

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TÂY NINH

TÀI LIỆU
HỘI THẢO ÔN THI TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2020
MÔN TOÁN

Tây Ninh, tháng 5 năm 2020
- LƯU HÀNH NỘI BỘ -

PHÂN TÍCH ĐỀ THAM KHẢO CỦA BỘ LẦN 2

I. MA TRẬN ĐỀ THAM KHẢO LẦN 2

LỚP	CHỦ ĐỀ		NB	TH	VD	VDC	TỔNG
11	Tổ hợp và Xác suất		C1		C39		2
	Dãy số, CSC, CSN		C2				1
	Quan hệ vuông góc			C26	C40		2
12	Ứng dụng của đạo hàm	Đơn điệu	C10		C41		2
		Cực trị	C13	C27			2
		Min,max		C28		C48	2
		Tiếp cận	C15				1
		Khảo sát và vẽ ĐTHS		C14,C17 C30	C43	C46	5
	Hs lũy thừa, Hs mũ và Hs lôgarit	Hàm số mũ và hàm số lôgarit	C5, C11	C29	C42	C47, C50	6
		PT mũ và lôgarit	C3				1
		BPT mũ và lôgarit	C16	C31			2
	Nguyên hàm Tích phân và ứng dụng	Nguyên hàm	C6				1
		Tích phân	C18	C33	C45		3
		Ứng dụng		C34			1
	Số phức	Số phức	C19, C21				2
		Các phép toán về số phức	C20	C35			2
		Phương trình bậc hai với hệ số thực		C36			1
	Khối đa diện	Thể tích khối đa diện	C4, C7			C49	3
	Mặt nón,mặt trụ mặt cầu	Nón	C8	C32			2
		Trụ	C12		C44		2
		Cầu	C9				1
	PP tọa độ trong không gian	Hệ trục tọa độ		C22			1
		PT đường thẳng		C25, C38			2
		PT mặt phẳng	C24	C37			2
		PT mặt cầu	C23				1
	TỔNG		21	17	7	5	50

II. SỐ CÂU THEO CHƯƠNG MỤC

- | | |
|--|-------------------------------|
| 1. Tổ hợp Xác suất: 2 | 6. Nguyên hàm Tích phân: 5 |
| 2. Dãy số, cấp số: 1 | 7. Số phức: 5 |
| 3. Quan hệ vuông góc: 2 | 8. Thể tích khối đa diện: 3 |
| 4. Ứng dụng đạo hàm, khảo sát hàm số: 12 | 9. Khối tròn xoay: 5 |
| 5. Lũy thừa, mũ, lôgarit: 9 | 10. Hình tọa độ không gian: 6 |

III. SỐ CÂU THEO MỨC ĐỘ NHẬN THỨC

1. Nhận biết: 21
2. Thông hiểu: 17
3. Vận dụng thấp: 7
4. Vận dụng cao: 5

I. CHỦ ĐỀ 1: ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM.

1. Bài toán về hàm số đơn điệu: Đề MH2 có 2 câu về chủ đề này (1NB, 1VD)

A. Lý thuyết:

Có 2 hướng các em hs cần nắm vững:

Hướng 1: Quy tắc xét tính đơn điệu của hàm số.

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên K

+ Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm $x \in K$ thì hàm số f đồng biến trên K .

+ Nếu $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm $x \in K$ thì hàm số f nghịch biến trên K .

Chú ý:

Đối với hàm phân thức hữu tỉ $y = \frac{ax+b}{cx+d} \left(x \neq -\frac{d}{c} \right)$ thì dấu " $=$ " khi xét dấu đạo hàm y' không xảy ra.

Hướng 2: Giúp hs nhìn bảng biến thiên (hoặc bảng dấu y') mà trả lời.

B. Các ví dụ:

Ví dụ 1. (C10 MH2 2020) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	-1	2	$-\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

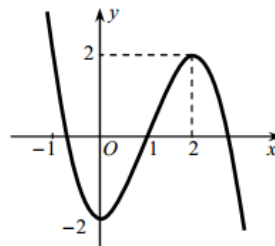
- A. $(-\infty; -1)$. B. $(0; 1)$. C. $(-1; 0)$. D. $(-\infty; 0)$.

Hướng dẫn

NX: BT này là BT về đọc BBT.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên $(-1; 0)$. Chọn C.

Ví dụ 2. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $(-2; 2)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(0; 2)$. D. $(2; +\infty)$.

Hướng dẫn

NX: BT này là BT về đọc đồ thị.

- Nhìn vào đồ thị ta thấy hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$. Chọn C.

Ví dụ 3. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. $y = \frac{x+1}{x+3}$.

B. $y = -x^3 + x + 1$.

C. $y = \frac{x-1}{x-2}$.

D. $y = -x^3 + 3x^2 - 9x$.

Hướng dẫn

NX: Đây là BT cần tính toán đạo hàm cấp 1 để chỉ ra sự đơn điệu của hàm số. Vì tập xác định của hàm phân thức nên hs cần biết để loại nhanh chóng.

- Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 9x$ có $y' = -3x^2 + 6x - 9 = -3(x-1)^2 - 6 < 0, \forall x \in (-\infty; +\infty)$ nên nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$. Chọn D.

Ví dụ 4. (C41 MH2 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x + 3 \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}?$$

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Hướng dẫn

NX: Bài này thuộc cấp VD. HS cần hiểu về điều kiện HS đồng biến và điều kiện tam thức không đổi dấu trên $\mathbb{R}$.

+ Tính $f'(x) = x^2 + 2mx + 4$

+ Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ a > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow b'^2 - ac \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$$

Chọn A.

Ví dụ 5. (C39 MH1 2020) Cho hàm số $f(x) = \frac{mx-4}{x-m}$ (m là số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho đồng biến trên $(0; +\infty)$?

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Hướng dẫn

NX: là bài xét sự đơn điệu trên 1 miền nào đó của hàm phân thức 1/1. Vì vậy chú ý 2 điều: Đk tồn tại cho hs và đạo hàm không có dấu bằng.

+ Trước hết theo yêu cầu bài toán ta phải có $m \leq 0$.

+ Tiếp theo $f'(x) = \frac{4-m^2}{(x-m)^2} > 0 \Rightarrow 4-m^2 > 0 \Rightarrow m \in (-2; 2)$

Kết hợp ta có $m \in \{0; -1\}$. **Chọn D.**

C. Các bài tập tương tự: (dành cho hs tự ôn)

1. (C4 MH1 2020) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$									
	$-\infty$								$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trong khoảng nào dưới đây?

A. $(1; +\infty)$.

B. $(-1; 0)$.

C. $(-1; 1)$.

D. $(0; 1)$.

2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
y	$+\infty$	1	0	1	$+\infty$	

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-1; +\infty)$. C. $(0; 1)$. D. $(-1; 0)$.

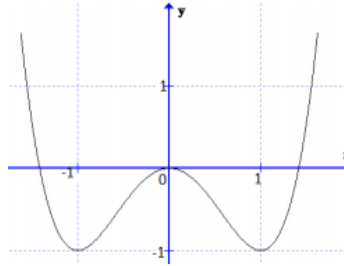
3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		3		$+\infty$

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2; 2)$. B. $(0; 2)$. C. $(3; +\infty)$. D. $(-\infty; 1)$.

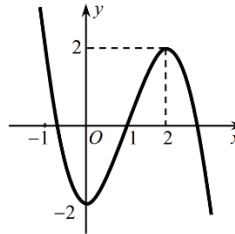
4. Cho đồ thị hàm số như hình vẽ.



Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. B. Hàm số nghịch biến trên $(1; +\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$. D. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$.

5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $(0; 2)$ B. $(-2; 2)$ C. $(-\infty; 0)$ D. $(2; +\infty)$

6. Hàm số $y = x^3 - x^2 - x + 3$ nghịch biến trên khoảng

- A. $(-\infty; -\frac{1}{3})$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-\frac{1}{3}; 1)$. D. $(-\infty; -\frac{1}{3})$ và $(1; +\infty)$.

Hàm số $y = -x^4 + 8x^2 + 6$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$. B. $(-2; 2)$. C. $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$. D. $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$.

7. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 6mx + m$ nghịch biến trên $(-1; 1)$.

- A. $m \geq 2$. B. $m \geq 0$. C. $m \leq -\frac{1}{4}$. D. $m \geq \frac{1}{4}$.

8. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ là

- A. $(-1; +\infty)$. B. $(-\infty; -4]$. C. $(-\infty; -3]$. D. $(-1; 5)$.

9. Cho hàm số: $y = (m-1)x^3 + (m-1)x^2 - 2x + 5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. 5. B. 6. C. 8. D. 7.

10. Hàm số $y = -3x^4 - (3m^2 - 3m + 1)x^2 + 5m^2 - 2m + 2$ nghịch biến trong khoảng nào?

- A. $(2; +\infty)$. B. $(0; +\infty)$. C. $(-\infty; 0)$. D. $(-4; +\infty)$.

2. Bài toán về cực trị: Đề MH2 có 2 câu về chủ đề này (1NB, 1TH)

A. Lý thuyết: (HS cần nắm các quy tắc sau)

Quy tắc 1:

- Bước 1: Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.
- Bước 2: Tìm các điểm x_i ($i = 1; 2; \dots$) mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.
- Bước 3: Lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua x_i thì hàm số đạt cực trị tại x_i .

Quy tắc 2:

- Bước 1: Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.
- Bước 2: Tìm các nghiệm x_i ($i = 1; 2; \dots$) của phương trình $f'(x) = 0$.
- Bước 3: Tính $f''(x)$ và tính $f''(x_i)$.
 - * Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_i .
 - * Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_i .

B. Các ví dụ:

Ví dụ 6. (C13 MH2 2020) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 1$	$\searrow -2$	$\nearrow +\infty$	

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

- A. $x = -2$. B. $x = 2$. C. $x = 1$. D. $x = -1$.

Hướng dẫn

NX: là bài hướng dẫn HS đọc bảng BBT để tìm điểm CĐ hs. HS căn cứ vào QT1 để tìm.

- Nhận thấy tại $x = -1$ thì y' đổi dấu từ + sang -, nên $x = -1$ là điểm cực đại của hs.

Chọn D

Ví dụ 7. (C27 MH2 2020) Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Hướng dẫn

NX: là bài hướng dẫn HS đọc bảng dấu $f'(x)$ để tìm số điểm cực trị hs. HS căn cứ vào QT1 để tìm.

Từ bảng xét dấu của $f'(x)$ ta thấy $f'(x)$ hai lần đổi dấu, nên hs $f(x)$ có 2 điểm cực trị.

Ví dụ 8. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 5$ có đồ thị là (C) . Điểm cực tiểu của đồ thị (C) là

A. $M(0; 5)$.

B. $M(2; 1)$.

C. $M(0; 2)$.

D. $M(2; 0)$.

Hướng dẫn

NX: là bài tìm điểm cực trị đồ thị hs. HS căn cứ vào QT1 (hoặc QT2) để tìm. Và cần tính cả tung độ.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$ và $y'' = 6x - 6$. Hơn nữa, $y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Hơn nữa, $y''(2) > 0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ và giá trị cực tiểu bằng 1. Chọn B.

C. Các bài tập tương tự: (dành cho hs tự ôn)

11. C8 MH1 2020. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	2	-4	$+\infty$	

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. -4.

12. C18 MH1 2020. Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Số điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho là

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

13. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau. Khẳng định nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$ $	$-$
$f(x)$	$+\infty$	0	1	$-\infty$	

A. Hàm số có đúng một cực trị.

B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = -1$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

D. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 0.

14. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ và có bảng biến thiên sau.

	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		-	0	+		+	0	-	
y							15		

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

- A.** Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.
B. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=0$ và đạt cực tiểu tại điểm $x=4$.
C. Hàm số có đúng một cực trị.
D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng -15 .

15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

x	$-\infty$	-1	0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	+	0	-	0	+

- A.** 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		+		-	0	-	0	+

Tìm số cực trị của hàm số $y = f(x)$

- A.** 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

17. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** Giá trị cực tiểu của hàm số bằng 0. **B.** Hàm số đạt cực đại tại $x=0$.
C. Giá trị cực đại của hàm số bằng -4 . **D.** Hàm số đạt cực đại tại $x=2$.

18. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (2m-1)x - 1$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A.** Đồ thị hàm số luôn có 2 điểm cực trị. **B.** $\forall m > 1$ thì đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị.
C. $\forall m \neq 1$ thì đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị. **D.** $\forall m < 1$ thì đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị.

19. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}(m+1)x^3 - x^2 + (2m+1)x + 3$ có cực trị

- A.** $m \in \left[-\frac{3}{2}; 0\right]$. **B.** $m \in \left(-\frac{3}{2}; 0\right)$. **C.** $m \in \left(-\frac{3}{2}; 0\right) \setminus \{-1\}$. **D.** $m \in \left[-\frac{3}{2}; 0\right] \setminus \{-1\}$.

20. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (m+1)x^4 - mx^2 + \frac{3}{2}$ chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.

- A.** $m < -1$. **B.** $-1 \leq m \leq 0$. **C.** $m > 1$. **D.** $-1 \leq m < 0$.

3. Bài toán về min-max: Đề MH2 có 2 câu về chủ đề này (1TH, 1VDC)

A. Lý thuyết:

1. Định nghĩa.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

Số M gọi là **giá trị lớn nhất** của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu:
$$\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = M \end{cases}$$

Kí hiệu: $M = \max_{x \in D} f(x)$.

Số m gọi là **giá trị nhỏ nhất** của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu:
$$\begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = m \end{cases}$$

Kí hiệu: $m = \min_{x \in D} f(x)$.

2. Phương pháp tìm GTLN, GTNN

2.1. Tìm GTLN, GTNN của hàm số bằng cách khảo sát trực tiếp

Bước 1: Tính $f'(x)$ và tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n \in D$ mà tại đó $f'(x) = 0$ hoặc hàm số không có đạo hàm.

Bước 2: Lập bảng biến thiên và từ đó suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

2.2. Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một đoạn

Bước 1:

Hàm số đã cho $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ trên khoảng $(a; b)$, tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

Bước 2: Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)$.

Bước 3: Khi đó:

$$\max_{[a; b]} f(x) = \max \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)\}.$$

$$\min_{[a; b]} f(x) = \min \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)\}.$$

2.3. Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một khoảng

Bước 1: Tính đạo hàm $f'(x)$.

Bước 2: Tìm tất cả các nghiệm $x_i \in (a; b)$ của phương trình $f'(x) = 0$ và tất cả các điểm $\alpha_i \in (a; b)$ làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 3: Tính $A = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, $B = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$, $f(x_i)$, $f(\alpha_i)$.

Bước 4: So sánh các giá trị tính được và kết luận $M = \max_{(a; b)} f(x)$, $m = \min_{(a; b)} f(x)$.

Ghi chú: A, B không thể là GTLN hay GTNN được. Vậy khi so sánh mà số lớn nhất (nhỏ nhất) rơi vào A, B, thì ta kết luận hàm số không có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).

Chú ý:

- Nếu $y = f(x)$ đồng biến, liên tục trên $[a; b]$ thì
$$\begin{cases} \min_{[a; b]} f(x) = f(a) \\ \max_{[a; b]} f(x) = f(b) \end{cases}$$
- Nếu $y = f(x)$ nghịch biến, liên tục trên $[a; b]$ thì
$$\begin{cases} \min_{[a; b]} f(x) = f(b) \\ \max_{[a; b]} f(x) = f(a) \end{cases}$$

- Hàm số liên tục trên một khoảng **có thể** không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên khoảng đó.

B. Các ví dụ:

Ví dụ 9. C28 MH2 2020: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 10x^2 + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

- A. 2. B. -23. C. -22. D. -7.

Hướng dẫn

NX: là bài cấp TH, hs cần nắm rõ cách tìm GTLN, GTNN trên đoạn, chú ý loại trừ các giá trị không thuộc đoạn.

$$\text{Ta có } f'(x) = 4x^3 - 20x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{5} \\ x = \sqrt{5} \end{cases}$$

Chỉ có $x = 0 \in (-1; 2)$.

Ta có $f(-1) = -7, f(2) = -22, f(0) = 2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 2]$ bằng -22 . Chọn C.

Ví dụ 10. C19 MH1 2020. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

- A. 1. B. 37. C. 33. D. 12.

Hướng dẫn

Tính đạo hàm $f'(x) = -4x^3 + 24x = -4x(x^2 - 6)$, suy ra $f'(x)$ có ba nghiệm $x = 0, x = \pm\sqrt{6}$

Chỉ có $x = 0 \in (-1; 2)$.

Tính ba giá trị $f(-1); f(0); f(2)$ suy ra hàm số có $\max_{[-1; 2]} f(x) = 33$. **Chọn C.**

Ví dụ 11. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0; 3]$. Tính giá trị $M - m$.

- A. $M - m = -\frac{9}{4}$. B. $M - m = 3$. C. $M - m = \frac{9}{4}$. D. $M - m = \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[0; 3]$.

$$f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in [0; 3] \text{ nên } m = f(0) = -1, M = f(3) = \frac{5}{4} \Rightarrow M - m = \frac{9}{4}.$$

Chọn C.

Ví dụ 12. C48 MH2 2020: Cho hàm số $f(x) = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\min_{[0; 1]} |f(x)| + \max_{[0; 1]} |f(x)| = 2$. Số phần tử của S là

- A. 6. B. 2. C. 1. D. 4.

Hướng dẫn

Ta có: $f'(x) = \frac{1-m}{(x+1)^2}$.

+ Nếu $m = 1$ thì $f(x) = \frac{x+1}{x+1} = 1, \forall x \neq -1$. Khi đó $\max_{[0;1]} |f(x)| + \min_{[0;1]} |f(x)| = 2$ (thỏa mãn).

Do đó $m = 1$ thỏa mãn bài toán.

+ Nếu $m \neq 1$ thì hàm số $f(x)$ đơn điệu trên $[0;1]$. Ta có: $f(0) = m; f(1) = \frac{1+m}{2}$

TH1: $\left(\frac{m+1}{2}\right) \cdot m \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0$ thì $\min_{[0;1]} |f(x)| = 0, \max_{[0;1]} |f(x)| = \max \left\{ \frac{|m+1|}{2}, |m| \right\}$.

Do: $-1 \leq m \leq 0$ nên $\frac{|m+1|}{2} + |m| < 2$, suy ra không thỏa mãn $\min_{[0;1]} |f(x)| + \max_{[0;1]} |f(x)| = 2$

TH2: $\left(\frac{m+1}{2}\right) \cdot m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 (m \neq 1) \\ m < -1 \end{cases}$

Suy ra $\min_{[0;1]} |f(x)| + \max_{[0;1]} |f(x)| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{m+1}{2} \right| + |m| = \left| \frac{3m+1}{2} \right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 (KTM) \\ m = -\frac{5}{3} (TM) \end{cases}$

Vậy $S = \left\{ 1; -\frac{5}{3} \right\}$. **Chọn B.**

Ví dụ 13. C42 MH1 2020. Gọi S tập hợp giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất hàm số $f(x) = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 16. Tổng các phần tử của S bằng

A. -16.

B. 16.

C. -12.

D. -2.

Hướng dẫn

+ Đặt $g(x) = x^3 - 3x + m \Rightarrow g'(x) = 3x^2 - 3$ có hai nghiệm $x = \pm 1$.

+ Suy ra $\max_{[0;3]} f(x) \in \{|g(0)|; |g(1)|; |g(3)|\} = \{|m|; |m-2|; |m+18|\}$.

+ Vì $m+18 > 16$ với $m > 0$ nên xét $\begin{cases} m \leq 0 \\ |m-2| = 16 \end{cases} \Rightarrow m = -14$ hoặc $\begin{cases} m \leq 0 \\ |m+18| = 16 \end{cases} \Rightarrow m = -2$.

+ Vậy **Chọn A.**

C. Các bài tập tương tự: (dành cho hs tự ôn)

21. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$ trên đoạn $[-2;1]$ lần lượt là

A. 0 và -1.

B. 1 và -2.

C. 7 và -10.

D. 4 và -5.

22. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[0;5]$ bằng 5 khi m là:

A. 6.

B. 10.

C. 7.

D. 5.

23. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x(3-2x)^2$ trên $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

- A. 2. B. $\frac{1}{2}$. C. 0. D. 1.

24. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^4 + 4x^2$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

- A. 1. B. 4. C. 5. D. 3.

25. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[0; \sqrt{3}]$.

- A. $M = 1$. B. $M = 8\sqrt{3}$. C. $M = 9$. D. $M = 6$.

26. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^4 + 3x^2 + 1$ trên $[0; 2]$ là:

- A. $y = \frac{13}{4}$. B. $y = 29$. C. $y = -3$. D. $y = 1$.

27. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 15$ trên đoạn $[-3; 2]$.

- A. $\max_{[-3; 2]} y = 54$. B. $\max_{[-3; 2]} y = 7$. C. $\max_{[-3; 2]} y = 48$. D. $\max_{[-3; 2]} y = 16$.

28. Tích của giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{4}{x}$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng.

- A. $\frac{52}{3}$. B. 20. C. 6. D. $\frac{65}{3}$.

29. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{8}{1+2x} + x$ trên đoạn $[1; 2]$ lần lượt là

- A. $\frac{11}{3}; \frac{7}{2}$. B. $\frac{11}{3}; \frac{18}{5}$. C. $\frac{13}{3}; \frac{7}{2}$. D. $\frac{18}{5}; \frac{3}{2}$.

30. Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 2]$. Có bao nhiêu số nguyên a thuộc đoạn $[-3; 3]$ sao cho $M \leq 2m$?

- A. 3. B. 7. C. 6. D. 5.

31. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 1 \right|$ trên $\left(-\frac{9}{8}; \frac{10}{3} \right)$. Biết $M = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*$. Tính $S = a + b^2$.

- A. $S = 127$. B. $S = 830$. C. $S = 2$. D. $S = 122$.

32. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + m^2x - 2m^2 + 2m - 9, m$ là tham số. Gọi S là tập tất cả các giá trị của m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0; 3]$ không vượt quá 3. Tìm m ?

- A. $S = (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$. B. $S = [-3; 1]$. C. $S = (-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$. D. $S = (-3; 1)$.

33. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{x^2 + mx + m}{x + 1} \right|$ trên $[1; 2]$ bằng 2. Số phần tử của S là

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

34. Cho hàm số $y = \frac{2x - m}{x + 2}$ với m là tham số, $m \neq -4$. Biết $\min_{x \in [0; 2]} f(x) + \max_{x \in [0; 2]} f(x) = -8$. Giá trị của tham số m bằng

- A. 10. B. 8. C. 9. D. 12.

4. Bài toán về tiệm cận: Đề MH2 có 1 câu về chủ đề này (1NB)

A. Lý thuyết:

1. Đường tiệm cận ngang

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$). Đường thẳng $y = y_0$ là đường **tiệm cận ngang** (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$

2. Đường tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường **tiệm cận đứng** (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

3. Lưu ý: Với đồ thị hàm phân thức dạng $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($c \neq 0$; $ad - bc \neq 0$) luôn có tiệm cận ngang là $y = \frac{a}{c}$ và tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$.

B. Các ví dụ:

Do chủ đề này trong MH2 chỉ có 1 câu và thuộc lĩnh vực nhận biết, vậy nên nghĩ rằng không cần khai thác nhiều về đường tiệm cận, chủ yếu phân tích kỹ về đường tiệm cận cho đồ thị hàm phân thức bậc 1 trên bậc 1 là đạt.

Ví dụ 14. C15 MH2 2020: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ là

A. $y = -2$.

B. $y = 1$.

C. $x = -1$.

D. $x = 2$.

Hướng dẫn

NX: là bài tìm tiệm cận của đồ thị hàm số phân thức bậc 1 trên bậc 1. Khi dạy, chúng ta có thể nêu các cách **chọn nhanh** cho các đường tiệm cận của đồ thị hàm số này.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x+1} = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x+1} = 1$. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 1$.

Chọn B.

Ví dụ 15. Đồ thị hàm số $y = \frac{-3x+1}{x+2}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là:

A. $x = 2$ và $y = 1$.

B. $x = -2$ và $y = 1$.

C. $x = -2$ và $y = -3$.

D. $x = -2$ và $y = 3$.

Hướng dẫn

NX: Sử dụng định nghĩa về tiệm cận đồ thị hoặc lưu ý cho hàm phân thức 1/1.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x+1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = -3 \Rightarrow y = -3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$\text{Mặt khác: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^+} y = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-3x+1}{x+2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} y = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-3x+1}{x+2} = +\infty \end{cases} \Rightarrow x = -2 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.}$$

Vậy các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là: $x = -2$ và $y = -3$. Chọn C.

Ví dụ 16. C27 MH1 2020. Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$y = \frac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1} \text{ bằng}$$

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Hướng dẫn

NX: Sử dụng định nghĩa để tìm. Còn muốn tìm nhanh thì hướng dẫn hs về bậc tử, bậc mẫu, và phải viết lại dạng “phân thức sau thu gọn”

Với x khác 1 thì $y = \frac{5x+1}{x+1}$ có một tiệm cận ngang $y = 5$ và một tiệm cận đứng $x = -1$.

Vậy **Chọn C.**

C. Các bài tập tương tự: (dành cho hs tự ôn)

35. Đồ thị hàm số $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$ có đường tiệm cận đứng là:

A. $y = -1$.

B. $x = 2$.

C. $y = 2$.

D. $x = -1$.

36. Đồ thị hàm số nào trong các hàm số được cho dưới đây **không** có tiệm cận ngang?

A. $y = \frac{x+2}{x^2+1}$

B. $y = \frac{x+2}{x+1}$

C. $y = \frac{x^2-1}{x+2}$

D. $y = \frac{1}{x+2}$

37. Phương trình đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ lần lượt là:

A. $x = 2$; $y = -1$.

B. $x = -2$; $y = 1$.

C. $x = 1$; $y = 2$.

D. $x = 2$; $y = 1$.

38. Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x+1}$ có đồ thị là (C). Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. (C) có tiệm cận ngang là $y = 2$.

B. (C) chỉ có một tiệm cận.

C. (C) có tiệm cận ngang là $x = 2$.

D. (C) có tiệm cận đứng là $x = 1$.

39. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ là:

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

40. Đồ thị của hàm số nào sau đây có tiệm cận ngang?

A. $y = \frac{x^2-x+1}{x}$.

B. $y = x + \sqrt{1-x^2}$.

C. $y = x^2 + x + 1$.

D. $y = x + \sqrt{x^2+1}$.

41. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên :

Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai** ?

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$		
y'		-	-	0	+	+	
y	1	-1	7	5	$+\infty$	-4	-1

- A. Đường thẳng $y = 1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.
 B. Đường thẳng $y = -1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.
 C. Đường thẳng $x = 3$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.
 D. Đường thẳng $x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

42. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'		$-$	$-$
y	2	$-\infty$	$+\infty$
			2

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận.
 B. Đồ thị hàm số có TCD là đường thẳng $x = 1$ và TCN là đường thẳng $y = 2$.
 C. Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận.
 D. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $x = 1$ và tiệm cận đứng là đường thẳng $y = 2$.

43. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
y'	+		+	0	-
y	-1	$+\infty$	$-\infty$	2	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tổng số bao nhiêu tiệm cận (chỉ xét các tiệm cận đứng và ngang)?

- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

44. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx+2}{1-x}$ luôn có tiệm cận ngang.

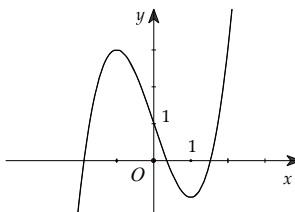
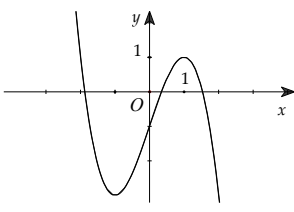
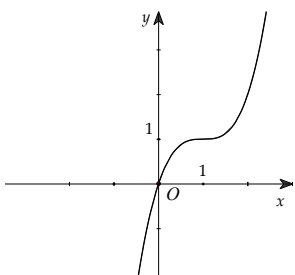
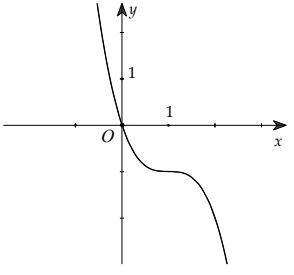
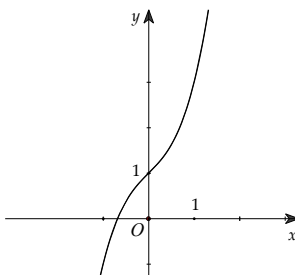
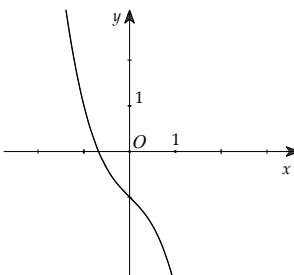
- A. $\forall m \in \mathbb{R}$. B. $\forall m \neq -2$. C. $\forall m \neq 2$. D. $\forall m \neq \frac{1}{2}$.

5. Bài toán về đồ thị hàm số: Đề MH2 có 2 câu về chủ đề này (1TH, 1VD)

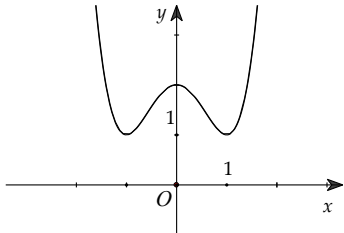
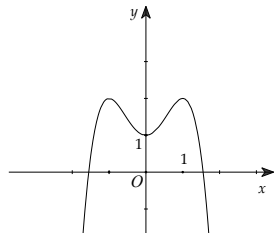
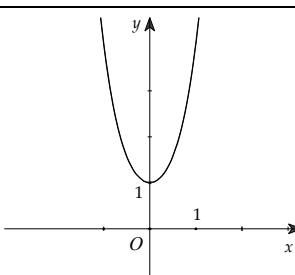
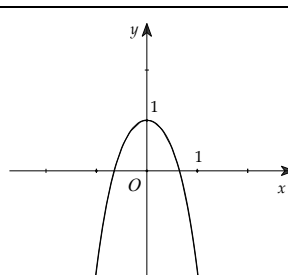
A. Lý thuyết:

1. Khảo sát một số hàm đa thức và hàm phân thức

1.1. Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

TRƯỜNG HỢP	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép		
Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm		

1.2. Hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)

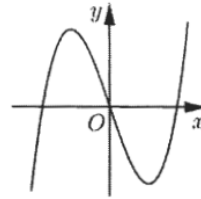
TRƯỜNG HỢP	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt ($ab < 0$)		
Phương trình $y' = 0$ có 1 nghiệm.		

1.3. Hàm số nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (c \neq 0, ad-bc \neq 0)$

$D = ad - bc > 0$	$D = ad - bc < 0$

B. Các ví dụ:

Ví dụ 17. C14 MH2 2020: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y = x^3 - 3x$.

B. $y = -x^3 + 3x$.

C. $y = x^4 - 2x^2$.

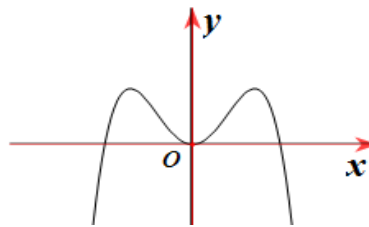
D. $y = -x^4 + 2x^2$.

Hướng dẫn

NX: là bài dạng quan sát đồ thị, đồ thị tăng (giảm) trước, cắt Oy (Ox) ở giá trị dương hay âm, số lượng nghiệm y' , các giá trị cực trị hs là dương âm, tiệm cận ra sao để đánh giá các hệ số trong công thức hàm là dương hay âm, từ đó chọn đáp án.

Dựa vào dáng điệu đồ thị, ta nhận thấy đây là đồ thị hàm số bậc 3 tăng trước nên hàm có hệ số $a > 0$. Chọn A.

Ví dụ 18. C9 MH1 2020. Hàm số nào dưới đây có đồ thị dạng như đường cong hình vẽ bên?



A. $y = -x^4 + 2x^2$.

B. $y = x^4 - 2x^2$.

C. $y = x^3 - 3x^2$.

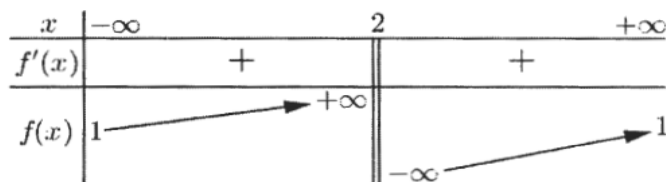
D. $y = -x^3 + 3x^2$.

Hướng dẫn

NX: HS phải nắm vững dạng đồ thị của các hàm bậc 3, trùng phương để có lựa chọn chính xác.

Ta quan đồ thị đã cho là hàm bậc 4, có miền tăng đầu trước nên $a < 0$. Chọn A.

Ví dụ 19. C43 MH2 2020: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+1}{bx+c} \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:



Trong các số a , b và c có bao nhiêu số dương?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Hướng dẫn

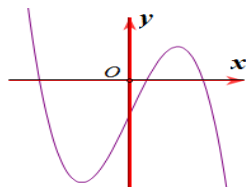
NX: là bài thuộc loại nhận dạng hệ số hàm số khi biết đồ thị hàm số. HS phải nắm vững dạng đồ thị của các hàm bậc 3, trùng phương, hàm phân thức. Đồng thời cần trang bị thêm đồ thị tăng (giảm) trước, cắt Oy (Ox) ở giá trị dương hay âm, số lượng nghiệm y', các giá trị cực trị hs là dương âm, tiệm cận ra sao để đánh giá các hệ số trong công thức hàm là dương hay âm, từ đó chọn đáp án.

Tiệm cận đứng: $x = 2 > 0 \Rightarrow -\frac{c}{b} > 0 \Rightarrow bc < 0$.

Tiệm cận ngang: $y = 1 > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} > 0 \Rightarrow ab > 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $x > 2 > 0 \Rightarrow -\frac{1}{a} > 0 \Rightarrow a < 0 \Rightarrow b < 0 \Rightarrow c > 0$. Chọn C.

Ví dụ 20. C28 MH1 - 2020. Cho hàm số $y = ax^3 + 3x + d, (a, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a > 0; d > 0$

B. $a < 0; d > 0$

C. $a > 0; d < 0$

D. $a < 0; d < 0$.

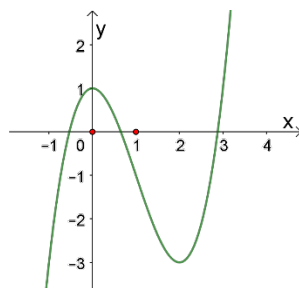
Hướng dẫn

Từ đồ thị hàm bậc ba suy ra $a < 0$. Cho $x = 0$ thì $y = d < 0$.

Vậy **Chọn D.**

C. Các bài tập tương tự: (dành cho hs tự ôn)

45. Cho hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ dưới đây



Hỏi $f(x)$ là hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

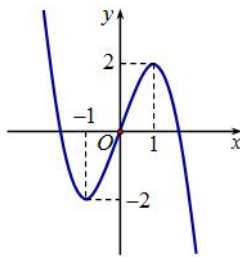
A. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$.

B. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

C. $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

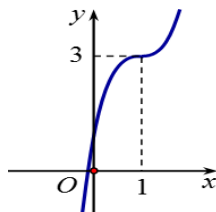
D. $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$

46. Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



- A. $y = -x^3 + 3x - 1$. B. $y = x^3 - 3x$. C. $y = -x^3 + 3x$. D. $y = x^4 - x^2 + 1$.

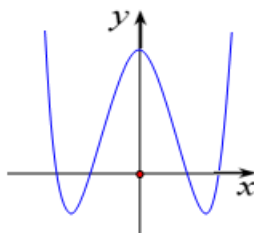
47. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số ở dưới đây.



Hàm số đó là hàm số nào?

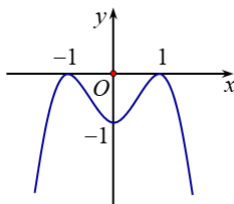
- A. $y = -2x^3 - 6x^2 - 6x + 1$. B. $y = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 1$. C. $y = 2x^3 - 6x^2 - 6x + 1$. D. $y = 2x^3 - x^2 + 6x + 1$.

48. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



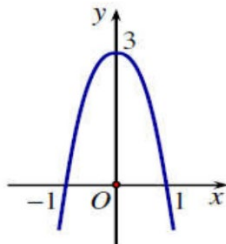
- A. $y = x^4 + 4x^2 + 3$. B. $y = -x^4 + 4x^2 + 3$. C. $y = x^4 - 4x^2 + 3$. D. $y = x^3 - 4x^2 - 3$.

49. Đường cong trong hình sau là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



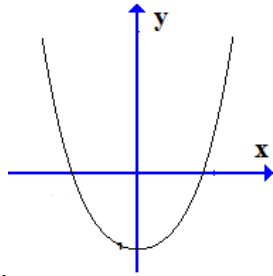
- A. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$. B. $y = -x^4 + x^2 - 1$. C. $y = -x^4 + 3x^2 - 3$. D. $y = -x^4 + 3x^2 - 2$.

50. Đồ thị hình bên là đồ thị hàm số nào trong các hàm số sau:



- A. $y = x^3 + 3x^2 - 3$. B. $y = -x^2 + 2x + 3$. C. $y = x^4 + 2x^2 - 3$. D. $y = -x^4 - 2x^2 + 3$.

51. Đường cong dưới đây có thể là đồ thị của hàm số nào?



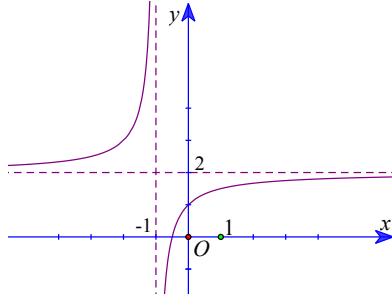
A. $y = x^3 + x^2 - 1$.

B. $y = x^4 - x^2 - 1$.

C. $y = -x^2 - 1$.

D. $y = \frac{1}{2}x^4 + x^2 - 1$.

52. Đồ thị (hình bên) là đồ thị của hàm số nào?



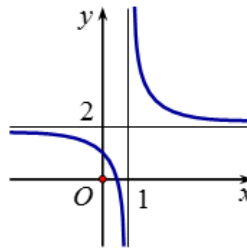
A. $y = \frac{x+2}{x+1}$.

B. $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

C. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

D. $y = \frac{x+3}{1-x}$.

53. Xác định a, b, c để hàm số $y = \frac{ax-1}{bx+c}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn đáp án đúng?



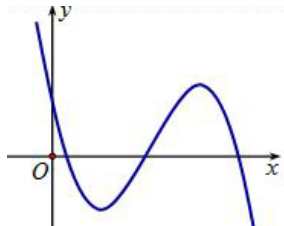
A. $a = 2, b = 1, c = -1$.

B. $a = 2, b = 1, c = 1$.

C. $a = 2, b = 2, c = -1$.

D. $a = 2, b = -1, c = 1$.

54. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ



Mệnh đề nào sau đây đúng?

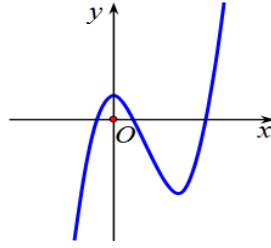
A. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

B. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

C. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

D. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

55. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$) có đồ thị sau



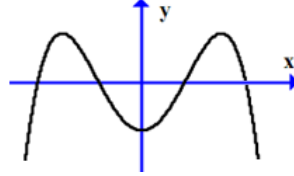
A. $a > 0; b > 0; c > 0; d > 0$.

B. $a > 0; b < 0; c = 0; d > 0$.

C. $a > 0; b > 0; c = 0; d > 0$.

D. $a > 0; b < 0; c > 0; d > 0$.

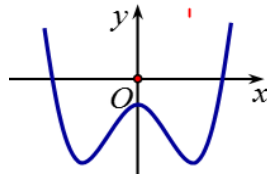
56. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ như hình vẽ dưới đây



Dấu của a, b và c là

A. $a < 0, b < 0, c < 0$. **B.** $a > 0, b < 0, c < 0$. **C.** $a < 0, b > 0, c < 0$. **D.** $a > 0, b < 0, c < 0$.

57. Cho hàm số bậc bốn $y = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



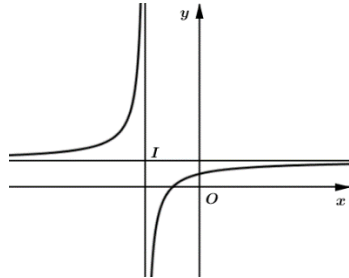
A. $a > 0, b < 0, c < 0$.

B. $a > 0, b > 0, c < 0$.

C. $a > 0, b < 0, c > 0$.

D. $a < 0, b > 0, c < 0$.

58. Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{x-b}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Mệnh đề nào sau đây đúng?



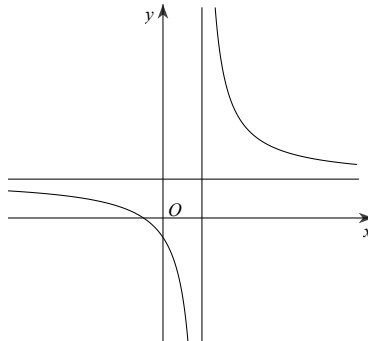
A. $a > 0 > b$.

B. $a > b > 0$.

C. $a < b < 0$.

D. $a < 0 < b$.

59. Cho hàm số $y = \frac{bx-c}{x-a} (a \neq 0 \text{ và } a, b, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào dưới đây đúng?



A. $a > 0, b < 0, c - ab < 0$.

B. $a > 0, b > 0, c - ab < 0$.

C. $a < 0, b > 0, c - ab < 0$.

D. $a < 0, b < 0, c - ab > 0$.

6. Bài toán về tương giao đồ thị: Đề MH2 có 3 câu về chủ đề này (2NB, 1VDC)

A. Lý thuyết:

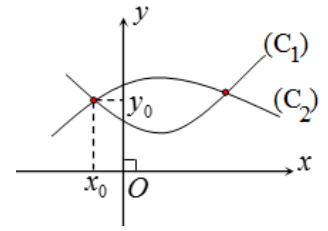
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C_1) và $y = g(x)$ có đồ thị (C_2) .

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là $f(x) = g(x)$ (1). Khi đó:

- Số giao điểm của (C_1) và (C_2) bằng với số nghiệm của phương trình (1).
- Nghiệm x_0 của phương trình (1) chính là hoành độ x_0 của giao điểm.
- Để tính tung độ y_0 của giao điểm, ta thay hoành độ x_0 vào $y = f(x)$ hoặc

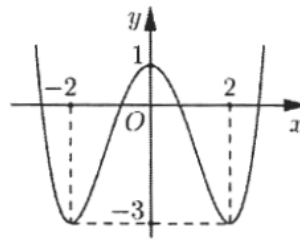
$$y = g(x).$$

- Điểm $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của (C_1) và (C_2) .



B. Các ví dụ:

Ví dụ 21. C17 MH2 2020: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị trong hình bên. Số nghiệm của phương trình $f(x) = -1$ là



A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Hướng dẫn

NX: Hướng dẫn cho hs vẽ thêm lên trên hình đường thẳng $y = -1$. Sau đó thì đếm số giao điểm.

Số nghiệm của phương trình $f(x) = -1$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $x = -1$. Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $x = -1$ tại bốn điểm phân biệt.

Chọn D.

Ví dụ 22. C23 MH1 2020. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	1	0	$+\infty$		

Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 2 = 0$ là

A. 2.

B. 0.

C. 3.

D. 1.

Hướng dẫn

NX: Hướng dẫn cho hs biến đổi về dạng: VT là công thức đã có BBT ($f(x)$), VP là các biểu thức còn lại. Sau đó vẽ thêm lên trên BBT đồ thị của có công thức là VP. Đếm số giao điểm.

Từ $3f(x) - 2 = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{2}{3} \in (0; 1)$, kết hợp bảng biến thiên suy ra PT có 3 nghiệm.

Chọn C.

Ví dụ 23. C30 MH2 2020: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ và trục hoành là

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Hướng dẫn

NX: Bài này có thể cho hs lập BBT rồi quan sát số giao điểm với Ox.

Cách khác thì ta có thể xét dựa trên số cực trị của hàm và giá trị cực trị của nó.

Ta có $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Hàm số có hai cực trị.

Mặt khác $y(-1) \cdot y(1) = -3 < 0$ nên hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm về phía phải của trục hoành.

Nên đồ thị hàm số đã cho cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt.

Chọn A.

Ví dụ 24. C46 MH2 2020: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f(x)$			2		0		2		$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\sin x) = 1$ là

A. 7.

B. 4.

C. 5

D. 6.

Hướng dẫn

NX: Bài này là VDC, nó liên quan tương giao của hàm hợp. Dành cho các em cần điểm cao.

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$. Ta thấy phương trình $f(x) = 1$ có bốn nghiệm phân biệt lần lượt là: $t_1 < -1 < t_2 < 0 < t_3 < 1 < t_4$.

$$\text{Do đó } f(\sin x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = t_1(l) \\ \sin x = t_2(t/m) \\ \sin x = t_3(t/m) \\ \sin x = t_4(l) \end{cases}$$

Xét hàm số $t = \sin x$ trên $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$. Khi đó: $t' = \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2} \vee x = \frac{5\pi}{2}$ (trên $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$).

Ta có bảng biến thiên:

x	0	$\pi/2$	$3\pi/2$	$5\pi/2$
t'		+ 0	- 0	+
t	0	1	-1	1

Từ bảng biến thiên của hàm số $t = \sin x$, ta thấy phương trình:

+ $\sin x = t_2 \in (-1; 0)$ có hai nghiệm phân biệt trên $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$.

+ $\sin x = t_1 \in (0; 1)$ có ba nghiệm phân biệt trên $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$. Chọn C.

Ví dụ 25. C45 MH1 2020. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-2		-1		-2		$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$ của phương trình $2f(\sin x) + 3 = 0$ là

A. 4.

B. 6.

C. 3.

D. 8.

Hướng dẫn

NX: Bài này là VDC, nó liên quan tương giao của hàm hợp. Dành cho các em cần điểm cao.

