

CHUYÊN ĐỀ 7: PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN $Oxyz$

BÀI 1: HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Nắm vững định nghĩa hệ trục tọa độ $Oxyz$ trong không gian, các khái niệm về tọa độ điểm, tọa độ vector.
- + Nắm vững biểu thức tọa độ các phép toán vector và các tính chất.
- + Nắm vững biểu thức tọa độ của tích vô hướng, tích có hướng của hai vector và các ứng dụng.
- + Nắm vững được phương trình mặt cầu, điều kiện để một phương trình là phương trình mặt cầu.

❖ Kỹ năng

- + Biết tìm tọa độ của một điểm, một vector. Tính được tổng, hiệu các vector, tích của vector với một số.
- + Tính được tích vô hướng của hai vector và các ứng dụng: tính độ dài vector, tính khoảng cách giữa hai điểm, tính góc giữa hai vector;...
- + Xác định được tích có hướng của hai vector và vận dụng làm được một số bài toán
- + Viết phương trình mặt cầu biết tâm và bán kính

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Hệ tọa độ trong không gian

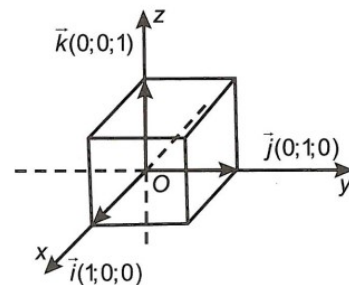
Hệ trục tọa độ Đề-các vuông góc trong không gian gồm ba trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ vuông góc với nhau từng đôi một.

Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vector đơn vị trên các trục Ox , Oy , Oz .

Điểm O được gọi là gốc tọa độ.

Các mặt phẳng (Oxy) , (Oyz) , (Oxz) là các mặt phẳng tọa độ.

Không gian gắn với hệ tọa độ $Oxyz$ được gọi là không gian $Oxyz$.



2. Tọa độ của vector

Trong không gian $Oxyz$, cho vector $\vec{u}$. Khi đó

$$\vec{u} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Chú ý:

1) $\vec{0} = (0; 0; 0)$.

2) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

3) $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases}$

Biểu thức tọa độ của các phép toán vector

Cho hai vector $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ và k là số thực tùy ý.

Khi đó ta có:

• $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$.

• $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$.

• $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$

• $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3)$.

Ứng dụng của tích vô hướng:

• $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0$

• $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$.

• $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

$$\bullet \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Với $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$.

3. Tọa độ của một điểm

Trong không gian Oxyz, cho điểm M tùy ý.

Khi đó $M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Tính chất

- Nếu $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$ thì

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A).$$

Khi đó $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

- Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right).$$

- Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$$

- Tọa độ trọng tâm G của tứ diện ABCD là

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$$

4. Tích có hướng của hai vector

Định nghĩa

Trong không gian Oxyz, cho hai vector $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Tích có hướng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một vector vuông góc với cả hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $[\vec{a}, \vec{b}]$ và được xác định như sau:

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}] &= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2; a_3 b_1 - a_1 b_3; a_1 b_2 - a_2 b_1). \end{aligned}$$

Tính chất

- $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$.
- $[\vec{a}, \vec{b}]$ vuông góc với cả hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
- $[\vec{b}, \vec{a}] = -[\vec{a}, \vec{b}]$.

Chú ý: Trong hệ tọa độ Oxyz, cho điểm M $(x; y; z)$ ta có các khẳng định sau:

- $M \equiv O \Leftrightarrow M(0; 0; 0)$.
- $M \in (Oxy) \Leftrightarrow z = 0$, tức là $M(x; y; 0)$.
- $M \in (Oyz) \Leftrightarrow x = 0$, tức là $M(0; y; z)$.
- $M \in (Oxz) \Leftrightarrow y = 0$, tức là $M(x; 0; z)$.
- $M \in Ox \Leftrightarrow y = z = 0$, tức là $M(x; 0; 0)$.
- $M \in Oy \Leftrightarrow x = z = 0$, tức là $M(0; y; 0)$.
- $M \in Oz \Leftrightarrow x = y = 0$, tức là $M(0; 0; z)$.

