

LƯ' SĨ PHÁP

Giáo Viên Trường THPT Tuy Phong

GIẢI TÍCH 12



CHƯƠNG

III

NGUYÊN HÀM

TÍCH PHÂN

VÀ

ỨNG DỤNG

0939989966 - 0916620899

LỜI NÓI ĐẦU

Quý đọc giả, quý thầy cô và các em học sinh thân mến!

Nhằm giúp các em học sinh có tài liệu tự học môn Toán, tôi biên soạn cuốn giải toán trọng tâm của lớp 12.

Nội dung của cuốn tài liệu bám sát chương trình chuẩn và chương trình nâng cao về môn Toán đã được Bộ Giáo dục và Đào tạo quy định.

NỘI DUNG

1. Lí thuyết cần nắm ở mỗi bài học
2. Bài tập trắc nghiệm
3. Bổ sung đầy đủ các dạng đề thi THPT QG.

Cuốn tài liệu được xây dựng sẽ còn có những khiếm khuyết. Rất mong nhận được sự góp ý, đóng góp của quý đồng nghiệp và các em học sinh để lần sau cuốn bài tập hoàn chỉnh hơn.

Mọi góp ý xin gọi về số 0939989966 – 0916 620 899

Email: lsp02071980@gmail.com

Chân thành cảm ơn.

Lư Sĩ Pháp

GV_ Trường THPT Tuy Phong

MỤC LỤC

PHẦN TỰ LUẬN

NGUYÊN HÀM	01 – 19
TÍCH PHÂN	20 – 46
ỨNG DỤNG	47 – 51
ÔN TẬP CHƯƠNG III	52 – 75

PHẦN TRẮC NGHIỆM

NGUYÊN HÀM	01 – 15
TÍCH PHÂN	16 – 30
ỨNG DỤNG	31 – 38
ÔN TẬP CHƯƠNG III	39 – 60
ÔN TẬP THI THPT	61 – 76
ĐÁP ÁN	77 – 81

CHƯƠNG III

NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

---000---

§1. NGUYÊN HÀM

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Nguyên hàm và tính chất

1. Nguyên hàm

a) Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K . Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

b) Định lý

❖ Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C , hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K .

❖ Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$, với C là một hằng số.

Họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K được kí hiệu: $\int f(x)dx$.

Vậy: $\int f(x)dx = F(x) + C$

2. Tính chất của nguyên hàm

a) $\int f'(x)dx = f(x) + C$

b) $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ (với k là một hằng số khác 0)

c) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

3. Sự tồn tại của nguyên hàm

Định lý: Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K

Bảng nguyên hàm của một số hàm thường gặp

Bảng 1

Nguyên hàm của hàm sơ cấp	Nguyên hàm của hàm số hợp (với $u = u(x)$)
1. $\int 0dx = C$	1. $\int 0du = C$
2. $\int dx = x + C$	2. $\int du = u + C$
3. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	3. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$
4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	4. $\int \frac{1}{u} du = \ln u + C$
5. $\int e^x dx = e^x + C$	5. $\int e^u du = e^u + C$
6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (a \neq 1, a > 0)$	6. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C (a \neq 1, a > 0)$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$	7. $\int \cos u du = \sin u + C$
8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	8. $\int \sin u du = -\cos u + C$
9. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	9. $\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \tan u + C$
10. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	10. $\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\cot u + C$

Bảng 2

$$1. \int \cos kx dx = \frac{\sin kx}{k} + C$$

$$2. \int \sin kx dx = -\frac{\cos kx}{k} + C$$

$$3. \int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + C$$

$$4. \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \cdot \ln|ax+b| + C$$

Bảng 3

Với $a \neq 0$

$$1. \int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C (n \neq -1)$$

$$5. \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln|ax+b| + C$$

$$2. \int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C$$

$$6. \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax+b} + C$$

$$3. \int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \cdot \sin(ax+b) + C$$

$$7. \int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cdot \cos(ax+b) + C$$

$$4. \int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \cdot \tan(ax+b) + C$$

$$8. \int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cdot \cot(ax+b) + C$$

II. Phương pháp tính nguyên hàm

1. Phương pháp biến đổi

❖ Nếu $\int f(u)du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C$. **Lưu ý:** Đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x)dx$. Khi đó: $\int f(t)dt = F(t) + C$, sau đó thay ngược lại $t = u(x)$ ta được kết quả cần tìm.

❖ Với $u = ax + b (a \neq 0)$, ta có $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

2. Phương pháp tính nguyên hàm từng phần

❖ Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên K thì

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x).v(x) - \int u'(x)v(x)dx \quad \text{Hay} \quad \int u dv = uv - \int v du$$

❖ Đặt $u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx$ và $dv = g(x)dx \Rightarrow v = \int g(x)dx = G(x)$ (chọn $C = 0$)

Lưu ý: Với $P(x)$ là đa thức

N.Hàm Đặt	$\int P(x)e^x dx$	$\int P(x) \cos x dx$ hay $\int P(x) \sin x dx$	$\int P(x) \ln x dx$
u	$P(x)$	$P(x)$	$\ln x$
dv	$e^x dx$	$\cos x dx$ hay $\sin x dx$	$P(x) dx$

Lưu ý: Cách đặt u : “**Nhất logarit (ln) – Nhì đa – Tam lượng (giác) – Tứ mũ**” và phần còn lại là dv . Yêu cầu tìm nguyên hàm của một hàm số được hiểu là tìm nguyên hàm trên từng khoảng xác định của nó.

B. BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm nguyên hàm bằng cách sử dụng bảng các nguyên hàm
 Phương pháp: Dùng thành thạo các bảng nguyên hàm

Bài 1. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = 4x^4$ b) $f(x) = \sqrt{x}$ c) $f(x) = \cos \frac{x}{2}$
 d) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}$ e) $f(x) = \frac{x^2+2}{x} - 1 + \frac{3}{x^2}$ f) $f(x) = \frac{(2x-1)(x+1)}{\sqrt{x}}$

HD & Giải

a) $\int 4x^4 dx = \frac{4}{5}x^5 + C$
 b) $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$
 c) $\int \cos \frac{x}{2} dx = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} + C = 2 \sin \frac{x}{2} + C$
 d) $\int \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx = \int \frac{\sqrt{x}}{2} dx + \int \frac{2}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int x^{\frac{1}{2}} dx + 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{3}\sqrt{x^3} + 4\sqrt{x} + C$
 e) $\int \left(\frac{x^2+2}{x} - 1 + \frac{3}{x^2} \right) dx = \int \left(x + \frac{2}{x} - 1 + \frac{3}{x^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 2 \ln|x| - x - \frac{3}{x} + C$
 f) $\int \left(x \frac{(2x-1)(x+1)}{\sqrt{x}} \right) dx = \int \left(2x\sqrt{x} + \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int \left(2x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} \right) dx$

$$= 2 \cdot \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{4}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C$$

Bài 2. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = 3 \sin x + \frac{2}{x}$ b) $f(x) = 2x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ c) $f(x) = 3 \cos x - 3^{x-1}$
 d) $f(x) = (x-1)(x^4+3x)$ e) $f(x) = \sin^2 x$ f) $f(x) = \cos^2 x$