Đặt $\sin x = t \in [-1; 1]$. Trước hết xét $2f(t) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(t) = -\frac{3}{2}$ có hai nghiệm đối nhau là

$t = \pm a \in (-1; 1)$.

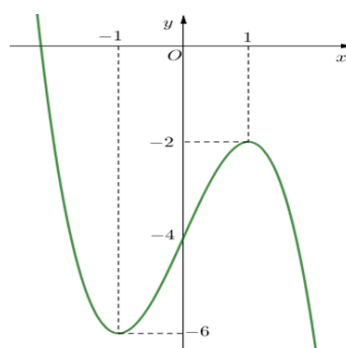
+ Trở về phương trình $\sin x = -a \in (-1; 0)$, $x \in [-\pi; 2\pi]$, phương trình này có 4 nghiệm (Nhưng chỉ có hai điểm cuối).

+ Trở về phương trình $\sin x = a \in (0; 1)$, $x \in [-\pi; 2\pi]$, phương trình này có hai nghiệm.

Chọn B

C. Các bài tập tương tự: (dành cho hs tự ôn)

60. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $f(x) = -3$ có số nghiệm là



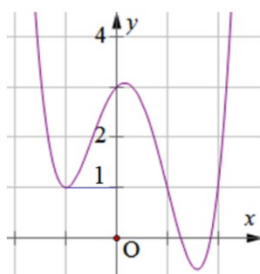
A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

61. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như đường cong hình dưới. Phương trình $f(x) = 1$ có bao nhiêu nghiệm ?



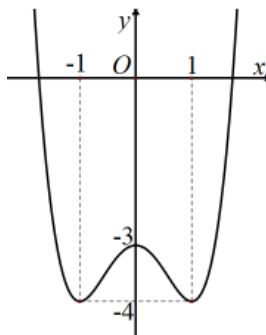
A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

62. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $f(x) + m = 0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt

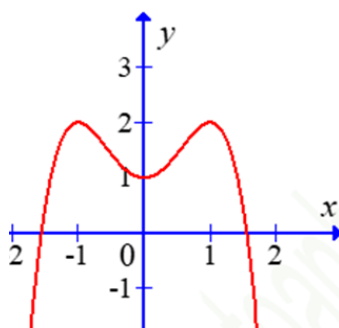
A. $m < 3$.

B. $m = -3$.

C. $-4 < m < -3$.

D. $m = 3$.

63. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hỏi phương trình $m = f(x) + 1$ với $m < 2$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 3.

B. Vô nghiệm.

C. 2.

D. 4.

64. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = 2x^3 - (2 + m)x + m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt

A. $m > \frac{1}{2}$.

B. $m > -\frac{1}{2}, m \neq 4$.

C. $m > -\frac{1}{2}$.

D. $m \leq \frac{1}{2}$.

65. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
y'	+	0	-	+
y	$-\infty$	2	-1	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x)+1=0$.

- A. 3 B. 0 C. 1 D. 2

66. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = -2018$ tại bao nhiêu điểm?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	0	-	0	-
y	$-\infty$	3	-1	3	$-\infty$

- A. 2. B. 4. C. 1. D. 0.

67. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-
y	$+\infty$	3	5	3	$+\infty$

Tìm m để phương trình $f(x) = 2 - 3m$ có bốn nghiệm phân biệt.

- A. $m = -\frac{1}{3}$. B. $-1 < m < -\frac{1}{3}$. C. $m \leq -1$. D. $m < -1$ hoặc $m > -\frac{1}{3}$.

68. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
y'	$+$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	$+\infty$	$+\infty$

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x) = m$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt

- A. $(-4; 2)$. B. $[-4; 2)$. C. $(-4; 2]$. D. $(-\infty; 2]$.

69. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ sau. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = m$ vô nghiệm.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
y'	-2	$+\infty$	1	$+\infty$	-2

A. $[-2; 1]$.

B. $(-\infty; -2]$.

C. $[1; +\infty)$.

D. $[-2; 1)$.

70. Cho hàm số có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-2	-1	-2	$+\infty$

Số nghiệm đoạn $[-2\pi; 2\pi]$ của phương trình $4f(\cos x) + 5 = 0$ là

A. 4.

B. 6.

C. 3.

D. 8.

71. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	2	1	2	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[0; 2020\pi]$ của phương trình $f(\sin x) - 2 = 0$ là

A. 1010.

B. 2019.

C. 2021.

D. 2020.

72. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.

Hỏi phương trình $(x^3 - 3x^2 + 2)^3 - 3(x^3 - 3x^2 + 2)^2 + 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực dương phân biệt?

A. 3.

B. 5.

C. 7.

D. 1.

---///---

CHỦ ĐỀ 2: HÀM SỐ LŨY THỪA, HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LOGARIT

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Công thức về lũy thừa

Với a, b là những số thực dương, m và n là những số thực tùy ý. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} &\bullet a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \quad (n \in \mathbb{N}^*); \quad a^0 = 1 \\ &\bullet a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \bullet \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \left(a^{-n} = \frac{1}{a^n} \right) \quad \bullet (a^m)^n = a^{m \cdot n} \\ &\bullet (ab)^n = a^n \cdot b^n \quad \bullet \left(\frac{a}{b} \right)^n = \frac{a^n}{b^n} \end{aligned}$$

2. Công thức liên quan đến căn bậc n

$$\bullet \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad \bullet \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0) \quad \bullet (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad \bullet \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad (a > 0)$$

Chú ý: Trong hai công thức đầu, nếu n là số tự nhiên lẻ lớn hơn 2 thì a, b là số thực bất kì, nếu n là số tự nhiên chẵn lớn hơn hoặc bằng 2 thì a, b là số thực không âm.

3. Công thức về lôgarit

Với a, b và c là những số thực dương; $a \neq 1$. Ta có:

Định nghĩa	Công thức tính lôgarit	Công thức đổi cơ số ($b \neq 1$)
$\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = b$. ($\log_a b$ có nghĩa khi $\begin{cases} a > 0; a \neq 1 \\ b > 0 \end{cases}$)	$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$	$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$ $\Rightarrow \log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$
$\log_a 1 = 0; \quad \log_a a = 1$	$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ $\Rightarrow \log_a \frac{1}{c} = -\log_a c$	$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
$a^{\log_a b} = b; \quad \log_a (a^\alpha) = \alpha$	$\log_a (b^\alpha) = \alpha \log_a b$	$\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$
Lôgarit thập phân (cơ số 10): $\log b$ hay $\lg b$. Lôgarit tự nhiên là lôgarit cơ số e ($e \approx 2,718 > 1$), viết tắt là $\ln b$.	$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$	$\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$

4. Hàm số mũ, hàm số lôgarit

- Hàm số mũ: $y = a^x$ với $a > 0, a \neq 1$. Tập xác định $\mathbb{R}$. Tập giá trị $\mathbb{R}_+^*$.
Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 1$, nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $0 < a < 1$.
- Hàm số lôgarit: $y = \log_a x$ với $a > 0, a \neq 1$. Tập xác định $\mathbb{R}_+^*$. Tập giá trị $\mathbb{R}$.
Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}_+^*$ khi $a > 1$, nghịch biến trên $\mathbb{R}_+^*$ khi $0 < a < 1$.

5. Phương trình và bất phương trình mũ

$$\begin{aligned}
 a) \quad & a^{f(x)} = a^{g(x)} \quad (0 < a \neq 1) \Leftrightarrow f(x) = g(x); \\
 & a^{f(x)} = b \quad (0 < a \neq 1, b > 0) \Leftrightarrow f(x) = \log_a b \\
 b) \quad & a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x) \quad (\text{nếu } a > 1) \text{ hoặc} \\
 & a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x) \quad (\text{nếu } 0 < a < 1). \\
 c) \quad & a^{f(x)} < b \Leftrightarrow f(x) < \log_a b \quad (\text{nếu } a > 1, b > 0) \text{ hoặc} \\
 & a^{f(x)} < b \Leftrightarrow f(x) > \log_a b \quad (\text{nếu } 0 < a < 1, b > 0).
 \end{aligned}$$

6. Phương trình và bất phương trình lôgarit

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = a^b \end{cases} & b) \quad \log_a f(x) = \log_a b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \\
 c) \quad & \log_a f(x) < \log_a b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ 0 < f(x) < g(x) \\ 0 < a < 1 \\ f(x) > g(x) > 0 \end{cases} & d) \quad \log_a f(x) < b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ 0 < f(x) < a^b \\ 0 < a < 1 \\ f(x) > a^b \end{cases} \\
 e) \quad & \log_a f(x) > b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > a^b \\ 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) < a^b \end{cases}
 \end{aligned}$$

7. Công thức lãi kép

a) **Định nghĩa:** Lãi kép là phần lãi của kì sau được tính trên số tiền gốc kì trước cộng với phần lãi của kì trước.

b) **Công thức:** Giả sử số tiền gốc là A ; lãi suất $r\%$ /kì hạn gửi (có thể là tháng, quý hay năm).

- Số tiền nhận được cả gốc và lãi sau n kì hạn gửi là $A(1+r)^n$
- Số tiền lãi nhận được sau n kì hạn gửi là $A(1+r)^n - A = A[(1+r)^n - 1]$

B. LUYỆN TẬP

1. Hàm số lũy thừa, hàm số mũ, hàm số lôgarit

Câu 1. Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x^3 - 27)^{\frac{\pi}{2}}$.

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. B. $D = \mathbb{R}$. C. $D = [3; +\infty)$. D. $D = (3; +\infty)$.

Lời giải. Áp dụng lý thuyết "Lũy thừa với số mũ không nguyên thì cơ số phải dương".

Do đó hàm số $y = (x^3 - 27)^{\frac{\pi}{2}}$ xác định khi $x^3 - 27 > 0 \Leftrightarrow x > 3$. **Chọn D.**

Câu 2. Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x^2 - x - 2)^{-3}$.

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

C. $D = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

D. $D = (0; +\infty)$.

Lời giải. Áp dụng lý thuyết "Lũy thừa với số mũ nguyên âm thì cơ số phải khác 0".

Do đó hàm số đã cho xác định khi $x^2 - x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 2 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 3. Tìm tập xác định D của hàm số $y = [x^2(x+1)]^{\sqrt{\pi}}$.

A. $D = (0; +\infty)$.

B. $D = (-1; +\infty) \setminus \{0\}$.

C. $D = (-\infty; +\infty)$.

D. $D = (-1; +\infty)$.

Lời giải. Hàm số xác định khi $x^2(x+1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 4. Rút gọn biểu thức $P = \sqrt[3]{x^5} \sqrt[4]{x}$ với $x > 0$.

A. $P = x^{\frac{20}{21}}$.

B. $P = x^{\frac{21}{12}}$.

C. $P = x^{\frac{20}{5}}$.

D. $P = x^{\frac{12}{5}}$.

Lời giải. Cách dùng MTCT. Chọn $x > 0$ ví dụ như $x = 1,25$ chẳng hạn.

Tính giá trị $\sqrt[3]{1,25^5} \sqrt[4]{1,25}$ rồi lưu vào A

Tiếp theo ta tính hiệu, ví dụ như đáp án A ta cần tính $A - (1,25)^{\frac{20}{21}}$. Nếu màn hình máy tính xuất hiện kết quả bằng 0 thì chứng tỏ đáp án A đúng.

Đáp số chính là B. **Chọn B.**

Câu 5. Rút gọn biểu thức $P = \frac{a^{\sqrt{3}+1} \cdot a^{2-\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}}$ với $a > 0$.

A. $P = a^4$.

B. $P = a$.

C. $P = a^5$.

D. $P = a^3$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} a^{\sqrt{3}+1} \cdot a^{2-\sqrt{3}} = a^{\sqrt{3}+1+(2-\sqrt{3})} = a^3 \\ (a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2} = a^{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)} = a^{2-4} = a^{-2} \end{cases} \rightarrow P = \frac{a^3}{a^{-2}} = a^{3-(-2)} = a^5$. **Chọn C.**

Câu 6. Với giá trị nào của a thì đẳng thức $\sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a}} = \sqrt[24]{2^5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^{-1}}}$ đúng?

A. $a = 1$.

B. $a = 2$.

C. $a = 0$.

D. $a = 3$.

Lời giải. Ta có
$$\left\{ \begin{aligned} \sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a \cdot \sqrt[4]{a}}} &= \left[a \cdot \left(a \cdot a^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{17}{24}} \rightarrow \sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a \cdot \sqrt[4]{a}}} = \sqrt[24]{2^5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^{-1}}} \Leftrightarrow a = 2. \text{ Chọn B.} \\ \sqrt[24]{2^5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^{-1}}} &= 2^{\frac{5}{24}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{17}{24}} \end{aligned} \right.$$

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị của a thỏa mãn $\sqrt[15]{a^7} > \sqrt[5]{a^2}$.

- A. $a = 0$. B. $a < 0$. C. $a > 1$. D. $0 < a < 1$.

Lời giải. Ta có $\sqrt[15]{a^7} > \sqrt[5]{a^2} \Leftrightarrow a^{\frac{7}{15}} > a^{\frac{2}{5}} \Leftrightarrow a^{\frac{7}{15}} > a^{\frac{6}{15}} \longrightarrow a > 1$. **Chọn C.**

Câu 8. Một người lần đầu gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng với kì hạn 3 tháng, lãi suất 2% một quý. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi quý số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho quý tiếp theo. Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kỳ hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền người đó nhận được 1 năm sau khi gửi tiền (cả vốn lẫn lãi) gần nhất với kết quả nào sau đây?

- A. 210 triệu. B. 220 triệu. C. 212 triệu. D. 216 triệu.

Lời giải. Số tiền nhận về sau 1 năm của 100 triệu gửi trước là $100(1+2\%)^4$ triệu.

Số tiền nhận về sau 6 tháng của 100 triệu gửi sau là $100(1+2\%)^2$ triệu.

Vậy tổng số tiền là $100(1+2\%)^4 + 100(1+2\%)^2 = 212,283216 (\approx 212,283)$ triệu. **Chọn C.**

Câu 9. Bác An đem gửi tổng số tiền 320 triệu đồng ở hai loại kỳ hạn khác nhau. Bác gửi 140 triệu đồng theo kỳ hạn ba tháng với lãi suất 2,1% một quý. Số tiền còn lại bác An gửi theo kỳ hạn một tháng với lãi suất 0,73% một tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi kỳ hạn số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho kỳ hạn tiếp theo. Sau 15 tháng kể từ ngày gửi bác An đi rút tiền. Tính gần đúng đến hàng đơn vị tổng số tiền lãi thu được của bác An.

- A. 36080251 đồng. B. 36080254 đồng.
C. 36080255 đồng. D. 36080253 đồng.

Lời giải. Số tiền nhận về sau 15 tháng của 140 triệu gửi trước là $140 \cdot (1+2,1\%)^5$ triệu.

Số tiền nhận về sau 15 tháng của 180 triệu gửi sau là $180 \cdot (1+0,73\%)^{15}$ triệu.

Suy ra tổng số tiền cả vốn lẫn lãi mà bác An thu được là

$$140 \cdot (1+2,1\%)^5 + 180 \cdot (1+0,73\%)^{15} \approx 356,080253 \text{ triệu.}$$

Suy ra số tiền lãi: $356,080253 - 320 = 36,080253 = 36080253$ đồng. **Chọn D.**

Câu 10. Để quảng bá cho sản phẩm A, một công ty dự định tổ chức quảng cáo theo hình thức quảng cáo trên truyền hình. Nghiên cứu của công ty cho thấy: nếu sau n lần quảng cáo được phát thì tỉ lệ người xem quảng cáo đó mua sản phẩm A tuân theo công thức

$P(n) = \frac{1}{1 + 49e^{-0,015n}}$. Hỏi cần phát **ít nhất** bao nhiêu lần quảng cáo để tỉ lệ người xem mua sản phẩm đạt trên 30% ?

A. 202 .

B. 203 .

C. 206 .

D. 207 .

Lời giải. Để tỉ lệ người xem mua sản phẩm đạt trên 30%

$$\Leftrightarrow P(n) > \frac{3}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{1 + 49e^{-0,015n}} > \frac{3}{10} \Leftrightarrow 1 + 49e^{-0,015n} < \frac{10}{3} \Leftrightarrow e^{-0,015n} < \frac{1}{21}$$

$$\Leftrightarrow -0,015n < \ln \frac{1}{21} \Leftrightarrow n > \frac{\ln \frac{1}{21}}{-0,015} \approx 202,97. \text{ Vậy cần phát ít nhất 203 lần quảng cáo.}$$

Chọn B.

Câu 11. Tập xác định của hàm số $y = \log_2 x$ bằng

A. $[0; +\infty)$.

B. $(-\infty; +\infty)$.

C. $(0; +\infty)$.

D. $[2; +\infty)$.

Lời giải. Điều kiện xác định: $x > 0$. **Chọn C**

Câu 12. Cho các mệnh đề sau:

(I). Cơ số của logarit phải là số nguyên dương. (II). Chỉ số thực dương mới có logarit.

(III). $\ln(A+B) = \ln A + \ln B$ với mọi $A > 0, B > 0$. (IV) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$, với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Số mệnh đề đúng là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải. Cơ số của lôgarit phải là số dương khác 1. Do đó (I) sai.

Rõ ràng (II) đúng theo lý thuyết SGK.

Ta có $\ln A + \ln B = \ln(A.B)$ với mọi $A > 0, B > 0$. Do đó (III) sai.

Ta có $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$ với mọi $0 < a, b, c \neq 1$. Do đó (IV) sai.

Vậy chỉ có mệnh đề (II) đúng. **Chọn A.**

Câu 13. Với a là một số thực dương tùy ý, $\log_2(a^3)$ bằng

A. $\frac{3}{2} \log_2 a$.

B. $\frac{1}{3} \log_2 a$.

C. $3 + \log_2 a$.

D. $3 \log_2 a$.

Lời giải. Ta có : $\log_2(a^3) = 3 \log_2 a$. **Chọn D**

Câu 14. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_a(a \cdot \sqrt[3]{a \sqrt{a}})$ với $0 < a \neq 1$.

- A. $P = \frac{1}{3}$. B. $P = \frac{3}{2}$. C. $P = \frac{2}{3}$. D. $P = 3$.

Lời giải. Ta có $P = \log_a \left[a \cdot \left(a \cdot a^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} \right] = \log_a \left(a^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{3}{2} \log_a a = \frac{3}{2}$. **Chọn B.**

Cách trắc nghiệm: Chọn $a = 2$ và bấm máy.

Câu 15. Cho a là số thực dương và khác 1. Tính giá trị biểu thức $P = \log_{\sqrt{a}} a$.

- A. $P = -2$. B. $P = 0$. C. $P = \frac{1}{2}$. D. $P = 2$.

Lời giải. Với $0 < a \neq 1$, ta có $P = \log_{\sqrt{a}} a = \log_{a^{\frac{1}{2}}} a = 2 \log_a a = 2 \cdot 1 = 2$. **Chọn D.**

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = \left(x^{1 + \frac{1}{2 \log_4 x}} + 8^{\frac{1}{3 \log_x 2}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} - 1$ với $0 < x \neq 1$. Tính giá trị biểu thức $P = f(f(2017))$.

- A. $P = 2016$. B. $P = 1009$. C. $P = 2017$. D. $P = 1008$.

Lời giải. Ta có
$$\begin{cases} x^{1 + \frac{1}{2 \log_4 x}} = x^{\frac{1 + \frac{1}{\log_2 x}}{\log_2 x}} = x^{1 + \log_x 2} = x^{\log_x (2x)} = 2x \\ 8^{\frac{1}{3 \log_x 2}} = 2^{\frac{3 \cdot \frac{1}{\log_x 2}}{\log_x 2}} = 2^{\frac{1}{\log_x 2}} = 2^{\log_2 x^2} = x^2 \end{cases}$$

Khi đó $f(x) = (x^2 + 2x + 1)^{\frac{1}{2}} - 1 = [(x+1)^2]^{\frac{1}{2}} - 1 = x$.

Suy ra $f(2017) = 2017 \longrightarrow f(f(2017)) = f(2017) = 2017$. **Chọn C.**

Câu 17. Xét các số thực a và b thỏa mãn $\log_3 (3^a \cdot 9^b) = \log_9 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a + 2b = 2$. B. $4a + 2b = 1$. C. $4ab = 1$. D. $2a + 4b = 1$.

Lời giải. Ta có: $\log_3 (3^a \cdot 9^b) = \log_9 3 \Leftrightarrow \log_3 3^a + \log_3 9^b = \log_{3^2} 3 \Leftrightarrow \log_3 3^a + \log_3 3^{2b} = \log_{3^2} 3$

$$\Leftrightarrow a + 2b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2a + 4b = 1. \text{ **Chọn D.**}$$

Câu 18. Cho ba điểm $A(b; \log_a b)$, $B(c; 2 \log_a c)$, $C(b; 3 \log_a b)$ với $0 < a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$. Biết B là trọng tâm của tam giác OAC với O là gốc tọa độ. Tính $S = 2b + c$.

- A. $S = 9$. B. $S = 7$. C. $S = 11$. D. $S = 5$.

Lời giải. Vì B là trọng tâm của tam giác OAC nên
$$\begin{cases} \frac{0 + b + b}{3} = c \\ \frac{0 + \log_a b + 3 \log_a b}{3} = 2 \log_a c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b+b=3c \\ 4\log_a b=6\log_a c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b=3c \\ 2\log_a b=3\log_a c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b=3c \\ \log_a b^2=\log_a c^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b=3c \\ b^2=c^3 \end{cases} \xrightarrow{c>0} \begin{cases} b=\frac{27}{8} \\ c=\frac{9}{4} \end{cases} \longrightarrow S=2b+c=9. \text{ Chọn A.}$$

Câu 19. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 = bc$. Tính $S = 2\ln a - \ln b - \ln c$.

A. $S = 2\ln\left(\frac{a}{bc}\right)$. B. $S = 1$. C. $S = -2\ln\left(\frac{a}{bc}\right)$. D. $S = 0$.

Lời giải. Ta có $S = 2\ln a - (\ln b + \ln c) = \ln a^2 - \ln(bc) = \ln(bc) - \ln(bc) = 0$. **Chọn D.**

Câu 20. Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn $4^a = 25^b = 10^c$. Tính $T = \frac{c}{a} + \frac{c}{b}$.

A. $T = \frac{1}{2}$. B. $T = \sqrt{10}$. C. $T = 2$. D. $T = \frac{1}{10}$.

Lời giải. Giả sử $4^a = 25^b = 10^c = t \longrightarrow \begin{cases} a = \log_4 t \\ b = \log_{25} t \\ c = \log_{10} t \end{cases}$

Ta có $T = \frac{c}{a} + \frac{c}{b} = \frac{\log_{10} t}{\log_4 t} + \frac{\log_{10} t}{\log_{25} t} = \frac{\log_t 4}{\log_t 10} + \frac{\log_t 25}{\log_t 10} = \log_{10} 4 + \log_{10} 25$
 $= \log_{10} (4 \cdot 25) = \log_{10} 100 = 2$. **Chọn C.**

Câu 21. Đặt $a = \ln 3$, $b = \ln 5$. Tính $I = \ln \frac{3}{4} + \ln \frac{4}{5} + \ln \frac{5}{6} + \dots + \ln \frac{124}{125}$ theo a và b .

A. $I = a - 2b$. B. $I = a + 3b$. C. $I = a + 2b$. D. $I = a - 3b$.

Lời giải. Ta có $I = \ln\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{124}{125}\right) = \ln \frac{3}{125} = \ln 3 - \ln 125 = \ln 3 - 3\ln 5 = a - 3b$. **Chọn D.**

Câu 22. Cho $\log_2 x = \sqrt{2}$. Tính giá trị biểu thức $P = \log_2 x^2 + \log_{\frac{1}{2}} x^3 + \log_4 x$.

A. $P = \frac{11\sqrt{2}}{2}$. B. $P = \sqrt{2}$. C. $P = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $P = 3\sqrt{2}$.

Lời giải. Ta có $P = 2\log_2 x - 3\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x = -\frac{1}{2}\log_2 x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. **Chọn C.**

Câu 23. Cho $a = \log_2 m$ và $A = \log_m 8m$, với $0 < m \neq 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $A = (3-a)a$. B. $A = (3+a)a$. C. $A = \frac{3-a}{a}$. D. $A = \frac{3+a}{a}$.

Lời giải. Ta có $A = \log_m 8m = \log_m 8 + \log_m m = 3\log_m 2 + 1 = \frac{3}{\log_2 m} + 1 = \frac{3}{a} + 1 = \frac{3+a}{a}$. **Chọn D.**

Câu 24. Cho $\log_2 5 = a$, $\log_3 5 = b$. Tính giá trị biểu thức $A = \frac{\log_5 120}{2^{\log_4 \sqrt{2}}}$ theo a và b .

A. $A = \frac{2b + ab + a}{\sqrt[4]{2ab}}$.

B. $A = \frac{3b + ab + a}{ab}$.

C. $A = \frac{3b + ab + a}{\sqrt[4]{2ab}}$.

D. $A = \frac{b + ab + 3a}{\sqrt[4]{2ab}}$.

Lời giải. Ta có $A = \frac{\log_5 120}{2^{\log_4 \sqrt{2}}} = \frac{\log_5 (2^3 \cdot 5 \cdot 3)}{2^{\frac{1}{4}}} = \frac{3\log_5 2 + 1 + \log_5 3}{\sqrt[4]{2}}$

$= \frac{\frac{3}{a} + 1 + \frac{1}{b}}{\sqrt[4]{2}} = \frac{3b + ab + a}{\sqrt[4]{2ab}}$. **Chọn C.**

Cách 2. Dùng MTCT:

Bấm máy $\log_2 5$ và lưu vào biến A; Bấm máy $\log_3 5$ và lưu vào biến B.

Giả sử với đáp án A, nếu đúng thì hiệu $\frac{\log_5 120}{2^{\log_4 \sqrt{2}}} - \frac{2b + ab + a}{\sqrt[4]{2ab}}$ phải bằng 0.

Nhập vào màn hình $\frac{\log_5 120}{2^{\log_4 \sqrt{2}}} - \frac{2B + AB + A}{\sqrt[4]{2AB}}$ với A, B là các biến đã lưu và nhấn dấu =.

Màn hình xuất hiện số khác 0. Do đó đáp án A không thỏa mãn.

Thử lần lượt và ta chọn được đáp án đúng là C.

Câu 25. Với mọi a, b, x là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 x = 5\log_2 a + 3\log_2 b$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $x = 3a + 5b$. B. $x = 5a + 3b$. C. $x = a^5 + b^3$. D. $x = a^5 b^3$.

Lời giải. Ta có $\log_2 x = 5\log_2 a + 3\log_2 b = \log_2 a^5 + \log_2 b^3 = \log_2 a^5 b^3 \Leftrightarrow x = a^5 b^3$. **Chọn D.**

Câu 26. Cho a, b, x, y là các số thực dương và khác 1. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $\log_a (x + y) = \log_a x + \log_a y$.

B. $\log_b a \cdot \log_a x = \log_b x$.

C. $\log_a \frac{1}{x} = \frac{1}{\log_a x}$.

D. $\log_a \frac{x}{y} = \frac{\log_a x}{\log_a y}$.

Lời giải. Ta có $\log_a x + \log_a y = \log_a xy \longrightarrow$ A sai.

$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y} \longrightarrow$ D sai.

$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x \longrightarrow$ C sai.

$\log_b a \cdot \log_a x = \log_b x \longrightarrow$ B đúng. **Chọn B.**

Câu 27. Cho hai số thực a và b , với $1 < a < b$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $\log_a b < 1 < \log_b a$.

B. $1 < \log_a b < \log_b a$.

C. $\log_b a < \log_a b < 1$.

D. $\log_b a < 1 < \log_a b$.

Lời giải. Ta có $b > a > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a b > \log_a a \Leftrightarrow \log_a b > 1 \\ \log_b b > \log_b a \Leftrightarrow 1 > \log_b a \end{cases} \Leftrightarrow \log_b a < 1 < \log_a b$. **Chọn D.**

Câu 28. Có bao nhiêu giá trị nguyên m thỏa $\log_{\frac{1}{2}}(m^2 - m + 2) \geq \log_{\frac{1}{2}} 22$?

A. 10.

B. 20.

C. 22.

D. Vô số.

Lời giải. Ta có $\log_{\frac{1}{2}}(m^2 - m + 2) \geq \log_{\frac{1}{2}} 22 \Leftrightarrow m^2 - m + 2 \leq 22 \Leftrightarrow m^2 - m - 20 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 5$.

Từ đó suy ra có 10 giá trị nguyên m thỏa đề bài. **Chọn A.**

Câu 29. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_2(x^2 - 2x - 3)$.

A. $D = (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

B. $D = [-1; 3]$.

C. $D = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

D. $D = (-1; 3)$.

Lời giải. Hàm số xác định $\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -1 \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. **Chọn C.**

Câu 30. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_5 \frac{x-3}{x+2}$.

A. $D = (-2; 3)$.

B. $D = (-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

D. $D = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

Lời giải. Hàm số xác định $\Leftrightarrow \frac{x-3}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x > 3 \end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 31. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{2 - \ln(ex)}$.

A. $D = (1; 2)$.

B. $D = (1; +\infty)$.

C. $D = (0; 1)$.

D. $D = (0; e]$.

Lời giải. Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} ex > 0 \\ 2 - \ln(ex) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ ex \leq e^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq e \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq e$. **Chọn D.**

Câu 32. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 - 2mx + m)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m < 0$; $m > 1$.

B. $0 < m < 1$.

C. $m \leq 0$; $m \geq 1$.

D. $0 \leq m \leq 1$.

Lời giải. Ycgt $\Leftrightarrow x^2 - 2mx + m > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' = m^2 - m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1$. **Chọn B.**

Câu 33. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{e^x}{e^x - 1}$.

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. B. $D = \mathbb{R}$. C. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \{e\}$.

Lời giải. Hàm số xác định $\Leftrightarrow e^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$. **Chọn A.**

Câu 34. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x} - \frac{9}{4}}$.

- A. $D = [0; 3]$. B. $D = (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.
C. $D = [1; 2]$. D. $D = [-1; 2]$.

Lời giải. Hàm số xác định $\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x} \geq \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \Leftrightarrow x^2 - 3x \leq -2$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$. **Chọn C.**

Câu 35. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^{x^2}$.

- A. $y' = \frac{x \cdot 2^{1+x^2}}{\ln 2}$. B. $y' = x \cdot 2^{1+x^2} \cdot \ln 2$. C. $y' = 2^x \cdot \ln 2^x$. D. $y' = \frac{x \cdot 2^{1+x}}{\ln 2}$.

Lời giải. Áp dụng công thức $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$, ta có $y' = (x^2)' \cdot 2^{x^2} \cdot \ln 2$

$= 2x \cdot 2^{x^2} \cdot \ln 2 = x \cdot 2^{1+x^2} \cdot \ln 2$. **Chọn B.**

Câu 36. Tính đạo hàm của hàm số $y = e^{\sqrt{2x}}$.

- A. $y' = \frac{e^{\sqrt{2x}}}{2\sqrt{2x}}$. B. $y' = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{2x}}$. C. $y' = \frac{e^{\sqrt{2x}}}{\sqrt{2x}}$. D. $y' = \sqrt{2x} \cdot e^{\sqrt{2x}}$.

Lời giải. Ta có $y' = (\sqrt{2x})' \cdot e^{\sqrt{2x}} = \frac{2}{2\sqrt{2x}} \cdot e^{\sqrt{2x}} = \frac{e^{\sqrt{2x}}}{\sqrt{2x}}$. **Chọn C.**

Câu 37. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_2(2x+1)$.

- A. $y' = \frac{2}{2x+1}$. B. $y' = \frac{1}{2x+1}$. C. $y' = \frac{2}{(2x+1)\ln 2}$. D. $y' = \frac{1}{(2x+1)\ln 2}$.

Lời giải. Áp dụng $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$, ta được $y' = \frac{(2x+1)'}{(2x+1) \cdot \ln 2} = \frac{2}{(2x+1) \cdot \ln 2}$. **Chọn C.**

Câu 38. Cho hàm số $y = e^{-x} \cdot \sin x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $y' + 2y'' - 2y = 0$. B. $y'' + 2y' + 2y = 0$.
C. $y'' - 2y' - 2y = 0$. D. $y' - 2y'' + 2y = 0$.

Lời giải. Ta có $y' = -e^{-x} \cdot \sin x + e^{-x} \cdot \cos x = e^{-x}(\cos x - \sin x)$.

Lại có $y'' = -e^{-x}(\cos x - \sin x) + e^{-x}(-\sin x - \cos x) = -2e^{-x} \cdot \cos x$

Ta thấy $y'' + 2y' + 2y = -2e^{-x} \cdot \cos x + 2e^{-x}(\cos x - \sin x) + 2e^{-x} \cdot \sin x = 0$. **Chọn B.**

Câu 39. Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $f(x) = e^{2-3x}$ trên đoạn $[0; 2]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $m + M = 1$. B. $M - m = e$. C. $M \cdot m = \frac{1}{e^2}$. D. $\frac{M}{m} = e^2$.

Lời giải. Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[0; 2]$.

Đạo hàm $f'(x) = -3e^{2-3x} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $[0; 2]$.

Suy ra $\begin{cases} \max_{[0;2]} f(x) = f(0) = e^2 \\ \min_{[0;2]} f(x) = f(2) = \frac{1}{e^4} \end{cases} \longrightarrow m = \frac{1}{e^4}, M = e^2 \longrightarrow M \cdot m = \frac{1}{e^2}$. **Chọn C.**

Câu 40. Biết rằng hàm số $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; e]$ tại $x = x_0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $x_0 \in \left[1; \frac{3}{e}\right]$. B. $x_0 \in \left(\frac{3}{e}; \sqrt{e}\right]$. C. $x_0 \in [\sqrt{e}; 2]$. D. $x_0 \in (2; e]$.

Lời giải. Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[1; e]$.

Đạo hàm $f'(x) = (\sqrt{x})' \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot (\ln x)' = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$.

Suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 2 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \notin [1; e]$.

Ta có $\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(e) = \sqrt{e} \end{cases} \longrightarrow$ GTLN của hàm số bằng $\sqrt{e}$, đạt tại $x = e$. **Chọn D.**

Câu 41. Tính giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y = xe^x$.

- A. $y_{CT} = \frac{1}{e}$. B. $y_{CT} = e$. C. $y_{CT} = -\frac{1}{e}$. D. $y_{CT} = -1$.

Lời giải. Hàm số xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = e^x + xe^x = e^x(1+x) \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 1+x = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		0	
y	0		$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số có giá trị cực tiểu $y_{CT} = y(-1) = -\frac{1}{e}$. **Chọn C.**

Câu 42. Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

- A. $y = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} x$. B. $y = \log_{\frac{e}{3}} x$. C. $y = \log_{\frac{e}{2}} x$. D. $y = \log_{\frac{\pi}{4}} x$.

Lời giải. Áp dụng lý thuyết

"Hàm số $y = \log_a x$ đồng biến khi $a > 1$, nghịch biến khi $0 < a < 1$ ".

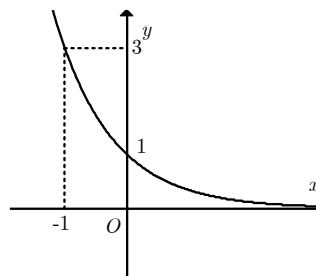
Trong các hàm số đã cho chỉ có hàm số $y = \log_{\frac{e}{2}} x$ đồng biến vì cơ số $a = \frac{e}{2} > 1$. **Chọn C.**

Câu 43. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hàm số $y = (a^2 - 3a + 3)^x$ đồng biến.

- A. $a = 1$. B. $a = 2$.
C. $a \in (1; 2)$. D. $a \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Lời giải. Hàm số đồng biến khi $a^2 - 3a + 3 > 1 \Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 1 \\ a > 2 \end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 44. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

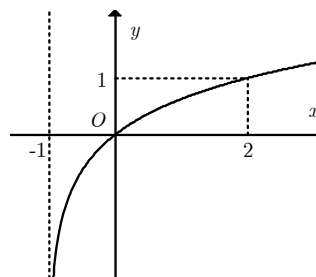


- A. $y = (\sqrt{3})^x$. B. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
C. $y = 2^x + \frac{5}{2}$. D. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Lời giải. Dựa vào hình dáng đồ thị từ trái sang phải ta thấy: x tăng nhưng y giảm. Suy ra hàm số tương ứng của đồ thị là hàm nghịch biến. Loại A, C.

Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(-1; 3)$ nên chỉ có D thỏa mãn. **Chọn D.**

Câu 45. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



- A. $y = \log_2 x$. B. $y = \log_2 (x + 1)$.
C. $y = \log_3 x + 1$. D. $y = \log_3 (x + 1)$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị thấy có tiệm cận đứng $x = -1$. Loại đáp án A, C.

Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(2; 1)$ nên chỉ có D thỏa mãn. **Chọn D.**

2. Phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit

Câu 1. Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = 2^{-x} + 3$ và đường thẳng $y = 11$.

- A. (3;11). B. (-3;11). C. (4;11). D. (-4;11).

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $2^{-x} + 3 = 11 \Leftrightarrow 2^{-x} = 8$
 $\Leftrightarrow 2^{-x} = 2^3 \Leftrightarrow -x = 3 \Leftrightarrow x = -3$ Vậy tọa độ giao điểm cần tìm là (-3;11). **Chọn B.**

Câu 2. Nghiệm của phương trình $3^{x-1} = 27$ là

- A. $x = 4$. B. $x = 3$. C. $x = 2$. D. $x = 1$.

Lời giải. Ta có $3^{x-1} = 27 \Leftrightarrow 3^{x-1} = 3^3 \Leftrightarrow x-1 = 3 \Leftrightarrow x = 4$. **Chọn A.**

Câu 3. Tính tổng T tất cả các nghiệm của phương trình $e^{x^2-3x} = \frac{1}{e^2}$.

- A. $T = 3$. B. $T = 1$. C. $T = 2$. D. $T = 0$.

Lời giải. Ta có $e^{x^2-3x} = \frac{1}{e^2} \Leftrightarrow e^{x^2-3x} = e^{-2} \Leftrightarrow x^2 - 3x = -2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

$\longrightarrow S = \{1; 2\} \longrightarrow T = 1 + 2 = 3$. **Chọn A.**

Câu 4. Biết rằng phương trình $3^{2018} - 2^{x \log_8 9} = 0$ có nghiệm duy nhất $x = x_0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. x_0 là số nguyên tố. B. x_0 là số chính phương.
 C. x_0 chia hết cho 3. D. x_0 là số chẵn.

Lời giải. Phương trình $\longleftrightarrow 2^{x \log_8 9} = 3^{2018} \longleftrightarrow 2^{\frac{2x}{3} \log_2 3} = 3^{2018}$
 $\longleftrightarrow \left(2^{\log_2 3}\right)^{\frac{2x}{3}} = 3^{2018} \longleftrightarrow 3^{\frac{2x}{3}} = 3^{2018} \longleftrightarrow \frac{2x}{3} = 2018 \longleftrightarrow x = 3027$. **Chọn C.**

Câu 5. Biết rằng phương trình $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{3}{2}} - 3^{2x-1}$ có nghiệm duy nhất $x = x_0$. Tính giá trị biểu thức $P = x_0 + \frac{1}{2} \log_{\frac{9}{2}} 2$.

- A. $P = 1$. B. $P = 1 - \frac{1}{2} \log_{\frac{9}{2}} 2$. C. $P = 1 - \log_{\frac{9}{2}} 2$. D. $P = \frac{1}{2} \log_{\frac{9}{2}} 2$.

Lời giải. Ta có $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{3}{2}} - 3^{2x-1} \longleftrightarrow 9^x + 3^{2x-1} = 2^{x+\frac{3}{2}} + 2^{x+\frac{1}{2}}$
 $\Leftrightarrow 9^x + \frac{1}{3} \cdot 9^x = 2\sqrt{2} \cdot 2^x + \sqrt{2} \cdot 2^x \Leftrightarrow \frac{4}{3} \cdot 9^x = 3\sqrt{2} \cdot 2^x \Leftrightarrow \left(\frac{9}{2}\right)^x = \frac{9}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{9}{2}} \frac{9}{2\sqrt{2}} = x_0$.

Khi đó $P = x_0 + \frac{1}{2} \log_{\frac{9}{2}} 2 = \log_{\frac{9}{2}} \frac{9}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \log_{\frac{9}{2}} 2 \stackrel{\text{CASIO}}{=} 1$. **Chọn A.**

Câu 6. Cho phương trình $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$. Khi đặt $t = 2^x$, ta được:

- A. $t^2 + t - 3 = 0$. B. $2t^2 - 3 = 0$. C. $t^2 + 2t - 3 = 0$. D. $4t - 3 = 0$.

Lời giải. Ta có $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 3 = 0$.

Khi đặt $t = 2^x$, thay vào phương trình ta được $t^2 + 2t - 3 = 0$. **Chọn C.**

Câu 7. Tính P là tích tất cả các nghiệm của phương trình $3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$.

- A. $P = 1$. B. $P = -1$. C. $P = 0$. D. $P = 9$.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow 3 \cdot 3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$.

Đặt $t = 3^x > 0$. Phương trình trở thành $3t^2 - 10t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$ hoặc $t = 3$.

Với $t = \frac{1}{3} \longrightarrow 3^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -1 = x_1$.

Với $t = 3 \longrightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1 = x_2$.

Vậy $P = x_1 x_2 = -1$. **Chọn B.**

Câu 8. Phương trình $4^{x^2+x} + 2^{x^2+x+1} - 3 = 0$ có bao nhiêu nghiệm không âm?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải. Phương trình tương đương với $4^{x^2+x} + 2 \cdot 2^{x^2+x} - 3 = 0$.

Đặt $t = 2^{x^2+x}$, $t > 0$. Phương trình trở thành $t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \text{ (loại)} \end{cases}$.

Với $t = 1$, ta được $2^{x^2+x} = 1 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$.

Vậy chỉ có duy nhất nghiệm $x = 0$ là nghiệm không âm. **Chọn B.**

Câu 9. Tính tổng T tất cả các nghiệm của phương trình $4^{\tan^2 x} + 2^{\frac{1}{\cos^2 x}} - 3 = 0$ trên đoạn $[0; 3\pi]$.

- A. $T = \pi$. B. $T = \frac{3\pi}{2}$. C. $T = 6\pi$. D. $T = 0$.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ x \in [0; 3\pi] \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \right\}$.

Ta có $4^{\tan^2 x} + 2^{\frac{1}{\cos^2 x}} - 3 = 0 \Leftrightarrow (2^{\tan^2 x})^2 + 2^{\tan^2 x+1} - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (2^{\tan^2 x})^2 + 2 \cdot 2^{\tan^2 x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\tan^2 x} = 1 \\ 2^{\tan^2 x} = -3 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow 2^{\tan^2 x} = 1 \Leftrightarrow \tan^2 x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vì $0 \leq x \leq 3\pi \longrightarrow x = \{0; \pi; 2\pi; 3\pi\}$ (thỏa mãn) $\longrightarrow T = 6\pi$. **Chọn C.**

Câu 10. Tính P là tổng bình phương tất cả các nghiệm của phương trình $2^{x-1} + 2^{2-x} = 3$.

- A. $P = 1$. B. $P = 3$. C. $P = 5$. D. $P = 9$.

Lời giải. Ta có $2^{x-1} + 2^{2-x} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2^x + \frac{4}{2^x} = 3$.

Đặt $t = 2^x, t > 0$. Phương trình trở thành $\frac{1}{2}t + \frac{4}{t} = 3 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 4 \end{cases}$

$$\longrightarrow \begin{cases} 2^x = 2 \\ 2^x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 = x_1 \\ x = 2 = x_2 \end{cases} \longrightarrow P = x_1^2 + x_2^2 = 5. \text{ Chọn C.}$$

Câu 11. Gọi s là tập nghiệm của phương trình $5^{1+x^2} - 5^{1-x^2} = 24$. Tập s có bao nhiêu phần tử?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow 5 \cdot 5^{x^2} - \frac{5}{5^{x^2}} - 24 = 0$.

Đặt $t = 5^{x^2}, t \geq 1$. Phương trình trở thành $\Leftrightarrow 5t - \frac{5}{t} - 24 = 0 \Leftrightarrow 5t^2 - 24t - 5 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = -\frac{1}{5} \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow t = 5 \longrightarrow 5^{x^2} = 5 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \longrightarrow S = \{-1; 1\}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 12. Gọi x_1, x_2 lần lượt là nghiệm nhỏ nhất và nghiệm lớn nhất của phương trình $2^{x^2+x-1} - 2^{x^2-1} = 2^{2x} - 2^x$. Tính $S = x_1 + x_2$.

- A. $S = 0$. B. $S = 1$. C. $S = \frac{1}{2}$. D. $S = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow 2^{x^2-1}(2^x - 1) = 2^x(2^x - 1) \Leftrightarrow (2^x - 1)(2^{x^2-1} - 2^x) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x - 1 = 0 \\ 2^{x^2-1} - 2^x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 1 \\ 2^{x^2-1} = 2^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Câu 13. Tập nghiệm của bất phương trình $\log x \geq 1$ là

- A. $(10; +\infty)$. B. $(0; +\infty)$. C. $[10; +\infty)$. D. $(-\infty; 10)$.

Lời giải. Ta có: $\log x \geq 1 \Leftrightarrow \log x \geq \log 10 \Leftrightarrow x \geq 10$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $\log x \geq 1$ là $[10; +\infty)$. **Chọn C**

Câu 14. Tìm tất cả các giá trị của x thỏa mãn $\left(\tan \frac{\pi}{7}\right)^{x^2-x-9} \leq \left(\tan \frac{\pi}{7}\right)^{x-1}$.

- A. $x \leq -2$. B. $x \geq 4$.
C. $-2 \leq x \leq 4$. D. $x \leq -2; x \geq 4$.

