_{\max} = \frac{2\pi\ell^3\sqrt{3}}{27}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow h = \frac{\ell}{\sqrt{3}}$. **Chọn D.**

Câu 7. Trong các hình nón cùng có diện tích toàn phần bằng S . Hình nón có thể tích lớn nhất khi (r, ℓ) lần lượt là bán kính đáy và đường sinh của hình nón

- C. $\ell = r$. D. $\ell = 2r$. B. $\ell = 2\sqrt{2}r$. A. $\ell = 3r$.

Lời giải. Ta có $S = \pi r\ell + \pi r^2 \longrightarrow \ell = \frac{S - \pi r^2}{\pi r}$.

$$\text{Thể tích } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{\ell^2 - r^2} = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{\frac{(S - \pi r^2)^2}{\pi^2 r^2} - r^2} = \frac{1}{3}\sqrt{S(Sr^2 - 2\pi r^4)}.$$

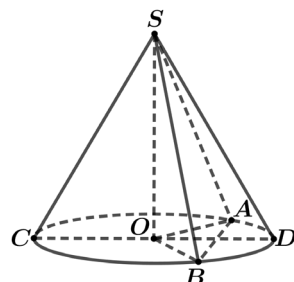
Lập bảng biến thiên cho hàm $f(r) = Sr^2 - 2\pi r^4$ trên $(0; +\infty)$, ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $r = \sqrt{\frac{S}{4\pi}} \longrightarrow \ell = 3r$. **Chọn D.**

Câu 8. Cho hình nón đỉnh S có đáy là đường tròn tâm O . Thiết diện qua trục hình nón là một tam giác cân với cạnh đáy bằng a và có diện tích là a^2 . Gọi A, B là hai điểm bất kỳ trên đường tròn (O) . Thể tích khối chóp $S.OAB$ đạt giá trị lớn nhất bằng

- A. $\frac{a^3}{2}$. B. $\frac{a^3}{6}$. C. $\frac{a^3}{12}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải. Tam giác cân SCD , có $S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2}CD.SO \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{2}a.SO \longrightarrow SO = 2a$.

Khối chóp $S.OAB$ có chiều cao $SO = 2a$ không đổi nên để thể tích lớn nhất khi và chỉ khi diện tích tam giác OAB lớn nhất. Mà $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OA.OB.\sin \widehat{AOB} = \frac{1}{2}r^2.\sin \widehat{AOB}$ (với r là bán kính đường tròn mặt đáy hình nón. Do đó để $S_{\Delta OAB}$ lớn nhất khi $\sin \widehat{AOB} = 1$. Khi đó $V_{\max} = \frac{a^3}{12}$. **Chọn C.**



Câu 9. Cho mặt cầu (S) bán kính $R = 5$ cm. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có chu vi bằng 8π cm. Bốn điểm A, B, C, D thay đổi sao cho A, B, C thuộc đường tròn (C) , điểm D thuộc (S) ($D \notin (C)$) và tam giác ABC đều. Thể tích lớn nhất của tứ diện $ABCD$ bằng

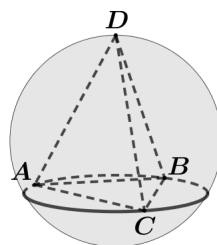
- A. $20\sqrt{3} \text{ cm}^3$. B. $32\sqrt{3} \text{ cm}^3$. D. $60\sqrt{3} \text{ cm}^3$. D. $96\sqrt{3} \text{ cm}^3$.

Lời giải. Gọi H là hình chiếu của D trên mặt phẳng (P) .

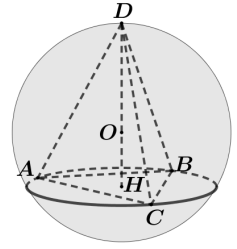
Đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC có chu vi bằng 8π cm.

Suy ra bán kính đường tròn $R = \frac{8\pi}{2\pi} = 4$ (cm).

Suy ra cạnh của tam giác ABC bằng $4\sqrt{3}$ (cm).



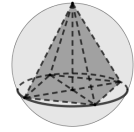
Suy ra $S_{\Delta ABC} = \frac{(4\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2$ không đổi.