HD & Giải

a) $\int \left(3 \sin x + \frac{2}{x} \right) dx = 3 \int \sin x dx + 2 \int \frac{1}{x} dx = -3 \cos x + 2 \ln x + C$
 b) $\int \left(2x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx = 2 \int x^2 dx + \int x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{2}{3}x^3 + 3x^{\frac{1}{3}} + C = \frac{2}{3}x^3 + 3\sqrt[3]{x} + C$
 c) $\int (3 \cos x - 3^{x-1}) dx = 3 \int \cos x dx - \frac{1}{3} \int 3^x dx = 3 \sin x - \frac{1}{3} \frac{3^x}{\ln 3} + C = 3 \sin x - \frac{3^{x-1}}{\ln 3} + C$
 d) $\int (x-1)(x^4+3x) dx = \int (x^5 - x^4 + 3x^2 - 3x) dx = \frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{5} + x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C$
 e) $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$

$$f) \int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

Bài 3. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

$$a) f(x) = e^x \left(7 - \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right)$$

$$b) f(x) = e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{\sin^2 x} \right)$$

$$c) f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$$

$$d) f(x) = \frac{\cos^3 x}{\cos x + 1}$$

$$e) f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{\cos^2 x}$$

$$f) f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

HD & Giải

$$a) \int e^x \left(7 - \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx = \int \left(7e^x - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = 7e^x - \tan x + C$$

$$b) \int e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{\sin^2 x} \right) dx = \int \left(2e^x + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = 2e^x - \cot x + C$$

$$c) \int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \tan x - \cot x + C$$

$$d) \int \frac{\cos^3 x}{\cos x + 1} dx = \int \left(\cos^2 x - \cos x + 1 - \frac{1}{\cos x + 1} \right) dx = \int \left(\cos^2 x - \cos x + 1 - \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \right) dx$$

$$= \frac{3}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x - \sin x - \tan \frac{x}{2} + C$$

$$e) \int \frac{1 - \cos 2x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{2 \sin^2 x}{\cos^2 x} dx = 2 \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = 2(\tan x - x) + C$$

$$f) \int \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx = \sqrt{2x+1} + C$$

Dạng 2. Tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến số

Phương pháp:

Nếu $\int f(t)dt = F(t) + C$ và $t = \varphi(x)$ có đạo hàm liên tục, thì $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C$

Lưu ý: ❖ $t = \varphi(x) \Rightarrow dt = \varphi'(x)dx$

❖ $g(t) = \varphi(x) \Rightarrow g'(t)dt = \varphi'(x)dx$

❖ Sau khi tính $\int f(t)dt$ theo t , ta phải thay lại $t = \varphi(x)$

Bài 4. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

$$a) \int e^{\sin x} \cdot \cos x dx$$

$$b) \int e^{\cos x} \cdot \sin x dx$$

$$c) \int e^{\sin^2 x} \cdot \sin 2x dx$$

$$d) \int e^{\cos^2 x} \cdot \sin 2x dx$$

$$e) \int \sin^2 x \cos x dx$$

$$f) \int \cos^2 x \sin x dx$$

HD & Giải

$$a) \text{ Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx. \text{ Vậy } \int e^{\sin x} \cdot \cos x dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C$$

$$b) \text{ Đặt } t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx. \text{ Vậy } \int e^{\cos x} \cdot \sin x dx = -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{\cos x} + C$$

$$c) \text{ Đặt } t = \sin^2 x \Rightarrow dt = 2 \sin x \cos x dx = \sin 2x dx. \text{ Vậy } \int e^{\sin^2 x} \cdot \sin 2x dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin^2 x} + C$$

$$d) \text{ Đặt } t = \cos^2 x \Rightarrow dt = -2 \sin x \cos x dx = -\sin 2x dx.$$

$$\text{Vậy } \int e^{\cos^2 x} \cdot \sin 2x dx = -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{\cos^2 x} + C$$

e) Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$. Vậy $\int \sin^2 x \cos x dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 + C = \frac{1}{3} \sin^3 x + C$

f) Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$. Vậy $\int \cos^2 x \sin x dx = -\int t^2 dt = -\frac{1}{3} t^3 + C = -\frac{1}{3} \cos^3 x + C$

Bài 5. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $\int \tan x dx$

b) $\int \cot x dx$

c) $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$

d) $\int \frac{\sqrt{1+\tan x}}{\cos^2 x} dx$

e) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$

f) $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$

HD & Giải

a) $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$. Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$.

Vậy $\int \tan x dx = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C$

b) $\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$. Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$.

Vậy $\int \cot x dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\sin x| + C$

c) Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$. Vậy $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{\tan x} + C$

d) Đặt $t = \sqrt{1+\tan x} \Rightarrow t^2 = 1+\tan x \Rightarrow 2t dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$.

Vậy $\int \frac{\sqrt{1+\tan x}}{\cos^2 x} dx = \int t \cdot 2t dt = \frac{2}{3} t^3 + C = \frac{2}{3} \sqrt{(1+\tan x)^3} + C = \frac{2}{3} (1+\tan x) \sqrt{1+\tan x} + C$

e) Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$. Vậy $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = \int \sin t dt = -\cos t + C = -\cos(\ln x) + C$

f) Đặt $t = \ln(\ln x) \Rightarrow dt = \frac{(\ln x)'}{\ln x} dx = \frac{1}{x \ln x} dx$. Vậy $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln(\ln x)| + C$

Bài 6. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $\int (1-x)^9 dx$

b) $\int x(1+x^2)^{\frac{3}{2}} dx$

c) $\int \cos^3 x \sin x dx$

d) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x} + 2}$

e) $\int x e^{-x^2} dx$

f) $\int \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{\sin x - \cos x}} dx$

HD & Giải

a) Đặt $t = 1-x$ thì $dt = -dx \Rightarrow dx = -dt$.

Vậy $\int (1-x)^9 dx = -\int t^9 dt = -\frac{t^{10}}{10} + C$. Vậy $\int (1-x)^9 dx = -\frac{(1-x)^{10}}{10} + C$

b) Đặt $t = 1+x^2$ thì $dt = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2x}$.

Vậy $\int x(1+x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{2} \int t^{\frac{3}{2}} dt = \frac{1}{5} t^{\frac{5}{2}} + C$. Vậy $\int x(1+x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{5} (1+x^2)^{\frac{5}{2}} + C$

c) Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$. Khi đó $\int \cos^3 x \sin x dx = -\frac{1}{4} \cos^4 x + C$

d) Đặt $t = e^x + 1 \Rightarrow dt = e^x dx$. Khi đó $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x} + 2} = \frac{-1}{1 + e^x} + C$

e) Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$. Khi đó $\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$

f) Đặt $t = \sin x - \cos x \Rightarrow dt = (\cos x + \sin x) dx$. Khi đó $\int \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{\sin x - \cos x}} dx = 2\sqrt{\sin x - \cos x} + C$

Bài 7. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $\int (2x+1)^4 dx$

b) $\int 2x(x^2+1)^3 dx$

c) $\int \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+4}} dx$

d) $\int \cos(7x+5) dx$

e) $\int e^{\sin x} \cos x dx$

f) $\int x e^{1+x^2} dx$

g) $\int \frac{9x^2}{\sqrt{1-x^3}} dx$

h) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} dx$

i) $\int x^4 \sqrt{1-x^2} dx$

HD & Giải

a) Đặt $t = 2x+1 \Rightarrow dt = 2dx$. Khi đó $\int (2x+1)^4 dx = \frac{1}{10} (2x+1)^5 + C$

b) Đặt $t = x^2+1 \Rightarrow dt = 2x dx$. Khi đó $\int 2x(x^2+1)^3 dx = \frac{1}{4} (x^2+1)^4 + C$

c) Đặt $t = x^2+4 \Rightarrow dt = 2x dx$. Khi đó $\int \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+4}} dx = \frac{3}{2} (x^2+4)^{\frac{2}{3}} + C$

d) Đặt $t = 7x+5 \Rightarrow dt = 7dx$. Khi đó $\int \cos(7x+5) dx = \frac{1}{7} \sin(7x+5) + C$

e) Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$. Khi đó $\int e^{\sin x} \cos x dx = e^{\sin x} + C$

f) Đặt $t = 1+x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$. Khi đó $\int x e^{1+x^2} dx = \frac{1}{2} e^{1+x^2} + C$

g) Đặt $t = 1-x^3 \Rightarrow dt = -3x^2 dx$. Khi đó $\int \frac{9x^2}{\sqrt{1-x^3}} dx = -6\sqrt{1-x^3} + C$

h) Đặt $t = 1+\sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$. Khi đó $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} dx = -\frac{2}{1+\sqrt{x}} + C$

i) Đặt $t = 1-x^2 \Rightarrow dt = -2x dx$. Khi đó $\int x^4 \sqrt{1-x^2} dx = -\frac{2}{5} (1-x^2)^{\frac{5}{4}} + C$