Lời giải. Do $\tan \frac{\pi}{7} < 1$ nên bất phương trình $\Leftrightarrow x^2 - x - 9 \geq x - 1$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq -2 \end{cases}. \text{ Chọn D}$$

Câu 15. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của x thỏa mãn bất phương trình $8^x \cdot 2^{1-x^2} > (\sqrt{2})^{2x}$?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Lời giải. Bất phương trình $8^x \cdot 2^{1-x^2} > (\sqrt{2})^{2x} \Leftrightarrow 2^{3x} \cdot 2^{1-x^2} > 2^x \Leftrightarrow 2^{3x+1-x^2} > 2^x$

$$\Leftrightarrow 3x+1-x^2 > x \Leftrightarrow x^2-2x-1 < 0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2})$.

Suy ra các giá trị nguyên dương thuộc S là $\{1; 2\}$. **Chọn A.**

Câu 16. Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $3^{1-x} + 2 \cdot (\sqrt{3})^{2x} \leq 7$. Khi đó S có dạng $[a; b]$ với $a < b$. Tính $P = b + a \cdot \log_2 3$.

- A. $P = 2$. B. $P = 1$. C. $P = 0$. D. $P = 2 \log_2 3$.

Lời giải. Bất phương trình $\Leftrightarrow \frac{3}{3^x} + 2 \cdot 3^x \leq 7 \Leftrightarrow 2 \cdot 3^{2x} - 7 \cdot 3^x + 3 \leq 0$.

Đặt $t = 3^x$, $t > 0$. Bất phương trình trở thành $2t^2 - 7t + 3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq t \leq 3$.

$$\longrightarrow \frac{1}{2} \leq 3^x \leq 3 \Leftrightarrow -\log_3 2 \leq x \leq 1 \longrightarrow \begin{cases} a = -\log_3 2 \\ b = 1 \end{cases} \longrightarrow P = b + a \cdot \log_2 3 = 0. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 17. Gọi a, b lần lượt là nghiệm nhỏ nhất và nghiệm lớn nhất của bất phương trình $3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 \leq 0$. Tính $P = b - a$.

- A. $P = 1$. B. $P = \frac{3}{2}$. C. $P = 2$. D. $P = \frac{5}{2}$.

Lời giải. Bất phương trình tương đương với $3 \cdot 3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 3 \leq 0$.

Đặt $t = 3^x$, $t > 0$. Bất phương trình trở thành $3t^2 - 10t + 3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq t \leq 3$.

$$\longrightarrow \frac{1}{3} \leq 3^x \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \longrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \longrightarrow P = b - a = 2. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 18. Phương trình $\log_2(x-3) + 2 \log_4 3 \cdot \log_3 x = 2$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x-3 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$.

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow \log_2(x-3) + 2 \log_4 x = 2 \Leftrightarrow \log_2(x-3) + \log_2 x = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2[(x-3)x] = 2 \Leftrightarrow (x-3)x = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (loại)} \\ x = 4 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}. \text{ **Chọn A.**}$$

Câu 19. Biết rằng phương trình $2\log(x+2) + \log 4 = \log x + 4\log 3$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$). Tính $P = \frac{x_1}{x_2}$.

- A. $P = 4$. B. $P = \frac{1}{4}$. C. $P = 64$. D. $P = \frac{1}{64}$.

Lời giải. Điều kiện: $x > 0$.

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \log(x+2)^2 + \log 4 = \log x + \log 81 \Leftrightarrow \log[4(x+2)^2] = \log(81x)$$

$$\Leftrightarrow 4(x+2)^2 = 81x \Leftrightarrow 4x^2 - 65x + 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} = x_1 \text{ (thỏa mãn)} \\ x = 16 = x_2 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases} \longrightarrow P = \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{4 \cdot 16} = \frac{1}{64}.$$

Câu 20. Số nghiệm của phương trình $\log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = 2$ là:

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Nhiều hơn 2.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x > 0 \Leftrightarrow x > 1 \\ \log_4 x > 0 \end{cases}$

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2(\log_2 x) + \log_2\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2(\log_2 x) + \log_2 \frac{1}{2} + \log_2(\log_2 x) = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2(\log_2 x) - 1 + \log_2(\log_2 x) = 2 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\log_2(\log_2 x) = 3 \Leftrightarrow \log_2(\log_2 x) = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = 4 \Leftrightarrow x = 16 \text{ (thỏa mãn)}. \text{ Vậy phương trình có nghiệm duy nhất. Chọn B.}$$

Câu 21. Biết rằng phương trình $\log_3(3^{x+1} - 1) = 2x + \log_{\frac{1}{3}} 2$ có hai nghiệm x_1 và x_2 . Hãy tính tổng $S = 27^{x_1} + 27^{x_2}$.

- A. $S = 180$. B. $S = 45$. C. $S = 9$. D. $S = 252$.

Lời giải. Điều kiện: $3^{x+1} - 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \log_3(3^{x+1} - 1) = 2x - \log_3 2 \Leftrightarrow \log_3(3^{x+1} - 1) + \log_3 2 = 2x$$

$$\Leftrightarrow \log_3[(3^{x+1} - 1) \cdot 2] = 2x \Leftrightarrow (3^{x+1} - 1) \cdot 2 = 3^{2x} \Leftrightarrow 6 \cdot 3^x - 2 = 3^{2x}$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x} - 6 \cdot 3^x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{Viet}} \begin{cases} 3^{x_1} + 3^{x_2} = 6 \\ 3^{x_1} \cdot 3^{x_2} = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } S = 27^{x_1} + 27^{x_2} = (3^{x_1} + 3^{x_2})^3 - 3 \cdot 3^{x_1} \cdot 3^{x_2} (3^{x_1} + 3^{x_2}) = 6^3 - 3 \cdot 2 \cdot 6 = 180. \text{ Chọn A.}$$

Câu 22. Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số $y = \log_3 x$. Tìm điều kiện của x_0 để điểm M nằm phía trên đường thẳng $y = 2$.

- A. $x_0 > 0$. B. $x_0 > 9$. C. $x_0 > 2$. D. $x_0 < 2$.

Lời giải. Đồ thị $y = \log_3 x$ nằm ở phía trên đường thẳng $y = 2$ khi $\log_3 x > 2 \Leftrightarrow x > 9$. **Chọn B.**

Câu 23. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_a(x^2 - x - 2) > \log_a(-x^2 + 2x + 3)$, biết $\frac{9}{4}$ thuộc S .

- A. $S = \left(2; \frac{5}{2}\right)$. B. $S = \left(-1; \frac{5}{2}\right)$. C. $S = (-\infty; -1)$. D. $S = \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải. Điều kiện:
$$\begin{cases} x^2 - x - 2 > 0 \\ -x^2 + 2x + 3 > 0 \\ 0 < a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 3 \\ 0 < a \neq 1 \end{cases}.$$

Do $x = \frac{9}{4}$ là nghiệm của bất phương trình đã cho nên $\log_a \frac{13}{16} > \log_a \frac{39}{16} \longrightarrow 0 < a < 1$.

Vì $0 < a < 1$ nên bất phương trình $\Leftrightarrow x^2 - x - 2 < -x^2 + 2x + 3$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 5 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < \frac{5}{2} \xrightarrow{\text{dk: } 2 < x < 3} 2 < x < \frac{5}{2}. \quad \textbf{Chọn A.}$$

Câu 24. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\ln x^2 > \ln(4x - 4)$.

- A. $S = (2; +\infty)$. B. $S = (1; +\infty)$. C. $S = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. D. $S = (1; +\infty) \setminus \{2\}$.

Lời giải. Điều kiện:
$$\begin{cases} 4x - 4 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

Bất phương trình $\Leftrightarrow x^2 > 4x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 > 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

Đối chiếu điều kiện, ta được tập nghiệm của bpt là $S = (1; +\infty) \setminus \{2\}$. **Chọn D.**

Câu 25. Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,3}(4x^2) \geq \log_{0,3}(12x - 5)$. Kí hiệu m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của tập S . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $m + M = 3$. B. $m + M = 2$. C. $M - m = 3$. D. $M - m = 1$.

Lời giải. Điều kiện: $x \geq \frac{5}{12}$.

Bất phương trình $\Leftrightarrow 4x^2 \leq 12x - 5 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 5 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$ (thỏa mãn).

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right]$.

Suy ra $m = \frac{1}{2}$ và $M = \frac{5}{2}$ nên $m + M = 3$. **Chọn A.**

Câu 26. Có bao nhiêu số nguyên dương x thỏa mãn bất phương trình $\log(x - 40) + \log(60 - x) < 2$?

- A. 20. B. 18. C. 21. D. 19.

Lời giải. Điều kiện: $40 < x < 60$.

$$\text{Bất phương trình } \Leftrightarrow \log[(x-40)(60-x)] < 2$$

$$\Leftrightarrow (x-40)(60-x) < 10^2 \Leftrightarrow x^2 - 100x + 2500 > 0 \Leftrightarrow (x-50)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 50.$$

Kết hợp với điều kiện, ta được $\begin{cases} 40 < x < 60 \\ x \neq 50 \end{cases} \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}^+} x \in \{41; \dots; 59\} \setminus \{50\}$. **Chọn B.**

Câu 27. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2^{2x-1} + m^2 - m = 0$ có nghiệm.

- A. $m < 0$. B. $0 < m < 1$. C. $m < 0; m > 1$. D. $m > 1$.

Lời giải. Ta có $2^{2x-1} + m^2 - m = 0 \Leftrightarrow 2^{2x-1} = -m^2 + m$.

Vì $2x-1$ có miền giá trị là $\mathbb{R}$ nên 2^{2x-1} có miền giá trị là $(0; +\infty)$, do đó phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -m^2 + m > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1$. **Chọn B.**

Chú ý: Cần phải nói rõ $2x-1$ có miền giá trị là $\mathbb{R}$ thì mới kết luận được $y = 2^{2x-1}$ có miền giá trị là $(0; +\infty)$. Sai lầm hay gặp là phương trình $a^x = m$ có nghiệm $\Leftrightarrow m > 0$ thì đúng, còn phương trình $a^u = m$ có nghiệm $\Leftrightarrow m > 0$ nói chung không đúng. Ví dụ như hàm số $y = 2^{x^2+1}$ có miền giá trị là $[2; +\infty)$.

Câu 28. Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 1$.

- A. $m = 6$. B. $m = -3$. C. $m = 3$. D. $m = 1$.

Lời giải. Ta có $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + m = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - 6 \cdot 3^x + m = 0$.

Đặt $t = 3^x > 0$, phương trình trở thành $t^2 - 6t + m = 0$. (*)

Để phương trình đã cho có hai nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - m \geq 0 \\ 6 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 9.$$

Theo định lý Viet, ta có $3^{x_1} \cdot 3^{x_2} = m \Leftrightarrow 3^{x_1+x_2} = m \Leftrightarrow 3 = m$. (thỏa). **Chọn C.**

Cách trắc nghiệm. Thử lần lượt 4 đáp án để chọn.

Câu 29. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x + 3m - 2 < 0$ có nghiệm thực.

- A. $m < 1$. B. $m \leq 1$. C. $m < 0$. D. $m < \frac{2}{3}$.

Lời giải. Điều kiện: $x > 0$. Đặt $t = \log_2 x$, với $x > 0$ suy ra $t \in (-\infty; +\infty)$.

Bất phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2t + 3m - 2 < 0 \Leftrightarrow 3m < -t^2 + 2t + 2$ (*).

Ycbt $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow 3m < \max_{(-\infty; +\infty)} g(t)$ với $g(t) = -t^2 + 2t + 2$.

Ta có $g(t) = -t^2 + 2t + 2 = 3 - (t-1)^2 \leq 3, \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra $\max_{(-\infty; +\infty)} g(t) = 3$.

Từ đó suy ra $3m < 3 \Leftrightarrow m < 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn A.**

Câu 30. Tính giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - m \log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 = 81$.

A. $m = 81$.

B. $m = 44$.

C. $m = -4$.

D. $m = 4$.

.....

CHỦ ĐỀ 3: NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN, ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa nguyên hàm: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (K là khoảng, đoạn hay nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

2. Bảng nguyên hàm của một số hàm số cơ bản

Hàm cơ bản	Hàm hợp
$\int dx = x + C$	
$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b} + C$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1)$	$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (0 < a \neq 1)$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + C, (0 < a \neq 1)$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$

3. Phương pháp tính nguyên hàm

3.1. Phương pháp đổi biến số

Nếu $\int f(u)du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì
 $\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C$

Hệ quả: Nếu $u = ax + b (a \neq 0)$ thì ta có $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C$

3.2. Phương pháp nguyên hàm từng phần

Định lý 2: Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên K thì

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx \text{ Hay } \int u dv = uv - \int v du$$

4. Tích phân

4.1. Định nghĩa $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

4.2. Tính chất của tích phân

a. $\int_a^a f(x)dx = 0$

d. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

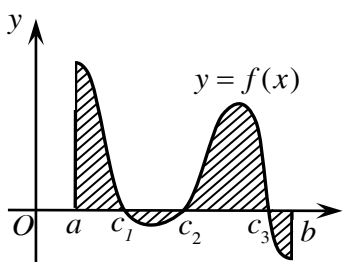
b. $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \quad (a < b < c)$

e. $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx \quad (k \in \mathbb{R})$

c. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

5. Ứng dụng của tích phân

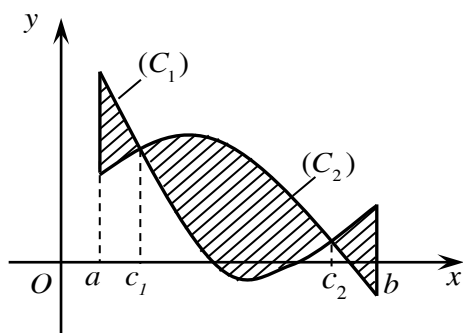
a) **Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$:**



$$(H) \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases}$$

$$S = \int_a^b |f(x)|dx$$

b) **Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f_1(x) (C_1)$, $y = f_2(x) (C_2)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$:**



$$(H) \begin{cases} (C_1): y = f_1(x) \\ (C_2): y = f_2(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases}$$

$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$$

B. LUYỆN TẬP

Câu 1. Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm bất kỳ của $f(x)$ trên $(a; b)$ thì $\int f(x) dx = F(x) + C$ với C là hằng số.
- B. Mọi hàm số liên tục trên khoảng $(a; b)$ đều có nguyên hàm trên khoảng $(a; b)$.
- C. $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a; b) \Leftrightarrow f'(x) = F(x), \forall x \in (a; b)$.
- D. $\left(\int f(x) dx\right)' = f(x)$.

Lời giải. Chọn C. Sửa lại cho đúng là:

" $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a; b) \Leftrightarrow F'(x) = f(x), \forall x \in (a; b)$ ".

Câu 2. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu

- A. $F'(x) = -f(x), \forall x \in K$. B. $f'(x) = F(x), \forall x \in K$.
- C. $F'(x) = f(x), \forall x \in K$. D. $f'(x) = -F(x), \forall x \in K$.

Lời giải. Theo lý thuyết nguyên hàm: Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K khi và chỉ khi $F'(x) = f(x), \forall x \in K$. **Chọn C.**

Câu 3. Tìm hàm số $F(x)$ biết $F'(x) = 3x^2 + 2x + 1$ và đồ thị hàm số $y = F(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng e .

- A. $F(x) = x^2 + x + e$. B. $F(x) = \cos 2x + e - 1$.
- C. $F(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. D. $F(x) = x^3 + x^2 + x + e$.

Lời giải. Ta có $F(x) = \int (3x^2 + 2x + 1) dx = x^3 + x^2 + x + C$.

Đồ thị $y = F(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng e nên ta có $F(0) = e \Leftrightarrow C = e$.

Vậy $F(x) = x^3 + x^2 + x + e$. **Chọn D.**

Câu 4. Biết rằng $F(x) = ax^3 + (a+b)x^2 + (2a-b+c)x + 1$ là một nguyên hàm của $f(x) = 3x^2 + 6x + 2$. Tính tổng $S = a + b + c$.

- A. $S = 5$. B. $S = 4$. C. $S = 3$. D. $S = 2$.

Lời giải. Ta có $\int (3x^2 + 6x + 2) dx = x^3 + 3x^2 + 2x + C$.

Suy ra $F(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

$$\text{Đồng nhất ta được } \begin{cases} a = 1 \\ a + b = 3 \\ 2a - b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases} \longrightarrow a + b + c = 5. \text{ Chọn A.}$$

Câu 5. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x^3 - \frac{1}{x^2} + 3x$ và thỏa mãn

$$5F(1) + F(2) = 43. \text{ Tính } F(2).$$

- A. $F(2) = \frac{151}{4}$. B. $F(2) = 23$. C. $F(2) = \frac{45}{2}$. D. $F(2) = \frac{86}{7}$.

Lời giải. Ta có $F(x) = \int \left(4x^3 - \frac{1}{x^2} + 3x \right) dx = x^4 + \frac{1}{x} + \frac{3}{2}x^2 + C$.

$$\text{Theo giả thiết } 5F(1) + F(2) = 43 \longrightarrow 5\left(\frac{7}{2} + C\right) + \frac{45}{2} + C = 43 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Suy ra } F(x) = x^4 + \frac{1}{x} + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2} \longrightarrow F(2) = 2^4 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot 2^2 + \frac{1}{2} = 23. \text{ Chọn B.}$$

Câu 6. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) \cdot g(x)$, biết $\int f(x) dx = x + C$,

$$\int g(x) dx = \frac{x^2}{4} + C \text{ và } F(2) = 5.$$

- A. $F(x) = \frac{x^2}{4} + 4$. B. $F(x) = \frac{x^2}{4} + 5$. C. $F(x) = \frac{x^3}{4} + 5$. D. $F(x) = \frac{x^3}{4} + 3$.

Lời giải. Ta có $\int f(x) dx = x + C \longrightarrow f(x) = 1$ và $\int g(x) dx = \frac{x^2}{4} + C \longrightarrow g(x) = \frac{1}{2}x$.

$$\text{Khi đó } \int f(x) \cdot g(x) dx = \int \frac{1}{2}x dx = \frac{1}{4}x^2 + C.$$

$$\text{Theo giả thiết } F(2) = 5 \longrightarrow \frac{1}{4} \cdot 2^2 + C = 5 \Leftrightarrow C = 4.$$

$$\text{Suy ra } F(x) = \frac{x^2}{4} + 4. \text{ Chọn A.}$$

Câu 7. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3x+1}$ và thỏa $F(0) = \frac{e}{3}$. Tính $\ln^3[3F(1)]$.

- A. $\ln^3[3F(1)] = 64$. B. $\ln^3[3F(1)] = -8$.
C. $\ln^3[3F(1)] = 81$. D. $\ln^3[3F(1)] = 27$.

Lời giải. Ta có $\int e^{3x+1} dx = \frac{1}{3}e^{3x+1} + C$.

Theo giả thiết $F(0) = \frac{e}{3} \longrightarrow \frac{e}{3} + C = \frac{e}{3} \Leftrightarrow C = 0$.

Suy ra $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x+1} \longrightarrow \ln^3[3F(1)] = \ln^3\left[3 \cdot \frac{1}{3}e^4\right] = 64$. **Chọn A.**

Câu 8. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan 2x$ thỏa mãn $F(0) = 0$. Tính $T = \sqrt{2}e^{F(\frac{\pi}{6})} - e^{F(\frac{\pi}{2})}$.

- A. $T = 1$. B. $T = \sqrt{2}$. C. $T = -\sqrt{2}$. D. $T = 0$.

Lời giải. Ta có $\int \tan 2x \, dx = \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \, dx$.

Đặt $t = \cos 2x \longrightarrow dt = -2 \sin 2x \, dx \rightarrow \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} dt$.

Khi đó $\int \tan 2x \, dx = \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \, dx = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2} \cdot \ln|t| + C = -\frac{1}{2} \ln|\cos 2x| + C$.

Theo giả thiết $F(0) = 0 \longrightarrow C = 0$.

Suy ra $F(x) = -\frac{1}{2} \ln|\cos 2x| \longrightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ và $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(\sqrt{2})$.

Vậy $T = \sqrt{2} \cdot e^{\ln \sqrt{2}} - e^0 = 2 - 1 = 1$. **Chọn A.**

Câu 9. Nếu $\int_0^1 f(x) \, dx = 4$ thì $\int_0^1 2f(x) \, dx$ bằng

- A. 16. B. 4. C. 2. D. 8.

Lời giải. $\int_0^1 2f(x) \, dx = 2 \int_0^1 f(x) \, dx = 2 \cdot 4 = 8$. **Chọn D.**

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\int_0^3 (3x+2)f'(x) \, dx = 12$ và

$11f(3) - 2f(0) = 6$. Tính $I = \int_0^3 f(x) \, dx$.

- A. $I = -2$. B. $I = 6$. C. $I = 2$. D. $I = -6$.

Lời giải: đặt $u = 3x+2, dv = f'(x) \, dx$ **Chọn A**

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(x) + (x+1) \cdot f'(x) = 3x^2$ và $f(1) = 3$. Tính $f(3)$.

- A. $f(3) = 8$. B. $f(3) = 28$. C. $f(3) = 9$. D. $f(3) = 3$.

Lời giải: Ta có

$$[(x+1)f(x)]' = 3x^2$$

$$(x+1)f(x) = \int 3x^2 dx = x^3 + C$$

$$\text{Do gt} \Rightarrow C = 5 \Rightarrow f(3) = 8$$

Chọn A

Câu 12. Cho $F(x) = -\frac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

$$\text{A. } \int f'(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{5x^5} + C.$$

$$\text{B. } \int f'(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{5x^5} + C.$$

$$\text{C. } \int f'(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C.$$

$$\text{D. } \int f'(x)\ln x dx = -\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C.$$

Lời giải. Ta có $F'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2}{x^6} = \frac{1}{x^4} = \frac{f(x)}{x} \longrightarrow f(x) = \frac{1}{x^3}$.

$$\text{Xét } \int f'(x)\ln x dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = f(x) \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } \int f'(x)\ln x dx = \ln x \cdot f(x) - \int \frac{f(x)}{x} dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C. \text{ Chọn C.}$$

Câu 13. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x.e^{-x}$ thỏa mãn điều kiện $F(0) = -1$. Tính tổng S các nghiệm của phương trình $F(x) + x + 1 = 0$.

$$\text{A. } S = -3.$$

$$\text{B. } S = 0.$$

$$\text{C. } S = 2.$$

$$\text{D. } S = -1.$$

Lời giải. Ta có $\int x.e^{-x} dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}.$

$$\text{Khi đó } \int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C.$$

$$\text{Theo giả thiết } F(0) = -1 \longrightarrow -1 + C = -1 \Leftrightarrow C = 0.$$

$$\text{Suy ra } F(x) = -x e^{-x} - e^{-x} = -e^x (x+1).$$

$$\text{Xét phương trình } F(x) + x + 1 = 0 \Leftrightarrow -e^x (x+1) + x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(-e^x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases} \longrightarrow S = -1 + 0 = -1. \text{ Chọn D.}$$

Câu 14. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \sin x$ và thỏa mãn $F(\pi) = 2\pi$. Tính giá trị của biểu thức $T = 2F(0) - 8F(2\pi)$.

$$\text{A. } T = 6\pi.$$

$$\text{B. } T = 4\pi.$$

$$\text{C. } T = 8\pi.$$

$$\text{D. } T = 10\pi.$$

Lời giải. Ta có $\int x \sin x dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}.$

$$\text{Khi đó } \int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

$$\text{Theo giả thiết } F(\pi) = 2\pi \longrightarrow \pi + C = 2\pi \Leftrightarrow C = \pi.$$

Suy ra $F(x) = -x \cos x + \sin x + \pi \longrightarrow \begin{cases} F(0) = \pi \\ F(2\pi) = -\pi \end{cases} \longrightarrow T = 2\pi - 8 \cdot (-\pi) = 10\pi$. **Chọn D.**

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^6 f(x) dx = 4$ và $\int_2^6 f(x) dx = -3$.

Tính tích phân $I = \int_0^2 [f(v) - 3] dv$.

A. $I = 1$. B. $I = 2$. C. $I = 4$. D. $I = 3$.

Lời giải. Ta có $I = \int_0^2 [f(v) - 3] dv = \int_0^2 f(v) dv - 3v \Big|_0^2 = \int_0^2 f(v) dv - 6$.

$$\begin{aligned} \text{Mà } \int_0^2 f(v) dv &= \int_0^2 f(v) dv + \int_2^6 f(v) dv - \int_2^6 f(v) dv = \int_0^6 f(v) dv - \int_2^6 f(v) dv \\ &= \int_0^6 f(x) dx - \int_2^6 f(x) dx = 4 - (-3) = 7. \end{aligned}$$

Vậy $I = 7 - 6 = 1$. **Chọn A.**

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 3]$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $f(3) = m$.

Tìm tham số thực m để $\int_1^3 f'(x) dx = 5$.

A. $m = 6$. B. $m = 5$. C. $m = 4$. D. $m = -4$.

Lời giải. Ta có $\int_1^3 f'(x) dx = f(x) \Big|_1^3 = f(3) - f(1)$.

Theo giả thiết $\int_1^3 f'(x) dx = 5 \Leftrightarrow f(3) - f(1) = 5 \Leftrightarrow m - 1 = 5 \Leftrightarrow m = 6$. **Chọn A.**

Câu 17. Cho hàm số $g(x) = \int_0^x t \cos(x-t) dt$. Tính $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$. B. $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. C. $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. D. $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = t \\ dv = \cos(x-t) dt \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = -\sin(x-t) \end{cases}$.

$$\text{Khi đó } g(x) = -t \sin(x-t) \Big|_0^x + \int_0^x \sin(x-t) dt = -t \sin(x-t) \Big|_0^x + \cos(x-t) \Big|_0^x = 1 - \cos x.$$

Suy ra $g'(x) = \sin x \longrightarrow g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. **Chọn B.**

Câu 18. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $F(x) = \int_1^x (t^2 + t) dt$ trên đoạn $[-1; 1]$.

A. $m = \frac{1}{6}$. B. $m = 2$. C. $m = -\frac{5}{6}$. D. $m = \frac{5}{6}$.

Lời giải. Ta có $F(x) = \int_1^x (t^2 + t) dt = \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right) \Big|_1^x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{6}$.

Xét hàm số $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{6}$ trên đoạn $[-1; 1]$.

$$\text{Đạo hàm } F'(x) = x^2 + x \longrightarrow F'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1; 1] \\ x = -1 \in [-1; 1] \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} F(-1) = -\frac{2}{3} \\ F(0) = -\frac{5}{6} \\ F(1) = 0 \end{cases} \longrightarrow \min_{[-1; 1]} F(x) = F(0) = -\frac{5}{6}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = A \sin(\pi x) + B$ (A, B thuộc $\mathbb{R}$) thỏa mãn $\int_0^2 f(x) dx = 4$ và $f'(1) = 2$.

Tính giá trị biểu thức $P = \pi A + B$.

- A. $P = 4$. B. $P = 0$. C. $P = -2$. D. $P = -4$.

Lời giải. Ta có $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 [A \sin(\pi x) + B] dx = \left[-\frac{A}{\pi} \cos(\pi x) + Bx \right]_0^2 = 2B$.

Suy ra $2B = 4 \Leftrightarrow B = 2$.

Lại có $f'(x) = A\pi \cos(\pi x) \longrightarrow f'(1) = 2 \Leftrightarrow A\pi \cos \pi = 2 \Leftrightarrow A = -\frac{2}{\pi}$.

Vậy $A = -\frac{2}{\pi}; B = 2 \longrightarrow P = \pi A + B = 0$. **Chọn B.**

Câu 20. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

- A. 0,2m. B. 2m. C. 10m. D. 20m.

Lời giải. Lúc dừng hẳn thì $v(t) = 0 \longrightarrow -5t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Vậy từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô đi được quãng đường là

$$s = \int_0^2 (-5t + 10) dt = \left[-\frac{5}{2}t^2 + 10t \right]_0^2 = 10\text{m. Chọn C.}$$

Câu 21. Một vật đang chuyển động với vận tốc 6m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = \frac{3}{t+1} \text{ m/s}^2$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc. Hỏi vận tốc của vật sau 10 giây gần nhất với kết quả nào sau đây?

- A. 14m/s. B. 13m/s. C. 11m/s. D. 12m/s.

Lời giải. Ta có $v(t) = \int \frac{3}{t+1} dt = 3 \ln|t+1| + C$.

Tại thời điểm lúc bắt đầu tăng tốc $t = 0$ thì $v = 6\text{m/s}$ nên ta có $3 \ln 1 + C = 6 \Leftrightarrow C = 6$.

Suy ra $v(t) = 3 \ln|t+1| + 6$ (m/s).

Tại thời điểm $t = 10\text{s} \longrightarrow v(10) = 3 \ln 11 + 6 \approx 13\text{m/s}$. **Chọn B.**

Câu 22. Một vật đang chuyển động với vận tốc 10m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2$ (m/s²), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc. Hỏi quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc bằng bao nhiêu mét?

- A. $\frac{4000}{3}$ m. B. $\frac{4300}{3}$ m. C. $\frac{1900}{3}$ m. D. $\frac{2200}{3}$ m.

Lời giải. Ta có $v(t) = \int (3t + t^2) dt = \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + C$.

Tại thời điểm lúc bắt đầu tăng tốc $t = 0$ thì $v = 10 \text{ m/s}$ nên suy ra $C = 10$.

Suy ra $v(t) = \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + 10 \text{ (m/s)}$.

Vậy quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc

bằng $s = \int_0^{10} \left(\frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + 10 \right) dt = \left(\frac{t^3}{2} + \frac{t^4}{12} + 10t \right) \Big|_0^{10} = \frac{4300}{3} \text{ m}$. **Chọn B.**

Câu 23. Tại một nơi không có gió, một chiếc khí cầu đang đứng yên ở độ cao 162 m so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật $v(t) = 10t - t^2 \text{ (m/s)}$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động. Hỏi lúc vừa tiếp đất, vận tốc v của khí cầu bằng bao nhiêu?

- A. $v = 5 \text{ m/s}$. B. $v = 7 \text{ m/s}$. C. $v = 9 \text{ m/s}$. D. $v = 3 \text{ m/s}$.

Lời giải. Do $v(t) = 10t - t^2 \longrightarrow 0 < t < 10$.

Giả sử chiếc khí cầu chạm đất kể từ lúc bắt đầu chuyển động là t_1 giây ($0 < t_1 < 10$).

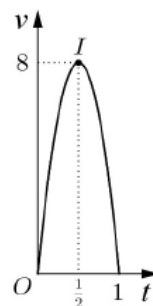
Theo đề bài ta có phương trình $162 = \int_0^{t_1} (10t - t^2) dt = \left(5t^2 - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^{t_1} = 5t_1^2 - \frac{t_1^3}{3}$

$\Leftrightarrow -\frac{t_1^3}{3} + 5t_1^2 - 162 = 0 \xrightarrow{0 < t_1 < 10} t_1 = 9 \longrightarrow v(9) = 9 \text{ m/s}$. **Chọn C.**

Câu 24. Một người chạy trong thời gian 1 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là một phần parabol với đỉnh $I\left(\frac{1}{2}; 8\right)$ và trục đối xứng song song với

trục tung như hình bên. Tính quãng đường s người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi chạy.

- A. $s = 4 \text{ km}$. B. $s = 2,3 \text{ km}$.
C. $s = 4,5 \text{ km}$. D. $s = 5,3 \text{ km}$.



Lời giải. Hàm vận tốc $v(t) = at^2 + bt + c$ có dạng là đường parabol đi qua các điểm $O(0; 0)$,

$A(1; 0)$ và $I\left(\frac{1}{2}; 8\right)$ nên suy ra $\begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -32 \\ b = 32 \\ c = 0 \end{cases} \longrightarrow v(t) = -32t^2 + 32t \text{ (m/s)}.$

Vậy quãng đường người đó đi được trong khoảng thời gian 45 phút là:

$s = \int_0^{\frac{3}{4}} (-32t^2 + 32t) dt = 4,5 \text{ km}$. **Chọn C.**

Câu 25. Cho tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ và $x = 2 \sin t$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt$. B. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} t dt$. C. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{t}$. D. $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} dt$.

Lời giải. Với $x = 2 \sin t$, suy ra $\begin{cases} dx = 2 \cos t dt \\ \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} = 2 \sqrt{\cos^2 t} = 2 |\cos t| \end{cases}$.

Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{6} \end{cases}$. Vậy $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2 \cos t}{2 |\cos t|} dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2 \cos t}{2 \cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt$. **Chọn A.**

Câu 26. Tìm a , biết $I = \int_{-1}^2 \frac{e^x dx}{2 + e^x} = \ln \frac{ae + e^3}{ae + b}$ với a, b là các số nguyên dương.

A. $a = \frac{1}{3}$. B. $a = -\frac{1}{3}$. C. $a = 2$. D. $a = -2$.

Lời giải. Đặt $t = e^x$, suy ra $dt = e^x dx$. Đổi cận: $\begin{cases} x = -1 \rightarrow t = \frac{1}{e} \\ x = 2 \rightarrow t = e^2 \end{cases}$.

Suy ra $I = \int_{\frac{1}{e}}^{e^2} \frac{dt}{2 + t} = \ln |2 + t| \Big|_{\frac{1}{e}}^{e^2} = \ln(2 + e^2) - \ln\left(2 + \frac{1}{e}\right) = \ln \frac{2 + e^2}{2 + \frac{1}{e}} = \ln \frac{2e + e^3}{2e + 1}$.

$\longrightarrow a = 2; b = 1$. **Chọn C.**

Câu 27. Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \sin x \cos^3 x dx$ và $t = \sin^2 x$. Chọn khẳng định đúng?

A. $I = \frac{1}{2} \int_0^1 e^t (1 - t) dt$.

B. $I = 2 \left[\int_0^1 e^t dt + \int_0^1 te^t dt \right]$.

C. $I = 2 \int_0^1 e^t (1 - t) dt$.

D. $I = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 e^t dt + \int_0^1 te^t dt \right]$.

Lời giải. Viết lại $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \sin x \cos^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \cdot \cos^2 x \cdot \sin x \cos x dx$.

Với $t = \sin^2 x$, suy ra $dt = 2 \sin x \cos x dx \longrightarrow \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} dt$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 1 \end{cases}$. Khi đó $I = \frac{1}{2} \int_0^1 e^t (1 - t) dt$. **Chọn A.**

Câu 28. Có bao nhiêu số thực a thuộc khoảng $(0; 20\pi)$ sao cho $\int_0^a \sin^5 x \sin 2x dx = \frac{2}{7}$.

A. 20. B. 19. C. 9. D. 10.

Lời giải. Ta có $I = \int_0^a \sin^5 x \sin 2x dx = \int_0^a 2 \sin^6 x \cdot \cos x dx$.

Đặt $t = \sin x$, suy ra $dt = \cos x dx$. Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = a \rightarrow t = \sin a = m \end{cases}$.

Khi đó $I = \int_0^m 2t^6 dt = \frac{2}{7} t^7 \Big|_0^m = \frac{2m^7}{7}$.

Theo giả thiết ta có $\frac{2m^7}{7} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow m = 1$.

Với $m = 1 \longrightarrow \sin a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Vì $a \in (0; 20\pi)$ nên $0 < \frac{\pi}{2} + k2\pi < 20\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < 10 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{0; 1; 2; 3; \dots; 9\}$
 $\longrightarrow$ có 10 giá trị của $k \longrightarrow$ có 10 giá trị của a . **Chọn D.**

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[2; 4]$ và thỏa mãn $f(2) = 2$, $f(4) = 2018$.
 Tính $I = \int_1^2 f'(2x) dx$.

- A. $I = -1008$. B. $I = 2018$. C. $I = 1008$. D. $I = -2018$.

Lời giải. Đặt $t = 2x$, suy ra $dt = 2dx \longrightarrow dx = \frac{1}{2} dt$. Đổi cận: $\begin{cases} x = 1 \rightarrow t = 2 \\ x = 2 \rightarrow t = 4 \end{cases}$.

Khi đó $I = \int_1^2 f'(2x) dx = \frac{1}{2} \int_2^4 f'(t) dt = \frac{1}{2} \cdot f(t) \Big|_2^4 = \frac{1}{2} \cdot [f(4) - f(2)] = \frac{1}{2} (2018 - 2) = 1008$. **Chọn C.**

Câu 30. Giả sử $I = \int_1^e x^3 \ln x dx = \frac{3e^a + 1}{b}$ với a, b là các số nguyên dương. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $ab = 64$. B. $ab = 46$. C. $a - b = 12$. D. $a - b = 4$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^3 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^4}{4} \end{cases}$.

Khi đó $I = \frac{x^4 \ln x}{4} \Big|_1^e - \frac{1}{4} \int_1^e x^3 dx = \frac{e^4}{4} - \frac{x^4}{16} \Big|_1^e = \frac{e^4}{4} - \left(\frac{e^4}{16} - \frac{1}{16} \right) = \frac{3e^4 + 1}{16}$.

Suy ra $a = 4$; $b = 16$. **Chọn A.**

Câu 31. Cho tham số m thỏa mãn $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x + 2m) dx = 1 + \pi^2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $-1 < m < 0$. B. $0 \leq m \leq 2$. C. $3 < m < 5$. D. $m \geq 5$.

Lời giải. Tính $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$.

Suy ra $A = (-x \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

Do đó $I = A + 2m \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx = 1 + mx^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 + \frac{m\pi^2}{4}$.

Theo giả thiết $1 + \frac{m\pi^2}{4} = 1 + \pi^2 \Leftrightarrow \frac{m\pi^2}{4} = \pi^2 \Leftrightarrow m = 4 \in (3;5)$. **Chọn C.**

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $f(1) = 4f(2)$, $\int_1^2 xf(x)dx = 1$. Tính tích phân $I = \int_1^2 x^2 f'(x)dx$.

- A. $I = 2$. B. $I = -2$. C. $I = 1$. D. $I = -1$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = f(x) \end{cases}$.

Khi đó $I = x^2 f(x) \Big|_1^2 - 2 \int_1^2 xf(x)dx = 4f(2) - f(1) - 2 \int_1^2 xf(x)dx$.
 $= -2 \int_1^2 xf(x)dx = -2 \cdot 1 = -2$. **Chọn B**

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(0) = 1$ và $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2 - 2x$, tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm thực phân biệt.

- A. $m > e$. B. $0 < m \leq 1$. C. $0 < m < e$. D. $1 < m < e$.

Lời giải. Lấy nguyên hàm hai vế $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2 - 2x$, ta được $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int (2 - 2x) dx$

$$\Leftrightarrow \ln|f(x)| = 2x - x^2 + C \Leftrightarrow \ln[f(x)] = 2x - x^2 + C \quad (\text{do } f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow f(x) = e^{2x-x^2+C}.$$

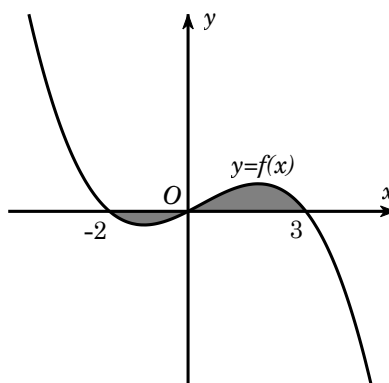
Theo giả thiết $f(0) = 1 \longrightarrow e^C = 1 \Leftrightarrow C = 0$. Suy ra $f(x) = e^{2x-x^2}$.

Xét phương trình $f(x) = m \Leftrightarrow e^{2x-x^2} = m \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x = \ln m \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x - \ln m = 0 \\ m > 0 \end{cases}$.

Phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 - \ln m > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < e$.

Chọn C.

Câu 34. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Diện tích S của hình phẳng phần tô đậm trong hình được tính theo công thức nào sau đây?



A. $S = \int_{-2}^3 f(x) dx$.

B. $S = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx$.

C. $S = \int_0^{-2} f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx$.

D. $S = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_3^0 f(x) dx$.

Lời giải. Theo hình vẽ, ta có $S = \int_{-2}^3 |f(x)| dx = -\int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx$

$= \int_0^{-2} f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx$. **Chọn C.**

Câu 35. Cho hai hàm số $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Diện tích hình phẳng S giới hạn các bởi đường cong $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$) được xác định bởi công thức nào sau đây?

A. $S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$.

B. $S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$.

C. $S = \left| \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx \right|$.

D. $S = \int_a^b |f_1(x) + f_2(x)| dx$.

Lời giải. Chọn A.

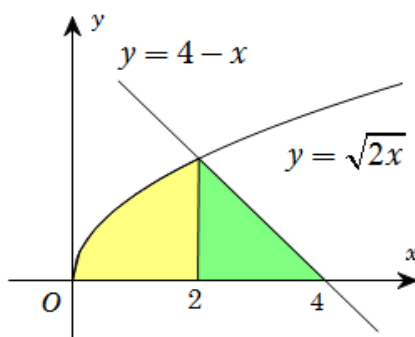
Câu 36. Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = \sqrt{2x}$, $y = 4 - x$ và trục hoành Ox (như hình vẽ) được tính bởi công thức nào dưới đây?

A. $S = \int_0^4 \sqrt{2x} dx + \int_0^4 (4 - x) dx$.

B. $S = \int_0^2 \sqrt{2x} dx + \int_2^4 (4 - x) dx$.

C. $S = \int_0^4 (\sqrt{2x} - 4 + x) dx$.

D. $S = \int_0^2 (4 - x - \sqrt{2x}) dx$.

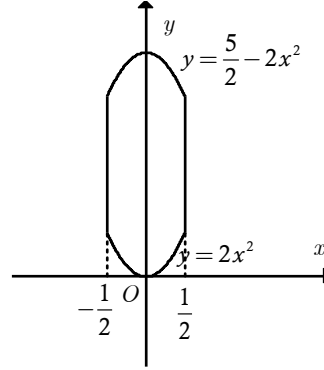


Lời giải. Xét các phương trình hoành độ giao điểm:

- $\sqrt{2x} = 4 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x^2 - 10x + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2;$
- $4 - x = 0 \Leftrightarrow x = 4;$
- $\sqrt{2x} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Dựa vào hình vẽ, ta có $S = \int_0^2 \sqrt{2x} dx + \int_2^4 (4 - x) dx$. **Chọn B.**

Câu 37. Sơ đồ ở bên phải phác thảo của một khung cửa sổ. Diện tích S của cửa sổ được tính bởi công thức nào sau đây?



- A. $S = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{5}{2} - 4x^2 \right) dx$. B. $S = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| \frac{5}{2} - 2x^2 \right| dx$.
- C. $S = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 2x^2 dx$. D. $S = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1 - 4x^2) dx$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị ta thấy trên đoạn $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ thì đồ thị hàm số $y_1 = \frac{5}{2} - 2x^2$ nằm phía trên đồ thị hàm số $y_2 = 2x^2$.

Do đó $S = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (y_1 - y_2) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{5}{2} - 2x^2 - 2x^2 \right) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{5}{2} - 4x^2 \right) dx$. **Chọn A.**

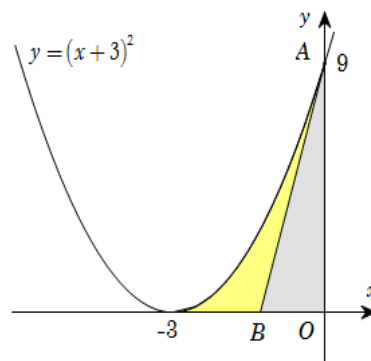
Câu 38. Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x\sqrt{1+x^2}$, trục hoành và đường thẳng $x=1$.

- A. $S = \frac{1}{3}$. B. $S = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$. C. $S = \frac{2\sqrt{2}+1}{3}$. D. $S = 2(\sqrt{2}-1)$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $x\sqrt{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Diện tích hình phẳng: $S = \int_0^1 |x\sqrt{1+x^2}| dx = \int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx \stackrel{\text{CASIO}}{=} \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$. **Chọn B.**

Câu 39. Xét hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x+3)^2$, trục hoành và đường thẳng $x=0$. Gọi $A(0;9)$, $B(b;0)$ ($-3 < b < 0$). Tính giá trị của tham số b để đoạn thẳng AB chia (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau.



- A. $b = -2$. B. $b = -\frac{1}{2}$.

C. $b = -1$. D. $b = -\frac{3}{2}$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $(x+3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -3$.

Do đó $S_{(H)} = \int_{-3}^0 (x+3)^2 dx \stackrel{\text{CASIO}}{=} 9$.

Diện tích tam giác OAB bằng: $S_{OAB} = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{9}{2}|b|$.

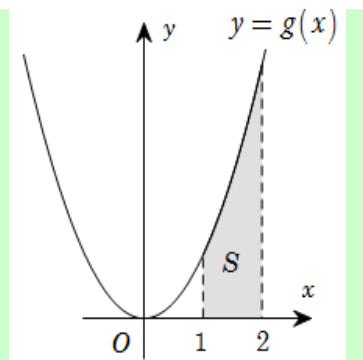
Ycbt $\longleftrightarrow S_{OAB} = \frac{1}{2}S_{(H)} \Leftrightarrow \frac{9}{2}|b| = \frac{9}{2} \xrightarrow{(-3 < b < 0)} b = -1$. **Chọn C.**

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = g(x) = x.f(x^2)$ có đồ thị trên đoạn $[1;2]$ như hình vẽ bên. Biết phần diện tích miền được tô màu là $S = \frac{5}{2}$, tính giá trị của tích phân

$I = \int_1^4 f(x)dx$.

A. $I = \frac{5}{2}$. B. $I = \frac{5}{4}$.

C. $I = 10$. D. $I = 5$.



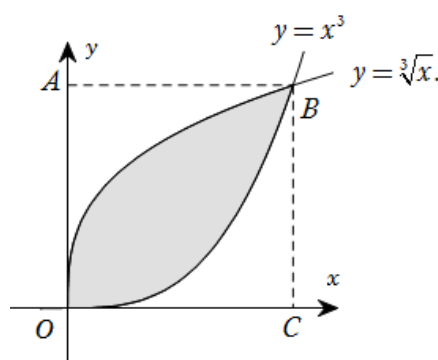
Lời giải. Diện tích phần tô màu là $S = \int_1^2 g(x)dx$.