- $\left[\vec{a}, \vec{b} \right] = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}; \vec{b}).$

5. Phương trình mặt cầu

Trong không gian Oxyz, mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ bán kính R có phương trình là

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

Ngược lại phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0 \quad (1).$$

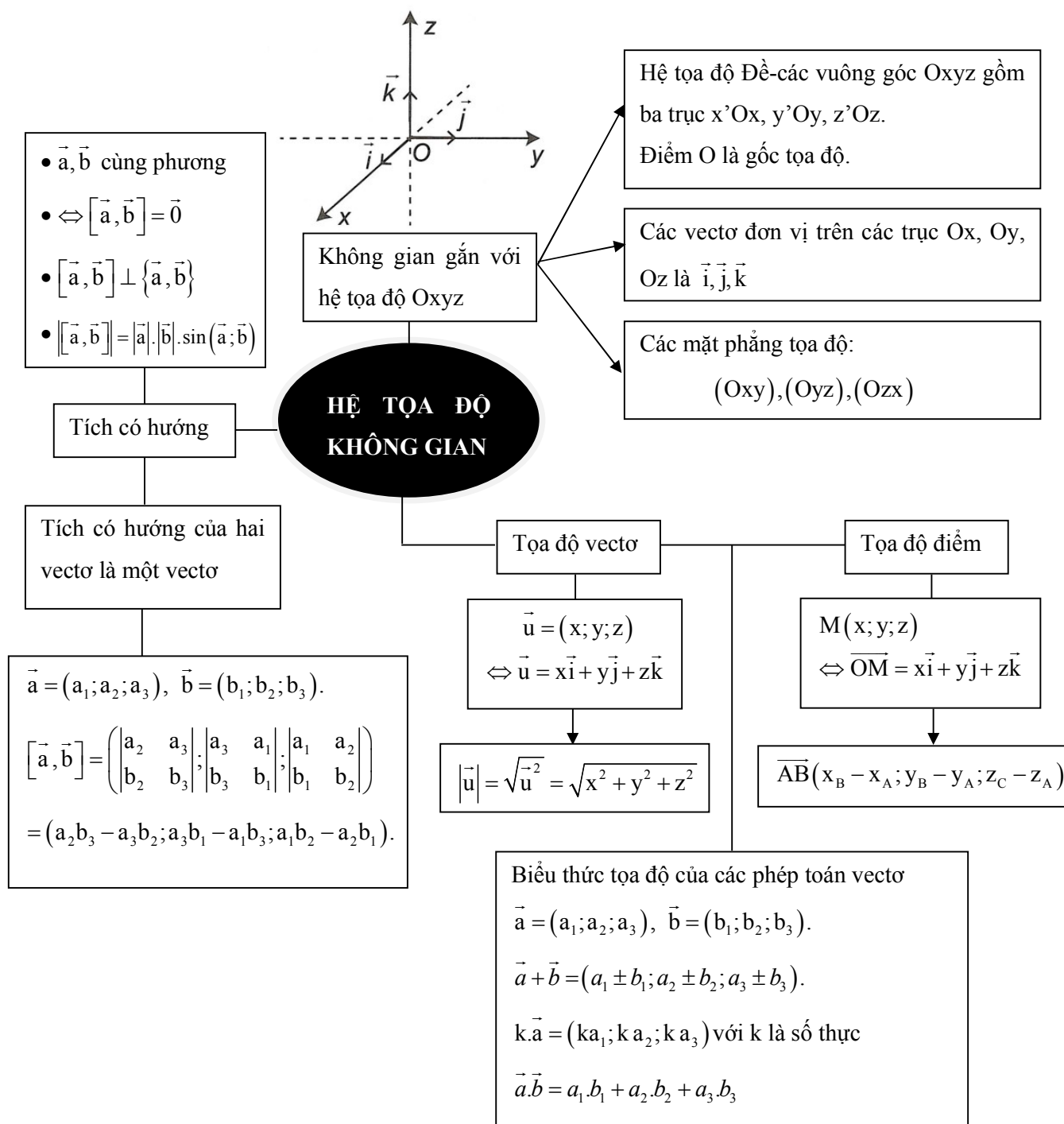
Với $A^2 + B^2 + C^2 - D > 0$ là phương trình mặt cầu tâm $I(-A; -B; -C)$

có bán kính $R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D}.$

Chú ý: Điều kiện để phương trình (1) là phương trình mặt cầu là:

$$A^2 + B^2 + C^2 - D > 0.$$

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm tọa độ điểm, vector trong hệ trục Oxyz

Phương pháp giải

Sử dụng các định nghĩa và khái niệm có liên quan đến điểm, vector: Tọa độ của điểm, vector; độ dài vector, ... và các phép toán vector ... để tính tổng, hiệu các vector; tìm tọa độ trọng tâm tam giác, ...

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a}(-2;2;0), \vec{b}(2;2;0), \vec{c}(2;2;2)$.

Giá trị của $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ bằng

A. 6.

B. $2\sqrt{6}$.

C. 11.

D. $2\sqrt{11}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (2; 6; 2)$ nên $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$.