Bài 8. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$

b) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$

c) $\int x\sqrt{x^2-5} dx$

d) $\int x^3 \sqrt{x^4+3} dx$

e) $\int x^3 \sqrt{x^2+7} dx$

f) $\int x\sqrt{x+1} dx$

HD & Giải

a) Đặt $t = e^x + 1 \Rightarrow dt = e^x dx$. Vậy $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln(e^x+1) + C$

b) Đặt $t = e^x + e^{-x} \Rightarrow dt = (e^x - e^{-x}) dx$. Vậy $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln(e^x + e^{-x}) + C$

c) Đặt $t = \sqrt{x^2-5} \Rightarrow t^2 = x^2-5 \Rightarrow 2tdt = 2x dx \Rightarrow tdt = x dx$

$$\text{Vậy: } \int x\sqrt{x^2-5}dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{\sqrt{(x^2-5)^3}}{3} + C = \frac{(x^2-5)\sqrt{x^2-5}}{3} + C$$

$$\text{d) Đặt } t = \sqrt{x^4+3} \Rightarrow t^2 = x^4+3 \Rightarrow 2t dt = 4x^3 dx \Rightarrow t dt = 2x^3 dx$$

$$\text{Vậy: } \int x^3 \sqrt{x^4+3} dx = \frac{1}{2} \int t dt = \frac{1}{2} \int t^2 dt = \frac{1}{6} t^3 + C = \frac{(x^4+3)\sqrt{x^4+3}}{6} + C$$

$$\text{e) } \int x^3 \sqrt{x^2+7} dx = \int x^2 \sqrt{x^2+7} . x dx . \text{ Đặt } t = \sqrt{x^2+7} \Rightarrow t^2 = x^2+7 \Rightarrow x^2 = t^2-7 \Rightarrow x dx = t dt$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy: } \int x^3 \sqrt{x^2+7} dx &= \int x^2 \sqrt{x^2+7} . x dx = \int (t^2-7) t^2 dt = \int (t^4-7t^2) dt = \frac{1}{5} t^5 - \frac{7t^3}{3} + C \\ &= \frac{(x^2+7)^2 \sqrt{x^2+7}}{5} - \frac{7(x^2+7)\sqrt{x^2+7}}{3} + C \end{aligned}$$

$$\text{f) Đặt } t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2-1 \Rightarrow dx = 2t dt .$$

$$\text{Vậy } \int x\sqrt{x+1} dx = \int (t^2-1) 2t^2 dt = 2 \int (t^4-t^2) dt = \frac{2}{5} t^5 - \frac{2}{3} t^3 + C = 2(x+1)\sqrt{x+1} \left(\frac{x+1}{5} - \frac{2}{3} \right) + C$$

Bài 9. Tính:

$$\text{a) } A = \int \cos^4 x dx$$

$$\text{b) } B = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$$

$$\text{c) } C = \int \sin 3x . \cos 5x dx$$

$$\text{d) } D = \int \sin 4x . \sin 6x dx$$

$$\text{e) } E = \int \cos 6x . \cos 2x dx$$

$$\text{f) } F = \int \sin x (1 + \sin x) dx$$

HD & Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A = \int \cos^4 x dx &= \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1+2\cos 2x + \cos^2 2x) dx \\ &= \frac{1}{8} \int (3+4\cos 2x + \cos 4x) dx = \frac{1}{8} \left(3x + 2\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x \right) + C \end{aligned}$$

$$\text{b) } B = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) \sin x dx . \text{ Đặt } t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx .$$

$$\text{Khi đó, ta có: } B = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = -\int \left(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2} \right) dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t} + C = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C$$

$$\text{c) } C = \int \sin 3x . \cos 5x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 8x - \sin 2x) dx = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{4}\cos 8x + \cos 2x \right) + C$$

$$\text{d) } D = \int \sin 4x . \sin 6x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 2x - \cos 10x) dx = \frac{1}{4} \left(\sin 2x - \frac{1}{5}\sin 10x \right) + C$$

$$\text{e) } E = \int \cos 6x . \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 8x + \cos 4x) dx = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2}\sin 8x + \sin 4x \right) + C$$

$$\begin{aligned} \text{f) } F = \int \sin x (1 + \sin x) dx &= \int (\sin x + \sin^2 x) dx = \int \left(\sin x + \frac{1-\cos 2x}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int (2\sin x - \cos 2x + 1) dx = \frac{1}{2} \left(-2\cos x - \frac{1}{2}\sin 2x + x \right) + C \end{aligned}$$

Dạng 3. Tìm nguyên hàm bằng phương pháp tính nguyên hàm từng phần

Phương pháp: Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên K thì

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x).v(x) - \int u'(x)v(x)dx \quad \text{Hay} \quad \int u dv = uv - \int v du$$

Lưu ý: Đặt $\begin{cases} u = f(x) & \Rightarrow du = f'(x)dx \\ dv = g(x)dx & \Rightarrow v = \int g(x)dx = G(x) + C \end{cases}$. Ta thường chọn $C = 0 \Rightarrow v = G(x)$

Các dạng cơ bản: Cho $P(x)$ là một đa thức

1. $\int P(x) \sin(ax+b)dx$. Đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \sin(ax+b)dx \end{cases}$

2. $\int P(x) \cos(ax+b)dx$. Đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \cos(ax+b)dx \end{cases}$

3. $\int P(x)e^{ax+b}dx$. Đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax+b}dx \end{cases}$

4. $\int P(x) \ln(ax+b)dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln(ax+b) \\ dv = P(x)dx \end{cases}$

5. $\int e^{ax+b} \sin(Ax+B)dx$ hoặc $\int e^{ax+b} \cos(Ax+B)dx$. Dùng nguyên hàm từng phần hai lần với $u = e^{ax+b}$

Bài 10. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $A = \int x \cos x dx$

b) $B = \int x^2 \sin x dx$

c) $C = \int 2x \ln(x-1) dx$

d) $D = \int (\ln x)^2 dx$

e) $E = \int (1+x) \ln x dx$

f) $F = \int \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx$

HD & Giải

a) Đặt: $\begin{cases} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos x dx & \Rightarrow v = \sin x \end{cases}$

Vậy $A = \int x \cos x dx = \int u dv = uv - \int v du = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$

b) $\begin{cases} u = x^2 & \Rightarrow du = 2x dx \\ dv = \sin x dx & \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$. Vậy $B = \int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx = -x^2 \cos x + B_1$

Tính $B_1 = \int 2x \cos x dx$. Đặt $\begin{cases} u = 2x & \Rightarrow du = 2 dx \\ dv = \cos x dx & \Rightarrow v = \sin x \end{cases}$

Do đó $B_1 = 2x \sin x - 2 \int \sin x dx = 2x \sin x + 2 \cos x + C$

Vậy: $B = \int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + B_1 = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$

c) Đặt: $\begin{cases} u = \ln(x-1) & \Rightarrow du = \frac{1}{x-1} dx \\ dv = 2x dx & \Rightarrow v = x^2 \end{cases}$. Vậy: $C = \int 2x \ln(x-1) dx = x^2 \ln(x-1) - \int \frac{x^2}{x-1} dx$

$$= x^2 \ln(x-1) - \int \left(x+1 + \frac{1}{x-1} \right) dx = x^2 \ln(x-1) - \frac{x^2}{2} - x - \ln|x-1| + C$$

d) Đặt: $\begin{cases} u = (\ln x)^2 & \Rightarrow du = \frac{2 \ln x}{x} dx \\ dv = dx & \Rightarrow v = x \end{cases}$. Vậy: $D = \int (\ln x)^2 dx = x (\ln x)^2 - 2 \int \ln x dx = x (\ln x)^2 - 2D_1$