Do đó thể tích khối tứ diện $ABCD$ lớn nhất khi $d[D, (ABC)]$ lớn nhất $\Leftrightarrow D$ và O nằm cùng phía so với mặt phẳng (P) và D, O, H thẳng hàng $\Leftrightarrow DH = DO + OH$
 $= DO + \sqrt{OA^2 - AH^2} = 5 + \sqrt{25 - 16} = 8$. Khi đó $V_{\max} = \frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{3} \cdot 8 = 32\sqrt{3} \text{ cm}^3$. **Chọn B.**

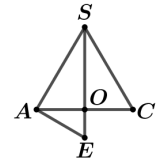
Câu 10. Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 9, hình chóp có thể tích lớn nhất bằng

- A. 484. B. 529.
C. 576. D. 625.



Lời giải. Giả sử hình chóp tứ giác đều là $S.ABCD$. Xét phần mặt cắt qua đường cao và kí hiệu như hình vẽ.

Đặt $AB = BC = CD = DA = a$ ($0 < a \leq 9\sqrt{2}$) và $SO = h$ ($0 < h < 18$).



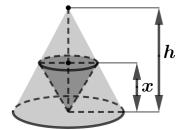
Thể tích khối chóp: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} AB^2 \cdot h = \frac{ha^2}{3}$.

Tam giác SAE vuông tại A nên $AO^2 = SO \cdot OE = h(18 - h) \Leftrightarrow \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = h(18 - h)$.

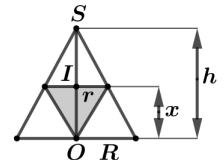
Khi đó $V_{S.ABCD} = \frac{2}{3} h^2 (18 - h)$. Xét hàm $f(h) = h^2 (18 - h)$ trên $(0; 18)$, ta được $f(h)$ đạt giá trị lớn nhất tại $h = 12 \longrightarrow$ GTLN của $V_{S.ABCD}$ bằng 576. **Chọn C.**

Câu 11. Cho hình nón (N_1) có đỉnh S , chiều cao h . Một hình nón (N_2) có đỉnh là tâm của đáy (N_1) và có đáy là một thiết diện song song với đáy của (N_1) như hình vẽ. Khối nón (N_2) có thể tích lớn nhất khi chiều cao x bằng

- A. $\frac{h}{2}$. B. $\frac{h}{3}$. C. $\frac{2h}{3}$. D. $\frac{h\sqrt{3}}{3}$.



Lời giải. Xét mặt cắt qua trục hình nón và kí hiệu như hình vẽ. Với O, I lần lượt là tâm đáy của hình nón $(N_1), (N_2)$; R, r lần lượt là các bán kính của hai đường tròn đáy của $(N_1), (N_2)$.



Ta có $\frac{SI}{SO} = \frac{r}{R} \Leftrightarrow \frac{h-x}{h} = \frac{r}{R} \longrightarrow r = \frac{R(h-x)}{h}$.

Thể tích khối nón $(\mathcal{N}_2)$ là: $V_{(\mathcal{N}_2)} = \frac{1}{3}\pi r^2 x = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{R^2(h-x)^2}{h^2} \cdot x = \frac{\pi R^2}{3h^2} \times x(h-x)^2$.

Xét hàm $f(x) = x(h-x)^2 = x^3 - 2hx^2 + h^2x$ trên $(0;h)$. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 4hx + h^2$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = h \\ x = \frac{h}{3} \end{cases}$. Lập bảng biến thiên tìm được $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên

khoảng $(0;h)$ tại $x = \frac{h}{3}$. **Chọn B.**

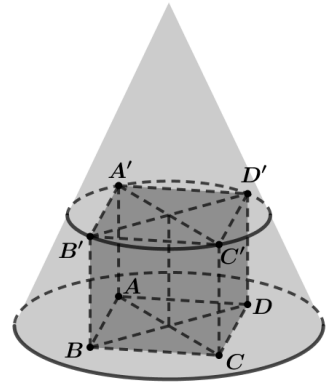
Câu 12. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 1. Gọi $(\mathcal{N})$ là một hình nón có tâm đường tròn đáy trùng với tâm của hình vuông $ABCD$, đồng thời các điểm A', B', C', D' nằm trên các đường sinh của hình nón như hình vẽ. Thể tích khối nón $(\mathcal{N})$ có giá trị nhỏ nhất bằng

A. $\frac{2\pi}{3}$.

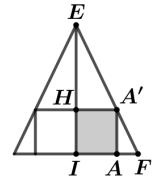
B. $\frac{3\pi}{4}$.