Chọn D.

Ví dụ 2. Trong không gian Oxyz cho hai điểm $A(1;2;3), B(-1;0;1)$.

Trọng tâm G của tam giác OAB có tọa độ là:

A. $(0;1;1)$.

B. $\left(0; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

C. $(0;2;4)$.

D. $(-2;-2;-2)$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Tọa độ trọng tâm tam giác là: } \begin{cases} x_G = \frac{1-1+0}{3} = 0 \\ y_G = \frac{2+0+0}{3} = \frac{2}{3} \\ z_G = \frac{3+1+0}{3} = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(0; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right).$$

Chọn B.

Ví dụ 3. Trong không gian Oxyz, hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;3)$ trên mặt phẳng (Oyz) là

A. $M(0;2;3)$.

B. $N(1;0;3)$.

C. $P(1;0;0)$.

D. $Q(0;2;0)$.

Chú ý: Hình chiếu của điểm $M(x;y;z)$ lên mặt phẳng (Oyz) là $M'(0;y;z)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $M(0;2;3)$ là hình chiếu của điểm $A(1;2;3)$ trên mặt phẳng (Oyz).

Chọn A.

Ví dụ 4. Trong không gian Oxyz, góc giữa hai vector $\vec{i}$ và $\vec{u} = (-\sqrt{3};0;1)$ là

A. 30° .

B. 120° .

C. 60° .

D. 150° .

Hướng dẫn giải

Ta có $\vec{i} = (1;0;0)$ và $\vec{u} = (-\sqrt{3};0;1)$, áp dụng công thức tính góc giữa hai vector,

$$\text{ta có: } (\vec{i}, \vec{u}) = \frac{\vec{i} \cdot \vec{u}}{|\vec{i}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{-\sqrt{3}}{1 \cdot 2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra góc giữa hai vector cần tìm là $(\vec{i}, \vec{u}) = 150^\circ$.

Chọn D.

Ví dụ 5. Trong không gian Oxyz, cho vector $\vec{a} = (1; -2; 4)$, $\vec{b} = (x_0; y_0; z_0)$ cùng phương với vector $\vec{a}$. Biết vector $\vec{b}$ tạo với tia Oy một góc nhọn và $|\vec{b}| = \sqrt{21}$. Giá trị của tổng $x_0 + y_0 + z_0$ bằng

- A. -3. B. 6. C. -6. D. 3.

Hướng dẫn giải

Ta có $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương nên ta có $\vec{b} = k\vec{a} = (k; -2k; 4k); (k \neq 0)$

Lại có $|\vec{b}| = \sqrt{21}$. suy ra $\sqrt{k^2 + 4k^2 + 16k^2} = \sqrt{21} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = -1. \end{cases}$

Với $k = 1$ ta có $|\vec{b}| = (1; -2; 4)$, suy ra góc giữa $\vec{b}$ và Oy thỏa mãn

$$\cos(\vec{b}, \text{Oy}) = \frac{\vec{b} \cdot \vec{j}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{j}|}, \text{ trong đó } \vec{b} \cdot \vec{j} = -2 < 0.$$

Suy ra góc tạo bởi $\vec{b}$ và Oy là góc tù. Suy ra $k = 1$ không thỏa mãn.

Với $k = -1$ ta có $|\vec{b}| = (-1; 2; -4)$, suy ra góc giữa $\vec{b}$ và Oy thỏa mãn

$$\cos(\vec{b}, \text{Oy}) = \frac{\vec{b} \cdot \vec{j}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{j}|}, \text{ trong đó } \vec{b} \cdot \vec{j} = 2 > 0.$$

Suy ra góc tạo bởi $\vec{b}$ và Oy là góc nhọn. Vậy $k = -1$ thỏa mãn.

Do đó $|\vec{b}| = (-1; 2; -4)$. Suy ra $x_0 + y_0 + z_0 = -1 + 2 - 4 = -3$.

Chọn A.

Ví dụ 6. Trong không gian Oxyz, cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $A'(\sqrt{3}; -1; 1)$, hai đỉnh B, C thuộc trục Oz và $AA' = 1$ (C không trùng với O). Biết vector $\vec{u} = (a; b; 2)$ (với $a, b \in \mathbb{R}$) là một vector chỉ phương của đường thẳng $A'C$. Tính $T = a^2 + b^2$.

- A. $T = 5$. B. $T = 16$. C. $T = 4$. D. $T = 9$.

Hướng dẫn giải

Lấy M là trung điểm BC.