Tính $D_1 = \int \ln x dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x & \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx & \Rightarrow v = x \end{cases}$. $D_1 = \int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$

Vậy: $D = \int (\ln x)^2 dx = x (\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$

$$\text{e) Đặt: } \begin{cases} u = \ln x & \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = (1+x) dx & \Rightarrow v = x + \frac{x^2}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy: } E = \int (1+x) \ln x dx = \left(x + \frac{x^2}{2} \right) \ln x - \int \left(1 + \frac{x}{2} \right) dx = \left(x + \frac{x^2}{2} \right) \ln x - \left(x + \frac{x^2}{4} \right) + C$$

$$\text{f) Đặt: } \begin{cases} u = \ln x & \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \frac{1}{(x+1)^2} dx & \Rightarrow v = -\frac{1}{x+1} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy: } F = \int \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx = -\frac{\ln x}{x+1} + \int \frac{dx}{x(x+1)} = -\frac{\ln x}{x+1} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = -\frac{\ln x}{x+1} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C$$

Bài 11. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $A = \int x \ln(1+x) dx$

b) $B = \int (x^2 + 2x - 1) e^x dx$

c) $C = \int x \sin(2x+1) dx$

d) $D = \int (1-x) \cos x dx$

HD & Giải

$$\text{a) Đặt: } \begin{cases} u = \ln(1+x) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{1+x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } A &= \int x \ln(1+x) dx = \frac{1}{2} x^2 \ln(1+x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x} dx = \frac{1}{2} x^2 \ln(1+x) - \frac{1}{2} \int \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln(1+x) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x) \right) + C = \frac{1}{2} (x^2 - 1) \ln(1+x) - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} x + C \end{aligned}$$

$$\text{b) Đặt: } \begin{cases} u = x^2 + 2x - 1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (2x+2) dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } B = \int (x^2 + 2x - 1) e^x dx = e^x (x^2 + 2x - 1) - \int e^x (2x + 2) dx = e^x (x^2 + 2x - 1) + I$$

$$\text{Với } I = \int e^x (2x + 2) dx. \text{ Đặt: } \begin{cases} u = 2x + 2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$I = e^x (2x + 2) - 2 \int e^x dx = e^x (2x + 2) - 2e^x = 2xe^x + C$$

$$\text{Vậy: } B = e^x (x^2 + 2x - 1) - 2xe^x = e^x (x^2 - 1) + C$$

$$\text{c) Đặt: } \begin{cases} u = x \\ dv = \sin(2x+1) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2} \cos(2x+1) \end{cases}.$$

$$C = \int x \sin(2x+1) dx = -\frac{1}{2} x \cos(2x+1) + \frac{1}{2} \int \cos(2x+1) dx = -\frac{1}{2} x \cos(2x+1) + \frac{1}{4} \sin(2x+1) + C$$

$$\text{d) Đặt: } \begin{cases} u = 1 - x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -dx \\ v = \sin x \end{cases}.$$

$$\text{Vậy: } D = (1-x) \sin x + \int \sin x dx = (1-x) \sin x - \cos x + C$$

Bài 12. Tìm nguyên hàm các hàm số sau:

- a) $f(x) = x \sin x$ b) $f(x) = xe^x$ c) $f(x) = \frac{x}{3}e^{2x}$ d) $f(x) = x \sin \frac{x}{2}$
 e) $f(x) = x^2 \cos x$ f) $f(x) = e^{\sqrt{3x-9}}$ g) $f(x) = x^3 \ln(2x)$ h) $f(x) = \sqrt{x} \ln x$

HD & Giải

a) Đặt $u = x$ và $dv = \sin x dx$ ta có $du = dx$ và $v = -\cos x$

$$\text{Do vậy } \int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

b) Đặt $u = x, dv = e^x dx$ khi đó $du = dx, v = e^x$. Do đó $\int xe^x dx = xe^x - e^x + C$

c) Đặt $u = \frac{x}{3}, dv = e^{2x} dx$. Khi đó, ta có $du = \frac{1}{3} dx, v = \frac{1}{2} e^{2x}$. Do đó $\int \frac{x}{3} e^{2x} dx = \frac{1}{6} x e^{2x} - \frac{1}{12} e^{2x} + C$

d) Đặt $u = x, dv = \sin \frac{x}{2} dx$, ta có $du = dx, v = -2 \cos \frac{x}{2}$. Do đó $\int x \sin \frac{x}{2} dx = -2x \cos \frac{x}{2} + 4 \sin \frac{x}{2} + C$

e) Đặt $u = x^2, dv = \cos x dx$ khi đó $du = 2x dx, v = \sin x$.

Do đó: $\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx = x^2 \sin x - 2I$, với $I = \int x \sin x dx$. Tính I bằng công thức lấy nguyên hàm từng phần, đặt $u = x, dv = \sin x dx$ khi đó $du = dx, v = -\cos x$.

$$\text{Do vậy } I = \int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

$$\text{Vậy } \int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x - 2C$$

f) Đổi biến $u = \sqrt{3x-9}$. Ta có $du = \frac{3dx}{2u}$ hay $dx = \frac{2u}{3} du$. Vậy $\int e^{\sqrt{3x-9}} dx = \frac{2}{3} \int u e^u du$

$$\text{Áp dụng kết quả b), ta được } \int e^{\sqrt{3x-9}} dx = \frac{2}{3} \int u e^u du = \frac{2}{3} (u e^u - e^u) + C = \frac{2}{3} (\sqrt{3x-9} \cdot e^{\sqrt{3x-9}} - e^{\sqrt{3x-9}}) + C$$

g) Đặt $\begin{cases} u = \ln(2x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x^3 dx \Rightarrow v = \frac{x^4}{4} \end{cases}$. Vậy $\int x^3 \ln(2x) dx = \frac{x^4 \ln(2x)}{4} - \frac{x^4}{16} + C$

h) Đặt $\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \sqrt{x} dx \Rightarrow v = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \end{cases}$. Vậy $\int \sqrt{x} \ln x dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln x - \int \frac{2}{3} x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{4}{9} x^{\frac{3}{2}} + C$

Bài 13. Tính các nguyên hàm sau:

- a) $A = \int x e^{-x} dx$ b) $B = \int (2^x - 3^x)^2 dx$ c) $C = \int \cos \sqrt{x} dx$ d) $D = \int (1-2x)e^x dx$
 e) $E = \int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$ f) $F = \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$ g) $G = \int \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} dx$ h) $H = \int \frac{x+1}{(x-2)(x+3)} dx$

HD & Giải

a) Đặt: $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{cases}$. Vậy: $A = \int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C$

$$\text{b) } B = \int (2^x - 3^x)^2 dx = \int (4^x - 2 \cdot 6^x + 9^x) dx = \frac{4^x}{\ln 4} - 2 \frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C$$

c) Đổi biến, đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ hay $dx = 2\sqrt{x} dt$. $\int \cos \sqrt{x} dx = 2 \int t \cos t dt$

Áp dụng phương pháp tính nguyên hàm từng phần, ta có $\int t \cos t dt = t \sin t - \int \sin t dt = t \sin t + \cos t + C$

Vậy $\int \cos \sqrt{x} dx = 2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 2 \cos \sqrt{x} + C$

d) Đặt $\begin{cases} u = 1 - 2x \Rightarrow du = -2dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{cases}$. Do vậy: $\int (1 - 2x)e^x dx = (1 - 2x)e^x + 2 \int e^x dx = (3 - 2x)e^x + C$

e) Đặt $\begin{cases} u = \ln \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow du = \frac{2}{1-x^2} dx \\ dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$.