Theo giả thiết $S = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \int_1^2 x.f(x^2)dx = \frac{5}{2}$.

Đặt $t = x^2 \longrightarrow dt = 2xdx$. Đổi cận: $\begin{cases} x=1 \rightarrow t=1 \\ x=2 \rightarrow t=4 \end{cases}$.

Khi đó $\frac{5}{2} = \int_1^2 x.f(x^2)dx = \frac{1}{2} \int_1^4 f(t)dt \longrightarrow \int_1^4 f(t)dt = 5$ hay $\int_1^4 f(x)dx = 5$. **Chọn D.**

Câu 41. Cho một viên gạch men có dạng hình vuông $OABC$ như hình vẽ. Sau khi tọa độ hóa, ta có $O(0;0)$, $A(0;1)$, $B(1;1)$, $C(1;0)$ và hai đường cong trong hình lần lượt là đồ thị hàm số $y = x^3$ và $y = \sqrt[3]{x}$. Tính tỷ số diện tích của phần tô đậm so với diện tích phần còn lại của hình vuông.



A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{5}{4}$.

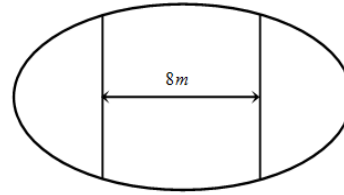
C. $\frac{4}{3}$. D. 1.

Lời giải. Diện tích hình vuông có cạnh bằng 1 là $S_1 = 1^2 = 1 \text{ m}^2$.

Diện tích phần tô đậm : $S_2 = \int_0^1 |\sqrt[3]{x} - x^3| dx \stackrel{\text{CASIO}}{=} = \frac{1}{2} \text{m}^2$.

Do đó diện tích phần còn lại : $\Delta S = S_1 - S_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{m}^2 \longrightarrow \frac{S_2}{\Delta S} = 1$. **Chọn D.**

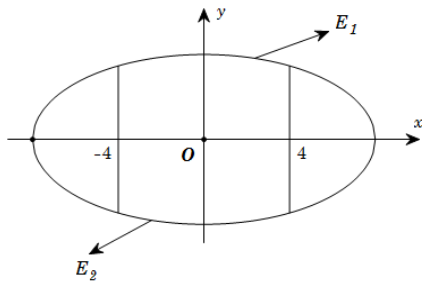
Câu 42. Ông An có một mảnh vườn hình Elip có độ dài trục lớn bằng 16 m và độ dài trục bé bằng 10 m. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng 8 m và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ).



Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng /m². Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn)

- A. 7.862.000 đồng. B. 7.653.000 đồng.
C. 7.128.000 đồng. D. 7.826.000 đồng.

Lời giải. Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Giả sử elip có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Từ giả thiết, ta có $2a = 16 \longrightarrow a = 8$ và $2b = 10 \longrightarrow b = 5$.

Vậy phương trình của elip là $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} = 1 \longrightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{8}\sqrt{64-x^2} & (E_1) \\ y = -\frac{5}{8}\sqrt{64-x^2} & (E_2) \end{cases}$.

Khi đó diện tích dải vườn được giới hạn bởi các đường (E_1) , (E_2) , $x = -4$ và $x = 4$.

Do đó $S = 2 \int_{-4}^4 \frac{5}{8} \sqrt{64-x^2} dx = \frac{5}{2} \int_{-4}^4 \sqrt{64-x^2} dx = 80 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \text{m}^2$.

I. CHỦ ĐỀ 4: SỐ PHỨC.

1. Các khái niệm liên quan Số phức: Đề MH2 có 2 câu về chủ đề này (2NB)

A. Lý thuyết:

1. Khái niệm số phức

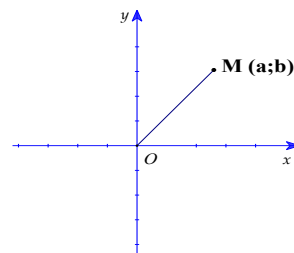
- Số phức (dạng đại số): $z = a + bi$; ($a, b \in \mathbb{R}$). Trong đó: a là phần thực, b là phần ảo, i là đơn vị ảo, $i^2 = -1$.
- Tập hợp số phức kí hiệu: $\mathbb{C}$.
- z là số thực $\Leftrightarrow$ phần ảo của z bằng 0 ($b = 0$).
- z là số ảo (hay còn gọi là thuần ảo) $\Leftrightarrow$ phần thực bằng 0 ($a = 0$).
- Số 0 vừa là số thực vừa là số ảo.

2. Hai số phức bằng nhau

- Hai số phức $z_1 = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) và $z_2 = c + di$ ($c, d \in \mathbb{R}$) bằng nhau khi phần thực và phần ảo của chúng tương đương bằng nhau.
- Khi đó ta viết $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$

3. Biểu diễn hình học số phức

Số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ hay bởi $\vec{u} = (a; b)$ trong mặt phẳng phức với hệ tọa độ Oxy .



4. Môđun của số phức

Độ dài của vectơ $\vec{OM}$ được gọi là **môđun của số phức** z và kí hiệu là $|z|$. Vậy $|z| = |\vec{OM}|$ hay $|z| = |a + bi| = |\vec{OM}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Một số tính chất:

- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}} = |\vec{OM}|$; $|\bar{z}| = |z|$
- $|z| \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}; |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$; $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$; $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\overline{z_1 z_2}}{|z_2|^2}$.
- $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

B. Các ví dụ:

Ví dụ 1. C19 MH2 2020. Số phức liên hợp của số phức $z = 2 + i$ là

A. $\bar{z} = -2 + i$.

B. $\bar{z} = -2 - i$.

C. $\bar{z} = 2 - i$.

D. $\bar{z} = 2 + i$.

Hướng dẫn

NX: Bài này thuộc cấp độ NB.

Số phức liên hợp của số phức $z = 2 + i$ là $\bar{z} = 2 - i$. Chọn C.

Ví dụ 2. C21 MH2 2020. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = -1 + 2i$ là điểm nào dưới đây?

- A. $Q(1;2)$. B. $P(-1;2)$. C. $N(1;-2)$. D. $M(-1;-2)$.

Hướng dẫn

NX: Bài này thuộc cấp độ NB. HS cần biết: Số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bởi điểm $M(a;b)$. Chọn B.

Ví dụ 3. C12 MH1 2020. Mô đun của số phức liên $1 + 2i$ bằng

- A. 5. B. 3. C. $\sqrt{5}$. D. $\sqrt{3}$.

Hướng dẫn

NX: Bài này thuộc cấp độ NB. HS cần biết: Số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thì $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Chọn C.

C. Các bài tập tương tự: (dành cho hs tự ôn)

- Cho hai số phức $z_1 = 2 + 3i$ và $z_2 = -3 - 5i$. Tính tổng phần thực và phần ảo của số phức $w = z_1 + z_2$.
A. 3. B. 0. C. $-1 - 2i$. D. -3 .
- Cho hai số phức $z_1 = 2 - 3i$ và $z_2 = -1 + 5i$. Tổng phần thực và phần ảo của số phức $w = z_1 + z_2$ bằng.
A. $3i$. B. 3. C. 1. D. $2i$.
- Cho số phức $z = -3 - 2i$. Tổng phần thực và phần ảo của số phức z bằng
A. -1 . B. $-i$. C. -5 . D. $-5i$.
- Cho số phức $z = 5 - 4i$. Số phức $z - 2$ có
A. Phần thực bằng 5 và phần ảo bằng -4 . B. Phần thực bằng -4 và phần ảo bằng 3.
C. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng $-4i$. D. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng -4 .
- Cho số phức $z = 1 - 4(i + 3)$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$.
A. Phần thực bằng -11 và phần ảo bằng 4. B. Phần thực bằng -11 và phần ảo bằng $4i$.
C. Phần thực bằng -11 và phần ảo bằng $-4i$. D. Phần thực bằng -11 và phần ảo bằng -4 .
- Cho số phức z thỏa $(1 + i)z = 3 - i$. Tìm phần ảo của z .
A. $-2i$. B. $2i$. C. 2. D. -2 .
- Cho số phức $z = a + bi$ thỏa mãn $(z - 8)i + z - 6i = 5 + 5i$. Giá trị của $a + b$ bằng
A. 19. B. 5. C. 14. D. 2.
- Cho hai số phức $z_1 = 3 - 3i$ và $z_2 = -1 + 2i$. Phần ảo của số phức $w = z_1 + 2z_2$ là
A. 7. B. 1. C. -1 . D. -7 .

9. Số phức $z = \frac{4-3i}{i}$ có phần thực là:

- A. 3. **B.** -3. C. -4. D. 4.

10. Cho số phức $z = 1 - \sqrt{2}i$. Tìm phần ảo của số phức $P = \frac{1}{\bar{z}}$.

- A.** $-\frac{\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $-\sqrt{2}$. D. $\sqrt{2}$.

11. Cho số phức $z = a + bi$ ($ab \neq 0, a, b \in \mathbb{R}$). Tìm phần thực của số phức $w = \frac{1}{z^2}$.

- A. $-\frac{2ab}{(a^2+b^2)^2}$. **B.** $\frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)^2}$. C. $\frac{b^2}{(a^2+b^2)^2}$. **D.** $\frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2}$.

12. Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = m - 3 + (m^2 - 6)i$, ($m \in \mathbb{R}$) Tìm tập hợp tất cả các giá trị m để $z_1 + z_2$ là số thực.

- A.** $\{-2; 2\}$. B. $\{-\sqrt{6}; \sqrt{6}\}$. C. $\{-2\}$. D. $\{2\}$.

13. Cho số phức $z = \sqrt{2} - 3i$. Gọi a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của z . Tìm a, b .

- A. $a = 3, b = \sqrt{2}$. **B.** $a = \sqrt{2}, b = -3$. C. $a = -3, b = \sqrt{2}$. D. $a = -\sqrt{2}, b = 3$.

14. Cho số phức $z = i(2 - 3i)$ có phần thực là a và phần ảo là b . Tìm a, b .

- A.** $a = 3; b = 2$ B. $a = 3; b = -2$. C. $a = -3; b = 2$ D. $a = 2; b = -3$.

15. Phần ảo của số phức $z = (1 - 2i)^2$ là:

- A. $-4i$. B. -3 . **C.** -4 . D. 4.

16. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Số phức z^2 có phần thực là:

- A. $a + b$. B. $a - b$. C. $a^2 + b^2$. **D.** $a^2 - b^2$.

17. Tìm phần thực a và phần ảo b của số phức $z = (1 + 2i)^2$.

- A.** $a = 4, b = 5$. B. $a = 4, b = -3$. C. $a = -4, b = 5$. D. $a = -3, b = 4$.

18. Cho các số phức $z = 1 + 2i, w = 2 + i$. Số phức $u = z \cdot \bar{w}$ có.

- A.** Phần thực là 4 và phần ảo là 3. B. Phần thực là 4 và phần ảo là $3i$.
C. Phần thực là 0 và phần ảo là 3. D. Phần thực là 0 và phần ảo là $3i$.

19. Cho số phức $z = x + yi$; $z \neq 1$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Phần ảo của số $\frac{z+1}{z-1}$ là:

- A. $\frac{-2x}{(x-1)^2 + y^2}$. B. $\frac{x+y}{(x-1)^2 + y^2}$. C. $\frac{xy}{(x-1)^2 + y^2}$. **D.** $\frac{-2y}{(x-1)^2 + y^2}$.

20. Có bao nhiêu số thực a để số phức $z = a + 2i$ có môđun bằng 2 ?

- A. 0. **B.** 1. C. 2. D. Vô số.

2. Các phép toán về số phức: Đề MH2 có 2 câu về chủ đề này (1NB, 1TH)

A. Lý thuyết:

1. Số phức liên hợp

Số phức liên hợp của $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là $\bar{z} = a - bi$.

- $\bar{\bar{z}} = z$; $\overline{z \pm z'} = \bar{z} \pm \bar{z'}$; $\overline{z.z'} = \bar{z}.\bar{z'}$; $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$; $z.\bar{z} = a^2 + b^2$.
- z là số thực $\Leftrightarrow z = \bar{z}$; z là số ảo $z = -\bar{z}$.

2. Phép cộng và phép trừ số phức

Cho hai số phức $z_1 = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) và $z_2 = c + di$ ($c, d \in \mathbb{R}$). Khi đó:

$$z_1 \pm z_2 = (a + c) \pm (b + d)i$$

- Số đối của số phức $z = a + bi$ là $-z = -a - bi$.
- Tổng của một số phức với số phức liên hợp của nó bằng hai lần phần thực của số thực đó:
 $z = a + bi, z + \bar{z} = 2a$.

3. Phép nhân số phức

- Cho hai số phức $z_1 = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) và $z_2 = c + di$ ($c, d \in \mathbb{R}$).

Khi đó: $z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

- Với mọi số thực k và mọi số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), ta có

$$k.z = k.(a + bi) = ka + kbi.$$

Đặc biệt: $0.z = 0$ với mọi số phức z .

- Lũy thừa của i : $i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = i^2.i = -i$
 $i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

4. Chia hai số phức

Số phức nghịch đảo của z khác 0 là số $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}$.

Phép chia hai số phức z' và $z \neq 0$ là $\frac{z'}{z} = z'.z^{-1} = \frac{z'.\bar{z}}{|z|^2} = \frac{z'.\bar{z}}{z.\bar{z}}$.

B. Các ví dụ:

Ví dụ 4. C20 MH2 2020. Cho hai số phức $z_1 = 2 + i$ và $z_2 = 1 + 3i$. Phần thực của số phức $z_1 + z_2$ bằng

A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. - 2.

Hướng dẫn

NX: Bài này thuộc cấp độ NB. HS cần thuộc quy tắc cộng 2 số phức.

Ta có $z_1 + z_2 = (2 + i) + (1 + 3i) = 3 + 4i$. Phần thực của $z_1 + z_2$ là 3. Chọn B.

Ví dụ 5. C35 MH2 2020. Cho hai số phức $z_1 = 3 - i$ và $z_2 = -1 + i$. Phần ảo của số phức $z_1 z_2$ bằng

A. 4.

B. $4i$.

C. -1 .

D. $-i$.

Hướng dẫn

NX: Bài này thuộc cấp độ TH. HS cần thuộc quy tắc nhân 2 số phức.

$$z_1 z_2 = (3 - i)(-1 + i) = -3 + 3i + i - i^2 = -2 + 4i \text{ nên phần ảo của số phức } z_1 z_2 \text{ bằng } 4.$$

Ví dụ 6. C30 MH1 2020. Cho hai số phức $z_1 = -3 + i$ và $z_2 = 1 - i$. Phần ảo của số phức $z_1 + \overline{z_2}$ bằng

A. -2 .

B. $2i$.

C. 2.

D. $-2i$.

Hướng dẫn

NX: Bài này thuộc cấp độ TH. HS cần thuộc quy tắc cộng 2 số phức và phép toán liên hợp.

$$\text{Dễ dàng tính được } z_1 + \overline{z_2} = -2 + 2i \text{ nên có phần ảo bằng } 2. \text{ Chọn C.}$$

Ví dụ 7. C31 MH1 2020. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm biểu diễn số phức $z = (1 + 2i)^2$ có tọa độ là

A. $P(-3; 4)$.

B. $Q(5; 4)$.

C. $N(4; -3)$.

D. $M(4; 5)$.

Hướng dẫn

NX: Bài này thuộc cấp độ TH. HS cần biết phép nhân (phép bình phương).

$$\text{Dễ dàng tính được } z = (1 + 2i)^2 = 1 - 4 + 4i = -3 + 4i \text{ nên có điểm biểu diễn } P(-3; 4). \text{ Chọn A.}$$

C. Các bài tập tương tự: (dành cho hs tự ôn)

21. Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 - 3i$. Tổng của hai số phức z_1 và z_2 là

A. $3 - 5i$.

B. $3 + 5i$.

C. $3 - i$.

D. $3 + i$.

22. Cho số phức $z = 4 + 6i$. Tìm số phức $w = i\overline{z} + z$

A. $w = 10 - 10i$.

B. $w = -10 + 10i$.

C. $w = 10 + 10i$.

D. $w = -2 + 10i$.

23. Cho số phức $z = 2 + 5i$. Số phức $w = iz + \overline{z}$ là:

A. $w = 7 - 3i$

B. $w = -3 - 3i$

C. $w = 3 + 7i$

D. $w = -7 - 7i$

24. Cho số phức $z = 3 + 2i$. Tìm số phức $w = z(1 + i)^2 - \overline{z}$.

A. $w = 7 - 8i$.

B. $w = -7 + 8i$.

C. $w = 3 + 5i$.

D. $w = -3 + 5i$.

25. Cho các số phức $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 1 + 4i$. Tìm số phức liên hợp với số phức $z_1 z_2$.

A. $-14 - 5i$.

B. $-10 - 5i$.

C. $-10 + 5i$.

D. $14 - 5i$.

26. Số phức nghịch đảo của số phức $z = 1 + 3i$ là

A. $\frac{1}{10}(1 + 3i)$.

B. $\frac{1}{10}(1 - 3i)$.

C. $1 - 3i$.

D. $\frac{1}{\sqrt{10}}(1 + 3i)$.

27. Phần thực của số phức $z = (3 - i)(1 - 4i)$ là:

A. -1 .

B. 13.

C. 1.

D. -13 .

28. Số nào trong các số phức sau là số thực.

A. $\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i}$. B. $(2+i\sqrt{5})+(1-2i\sqrt{5})$. C. $(\sqrt{3}+i)-(\sqrt{3}-i)$. D. $(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})$.

29. Cho số phức $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Số phức $1+z+z^2$ bằng.

A. $2-\sqrt{3}i$. B. 0 . C. $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. D. 1 .

30. Cho số phức z thỏa $2z+3\bar{z}=10+i$. Tính $|z|$.

A. $|z|=5$. B. $|z|=3$. C. $|z|=\sqrt{3}$. D. $|z|=\sqrt{5}$.

3. Phương trình bậc hai với hệ số thực: Đề MH2 có 1 câu về chủ đề này (1TH)

A. Lý thuyết:

1. Căn bậc hai của số thực âm

- Cho số z , nếu có số phức z_1 sao cho $z_1^2 = z$ thì ta nói z_1 là một căn bậc hai của z .
- Mọi số phức $z \neq 0$ đều có hai căn bậc hai.
- Căn bậc hai của số thực z âm là $\pm i\sqrt{|z|}$.

Tổng quát, các căn bậc hai của số thực a âm là $\pm i\sqrt{|a|}$.

2. Phương trình bậc hai với hệ số thực

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0, \forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Xét biệt số $\Delta = b^2 - 4ac$ của phương trình. Ta thấy:

- Khi $\Delta = 0$, phương trình có một nghiệm thực $x = -\frac{b}{2a}$.
- Khi $\Delta > 0$, phương trình có hai nghiệm thực phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Khi $\Delta < 0$, phương trình có hai nghiệm phức $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

B. Các ví dụ:

Ví dụ 8. C36 MH2 2020. Gọi z_0 là nghiệm có phần ảo âm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Môđun của số phức $z_0 + i$ bằng

A. 2 . B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{10}$. D. 10 .

NX: Bài này thuộc cấp độ TH. HS cần giải được PT bậc hai hệ thực (có thể hướng dẫn hs dùng máy tính) và modun số phức.

Ta có $z^2 - 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow z = 1 \pm 2i$.

Suy ra $z_0 = 1 - 2i \Rightarrow z_0 + i = 1 - i \Rightarrow |z_0 + i| = \sqrt{2}$. Chọn B.

Ví dụ 9. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình $2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$. Khi đó, giá trị $z_1^2 + z_2^2$ là

A. $\frac{9}{4}$.

B. $-\frac{9}{4}$.

C. 9.

D. 4.

Lời giải

NX: Tìm nghiệm pt bậc 2 hệ số thực trên C, kết hợp với định lý Viet (có thể hd hs sử dụng máy tính để tìm ra nghiệm, từ đó tính luôn được $z_1^2 + z_2^2$)

Theo định lý Vi-ét, ta có $z_1 + z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ và $z_1 \cdot z_2 = \frac{3}{2}$.

$z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 \cdot z_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4} - 3 = -\frac{9}{4}$. Chọn B.

C. Các bài tập tương tự: (dành cho hs tự ôn)

31. Gọi z_1 là nghiệm có phần ảo âm của $z^2 - 4z + 20 = 0$. Tìm tọa độ điểm biểu diễn của z_1 .

A. $M(-2; -4)$.

B. $M(-4; -2)$.

C. $M(2; -4)$.

D. $M(4; -2)$.

32. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $2z^2 - 6z + 5 = 0$. Số phức iz_0 bằng

A. $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$.

B. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$.

C. $-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$.

D. $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$.

33. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2 - 6z + 13 = 0$. Tìm số phức $w = z_0 + \frac{6}{z_0 + i}$

A. $w = -\frac{24}{5} + \frac{7}{5}i$.

B. $w = -\frac{24}{5} - \frac{7}{5}i$.

C. $w = \frac{24}{5} - \frac{7}{5}i$.

D. $w = \frac{24}{5} + \frac{7}{5}i$.

34. Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Tìm tọa độ điểm biểu diễn số phức $\frac{7-4i}{z_1}$ trên mặt phẳng phức?

A. $P(3; 2)$.

B. $N(1; -2)$.

C. $Q(3; -2)$.

D. $M(1; 2)$.

35. Cho các số phức $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 3 - 2i$. Phương trình bậc hai có hai nghiệm z_1 và z_2 là

A. $z^2 + 6z + 13 = 0$.

B. $z^2 - 6z + 13 = 0$.

C. $z^2 + 6z - 13 = 0$.

D. $z^2 - 6z - 13 = 0$.

36. Kí hiệu z_0 là số phức có phần ảo âm của phương trình $9z^2 + 6z + 37 = 0$. Tìm tọa độ của điểm biểu diễn số phức $w = iz_0$.

A. $\left(-2; -\frac{1}{3}\right)$.

B. $\left(-\frac{1}{3}; -2\right)$.

C. $\left(2; -\frac{1}{3}\right)$.

D. $\left(-\frac{1}{3}; 2\right)$.

37. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2 - z + 2 = 0$. Tính $|z_1|^2 + |z_2|^2$.

A. $\frac{8}{3}$.

B. $\frac{4}{3}$.

C. $-\frac{11}{9}$.

D. $\frac{2}{3}$.

38. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 6z + 13 = 0$ trong đó z_1 là số phức có phần ảo âm. Tìm số phức $\omega = z_1 + 2z_2$.
- A. $\omega = 9 + 2i$. B. $\omega = 9 - 2i$. C. $\omega = -9 - 2i$. **D. $\omega = -9 + 2i$.**
39. Phương trình $z^2 + 3z + 9 = 0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 . Tính $S = z_1 z_2 + z_1 + z_2$.
- A. $S = 6$.** B. $S = -6$. C. $S = 12$. D. $S = -12$.
40. Biết phương trình $z^2 + 2017.2018z + 2^{2018} = 0$ có hai nghiệm z_1, z_2 . Tính $S = |z_1| + |z_2|$.
- A. $S = 2^{2018}$. B. $S = 2^{2019}$. C. $S = 2^{1009}$. **D. $S = 2^{1010}$.**

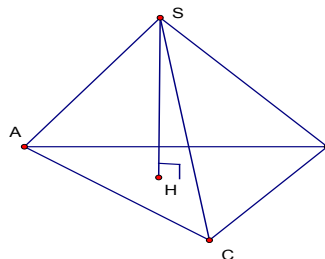
CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

CHỦ ĐỀ 1: THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP:

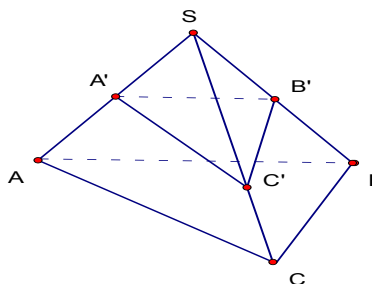
$$V = \frac{1}{3} B \cdot h \text{ với } \begin{cases} B : \text{diện tích đáy} \\ h : \text{chiều cao} \end{cases}$$



2. TỈ SỐ THỂ TÍCH TỨ DIỆN:

Cho khối tứ diện SABC và A', B', C' là các điểm tùy ý lần lượt thuộc SA, SB, SC ta có:

$$\frac{V_{SABC}}{V_{SA'B'C'}} = \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'}$$



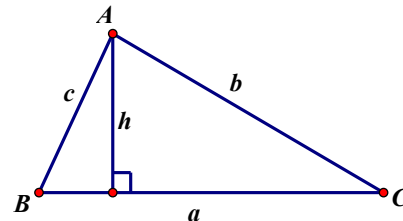
MỘT SỐ KIẾN THỨC BỔ TRỢ:

1. Diện tích hình phẳng

1.1. Tam giác thường:

$$* S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R} = pr.$$

* p là nửa chu vi, R bán kính đường tròn ngoại tiếp, r là bán kính đường tròn nội tiếp.



1.2. Tam giác đều cạnh a:

$$\text{a) Đường cao: } h = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad \text{b) } S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

c) Đường cao cũng là đường trung tuyến, đường phân giác, đường trung trực

1.3. Tam giác vuông:

$$\text{a) } S = \frac{1}{2} ab \text{ (a, b là 2 cạnh góc vuông)}$$

b) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm của **cạnh huyền**

1.4. Tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a (nửa hình vuông):

$$\text{a) } S = \frac{1}{2} a^2 \text{ (2 cạnh góc vuông bằng nhau)} \quad \text{b) Cạnh huyền bằng } a\sqrt{2}$$

1.5. Nửa tam giác đều:

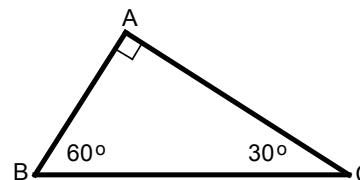
a) Là tam giác vuông có một góc bằng 30° hoặc 60°

$$\text{b) } BC = 2AB \quad \text{c) } AC = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \text{d) } S = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$$

1.6. Tam giác cân:

$$\text{a) } S = \frac{1}{2} ah \text{ (h: đường cao; a: cạnh đáy)}$$

b) Đường cao hạ từ đỉnh cũng là đường trung tuyến, đường phân giác, đường trung trực



1.7. Hình chữ nhật: $S = ab$ (a, b là các kích thước)

1.8. Hình thoi: $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 = ah$ (d_1, d_2 là 2 đường chéo, h: đường cao; a: cạnh đáy)

1.9. Hình vuông: a) $S = a^2$ b) Đường chéo bằng $a\sqrt{2}$

1.10. Hình bình hành: $S = ah$ (h: đường cao; a: cạnh đáy).

1.11. Hình Thang: $S = \frac{(\text{đáy lớn} + \text{đáy bé}) \times \text{chiều cao}}{2}$

2. Các hệ thức lượng trong tam giác.

2.1 Hệ thức lượng trong tam giác vuông : cho $\triangle ABC$ vuông ở A ta có :

a) Định lý Pitago : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

b) $BA^2 = BH \cdot BC$; $CA^2 = CH \cdot CB$

c) $AB \cdot AC = BC \cdot AH$

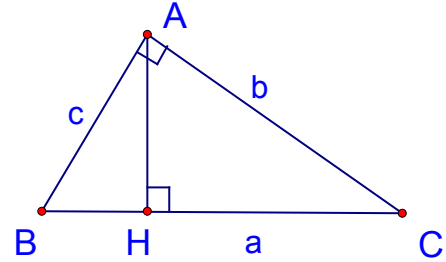
d) $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

e) $\sin B = \frac{b}{a}$, $\cos B = \frac{c}{a}$, $\tan B = \frac{b}{c}$, $\cot B = \frac{c}{b}$

f) $b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C$, $c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B$, $a = \frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\cos C}$, $b = c \cdot \tan B = c \cdot \cot C$

+Trong một tam giác vuông mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân sin góc đối hay cos góc kề. Cạnh huyền bằng cạnh góc vuông chia sin góc đối hay cos góc kề.

+Trong một tam giác vuông cạnh góc vuông này bằng cạnh góc vuông kia nhân tang góc đối hay cotang góc kề.



2.2 Hệ thức lượng trong tam giác thường:

*Định lý hàm số Côsin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

*Định lý hàm số Sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

B. PHƯƠNG PHÁP TÍNH THỂ TÍCH HÌNH CHÓP

B1: Xác định đáy và đường cao của khối chóp

B2: Tính diện tích đáy B và chiều cao h

B3: Áp dụng công thức $V = \frac{1}{3} B \cdot h$

Chú ý: Đường cao hình chóp.

1/ Chóp có cạnh bên vuông góc, đường cao chính là cạnh bên.

2/ Chóp có hai mặt bên vuông góc với đáy; đường cao là giao tuyến của hai mặt bên vuông góc đáy.

3/ Chóp có mặt bên vuông góc đáy đường cao nằm trong mặt bên vuông góc đáy.

4/ Chóp đều, đường cao là đoạn nối đỉnh với tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

5/ Chóp có hình chiếu vuông góc của một đỉnh xuống mặt đáy, đường cao là từ đỉnh tới hình chiếu.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài tập 1.

Cho khối tứ diện đều ABCD cạnh bằng 2a, M là trung điểm AD.

a) Tính thể tích khối tứ diện ABCD.

b) Tính khoảng cách từ M đến mp(ABC).

Giải:

a) Gọi E là trung điểm của BC và O là tâm của ΔABC . Vì ABCD là tứ diện đều nên $DO \perp (ABC)$ và

$$AE \perp BC \text{ và } O \in AE, AO = \frac{2}{3}AE = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Trong Δ vuông DAO : $DO = \sqrt{AD^2 - AO^2}$

$$= \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$$

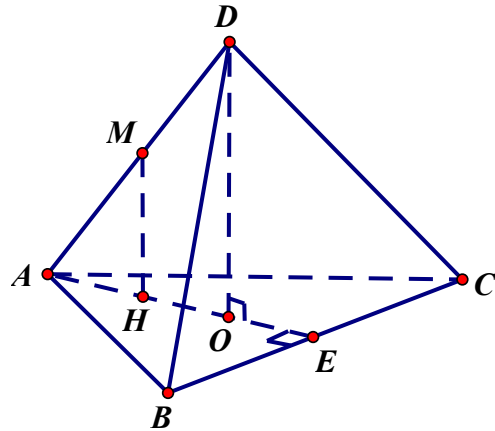
$$\text{Mặt khác: } S_{ABC} = \frac{(2a)^2 \sqrt{3}}{4} = a^2 \sqrt{3},$$

Vậy thể tích khối tứ diện đều ABCD là

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot DO = \frac{1}{3} \cdot a^2 \sqrt{3} \cdot \frac{2a\sqrt{6}}{3} = \frac{2a^3 \sqrt{2}}{3}$$

b) Kẻ MH// DO, khoảng cách từ M đến mp(ABC) là

$$MH; MH = \frac{1}{2} DO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$



Bài tập 2: Tính thể tích khối chóp S.ABCD. có đáy ABCD là hình vuông.

a. Biết $AB=2a$, $SA \perp (ABCD)$ và góc giữa mặt (SBD) và (ABCD) bằng 60°

b. Biết $AC=2a$ và góc giữa SC và (ABCD) bằng 30°

Giải:

a. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Vì ABCD là hình vuông cạnh $2a$ nên ta có: $AC \perp BD$ và

$$AO = \frac{1}{2} AC = a\sqrt{2}$$

Vì $SA \perp (ABCD)$ Khi đó AO là hình chiếu vuông góc của SO trên (ABCD). mà $BD \perp AO$ nên $SO \perp BD$
Do đó

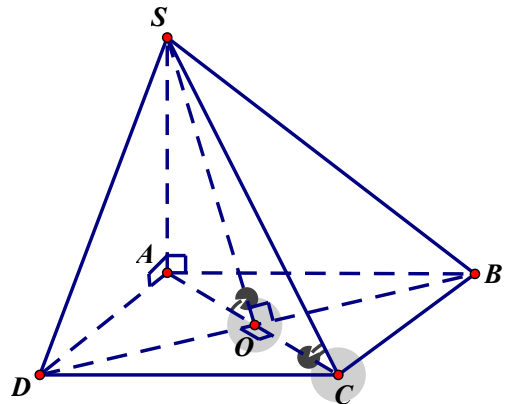
$$(\widehat{SBD}, \widehat{(ABCD)}) = (\widehat{SO}, \widehat{AO}) = \widehat{SOA} = 60^\circ$$

Trong tam giác vuông SAO ta có:

$$SA = AO \cdot \tan \widehat{SOA} = a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3};$$

$$S_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2 \text{ (đvdt)}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 4a^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{4a^3 \sqrt{6}}{9}$$



b. Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu vuông góc của SC trên (ABCD). Do đó

$$(\widehat{SC}, \widehat{(ABCD)}) = (\widehat{SC}, \widehat{AC}) = \widehat{SCA} = 30^\circ. \text{ Trong tam giác vuông SAC ta có:}$$

$$SA = AC \cdot \tan \widehat{SCA} = 2a \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}; \text{ Gọi b là độ dài cạnh của hình vuông ABCD Ta có}$$

$$b.\sqrt{2} = 2a \Rightarrow b = a\sqrt{2} \quad \text{Khi đó} \quad S_{ABCD} = (a\sqrt{2})^2 = 2a^2 \quad (\text{đvdt})$$

$$\text{Vậy} \quad V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 2a^2 \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{4a^3\sqrt{3}}{9} \quad (\text{đvtt})$$

Bài tập 3: Cho hình chóp S.ABCD có cạnh đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng 3a. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và vuông góc với mặt đáy. Gọi H là trung điểm của AB

a. CMR $SH \perp (ABCD)$

b. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

c. Gọi M là điểm nằm trên AD sao cho $AM = \frac{1}{4}AD$. Tính $V_{S.ABM}$ theo a.

Giải:

a. Vì ABC là tam giác đều cạnh 3a và H là trung điểm của AB nên $SH \perp AB$ và $SH = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$

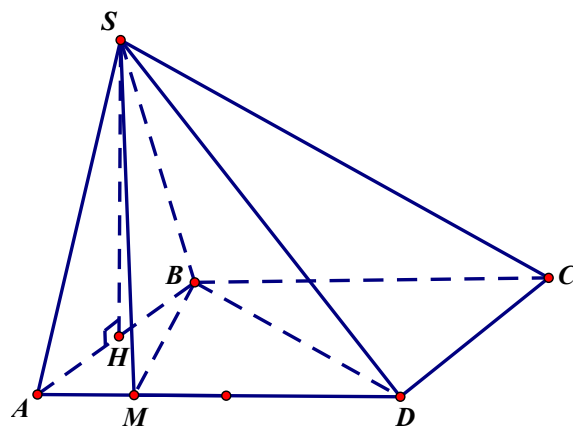
Khi đó Ta có :

$$\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ SH \perp AB \\ SH \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$$

b. Mặt khác: $S_{ABCD} = (3a)^2 = 9a^2$

Vậy Thể tích khối chóp S.ABCD là

$$\begin{aligned} V_{S.ABCD} &= \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH \\ &= \frac{1}{3} \cdot 9a^2 \cdot \frac{3a\sqrt{3}}{2} = \frac{9a^3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



c. Vì M là điểm nằm trên AD thỏa mãn $AM = \frac{1}{4}AD$ nên

$$S_{\triangle ABM} = \frac{1}{4} \cdot S_{\triangle ABD} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{8} S_{ABCD} = \frac{9a^2}{8}$$

$$\text{Vậy Thể tích khối tứ diện S.ABM là : } V_{S.ABM} = \frac{1}{3} S_{ABM} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{9a^2}{8} \cdot \frac{3a\sqrt{3}}{2} = \frac{9a^3\sqrt{3}}{16}$$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1: Cho một khối chóp có diện tích đáy là B chiều cao h thể tích bằng V. Khi đó:

A. $V = \frac{B \cdot h}{2}$

B. $V = B \cdot h$

C. $V = \frac{1}{3} B \cdot h$

D. $V = \frac{1}{6} B \cdot h$

Câu 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Biết $SA \perp (ABCD)$ và

$SA = a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp S.ABCD là:

A. $a^3\sqrt{3}$

B. $\frac{a^3}{4}$

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a$, tam giác ABC đều, tam giác SAB vuông cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

A. $\frac{\sqrt{6}a^3}{4}$ B. $\frac{\sqrt{6}a^3}{24}$ C. $\frac{\sqrt{6}a^3}{12}$ D. $\frac{\sqrt{6}a^3}{8}$

Câu 4: Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh 3cm. Cạnh bên tạo với đáy một góc bằng 60° . Thể tích của khối chóp đó là:

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{9\sqrt{6}}{2}$ C. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $AC = a$, biết SA vuông góc với đáy ABC và SB hợp với đáy một góc 60° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $a^3\sqrt{6}$ B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$ C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$ D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{24}$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và SA vuông góc với đáy, mặt bên (SCD) hợp với đáy một góc 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $a^3\sqrt{3}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Câu 7: Cho khối chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $2a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

A. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{11}}{12}$ B. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ C. $V_{S.ABC} = \frac{a^3}{12}$ D. $V_{S.ABC} = \frac{a^3}{4}$

Câu 8: Cho khối chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh $3a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

A. $V_{S.ABCD} = 18a^3\sqrt{3}$ B. $V_{S.ABCD} = \frac{9a^3\sqrt{15}}{2}$ C. $V_{S.ABCD} = 9a^3\sqrt{3}$ D. $V_{S.ABCD} = 18a^3\sqrt{15}$

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh BA, BC, BD đôi một vuông góc với nhau:

$BA = 3a, BC = BD = 2a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AD . Thể tích khối chóp $C.BDNM$ là

A. $V = 8a^3$ B. $V = \frac{2a^3}{3}$ C. $V = \frac{3a^3}{2}$ D. $V = a^3$

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ biết $ABCD$ là một hình thang vuông ở A và D ; $AB = 2a$; $AD = DC = a$. Tam giác SAD vuông ở S . Gọi I là trung điểm AD . Biết (SIC) và (SIB) cùng vuông góc với mp $(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a

A. $\frac{a^3}{3}$ B. $\frac{a^3}{4}$ C. $\frac{3a^3}{4}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D ; $AB = AD = 2a$, $CD = a$; góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60° . Gọi I là trung điểm của cạnh AD . Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a là

A. $V = \frac{3\sqrt{13}a^3}{7}$ B. $V = \frac{3\sqrt{15}a^3}{5}$ C. $V = \frac{3\sqrt{5}a^3}{5}$ D. $V = \frac{\sqrt{15}a^3}{15}$

Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi B' và C' lần lượt là trung điểm của AB và AC . Tỷ số thể tích của khối tứ diện $AB'C'D$ và khối tứ diện $ABCD$ là

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{8}$

Câu 13: Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Thể tích của khối chóp đó là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$

Câu 14: Cho hình chóp tam giác có đường cao bằng 100 cm và các cạnh đáy bằng 20 cm, 21 cm, 29 cm. Thể tích của hình chóp đó bằng

A. 6000 cm^3

B. 6213 cm^3

C. 7000 cm^3

D. $7000\sqrt{2}\text{ cm}^3$

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành có M và N theo thứ tự là trung điểm

SA, SB . Khi đó $\frac{V_{S.CDMN}}{V_{S.CDAB}}$ bằng:

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{1}{8}$

C. $\frac{3}{8}$

D. $\frac{1}{4}$

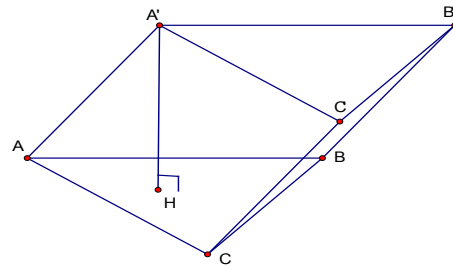
CHỦ ĐỀ 2: THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ:

$$V = B.h$$

với $\begin{cases} B : \text{diện tích đáy} \\ h : \text{chiều cao} \end{cases}$



a) Thể tích khối hộp chữ nhật:

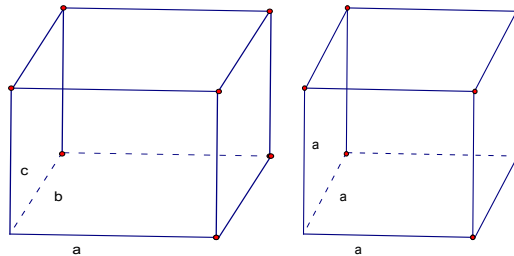
$$V = a.b.c$$

với a, b, c là ba kích thước

b) Thể tích khối lập phương:

$$V = a^3$$

với a là độ dài cạnh



B. PHƯƠNG PHÁP TÍNH THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ

B1: Xác định đáy và đường cao của khối lăng trụ.

B2: Tính diện tích đáy B và chiều cao h

B3: Áp dụng công thức $V = B.h$

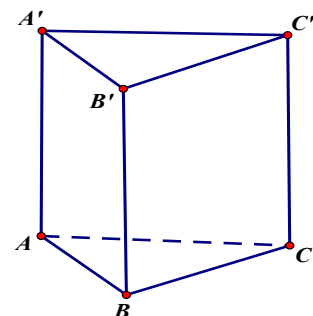
C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài tập 1: Tính thể tích của khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $2a\sqrt{15}$

Giải: Giả sử khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $2a\sqrt{15}$ là $ABCA'B'C'$.

Khi đó Thể tích của khối lăng trụ là

$$V_{ABCA'B'C'} = AA' \cdot S_{ABC} = 2a\sqrt{15} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3\sqrt{5}}{2}$$



$$= \frac{a^3 \sqrt{6}}{12} \text{ (đvtt)}$$

Bài tập 2: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là một tam giác đều cạnh a và điểm A' cách đều các điểm A, B, C . Cạnh bên AA' tạo với mp đáy một góc 60° . Tính thể tích của lăng trụ

Giải:

a. Gọi H là hình chiếu $\perp$ của A' trên (ABC) . Do $A'A=A'B=A'C$ nên H là tâm của tam giác đều ABC .

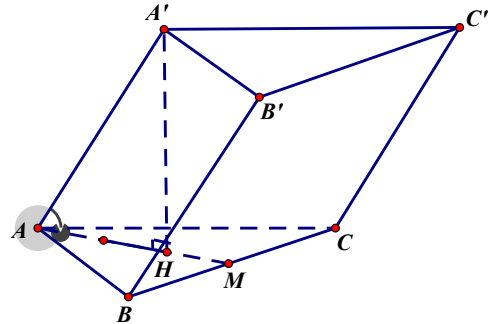
Ta có $AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\widehat{A'AH} = 60^\circ$

Trong Δ vuông $AA'H$ ta có

$$A'H = AH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a, S_{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

Vậy Thể tích khối lăng trụ là

$$V_{ABCA'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'H = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^3 \sqrt{3}}{4}$$



Bài tập 3: Tính thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có đường chéo bằng $AC' = 2a\sqrt{6}$

Giải:

Gọi b là độ dài cạnh của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ Ta có

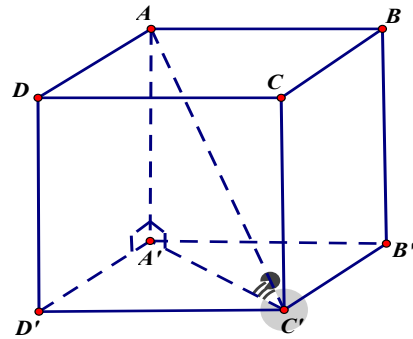
$$A'C' = a\sqrt{2}; AA' = b; AC' = b\sqrt{3}$$

Mặt khác Theo giả thiết ta có $AC' = 2a\sqrt{6}$ nên $b\sqrt{3} = 2a\sqrt{6} \Rightarrow b = 2a\sqrt{2}$

Khi đó $S_{ABCD} = (2a\sqrt{2})^2 = 8a^2$

Vậy Thể tích khối lăng trụ là

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot AA' = 2a\sqrt{2} \cdot 8a^2 = 16a^2 \cdot \sqrt{2}$$



D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1: Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là

- A. $V = Bh$ B. $V = \frac{1}{3}Bh$ C. $V = \frac{1}{2}Bh$ D. $V = \frac{4}{3}Bh$

Câu 2: Cho một khối lập phương biết rằng khi tăng độ dài cạnh của khối lập phương thêm 2cm thì thể tích của nó tăng thêm 98cm^3 . Hỏi cạnh của khối lập phương đã cho bằng:

- A. 3 cm B. 4 cm C. 5 cm D. 6 cm

Câu 3. Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ biết $AC' = 2a\sqrt{3}$.

- A. $V = 8a^3$. B. $V = a^3$. C. $V = 6\sqrt{3}a^3$ D. $V = 8\sqrt{3}a^3$

Câu 4. Một hộp đựng thực phẩm có dạng hình lập phương và có diện tích toàn phần bằng 150dm^2 . Thể tích của khối hộp là

- A. 125cm^3 . B. 125dm^3 . C. $125/3\text{dm}^3$. D. $125/3\text{cm}^3$.

Câu 5. Một khối lập phương có thể tích bằng $2\sqrt{2}a^3$. Cạnh của hình lập phương đó bằng

- A. $2\sqrt{2}a$. B. $\sqrt{2}a$. C. $2a$. D. $\sqrt{3}a$.

Câu 6: Cho hình lăng trụ tam giác đều có các cạnh đều bằng a . Thể tích khối lăng trụ đều là:

- A. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{a^3}{3}$ C. $\frac{2a^3}{3}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Câu 7: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = 2\sqrt{2}cm$ và $AA_1 = 2cm$. Tính thể tích V của khối chóp BA_1ACC_1 .

- A. $V = \frac{16}{3}cm^3$. B. $V = \frac{18}{3}cm^3$. C. $V = \frac{12}{3}cm^3$. D. $V = 8cm^3$.