Khi đó ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ AA' \perp BC \end{cases}$ nên $BC \perp A'M$ tại M;

suy ra M là hình chiếu của A' trên trục Oz

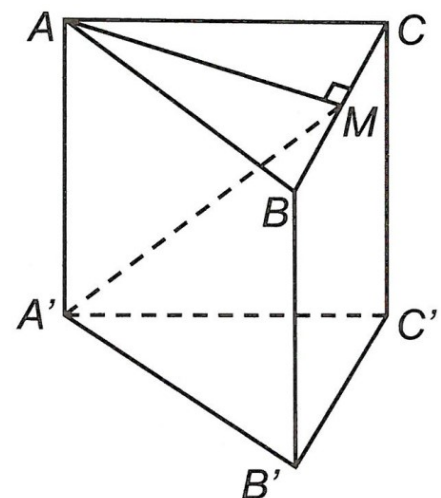
$\Rightarrow M(0; 0; 1)$ và $A'M = 2$.

Mặt khác $AM = \sqrt{A'M^2 - AA'^2} = \sqrt{3}$.

Lại có $\triangle ABC$ đều nên $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = \sqrt{3}$

$\Rightarrow BC = 2 \Rightarrow MC = 1$.

Gọi $C(0; 0; c), c \neq 0$ suy ra $MC = |c - 1|$.



$$MC = 1 \Leftrightarrow |c-1| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ c = 2 \end{cases} \text{ (loại } c = 0) \Rightarrow C(0; 0; 2).$$

$\overrightarrow{A'C} = (-\sqrt{3}; 1; 1)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng $A'C$

Suy ra $\vec{u} = (-2\sqrt{3}; 2; 2)$ cũng là một vector chỉ phương của $A'C$.

Vậy $a = -2\sqrt{3}; b = 2$. Suy ra $T = a^2 + b^2 = 16$.

Chọn B

Bài tập tự luyện dạng 1

Bài tập cơ bản

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của vector $\vec{a}$ là

- A. $(-2; -1; -3)$. B. $(-3; 2; -1)$. C. $(2; -3; -1)$. D. $(-1; 2; -3)$.

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho $\vec{a} = (2; -3; 3), \vec{b} = (0; 2; -1), \vec{c} = (3; -1; 5)$.

Tọa độ của vector $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$ là

- A. $(10; -2; 13)$. B. $(-2; 2; -7)$. C. $(-2; -2; 7)$. D. $(-2; 2; 7)$.

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, nếu $\vec{u}$ là vector chỉ phương của trục Oy thì

- A. $\vec{u}$ cùng hướng với vector $\vec{j} = (0; 1; 0)$.
 B. $\vec{u}$ cùng phương với vector $\vec{j} = (0; 1; 0)$.
 C. $\vec{u}$ cùng hướng với vector $\vec{i} = (1; 0; 0)$.
 D. $\vec{u}$ cùng phương với vector $\vec{i} = (1; 0; 0)$.

Câu 4: Trong không gian Oxyz cho điểm $A(-2; 1; 3)$. Hình chiếu vuông góc của A lên trục Ox có tọa độ là:

- A. $(0; 1; 0)$. B. $(-2; 0; 0)$. C. $(0; 0; 3)$. D. $(0; 1; 3)$.

Câu 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai vector $\vec{u} = (2; 3; -1)$ và $\vec{v} = (5; -4; m)$.

Tìm m để $\vec{u} \perp \vec{v}$.

- A. $m = -2$. B. $m = 2$. C. $m = 4$. D. $m = 0$.

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho điểm $M(x; y; z)$.

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Nếu M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxz) thì $M'(x; y; -z)$.
 B. Nếu M' đối xứng với M qua Oy thì $M'(x; y; -z)$.
 C. Nếu M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxy) thì $M'(x; y; -z)$.
 D. Nếu M' đối xứng với M qua gốc tọa độ O thì $M'(2x; 2y; 0)$.

Câu 7: Trong không gian Oxyz, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A(1;0;1), B(2;1;2), D(1;-1;1), C(4;5;-5)$. Tọa độ của điểm A' là:

- A. $A'(4;6;-5)$. B. $A'(-3;4;-1)$. C. $A'(3;5;-6)$. D. $A'(3;5;6)$.

Bài tập nâng cao

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình thang ABCD có hai đáy AB, CD; có tọa độ ba đỉnh $A(1;2;1), B(2;0;-1), C(6;1;0)$. Biết hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$.

Giả sử đỉnh $D(a;b;c)$, tính $a+b+c$.