Do đó $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} - \int \frac{x^2}{1-x^2} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} - \int \left(-1 + \frac{1}{1-x^2} \right) dx$
 $= \frac{x^2}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} + x - \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = x - \frac{1-x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C$

f) Đặt $\begin{cases} u = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$

$\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - I$

Với $I = \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$. Áp dụng phương pháp đổi biến, ta được $I = \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{1+x^2} + C$

Vậy $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C$

g) Đặt $\begin{cases} u = \ln(\sin x) \Rightarrow du = \frac{\cos x}{\sin x} dx \\ dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx \Rightarrow v = \tan x \end{cases}$.

Do đó: $\int \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} dx = \tan x \cdot \ln(\sin x) - \int dx = \tan x \cdot \ln(\sin x) - x + C$

h) $H = \int \frac{x+1}{(x-2)(x+3)} dx = \int \left(\frac{3}{5(x-2)} + \frac{2}{5(x+3)} \right) dx = \frac{1}{5} \ln \left[|x-2|^3 (x+3)^2 \right] + C$

Dạng 4. Tìm nguyên hàm thỏa mãn điều kiện cho trước

Phương pháp: Nếu $F'(x) = f(x)$ thì $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $\int f(x) dx = F(x) + C$

Bài 14. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số:

a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ biết $F(e) = \frac{e^2}{2}$

b) $f(x) = \sin x + \frac{1}{\cos^2 x}$ biết $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

HD & Giải

a) Ta có: $\int f(x) dx = \int \left(x + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C \Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C$

Mặt khác: $F(e) = \frac{e^2}{2} \Leftrightarrow \frac{e^2}{2} + \ln|e| + C = \frac{e^2}{2} \Leftrightarrow 1 + C = 0 \Leftrightarrow C = -1$.

Vậy $F(x) = \frac{x^2}{2} + \ln|x| - 1$

b) Ta có: $\int \left(\sin x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = -\cos x + \tan x + C \Rightarrow F(x) = -\cos x + \tan x + C$

Mặt khác: $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow -\cos \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{4} + C = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow C = \sqrt{2} - 1.$

Vậy $F(x) = -\cos x + \tan x + \sqrt{2} - 1$

Bài 15. Tìm hàm số $f(x)$ biết $f'(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^x}$ và $f(\ln 2) = 1$

HD & Giải

Ta có: $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x} dx = \int (e^x - e^{-x}) dx = e^x + e^{-x} + C \Rightarrow f(x) = e^x + e^{-x} + C$

Mặt khác: $f(\ln 2) = 1 \Leftrightarrow e^{\ln 2} + e^{-\ln 2} + C = 1 \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{2} + C = 1 \Leftrightarrow C = -\frac{3}{2}$

Vậy: $f(x) = e^x + e^{-x} - \frac{3}{2}$

Bài 16. Cho $f(x) = x^2 e^x$. Định a, b, c để hàm số $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ là một nguyên hàm của $f(x)$

HD & Giải

$F(x)$ là nguyên hàm của $f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x), \forall x$

$\Leftrightarrow (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x = x^2 e^x \Leftrightarrow ax^2 + (2a + b)x + b + c = x^2, \forall x$, vì $e^x > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$$

Dạng 5. Tìm nguyên hàm của các hàm số thường gặp

1. Nguyên hàm của hàm hữu tỉ.

Nguyên hàm dạng: $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, trong đó $P(x), Q(x)$ là các đa thức

1. Nếu bậc của $P(x) \geq$ bậc của $Q(x)$ thì ta thực hiện phép chia đa thức.

2. Nếu bậc của $P(x) <$ bậc của $Q(x)$ và $Q(x)$ có dạng tích nhiều nhân tử thì ta phân tích $\frac{P(x)}{Q(x)}$ thành tổng của nhiều phân thức (bằng phương pháp hệ số bất định). Xét các dạng sau:

a) $I = \int \frac{P(x)}{(ax+b)(cx+d)} dx$. Xác định các số A, B sao cho: $\frac{P(x)}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{cx+d}$

b) $I = \int \frac{P(x)}{(x-\alpha)(ax^2+bx+c)} dx$. Ta xét $\Delta = b^2 - 4ac$

❖ Nếu $\Delta > 0$. Xác định A, B, C sao cho: $\frac{P(x)}{(x-\alpha)(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-x_1} + \frac{C}{x-x_2}$, với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$

❖ Nếu $\Delta = 0$. Xác định A, B, C sao cho: $\frac{P(x)}{(x-\alpha)(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-x_0)^2} + \frac{C}{x-x_0}$, với x_0 là nghiệm kép của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$

❖ Nếu $\Delta < 0$. Xác định A, B sao cho: $\frac{P(x)}{(x-\alpha)(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{ax^2+bx+c}$

c) $I = \int \frac{P(x)}{(ax+b)^n} dx$. Xác định $A_1, A_2, \dots, A_n$ sao cho: $\frac{P(x)}{(ax+b)^n} = \frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$

2. Nguyên hàm của hàm vô tỉ

a) Nguyên hàm dạng: $I = \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$, với $ad-bc \neq 0$.

Đặt $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ ta được $x = \frac{b-dt^n}{ct^n-a} = \varphi(t)$ là một hàm hữu tỉ của t

b) Nguyên hàm dạng $J = \int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right) dx$. Đặt $x = a \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

c) Nguyên hàm dạng $K = \int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right) dx$. Đặt $x = a \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

d) Nguyên hàm dạng $H = \int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right) dx$. Đặt $x = \frac{a}{\cos t}, t \in [0; \pi], t \neq \frac{\pi}{2}$

e) Nguyên hàm dạng $L = \int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx, a \neq 0$

♦ Nếu $a > 0$ ta đặt $\sqrt{ax^2+bx+c} = (t-x)\sqrt{a} \Rightarrow x = \frac{at^2-c}{2at+b} = \varphi(t)$

♦ Nếu $c > 0$ ta đặt $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c} \Rightarrow x = \frac{b-2\sqrt{ct}}{t^2-a} = \varphi(t)$

f) Nguyên hàm dạng $L = \int \frac{(mx+n)}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$. Đặt $x-\alpha = \frac{1}{t}$

3. Nguyên hàm của hàm lượng giác.

Loại 1. Nguyên hàm dạng $\int \cos ax \cdot \cos bxdx, \int \sin ax \cdot \sin bxdx, \int \sin ax \cdot \cos bxdx$

Dùng công thức biến đổi tích thành tổng rồi tính tích phân

Loại 2. Nguyên hàm dạng $\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx$. Xét các trường hợp

- ♦ Nếu n lẻ: Biến đổi và đặt $t = \cos x$
- ♦ Nếu m lẻ: Biến đổi và đặt $t = \sin x$
- ♦ Nếu n, m đều chẵn: Biến đổi và đặt $t = \tan x$
- ♦ Nếu n, m đều chẵn và dương, ta dùng công thức hạ bậc

Loại 3. Nguyên hàm dạng $\int R(\sin x, \cos x) dx$, R là hàm số hữu tỉ với $\sin x$ và $\cos x$

❖ Trường hợp chung, ta đặt $t = \tan \frac{x}{2}$

Khi đó: $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ và $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

❖ Trường hợp khác:

- ♦ Nếu $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \cos x$
- ♦ Nếu $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \sin x$
- ♦ Nếu $R(-\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \tan x$ (hoặc $t = \cot x$)

Bài 17. Tính các nguyên hàm sau:

a) $A = \int \frac{x}{(x+1)(2x+1)} dx$ b) $B = \int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x^2-x-12)} dx$ c) $C = \int \frac{3x^2+11x+9}{(x+1)(x+2)^2} dx$

$$d) D = \int \frac{x}{(x+1)^7} dx$$

$$e) E = \int \frac{x^2}{(x-1)^5} dx$$

$$f) F = \int \frac{3}{x(x^3+4)} dx$$

HD & Giải

a) Phân tích: $\frac{x}{(x+1)(2x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x+1}$ với $x \neq -1, x \neq -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow x = A(2x+1) + B(x+1) \Leftrightarrow x = (2A+B)x + A+B \Leftrightarrow \begin{cases} 2A+B=1 \\ A+B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