C. $\frac{9\pi}{8}$.

D. $\frac{9\pi}{16}$.



Lời giải. Xét phần mặt cắt qua trục hình nón và kí hiệu như hình vẽ. Với I, H lần lượt là tâm của hình vuông $ABCD, A'B'C'D'$ và đỉnh A' nằm trên đường sinh EF của hình nón.



Hình lập phương có thể tích bằng 1 nên $AA' = HI = 1, A'H = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

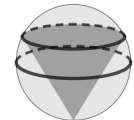
Đặt $EH = x (x > 0)$. Khi đó, ta có $\frac{EH}{EI} = \frac{A'H}{FI} \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2FI} \longrightarrow FI = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{x+1}{x} \right) = r$.

Thể tích khối nón $(\mathcal{N})$ là: $V_{(\mathcal{N})} = \frac{1}{3}\pi r^2 EI = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{x+1}{x} \right)^2 (x+1) = \frac{\pi}{6} \frac{(x+1)^3}{x^2}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2}$ trên $(0; +\infty)$. Ta có $f'(x) = \frac{(x-2)(x+1)^2}{x^3}$. Lập bảng biến

thiên tìm được $\min_{(0; +\infty)} f(x) = \frac{27}{4}$ tại $x = 2$. Suy ra $\min V_{(\mathcal{N})} = \frac{9\pi}{8}$. **Chọn C.**

Câu 13. Trong các hình nón nội tiếp một hình cầu có bán kính bằng R không đổi, tính chiều cao h và bán kính mặt đáy r của hình nón có thể tích lớn nhất.



A. $h = \frac{4}{3}R; r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$.

B. $h = \frac{3}{2\sqrt{2}}R; r = \frac{3}{4}R$.

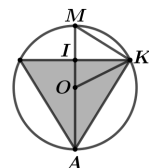
C. $h = \frac{4}{3}R; r = \frac{\sqrt{2}}{3}R$.

D. $h = \frac{3}{2}R; r = \frac{1}{2}R$.

Lời giải. Xét phần mặt cắt và kí hiệu các điểm như hình vẽ.

Tam giác AKM vuông tại K nên $IK^2 = AI \cdot IM \longrightarrow r^2 = h(2R - h)$.

Thể tích khối nón: $V_{(\mathcal{N})} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi h^2(2R - h)$.



Cách 1. Ta có $\frac{1}{3}\pi h^2(2R - h) = \frac{1}{6}\pi h \cdot h \cdot (4R - 2h) \leq \frac{1}{6}\pi \cdot \left(\frac{h + h + 4R - 2h}{3}\right)^3 = \frac{32\pi R^3}{81}$.

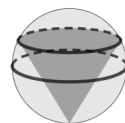
Dấu "=" xảy ra $h = 4R - 2h \Leftrightarrow h = \frac{4}{3}R$. Suy ra $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$ và $\frac{h}{r} = \sqrt{2}$.

Cách 2. Xét hàm $f(h) = h^2(2R - h) = -h^3 + 2Rh^2$; có $f'(h) = -3h^2 + 4Rh$.

Lập BBT tìm được $f(h)$ đạt GTLN trên khoảng $(0; 2R)$ tại $h = \frac{4}{3}R$. **Chọn A.**

Câu 14. Cho mặt cầu (S) có bán kính R không đổi, hình nón $(\mathcal{N})$

bất kì nội tiếp mặt cầu (S) như hình vẽ. Thể tích khối nón $(\mathcal{N})$ là



V_1 ; thể tích phần còn lại là V_2 . Giá trị lớn nhất của $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{32}{49}$.