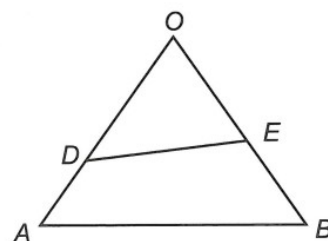
- A. $a+b+c=6$. B. $a+b+c=5$.
C. $a+b+c=8$. D. $a+b+c=7$.

Câu 9: Trong không gian Oxyz, cho tam giác ABC với $A(1;2;5), B(3;4;1), C(2;3;-3)$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và M là điểm thay đổi trên mp(Oxz). Độ dài GM ngắn nhất bằng

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 1.

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;0;1), B(0;1;-1)$. Hai điểm D, E thay đổi trên các đoạn OA, OB sao cho đường thẳng DE chia tam giác OAB thành hai phần có diện tích bằng nhau. Khi DE ngắn nhất thì trung điểm của đoạn DE có tọa độ là

- A. $I\left(\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}; 0\right)$. B. $I\left(\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{\sqrt{2}}{3}; 0\right)$.
C. $I\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0\right)$. D. $I\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; 0\right)$.



Dạng 2: Tích có hướng và ứng dụng

Bài toán 1. Tìm vector tích có hướng

Phương pháp giải

Để tính tích có hướng của hai vector, ta áp dụng công thức:

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}] &= \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1). \end{aligned}$$

Ví dụ: Tính tích có hướng của hai vector

$$\vec{a} = (1; 0; 1), \vec{b} = (2; 1; -1)$$

Hướng dẫn giải

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (-1; 3; 1)$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai vector $\vec{a} = (2; 1; -2)$ và vector $\vec{b} = (1; 0; 2)$. Tìm tọa độ vector $\vec{c}$ là tích có hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- A. $\vec{c} = (2; 6; -1)$. B. $\vec{c} = (4; 6; -1)$. C. $\vec{c} = (4; -6; -1)$. D. $\vec{c} = (2; -6; -1)$.

Hướng dẫn giải

$$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (2; -6; -1).$$

Chọn D.

Ví dụ 2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$.

Kết luận nào sau đây sai?

A. $[\vec{a}, 3\vec{b}] = 3[\vec{a}, \vec{b}]$.

B. $[\vec{2a}, \vec{b}] = 2[\vec{a}, \vec{b}]$.

C. $[\vec{3a}, \vec{3b}] = 3[\vec{a}, \vec{b}]$.

D. $||[\vec{a}, \vec{b}]|| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $[\vec{3a}, \vec{3b}] = 3[\vec{a}, 3\vec{b}] = 9[\vec{a}, \vec{b}]$. (C sai)

Chọn C.

Bài toán 2. Ứng dụng của tích có hướng để chứng minh tính đồng phẳng

 **Phương pháp giải**

- Ba vectơ $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$
- Bốn điểm A, B, C, D tạo thành tứ diện $\Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} \neq 0$.

 **Ví dụ mẫu**

Ví dụ 1. Trong không gian Oxyz, cho ba vectơ $\vec{a} = (1; 2; 1), \vec{b} = (0; 2; -1), \vec{c} = (m; 1; 0)$.

Tìm giá trị thực của tham số m để ba vectơ $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ đồng phẳng.

A. $m = 1$.

B. $m = 0$.

C. $m = -\frac{1}{4}$.

D. $m = \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $[\vec{a}, \vec{b}] = (-4; 1; 2)$.

Ba vectơ $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow -4m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$.

Chọn D.

Ví dụ 2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho năm điểm $A(0; 0; 3), B(2; -1; 0), C(3; 2; 4),$

$D(1; 3; 5), E(4; 2; 1)$ tạo thành một hình chóp có đáy là tứ giác. Đỉnh của hình chóp tương ứng là

A. Điểm C.

B. Điểm A.

C. Điểm B.

D. Điểm D.

Hướng dẫn giải

Xét đáp án A, giả sử C là đỉnh của hình chóp, ta có:

$\overrightarrow{AB} = (2; -1; -3), \overrightarrow{AD} = (1; 3; 2), \overrightarrow{AE} = (4; 2; -2), \overrightarrow{AC} = (3; 2; 1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} [\overline{AB}, \overline{AD}] \cdot \overline{AE} = 4.7 - 2.7 - 2.7 = 0 \\ [\overline{AB}, \overline{AD}] \cdot \overline{AC} = 3.7 - 2.7 + 1.7 = 14. \end{cases}$$

Suy ra A, B, D, E đồng phẳng.

Vậy điểm C là đỉnh của hình chóp.

Chọn A.

Ví dụ 3. Trong không gian Oxyz cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$, $D(2;-2;0)$.