Câu 8. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B , $AC = a\sqrt{2}$, cạnh bên $AA' = 2a$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $\frac{a^3}{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C. a^3 . D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 9: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác đều cạnh a , góc giữa cạnh bên và mặt đáy là 30° . Hình chiếu của A' trên mặt phẳng đáy (ABC) trùng với trung điểm của cạnh BC . Thể tích khối lăng trụ là.

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Câu 10: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là một tam giác đều cạnh a , $AA' = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ và hình chiếu của A trên ($A'B'C'$) là trung điểm của $B'C'$. Tính thể tích của lăng trụ trên.

- A. $\frac{3a^3}{8}$ B. $\frac{a^3}{8}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ D. $3a^3$

Câu 11: Khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $AD' = 2a$. Thể tích của khối lập phương là:

- A. $V = a^3$ B. $V = 8a^3$ C. $V = 2\sqrt{2}a^3$ D. $V = \frac{2\sqrt{2}}{3}a^3$

Câu 12: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân, $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Mặt phẳng ($AB'C'$) tạo với mặt đáy góc 60° . Thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{2}$ C. a^3 D. $\frac{3a^3}{8}$

Câu 13: Cho hình hộp đứng có đáy là hình thoi cạnh a và có góc nhọn bằng 60° . Đường chéo lớn của đáy bằng đường chéo nhỏ của lăng trụ. Thể tích hình hộp là

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ B. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Câu 14: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy a và mặt phẳng (BDC') hợp với đáy ($ABCD$) một góc 60° . Thể tích khối hộp chữ nhật là

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$ D. $a^3\sqrt{6}$

Câu 15: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và điểm A' cách đều A, B, C biết $AA' = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Thể tích lăng trụ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ D. $a^3\sqrt{3}$

CHỦ ĐỀ 3: MẶT NÓN, MẶT TRỤ.

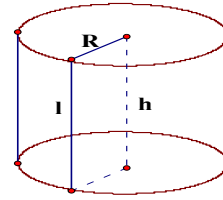
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

3. HÌNH TRỤ- KHỐI TRỤ:

$$S_{xq} = 2\pi Rl \text{ với } \begin{cases} R : \text{bán kính đáy} \\ l : \text{đường sinh} \end{cases}$$

$$S_{TP} = S_{xq} + 2.S_{\text{đáy}} = 2\pi R(l + R)$$

$$V_{\text{trụ}} = \pi R^2 h \text{ với } \begin{cases} R : \text{bán kính đáy} \\ h : \text{đường cao} \end{cases}$$

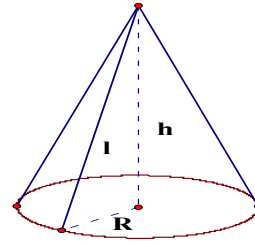


4. HÌNH NÓN – KHỐI NÓN

$$S_{xq} = \pi Rl \text{ với } \begin{cases} R : \text{bán kính đáy} \\ l : \text{đường sinh} \end{cases}$$

$$S_{TP} = S_{xq} + S_{\text{đáy}} = \pi R(l + R)$$

$$V_{\text{nón}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h \text{ với } \begin{cases} R : \text{bán kính đáy} \\ h : \text{đường cao} \end{cases}$$



B. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

1) Mặt nón

Bài tập 1: Cho hình nón, mặt phẳng qua trục và cắt hình nón tạo ra thiết diện là tam giác đều cạnh $2a$. Tính diện tích xung quanh của hình nón và thể tích của khối nón.

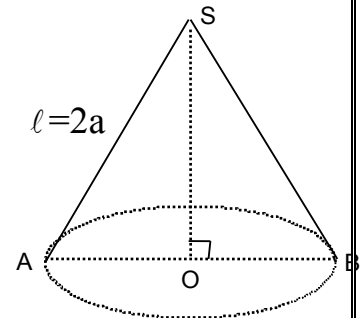
Lời giải

Mặt phẳng qua trục và cắt hình nón tạo ra tam giác đều cạnh $2a$

$$\Rightarrow l = 2R = 2a \Rightarrow h = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$$

$$\text{Diện tích xung quanh : } S_{xq} = \pi Rl = \pi \cdot a \cdot 2a = 2\pi a^2$$

$$\text{Thể tích khối trụ : } V_{(nón)} = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot a^2 \cdot a\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$$



Bài tập 2: Một hình nón có đường sinh bằng $l=2a$ và thiết diện qua trục là tam giác vuông.

- Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón
- Tính thể tích của khối nón

Lời giải

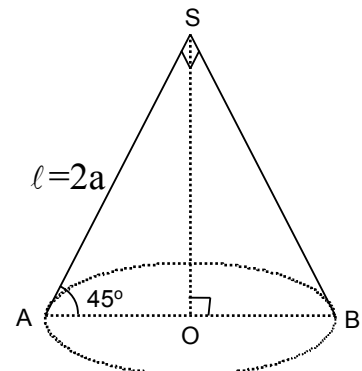
a) Thiết diện qua trục là tam giác SAB vuông cân tại S nên $\hat{A} = \hat{B} = 45^\circ$

$$\Rightarrow SO = OA = h = R = \frac{l}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S_{xq} = \pi Rl = \pi \cdot a\sqrt{2} \cdot 2a = 2\sqrt{2}\pi a^2$$

$$\Rightarrow S_{tp} = S_{xq} + S_{\text{đáy}} = 2\sqrt{2}\pi a^2 + 2\pi a^2 = (2\sqrt{2} + 2)\pi a^2$$

$$\text{b) } V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2a^2 \cdot a\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}\pi a^3}{3}$$



Bài tập 3:

Cho hình chóp đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a , góc SAC bằng 45° .

- Tính thể tích khối chóp.

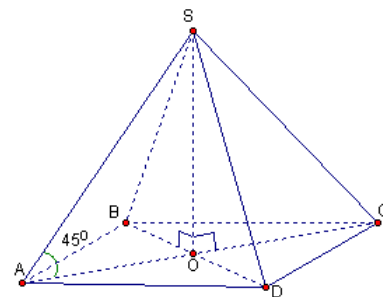
b) Tính diện tích xung quanh của mặt nón ngoại tiếp hình chóp S.ABCD

Lời giải

a) Gọi O là tâm của hình vuông ABCD $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

$$V = \frac{1}{3} B \cdot h; B = a^2; h = SO = OA \cdot \tan 45^\circ = a \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6}$$

b) Ta có $R = OA, l = SA = a$. Vậy $S_{xq} = \pi \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a = \pi \frac{a^2 \sqrt{2}}{2}$



2) Mặt trụ

Bài tập 1: Cho hình trụ có bán kính $R = a$, mặt phẳng qua trục và cắt hình trụ theo một thiết diện có diện tích bằng $6a^2$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ và thể tích của khối trụ.

Lời giải

Mặt phẳng qua trục và cắt hình trụ theo một hình chữ nhật $\Rightarrow S = \ell \cdot 2R = 6a^2$

$$\Rightarrow \ell = \frac{6a^2}{2R} = 3a$$

Diện tích xung quanh : $S_{xq} = 2\pi R \ell = 2\pi \cdot a \cdot 3a = 6\pi a^2$

Thể tích khối trụ : $V_{(T)} = \pi R^2 h = \pi \cdot a^2 \cdot 3a = 3\pi a^3$

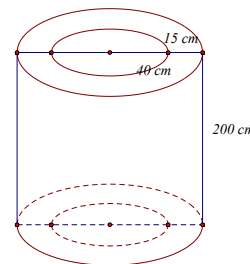
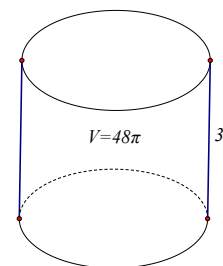
Bài tập 2: Người ta cần đổ một ống thoát nước hình trụ với chiều cao 200cm , độ dày của thành ống là 15cm , đường kính của ống là 80cm . Tính lượng bê tông cần phải đổ

Lời giải:

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối trụ bên ngoài và bên trong

Do đó lượng bê tông cần phải đổ là:

$$V = V_1 - V_2 = \pi \cdot 40^2 \cdot 200 - \pi \cdot 25^2 \cdot 200 = 195000\pi \text{cm}^3 = 0,195\pi \text{m}^3$$



C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho khối nón tròn xoay có chiều cao h , bán kính đường tròn đáy bằng R . Thể tích của khối nón là:

- A. $V = 3\pi R^2 h$ B. $V = \pi R^2 h$ C. $V = \frac{4}{3}\pi R^2 h$ D. $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

Câu 2. Cho khối nón tròn xoay có đường sinh l và bán kính đường tròn đáy bằng R . Diện tích toàn phần của khối nón là:

- A. $S_{tp} = \pi R(l + R)$ B. $S_{tp} = \pi R(l + 2R)$
C. $S_{tp} = 2\pi R(l + R)$ D. $S_{tp} = \pi R(2l + R)$

Câu 3. Cho khối trụ có chiều cao h và bán kính đường tròn đáy bằng r . Thể tích của khối trụ là:

- A. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ B. $V = 3\pi r^2 h$ C. $V = \pi r^2 h$ D. $V = \frac{1}{3}\pi^2 r h$

Câu 4. Cho một khối trụ có khoảng cách giữa hai đáy là l và bán kính của đường tròn đáy là r . Diện tích toàn phần của khối trụ là:

- A. $S_{tp} = 2\pi r(l + r)$ B. $S_{tp} = \pi r(2l + r)$
C. $S_{tp} = \pi r(l + r)$ D. $S_{tp} = 2\pi r(l + 2r)$

Câu 5. Thiết diện qua trục của hình trụ là một hình vuông có cạnh bằng $2a$. Khi đó thể tích khối trụ là:

- A. $8\pi a^3$ B. $2\pi a^3$ C. πa^3 D. $4\pi a^3$

Câu 6. Một hình nón có góc ở đỉnh bằng 60° , đường sinh bằng $2a$, diện tích xung quanh của hình nón là:

- A. $S_{xq} = 4\pi a^2$ B. $S_{xq} = 2\pi a^2$ C. $S_{xq} = \pi a^2$ D. $S_{xq} = 3\pi a^2$

Câu 7. Cho hình nón đỉnh S và đáy của hình nón là hình tròn tâm O bán kính R. Biết $SO = h$. Đường sinh của hình nón bằng :

- A. $2\sqrt{R^2 + h^2}$ B. $\sqrt{R^2 + h^2}$ C. $\sqrt{h^2 - R^2}$ D. $2\sqrt{h^2 - R^2}$

Câu 6. Cho hình nón, mặt phẳng qua trục và cắt hình nón tạo ra thiết diện là tam giác đều cạnh $2a$. Tính diện tích xung quanh của hình nón và thể tích của khối nón.

- A. $\sqrt{6}\pi a^2; 9\pi a^3$ B. $\pi a^2; 9\pi a^3$ C. $2\pi a^2; \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$ D. $2\pi a^2; \sqrt{3}\pi a^3$

Câu 9. Một công ty sản xuất một loại cốc giấy hình nón có thể tích 27cm^3 . Với chiều cao h và bán kính đáy là r . Tìm r để lượng giấy tiêu thụ ít nhất.

- A. $r = \sqrt[4]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$ B. $r = \sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$ C. $r = \sqrt[4]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$ D. $r = \sqrt[6]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$

Câu 10. Trong không gian cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 4$ và $BC = 2$. Quay hình chữ nhật ABCD xung quanh trục BC ta được một hình trụ. Tính diện tích xung quanh của hình trụ đó.

- A. 10π B. 12π C. 4π D. 16π

Câu 11. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a . Gọi S là diện tích xung quanh của hình trụ có hai đường tròn đáy ngoại tiếp hai hình vuông ABCD và A'B'C'D'. Diện tích S là :

- A. πa^2 B. $\pi a^2 \sqrt{2}$ C. $\pi a^2 \sqrt{3}$ D. $\frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{2}$

Câu 12. Một hình trụ có 2 đáy là 2 hình tròn nội tiếp hai mặt của một hình lập phương cạnh a . Thể tích của khối trụ đó là:

- A. $\frac{1}{2}a^3\pi$ B. $\frac{1}{4}a^3\pi$ C. $\frac{1}{3}a^3\pi$ D. $a^3\pi$

Câu 13. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , góc giữa mặt phẳng (A'BC) với mặt đáy bằng 45° . Một hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ. Thể tích của khối trụ tròn là

- A. $\frac{\pi a^3 \sqrt{21}}{6}$ B. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{18}$ D. $\frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{6}$

Câu 14. Cho hình lăng trụ đứng ABCA'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , góc giữa mặt phẳng (A'BC) với mặt đáy bằng 30° . Một hình trụ nội tiếp hình lăng trụ. Thể tích của khối trụ tròn là

- A. $\frac{\pi a^2}{24}$ B. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{24}$ C. $\frac{\pi a^3}{72}$ D. $\frac{\pi a^3}{24}$

Câu 15. Cần thiết kế các thùng dạng hình trụ có nắp đậy để đựng sản phẩm đã được chế biến có dung tích định sẵn $V (\text{cm}^3)$. Hãy xác định bán kính đáy của hình trụ theo V để tiết kiệm vật liệu nhất

- A. $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi^2}}$ B. $r = \sqrt[3]{\frac{2V}{\pi^2}}$ C. $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi^2}}$ D. $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi^2}}$

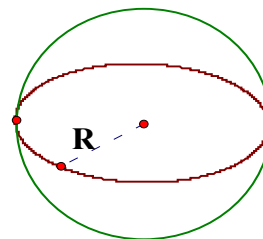
CHỦ ĐỀ 4: MẶT CẦU

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. DIỆN TÍCH MẶT CẦU, THỂ TÍCH KHỐI CẦU:

$$S_{mc} = 4\pi R^2, R : \text{bán kính.}$$

$$V_{trụ} = \frac{4}{3}\pi R^3, R : \text{bán kính.}$$



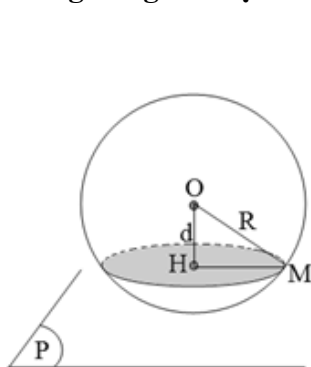
2. CÁCH XÁC ĐỊNH TÂM CỦA MẶT CẦU NGOẠI TIẾP HÌNH CHÓP.

- Xác định trục Δ của đáy (Δ là đường thẳng vuông góc với đáy tại tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy).
- Xác định mặt phẳng trung trực (P) của một cạnh bên.
- Giao điểm của (P) và Δ là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

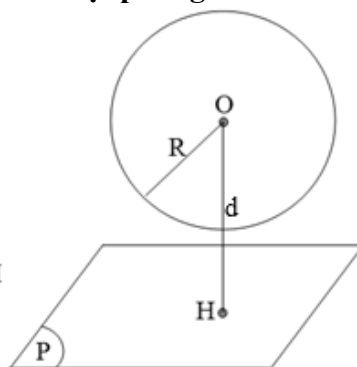
3. CÁCH XÁC ĐỊNH TÂM CỦA MẶT CẦU NGOẠI TIẾP HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG:

- Xác định trục Δ của hai đáy (Δ là đường thẳng vuông góc với đáy tại tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy).
- Trung điểm đoạn nối hai tâm đa giác đáy là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đứng

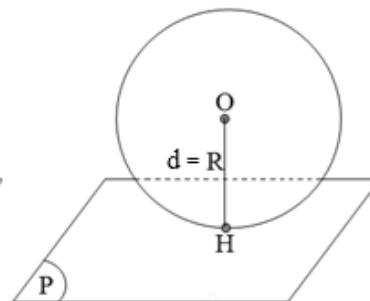
4. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng



Hình a



Hình b



Hình c

Cho mặt cầu $S(O; R)$ và mặt phẳng (P). Gọi $d = d(O; (P))$.

- Nếu $d < R$ thì (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn nằm trên (P), có tâm H và bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.
- Nếu $d = R$ thì (P) tiếp xúc với (S) tại tiếp điểm H. ((P) được gọi là tiếp diện của (S))
- Nếu $d > R$ thì (P) và (S) không có điểm chung.

Khi $d = 0$ thì (P) đi qua tâm O và được gọi là mặt phẳng kính, đường tròn giao tuyến có bán kính bằng R được gọi là đường tròn lớn

5. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng

Cho mặt cầu $S(O; R)$ và đường thẳng Δ . Gọi $d = d(O; \Delta)$.

- Nếu $d < R$ thì Δ cắt (S) tại hai điểm phân biệt.
- Nếu $d = R$ thì Δ tiếp xúc với (S). (Δ được gọi là tiếp tuyến của (S)).
- Nếu $d > R$ thì Δ và (S) không có điểm chung.

B. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài tập 1: Cho hình chóp $S.ABC$, đáy là tam giác vuông tại A , $AB = 3, AC = 4$, SA vuông góc với đáy, $SA = 2\sqrt{14}$. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

The diagram shows a triangle ABC with vertices A , B , and C . A point S is located above the triangle. A vertical line passes through S and intersects the base BC at point M . A point J lies on the segment AS , and a point I lies on the segment SM . Dashed lines connect J to B and C , and I to B and C . Right angle symbols are shown at A (for $AS \perp BC$) and at M (for the vertical line $\perp BC$).

$$\text{Vậy } V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{9}{2}\right)^3 = \frac{729}{6}\pi$$

$$\text{Vậy } S = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \pi a^2; \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi a^3$$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Diện tích S của một mặt cầu có bán kính r được xác định bởi công thức nào sau đây:

- A. $S = 4\pi r$ B. $S = 4\pi r^2$ C. $S = 4\pi^2 r^2$ D. $S = 4r^2$

Câu 2: Thể tích V của một mặt cầu có bán kính r được xác định bởi công thức nào sau đây:

- A. $V = \frac{4\pi r}{3}$ B. $V = \frac{4\pi^2 r^2}{3}$ C. $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ D. $V = \frac{4\pi^2 r^3}{3}$

Câu 3. Một khối cầu có bán kính $2R$ thì có thể tích bằng:

- A. $\frac{4\pi R^3}{3}$ B. $4\pi R^2$ C. $\frac{32\pi R^3}{3}$ D. $\frac{16\pi R^3}{3}$

Câu 4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD A'B'C'D'$ có : $AB = a$, $AD = 2a$, $AA' = 2a$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ACB'D'$ là : A. a B. $2a$ C. $\frac{a}{2}$ D. $\frac{3a}{2}$

Câu 5. Cho mặt cầu (S) tâm I bán kính $R = 3$. Mặt phẳng (P) cách tâm I một khoảng $\sqrt{5}$, cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn (C). Tính chu vi của (C).

- A. 2π B. 4π C. 8π D. 10π

Câu 6: Một hình hộp chữ nhật có ba kích thước là a, b, c . Khi đó mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật có bán kính r bằng:

- A. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ B. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ C. $\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$ D. $\frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Câu 7: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc nhau và $OA = a, OB = 2a, OC = 3a$. Diện tích của mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng:

- A. $S = 14\pi a^2$ B. $S = 12\pi a^2$ C. $S = 10\pi a^2$ D. $S = 8\pi a^2$

Câu 8. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng 1. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

- A. $V = \frac{2\pi}{3}$ B. $V = \frac{\sqrt{2}\pi}{3}$ C. $V = \frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$ D. $V = \frac{2\pi}{3}$

Câu 9. Cho hình chóp $D.ABC$ có $DA \perp (ABC)$, đáy ABC là tam giác vuông tại B . Đặt $AB = c, BC = a, AD = b$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

- A. $\frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ B. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ C. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ D. $2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Câu 10. Cho lập phương $ABCD A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Thể tích V của mặt cầu ngoại tiếp khối lập phương là :

- A. $\frac{\pi a^3}{3}$ B. $\frac{4\pi a^3}{3}$ C. $\frac{\pi a^3}{2}$ D. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{2}$

ĐỀ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN CỞ ĐIỂN TRONG ĐỀ THI THPTQG NĂM 2017

Mã đề 101

Câu 11. Tính thể tích V của khối trụ có bán kính đáy $r = 4$ và chiều cao $h = 4\sqrt{2}$.

- A. $V = 128\pi$ B. $V = 64\sqrt{2}\pi$ C. $V = 32\pi$ D. $V = 32\sqrt{2}\pi$

Câu 18. Hình hộp chữ nhật có ba kích thước đôi một khác nhau có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng ?

- A. 4 mặt phẳng. B. 3 mặt phẳng. C. 6 mặt phẳng. D. 9 mặt phẳng.

Câu 21. Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a , cạnh bên gấp hai lần cạnh đáy. Tính tích V của khối chóp tứ giác đã cho.

A. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{2}$

B. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$

C. $V = \frac{\sqrt{14}a^3}{2}$

D. $V = \frac{\sqrt{14}a^3}{6}$

Câu 26. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp một hình lập phương có cạnh bằng $2a$.

A. $R = \frac{\sqrt{3}a}{3}$

B. $R = a$

C. $R = 2\sqrt{3}a$

D. $R = \sqrt{3}a$

Câu 31. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh đều bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối nón đỉnh S và đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$.

A. $V = \frac{\pi a^3}{2}$

B. $V = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{6}$

C. $V = \frac{\pi a^3}{6}$

D. $V = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{2}$

Câu 43. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy và SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30° . Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{3}$

B. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$

C. $V = \frac{2a^3}{3}$

D. $V = \sqrt{2}a^3$

Câu 44. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và E là điểm đối xứng với B qua D . Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V . Tính V .

A. $V = \frac{7\sqrt{2}a^3}{216}$

B. $V = \frac{11\sqrt{2}a^3}{216}$

C. $V = \frac{13\sqrt{2}a^3}{216}$

D. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{18}$

Câu 50. Cho hình nón đỉnh S có chiều cao $h = a$ và bán kính đáy $r = 2a$. Mặt phẳng (P) đi qua S cắt đường tròn đáy tại A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}a$. Tính khoảng cách d từ tâm của đường tròn đáy đến (P) .

A. $d = \frac{\sqrt{3}a}{2}$

B. $d = a$

C. $d = \frac{\sqrt{5}a}{5}$

D. $d = \frac{\sqrt{2}a}{2}$

Mã đề 102

Câu 18. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = a^3$.

B. $V = \frac{a^3}{3}$.

C. $V = \frac{a^3}{6}$.

D. $V = \frac{a^3}{2}$.

Câu 19. Cho khối nón có bán kính đáy $r = \sqrt{3}$ và chiều cao $h = 4$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

A. $V = \frac{16\pi\sqrt{3}}{3}$

B. $V = 4\pi$

C. $V = 16\pi\sqrt{3}$

D. $V = 12\pi$

Câu 22. Cho mặt cầu bán kính R ngoại tiếp một hình lập phương cạnh a . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a = 2\sqrt{3}R$

B. $a = \frac{\sqrt{3}R}{3}$

C. $a = 2R$

D. $a = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$

Câu 25. Mặt phẳng $(AB'C')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành các khối đa diện nào?

A. Một khối chóp tam giác và một khối chóp ngũ giác.

B. Một khối chóp tam giác và một khối chóp tứ giác.

C. Hai khối chóp tam giác.

D. Hai khối chóp tứ giác.

Câu 36. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{a^3}{3}$ B. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$ C. $V = a^3$ D. $V = 3a^3$

Câu 43. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng $3a$. Hình nón (N) có đỉnh A và đường tròn đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD . Tính diện tích xung quanh S_{xq} của (N) .

- A. $S_{xq} = 6\pi a^2$ B. $S_{xq} = 3\sqrt{3}\pi a^2$ C. $S_{xq} = 12\pi a^2$ D. $S_{xq} = 6\sqrt{3}\pi a^2$

Câu 49. Xét khối tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB = x$ và các cạnh còn lại đều bằng $2\sqrt{3}$. Tìm x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất

- A. $x = \sqrt{6}$ B. $x = \sqrt{14}$ C. $x = 3\sqrt{2}$ D. $x = 2\sqrt{3}$

Câu 50. Cho mặt cầu (S) có bán kính bằng 4, hình trụ (H) có chiều cao bằng 4 và hai đường tròn đáy nằm trên (S) . Gọi V_1 là thể tích của khối trụ (H) và V_2 là thể tích của khối cầu (S) . Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{9}{16}$ B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$ C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{16}$ D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3}$

ĐỀ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN CÔ ĐIỂN TRONG ĐỀ THI THPTQG NĂM 2018

Mã đề 101

Khối đa diện: (3 câu)

Câu 15: Cho khối chóp có đáy là hình vuông cạnh a , chiều cao bằng $2a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- A. $4a^3$ B. $\frac{2}{3}a^3$ C. $2a^3$ D. $\frac{4}{3}a^3$

Câu 27: Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy bằng 3mm và chiều cao bằng 200mm. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính. Giả định 1m^3 gỗ có giá 1 (triệu đồng), 1m^3 than chì có giá là 8a (triệu đồng). Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

- A. 9,7.a (đồng) B. 97,03.a (đồng) C. 90,7.a (đồng) D. 9,07.a (đồng)

Câu 31: Ông A dự định sử dụng hết $6,5\text{m}^3$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

- A. $2,26\text{m}^3$ B. $1,61\text{m}^3$ C. $1,33\text{m}^3$ D. $1,50\text{m}^3$

Khối tròn xoay: (1 câu)

Câu 10: Diện tích của mặt cầu bán kính R bằng

- A. $\frac{4}{3}\pi R^2$ B. $2\pi R^2$ C. $4\pi R^2$ D. πR^2

Quan hệ vuông góc (4 câu)

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$. có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

- A. 60° B. 90° C. 30° D. 45°

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABC$. có đáy là tam giác vuông đỉnh B , $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$

B. $\frac{\sqrt{5}a}{3}$

C. $\frac{2\sqrt{2}a}{3}$

D. $\frac{\sqrt{5}a}{5}$

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB=a$, $BC=2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

A. $\frac{\sqrt{6}a}{2}$

B. $\frac{2a}{3}$

C. $\frac{a}{2}$

D. $\frac{a}{3}$

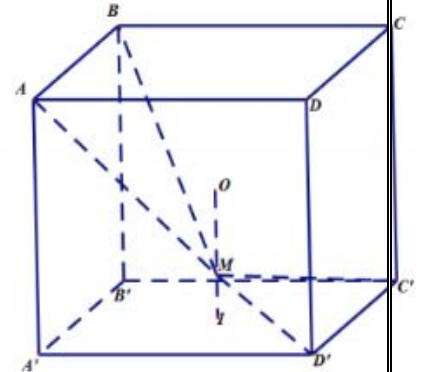
Câu 37: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $MO=2MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng

A. $\frac{6\sqrt{85}}{85}$

B. $\frac{7\sqrt{85}}{85}$

C. $\frac{17\sqrt{13}}{65}$

D. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$



Mã đề 102

Khối đa diện: (3 câu)

Câu 7. Cho khối chóp có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $4a$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{4}{3}a^3$

B. $\frac{16}{3}a^3$

C. $4a^3$

D. $16a^3$

Câu 26. Ông A dự định sử dụng hết $6,7m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

A. $1,57 m^3$

B. $1,11 m^3$

C. $1,23 m^3$

D. $2,48 m^3$

Câu 31. Một chiếc bút chì có dạng khối trụ lục giác đều có cạnh đáy 3 (mm) và chiều cao bằng 200 (mm). Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính 1 (mm). Giả định $1m^3$ gỗ có giá a triệu đồng, $1m^3$ than chì có giá $6a$ triệu đồng. Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $84,5.a$ đồng

B. $78,2.a$ đồng

C. $8,45.a$ đồng

D. $7,82.a$ đồng

Khối tròn xoay: (1 câu)

Câu 9. Thể tích của khối cầu bán kính R bằng

A. $\frac{4}{3}\pi R^3$

B. $4\pi R^3$

C. $2\pi R^3$

D. $\frac{3}{4}\pi R^3$

Quan hệ vuông góc (4 câu)

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=\sqrt{2}a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

A. 45°

B. 60°

C. 30°

D. 90°

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B , $AB=a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{a}{2}$

B. a

C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB=a$, $BC=2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD , SC bằng

A. $\frac{a\sqrt{30}}{6}$

B. $\frac{4\sqrt{21}a}{21}$

C. $\frac{2\sqrt{21}a}{21}$

D. $\frac{a\sqrt{30}}{12}$

Câu 39. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $MO = \frac{1}{2}MI$. Khi đó cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng

A. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$

B. $\frac{7\sqrt{85}}{85}$

C. $\frac{6\sqrt{85}}{85}$

D. $\frac{17\sqrt{13}}{65}$

ĐỀ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN CỞ ĐIỂN TRONG ĐỀ THAM KHẢO NĂM 2019

Khối đa diện: (3 câu)

Câu 1. Thể tích khối lập phương có cạnh $2a$ bằng

A. $8a^3$.

B. $2a^3$.

C. a^3 .

D. $6a^3$.

Câu 4. Cho khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng $2a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{4\sqrt{2}a^3}{3}$.

B. $\frac{8a^3}{3}$.

C. $\frac{8\sqrt{2}a^3}{3}$.

D. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

Câu 6. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 1. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AA' và BB' . Đường thẳng CM cắt đường thẳng $C'A'$ tại P , đường thẳng CN cắt đường thẳng $C'B'$ tại Q . Thể tích khối đa diện lồi $A'MPB'NQ$ bằng

A. 1.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Khối tròn xoay: (3 câu)

Câu 2. Thể tích khối cầu bán kính a bằng

A. $\frac{4\pi a^3}{3}$.

B. $4\pi a^3$.

C. $\frac{\pi a^3}{3}$.

D. $2\pi a^3$.

Câu 3. Cho khối nón có độ dài đường sinh bằng $2a$ và bán kính đáy bằng a . Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$.

C. $\frac{2\pi a^3}{3}$.

D. $\frac{\pi a^3}{3}$.

Câu 5. Một khối đồ chơi gồm hai khối trụ (H_1) , (H_2) xếp chồng lên nhau, lần

lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là r_1 , h_1 , r_2 , h_2 thỏa mãn $r_2 = \frac{1}{2}r_1$,

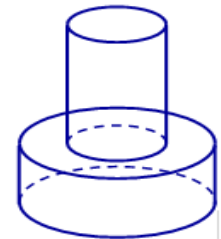
$h_2 = 2h_1$ (tham khảo hình vẽ). Biết rằng thể tích của toàn bộ khối đồ chơi bằng $30 \text{ (cm}^3\text{)}$, thể tích khối trụ (H_1) bằng

A. $24 \text{ (cm}^3\text{)}$.

B. $15 \text{ (cm}^3\text{)}$.

C. $20 \text{ (cm}^3\text{)}$.

D. $10 \text{ (cm}^3\text{)}$.



Quan hệ vuông góc (2 câu)

Câu 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ABC'D')$ bằng

A. 30° .

B. 60° .

C. 45° .

D. 90° .

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

B. $\frac{a\sqrt{15}}{7}$.

C. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{15}}{3}$.

ĐỀ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN CỞ ĐIỂN TRONG ĐỀ NĂM 2019

Khối đa diện: (3 câu)**Câu 12.** Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là

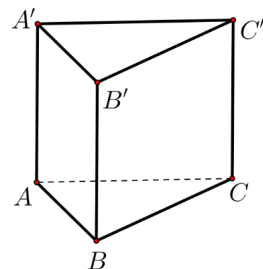
- A. $3Bh.$ B. $Bh.$ C. $\frac{4}{3}Bh.$ D. $\frac{1}{3}Bh.$

Câu 47. Cho lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có chiều cao bằng 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 6. Gọi M, N và P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng:

- A. $27\sqrt{3}.$ B. $21\sqrt{3}.$ C. $30\sqrt{3}.$ D. $36\sqrt{3}.$

Câu 22. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA' = \sqrt{3}a$ (hình minh họa như hình vẽ). Thể tích của lăng trụ đã cho bằng

- A. $\frac{3a^3}{4}.$ B. $\frac{3a^3}{2}.$
C. $\frac{a^3}{4}.$ D. $\frac{a^3}{2}.$

**Khối tròn xoay: (3 câu)****Câu 8.** Thể tích của khối nón có chiều cao h và bán kính r là

- A. $\frac{1}{3}\pi r^2 h.$ B. $\pi r^2 h.$ C. $\frac{4}{3}\pi r^2 h.$ D. $2\pi r^2 h.$

Câu 27. Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng $1m$ và $1,2m$. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm **gần nhất** với kết quả nào dưới đây?

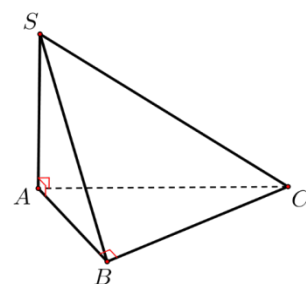
- A. $1,8m.$ B. $1,4m.$ C. $2,2m.$ D. $1,6m.$

Câu 38. Cho hình trụ có chiều cao bằng $5\sqrt{3}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng 30. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

- A. $10\sqrt{3}\pi.$ B. $5\sqrt{39}\pi.$ C. $20\sqrt{3}\pi.$ D. $10\sqrt{39}\pi.$

Quan hệ vuông góc (2 câu)**Câu 17.** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại B , $AB = a\sqrt{3}$ và $BC = a$ (minh họa hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

- A. $90^\circ.$ B. $45^\circ.$
C. $30^\circ.$ D. $60^\circ.$

**Câu 40.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng

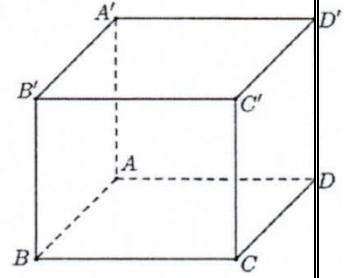
- A. $\frac{\sqrt{21}a}{14}.$ B. $\frac{\sqrt{21}a}{7}.$ C. $\frac{\sqrt{2}a}{2}.$ D. $\frac{\sqrt{21}a}{28}.$

ĐỀ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN CỞ ĐIỂN TRONG ĐỀ THAM KHẢO NĂM 2020 (lần 1)**Khối đa diện: (3 câu)****Câu 5.** Cho khối lập phương có cạnh bằng 6. Thể tích của khối lập phương đã cho bằng

- A. 216. B. 18. C. 36. D. 72.

Câu 26. Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hai hình thoi cạnh a , $BD = \sqrt{3}a$ và $AA' = 4a$ (minh họa như hình bên). Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $2\sqrt{3}a^3$. B. $4\sqrt{3}a^3$.
C. $\frac{2\sqrt{3}a^2}{3}$. D. $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.



Câu 49. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = a$, $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng 60° . Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- A. a^3 . B. $\frac{a^3}{3}$. C. $\frac{a^3}{2}$. D. $\frac{a^3}{6}$.

Khối tròn xoay: (3 câu)

Câu 3. Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh l và bán kính đáy r bằng

- A. $4\pi rl$. B. $2\pi rl$. C. πrl . D. $\frac{1}{3}\pi rl$.

Câu 22. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 3. Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng qua trục, thiết diện thu được là một hình vuông. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

- A. 18π . B. 36π . C. 54π . D. 27π .

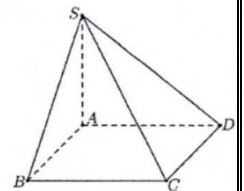
Câu 40. Cho hình nón có chiều cao bằng $2\sqrt{5}$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều có diện tích bằng $9\sqrt{3}$. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

- A. $\frac{32\sqrt{5}\pi}{3}$. B. 32π . C. $32\sqrt{5}\pi$. D. 96π .

Quan hệ vuông góc (2 câu)

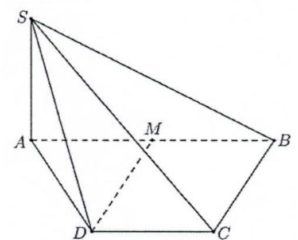
Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $\sqrt{3}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}a$ (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .



Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $AB = 2a$, $AD = DC = CB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 3a$ (minh họa như hình bên). Gọi M là trung điểm của AB . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và DM bằng

- A. $\frac{3a}{4}$. B. $\frac{3a}{2}$.
C. $\frac{3\sqrt{13}a}{13}$. D. $\frac{6\sqrt{13}a}{13}$.



ĐỀ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN CỞ ĐIỂN TRONG ĐỀ THAM KHẢO NĂM 2020 (lần 2)

Khối đa diện: (3 câu)

Câu 4:

Thể tích của khối lập phương cạnh 2 bằng

- A. 6. B. 8. C. 4. D. 2.

Câu 7: Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 3$ và chiều cao $h = 4$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng:

- A. 6. B. 12. C. 36. D. 4.

Câu 49: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có chiều cao bằng 8 và diện tích đáy bằng 9. Gọi M,N,P và Q lần lượt là tâm của các mặt bên ABB'A', BCC'B', CDD'C' và DAA'D'. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A,B,C,D,M,N,P và Q bằng

A. 27. B. 30. C. 18. D. 36.

Khối tròn xoay: (5 câu)

Câu 8: Cho khối nón có chiều cao $h = 3$ và bán kính đáy $r = 4$. Thể tích của khối nón đã cho bằng:

- A. 16π . B. 48π . C. 36π . D. 41π .

Câu 9: Cho mặt cầu có bán kính $R = 2$. Diện tích của mặt cầu đã cho bằng:

- A. $32/3\pi$. B. 8π . C. 16π . D. 4π .

Câu 12: Diện tích xung quanh của hình trụ có độ dài đường sinh l và bán kính đáy r bằng:

- A. $4\pi rl$. B. πrl . C. $1/3\pi rl$. D. $2\pi rl$.

Câu 32: Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$ và $AC = 2a$. Khi quay tam giác ABC xung quanh cạnh góc vuông AB thì đường gấp khúc ACB tạo thành một hình nón. Diện tích xung quanh của hình nón đó bằng

- A. $5\pi a^2$ B. $\sqrt{5}\pi a^2$. C. $2\sqrt{5}\pi a^2$. D. $10\pi a^2$.

Câu 44: Cho hình trụ có chiều cao bằng $6a$. Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bằng một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $3a$, thiết diện thu được là một hình vuông. Thể tích của khối trụ giới hạn bởi hình trụ đã cho là

- A. $216\pi a^3$. B. $150\pi a^3$. C. $54\pi a^3$. D. $108\pi a^3$.

Quan hệ vuông góc (2 câu)

Câu 26: Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = a\sqrt{2}$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AC = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 40: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = 2a$, $AC = 4a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi M là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BC bằng

- A. $2a$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}a$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{a}{2}$

CHUYÊN ĐỀ: PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1. Tọa độ vector: Cho $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Ta có

$$\bullet \vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3) \quad \bullet k \cdot \vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$$

$$\bullet \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\bullet \vec{a} \text{ cùng phương } \vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \vec{a} = k \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

$$\bullet \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\bullet \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

$$\bullet |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\bullet \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

2. Tọa độ điểm: Cho $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$

$$\circ \vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$$

$$\circ |\vec{AB}| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$\circ M \text{ là trung điểm của } AB \Leftrightarrow M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

$$\circ G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \Leftrightarrow G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

$\circ$ Điểm M thuộc trục tọa độ:

$$\bullet M \in Ox \Leftrightarrow M(x; 0; 0). \quad \bullet M \in Oy \Leftrightarrow M(0; y; 0). \quad \bullet M \in Oz \Leftrightarrow M(0; 0; z).$$

NX : có cái gì giữ nguyên cái đó, vắng cái gì cái đó bằng 0.

$\circ$ Điểm M thuộc mặt phẳng tọa độ:

$$\bullet M \in (Oxy) \Leftrightarrow M(x; y; 0). \quad \bullet M \in (Oyz) \Leftrightarrow M(0; y; z). \quad \bullet M \in (Oxz) \Leftrightarrow M(x; 0; z).$$

NX : có cái gì giữ nguyên cái đó, vắng cái gì cái đó bằng 0.

$\circ M'$ là hình chiếu của điểm $M(a; b; c)$ lên mp tọa độ:

$$\bullet (Oxy) \Rightarrow M'(a; b; 0); \bullet (Oyz) \Rightarrow M'(0; b; c). \bullet (Oxz) \Rightarrow M'(a; 0; c).$$

$\circ M'$ là hình chiếu của điểm $M(a; b; c)$ lên trục tọa độ:

$$\bullet Ox \Rightarrow M'(a; 0; 0). \bullet Oy \Rightarrow M'(0; b; 0). \bullet Oz \Rightarrow M'(0; 0; c).$$

3. Tích có hướng của hai vector: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\text{Tích có hướng của hai vector } \vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ là một vector, k/h: } [\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\text{- Điều kiện để 3 vector đồng phẳng: } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ đồng phẳng} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$$

$$\text{- } \vec{a} \text{ cùng phương } \vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$$

$$\text{- Diện tích hình bình hành } ABCD : S_{ABCD} = |[\vec{AB}, \vec{AD}]|$$

$$\text{- Diện tích tam giác } ABC : S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\vec{AB}, \vec{AC}]|$$

$$\begin{aligned}
 & \text{- Thể tích tứ diện } ABCD : V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}| \\
 & \text{- Thể tích hình hộp } ABCD.A'B'C'D' : V_{ABCD.A'B'C'D'} = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] \cdot \overrightarrow{AA'}|
 \end{aligned}$$

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

1. Chứng minh 3 điểm A,B,C thẳng hàng; không thẳng hàng:

- 3 điểm A,B,C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \vec{0}$
- 3 điểm A,B,C không thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \neq k \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \neq \vec{0}$

2. D(x;y;z) là đỉnh hình bình hành ABCD $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

3. Chứng minh 4 điểm A,B,C,D đồng phẳng, không đồng phẳng

- 4 điểm A,B,C,D đồng phẳng $\Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 0$
- 4 điểm A,B,C,D không đồng phẳng $\Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} \neq 0$ (A,B,C,D là đỉnh tứ diện ABCD)

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho vector $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$. Tìm tọa độ điểm M ?

A. M(2;5;3). B. M(-2;-5;-3). C. M(2;-5;3). D. M(-2;5;-3).

Câu 2. Trong không gian Oxyz cho $\vec{a}(3;-1;2); \vec{b}(4;2;-6)$ Tính tọa độ của vector $\vec{a} + \vec{b}$

A. $\vec{a} + \vec{b} = (1;3;-8)$. B. $\vec{a} + \vec{b} = (7;1;-4)$. C. $\vec{a} + \vec{b} = (-1;-3;8)$. D. $\vec{a} + \vec{b} = (-7;-1;4)$.

Câu 3. Trong không gian Oxyz cho điểm M(1;2;3) Tìm tọa độ điểm M' là hình chiếu của M trên trục Ox. M'(0;1;0). B. M'(0;0;1). C. M'(1;0;0). D. M'(0;2;3).

Câu 4. Trong không gian Oxyz. Cho M(2;-5;7) Tìm tọa độ hình chiếu của M trên mặt phẳng Oxy. A. (-22;15;-7) B. (-4;-7;-3) C. (2;-5;0) D. (1;0;2)

Câu 5. Trong không gian Oxyz cho M(1;-2;4) và N(-2;3;5). Tính tọa độ của $\overrightarrow{MN}$

A. $\overrightarrow{MN} = (-3;5;1)$. B. $\overrightarrow{MN} = (3;-5;-1)$. C. $\overrightarrow{MN} = (-1;1;9)$. D. $\overrightarrow{MN} = (1;-1;-9)$

Câu 6. Cho $\vec{a} = (2;-1;2)$. Tìm y, z sao cho $\vec{c} = (-2;y;z)$ cùng phương với $\vec{a}$

A. y = -1; z = 2 B. y = 2; z = -1 C. y = 1; z = -2 D. y = -2; z = 1

Câu 7. Tính góc giữa hai vector $\vec{a} = (-2;-1;2)$ và $\vec{b} = (0;1;-1)$

A. 135° B. 90° C. 60° D. 45°

Câu 8. Cho $\vec{a} = (1;m;-1); \vec{b} = (2;1;3)$. Tìm m để $\vec{a} \perp \vec{b}$. A. m = 1 B. m = -1 C. m = -2 D. m = 2

Câu 9. Cho $\vec{a} = (1;-3;2), \vec{b} = (m+1, m-2, 1-m), \vec{c} = (0; m-2; 2)$. Tìm m để ba vector đó đồng phẳng.

A. m = 0 V m = -2 B. m = -1 V m = 2 C. m = 0 V m = -1 D. m = 2 V m = 0

Câu 10. Trong không gian Oxyz cho 2 điểm A(1;-2;1), B(5;6;3). Tọa độ trung điểm I của AB là

A. (6;4;4) B. (3;2;2) C. (4;8;2) D. (2;4;1)

Câu 10: Trong không gian Oxyz cho 3 điểm A(2;-1;1), B(5;5;4) và C(3;2;-1). Tọa độ tâm G của tam giác ABC là

A. $\left(\frac{10}{3}; \frac{4}{3}; 2\right)$ B. $\left(\frac{10}{3}; 2; \frac{4}{3}\right)$ C. $\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{10}{3}\right)$ D. $\left(\frac{1}{3}; 2; \frac{4}{3}\right)$

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình hành ABDC với A(1;2;1), B(1;1;0), C(1;0;2). Tọa độ đỉnh D là

A. (1;-1;1) B. (1;1;3) C. (1;-1;3) D. (-1;1;1)

Câu 12. Trong không gian Oxyz . Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' biết A (1 ; 0 ; 1), B (2 ; 1 ; 2), D (1 ; -1 ; 4) , C (4 ; 5 ; -5) Tọa độ điểm A' là :

- A. (3 ; 5 ; -6) B. (-2 ; 1 ; 1) C (5 ; -1 ; 0) D. (2 ; 0 ; 2)

Câu 13. Trong không gian Oxyz .Cho hai điểm A (2 ; 5 ; 1) , B (-1 ; 7 ; -3) . Điểm nào sau đây thẳng hàng với A, B.