Do vậy: $\frac{x}{(x+1)(2x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1}$

Vậy: $A = \int \frac{x}{(x+1)(2x+1)} dx = \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1} \right) dx = \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|2x+1| + C$

b) Ta có: $(x-1)(x^2-x-12) = (x-1)(x-4)(x+3)$

Phân tích: $\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x^2-x-12)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{x+3}$ (với $x \neq 1, x \neq 4, x \neq -3$)

$$\Leftrightarrow 2x^2+41x-91 = (A+B+C)x^2 + (-A+2B-5C)x -12A-3B+4C$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C=2 \\ -A+2B-5C=41 \\ -12A-3B+4C=-91 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=4 \\ B=5 \\ C=-7 \end{cases} \text{ Do đó: } \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x^2-x-12)} = \frac{4}{x-1} + \frac{5}{x-4} - \frac{7}{x+3}$$

$$B = \int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x^2-x-12)} dx = \int \left(\frac{4}{x-1} + \frac{5}{x-4} - \frac{7}{x+3} \right) dx = 4 \ln|x-1| + 5 \ln|x-4| - 7 \ln|x+3| + C$$

c) Phân tích: $\frac{3x^2+11x+9}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x+2}$ (với $x \neq -1, x \neq -2$)

$$\Rightarrow 3x^2+11x+9 = (A+C)x^2 + (4A+B+3C)x + 4A+B+2C \Leftrightarrow \begin{cases} A+C=3 \\ 4A+B+3C=11 \\ 4A+B+2C=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=1 \\ C=2 \end{cases}$$

Do đó: $\frac{3x^2+11x+9}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{2}{x+2}$

Vậy: $C = \int \frac{3x^2+11x+9}{(x+1)(x+2)^2} dx = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{2}{x+2} \right) dx = \ln|x+1| - \frac{1}{x+2} + 2 \ln|x+2| + C$

d) Đặt $t = x+1 \Rightarrow x = t-1 \Rightarrow dx = dt$

$$D = \int \frac{x}{(x+1)^7} dx = \int \frac{t-1}{t^7} dt = \int \left(\frac{1}{t^6} - \frac{1}{t^7} \right) dt = -\frac{1}{5t^5} + \frac{1}{6t^6} + C = -\frac{1}{5(x+1)^5} + \frac{1}{6(x+1)^6} + C$$

e) Đặt $t = x-1 \Rightarrow x = t+1 \Rightarrow dx = dt$

$$E = \int \frac{x^2}{(x-1)^5} dx = \int \frac{(t+1)^2}{t^5} dt = \int \frac{t^2+2t+1}{t^5} dt = \int \left(\frac{1}{t^3} + \frac{2}{t^4} + \frac{1}{t^5} \right) dt = -\frac{1}{2t^2} - \frac{2}{3t^3} - \frac{1}{4t^4} + C$$

$$= -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{2}{3(x-1)^3} - \frac{1}{4(x-1)^4} + C$$

$$f) F = \int \frac{3}{x(x^3+4)} dx = \int \frac{3x^2}{x^3(x^3+4)} dx. \text{ Đặt } t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2 dx$$

$$F = \int \frac{dt}{t(t+4)} = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+4} \right) dt = \frac{1}{4} [\ln|t| - \ln|t+4|] + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t}{t+4} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x^3}{x^3+4} \right| + C$$

Bài 18. Tính các nguyên hàm sau:

$$a) A = \int \frac{x-1}{x(x+1)^2} dx \quad b) B = \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx \quad c) C = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx, (a > 0) \quad d) D = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx$$

HD & Giải

a) Phân tích: $\frac{x-1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$ ta tìm được $A = -1, B = 1, C = 2$

Do đó:

$$A = \int \frac{x-1}{x(x+1)^2} dx = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} \right) dx = -\ln|x| + \ln|x+1| - \frac{2}{x+1} + C = \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{2}{x+1} + C$$

b) Đặt $t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \Rightarrow x = \frac{t^2+1}{1-t^2} \Rightarrow dx = \frac{4t}{(1-t^2)^2} dt$

Vậy: $B = \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx = \int \frac{4t^2}{(1-t^2)^2} dt = \int \left(\frac{1}{1-t} - \frac{1}{1-t} + \frac{1}{(1+t)^2} + \frac{1}{(1-t)^2} \right) dt = \ln \left| \frac{1-t}{1+t} \right| - \frac{2t}{t^2-1} + C$

c) Đặt $\sqrt{x^2+a^2} = 1-x \Rightarrow x = \frac{t^2-a^2}{2t} \Rightarrow dx = \frac{t^2+a^2}{2t^2} dt$

Vậy: $C = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln \left(x + \sqrt{x^2+a^2} \right) + C$

d) Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$. Ta có: $D = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cos x dx = \int \frac{t^2}{1-t^2} dt$
 $= \int \left(\frac{1}{1-t^2} - 1 \right) dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| - t + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| - \sin x + C$

Bài 19. Tính các nguyên hàm sau:

$$a) A = \int \frac{1}{x\sqrt{1-x}} dx \quad b) B = \int \frac{xdx}{\sqrt{2x+1+1}} \quad c) C = \int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx, (x > -1)$$

$$d) D = \int \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}} dx \quad e) E = \int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx \quad f) F = \int \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{\sin x - \cos x}} dx$$

HD & Giải

a) Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2 - 1 \Rightarrow dx = 2t dt$

$$A = \int \frac{1}{x\sqrt{1-x}} dx = \int \frac{2t dt}{(t^2-1)t} = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \ln|t-1| - \ln|t+1| + C = \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C$$

b) Đặt $t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow x = \frac{1}{2}(t^2-1) \Rightarrow dx = t dt$

$$B = \int \frac{xdx}{\sqrt{2x+1+1}} = \int \frac{\frac{1}{2}(t^2-1).t}{t+1} dt = \frac{1}{2} \int (t-1)t dt = \frac{1}{2} \int (t^2-t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right) + C = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{3} - \frac{2x+1}{2} \right) + C$$

c) Đặt $t = 1 + x^3 \Rightarrow x^3 = t - 1 \Rightarrow 3x^2 dx = dt \Rightarrow x^2 dx = \frac{dt}{3}$

$$C = \int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \int \sqrt[3]{t} dt = \frac{1}{3} \int t^{\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} t^{\frac{4}{3}} + C = \frac{1}{4} t^{\frac{4}{3}} + C = \frac{1}{4} (1+x^3)^{\frac{4}{3}} + C$$

d) Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt$

$$D = \int \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}} dx = \int \frac{2t dt}{(1-t^2) \cdot t} = \int \frac{2 dt}{1-t^2} = \int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt = \ln|1+t| - \ln|1-t| + C$$

$$= \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = \ln \left| \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right| + C$$

e) Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

$$E = \int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx = - \int \frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}} = - \int \frac{dt}{t^{\frac{2}{3}}} = -3t^{\frac{1}{3}} + C = -3\sqrt[3]{\cos x} + C$$

f) Đặt $t = \sin x - \cos x \Rightarrow dt = (\cos x + \sin x) dx$

$$F = \int \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{\sin x - \cos x}} dx = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-\frac{1}{2}} dt = 2t^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{\sin x - \cos x} + C$$

Bài 20. Tính các nguyên hàm sau:

a) $A = \int \frac{1}{\sin x} dx$

b) $B = \int \frac{1}{\sin x \cos x} dx$

c) $C = \int \frac{\sin 4x \cdot \sin 3x}{\tan x + \cot 2x} dx$

d) $D = \int \cos^3 x \cdot \sin 8x dx$

e) $E = \int \sin^4 x \cdot \cos x dx$

f) $F = \int \sin^3 x \cdot \cos^5 x dx$

HD & Giải

a) Đặt $t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

Ta có: $A = \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$

b) Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$.