Có tất cả bao nhiêu mặt phẳng phân biệt đi qua 3 trong 5 điểm O, A, B, C, D?

- A. 10. B. 7. C. 5. D. 6.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overline{AB} = (-1; 2; 0)$, $\overline{AD} = (1; -2; 0)$, suy ra 3 điểm A, B, D thẳng hàng.

Từ đó chúng ta xác định được vị trí các điểm trong hệ trục độ Oxyz và đếm trực tiếp ta có 5 mặt phẳng đi qua 3 trong 5 điểm O, A, B, C, D là:

(OCB) , (OCA) , (OCD) , (OAB) , (ABC)

Chọn C.

Bài toán 3. Ứng dụng của tích có hướng để tính diện tích và thể tích

 **Phương pháp giải**

- Diện tích hình bình hành: $S_{\square ABCD} = \left| [\overline{AB}, \overline{AD}] \right|$.
- Tính diện tích tam giác: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left| [\overline{AB}, \overline{AC}] \right|$.
- Tính thể tích hình hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left| [\overline{AB}, \overline{AC}] \cdot \overline{AD} \right|$.
- Tính thể tích tứ diện: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| [\overline{AB}, \overline{AC}] \cdot \overline{AD} \right|$.

 **Ví dụ mẫu**

Ví dụ 1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(1;2;0)$, $B(2;1;2)$, $C(-1;3;1)$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

- A. $3\sqrt{10}$. B. $\frac{3\sqrt{10}}{5}$. C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$. D. $\sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\overline{AB} = (1; -1; 2)$, $\overline{AC} = (-2; 1; 1)$, $\overline{BC} = (-3; 2; -1)$

Suy ra $AB = AC = \sqrt{6}$; $BC = \sqrt{14}$.

Suy ra $S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| [\overline{AB}, \overline{AC}] \right| = \frac{\sqrt{35}}{2}$.

Gọi R_{ABC} là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có

$$R_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S_{ABC}} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{14}}{4 \cdot \frac{\sqrt{35}}{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}.$$

Chọn B.

Ví dụ 2. Trong không gian Oxyz, cho $A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; -1; 3)$ và D nằm trên trục Oy. Thể tích tứ diện ABCD bằng 5. Tọa độ của D là

A. $D(0; -7; 0)$.

B. $D(0; 8; 0)$.

C. $D(0; -7; 0)$ hoặc $D(0; 8; 0)$.

D. $D(0; 7; 0)$ hoặc $D(0; -8; 0)$.

Hướng dẫn giải

Vì $D \in Oy$ nên $D(0; y; 0)$. Khi đó. Thể tích của tứ diện ABCD là

$$V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} |4y - 2|$$

$$\text{Theo đề ra, ta có } \frac{1}{6} |4y - 2| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -7 \\ y = 8. \end{cases}$$

Chọn C.

Ví dụ 3. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tọa độ các đỉnh

$A(0; 0; 0)$, $B(0; a; 0)$, $C\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$ và $A'(0; 0; 2a)$. Gọi D là trung điểm cạnh BB' và M di động trên

cạnh AA' . Diện tích nhỏ nhất của tam giác MDC' là

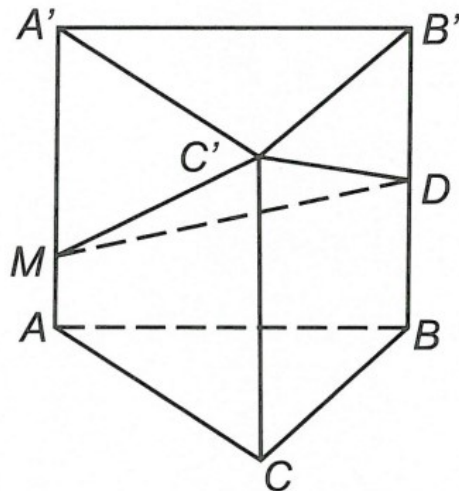
A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{a^2\sqrt{5}}{4}$.

C. $\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$.

D. $\frac{a^2\sqrt{15}}{4}$.

Hướng dẫn giải



$$\text{Ta có } \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AA'} \Rightarrow C'\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 2a\right).$$

$$\overline{CC'} = \overline{BB'} \Rightarrow B'(0; a; 2a).$$

Điểm D là trung điểm của BB' nên $D(0; a; a)$.

$$M(0; 0; t) \text{ với } 0 < t < 2a. \text{ Ta có } \overline{DC'} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; a \right), \overline{DM} = (0; -a; t - a).$$

Ta có:

$$S_{\Delta MDC'} = \frac{1}{2} \left[\left[\overline{DC'}, \overline{DM} \right] \right] = \frac{a\sqrt{4t^2 - 12at + 15a^2}}{4} = \frac{a\sqrt{(2t - 3a)^2 + 6a^2}}{4} \geq \frac{a^2\sqrt{6}}{4}.$$

$$\text{Suy ra } \min S_{\Delta MDC'} = \frac{a^2\sqrt{6}}{4} \text{ khi } t = \frac{3}{2}a.$$

Chọn C.