B. $\frac{32}{76}$.

C. $\frac{49}{81}$.

D. $\frac{32}{81}$.

Lời giải. Thể tích khối cầu: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Ta có $V_2 = V - V_1 \longrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{V - V_1} = \frac{1}{\frac{V}{V_1} - 1}$.

Suy ra $\frac{V_1}{V_2}$ lớn nhất $\Leftrightarrow \frac{V}{V_1}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow V_1$ đạt giá trị lớn nhất.

Như bài trên tìm được GTLN của V_1 bằng $\frac{32\pi R^3}{81}$. Khi đó $\frac{V_1}{V_2} = \frac{32}{76}$. **Chọn B.**

Câu 15. Một hạt ngọc trai hình cầu có bán kính R được bọc trong một hộp trang sức dạng hình nón ngoại tiếp mặt cầu như hình vẽ. Hỏi nhà sản xuất phải thiết kế hộp trang sức hình nón có chiều cao h như thế nào để hộp quà đó có thể tích nhỏ nhất.



A. $h = 2\sqrt{2}R$.

B. $h = 3R$.

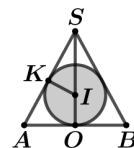
C. $h = 4R$.

D. $h = 5R$.

Lời giải. Xét phần mặt cắt qua trục hình nón và kí hiệu như hình.

Đặt $SI = x$ ($x > R$). Khi đó $h = SO = x + R$ và $SK = \sqrt{x^2 - R^2}$.

Ta có $\triangle SKI \sim \triangle SOA \Rightarrow \frac{SK}{SO} = \frac{IK}{AO} \longrightarrow AO = \frac{R(R+x)}{\sqrt{x^2 - R^2}}$.



Thể tích khối nón: $V_{(\mathcal{N})} = \frac{1}{3}\pi OA^2 \cdot SO = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{R^2(R+x)^2}{(x^2 - R^2)} \cdot (x + R) = \frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{(R+x)^2}{x - R}$.

Xét $f(x) = \frac{(R+x)^2}{x - R}$ trên $(R; +\infty)$. Ta có $f'(x) = \frac{x^2 - 2Rx - 3R^2}{(x - R)^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -R \\ x = 3R \end{cases}$.

Lập BBT tìm được $f(x)$ đạt GTNN trên khoảng $(R; +\infty)$ tại $x = 3R$.

Suy ra $h = SO = 4R$ và bán kính đường tròn đáy $r = AO = \frac{R(R+x)}{\sqrt{x^2 - R^2}} = \sqrt{2}R$. **Chọn C.**

Câu 16. Cho nửa hình cầu bán kính R không đổi. Một hình nón có chiều cao h , bán kính đáy là r tiếp xúc với nửa hình cầu như hình vẽ (hai đường tròn đáy là đồng tâm và cùng thuộc một mặt phẳng). Khi diện tích xung quanh của hình nón là nhỏ nhất, khẳng định nào sau đây đúng?



A. $h = r$.

B. $h = \sqrt{2}r$.

C. $h = \sqrt{3}r$.

D. $h = 2\sqrt{3}r$.

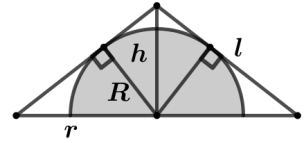
Lời giải. Xét phần mặt cắt như hình vẽ.

Ta có $\frac{1}{R^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{h^2} \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \longrightarrow h^2 = \frac{R^2 r^2}{r^2 - R^2}$.

Gọi ℓ là đường sinh $\longrightarrow \ell^2 = h^2 + r^2 = \frac{R^2 r^2}{r^2 - R^2} + r^2$.

Diện tích xung quanh: $S = 2\pi r \ell = 2\pi r \sqrt{\frac{R^2 r^2}{r^2 - R^2} + r^2} = \frac{2\pi r^3}{\sqrt{r^2 - R^2}}$.

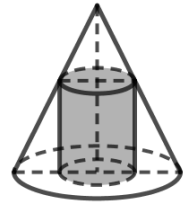
Xét hàm $f(r) = \frac{r^3}{\sqrt{r^2 - R^2}}$ trên $(R; +\infty)$. Ta có $f'(r) = \frac{2r^4 - 3r^2 R^2}{(r^2 - R^2)\sqrt{r^2 - R^2}}$.