- A. (-4 ; 9 ; -7) B. (11 ; -1 ; 12) C. (14 ; -3 ; 16) D. (0 ; 2 ; 0)

Câu 14. Cho 2 điểm $A(2; -1; 3); B(4; 3; 3)$. Tìm điểm M thỏa $3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

- A. M(-2; 9; 3) B. M(2; -9; 3) C. M(2; 9; -3) D. M(-2; -9; 3)

Câu 15. Cho tứ diện OABC với A(m; 0; 0), B(0; 6; 0), C(0; 0; 6). Tìm m để thể tích tứ diện bằng 6.

- A. $m = \pm 1$. B. $m = 1$. C. $m = -1$. D. $m = 6$.

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

A/ KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

I. Phương trình mặt cầu:

Dạng 1: Mặt cầu (S), tâm I(a;b;c), bán kính r có phương trình: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$.

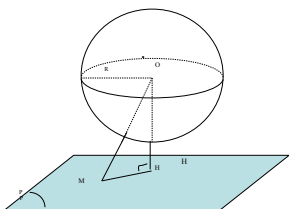
• Mặt cầu tâm O, bán kính r: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

Dạng 2: Phương trình dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz = 0$; điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

là phương trình mặt cầu tâm I(a;b;c), bán kính $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

II. Vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu:

a/

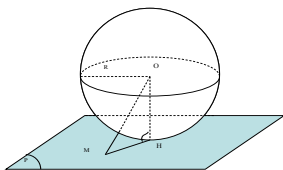


Trong k.g Oxyz Cho : mặt cầu (S), tâm I(a;b;c), bán kính r và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

Gọi $H(x;y;z)$ là hình chiếu vuông góc của tâm I(a;b;c) trên $m(\alpha)$.

$$\text{Ta có: } IH = d(I, (\alpha)) = \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

b/



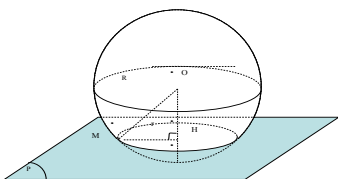
a/ $IH > R : mp(\alpha)$ và mặt cầu (S) không có điểm chung.

b/ $IH = R : mp(\alpha)$ và mặt cầu (S) có 1 điểm chung duy nhất ($mp(\alpha)$ tiếp xúc mặt cầu (S) tại điểm H)

• H : Gọi là tiếp điểm • $mp(\alpha)$: Gọi là tiếp diện

Điều kiện $mp(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ tiếp xúc mặt cầu (S), tâm I(a;b;c), bán kính r: $d(I, (\alpha)) = r$

c/



c/ $IH < R : mp(\alpha)$ cắt mặt cầu (S) theo 1 đường tròn (C) có

$$\text{phương trình: (C): } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

(C) có tâm H, bán kính $r' = \sqrt{r^2 - IH^2}$.

• Khi $IH = d(I, (\alpha)) = 0 : mp(\alpha)$ cắt mặt cầu (S) theo đường tròn lớn tâm $H \equiv I$, bán kính $r' = r$

C. MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP THƯỜNG GẶP.

Dạng toán 1: Tìm tâm và bán kính của các mặt cầu có phương trình: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$.

Phương pháp giải:

- Tìm tâm: Đổi dấu các số trong ngoặc $\Rightarrow$ Tâm mặt cầu là $I(a; b; c)$.

Tìm bán kính: lấy $\sqrt{\quad}$ số bên phải. Bán kính là r .

Dạng toán 2: Tìm tâm và bán kính của các mặt cầu có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0$

Phương pháp giải:

- Tìm tâm: hoành độ lấy hệ số của x chia (-2) , tung độ lấy hệ số của y chia (-2) , cao độ lấy hệ số của z chia $(-2) \Rightarrow$ Tâm mặt cầu là $I(-A; -B; -C)$.

- Tìm bán kính $r = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D}$

Ví dụ: Tìm tâm và bán kính của các mặt cầu sau:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2y + 1 = 0$

Giải:

a/ Tâm mặt cầu là $I(4; 1; 0)$, bán kính của mặt cầu là: $r = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D} = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2 + 0^2 - 1} = 4$

b/ $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 8y + 15z - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + \frac{8}{3}y + 5z - 1 = 0$

Tâm mặt cầu là $I(1; -4/3; -5/2)$, bán kính của mặt cầu là: $r = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D} = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 1} = \frac{19}{6}$

Dạng toán 3: Tìm tâm H và bán kính r của đường tròn giao tuyến giữa mặt cầu $S(I; R)$ và mp(α):

Phương pháp giải:

+ Tìm tâm H

B1: Viết phương trình đường thẳng d qua I và vuông góc mp(α)

B2: Tâm H là giao điểm của d và mp(α).

+ Bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2(I, \alpha)}$

Ví dụ: Cho mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y - z + 9 = 0$.

Chứng minh rằng (S) và (α) cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn (T) . Tìm tâm và bán kính đường tròn (T)

Giải:

Mặt cầu (S) có tâm $I(3; -2; 1)$ và bán kính $R = 10$. Ta có: $d(I, (\alpha)) = \frac{|2 \cdot 3 - 2(-2) - 1 + 9|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 6 < 10 = R \Rightarrow$

mc(S) cắt (α) theo giao tuyến là đường tròn (T) .

Mp(α) có 1 VTPT là $\vec{n} = (2; -2; -1)$

Đường thẳng d qua I vuông góc với mp(α) có một VTCP là $\vec{n} = (2; -2; -1) \Rightarrow$ phương trình

tham số là: $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$. Gọi $H = d \cap (\alpha) \Rightarrow H \in d \Rightarrow H(3+2t; -2-2t; 1-t)$. Mặt khác $H \in \text{mp}(\alpha) \Rightarrow$ ta có:

$$2(3+2t) - 2(-2-2t) - (1-t) + 9 = 0 \Leftrightarrow 9t = 18 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow H(7; -6; -1). \text{Tâm của đường tròn (T) chính là } H(7; -6; -1)$$

$$\text{Bán kính đường tròn giao tuyến là: } r = \sqrt{R^2 - d^2(I; (\alpha))} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

Dạng toán 3: Lập phương trình mặt cầu

Chú ý: Khi lập phương trình mặt cầu cần tìm:

Cách 1: Tìm tâm $I(a; b; c)$, bán kính r của mặt cầu $\Rightarrow$ phương trình là: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

Cách 2: Tìm các hệ số A, B, C, D trong phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0 \Rightarrow$ ptr mặt cầu

Bài toán 1: Lập phương trình mặt cầu tâm I đi qua A

Phương pháp giải:

- Tìm bán kính mặt cầu là : $r = IA = \sqrt{(x_A - x_I)^2 + (y_A - y_I)^2 + (z_A - z_I)^2}$
- Lập phương trình mặt cầu tâm I bán kính r.

Ví dụ: Lập phương trình mặt cầu đi qua điểm A(5; -2; 1) và có tâm I(3; -3; 1).

Giải:

Bán kính mặt cầu là: $r = IA = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$

Vậy phương trình của mặt cầu là : $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 5$

Bài toán 2: Lập phương trình mặt cầu đường kính AB

Phương pháp giải:

- Tìm trung điểm I của đoạn AB với $I(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2})$, tính đoạn $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- Lập phương trình mặt cầu tâm I bán kính $r = \frac{AB}{2}$

Ví dụ: Lập phương trình mặt cầu có đường kính AB với A(4; -3; 7), B(2; 1; 3).

Giải:

Trung điểm của đoạn thẳng AB là I(3; -1; 5), $AB = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-4)^2} = 6$

Mặt cầu đường kính AB có tâm I(3; -1; 5), bán kính $r = \frac{AB}{2} = 3$ phương trình của mặt cầu là :

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 9$$

Bài toán 3: Lập phương trình mặt cầu tâm I tiếp xúc mp(α)

Phương pháp giải:

- Tìm bán kính mặt cầu là : $r = d(I, (\alpha)) = \frac{|A.x_I + B.y_I + C.z_I + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$
- Lập phương trình mặt cầu tâm I bán kính r.

Ví dụ: Lập phương trình mặt cầu tâm I(1; 2; 4) tiếp xúc với mặt phẳng (α): $2x + 2y + z - 1 = 0$

Giải:

Bán kính mặt cầu là : $r = d(I, (\alpha)) = \frac{|2.1 + 2.2 + 4.1|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 1$

Phương trình mặt cầu là : $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 1$

Bài toán 4: Lập phương trình mặt cầu đi qua 4 điểm A, B, C, D

Phương pháp giải:

Ptr mc có dạng $x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0$ (1). $A, B, C, D \in \text{mc}(S) \Rightarrow$ thế tọa độ các điểm A, B, C, D vào (1). Giải hệ pt, tìm A, B, C, D.

Ví dụ:

Lập phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A(6; -2; 3), B(0; 1; 6), C(2; 0; -1); D(4; 1; 0).

Giải:

Phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0$, ta có :

$$\begin{cases} A(6; -2; 3) \in (S) \\ B(0; 1; 6) \in (S) \\ C(2; 0; -1) \in (S) \\ D(4; 1; 0) \in (S) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 49 + 12A - 4B + 6C + D = 0(1) \\ 37 + 2B + 12C + D = 0(2) \\ 5 + 4A - 2C + D = 0(3) \\ 17 + 8A + 2B + D = 0(4) \end{cases} \text{ . Lấy (1)-(2); (2)-(3); (3)-(4) ta được hệ:}$$

$$\begin{cases} 12A - 6B - 6C = -12 \\ -4A + 2B + 14C = -32 \\ -4A - 2B - 2C = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 1 \\ C = -3 \end{cases} \Rightarrow D = -3$$

Vậy phương trình mặt cầu là: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 3 = 0$

Bài toán 5: Lập phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm A, B, C có tâm nằm trên mp(P)

Phương pháp giải:

Mc(S) có ptr: $x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0$ (2)

A, B, C $\in$ mc(S): thế tọa độ các điểm A, B, C vào (2). Thế tọa độ tâm m/c I(-A, -B, -C) vào ptr mp(P)

Giải hệ phương trình trên tìm A, B, C, D $\Rightarrow$ phương trình mặt cầu.

Ví dụ: Lập phương trình mặt cầu (S) đi qua ba điểm A(6; -2; 3), B(0; 1; 6), C(2; 0; -1) có tâm I thuộc mp(P): $x + 2y + 2z - 3 = 0$

Giải:

Phương mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0$, ta có:

$$\begin{cases} A(6; -2; 3) \in (S) \\ B(0; 1; 6) \in (S) \\ C(2; 0; -1) \in (S) \\ I(-A; -B; -C) \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12A - 4B + 6C + D = -49(1) \\ 2B + 12C + D = -37(2) \\ 4A - 2C + D = -5(3) \\ -A - 2B - 2C = 3(4) \end{cases}$$

Lấy (1)-(2); (2)-(3); kết hợp(4) ta được hệ:

$$\begin{cases} 12A - 6B - 6C = -12 \\ -4A + 2B + 14C = -32 \\ -A - 2B - 2C = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{7}{5} \\ B = \frac{11}{5} \\ C = -3 \end{cases} \Rightarrow D = -\frac{27}{5}$$

Vậy phương trình mặt cầu là: $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{14}{5}x + \frac{22}{5}y - 6z - \frac{27}{5} = 0$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Xác định tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 25$.

A. I(-1; 2; 0), R = 25 B. I(-1; 2; 0), R = 5 C. I(1; -2; 1), R = 5 D. I(1; -2; 0), R = 5

Câu 2. Xác định tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$.

A. I(4; -1; 0), R = 4 B. I(-4; 1; 0), R = 4 C. I(4; -1; 0), R = 2 D. I(-4; 1; 0), R = 2

Câu 3. Mặt cầu tâm I(2; 2; -2) bán kính R tiếp xúc với mặt phẳng (P): $2x - 3y - z + 5 = 0$. Bán kính R

bằng: A. $\frac{5}{\sqrt{13}}$ B. $\frac{4}{\sqrt{14}}$ C. $\frac{4}{\sqrt{13}}$ D. $\frac{5}{\sqrt{14}}$

Câu 4. Trong không gian Oxyz, cho điểm M(1; 1; -2) và mặt phẳng (α): $x - y - 2z = 2$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm M tiếp xúc với mặt phẳng (α).

A. (S): $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 4z + \frac{16}{3} = 0$ B. (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 4z + \frac{16}{3} = 0$

C. (S): $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 4z + \frac{14}{3} = 0$ D. (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 4z + \frac{14}{3} = 0$

Câu 5. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I(1; 5; 2) và tiếp xúc với mặt phẳng (P): $2x + y + 3z + 1 = 0$

A. (S): $(x-1)^2 + (y-5)^2 + (z-2)^2 = 16$ B. (S): $(x-1)^2 + (y-5)^2 + (z-2)^2 = 12$

C. (S): $(x-1)^2 + (y-5)^2 + (z-2)^2 = 14$ D. (S): $(x-1)^2 + (y-5)^2 + (z-2)^2 = 10$

Câu 6. Viết phương trình mặt cầu có tâm I(0; 3; -2) và đi qua điểm A(2; 1; -3)

A. (S): $x^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 3$ B. (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z + 4 = 0$

C. (S): $x^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 6$ D. (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z + 10 = 0$

Câu 7. Cho hai điểm $A(2; 4; 1)$, $B(-2; 2; -3)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $x^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 = 9$

B. $x^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 36$

C. $x^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 9$

D. $x^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 36$

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2; 1; 1)$ và mặt phẳng (P) :

$2x + y + 2z + 2 = 0$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính $R = 1$.

Phương trình của mặt cầu (S) là

A. $(S): (x + 2)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 8$

B. $(S): (x + 2)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 10$

C. $(S): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 8$

D. $(S): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 10$

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; -2; 3)$ và đường thẳng

$d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với d .

A. $(S): (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 49$

B. $(S): (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 7$

C. $(S): (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 50$

D. $(S): (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$

Câu 10. Tìm tâm và bán kính của đường tròn giao tuyến của mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 6z - 11 = 0$ với mặt phẳng $2x - 2y - z - 4 = 0$.

A. $H(3; 0; 2)$, $R = 4$

B. $H(3; 1; 2)$, $R = 4$

C. $H(3; 0; 2)$, $R = 2$

D. $H(3; 0; 2)$, $R = 44$

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $(P): 2x + y - 2z + 9 = 0$, $(Q): x - y + z + 4 = 0$ và

đường thẳng $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1}$. Phương trình mặt cầu có tâm thuộc d tiếp xúc với (P) và cắt (Q)

theo một đường tròn có chu vi 2π là:

A. $x^2 + (y + 1)^2 + (z - 4)^2 = 4$

B. $(x + 2)^2 + (y + 5)^2 + (z - 2)^2 = 4$

C. $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 + (z - 7)^2 = 4$

D. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 4$

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$ và điểm $I(1; 2; 3)$. Gọi K là điểm đối xứng với I qua d . Lập phương trình mặt cầu (S) tâm K cắt d tại hai điểm A và B , biết đoạn $AB = 4$ là.

A. $(S): \left(x - \frac{1}{9}\right)^2 + \left(y + \frac{8}{9}\right)^2 + \left(z + \frac{41}{9}\right)^2 = \frac{185}{9}$

B. $(S): \left(x + \frac{1}{9}\right)^2 + \left(y + \frac{8}{9}\right)^2 + \left(z + \frac{41}{9}\right)^2 = \frac{185}{9}$

C. $(S): \left(x - \frac{1}{9}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{9}\right)^2 + \left(z + \frac{41}{9}\right)^2 = \frac{185}{9}$

D. $(S): \left(x + \frac{1}{9}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{9}\right)^2 + \left(z + \frac{41}{9}\right)^2 = \frac{185}{9}$

Câu 13. Cho bốn điểm $A(2; -1; 2)$, $B(-1; 2; 8)$, $C(4; -4; 3)$, $D(0; -5; 8)$. Phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là.

A. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 5)^2 = 41$

B. $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z + 5)^2 = 14$

C. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 5)^2 = 14$

D. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 5)^2 = \sqrt{14}$

Câu 14. Cho bốn điểm $A(6; -2; 3)$, $B(0; 1; 6)$, $C(2; 0; -1)$, $D(4; 1; 0)$. Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là.

A. $I(2; -1; 3)$, $R = \sqrt{17}$

B. $I(2; 1; 3)$, $R = \sqrt{17}$

C. $I(-2; 1; -3)$, $R = \sqrt{17}$

D. $I(2; -1; 3)$, $R = 17$

Câu 15. Cho $A(1; 2; 0)$, $B(-1; 1; 3)$, $C(2; 0; -1)$. Pt mặt cầu đi qua A , B , C và có tâm nằm trong mặt phẳng (Oxz) là:

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 6y - 6z + 1 = 0$

B. $(x + 3)^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 17$

C. $(x + 1)^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 17$

D. $(x - 3)^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 17$

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1. Vectơ pháp tuyến của $mp(\alpha)$: $\vec{n} \neq \vec{0}$ là vectơ pháp tuyến của $mp(\alpha) \Leftrightarrow$ Giá của $\vec{n} \perp mp(\alpha)$

Chú ý: Hai vectơ không cùng phương $\vec{a}, \vec{b}$ có giá nằm trong hoặc song song với (α) . Khi đó: $\left[\vec{a}, \vec{b} \right]$

là vectơ pháp tuyến của (α)

2. P.trình tổng quát của $mp(\alpha)$: $Ax + By + Cz + D = 0$ (Với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$).

+ Mặt phẳng có phương trình: $Ax + By + Cz + D = 0$ thì có VTPT: $\vec{n} = (A; B; C)$

+ Mặt phẳng qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có một VTPT là $\vec{n} = (A; B; C)$ thì có pt:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

3. Một số trường hợp đặc biệt của phương trình mặt phẳng

*Phương trình mặt phẳng song song hoặc chứa ox : $By + Cz + D = 0$ ($D \neq 0$ song song, $D = 0$ chứa)

*Phương trình mặt phẳng song song hoặc chứa oy : $Ax + Cz + D = 0$ ($D \neq 0$ song song, $D = 0$ chứa)

*Phương trình mặt phẳng song song hoặc chứa oz : $Ax + By + D = 0$ ($D \neq 0$ song song, $D = 0$ chứa)

*Phương trình mặt phẳng đi qua $A(a, 0, 0); B(0, b, 0); C(0, 0, c)$: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ với $a, b, c \neq 0$

*Phương trình các mặt phẳng tọa độ: $(Oyz): x = 0; (Oxz): y = 0; (Oxy): z = 0$

4. Vị trí tương đối của hai mp $(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

• $(\alpha) \text{ cắt } (\beta) \Leftrightarrow A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$

• $(\alpha) \equiv (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$

• $(\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$

• $(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

5. KC từ $M(x_0, y_0, z_0)$ đến $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

$$d(M, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

6. Góc giữa hai mặt phẳng: $\cos(\alpha, \beta) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$ với $\vec{n}_1; \vec{n}_2$ là VTPT của 2 mặt phẳng

B. MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP THƯỜNG GẶP

Chú ý:

- Muốn viết phương trình mặt phẳng thường tìm: 1 điểm đi qua và 1 vectơ pháp tuyến

- Mặt phẳng qua 1 điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có 1 vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$ phương trình là: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

- Nếu không tìm được ngay vectơ pháp tuyến của $mp(\alpha)$ ta đi tìm 2 vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương có giá song song hoặc nằm trong $mp(\alpha)$ khi đó $\vec{n} = [\vec{a}; \vec{b}]$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) .

Dạng 1: Viết phương trình $mp(\alpha)$ đi qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và 1 vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$.

Phương pháp giải:

B1: Mặt phẳng đi qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có 1 vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$.

B2: Viết phương trình $mp(\alpha)$ theo công thức: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

B3: Rút gọn đưa về dạng: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Ví dụ:

Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua $A(2; 3; 1)$ và có một VTPT là $\vec{n} = (2; 3; 1)$

Giải:

Mặt phẳng (α) đi qua $A(2;-1;1)$ và có 1 vectơ VTPT $\vec{n} = (2;-3;5) \Rightarrow$ phương trình là:

$$2(x-2)-3.(y+1)+5(z-1) = 0 \Leftrightarrow 2x-3y+5z-12=0$$

Dạng 2:Viết phương trình mp(α) đi qua 3 điểm không thẳng hàng A, B, C.

Phương pháp giải:

B1: Tìm tọa độ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$

B2: Tìm $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}]$

B3: Viết phương trình mp(P) đi qua điểm A và nhận $\vec{n}$ làm VTPT.

Ví dụ: Viết phương trình mp(P) qua $A(0;1;2), B(2;3;1), C(2;2;-1)$

Giải:

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2;2;-1), \overrightarrow{AC} = (2;1;-3)$

$$\Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (-5;4;-2)$$

Mặt phẳng (P) đi qua A và có 1 vectơ VTPT $\vec{n} = (-5;4;-2) \Rightarrow$ phương trình là:

$$-5(x-0)+4(y-1)-2(z-2)=0 \Leftrightarrow -5x+4y-2z=0 \Leftrightarrow 5x-4y+2z=0.$$

Dạng 3:Viết phương trình mp(α) đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và song song với mp(β): $Ax+By+Cz+D=0$.

Phương pháp giải:

B1: Do mp(α) // mp(β): $Ax+By+Cz+D=0 \Rightarrow$ phương trình mp (α) có dạng: $Ax+By+Cz+m=0$ ($m \neq D$)

B2: mp(α) đi qua điểm $M_0 \Rightarrow$ ta có $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + m=0 \Rightarrow m$ thỏa điều kiện $m \neq D$
 $\Rightarrow$ phương trình mp(α)

Ví dụ:

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(1;3;-2)$ và song song với mặt phẳng (Q): $2x-y+3z+4=0$

Giải:

Mặt phẳng (P) // mp(Q): $2x-y+3z+4=0$ nên phương trình của mp(P) có dạng $2x-y+3z+D=0$ ($D \neq 4$). Mặt khác mp(P) đi qua điểm $M(1;3;-2)$ nên ta có: $2.1-3+3(-2)+D=0 \Leftrightarrow D=7$ (nhận). Vậy phương trình mp cần tìm là: $2x-y+3z+7=0$

Dạng 4:Viết phương trình mp(α) song song với mp(β): $Ax+By+Cz+D=0$ cho trước cách điểm M cho trước một khoảng k cho trước ($k>0$).

Phương pháp giải:

B1: Do mp(α) // mp(β): $Ax+By+Cz+D=0 \Rightarrow$ phương trình mp (α) có dạng: $Ax+By+Cz+m=0$ ($m \neq D$)

B2: Giải phương trình $d(M; (\alpha)) = k$ tìm được m thỏa $m \neq D \Rightarrow$ phương trình mp(α).

Ví dụ: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mp(β): $5x+y-7z+3=0$. Viết phương trình mp(α) // mp(β) và cách điểm $A(1;2;3)$ một khoảng bằng 2.

Giải

Mp(β) có một VTPT là $\vec{n}_1 = (5;1;-7)$, mp(α) // mp(β) $\Rightarrow$ phương trình mp(α) có dạng:

$$5x+y-7z+D=0 \quad (D \neq 3)$$

Do mp(α) cách điểm $A(1;2;3)$ một khoảng bằng 2 $\Leftrightarrow d(A;(\alpha))=2$

$$\Leftrightarrow \frac{|5.1 + 2 - 7.3 + D|}{\sqrt{5^2 + 1^2 + (-7)^2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{|D-14|}{5\sqrt{3}} = 2 \Leftrightarrow |D-14| = 10\sqrt{3} \Leftrightarrow D-14 = \pm 10\sqrt{3} \Leftrightarrow D = 14 \pm 10\sqrt{3} \quad (\text{nhận})$$

$\Rightarrow$ phương trình của mp(α) là: $5x + y - 7z + 14 \pm 10\sqrt{3} = 0$

Dạng 5: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm A và chứa đường thẳng d cho trước.

($A \notin d$)

Phương pháp giải:

B1: Tìm tọa độ điểm $M_0 \in d$ và VTCP $\vec{u}$ của d. Tìm $\overrightarrow{AM_0}$

B2: Tìm $\vec{n} = [\overrightarrow{AM_0}, \vec{u}]$

B3: Viết PT mặt phẳng (α) đi qua điểm A và nhận $\vec{n}$ làm VTPT.

Ví dụ: Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua A(-1, 2, 3) và chứa trục Ox.

Giải

Trục Ox đi qua O(0;0;0) và có 1 VTCP $\vec{i} = (1;0;0)$, $\overrightarrow{OA} = (-1;2;3)$

$\Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{OA}; \vec{i}] = (0;3;-2)$. Mặt phẳng (α) đi qua điểm A và nhận $\vec{n} = (0;3;-2)$ làm một VTPT, phương trình là: $3(y-2)-2(z-3)=0 \Leftrightarrow 3y-2z=0$.

Cách khác:

Phương trình mặt phẳng (α) chứa trục Ox có dạng: $By+Cz=0$. (1)

Do mặt phẳng (α) đi qua A(-1, 2, 3) nên ta có: $2B+3C=0$ chọn $B=3 \Rightarrow C=-2 \Rightarrow$ phương trình mặt phẳng (α) là: $3y-2z=0$.

Dạng 6: Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

Phương pháp giải:

B1: Tìm tọa độ $\overrightarrow{AB}$ và tọa độ trung điểm I của đoạn AB.

B2: Mặt phẳng cần tìm đi qua điểm I và nhận $\overrightarrow{AB}$ làm VTPT.

B3: Viết phương trình mặt phẳng trung trực đi qua điểm I và nhận $\overrightarrow{AB}$ làm VTPT.

Ví dụ:

Viết phương trình mặt phẳng trung trực (P) của đoạn thẳng AB, với A(1;3;0) và B(3;-1;2)

Giải:

Ta có trung điểm của AB là I(2;1;1), $\overrightarrow{AB} = (2;-4;2)$.

Mp(P) đi qua trung điểm I của AB và có 1 VTPT là $\overrightarrow{AB} = (2;-4;2) \Rightarrow$ phương trình mặt phẳng trung trực (P) là: $2(x-2)-4(y-1)+2(z-1)=0 \Leftrightarrow 2x-4y+2z-2=0$

Dạng 7:

Viết phương trình mặt phẳng (α) // (β): $Ax+By+Cz+D=0$ và tiếp xúc với mặt cầu (S).

Phương pháp giải:

B1: Xác định tâm I bán kính R của mặt cầu (S).

B2: Do mp(α) // mp(β) $\Rightarrow$ phương trình mặt phẳng (α) có dạng $Ax+By+Cz+m=0$ (*) ($m \neq D$)

B3: Mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) $\Leftrightarrow d(I, (\alpha)) = R$ giải phương trình này tìm được m thỏa điều kiện $m \neq D$ thay vào (*) ta được phương trình mặt phẳng (α).

Ví dụ: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm M(2;3;-1), mặt phẳng (P) : $x+y+2z+10=0$ và mặt cầu (S) : $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+8=0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) song song với mặt phẳng (P) và tiếp xúc với mặt cầu (S)

HD: Mặt cầu (S) có tâm I(1,-2,3) và $R = \sqrt{6}$

Phương trình mặt phẳng (R) có dạng: $x+y+2z+m=0$ ($m \neq 10$)

Do mặt phẳng (R) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên: $d(I, (R)) = R \Leftrightarrow \frac{|1-2+6+m|}{\sqrt{1+1+4}} = \sqrt{6}$

Giải phương trình ta được: $\begin{cases} m=1(n) \\ m=-11(n) \end{cases}$. Vậy có 2 mặt phẳng (R) thỏa yêu cầu bài toán
phương trình là: $x + y + 2z + 1 = 0$ và $x + y + 2z - 11 = 0$.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P): $2x - 3y + 4z = 2016$. Véc tơ nào sau đây là một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) ?

- A. $\vec{n} = (-2; -3; 4)$ B. $\vec{n} = (-2; 3; 4)$ C. $\vec{n} = (-2; 3; -4)$ D. $\vec{n} = (2; 3; -4)$

Câu 1': Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P): $2x - 3y + 4z = 0$. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P)

- A. $(-2; -3; 4)$ B. $(2; -3; 4)$ C. $(-2; 0; 1)$ D. $(2; -3; -4)$

Câu 2: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. Phương trình của mặt phẳng (Oxy) là: $z = 0$ B. phương trình của mặt phẳng (Oxy) là: $y = 0$
C. phương trình của mặt phẳng (Oxy) là: $x = 0$ D. phương trình của mặt phẳng (Oxy) là: $x + y = 0$

Câu 2: Mặt phẳng nào sau đây chứa trục Oy ?

- A. $-2x - y = 0$. B. $-2x + z = 0$. C. $-y + z = 0$. D. $-2x - y + z = 0$.

Câu 3: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm A(1;1;1) và B(1;3;-5). Viết phương trình mặt phẳng trung trực của AB.

- A. $y - 3z + 4 = 0$ B. $y - 3z - 8 = 0$ C. $y - 2z - 6 = 0$ D. $y - 2z + 2 = 0$

Câu 4. Mặt phẳng qua 3 điểm A(1;0;0), B(0;-2;0), C(0;0;3) có phương trình.

- A. $x - 2y + 3z = 1$. B. $\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{3} = 6$. C. $\frac{x}{-1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-3} = 1$. D. $6x - 3y + 2z = 6$.

Câu 5: Phương trình tổng quát của mặt phẳng qua điểm M(3;0;-1) và vuông góc với hai mặt phẳng $x + 2y - z + 1 = 0$ và $2x - y + z - 2 = 0$ là:

- A. $x - 3y - 5z - 8 = 0$ B. $x - 3y + 5z - 8 = 0$ C. $x + 3y - 5z + 8 = 0$ D. $x + 3y + 5z + 8 = 0$

Câu 6: Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A(2;1;3), B(1;-2;1)

và song song với đường thẳng d: $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$.

- A. (P): $10x - 4y - z - 19 = 0$ B. (P): $10x - 4y + z - 19 = 0$
C. (P): $10x - 4y - z + 19 = 0$ D. (P): $10x + 4y + z - 19 = 0$

Câu 7: Trong không gian Oxyz, hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-1}$ và $d_2: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-5}{3}$.

Phương trình mặt phẳng chứa d_1 và d_2 có dạng:

- A. $5x + 4y + z - 16 = 0$ B. $5x - 4y + z - 16 = 0$
C. $5x - 4y - z - 16 = 0$ D. $5x - 4y + z + 16 = 0$

Câu 8: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho điểm I(1;-3;2) Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với giá của véc tơ $\vec{v} = (1;6;2)$, vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): x + 4y + z - 11 = 0$ đồng thời cách điểm I một đoạn bằng 4.

- A. (P): $2x - y + 2z + 3 = 0$ hoặc (P): $2x - y + 2z - 21 = 0$.
B. (P): $2x - y + 2z - 3 = 0$ hoặc (P): $2x - y + 2z - 21 = 0$.
C. (P): $2x - y + 2z + 3 = 0$ hoặc (P): $2x - y + 2z + 21 = 0$.

D. (P): $2x - y + 2z - 3 = 0$ hoặc (P): $2x - y + 2z + 21 = 0$.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) qua O, vuông góc với mặt phẳng (Q): $x + y + z = 0$ và cách điểm $M(1; 2; -1)$ một khoảng bằng $\sqrt{2}$.

A. $x - y = 0$, $5x - 8y + 3z = 0$

B. $x - z = 0$, $5x - 8y + 3z = 0$

C. $y - z = 0$, $5x - 8y + 3z = 0$

D. $z = 0$, $5x - 8y + 3z = 0$

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$ và (P): $2x + y - z = 0$.

Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (P).

A. (Q): $2x - y - z = 0$.

B. (Q): $x - 2y + 1 = 0$.

C. (Q): $x + 2y + z = 0$.

D. (Q): $x - 2y - 1 = 0$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng (P): $2x + y - 2z + 1 = 0$ và hai điểm $A(1; -2; 3), B(3; 2; -1)$.

Viết Phương trình mặt phẳng (Q) qua A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

A. (Q): $2x + 2y + 3z - 7 = 0$.

B. (Q): $2x - 2y + 3z - 7 = 0$.

C. (Q): $2x + 2y + 3z - 9 = 0$.

D. (Q): $x + 2y + 3z - 7 = 0$.

Câu 12: Cho hai đường thẳng $(D_1): \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = -2 - t \end{cases}; (D_2): \begin{cases} x = m - 3 \\ y = 2 + 2m \\ z = 1 - 4m \end{cases}; t, m \in \mathbb{R}$

Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) qua (D_1) và song song với (D_2)

A. $x + 7y + 5z - 20 = 0$

B. $2x + 9y + 5z - 5 = 0$

C. $x - 7y - 5z = 0$

D. $x - 7y + 5z + 20 = 0$

Câu 13. Phương trình mặt phẳng chứa $d_1: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{3}$ và $d_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{3}$ là.

A. $3x + 2y - 5 = 0$.

B. $6x + 9y + z + 8 = 0$.

C. $-8x + 19y + z + 4 = 0$.

D. Tất cả đều sai.

Câu 14. Viết phương trình mặt phẳng chứa 2 điểm $A(1; 0; 1)$ và $B(-1; 2; 2)$ và song song với trục Ox.

A. $x + 2z - 3 = 0$. B. $y - 2z + 2 = 0$. C. $2y - z + 1 = 0$. D. $x + y - z = 0$.

Câu 15. Trong không gian $oxyz$ cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$ và điểm $A(1; 2; 3)$. Viết phương trình

mp (P) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất.

A. $x + y + z - 4 = 0$ B. $x + y + z + 4 = 0$ C. $x + y + z - 2 = 0$ D. $x + y + z = 0$

BÀI 4. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1) Vector chỉ phương của đường thẳng: $\vec{a} \neq \vec{0}$ là VTCP của đường thẳng d nếu giá của $\vec{a}$ song song hoặc trùng với đường thẳng d .

Chú ý. Hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương có giá $\perp d$ thì $\begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{bmatrix}$ là VTCP của d .

2) Các dạng phương trình đường thẳng:

-Phương trình tham số:
$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t, \text{ với } \vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \text{ là vectơ chỉ phương của đường} \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$$

thẳng.

-Phương trình chính tắc:
$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}, (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \neq 0)$$

3) Vị trí tương đối đường thẳng và mặt phẳng:

Cho đường thẳng (d) qua $M(x_0; y_0; z_0)$, có VTCP $\vec{u} = (a; b; c)$ và mặt phẳng (α): $Ax + By + Cz + D = 0$ có VTPT $\vec{n} = (A; B; C)$

(d) cắt (α) $\Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} \neq 0 \Leftrightarrow Aa + Bb + Cc \neq 0$

(d) // (α) $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \perp \vec{u} \\ M_0 \notin (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Aa + Bb + Cc = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 \neq 0 \end{cases}$

(d) $\subset$ (α) $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \perp \vec{u} \\ M_0 \in (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Aa + Bb + Cc = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 = 0 \end{cases}$

Đặc biệt $d \perp (\alpha) \Leftrightarrow \vec{u}$ và $\vec{n}$ cùng phương $\Leftrightarrow \vec{u} = k\vec{n} \Leftrightarrow [\vec{n}; \vec{u}] = \vec{0}$

4) Vị trí tương đối của hai đường thẳng:

Cho đường thẳng Δ_1 qua điểm $M_1(x_1; y_1; z_1)$ có VTCP $\vec{u}_1 = (a_1; a_2; a_3)$ và đường thẳng Δ_2 qua điểm $M_2(x_2; y_2; z_2)$ có VTCP $\vec{u}_2 = (b_1; b_2; b_3)$. Khi đó:

- $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1; \vec{u}_2$ cùng phương và $M_1 \notin \Delta_2$ hoặc $\begin{cases} [\vec{u}_1; \vec{u}_2] = \vec{0} \\ M_1 \notin \Delta_2 \end{cases}$

- $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1; \vec{u}_2$ cùng phương và $M_1 \in \Delta_2$ hoặc $\begin{cases} [\vec{u}_1; \vec{u}_2] = \vec{0} \\ M_1 \in \Delta_2 \end{cases}$

- Δ_1 và Δ_2 cắt nhau $\Leftrightarrow [\vec{u}_1; \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} \neq 0$.

- Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\Leftrightarrow [\vec{u}_1; \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} \neq 0$

Đặc biệt $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0 \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$

C. MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP THƯỜNG GẶP :

Chú ý :

- Muốn viết phương trình đường thẳng thường đi tìm: 1 điểm đi qua và 1 vectơ chỉ phương

- Đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có 1 vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ phương trình

tham số là:
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$
 Nếu $a \cdot b \cdot c \neq 0$ thì phương trình chính tắc là:
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

- Nếu chưa tìm được ngay 1 vectơ chỉ phương của đường thẳng d, ta đi tìm 2 vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương có giá vuông góc với d khi đó $\vec{u} = [\vec{a}; \vec{b}]$ là một vectơ chỉ phương của d.

Dạng 1: Đường thẳng d đi qua A có một vectơ chỉ phương $\vec{u}$

Phương pháp giải:

B1: Chỉ rõ (d) đi qua $A(x_0; y_0; z_0)$ có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$

B2 : Viết phương trình đường thẳng (d) theo yêu cầu.

Ví dụ: Viết phương trình chính tắc, tham số của đường thẳng d đi qua $M(5; 4; 1)$ và có VTCP $\vec{a} = (2; -3; 1)$.

Giải:

Đường thẳng d đi qua $M(5; 4; 1)$ và có VTCP $\vec{a} = (2; -3; 1)$. Phương trình chính tắc

$$\text{là: } \frac{x-5}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-1}{1}. \text{ Phương trình tham số là } \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 4 - 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Dạng 2: Đường thẳng d đi qua 2 điểm A, B.

Phương pháp giải:

B1 : Tìm vectơ $\overrightarrow{AB}$

B2 : Viết phương trình đường thẳng d qua A có VTCP $\overrightarrow{AB}$

Ví dụ: Viết PTTS của đường thẳng d đi qua hai điểm $A(1; 2; 3)$, $B(4; 4; 4)$

Giải:

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; 2; 1)$:

Đường thẳng d đi qua $A(1; 2; 3)$, có 1 VTCP là $\overrightarrow{AB} = (3; 2; 1)$ Phương trình tham số là
$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Dạng 3: Đường thẳng d qua A và song song Δ

Phương pháp giải:

B1: Tìm vectơ chỉ phương $\vec{a}$ của Δ

B2: Viết phương trình đường thẳng d qua A có VTCP $\vec{a}$

Ví dụ: Viết PTTS của đường thẳng d đi qua $B(2; 0; -3)$ và song song với Δ :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + 3t \\ z = 4t \end{cases}$$

Giải:

Đường thẳng Δ có 1 VTCP là $\vec{a} = (2; 3; 4)$

Đường thẳng d đi qua $B(2; 0; -3)$, có 1 VTCP là $\vec{a} = (2; 3; 4) \Rightarrow$ phương trình là:
$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3t \\ z = -3 + 4t \end{cases}$$

Dạng 4: Đường thẳng d qua A và vuông góc mp(α)

Phương pháp giải:

B1: Tìm vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mp(α)

B2: Viết phương trình đường thẳng d qua A có VTCP $\vec{n}$

Ví dụ: Viết PTCT của đường thẳng d đi qua điểm $A(2; -1; 3)$ và vuông góc (P): $x + y - z + 5 = 0$

Giải:

Mp(P) có 1 VTPT là: $\vec{n} = (1; 1; -1)$

Đường thẳng d đi qua điểm $A(2; -1; 3)$ vuông góc với (P) nên có 1 VTCP là: $\vec{n} = (1; 1; -1) \Rightarrow$
phương trình chính tắc là: $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{-1}$

Dạng 5: Đường thẳng d qua A và vuông góc d_1, d_2 (d_1 không song song hoặc trùng d_2)

Phương pháp giải:

B1: Tìm vectơ chỉ phương $\vec{a}$ của (d_1) , vectơ chỉ phương $\vec{b}$ của (d_2)

B2: Tính $\vec{u} = [\vec{a}; \vec{b}]$

B3: Viết phương trình đường thẳng d qua A có VTCP $\vec{u}$

Ví dụ: Viết phương trình đường thẳng d đi qua $M(1; 1; 4)$ và vuông góc với hai đường thẳng

$$(d_1): \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = -t \end{cases} \text{ và } (d_2): \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{3}$$

Giải:

Đường thẳng d_1 có 1 VTCP là $\vec{a} = (-2; 1; -1)$.

Đường thẳng d_2 có 1 VTCP là $\vec{b} = (2; -1; 3) \Rightarrow \vec{u} = [\vec{a}; \vec{b}] = (2; 4; 0)$.

Đường thẳng d có 1 VTCP là $\vec{u} = (2; 4; 0)$ và đi qua $M(1; 1; 4) \Rightarrow$ phương trình là:
$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = -t \end{cases}$$

Dạng 6: Đường thẳng d là giao tuyến của 2 mặt phẳng.

Phương pháp giải:

B1: Tìm vectơ pháp tuyến của 2 mặt phẳng giả sử là: $\vec{n}_p; \vec{n}_q$

B2: Tính $\vec{u} = [\vec{n}_p; \vec{n}_q]$

B3: Tìm một điểm đi qua A của giao tuyến bằng cách cho $x=0$ thế vào phương trình 2 mặt phẳng giải hệ 2 phương trình 2 ẩn y, z tìm được $y_0; z_0 \Rightarrow A(0; y_0; z_0)$ là một điểm thuộc giao tuyến

B4: Viết phương trình đường thẳng d qua A có VTCP $\vec{u}$

Ví dụ:

Viết phương trình đường thẳng d là giao tuyến của 2 mặt phẳng: $(P): x-2y+z+5=0, (Q): 2x-z+3=0$.

Giải:

Mặt phẳng (P) có 1 VTPT là $\vec{n}_1 = (1; -2; 1)$.

Mặt phẳng (Q) có 1 VTPT là $\vec{n}_2 = (2; 0; -1) \Rightarrow \vec{u} = [\vec{n}_1; \vec{n}_2] = (2; 3; 4)$.

Cho $x=0$ thế vào phương trình mp(P) và mp(Q) ta được hệ:
$$\begin{cases} -2y + z = -5 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow d \text{ đi qua}$$

$A(0; 4; 3)$. Mặt khác d có 1 VTCP $\vec{u} = (2; 3; 4) \Rightarrow$ phương trình là: $\frac{x}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-3}{4}$

Dạng 7:

Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A và song song với hai mặt phẳng cắt nhau $(P), (Q)$.

Phương pháp giải:

B1: Tìm vectơ pháp tuyến của 2 mặt phẳng giả sử là: $\vec{n}_p; \vec{n}_q$

B2: Tính $\vec{u} = [\vec{n}_p; \vec{n}_q]$

B3: Viết phương trình đường thẳng d qua A có VTCP $\vec{u}$

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, viết phương trình tham số của d biết d đi qua điểm M(3; 1; 5) và song song với hai mặt phẳng (P): $2x + 3y - 2z + 1 = 0$ và (Q): $x - 3y + z - 2 = 0$.

Giải.

Ta có $\vec{n}_P = (2; 3; -2)$; $\vec{n}_Q = (1; -3; 1)$ lần lượt là VTPT của hai mp (P) và (Q). Do d // (P) và d // (Q) nên vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (-3; -4; -9)$.

$$\Rightarrow \text{Phương trình tham số của d là: } \begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 1 - 4t \\ z = 5 - 9t \end{cases}$$

Dạng 8:Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A, cắt và vuông góc với đường thẳng Δ .
Phương pháp giải:

B1:Đưa phương trình đường thẳng Δ về dạng tham số $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$.

B2 :Tìm vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ .

B3: Gọi $B = d \cap \Delta \Rightarrow B(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct) \Rightarrow \overrightarrow{AB}$

B4: Do d vuông góc với $\Delta \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow t \Rightarrow \overrightarrow{AB}$

B5:Viết phương trình đường thẳng d qua A có VTCP $\overrightarrow{AB}$

Ví dụ: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho đường thẳng d' có phương trình

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases} \text{ . Viết phương trình đường thẳng d đi qua } A(1;2;-2), \text{ cắt và vuông góc với } d'.$$

Giải

Đường thẳng d' có 1VTCP là $\vec{u}_1 (1; -1; 2)$

Gọi $B = d \cap d' \Rightarrow B \in d' \Rightarrow B(t; 1 - t; 2t) \Rightarrow \overrightarrow{AB} (t - 1; -t - 1; 2t + 2)$

$$\text{Do } d \perp d' \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_1 = 0 \Leftrightarrow 6t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{2}{3} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \left(-\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right)$$

Đường thẳng d đi qua A có 1VTCP $\vec{u} = -3 \cdot \overrightarrow{AB} = (5; 1; -2)$

$$\text{Vậy phương trình của d là : } \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-2}$$

Dạng 9:Viết phương trình đường thẳng d nằm trong (P), cắt và vuông góc với đường thẳng Δ .
Phương pháp giải:

B1: Tìm giao điểm A của (P) và Δ .

B2 :Tìm vectơ chỉ phương $\vec{a}$ của đường thẳng Δ . VTPT $\vec{n}$ của mp(P)

B3: $\vec{u} = [\vec{a}; \vec{n}]$

B4: Viết phương trình đường thẳng d qua A có VTCP $\vec{u}$

Ví dụ:Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $\Delta : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1}$ và mp(P): $2x + y - 2z + 9 = 0$.

Viết phương trình đường thẳng d nằm trong (P) vuông góc với Δ và cắt Δ .

Giải

Gọi $A = \Delta \cap (P) \Rightarrow$ toạ độ giao điểm A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} \\ \frac{x-1}{-1} = \frac{z-3}{1} \\ 2x + y - 2z + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = -1 \\ x + z = 4 \\ 2x + y - 2z = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow A(0; -1; 4)$$

đường thẳng Δ có 1 VTCP $\vec{a} = (-1; 2; 1)$, mp(P) có một VTPT $\vec{n} = (2; 1; -2)$

d nằm trong (P) vuông góc với $\Delta \Rightarrow d$ có 1 VPCP $\vec{u} = [\vec{n}; \vec{a}] = (5; 0; 5)$ và d đi qua $A(0; -1; 4) \Rightarrow$

phương trình tham số của d là
$$\begin{cases} x = 5t \\ y = -1 \\ z = 4 + 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x+8}{4} = \frac{5-y}{2} = \frac{-z}{-1}$. Khi đó vector chỉ phương của đường thẳng d có tọa độ là:

- A. $(4; 2; -1)$ B. $(4; 2; 1)$ C. $(4; -2; 1)$ D. $(4; -2; -1)$

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$. Vector nào dưới đây là vectơ chỉ phương của đường thẳng d?