Ta có: $A = \int \frac{1}{\sin x \cos x} dx = \int \frac{1}{\tan x \cos^2 x} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\tan x| + C$

Hay $B = \int \frac{1}{\sin x \cos x} dx = \int \frac{d(2x)}{\sin 2x} = \ln|\tan x| + C$ (xem câu a))

c) Ta có: $\tan x + \cot 2x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\sin x \cdot \sin 2x + \cos x \cdot \cos 2x}{\cos x \sin 2x} = \frac{1}{\sin 2x}$

$$C = \int \frac{\sin 4x \cdot \sin 3x}{\tan x + \cot 2x} dx = \int \sin 4x \sin 3x \cdot \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int \sin 4x (\cos x - \cos 5x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int (\sin 4x \cos x - \sin 4x \cos 5x) dx = \frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{2} (\sin 5x + \sin 3x) - \frac{1}{2} (\sin 9x - \sin x) \right] dx$$

$$= \frac{1}{4} \int [-\sin 9x + \sin 5x + \sin 3x + \sin x] dx = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{9} \cos 9x - \frac{1}{5} \cos 5x - \frac{1}{3} \cos 3x - \cos x \right) + C$$

$$\begin{aligned} \text{d) } D &= \int \cos^3 x \cdot \sin 8x dx = \frac{1}{4} \int (\cos 3x + 3 \cos x) \cdot \sin 8x dx = \frac{1}{4} \int (\cos 3x \sin 8x + 3 \cos x \sin 8x) dx \\ &= \frac{1}{4} \int \left[\frac{1}{2} (\sin 11x + \sin 5x) + \frac{3}{2} (\sin 9x + \sin 7x) \right] dx = \frac{1}{8} \int (\sin 11x + 3 \sin 9x + 3 \sin 7x + \sin 5x) dx \\ &= \frac{1}{8} \left[-\frac{1}{11} \cos 11x - \frac{1}{3} \cos 9x - \frac{3}{7} \cos 7x - \frac{1}{5} \cos 5x \right] + C \end{aligned}$$

$$\text{e) Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx. \text{ Do đó } E = \int \sin^4 x \cdot \cos x dx = \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

$$\text{f) } F = \int \sin^3 x \cdot \cos^5 x dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x \cdot \cos^5 x dx = \int (1 - \cos^2 x) \cdot \cos^5 x \sin x dx$$

$$\text{Đặt } t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx.$$

$$\text{Do vậy } F = -\int (1 - t^2) t^5 dt = \int (t^7 - t^5) dt = \frac{t^8}{8} - \frac{t^6}{6} + C = \frac{\cos^8 x}{8} - \frac{\sin^6 x}{6} + C$$

Bài 21. Tính các nguyên hàm sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \int \cos^4 x dx & \text{b) } B &= \int \sin^2 x \cos^4 x dx & \text{c) } C &= \int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx \\ \text{d) } D &= \int \frac{\cos^3 x}{4 \sin^2 x - 1} dx & \text{e) } E &= \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x} & \text{f) } F &= \int \frac{1}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} dx \end{aligned}$$

HD & Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \int \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4} \int \left(1 + 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{8} \int (3 + 4 \cos 2x + \cos 4x) dx = \frac{1}{8} \left(3x + 2 \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 4x \right) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x dx = \int \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right)^2 \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x (1 + \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x)(1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x + \cos 2x - \cos 4x \cdot \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{16} \int \left(1 - \cos 4x + \cos 2x - \frac{1}{2} (\cos 6x + \cos 2x) \right) dx = \frac{1}{32} \int (2 - 2 \cos 4x + \cos 2x - \cos 6x) dx \\ &= \frac{1}{32} \left[2x - \frac{1}{2} \sin 4x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{6} \sin 6x \right] + C \end{aligned}$$

$$\text{c) } C = \int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx = \int \frac{(1 + \sin^2 x) \sin x}{2 \cos^2 x - 1} dx = \int \frac{(2 - \cos^2 x) \sin x}{2 \cos^2 x - 1} dx$$

$$\text{Đặt } t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy: } C &= \int \frac{(2 - t^2) dt}{2t^2 - 1} = \int \frac{t^2 - 2}{2t^2 - 1} dt = \frac{1}{2} \int dt - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{2t^2 - 1} = \frac{1}{2} \int dt - \frac{3}{2} \int \left(\frac{1}{\sqrt{2}t - 1} - \frac{1}{\sqrt{2}t + 1} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} t - \frac{3}{4} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \ln |\sqrt{2}t - 1| - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln |\sqrt{2}t + 1| \right] + C \\ &= \frac{1}{2} t - \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}t - 1}{\sqrt{2}t + 1} \right| + C = \frac{1}{2} \cos x - \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{\sqrt{2} \cos x + 1} \right| + C \end{aligned}$$

$$\text{d) } D = \int \frac{\cos^3 x}{4 \sin^2 x - 1} dx = \int \frac{(1 - \sin^2 x) \cos x}{4 \sin^2 x - 1} dx. \text{ Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$$

$$\begin{aligned}\text{Vậy: } D &= \int \frac{(t-t^2)}{4t^2-1} dt = \int \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2t-1} - \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2t+1} \right) dt = -\frac{1}{4}t + \frac{3}{16} \ln|2t-1| - \frac{3}{16} \ln|2t+1| + C \\ &= -\frac{1}{4}t + \frac{3}{16} \ln \left| \frac{2t-1}{2t+1} \right| + C = -\frac{1}{4} \sin x + \frac{3}{16} \ln \left| \frac{2 \sin x - 1}{2 \sin x + 1} \right| + C\end{aligned}$$

$$\text{e) } E = \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x} = \int \frac{dx}{(\tan^2 x + 2 \tan x - 1) \cos^2 x}. \text{ Đặt } t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$\begin{aligned}\text{Vậy: } E &= \int \frac{dt}{t^2 + 2t - 1} = \int \frac{dt}{(t+1-\sqrt{2})(t+1+\sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left(\frac{1}{t+1-\sqrt{2}} + \frac{1}{t+1+\sqrt{2}} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\tan x + 1 - \sqrt{2}}{\tan x + 1 + \sqrt{2}} \right| + C\end{aligned}$$

$$\text{f) Đặt } t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} (1 + t^2) dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \text{ Ta có: } \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\begin{aligned}\text{Vậy: } F &= \int \frac{1}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} dx = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4 \frac{2t}{1+t^2} + 3 \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = \int \frac{2dt}{2t^2 + 8t + 8} \\ &= \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{\tan \frac{x}{2} + 2} + C\end{aligned}$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 22. Tìm nguyên hàm các hàm số sau

$$\begin{array}{lll}\text{a) } f(x) = 3x\sqrt{7-3x^2} & \text{b) } f(x) = \cos(3x+4) & \text{c) } f(x) = \frac{1}{\cos^2(3x+2)} \\ \text{d) } f(x) = \sin^5 \frac{x}{3} \cdot \cos \frac{x}{3} & \text{e) } f(x) = x^2 \left(\frac{x^3}{18} - 1 \right)^5 & \text{f) } f(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}\end{array}$$

Bài 23. Hãy tính:

$$\begin{array}{lll}\text{a) } A = \int 2x\sqrt{x^2+1} dx & \text{b) } B = \int 3x^2\sqrt{x^3+1} dx & \text{c) } C = \int \frac{x}{(3x^2+9)^4} dx \\ \text{d) } D = \int \frac{2x+4}{x^2+4x-5} dx & \text{e) } E = \int \frac{dx}{x \ln} & \text{f) } F = \int 2xe^{x^2+4} dx\end{array}$$

Bài 24. Hãy tính:

$$\begin{array}{lll}\text{a) } A = \int \frac{1}{\sin^3 x} dx & \text{b) } B = \int \sin^3 x \cos^4 x dx & \text{c) } C = \int \sin^4 x \cos^4 x dx \\ \text{d) } D = \int \frac{1}{\cos x \sin^2 x} dx & \text{e) } E = \int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} dx & \text{f) } F = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx\end{array}$$