Lập BBT tìm được $f(r)$ đạt GTNN trên khoảng $(R; +\infty)$ tại $r = \sqrt{\frac{3}{2}}R$.

Khi đó $h^2 = \frac{R^2 r^2}{r^2 - R^2} = 3R^2 \Rightarrow h = \sqrt{3}R$. Suy ra $\frac{h}{r} = \sqrt{2}$ hay $h = \sqrt{2}r$. **Chọn B.**

Câu 17. Cho một hình nón có chiều cao h và bán kính của đường tròn đáy là R . Một mặt phẳng (P) thay đổi song song với mặt chứa đáy của hình nón và cắt hình nón theo một đường tròn giao tuyến (C) . Dựng hình trụ $(\mathcal{H})$ có một đáy là đường tròn (C) và đáy còn lại nằm trên mặt đáy của hình nón như hình vẽ. Khi khối trụ $(\mathcal{H})$ có thể tích lớn nhất, gọi h' là chiều cao



của $(\mathcal{H})$ và R' là bán kính đáy của $(\mathcal{H})$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $h' = \frac{1}{2}h$; $R' = \frac{1}{2}R$.

B. $h' = \frac{1}{3}h$; $R' = \frac{2}{3}R$.

C. $h' = \frac{1}{4}h$; $R' = \frac{3}{4}R$.

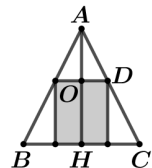
D. $h' = \frac{3}{4}h$; $R' = \frac{1}{4}R$.

Lời giải. Thể tích $V_{(\mathcal{H})} = \pi R'^2 h'$. Ta sẽ biểu diễn h' theo R' để xét hàm $f(R')$.

Xét phần mặt cắt qua trục và kí hiệu như hình vẽ.

Khi đó $HC = R$, $OD = R'$ và $OH = h'$.

Do $\triangle AOD \sim \triangle AHC$ nên có $\frac{AO}{AH} = \frac{OD}{HC} \Leftrightarrow \frac{AH - OH}{AH} = \frac{OD}{HC}$

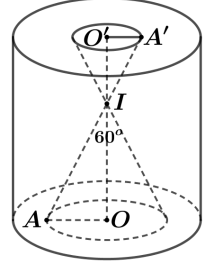


$$\Leftrightarrow \frac{h-h'}{h} = \frac{R'}{R} \longrightarrow h' = h \cdot \frac{R-R'}{R}.$$

Khi đó $V_{(\mathcal{H})} = \pi R'^2 \cdot h \cdot \frac{R-R'}{R} = \pi h \left(R'^2 - \frac{R'^3}{R} \right)$. Xét hàm $f(R') = R'^2 - \frac{R'^3}{R}$ trên $(0; R)$ ta

được $f(R')$ đạt GTLN tại $R' = \frac{2R}{3} \longrightarrow h' = h \cdot \frac{R-R'}{R} = \frac{h}{3}$. **Chọn B.**

Câu 18. Cho khối gỗ hình trụ có bán kính 3(cm) và chiều cao 6(cm), đây là hai hình tròn tâm O và O' . Đục khối gỗ này tạo ra hai khối nón có đỉnh nằm trên OO' và đáy trùng với hai đáy của khối gỗ sao cho góc ở đỉnh bằng 60° (như hình vẽ) và $OI = x$ ($3\sqrt{2} < x < 3\sqrt{3}$). Giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích xung quanh hai hình nón đã đục bằng



- A. $12\pi(\text{cm}^2)$. B. $14\pi(\text{cm}^2)$. C. $44\pi(\text{cm}^2)$. D. $72\pi(\text{cm}^2)$.

Lời giải. Xét tam giác vuông IOA , có $\begin{cases} \widehat{AIO} = 30^\circ \\ IO = x \end{cases} \Rightarrow OA = \frac{x}{\sqrt{3}}$ và $IA = \frac{2x}{\sqrt{3}}$.