Bài tập tự luyện dạng 2

Bài tập cơ bản

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai vector $\vec{a} = (2; 1; -2)$ và vector $\vec{b} = (1; 0; 2)$. Tìm tọa độ vector $\vec{c}$ là tích có hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$

- A. $\vec{c} = (2; 6; -1)$. B. $\vec{c} = (4; 6; -1)$. C. $\vec{c} = (4; -6; -1)$. D. $\vec{c} = (2; -6; -1)$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho bốn điểm $A(1; -2; 0)$, $B(1; 0; -1)$, $C(0; -1; 2)$ và $D(0; m; p)$. Hệ thức liên hệ giữa m và p để bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng là

- A. $m + p = 3$. B. $2m - 3p = 3$. C. $2m + p = 3$. D. $m + 2p = 3$.

Câu 3: Trong không gian tọa độ Oxyz, cho hình bình hành ABCD với $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$, giao điểm hai đường chéo $I\left(\frac{3}{2}; 0; \frac{3}{2}\right)$. Diện tích hình bình hành là

- A. $\sqrt{2}$. B. $\sqrt{5}$. C. $\sqrt{6}$. D. $\sqrt{3}$.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho bốn điểm $A(1; 0; 2)$, $B(-2; 1; 3)$, $C(3; 2; 4)$, $D(6; 9; -5)$. Tọa độ trọng tâm của tứ diện ABCD là

- A. $(2; 3; 1)$. B. $(-2; 3; 1)$. C. $(2; 3; -1)$. D. $(2; -3; 1)$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với $A(-2; 1; 3)$, $C(2; 3; 5)$, $B'(2; 4; -1)$, $D'(0; 2; 1)$. Tìm tọa độ điểm B.

- A. $B(1; -3; 3)$. B. $B(-1; 3; 3)$. C. $C(1; 3; -3)$. D. $B(1; 3; 3)$.

Bài tập nâng cao

Câu 6: Trong không gian tọa độ Oxyz, cho $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 2)$. Có tất cả bao nhiêu điểm M trong không gian thỏa mãn M không trùng với các điểm A, B, C và $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA} = 90^\circ$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Dạng 3: Phương trình mặt cầu

Phương pháp giải

Cách viết phương trình mặt cầu:

- Mặt cầu tâm $I(a; b; c)$, bán kính R có phương trình

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Ví dụ: Phương trình mặt cầu tâm $I(2; -1; 1)$, bán kính $R = 3$ là $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 9$.

- Xét phương trình:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0. (*)$$

Ta có $(*) \Leftrightarrow (x^2 + 2ax) + (y^2 + 2by) + (z^2 + 2cz) = -d$

$$\Leftrightarrow (x+a)^2 + (y+b)^2 + (z+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d.$$

Điều kiện để phương trình (*) là phương trình mặt cầu $a^2 + b^2 + c^2 > d$.

Khi đó (S) có $\begin{cases} \text{tâm } I(-a; -b; -c) \\ \text{bán kính } R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}. \end{cases}$

Đặc biệt mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ thì (S) có

$$\begin{cases} \text{tâm } O(0; 0; 0) \\ \text{bán kính } R. \end{cases}$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S) có phương trình

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$. Xác định tọa độ tâm I của mặt cầu (S) là

- A. $I(1; -2; 3)$. B. $I(1; -2; 1)$. C. $I(-1; 2; 3)$. D. $I(-1; 2; -3)$.

Hướng dẫn giải

Tọa độ tâm của mặt cầu (S) là $I = \left(\frac{-2}{-2}; \frac{4}{-2}; \frac{-6}{-2} \right) = (1; -2; 3)$.

Chọn A.

Ví dụ 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S) có phương trình

$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 6z - 6 = 0$. Tính diện tích mặt cầu (S)

- A. 100π . B. 120π . C. 9π . D. 42π .

Hướng dẫn giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -3; 3)$, bán kính $r = \sqrt{1+9+9+6} = 5$.

Vậy diện tích mặt cầu là $4\pi r^2 = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi$.

Chọn A.