- A. $\vec{u}_1 = (0; 0; 2)$ B. $\vec{u}_1 = (0; 1; 2)$ C. $\vec{u}_1 = (1; 0; -1)$ D. $\vec{u}_1 = (0; 1; -1)$

Câu 3. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng (P): $3x - z + 2 = 0$ và (Q): $3x + 4y + 2z + 4 = 0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng (d).

- A. $\vec{u} = (-4; -9; 12)$ B. $\vec{u} = (4; 3; 12)$ C. $\vec{u} = (4; -9; 12)$ D. $\vec{u} = (-4; 3; 12)$

Câu 4. Phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm $M(1; -1; 2)$ và vuông góc với mp(β): $2x + y + 3z - 19 = 0$ là:

- A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{3}$ B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{3}$
C. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{3}$ D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{3}$

Câu 5. Đường thẳng d cắt (P) tại điểm M. Đường thẳng Δ đi qua M và vuông góc với d và nằm trong mặt phẳng (P) có phương trình là

- A. $\begin{cases} x = 4t' \\ y = -2 - 2t' \\ z = -3 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 4t' \\ y = 2 - 2t' \\ z = -3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 4t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = -3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 4t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 3 \end{cases}$

Câu 6. Phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm A(1; 2;3) và có VTCP $\vec{u} = (-2; 0; 1)$ là

A. $d: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 \\ z = 3 + t \end{cases}$ B. $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 \\ z = 3 + t \end{cases}$ C. $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 \\ z = 3 + t \end{cases}$ D. $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 - t \end{cases}$

Câu 7. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A(4; -2; 2), song song với $\Delta: \frac{x+2}{4} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-2}{3}$.

A. (d): $\frac{x+4}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{3}$ B. (d): $\frac{x+4}{4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-2}{3}$
C. (d): $\frac{x-4}{4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{3}$ D. (d): $\frac{x-4}{4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-2}{3}$

Câu 8. Trong không gian Oxyz, phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm A(3;2;4) và vuông góc với mặt phẳng (P): $3x-2y+4z-1=0$

A. $\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 4 + 4t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 4 - 4t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 4 + 4t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 4 + 4t \end{cases}$
 $\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+3}{-2}$

Câu 9. Phương trình tham số của đường thẳng (d) đi qua hai điểm A(1; 2; -3) và B(3; -1; 1) là:

A. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = -3 + 4t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - 2t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$

Câu 10. Phương trình chính tắc của d đi qua hai điểm A(1;2;-3) và B(3;-1;1) là:

A. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{1}$ B. $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-3}$
C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{4}$ D. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-3}{4}$

Câu 11. Viết phương trình giao tuyến của 2 mặt phẳng (P): $2x + y - z + 3 = 0$; (Q): $x + y + z - 1 = 0$

A. (d): $\frac{x}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-1}$ B. (d): $\frac{x}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{-1}$
C. (d): $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{1}$ D. (d): $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{1}$

Câu 12. Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$. Tìm phương trình đường vuông góc chung của d và trục Ox.

A. $\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

Câu 13. Viết phương trình đường thẳng(d) đi qua điểm A(1; 0; 5), đồng thời vuông góc với hai đường thẳng (d₁): $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-1}{1}$ và (d₂): $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-3}$

$$\begin{array}{llll} \text{A. (d): } \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 5t \\ z = 5 + 4t \end{cases} & \text{B. (d): } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 5 \end{cases} & \text{C. (d): } \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = -5 \end{cases} & \text{D. (d): } \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 5 \end{cases} \end{array}$$

Câu 14. Viết phương trình đường thẳng(d) đi qua điểm A(1; 2; -2), đồng thời vuông góc và cắt đường

thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$

A. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{-1}$

B. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{-1}$

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1}$

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{-1}$

Câu 15. Cho mặt phẳng (P): $2x - y - 2z + 1 = 0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3}$. Đường

thẳng d đi qua điểm A(3; -1; 2), cắt đường thẳng Δ và song song với mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $\frac{x+3}{4} = \frac{y-1}{-10} = \frac{z+2}{9}$

B. $\frac{x-3}{8} = \frac{y+1}{-8} = \frac{z-2}{3}$

C. $\frac{x+3}{8} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z+2}{3}$

D. $\frac{x-3}{-8} = \frac{y+1}{6} = \frac{z-2}{-11}$

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ TÌM ĐIỂM:

A. Một số bài toán về tìm điểm:

Dạng 1: Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng.

Phương pháp giải:

Cách 1: Toạ độ giao điểm là nghiệm của hệ $\begin{cases} \text{Ptr(d)} \\ \text{Ptr}(\alpha) \end{cases}$

Cách 2:

B1: Đưa phương trình đường thẳng d về dạng tham số.

B2: Gọi $M = d \cap (\alpha) \Rightarrow M \in d \Rightarrow$ toạ độ M theo tham số t.

B3: Mặt khác $M \in (\alpha)$, thế toạ độ M vào phương trình mặt phẳng (α) giải phương trình tìm được t $\Rightarrow M$.

Ví dụ : Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng (P): $x+y-z+3=0$. Tìm toạ độ giao điểm H của Δ và mặt phẳng (P)

Giải :

Cách 1: Toạ độ giao điểm H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \frac{x-2}{1} = \frac{z}{1} \\ \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1} \\ x+y-z+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-z=2 \\ y-2z=1 \\ x+y-z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-5 \\ z=-3 \end{cases} \Rightarrow H(-1; -5; -3)$$

Cách 2 :

Đường thẳng Δ có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}$. Do $H = \Delta \cap (P) \Rightarrow H \in \Delta \Rightarrow H(2+t; 1+2t; t)$. Mặt khác

$H \in (P)$ nên ta có: $2 + t + 1 + 2t - t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = -3 \Rightarrow H(-1; -5; -3)$

Dạng 2: Tìm hình chiếu H của M trên mp(P)

Phương pháp giải:

B1: Tìm VTPT của mp(P)

B2: Viết phương trình đường thẳng d qua M và vuông góc mp(P).

B3: Hình chiếu H là giao điểm của d và (P)

Ví dụ :

Trong không gian Oxyz, Cho mp (P): $6x + 3y + 2z - 6 = 0$. Tìm tọa độ hình chiếu của A(0, 0, 1) trên mặt phẳng (P)

Giải:

Ta có Mp(P) có VTPT $\vec{n} = (6, 3, 2)$

Gọi d là đường thẳng qua A và vuông góc với (P) $\Rightarrow$ d có VTCP $\vec{n} \Rightarrow$ phương trình là: $\begin{cases} x = 6t \\ y = 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

H là hình chiếu vuông góc của A lên (P) $\Rightarrow H = d \cap (P) \Rightarrow H \in d \Rightarrow H(6t; 3t; 1+2t)$. Mặt khác $H \in (P)$ nên ta có phương trình: $6.6t + 3.3t + 2(1+2t) - 6 = 0 \Rightarrow t = \frac{4}{49} \Rightarrow H\left(\frac{24}{49}; \frac{12}{49}; \frac{57}{49}\right)$

Dạng 3: Tìm điểm M' đối xứng với điểm M qua mp(P)

Phương pháp giải:

- Tìm tọa độ hình chiếu H của M trên mp(P).

- M' đối xứng với M qua (P) $\Leftrightarrow$ H là trung điểm của MM' nên: $\begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M \\ y_{M'} = 2y_H - y_M \\ z_{M'} = 2z_H - z_M \end{cases}$

Ví dụ: Cho mặt phẳng (P): $6x + 3y + 2z - 6 = 0$. Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với A(0;0;1) qua mặt phẳng (P).

Giải:

Gọi H là điểm chiếu của A lên (P), ta có $H\left(\frac{24}{49}; \frac{12}{49}; \frac{57}{49}\right)$ (đã giải trong bài tìm hình chiếu của M trên mp).

Vì A' đối xứng A qua mặt phẳng (P) nên H là trung điểm của

$$AA' \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = \frac{48}{49} \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = \frac{24}{49} \\ z_{A'} = 2z_H - z_A = \frac{65}{49} \end{cases} \Rightarrow A'\left(\frac{48}{49}; \frac{24}{49}; \frac{65}{49}\right)$$

Dạng 4: Tìm điểm H là hình chiếu của M trên đường thẳng d

Phương pháp giải:

Cách 1:

- Tìm VTCP $\vec{a_d}$ của d
- Viết phương trình mp(α) qua M và vuông góc với đường thẳng d: ta có $\vec{n_\alpha} = \vec{a_d}$

- Toạ độ H là nghiệm của hpt :
$$\begin{cases} \text{Ptr}(d) \\ \text{Ptr}(\alpha) \end{cases}$$

Cách 2 :

- Phương trình tham số của d là
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$
, d có VTCP $\vec{a} = (a, b, c)$

▪ Do H là hình chiếu của A trên d $\Rightarrow H \in d \Rightarrow H(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct) \Rightarrow \overrightarrow{AH}$

▪ Mặt khác ta có : $\overrightarrow{AH} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow t \Rightarrow H$.

Ví dụ: Cho đường thẳng $d : \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{-1}$ và điểm $A(1;3;5)$. Tìm toạ độ hình chiếu của A lên đường thẳng d.

Cách 1 :

Giải:

. d có VTCP $\vec{u} = (1; -1; -1)$

. Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc d $\Rightarrow$ (P) có VTPT $\vec{n} = \vec{u} = (1; -1; -1)$, phương trình mặt phẳng (P): $x - y - z + 7 = 0$

. H là hình chiếu của A lên d nên $H = d \cap (P) \Rightarrow H \in d \Rightarrow H(2+t; -3-t; -t)$ mặt khác $H \in (P) \Rightarrow$ ta có phương trình $2+t+3+t+t+7=0 \Rightarrow t = -4 \Rightarrow H(-2; 1; 4)$

Cách 2 :

Giải:

. Phương trình tham số của d có VTCP $\vec{u} = (1; -1; -1)$

. H là hình chiếu của A lên d nên $H = d \cap (P) \Rightarrow H \in d \Rightarrow H(2+t; -3-t; -t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (1+t; -6-t; -5-t)$ Mặt khác ta có $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 1+t+6+t+5+t=0 \Rightarrow t = -4 \Rightarrow H(-2; 1; 4)$

Dạng 5: Tìm điểm M' đối xứng với M qua đt d

Phương pháp giải:

- Tìm toạ độ hình chiếu H của M trên đường thẳng d.

- M' đối xứng với M qua d $\Leftrightarrow$ H là trung điểm của MM' nên :
$$\begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M \\ y_{M'} = 2y_H - y_M \\ z_{M'} = 2z_H - z_M \end{cases}$$

Ví dụ: Cho đường thẳng $d : \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{-1}$ và điểm $A(1;3;5)$. Tìm toạ độ điểm A' đối xứng của A qua đường thẳng d.

Giải:

H là hình chiếu của A lên d, ta có H(-2;1;4) (Trong ví dụ bài toán hình chiếu của A trên d đã giải).

Vì A' đối xứng A qua đường thẳng d nên H là trung điểm của AA' nên ta có:

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = -5 \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = 1 \\ z_{A'} = 2z_H - z_A = 4 \end{cases} \quad \text{Vậy } A'(-5; 1; 4)$$

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Xác định m để hai mặt phẳng sau vuông góc (P): $(2m - 1)x - 3my + 2z - 3 = 0$ và

(Q): $mx + (m - 1)y + 4z - 5 = 0$.

A. $m = -2 \vee m = 2$ B. $m = -2 \vee m = 4$ C. $m = 2 \vee m = 4$ D. $m = -4 \vee m = 2$

Câu 2. Xác định m, n, p để cặp mặt phẳng sau song song

(P) : $2x - 3y - 5z + p = 0$, (Q) : $(m + 2)x + (n - 1)y + 10z - 2 = 0$

A. $m = 2, n = -3, p \neq 5$

B. $m = -2, n = 3, p \neq 1$

C. $m = -6, n = 7, p \neq 1$

D. $m = 6, n = -4, p \neq 2$

Câu 3. Cho đường thẳng $d : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-3}$ và mặt phẳng $(\alpha) : x + y + z - 4 = 0$. Trong các khẳng định sau, tìm khẳng định đúng

A. $d // (\alpha)$

B. d cắt (α)

C. $d \subset (\alpha)$

D. $d \perp (\alpha)$

Câu 4. Cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ và mặt phẳng $(\alpha) : x + 3y + z + 1 = 0$. Trong các khẳng định sau, tìm khẳng định đúng

A. $d // (\alpha)$

B. d cắt (α)

C. $d \subset (\alpha)$

D. $d \perp (\alpha)$

Câu 5. Tìm m để hai đường thẳng sau đây cắt nhau $d : \begin{cases} x = 1 + mt \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ và $d' : \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 3 - t' \end{cases}$

A. $m = 0$

B. $m = 1$

C. $m = -1$

D. $m = 2$

Câu 6. Cho hai đường thẳng $d_1 : \frac{x-2}{4} = \frac{y}{-6} = \frac{z+1}{-8}$ và $d_2 : \frac{x-7}{-6} = \frac{y-2}{9} = \frac{z}{12}$. Vị trí tương đối giữa d_1 và d_2 là:

A. Trùng nhau

B. Song song

C. Cắt nhau

D. Chéo nhau

Câu 7. Cho hai điểm $A(1; -1; 2)$, $B(2; 0; 1)$ và mặt phẳng (P): $x + 2y - 2z - 5 = 0$. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (P).

A. $(-2; -6; 8)$

B. $(-1; -3; 4)$

C. $(3; 1; 0)$

D. $(0; 2; -1)$

Câu 8. Cho mặt phẳng (P): $3x - 2y + z + 6 = 0$ và điểm $A(2; -1; 0)$. Tìm tọa độ hình chiếu của A lên mặt phẳng (P).

A. $(1; -1; 1)$

B. $(-1; 1; -1)$

C. $(3; -2; 1)$

D. $(5; -3; 1)$

Câu 9. Cho điểm $A(1; 1; 1)$ và đường thẳng (d): $\begin{cases} x = 6 - 4t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng (d).

A. $(2; -3; -1)$

B. $(2; 3; 1)$

C. $(2; -3; 1)$

D. $(-2; 3; 1)$

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các điểm $A(3; -4; 0)$, $B(0; 2; 4)$, $C(4; 2; 1)$. Tọa độ điểm D trên trục Ox, sao cho $AD = BC$.

A. $D(0; 0; 0)$, $D(6; 0; 0)$

B. $D(-2; -4; 0)$, $D(8; -4; 0)$

C. $D(3; 0; 0)$, $D(0; 0; 3)$

D. $D(-2; 0; 0)$, $D(8; 0; 0)$

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(2; -1; 1)$ và mặt phẳng (P): $2x - y + 2z + 2 = 0$. Tìm tọa độ điểm B đối xứng với A qua mặt phẳng (P).

A. $B(-2; 0; -4)$

B. $B(-1; 3; -2)$

C. $B(-2; 1; -3)$

D. $B(-1; -2; 3)$

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d : \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-1}$ và điểm $A(-1; 0; 1)$. Tìm tọa độ điểm B đối xứng với A qua đường thẳng d.

A. (1; 2; 3)

B. (1; 2; 1)

C. (1; -2; 3)

D. (0; 1; 1)

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x - 2y + 2z - 1 = 0$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+9}{6}$, $d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}$. Xác định tọa độ điểm M thuộc d_1 sao cho khoảng cách từ M đến d_2 bằng khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P). Biết rằng M có hoành độ nguyên.

A. (-1; 0; -9)

B. (0; 1; -3)

C. (1; 2; 3)

D. (2; 3; 9)

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(2; 0; 1), B(0; -2; 3) và mặt phẳng (P): $2x - y - z + 4 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA = MB = 3$. Biết M có hoành độ nguyên.

A. (3; -2; 3)

B. (2; 0; 4)

C. (-1; 0; 2)

D. (0; 1; 3)

KHOẢNG CÁCH VÀ GÓC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1. Khoảng cách từ $M(x_0; y_0; z_0)$ đến mp $(\alpha): Ax + By + Cz = 0$

$$\text{là: } d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

2. Khoảng cách từ điểm M_1 đến đt Δ đi qua M_0 và có vector chỉ phương $\vec{u}$

$$\text{là: } d(M_1, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau Δ và Δ' trong đó:

Δ đi qua điểm M_0 và có vector chỉ phương $\vec{u}$, Δ' đi qua điểm M_0' và có vector chỉ phương $\vec{u}'$

$$d(\Delta, \Delta') = \frac{|\overrightarrow{M_0M_0'} \cdot [\vec{u}, \vec{u}']|}{|[\vec{u}, \vec{u}']|}$$

4. Góc giữa hai mặt phẳng: Cho $(P): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(Q): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Khi

$$\text{đó góc giữa (P) và (Q) là } \alpha \text{ xác định bởi: } \cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \text{ với } \vec{n}_1, \vec{n}_2$$

là 2 VTPT của (P) và (Q).

Chú ý: $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ nên dấu giá trị tuyệt đối trong công thức là bắt buộc.

5. Góc giữa hai đường thẳng.

$$\text{Cho hai đường thẳng } (\Delta_1): \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3} ; (\Delta_2): \frac{x-x_2}{b_1} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{b_3}$$

Lần lượt có các vector chỉ phương là $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$; $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Ta có

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\vec{a}, \vec{b})| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

6. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

Cho mặt phẳng (α) có VTPT $\vec{n} = (A, B, C)$ và đường thẳng (Δ) có VTCP $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$$\text{Ta có: } \sin(\Delta; (\alpha)) = |\cos(\vec{n}, \vec{a})| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|} = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

- Câu 1.** Cho mặt phẳng (P): $2x - y - 2z - 8 = 0$ và điểm $M(-2; -4; 5)$. Tính khoảng cách từ M đến (P).
A. 18 B. 6 C. 9 D. 3
- Câu 2.** Cho hai mặt phẳng (P): $2x - 3y + 6z + 2 = 0$ và (Q): $2x - 3y + 6z + 9 = 0$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).
A. 8 B. 4 C. 2 D. 1
- Câu 3.** Cho $A(-2; 2; 3)$ và đường thẳng (Δ): $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{1}$. Tính khoảng cách từ A đến (Δ).
A. $3\sqrt{5}$ B. $5\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{5}$ D. $5\sqrt{2}$
- Câu 4.** Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$, $d_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{-1}$.
A. $\frac{3}{\sqrt{14}}$ B. $\frac{2}{\sqrt{14}}$ C. $\frac{1}{\sqrt{14}}$ D. $\frac{5}{\sqrt{14}}$
- Câu 5.** Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và mặt phẳng (P): $x - 2y + 2z - 3 = 0$. Gọi C là giao điểm của Δ với (P), M là điểm thuộc Δ . Tính khoảng cách từ M đến (P), biết $MC = \sqrt{6}$.
A. 2 B. 3 C. $2/3$ D. $4/3$
- Câu 6.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các điểm $A(1; 2; 3)$, $B(3; 2; 1)$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng Oxy. Tìm tọa độ của M để $P = |\overline{MA} + \overline{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.
A. $(1; 2; 1)$ B. $(1; 1; 0)$ C. $(2; 1; 0)$ D. $(2; 2; 0)$
- Câu 7.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các điểm $A(1; 1; 0)$, $B(3; 0; 5)$, $C(2; 2; 1)$. Gọi M là một điểm chạy trên mặt phẳng Oyz. Giá trị của $P = MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi M có tọa độ là
A. $(0; 2; 1)$ B. $(0; 1; 3)$ C. $(0; 2; 3)$ D. $(0; 1; 2)$
- Câu 8.** Cho điểm $A(1; 0; 1)$, $B(0; 2; 3)$ và $C(0; 0; 2)$. Độ dài đường cao hạ từ C của tam giác ABC là
A. 2 B. 3 C. $1/2$ D. 1
- Câu 9.** Trong mặt phẳng Oxyz, cho tứ diện ABCD có $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(1;3;2)$, $D(-2;3;-1)$. Độ dài đường cao kẻ từ D của tứ diện là
A. 1 B. 4 C. 3 D. 2
- Câu 10.** Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$, $d_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{-1}$.
A. $\frac{3}{\sqrt{14}}$ B. $\frac{2}{\sqrt{14}}$ C. $\frac{1}{\sqrt{14}}$ D. $\frac{5}{\sqrt{14}}$
- Câu 11.** Cho đường thẳng (d): $x+1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-2}$ và mặt phẳng (P): $2x - 2y + z - 3 = 0$. Xác định góc nhọn α hợp bởi (d) và (P).
A. $\alpha = 30^\circ$ B. $\alpha = 45^\circ$ C. $\alpha = 60^\circ$ D. $\sin \alpha = 4/9$
- Câu 12.** Côsin của góc giữa Oy và mặt phẳng (P): $4x - 3y + \sqrt{2}z - 7 = 0$ là:
A. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ C. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ D. $\frac{4}{\sqrt{3}}$
- Câu 13.** Góc giữa hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và $d_2: \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1}$ bằng
A. 45° B. 90° C. 60° D. 30°
- Câu 14.** Xác định góc ψ của hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -7 + t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = t \end{cases}$

A. $\psi = 30^\circ$ B. $\psi = 45^\circ$ C. $\psi = 0^\circ$ A. $\psi = 60^\circ$

Câu 15. Góc giữa hai mặt phẳng $(\alpha): 8x - 4y - 8z + 1 = 0; (\beta): \sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 7 = 0$ là:

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC OXYZ TRONG ĐỀ THI THPTQG NĂM 2017

Mã đề 101

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 5 = 0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P) ?

A. $Q(2; -1; 5)$ B. $P(0; 0; -5)$ C. $N(-5; 0; 0)$ D. $M(1; 1; 6)$

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, vector nào sau đây là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy) ?

A. $\vec{i} = (1; 0; 0)$ B. $\vec{k}(0; 0; 1)$ C. $\vec{j}(-5; 0; 0)$ D. $\vec{m} = (1; 1; 1)$

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(3; -1; 1)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{1}$?

A. $3x - 2y + z + 12 = 0$ B. $3x + 2y + z - 8 = 0$
C. $3x - 2y + z - 12 = 0$ D. $x - 2y + 3z + 3 = 0$

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua điểm $A(2; 3; 0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x + 3y - z + 5 = 0$?

A. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox . Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm I , bán kính IM ?

A. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$ B. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 13$
C. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{13}$ D. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 17$

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-1; 1; 3)$ và hai đường thẳng

$d: \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$, $\Delta': \frac{x+1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua M , vuông góc với Δ và Δ' .

A. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + t \\ z = 2 \end{cases}$,

$d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - 3z = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua giao điểm của d_1 và (P) , đồng thời vuông góc với d_2 .

A. $2x - y + 2z + 22 = 0$ B. $2x - y + 2z + 13 = 0$
C. $2x - y + 2z - 13 = 0$ D. $2x + y + 2z - 22 = 0$

- Câu 45.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 9$, điểm $M(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 4 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua M , thuộc (P) và cắt (S) tại hai điểm A, B sao cho AB nhỏ nhất. Biết rằng Δ có một vector chỉ phương là $\vec{u}(1;a;b)$. Tính $t = a - b$
- A. $T = -2$ B. $T = 1$ C. $T = -1$ D. $T = 0$

CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC OXYZ TRONG ĐỀ THI THPTQG NĂM 2018

Mã đề 101

Câu 2: Trong không gian Oxyz, mặt phẳng $(P): x + 2y + 3z - 5 = 0$ có một vector pháp tuyến là

- A. $\vec{n}_1 = (3; 2; 1)$ B. $\vec{n}_3 = (-1; 2; 3)$ C. $\vec{n}_4 = (1; 2; -3)$ D. $\vec{n}_2 = (1; 2; 3)$

Câu 8: Trong không gian Oxyz, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ có một vector chỉ phương là

- A. $\vec{u}_3 = (2; 1; 3)$ B. $\vec{u}_4 = (-1; 2; 1)$ C. $\vec{u}_2 = (2; 1; 1)$ D. $\vec{u}_1 = (-1; 2; 3)$

Câu 12: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(2; -4; 3)$ và $B(2; 2; 7)$. Trung điểm của đoạn AB có tọa độ là

- A. $(1; 3; 2)$ B. $(2; 6; 4)$ C. $(2; -1; 5)$ D. $(4; -2; 10)$

Câu 20: Trong không gian Oxyz, mặt phẳng đi qua điểm $A(2; -1; 2)$ và song song với mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 2 = 0$ có phương trình là

- A. $2x + y + 3z - 9 = 0$ B. $2x - y + 3z + 11 = 0$
C. $2x - y - 3z + 11 = 0$ D. $2x - y + 3z - 11 = 0$

Câu 33: Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+7}{-2}$. Đường thẳng đi qua A , vuông góc với d và cắt trục Ox có phương trình là

- A. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$

Câu 39: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 9$ và $A(2; 3; -1)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S) . M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình là

- A. $6x + 8y + 11 = 0$ B. $3x + 4y + 2 = 0$
C. $3x + 4y - 2 = 0$ D. $6x + 8y - 11 = 0$

Câu 47: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 1; 2)$ và đi qua điểm $A(1; -2; -1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

- A. 72 B. 216 C. 108 D. 36

Câu 49: Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng qua

$A(1; 1; 1)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (1; -2; 2)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là

- A. $\begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 5t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -10 + 11t \\ z = -6 - 5t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -10 + 11t \\ z = 6 - 5t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 - 5t \end{cases}$

Mã đề 102

Câu 10. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1; 1; -2)$ và $B(2; 2; 1)$. Vector $\vec{AB}$ có tọa độ là

A. $(3;3;-1)$

B. $(-1;-1;-3)$

C. $(3;1;1)$

D. $(1;1;3)$

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{2}$ có một vector chỉ phương là

A. $\vec{u}_1 = (3;-1;5)$

B. $\vec{u}_4 = (1;-1;2)$

C. $\vec{u}_2 = (-3;1;5)$

D. $\vec{u}_3 = (1;-1;-2)$

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 3x + 2y + z - 4 = 0$ có một vector pháp tuyến là

A. $\vec{n}_3 = (-1;2;3)$

B. $\vec{n}_4 = (1;2;-3)$

C. $\vec{n}_2 = (3;2;1)$

D. $\vec{n}_1 = (1;2;3)$

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(1;2;-2)$ và vuông góc với đường thẳng

$$\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{3} \text{ có phương trình là}$$

A. $3x + 2y + z - 5 = 0$

B. $2x + y + 3z + 2 = 0$

C. $x + 2y + 3z + 1 = 0$

D. $2x + y + 3z - 2 = 0$

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{2}$. Đường thẳng đi qua A , vuông góc với d và cắt trục Oy có phương trình là:

A. $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 4t \\ z = 3t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 3t \\ z = 2t \end{cases}$

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$ và đi qua điểm $A(1;0;-1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{64}{3}$

B. 32

C. 64

D. $\frac{32}{3}$

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 2$ và điểm $A(1;2;3)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S) , M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình là

A. $2x + 2y + 2z + 15 = 0$

B. $2x + 2y + 2z - 15 = 0$

C. $x + y + z + 7 = 0$

D. $x + y + z - 7 = 0$

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -3 \\ z = 5 + 4t \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm

$A(1;-3;5)$ và có vector chỉ phương $\vec{u}(1;2;-2)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là

A. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 5t \\ z = 6 + 11t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 5t \\ z = -6 + 11t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = -3 + 5t \\ z = 5 + t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -3 \\ z = 5 + 7t \end{cases}$

CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC OXYZ TRONG ĐỀ THI MINH HỌA THPTQG NĂM 2019

Câu 1. (M 1) (DE THAM KHAO 2018-2019-BGD Cau3) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-1)$ và $B(2;3;2)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

A. $(1;2;3)$. **B.** $(-1;-2;3)$. **C.** $(3;5;1)$. **D.** $(3;4;1)$.

Câu 2. (M 1) (DE THAM KHAO 2018-2019-BGD Cau9) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oxz) có phương trình là

A. 5 . **B.** $x + y + z = 0$. **C.** $y = 0$. **D.** $x = 0$.

Câu 3. (M 1) (DE THAM KHAO 2018-2019-BGD Cau11) Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}$ đi qua điểm nào sau đây?

A. $Q(2;-1;2)$. **B.** $M(-1;-2;-3)$. **C.** $P(1;2;3)$. **D.** $N(-2;1;-2)$.

Câu 4. (M 2) (DE THAM KHAO 2018-2019-BGD Cau19) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $I(1;1;1)$ và $A(1;2;3)$. Phương trình của mặt cầu có tâm I và đi qua điểm A là

A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 29$. **B.** $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$.
C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$. **D.** $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 5$.

Câu 5. (M 2) (DE THAM KHAO 2018-2019-BGD Cau22) Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z - 10 = 0$ và $(Q): x + 2y + 2z - 3 = 0$ bằng

A. $\frac{8}{3}$. **B.** $\frac{7}{3}$. **C.** 3 . **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 6. (M 3) (DE THAM KHAO 2018-2019-BGD Cau35) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$. Hình chiếu của d trên (P) có phương trình là

A. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+1}{5}$. **B.** $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1}$.
C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-5}$. **D.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y+4}{1} = \frac{z+5}{1}$.

Câu 7. (M 4) (DE THAM KHAO 2018-2019-BGD Cau41) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 8 = 0$. Xét M là điểm thay đổi thuộc (P) , giá trị nhỏ nhất của $2MA^2 + 3MB^2$ bằng

A. 135 . **B.** 105 . **C.** 108 . **D.** 145 .

Câu 8. (M 3) (DE THAM KHAO 2018-2019-BGD Cau45) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2;1;3)$, mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E , nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

A. $\begin{cases} x = 2 + 9t \\ y = 1 + 9t \\ z = 3 + 8t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$.

CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC OXYZ TRONG ĐỀ THI THPTQG NĂM 2019 (Mã Đề: 101)

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y + 3z - 1 = 0$. Vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của (P) ?

- A. $\vec{n}_3 = (1; 2; -1)$. B. $\vec{n}_4 = (1; 2; 3)$. C. $\vec{n}_1 = (1; 3; -1)$. D. $\vec{n}_2 = (2; 3; -1)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{1}$. Vector nào dưới đây là một vector chỉ phương của d ?

- A. $\vec{u}_2 = (2; 1; 1)$. B. $\vec{u}_4 = (1; 2; -3)$. C. $\vec{u}_3 = (-1; 2; 1)$. D. $\vec{u}_1 = (2; 1; -3)$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1; -1)$ trên trục Oz có tọa độ là

- A. $(2; 1; 0)$. B. $(0; 0; -1)$. C. $(2; 0; 0)$. D. $(0; 1; 0)$.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$. bán kính của mặt cầu đã cho bằng

- A. $\sqrt{7}$. B. 9. C. 3. D. $\sqrt{15}$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 3; 0)$ và $B(5; 1; -2)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

- A. $2x - y - z + 5 = 0$. B. $2x - y - z - 5 = 0$. C. $x + y + 2z - 3 = 0$. D. $3x + 2y - z - 14 = 0$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 2; 0)$, $B(2; 0; 2)$, $C(2; -1; 3)$ và $D(1; 1; 3)$.

Đường thẳng đi qua C và vuông góc với mặt phẳng (ABD) có phương trình là

- A. $\begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = -2 - 3t \\ z = 2 - t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -1 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -4 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0; 4; -3)$. Xét đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3. Khi khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất, d đi qua điểm nào dưới đây?

- A. $P(-3; 0; -3)$. B. $M(0; -3; -5)$. C. $N(0; 3; -5)$. D. $Q(0; 5; -3)$.

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z + \sqrt{2})^2 = 3$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a; b; c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

- A. 12. B. 8. C. 16. D. 4.

CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC OXYZ TRONG ĐỀ THI MINH HỌA THPTQG NĂM 2020

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; -2; 1)$ trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

- A. $(2; 0; 1)$. B. $(2; -2; 0)$. C. $(0; -2; 1)$. D. $(0; 0; 1)$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$. Tâm của (S) có tọa độ là

- A. $(-1; -2; -3)$. B. $(1; 2; 3)$. C. $(-1; 2; -3)$. D. $(1; -2; 3)$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 3x + 2y - 4z + 1 = 0$. Vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của (α) ?

- A. $\vec{n}_2 = (3; 2; 4)$. B. $\vec{n}_3 = (2; -4; 1)$. C. $\vec{n}_1 = (3; -4; 1)$. D. $\vec{n}_4 = (3; 2; -4)$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{3}$?

- A. $P(-1; 2; 1)$. B. $Q(1; -2; -1)$. C. $N(-1; 3; 2)$. D. $M(1; 2; 1)$

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (1; 0; 3)$ và $\vec{b} = (-2; 2; 5)$. Tích vô hướng $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ bằng

- A. 25. B. 23. C. 27. D. 29.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm là điểm $I(0; 0; -3)$ và đi qua điểm $M(4; 0; 0)$. Phương trình của (S) là

- A. $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 25$. B. $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 5$. C. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 25$. D. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 5$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(1; 1; -1)$ và vuông góc với đường thẳng

$\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}$ có phương trình là

- A. $2x + 2y + z + 3 = 0$. B. $x - 2y - z = 0$. C. $2x + 2y + z - 3 = 0$. D. $x - 2y - z - 2 = 0$.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, vector nào dưới đây là một vector chỉ phương của đường thẳng đi qua hai điểm $M(2; 3; -1)$ và $N(4; 5; 3)$?

- A. $\vec{u}_4 = (1; 1; 1)$. B. $\vec{u}_3 = (1; 1; 2)$. C. $\vec{u}_1 = (3; 4; 1)$. D. $\vec{u}_2 = (3; 4; 2)$.

CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC OXYZ TRONG ĐỀ THI MINH HỌA TN THPT NĂM 2020

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1; -1)$ trên mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là

- A. $(0; 1; 0)$. B. $(2; 1; 0)$. C. $(0; 1; -1)$. D. $(2; 0; -1)$.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 9$. Tâm của (S) có tọa độ là

- A. $(-2; 4; -1)$. B. $(2; -4; 1)$. C. $(2; 4; 1)$. D. $(-2; -4; -1)$.

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 3y + z + 2 = 0$. Vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của (P) ?

- A. $\vec{n} = (2; 3; 2)$. B. $\vec{n} = (2; 3; 0)$. C. $\vec{n} = (2; 3; 1)$. D. $\vec{n} = (2; 0; 3)$.

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1}$ điểm nào dưới đây thuộc Δ

- A. $P(1; 2; -1)$. B. $M(-1; -2; 1)$. C. $N(2; 3; -1)$. D. $Q(-2; -3; 1)$.

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; 1; 0)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{-2}$. Mặt

phẳng đi qua M và vuông góc với Δ có phương trình là:

- A. $3x + y - z - 7 = 0$. B. $x + 4y - 2z + 6 = 0$. C. $x + 4y - 2z - 6 = 0$. D. $3x + y - z + 7 = 0$.

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $M(1; 0; 1)$ và $N(3; 2; -1)$. Đường thẳng MN có phương trình tham số là:

- A. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

CHỦ ĐỀ 9: TỔ HỢP - XÁC SUẤT

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. HAI QUY TẮC ĐẾM CƠ BẢN

a. Quy tắc cộng:

Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động này có m cách thực hiện, hành động kia có n cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất thì công việc đó có $m+n$ cách thực hiện

b. Quy tắc nhân:

Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động liên tiếp. Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai thì có $m.n$ cách hoàn thành công việc.

Lưu ý: Quy tắc cộng có thể mở rộng cho nhiều hành động

Quy tắc nhân có thể mở rộng cho nhiều hành động liên tiếp

II. HOÁN VỊ- CHỈNH HỢP- TỔ HỢP

1. Hoán vị: Cho một tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 1$)

Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A gọi là một **hoán vị** của n phần tử đó. Số hoán vị n phần tử của A kí hiệu là P_n .

Ta có $P_n = n! = 1.2.3 \dots n$ ($0! = 1$)

2. Chỉnh hợp

Cho tập A gồm n phần tử ($n \geq 1$) và một số k với $1 \leq k \leq n$. Kết quả của việc lấy k phần tử khác nhau từ n phần tử của tập hợp A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một **chỉnh hợp chập k của n phần tử** đã cho

Số chỉnh hợp chập k của n được kí hiệu là: A_n^k

* Công thức tính A_n^k : $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ với $\begin{cases} n \in \mathbb{N}^* \\ 1 \leq k \leq n \end{cases}$

3. Tổ hợp (Quy ước $0! = 1$)

Cho tập A gồm n phần tử ($n \geq 1$) và số nguyên k với $0 \leq k \leq n$. Mỗi tập con gồm k phần tử của A được gọi là một **tổ hợp chập k của n phần tử** đã cho

* Số tổ hợp chập k của n phần tử được kí hiệu là C_n^k

* Công thức tính $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ $\begin{pmatrix} n \in \mathbb{N}^* \\ 0 \leq k \leq n \end{pmatrix}$

* Một số công thức và tính chất hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp:

- $A_n^k = k! C_n^k$; $C_n^0 = C_n^n = 1$
- $C_n^k = C_n^{n-k}$ với n nguyên dương k nguyên và $0 \leq k \leq n$
- $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$ với mọi $1 \leq k \leq n$ (k, n nguyên)
- $P_n = A_n^n = n!$ (n nguyên dương)

III. PHÉP THỬ, BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

1. Định nghĩa của phép thử:

Phép thử ngẫu nhiên là phép thử mà ta không đoán trước được kết quả của nó, mặc dù đã biết tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử đó.

2. Định nghĩa không gian mẫu:

Tập hợp các kết quả có thể xảy ra của một phép thử được gọi là không gian mẫu của phép thử và kí hiệu là: Ω

3. Biến cố: Là một tập hợp con của không gian mẫu.

Tập rỗng được gọi là biến cố không thể (biến cố không). Tập Ω là biến cố chắc chắn

4. Phép toán trên biến cố:

Tập $\Omega \setminus A$ được gọi là biến cố đối của biến cố A , ký hiệu là $\bar{A}$.

Tập $A \cup B$ được gọi là hợp của hai biến cố A và B

Tập $A \cap B$ được gọi là giao của hai biến cố A và B

Hai biến cố A và B xung khắc nếu $A \cap B = \emptyset$.

5. Xác suất của biến cố:

a. Định nghĩa :

Giả sử A là biến cố liên quan đến một phép thử chỉ có một số hữu hạn kết quả đồng khả năng xuất hiện.

Ta gọi tỉ số $\frac{n(A)}{n(\Omega)}$ là xác suất của biến cố A . Ký hiệu $P(A)$.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

($n(A)$ là số phần tử của tập A hay cũng là số các kết quả thuận lợi cho biến cố A , còn $n(\Omega)$ là số các kết quả có thể xảy ra của phép thử).

b. Tính chất của xác suất :

Giả sử A và B là các biến cố liên quan đến phép thử một số hữu hạn kết quả đồng khả năng xuất hiện

Định lý : * $P(\emptyset) = 0$; $P(\Omega) = 1$

* $0 \leq P(A) \leq 1$, với mọi biến cố A

* Nếu A và B xung khắc thì: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Nếu A và B bất kì thì: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Hệ quả: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, với mọi biến cố A

B. CÁC DẠNG TOÁN.

I. HAI QUY TẮC ĐẾM CƠ BẢN

Bài 1: (NB) Một tổ có 5 bạn nam và 6 bạn nữ. Có bao nhiêu cách chọn một bạn đi tham quan.

A. 5.

B. 6.

C. 11.

D. 30.

Giải: Có 5 cách chọn 1 học sinh nam

Có 6 cách chọn 1 học sinh nữ

Theo quy tắc cộng có $5 + 6 = 11$ cách chọn

Đáp án: C

Phương án A sai là do chỉ chọn học sinh nam

Phương án B sai là do chỉ chọn học sinh nữ

Phương án D sai là do nhầm sang quy tắc nhân

Bài 2: (TH) Từ các chữ số 0; 1; 2; 3. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số đôi một khác nhau?

A. 16.

B. 12.

C. 6.

D. 9.

Giải: Gọi số tự nhiên có hai chữ số đôi một khác nhau là $\overline{ab}$; $a, b \in \{0, 1, 2, 3\}$

Số cách chọn a là 3 ($a \neq 0$)

Số cách chọn b là 3 ($b \neq a$)

Theo quy tắc nhân có $3.3 = 9$ số

Đáp án: D

Phương án A sai là do chữ số hàng chục nhận luôn chữ số 0, chữ số hàng đơn vị chưa tính khác chữ số hàng chục

Phương án B sai là do số hàng chục nhận luôn chữ số 0

Phương án C sai là do nhầm sang quy tắc cộng

Bài 3: (VD) Từ các số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6. lập ra số tự nhiên có ba chữ số khác nhau và số đó chia hết cho 5.

A. 55.

B. 750.

C. 40.

D. 60.

Giải: Số tự nhiên có ba chữ số và chia hết cho 5 dạng $\overline{ab0}$ hoặc $\overline{ab5}$

+ Xét số dạng $\overline{ab0}$

Có 6 cách chọn a và 5 cách chọn b. Vậy có $6.5 = 30$ số

+ Xét số dạng $\overline{ab5}$

Có 5 cách chọn a ($a \neq 0$) và 5 cách chọn b. Vậy có $5.5 = 25$ số

Vậy theo quy tắc cộng có 55 số

Đáp án: A

Phương án B sai là do sai quy tắc cộng sang quy tắc nhân

Phương án C sai là do không chia 2 trường hợp

Phương án D sai là do không chia 2 trường hợp và chọn chữ số hàng chục sai.

II. HOÁN VỊ- CHỈNH HỢP- TỔ HỢP

Bài 1: (NB) Cho tập hợp M có 10 phần tử. Số tập con gồm 2 phần tử của M là:

A. A_{10}^8 .

B. A_{10}^2 .

C. C_{10}^2 .

D. 10^2 .

Giải: Mỗi tập con gồm 2 phần tử của M là một tổ hợp chập 2 của 10 phần tử của M.

Do đó số tập con gồm 2 phần tử của M là C_{10}^2 .

Đáp án C

Phương án A sai là do bỏ ra 2 phần tử và nhầm sang chỉnh hợp.

Phương án B sai là do hiểu sai khái niệm tổ hợp và chỉnh hợp

Phương án D sai là do nhầm sang quy tắc nhân

Bài 2: (NB) Một tổ có 10 học sinh. Có bao nhiêu cách chọn hai bạn làm trực nhật trong đó một bạn quét lớp, một bạn lau bảng?

A. C_{10}^2 .

B. A_{10}^2 .

C. 10^2 .

D. 2^{10} .

Giải: Mỗi cách chọn hai bạn làm trực nhật trong đó một bạn quét lớp, một bạn lau bảng là một chỉnh hợp chập 2 của 10 phần tử nên số cách chọn là A_{10}^2 .

Đáp án: B

Phương án A sai là do nhầm qua tổ hợp.

Phương án C sai là do nhầm sang quy tắc nhân và không trừ ra khi đã chọn 1 bạn.

Phương án D sai là do nhầm cách tính.

Bài 3: (TH) Giải phương trình $C_x^1 + C_x^2 + C_x^3 = \frac{7}{2}x$ ta có nghiệm là:

A. $x = 4$.

B. $x = -4$.

C. $x = \pm 4$.

D. Vô nghiệm.

Giải: Điều kiện để phương trình có nghiệm là:
$$\begin{cases} x \in \mathbb{N}^* \\ x \geq 3 \end{cases}$$

Với x thỏa đk, phương trình (1) tương đương với phương trình:

$$\frac{x!}{(x-1)!} + \frac{x!}{2(x-2)!} + \frac{x!}{3(x-3)!} = \frac{7}{2}x$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{2}x(x-1) + \frac{1}{6}x(x-1)(x-2) = \frac{7}{2}x$$

Chia 2 vế cho x ($x > 0$), ta được :

$$6 + 3x - 3 + x^2 - 3x + 2 = 21$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4(n) \\ x = -4(l) \end{cases}$$

Đáp án A

Phương án B sai là do giải sai điều kiện

Phương án **C** sai là do không đặt điều kiện

Phương án **D** sai là do biến đổi sai.

*** Có thể giải bằng MTCT bằng cách chuyển về rồi thế các nghiệm vào để chọn đáp án**

Bài 4: (VD) Một lớp học có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Chọn 3 học sinh vào đội xung kích, hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho trong 3 học sinh được chọn có ít nhất 1 học sinh nam?

A. 2625.

B. 9425.

C. 7125.

D. 28050.

Giải: xét 3 trường hợp

+ TH1: có 1 học sinh nam và 2 học sinh nữ, số cách chọn $C_{25}^1 \cdot C_{15}^2$

+ TH2: có 2 học sinh nam và 1 học sinh nữ, số cách chọn $C_{25}^2 \cdot C_{15}^1$

+ TH3: có 3 học sinh nam và 0 học sinh nữ, số cách chọn C_{25}^3

Vậy có tất cả: $C_{25}^1 \cdot C_{15}^2 + C_{25}^2 \cdot C_{15}^1 + C_{25}^3 = 9425$ cách chọn.

Đáp án: **B**

Phương án **A** sai do nhầm chỉ chọn 1 học sinh nam.

Phương án **C** sai do nhầm chỉ chọn 1 hoặc 2 học sinh nam.

Phương án **D** sai do nhầm sang chỉnh hợp.

III. PHÉP THỬ, BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

Bài 1: (NB) Cho A là một biến cố của không gian mẫu, P(A) là xác suất của biến cố A. Biểu thức nào sau đây là đúng

A. $0 < P(A) < 1, \forall A$.

B. $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A$.

C. $P(A) \leq 1, \forall A$.

D. $P(A) \geq 0, \forall A$.

Đáp án **B**

Các phương án **A**, **C**, **D** sai là do hiểu sai tính chất của xác suất

Bài 2: (TH) Một hộp chứa 11 quả cầu gồm 5 quả cầu màu xanh và 6 quả cầu màu đỏ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 quả cầu từ hộp đó. Xác suất để chọn ra 2 quả cầu cùng màu bằng

A. $\frac{5}{22}$.

B. $\frac{6}{11}$.

C. $\frac{5}{11}$.

D. $\frac{10}{11}$.

HD giải: Chọn **C**

Số cách chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 quả cầu từ 11 quả cầu là $C_{11}^2 = 55$.