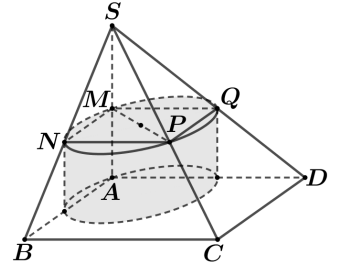
Suy ra diện tích xung quanh của hình nón này: $S_1 = \pi \frac{2}{3} x^2$.

Tương tự, ta có diện tích xung quanh của hình nón còn lại là: $S_2 = \pi \frac{2}{3} (6-x)^2$.

Khi đó $S_1 + S_2 = \frac{2\pi}{3} [x^2 + (6-x)^2] \geq \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{(x+6-x)^2}{2} = 12\pi(\text{cm}^2)$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 6-x \Leftrightarrow x = 3(\text{cm})$. **Chọn A.**

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$. Cạnh bên $SA = 4a$ và vuông góc với đáy. Gọi M là một điểm trên cạnh SA (khác A và S). Mặt phẳng (α) qua M và vuông góc với SA cắt SB, SC, SD lần lượt tại N, P, Q . Hình trụ $(\mathcal{H})$ có đáy là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MNPQ$ và có một đường



sinh là MA như hình vẽ. Khi khối trụ $(\mathcal{H})$ có thể tích lớn nhất thì tỉ số $\frac{SM}{SA}$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải. Chọn $a = 1$. Đặt $AM = x$, suy ra $SM = 4-x$.

Vì $\frac{MN}{AB} = \frac{SM}{SA} \Rightarrow MN = \frac{SM \cdot AB}{SA} = \frac{4-x}{2}$.

Chứng minh được $MNPQ$ là hình vuông nên $R_{(\mathcal{H})} = \frac{MN\sqrt{2}}{2} = \frac{(4-x)\sqrt{2}}{4}$.

Khi đó thể tích khối trụ: $V_{(\mathcal{H})} = \pi R^2 \cdot AM = \frac{\pi}{8} x(4-x)^2$.

Xét hàm $f(x) = x(4-x)^2$ trên $(0;4)$, ta được $\max_{(0;4)} f(x) = \frac{256}{27}$ tại $x = \frac{4}{3}$.

Khi đó GTLN của $V_{(\mathcal{H})}$ bằng $\frac{32\pi}{27} \left(= \frac{32\pi a^3}{27} \right)$ và $\frac{SM}{SA} = \frac{4-x}{4} = \frac{2}{3}$. **Chọn C.**

Câu 20. Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R)$, chiều cao bằng đường kính đáy. Trên đường tròn tâm O lấy điểm A , trên đường tròn tâm O' lấy điểm B . Thể tích của khối tứ diện $OO'AB$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{R^3}{2}$.

B. $\frac{R^3}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{3}R^3}{3}$.

D. $\frac{R^3}{6}$.

Lời giải. Kẻ đường sinh AM và BN như hình vẽ.

Đặt $AB = x$ ($2R < x < 2R\sqrt{2}$). Ta có

$$V_{OO'AB} = \frac{1}{2} \cdot V_{A.OO'BN} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} V_{AON.MO'B} \right) = \frac{1}{3} \cdot V_{AON.MO'B} = V_{A.MO'B}.$$

Tam giác vuông AMB , có $MB = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{x^2 - 4R^2}$.

Tam giác cân $O'MB$, tính được $O'H = \frac{\sqrt{8R^2 - x^2}}{2}$.

Khi đó $V_{OO'AB} = V_{A.MO'B} = \frac{1}{3} S_{\Delta O'MB} \cdot AM = \frac{R}{6} \cdot \sqrt{(x^2 - 4R^2)(8R^2 - x^2)}$.

Khảo sát hàm ta được GTLN của $V_{OO'AB}$ bằng $\frac{R^3}{3}$ đạt tại $x = R\sqrt{6}$. **Chọn B.**

Cách 2. Dùng công thức nhanh $V_{OO'AB} = \frac{1}{6} OO' \cdot AB \cdot d(OO', AB) \cdot \sin \widehat{OO', AB}$.

Trong đó $d(OO', AB) = O'H$; $\sin \widehat{OO', AB} = \sin \widehat{AM, AB} = \sin \widehat{MAB} = \frac{MB}{AB}$.