Ví dụ 3. Trong không gian Oxyz, cho điểm $I(1;-2;3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I, cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$.

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$.

B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 20$.

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$.

D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$.

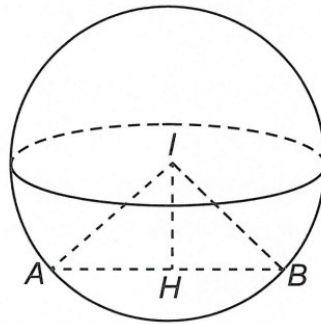
Chú ý:

Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ :

- Xác định điểm $M \in \Delta$.

- Áp dụng công thức: $d(A, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{AM}, \vec{u}|}{|\vec{u}|}$.

Hướng dẫn giải



Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow IH \perp AB$ tại H $\Rightarrow IH = d_{(I; (AB))} = d_{(I; Ox)}$

Lấy $M(2; 0; 0) \in Ox \Rightarrow IH = d_{(I; Ox)} = \frac{|\overrightarrow{IM}, \vec{i}|}{|\vec{i}|} = \sqrt{3}$.

Bán kính mặt cầu cần tìm là $R = IA = \sqrt{IH^2 + HA^2} = 4$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$.

Chọn A.

Ví dụ 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ và hai điểm $A(4; 3; 1)$, $B(3; 1; 3)$; M là điểm thay đổi trên (S). Gọi m, n lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P = 2MA^2 - MB^2$. Giá trị $(m-n)$ bằng

A. 64.

B. 60.

C. 68.

D. 48.

Hướng dẫn giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -1)$ và bán kính $R = 3$.

Lấy điểm E sao cho $2\overline{AE} - \overline{BE} = \vec{0} \Leftrightarrow E(5; 5; -1)$. Ta có $IE = 5$.

Dễ thấy điểm E là điểm nằm ngoài mặt cầu (S).

$$\text{Khi đó } P = 2MA^2 - MB^2 = 2(\overline{ME} - \overline{AE})^2 - (\overline{ME} - \overline{BE})^2 = ME^2 + 2AE^2 - BE^2.$$

P lớn nhất và nhỏ nhất khi và chỉ khi ME lớn nhất và nhỏ nhất.

$$\max ME = IE + R = 8; \min ME = IE - R = 2.$$

$$\text{Do đó } m = \max P = 64 + 2AE^2 - BE^2; n = \min P = 4 + 2AE^2 - BE^2.$$

$$\text{Suy ra } m - n = 60.$$

Chọn B.

Bài tập tự luyện dạng 3

Bài tập cơ bản

Câu 1: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $I(1; -2; 3), M(0; 1; 5)$. Phương trình mặt cầu có tâm I và đi qua M là

A. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = \sqrt{14}$.

B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 14$.

C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 14$.

D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{14}$.

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm $A(1; 1; 2), B(3; 2; -3)$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc Ox và đi qua hai điểm A, B có phương trình

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 2 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2 = 0$.

Câu 3: Trong không gian Oxyz, xét mặt cầu (S) có phương trình dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2az + 10a = 0$. Tập hợp các giá trị thực của a để (S) có chu vi đường tròn lớn bằng 8π là

A. $\{1; 10\}$.

B. $\{2; -10\}$.

C. $\{-1; 11\}$.

D. $\{1; -11\}$.

Câu 4: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1; 0; -1), B(-3; -2; 1)$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I thuộc mặt phẳng (Oxy), bán kính $\sqrt{11}$ và đi qua hai điểm A, B. Biết I có tung độ âm, phương trình mặt cầu (S) là

A. $x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 2 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 7 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 + 4y + 7 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 2 = 0$.

Bài tập nâng cao

Câu 5: Trong không gian Oxyz, cho $A(-2; 0; 0); B(0; -2; 0); C(0; 0; -2)$. D là điểm khác O sao cho DA, DB, DC đôi một vuông góc. Gọi $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD. Giá trị của biểu thức $S = a + b + c$

A. -4.

B. -1.

C. -2.

D. -3.

ĐÁP ÁN

Dạng 1. Tìm tọa độ điểm, vectơ liên quan đến hệ trục Oxyz

1 - D	2- B	3- B	4- B	5- A	6- C	7- C	8- C	9- B	10- A
-------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------

Dạng 2. Tích có hướng và ứng dụng

1 - D	2- D	3- A	4- A	5 - D	6 -C				
-------	------	------	------	-------	------	--	--	--	--

Dạng 3: Phương trình mặt cầu

1 - B	2- A	3 -C	4 -A	5 -B					
-------	------	------	------	------	--	--	--	--	--