Số cách chọn ra 2 quả cầu cùng màu là $C_5^2 + C_6^2 = 25$.

Xác suất để chọn ra 2 quả cầu cùng màu là $P = \frac{25}{55} = \frac{5}{11}$.

Phương án **A** sai là do tính sai không gian mẫu

Phương án **B** sai là do tính sai n(A) (nhầm hai quả cầu khác màu)

Phương án **D** sai là do số cách chọn ra 2 quả cầu cùng màu là $A_5^2 + A_6^2 = 50$.

Bài 3: (VD) Một người bỏ ngẫu nhiên ba lá thư vào ba phong bì đã ghi địa chỉ. Tính xác suất để có ít nhất một lá thư bỏ đúng phong bì của nó.

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{4}{9}$.

C. 1.

D. $\frac{1}{2}$.

Số phần tử của không gian mẫu là $3! = 6$. Gọi A là biến cố mà trong 3 phong bì có ít nhất một lá thư bỏ đúng địa chỉ

Trường hợp 1: có đúng 1 lá thư bỏ đúng địa chỉ số cách là $C_3^1 = 3$

Trường hợp 2: cả ba lá thư đều được bỏ đúng địa chỉ số cách là 1

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3+1}{6} = \frac{2}{3}$$

Chọn câu **A**.

Phương án **B** sai là do sai không gian mẫu là $3.3=9$

Phương án **C** sai là do tính $n(A) = 6$ (có thêm trường hợp 2 lá thư bỏ đúng địa chỉ: 2 cách)

Phương án **D** sai là do chỉ làm một trường hợp có đúng một lá thư bỏ đúng địa chỉ.

CHỦ ĐỀ 10: DÃY SỐ, CẤP SỐ CỘNG, CẤP SỐ NHÂN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. Dãy số

1. Định nghĩa

$$u: N^* \rightarrow R$$

$$n \mapsto u(n)$$

dạng khai triển: $(u_n) = u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$

2. Dãy số tăng, dãy số giảm:

- (u_n) là dãy số tăng $\Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$ với $\forall n \in N^*$. $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0$ với $\forall n \in N^*$
 $\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ với $\forall n \in N^*$ ($u_n > 0$).

- (u_n) là dãy số giảm $\Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$ với $\forall n \in N^*$. $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0$ với $\forall n \in N^*$
 $\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ với $\forall n \in N^*$ ($u_n > 0$).

3. Dãy số bị chặn

- (u_n) là dãy số bị chặn trên $\Leftrightarrow \exists M \in R: u_n \leq M, \forall n \in N^*$.
- (u_n) là dãy số bị chặn dưới $\Leftrightarrow \exists m \in R: u_n \geq m, \forall n \in N^*$.
- (u_n) là dãy số bị chặn $\Leftrightarrow \exists m, M \in R: m \leq u_n \leq M, \forall n \in N^*$.

II. Cấp số cộng

1. Định nghĩa: (u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + d, \forall n \in N^*$ (d : công sai)

2. Số hạng tổng quát: $u_n = u_1 + (n-1)d$ với $n \geq 2$

3. Tính chất của các số hạng: $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$ với $k \geq 2$

4. Tổng n số hạng đầu tiên: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$

III. Cấp số nhân

1. Định nghĩa: (u_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n \cdot q$ với $n \in N^*$ (q : công bội)

2. Số hạng tổng quát: $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$ với $n \geq 2$

3. Tính chất các số hạng: $u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}$ với $k \geq 2$

4. Tổng n số hạng đầu tiên:
$$\begin{cases} S_n = nu_1 & , q = 1 \\ S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} & , q \neq 1 \end{cases}$$

5. Tổng các số hạng của cấp số nhân lùi vô hạn: $S = \frac{u_1}{1-q}, (|q| < 1)$

B. LUYỆN TẬP

I. Dãy số

Bài 1. (NB)

Cho dãy số (u_n) có các số hạng đầu: $0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots$. Số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n = \frac{n+1}{n}$.

B. $u_n = \frac{n}{n+1}$.

C. $u_n = \frac{n-1}{n}$.

D. $u_n = \frac{n^2 - n}{n+1}$.

Giải:

Phương án A sai vì $n=1$ thì $u_1=2$

Phương án B sai vì không có giá trị n thuộc $\mathbb{N}^*$ để $u_1=0$

Phương án D sai vì khi cho $n=2$ thì $u_2=2/3$

Đáp án C vì:

$$n=1 \Rightarrow u_1=0$$

$$n=2 \Rightarrow u_2=1/2$$

$$n=3 \Rightarrow u_3=2/3$$

$$n=4 \Rightarrow u_4=3/4$$

$$n=5 \Rightarrow u_5=4/5$$

Bài 2. (TH)

Trong các dãy số sau, dãy số nào là dãy số giảm ?.

A. Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{n} - 2$.

B. Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n}{n+1}$.

C. Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n \cdot 3^{n+1}$.

D. Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2^n}{n}$.

Giải: Kiểm tra phương án A

$$u_n = \frac{1}{n} - 2$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{n+1} - 2 \right) - \left(\frac{1}{n} - 2 \right) = \frac{-1}{n(n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Đáp án A.

Phương án B sai vì $u_1=1/2 < u_2=2/3$

Phương án C sai vì $u_1=-9, u_2=27, u_3=-81$ là dãy không tăng không giảm.

Phương án D sai vì $u_1=u_2=2$

Bài 3. (VD) Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$. Số hạng thứ $n+2$ của dãy số (u_n) là:

A. $u_{n+2} = 5 + \frac{(n+2)(n+1)}{2}$.

B. $u_{n+2} = 5 + \frac{(n+2)(n-1)}{3}$.

C. $u_{n+2} = 5 + \frac{(n-2)(n+1)}{2}$.

D. $u_{n+2} = 5 + \frac{(n+2)(n+1)}{3}$.

Tính : $u_1 = 5$

$$u_2 = 5+1$$

$$u_3 = 5+1+2$$

$$u_4 = 5+1+2+3$$

$$u_5 = 5+1+2+3+4$$

$$u_6 = 5+1+2+3+4+5$$

$$\Rightarrow u_n = 5 + 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1). \text{ Dùng công thức: } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow u_n = 5 + \frac{n(n-1)}{2} \quad \Rightarrow \text{đáp án: B và D sai}$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy là $\Rightarrow u_n = 5 + \frac{n(n-1)}{2}$

Nên số hạng u_{n+2} của dãy là: $u_{n+2} = 5 + \frac{(n+2)[(n+2)-1]}{2} = 5 + \frac{(n+2)(n+1)}{2}$

Đáp án A.

II. Cấp số cộng

Bài 1. Cho cấp số cộng có $u_1 = 2$, công sai $d = 3$. Số hạng thứ 5 của cấp số cộng là:

A. 12.

B. 17.

C. 11.

D. 162.

Đáp án A.

Các phương án còn lại sai do dùng sai công thức

Bài 2. (TH) Cho CSC : $-2 ; u_2 ; 6 ; u_4$. Hãy chọn kết quả đúng ?

A. $u_2 = -6 ; u_4 = -2$.

B. $u_2 = 1 ; u_4 = 7$.

C. $u_2 = 2 ; u_4 = 8$.

D. $u_2 = 2 ; u_4 = 10$.

Đáp án D.

Từ tính chất của CSC ta có: $u_2 = \frac{u_1 + u_3}{2} = \frac{-2 + 6}{2} = 2 ; u_3 = \frac{u_2 + u_4}{2} \Leftrightarrow 6 = \frac{2 + u_4}{2} \Leftrightarrow u_4 = 10$

Bài 3. (TH)

Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^3 - 1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$

C. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} - u_n = 2 \end{cases}$

Đáp án D

Phương án A sai vì dãy có các số hạng: 1; 0; -1; -2; -9;...

Phương án B sai vì dãy có các số hạng: 2; 3; 5; ...

Phương án C sai vì dãy có các số hạng: 3; 7; 15;...

Bài 4. (VD)

Cho CSC có n số hạng biết $u_1 = -1$, $d = 2$, $S_n = 483$. Hỏi CSC có bao nhiêu số hạng?

A. $n = 21$.

B. $n = -21; 23$.

C. $n = 23$.

D. $n = 24$.

Đáp án C.

Từ công thức tính tổng n số hạng đầu của cấp số cộng:

$$nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = S_n \Leftrightarrow -n + n(n-1) = 483 \Leftrightarrow n = -21; 23$$

Phương án A, D sai.

Phương án B sai. vì số các số hạng của CSC là số nguyên dương.

III. Cấp số nhân

Bài 1. (NB)

Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 1 ; u_2 = 4$. Công bội cấp số nhân đã cho bằng:

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. $\frac{1}{4}$.

Đáp án: B

Bài 2. (TH)

Cho cặp số nhân: -2; x; -18; y. Kết quả nào sau đây là đúng?

A. $\begin{cases} x=6 \\ y=-54 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x=-10 \\ y=-26 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=-6 \\ y=-54 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x=-6 \\ y=54 \end{cases}$

Đáp án C.

Theo tính chất của CSN ta có: $x^2 = (-2)(-18) = 36 \Leftrightarrow x = \pm 6$.

$x = 6 \Rightarrow q = \frac{u_2}{u_1} = -3$, cặp số nhân là: -2; 6; -18; 54. Phương án: A, B, C, D đều sai.

$x = -6 \Rightarrow q = \frac{u_2}{u_1} = 3$, cặp số nhân là: -2; -6; -18; -54. $\Rightarrow x = -6; y = -54$ Chọn đáp án C.

Hoặc: Kiểm tra kết quả nếu $\frac{x}{-2} = \frac{y}{-18}$ thì đó là giá trị x, y cần tìm.

Bài 3. (VD)

Tìm tích của các số dương a và b sao cho a; a+2b; 2a+b lập thành cấp số cộng và $(b+1)^2$; ab+5; $(a+1)^2$ lập thành cấp số nhân.

A. 12.

B. 6.

C. 18.

D. 3.

Theo tính chất của CSC ta có $2(a+2b) = a+2a+b \Leftrightarrow a=3b$

Theo tính chất của CSN ta có $(ab+5)^2 = [(a+1)(b+1)]^2 \Leftrightarrow (3b^2+5)^2 = [(3b+1)(b+1)]^2$

$$\Leftrightarrow b = 1 \Rightarrow a = 3 \text{ Vậy } a.b = 3$$

Đáp A. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^3 - 1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$ C. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} - u_n = 2 \end{cases}$

án D.

CHỦ ĐỀ 10: HÌNH HỌC KHÔNG GIAN TỔNG HỢP

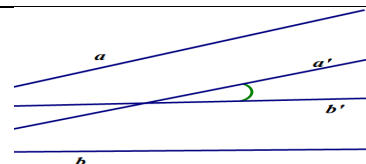
A. GÓC TRONG KHÔNG GIAN.

I. GÓC GIỮA 2 ĐƯỜNG THẲNG.

1. Tóm tắt lý thuyết

Góc giữa hai đường thẳng a và b là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b . (số đo góc giữa hai đường thẳng luôn lớn hơn hay bằng 0° và bé hơn hay bằng 90°). Kí hiệu:

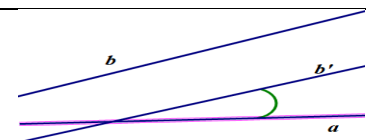
$$(\widehat{a; b}) = (\widehat{a'; b'})$$



Cách xác định góc giữa 2 đường thẳng trong thực tế:

Muốn xác định góc giữa hai đường thẳng a và b từ 1 điểm

A trên đường thẳng a kẻ đường thẳng $b' // b$. $(\widehat{a; b}) = (\widehat{a; b'})$



2. Phương pháp giải:

Cách 1: Dựa vào định nghĩa

Cách 2: Dựa vào cách xác định góc giữa 2 đường thẳng trong thực tế.

Cách 3: Dựa vào cách xác định góc giữa 2 vectơ chỉ phương.

3. Ví dụ minh họa:

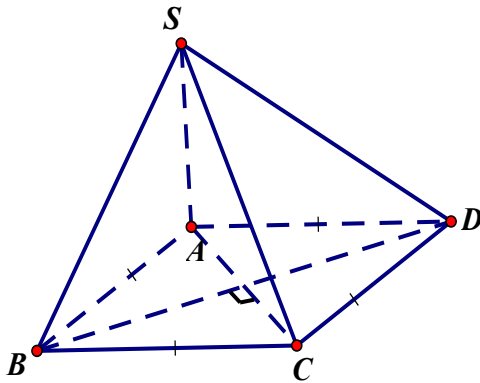
Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp BC$. Tính góc giữa hai đường thẳng SD và BC ?

A. 90° .

B. 60° .

C. 45° .

D. 30° .



Hướng dẫn giải:

Ta có: $\left. \begin{array}{l} BC // AD \\ SA \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{SAD} = 90^\circ$.

Do $BC // AD \Rightarrow (\widehat{SD; BC}) = (\widehat{SD; AD}) = \widehat{SDA}$.

Xét tam giác SAD vuông tại A ta có:

$$\tan \widehat{SDA} = \frac{SA}{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SDA} = 60^\circ$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng SD và BC bằng 60°

Vậy chọn **B**.

Ví dụ 2. Cho chóp $S.ABCD$ có mặt phẳng đáy là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính $\cos(\widehat{SB, AC})$.

A. $\cos(\widehat{SB, AC}) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

B. $\cos(\widehat{SB, AC}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

C. $\cos(\widehat{SB, AC}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

D. $\cos(\widehat{SB, AC}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải

Lấy M là trung điểm SD . Khi đó góc cần

tìm là góc giữa OM và OC .

Ta có MC là trung tuyến

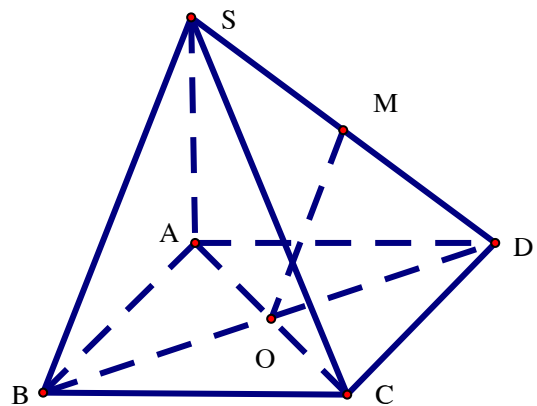
$$\Delta SCD \Rightarrow MC^2 = \frac{SC^2 + DC^2}{2} - \frac{SD^2}{4} = 2a^2$$

$$\Rightarrow MC = a\sqrt{2}$$

Xét ΔMOC có:

$$\cos \widehat{MOC} = \frac{MO^2 + OC^2 - MC^2}{2 \cdot MO \cdot OC} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Vậy chọn **A**.



Ví dụ 3. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 1$, $AA' = m (m > 0)$. Hỏi m bằng bao nhiêu để góc giữa AB' và BC' bằng 60° ?

A. $m = \sqrt{5}$.

B. $m = 1$.

C. $m = \sqrt{3}$.

D. $m = \sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

Lấy M, N, P là trung điểm $BB', B'C', AB$ khi đó $MP \parallel AB', MN \parallel BC'$.

Suy ra góc cần tìm là góc giữa MP, MN .

$$MP = MN = \frac{\sqrt{m^2 + 1}}{2}. \text{ Lấy } Q \text{ là trung điểm}$$

$A'B'$.

$$\Rightarrow PN = \sqrt{PQ^2 + QN^2} = \sqrt{m^2 + \frac{1}{4}}.$$

$$\text{Suy ra } \cos \widehat{PMN} = \frac{PM^2 + MN^2 - PN^2}{2 \cdot PM \cdot MN} = \pm \frac{1}{2}, \text{ từ đó}$$

tính được $m = \sqrt{2}$.

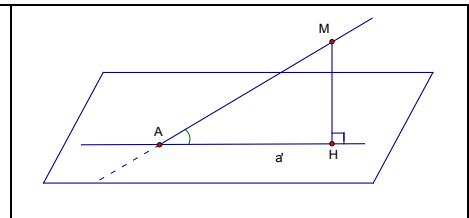
Vậy chọn D.

II. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

1. Tóm tắt lý thuyết

Góc giữa đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) là góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên $mp(P)$. Kí hiệu: $(\widehat{a; (P)}) = (\widehat{a; a'})$

Đặc biệt: Nếu a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng a và $mp(P)$ là 90° .

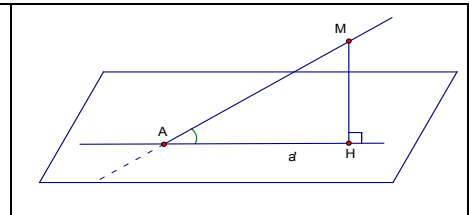


2. Phương pháp giải

Muốn xác định góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) .

+Xác định giao điểm A của đường thẳng a và $mp(P)$.

+Lấy điểm $M \in a$ ($M \neq A$), xác định hình chiếu vuông góc H của M trên (P) khi đó: $(\widehat{a; (P)}) = \widehat{MAH}$



3. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. (Trích đề thi TN THPT QG 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

A. 60° .

B. 90° .

C. 30° .

D. 45° .

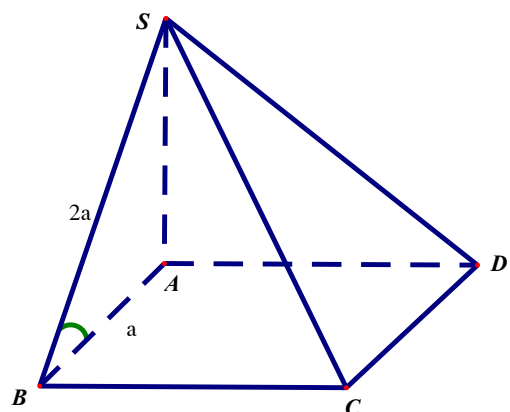
Giải:

AB là hình chiếu của SB lên $(ABCD)$.

$$\Rightarrow (\widehat{SB, (ABCD)}) = (\widehat{SB, AB}) = \widehat{SBA}.$$

$$\cos \widehat{SBA} = \frac{AB}{SB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ.$$

Vậy chọn A.



Ví dụ 2. Cho chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Gọi α là góc giữa đường SC và mặt phẳng (SAD) H. Tính $\tan \alpha$.

- A. $\sqrt{7}$. B. $\frac{\sqrt{7}}{7}$. C. $\sqrt{6}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Giải :

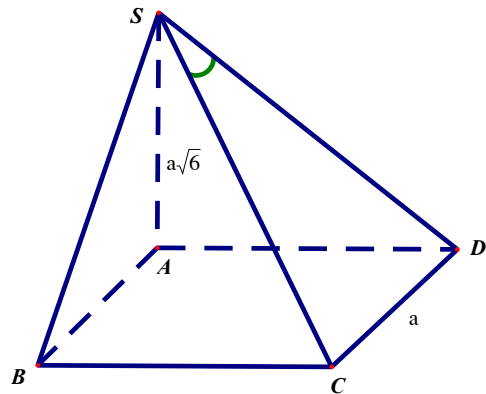
Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$.

Tức D là hình chiếu vuông góc của C lên (SAD)

$\Rightarrow$ Góc giữa SC và (SAD) là $\widehat{CSD}$.

$$SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{7};$$

$$\tan \widehat{CSD} = \frac{CD}{SD} = \frac{\sqrt{7}}{7}. \text{ Đáp án B.}$$



Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $(SAB) \perp (ABCD)$, tam giác SAB là tam giác đều. Tính $\tan$ của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

- A. $\frac{\sqrt{15}}{5}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. C. $\sqrt{5}$. D. $\frac{\sqrt{15}}{15}$.

Giải:

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Ta có $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow SH \perp (ABCD) \\ SH \subset (SAB), SH \perp AB \end{cases}$

Do đó HC là hình chiếu vuông góc của SC lên mp $(ABCD)$. $\Rightarrow (\widehat{SC, (ABCD)}) = \widehat{SCH}$

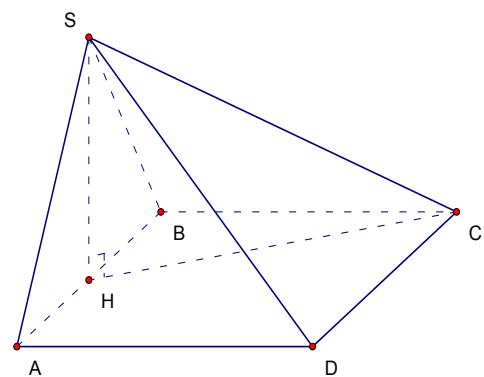
$$\text{Mà ta có: } SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}; BH = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2},$$

tam giác BHC vuông tại B

$$\Rightarrow HC = \sqrt{HB^2 + BC^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\tan \widehat{SCH} = \frac{SH}{HC} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

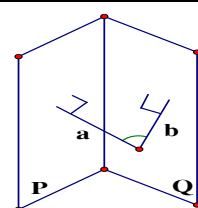
Chọn A.



III. GÓC GIỮA 2 MẶT PHẪNG.

1. tóm tắt lý thuyết

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.



2. Phương pháp giải

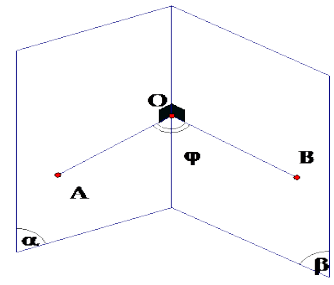
Cách 1:

- Chọn điểm O thuộc giao tuyến của α và β .
- Dựng qua O : $\begin{cases} OA \subset (\alpha) \\ OA \perp \Delta \end{cases}$ và $\begin{cases} OB \subset (\beta) \\ OB \perp \Delta \end{cases}$

$$\bullet ((\alpha), (\beta)) = (\widehat{OA; OB}) = \varphi$$

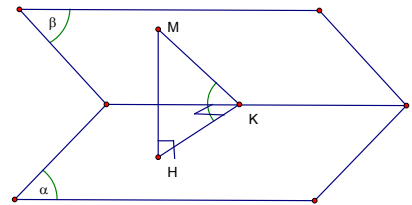
Chú ý: * $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$

$$* (\alpha) \perp (\beta) \Rightarrow ((\alpha), (\beta)) = 90^\circ$$



Cách 2:

- Tìm giao tuyến d của (α) và (β)
- Từ một điểm M trong (β) kẻ $MH \perp (\alpha)$ ($H \in (\alpha)$)
- Từ điểm H kẻ $HK \perp d$ ($K \in d$) $\Rightarrow$
 $((\alpha), (\beta)) = \widehat{MKH} = \varphi$



3. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. (Trích đề thi tham khảo năm 2019) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa $(A'B'CD)$ và $(ABC'D')$ bằng

A. 30° .

B. 60° .

C. 45° .

D.

90° .

Giải

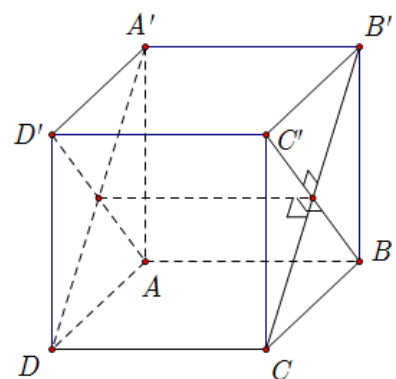
Ta có: $CD \perp (BCC'B') \Rightarrow CD \perp BC'$.

Và:

$$\begin{cases} BC' \perp CD \\ BC' \perp B'C \end{cases} \Rightarrow BC' \perp (A'B'CD) \Rightarrow (ABC'D') \perp (A'B'CD)$$

Góc giữa $(A'B'CD)$ và $(ABC'D')$ là 90° .

Vậy chọn D.



Ví dụ 2. Cho chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và (SCD) tạo với mặt phẳng đáy góc 45° . Gọi α góc giữa (SBC) và (SCD) .

Tính góc α .

A. $\alpha = 30^\circ$.

B. $\alpha = 60^\circ$.

C. $\alpha = 45^\circ$.

D. $\alpha = 90^\circ$.

Hướng dẫn giải:

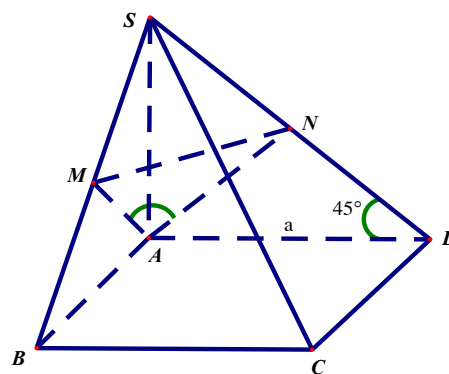
Dễ chứng minh được góc giữa (SCD)

và đáy là $\widehat{SDA} = 45^\circ$ nên $SA = a$

Lấy M, N lần lượt là trung điểm SB, SD . Dễ chứng minh $AN \perp (SCD)$, $AM \perp (SBC)$ suy ra góc giữa (SBC) và (SCD) là góc giữa AM và AN .

$$AM = AN = MN = \frac{DB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{MAN} = 60^\circ.$$

Vậy chọn A.



Ví dụ 3. Cho chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = 4a$, $AD = 3a$. Các cạnh bên đều có độ dài $5a$. Gọi α là góc giữa (SBC) và $(ABCD)$. Tính $\tan \alpha$.

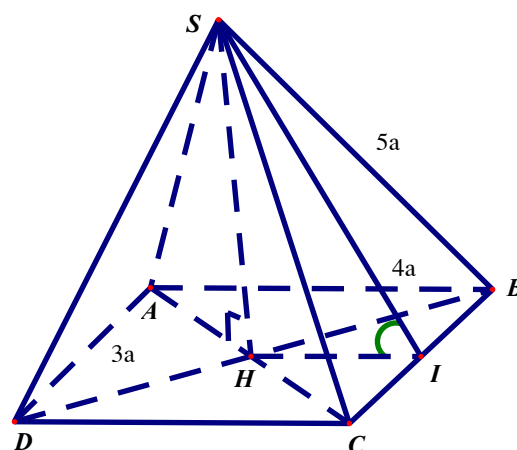
- A. $\tan \alpha = \frac{5}{4}$. B. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$. C. $\tan \alpha = \frac{5\sqrt{3}}{4}$. D. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi H là tâm hình chữ nhật $ABCD$ thì $SH \perp (ABCD)$. Lấy I là trung điểm $AB = a$ suy ra góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ là $\widehat{SIH}$. Tính được

$$\tan \widehat{SIH} = \frac{5\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy chọn C.



B. KHOẢNG CÁCH

Dạng 1: Khoảng cách từ một điểm M tới một đường thẳng a:

Phương pháp: Xác định chân đường vuông góc H hạ từ M tới đường thẳng a .
Độ dài đoạn $MH = d(M, a)$.

Ví dụ 1. Cho tứ diện $SABC$ trong đó SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau và $SA = 3a$, $SB = a$, $SC = 2a$. Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC .

- A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{7a\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{7a}{5}$. D. $\frac{\sqrt{7}a}{5}$.

Giải:

Từ S kẻ $SH \perp BC$ ($H \in BC$) (1). Ta có $SA \perp SB$ và $SA \perp SC \Rightarrow SA \perp (SBC)$

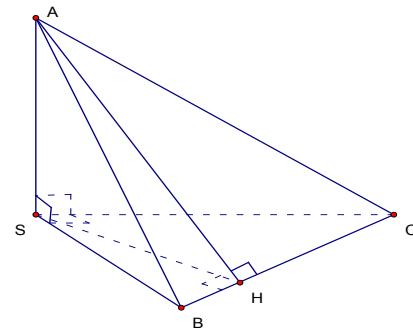
mặt khác ta có : $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp AH \Rightarrow AH = d(A; BC)$

Trong tam giác SBC vuông tại S ta có:

$$SH = \frac{SB \cdot SC}{\sqrt{SB^2 + SC^2}} = \frac{a \cdot 2a}{\sqrt{a^2 + (2a)^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

Trong tam giác SAH vuông tại S ta có :

$$AH = \sqrt{SA^2 + SH^2} = \sqrt{(3a)^2 + \left(\frac{2a\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{7a\sqrt{5}}{5}. \text{ Chọn đáp án B}$$



Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $SA = 2a$, $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Gọi O là tâm của $ABCD$, tính khoảng cách từ O đến SC .

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Giải:

Gọi E là trung điểm SC , suy ra $OE \parallel SA$ và

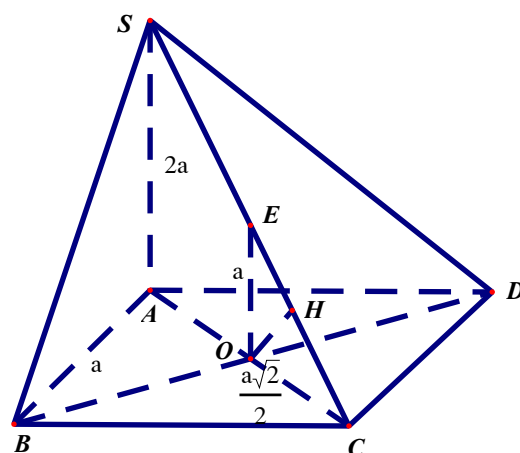
$$OE = \frac{1}{2} SA = a.$$

Do $SA \perp AC \Rightarrow OE \perp AC \Rightarrow \triangle OEC$ vuông tại O .

Kê $OH \perp EC \Rightarrow d(O, SC) = OH$.

$$\text{Ta có: } OH = \frac{OE \cdot OC}{\sqrt{OE^2 + OC^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} a.$$

Vậy chọn A.



Dạng 2: Khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng:

1. Định nghĩa:

Khoảng cách từ điểm M tới mp(α) là độ dài đoạn vuông góc MH hạ từ M xuống mp(α). Kí hiệu: $d(M, (\alpha))$

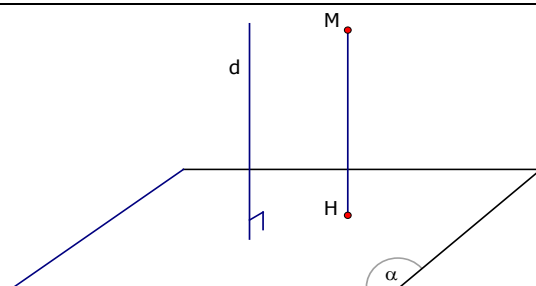
2. Phương pháp tính khoảng cách từ điểm M tới mp(α):

Dựng $MH \perp (\alpha)$, $H \in (\alpha)$ và tính $MH \Rightarrow d(M, (\alpha)) = MH$.

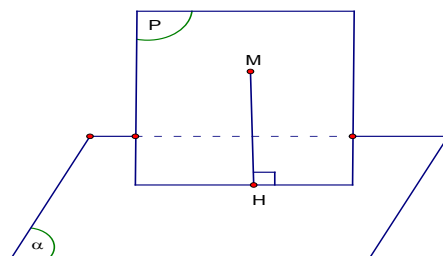
Có thể dựng MH theo hai phương pháp sau:

Cách 1: Nếu có một đường thẳng $d \perp (\alpha)$

thì ta dựng đường thẳng Δ đi qua M và $\Delta \parallel d$. Đường thẳng này cắt (α) tại $H \Rightarrow MH \perp (\alpha)$.

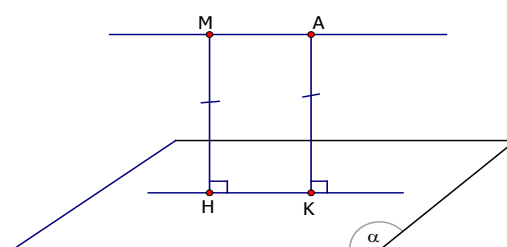


Cách 2: Chọn một mặt phẳng (P) qua M và $(P) \perp (\alpha)$, mặt phẳng (P) cắt (α) theo giao tuyến d . Trong mặt phẳng (P) dựng $MH \perp d, (H \in d)$ thì $MH \perp (\alpha)$.



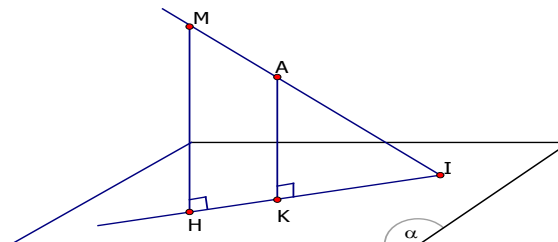
Chú ý: Khi biết khoảng cách từ một điểm A (khác M) đến (α) .

+ Nếu $MA \parallel (\alpha)$ thì $d(M, (\alpha)) = d(A, (\alpha))$.



+ Nếu $MA \cap (\alpha) = I (I \neq A)$ thì

$$\frac{d(M, (\alpha))}{d(A, (\alpha))} = \frac{IM}{IA}.$$



Ví dụ 1. Cho hình chóp đều $S.ABC$, đáy ABC có cạnh bằng a , mặt bên tạo với đáy một góc α . Tính $d(A, (SBC))$ theo a và α .

A. $d(A, (SBC)) = \frac{a}{2} \cdot \sin \alpha.$

B. $d(A, (SBC)) = \frac{a}{2} \cdot \cos \alpha.$

C. $d(A, (SBC)) = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sin \alpha.$

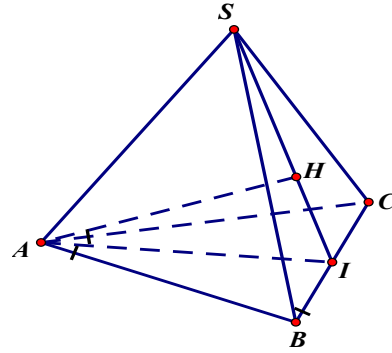
D. $d(A, (SBC)) = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \alpha.$

Giải:

+ Gọi I là trung điểm của BC .

+ Ta có:

$$\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SI \subset (SBC), SI \perp BC \\ AI \subset (ABC), AI \perp BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ((SBC); (ABC)) = \widehat{AIS} = \alpha \\ BC \perp (SAI) \end{cases}$$



$$+ \begin{cases} \text{Kẻ } AH \perp SI \text{ (H} \in SI) \\ BC \perp AH \text{ vì } BC \perp (SAI) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC). \text{ Do đó } d(A, (SBC)) = AH$$

$$+ \text{ Mặt khác, xét tam giác vuông } AHI \text{ có: } AH = AI \cdot \sin \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sin \alpha$$

$$\text{Vậy } d(A, (SBC)) = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sin \alpha$$

Vậy chọn C.

Ví dụ 2. (Trích đề thi tham khảo 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{\sqrt{21}a}{7}$.

B. $\frac{\sqrt{15}a}{7}$.

C. $\frac{\sqrt{21}a}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{15}a}{3}$.

Giải:

Chọn A

Ta có $AB \not\subset (SCD)$ và $AB \parallel CD$ nên

$AB \parallel (SCD)$. Do đó $d_{(B; (SCD))} = d_{(A; (SCD))}$.

Trong $(ABCD)$ kẻ $AE \perp CD$ với $E \in CD$.

Trong (SAE) kẻ $AH \perp SE$ ($H \in SE$) (1).

Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp CD$ và

$AE \perp CD$ suy ra $CD \perp (SAE)$.

Do đó $CD \perp AH$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SCD)$.

Suy ra $d_{(A; (SCD))} = AH$.

Trong tam giác vuông AED ta có

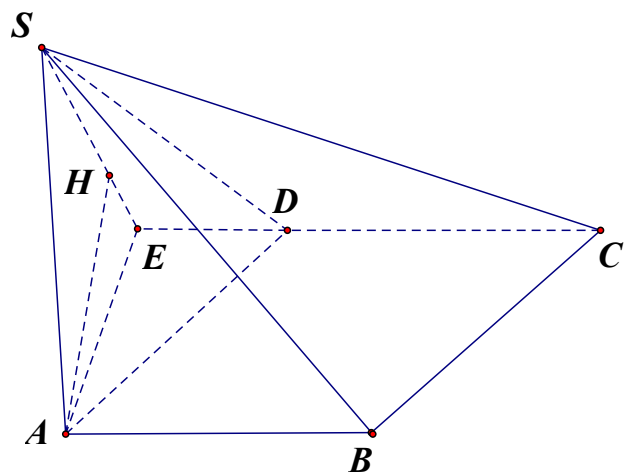
$$AE = AD \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ (vì}$$

$$\widehat{ADE} = \widehat{BAD} = 60^\circ)$$

Trong tam giác vuông SAE ta có

$$AH = \frac{SA \cdot AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}. \text{ Vậy}$$

$$d(B; (SCD)) = d(A; (SCD)) = AH = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

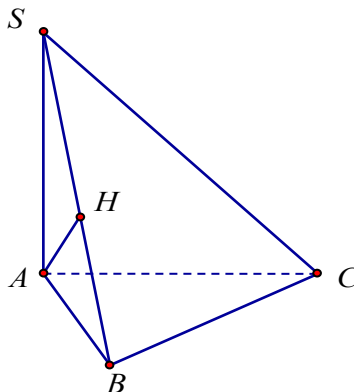


Ví dụ 3. (Trích đề thi tốt nghiệp THPT năm 2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B , $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$. B. $\frac{\sqrt{5}a}{3}$. C. $\frac{2\sqrt{2}a}{3}$. D. $\frac{\sqrt{5}a}{5}$.

Giải:

Chọn A.



Trong tam giác SAB dựng AH vuông góc SB thì $AH \perp (SBC)$ do đó khoảng cách cần tìm là AH . Ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{5}{4a^2} \text{ suy ra } AH = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

Dạng 3: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

1. Phương pháp tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau d và d'

Cách 1:

- + Xác định đường thẳng vuông góc chung của d và d'
- + Tính độ dài đoạn vuông góc chung.

Cách 2:

- + Tìm mp(P) chứa d' và song song với d
- + Khi đó $d(d, d') = d(d, (P)) = d(A, (P))$ với A là một điểm bất kỳ thuộc d

(Cách dựng (P): qua một điểm $B \in d'$ dựng đường thẳng Δ song song với d , lúc đó $mp(P) \equiv (d', \Delta)$)

Chú ý: Nếu a, b chéo nhau và vuông góc với nhau thì

- Dựng mp(P) $\supset b$ và mp(P) $\perp a$ tại A
- Dựng AB vuông góc với b tại B , khi đó: $d(a, b) = AB$

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = a$, tất cả các cạnh còn lại bằng $3a$. Tính $d(AB, CD)$

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $a\sqrt{2}$. C. $a\sqrt{26}$. D. $\frac{a\sqrt{26}}{2}$.

Giải:

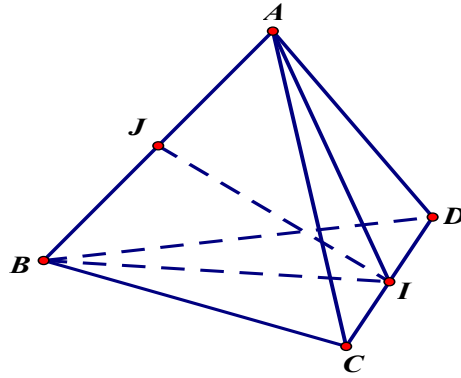
+ Gọi I, J lần lượt là trung điểm của CD và AB .

+ Vì ACD và BCD là các tam giác đều nên:

$CD \perp AI, CD \perp BI \Rightarrow CD \perp (AIB) \Rightarrow CD \perp IJ$ (1) Mặt khác, $\triangle ACD = \triangle BCD$ nên tam giác AIB cân tại I . Do đó, $IJ \perp AB$ (2)

+ Từ (1), (2) suy ra: IJ là đường vuông góc chung của AB và CD .

+ Ta có:



$$IJ = \sqrt{AI^2 - AJ^2} = \sqrt{\left(\frac{3a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{26}}{2}. \text{ Vậy } d(AB, CD) = \frac{a\sqrt{26}}{2}$$

Đáp án: **D**

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD , H là giao điểm của CN và DM , $SH \perp (ABCD)$, $SH = a\sqrt{3}$. Tính $d(DM, SC)$.

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{288}}{19}$. C. $\frac{a\sqrt{30}}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{95}}{10}$.

Giải:

+ Trong mp(SCH) kẻ $HK \perp SC$ (1), ($K \in SC$).

+ Mặt khác, $\left. \begin{array}{l} SH \perp (ABCD) \\ DM \subset (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow SH \perp DM$ (*)

Xét hai tam giác vuông AMD và DNC có $AM=DN$, $AD=DC \Rightarrow \triangle AMD = \triangle DNC$. Từ đó ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AMD} = \widehat{DNC} \\ \widehat{ADM} = \widehat{DCN} \\ \widehat{AMD} + \widehat{ADM} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{DNC} + \widehat{ADM} = 90^\circ$$

$\Rightarrow \widehat{NHD} = 90^\circ$ hay $DM \perp CN$ (**).

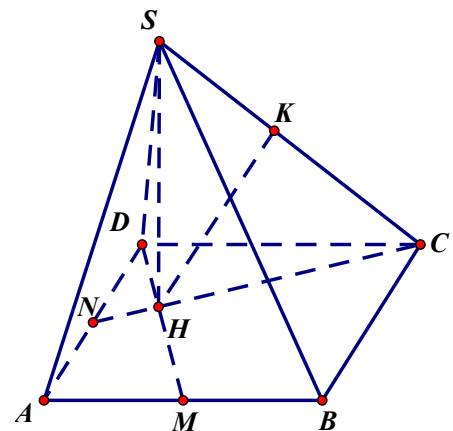
Từ (*), (**) suy ra: $DM \perp (SCH) \Rightarrow DM \perp HK$ (2).

Từ (1), (2) suy ra: HK là đoạn vuông góc chung của DM và SC .

+ Ta có: $\triangle HCD \sim \triangle DCN \Rightarrow HC = \frac{CD^2}{CN} = \frac{a^2}{\sqrt{CD^2 + DN^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Xét tam giác vuông SHC ta có: $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HC^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{19}{12a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{288}}{19}$

Vậy $d(DM, SC) = HK = \frac{a\sqrt{288}}{19}$. Đáp án **B**



Ví dụ 3. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Tính $d(AD, SB)$.

A. $\frac{a\sqrt{42}}{7}$.

B. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$.

Giải:

Ta có: $\begin{cases} AD \not\subset (SBC) \\ AD // BC \Rightarrow AD // (SBC) \\ BC \subset (SBC) \end{cases}$

Do vậy ta chọn (SBC) chứa SB và song song AD .

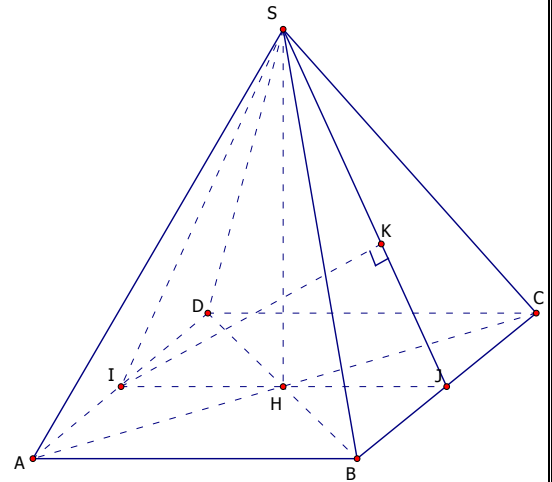
Suy ra: $d(AD, SB)$ bằng khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên AD đến (SBC) .

Gọi I, J lần lượt là trung điểm AD và BC .

Khi đó, ta có: $\begin{cases} BC \perp IJ \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SIJ)$.

Mà $BC \subset (SBC)$ nên $(SBC) \perp (SIJ)$

theo giao tuyến SJ . Trong mp(SIJ) kẻ $IK \perp SJ, K \in SJ$. Khi đó $IK \perp (SBC)$, hay $IK = d(AD, SB)$.



Tam giác SJC vuông tại J có: $SJ = \sqrt{SC^2 - JC^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2} \Rightarrow$

$S_{\triangle SIJ} = \frac{1}{2}SH \cdot IJ = \frac{1}{2}IK \cdot SJ$. Suy ra: $IK = \frac{SH \cdot IJ}{SJ} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a}{\frac{a\sqrt{7}}{2}} = \frac{a\sqrt{42}}{7}$.

Vậy: $d(AD, SB) = \frac{a\sqrt{42}}{7}$. Đáp án A

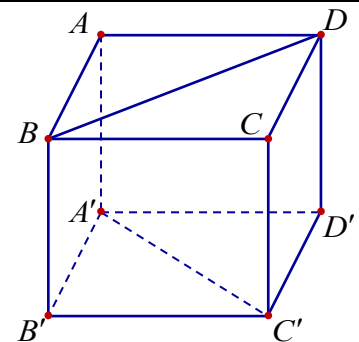
Ví dụ 4. (Đề tham khảo của Bộ năm 2018) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng

A. $\sqrt{3}a$.

B. a .

C. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

D. $\sqrt{2}a$.



Giải:

Đáp án B

Cách 1: Ta có $BD // (A'B'C'D')$

$\Rightarrow d(BD, A'C') = d(BD, (A'B'C'D')) = d(B, (A'B'C'D')) = BB' = a$.

Cách 2: Gọi O, O' lần lượt tâm của hai đáy. Ta có: OO' là đoạn vuông góc chung của BD và $A'C'$. Do đó $d(BD, A'C') = OO' = a$.

Ví dụ 5. Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng $6\sqrt{2}cm$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD .

A. 5cm.

B. 4cm.

C. 3cm.

D. 6cm.

Hướng dẫn:

Áp dụng ví dụ 1, ta chọn câu D.

IJ là đường vuông góc chung của AB và CD . $IJ = \sqrt{AI^2 - AJ^2} = 6cm$