Bài 25. Hãy tính:

$$\begin{array}{lll}\text{a) } A = \int x^2 e^x dx & \text{b) } B = \int 3x^2 \cos(2x) dx & \text{c) } C = \int x^3 \ln(2x) dx \\ \text{d) } D = \int x^2 \cos(3x) dx & \text{e) } E = \int e^x \cos x dx & \text{f) } F = \int e^x \sin x dx\end{array}$$

Đáp số

Bài 22.

$$\begin{array}{ll}\text{a) } -\frac{1}{3} (7-3x^2)^{\frac{3}{2}} + C \text{ (HD Đặt } t = 7-3x^2 \text{)} & \text{b) } \frac{1}{3} \sin(3x+4) + C \text{ (HD Đặt } t = 3x+4 \text{)}\end{array}$$

c) $\frac{1}{3} \tan(3x+2) + C$ (HD Đặt $t = 3x+2$)

d) $\frac{1}{2} \sin^6\left(\frac{x}{3}\right) + C$ (HD Đặt $t = \sin \frac{x}{3}$)

e) $\left(\frac{x^3}{18} - 1\right)^6 + C$ (HD Đặt $t = \frac{x^3}{18} - 1$)

f) $-\frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{2} + C$ (HD Đặt $t = \sin \frac{1}{x}$)

Bài 23.

a) $A = \frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C$ (HD Đặt $t = x^2+1$)

b) $B = \frac{2}{3}(x^3+1)^{\frac{3}{2}} + C$ (HD Đặt $t = x^3+1$)

c) $C = -\frac{1}{8}(3x^2+9)^{-3} + C$ (HD Đặt $t = 3x^2+9$)

d) $D = \ln|x^2+4x-5| + C$ (HD Đặt $t = x^2+4x-5$)

e) $E = \ln|\ln x|$ (HD Đặt $t = \ln x$)

f) $F = e^{x^2+4} + C$ (HD Đặt $t = x^2+4$)

Bài 24.

a) $A = \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| - \frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + C$ (HD Đặt $t = \cot x$)

b) $B = \cos^5 x \left(\frac{1}{7} \cos^2 x - \frac{1}{5} \right) + C$ (HD Đặt $t = \cos x$)

c) $C = \frac{1}{128} \left(3x - \sin 4x + \frac{1}{8} \sin 8x \right) + C$ ($\sin^4 x \cos^4 = \frac{1}{2^4} (\sin^2 2x)^2 = \frac{1}{2^6} (1 - \cos 4x)^2$)

d) $D = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - \frac{1}{\sin x} + C$ (HD $\frac{1}{\cos x \sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin^2 x}$)

e) $E = \tan \frac{x}{2} - 2 \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| + C$ (HD Đặt $\frac{1+\sin x}{1+\cos x} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} + \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}$)

f) $F = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C$ (HD Đặt $t = \cos x$)

Bài 25.

a) $A = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$ (HD Đặt $u = \ln x, dv = e^x$)

b) $B = \frac{3}{4} (2x \cos 2x - \sin 2x + 2x^2 \sin 2x) + C$ (HD Đặt $u = x^2, dv = \cos(2x)dx$)

c) $C = \frac{x^4 \ln(2x)}{4} - \frac{x^4}{16} + C$ (HD Đặt $u = \ln(2x), dv = x^3$)

d) $D = \frac{6x \cos 3x - 2 \sin 3x + 9x^2 \sin 3x}{27} + C$ (HD $u = x^2, dv = \cos(3x)dx$)

e) $E = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$ (HD nguyên hàm từng phần hai lần Đặt $u = e^x, dv = \cos x dx$ và $u = e^x, dv = \sin x dx$)

f) $F = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$ (HD nguyên hàm từng phần hai lần Đặt $u = e^x, dv = \sin x dx$ và $u = e^x, dv = \cos x dx$)

§2. TÍCH PHÂN

A. KIẾN THỨC CẦN NĂM

I. Khái niệm về tích phân

Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$. Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$.

Kí hiệu $\int_a^b f(x)dx$. Ta dùng kí hiệu $F(x)\Big|_a^b$ để chỉ hiệu số $F(b) - F(a)$

$$\text{Vậy } \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Chú ý:

$$1. \text{ Khi } a = b \text{ ta định nghĩa } \int_a^b f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$2. \text{ Khi } a > b, \text{ ta định nghĩa } \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

3. Tích phân không phụ thuộc vào chữ dùng làm biến số trong dấu tích phân, tức là

$$\int_a^b f(x)dx \text{ hay } \int_a^b f(t)dt, \dots, \text{ đều tính bằng } F(b) - F(a) \text{ hay } \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

II Tính chất của tích phân

$$\text{Tích chất 1. } k \int_a^b f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx \quad (k \text{ là hằng số})$$

$$\text{Tích chất 2. } \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$\text{Tính chất 3. } \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad a < c < b$$

III. Phương pháp tính tích phân

1. Phương pháp đổi biến số

Định lí 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử hàm số $x = \varphi(t)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]$ sao cho $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ và $a \leq \varphi(t) \leq b$ với mọi $t \in [\alpha; \beta]$.

$$\text{Khi đó: } \int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Định lí 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$

Nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $\alpha \leq u(x) \leq \beta$ với mọi $x \in [a; b]$ sao cho

$$f(x) = g(u(x))u'(x), g(u) \text{ liên tục trên đoạn } [\alpha; \beta] \text{ thì } \int_a^b f(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du$$

2. Phương pháp tính tích phân từng phần

Định lí 3. Nếu $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx \text{ hay } \int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Lưu ý: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và thỏa mãn điều kiện $f(a+b-x) = f(x), \forall x \in [a; b]$. Khi

$$\text{đó } \int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx.$$

B. BÀI TẬP

Dạng 1. Tính tích phân bằng định nghĩa

Phương pháp: ❖ Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$
 ❖ Nhớ vững bảng nguyên hàm

Bài 1. Tính các tích phân sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } A = \int_0^1 \frac{2x+9}{x+3} dx & \text{b) } B = \int_{-1}^0 3^{x+1} dx & \text{c) } C = \int_3^5 \frac{1}{x} dx \\ \text{d) } D = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx & \text{e) } E = \int_1^{25} \frac{1}{\sqrt{x}} dx & \text{f) } F = \int_2^4 \left(x + \frac{1}{x}\right) dx \end{array}$$

HD & Giải

$$\begin{array}{l} \text{a) } A = \int_0^1 \frac{2x+9}{x+3} dx = \int_0^1 \left(2 + \frac{3}{x+3}\right) dx = \left(2x + 3 \ln|x+3|\right)\Big|_0^1 = (2 + 3 \ln 4) - (0 + 3 \ln 3) = 2 + 3 \ln \frac{4}{3} \\ \text{b) } B = \int_{-1}^0 3^{x+1} dx = 3 \int_{-1}^0 3^x dx = \frac{3}{\ln 3} \cdot 3^x \Big|_{-1}^0 = \frac{3}{\ln 3} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{\ln 3} \\ \text{c) } C = \int_3^5 \frac{1}{x} dx = \ln|x|\Big|_3^5 = \ln 5 - \ln 3 = \ln \frac{5}{3} \\ \text{d) } D = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \\ \text{e) } E = \int_1^{25} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^{25} x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_1^{25} = \frac{2}{3} x \sqrt{x} \Big|_1^{25} = \frac{250}{3} - \frac{2}{3} = \frac{248}{3} \\ \text{f) } F = \int_2^4 \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \ln|x|\right)\Big|_2^4 = \left(\frac{16}{2} + \ln 4\right) - \left(\frac{4}{2} + \ln 2\right) = 6 + \ln 2 \end{array}$$

Bài 2. Tính các tích phân sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } A = \int_2^4 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx & \text{b) } B = \int_0^1 \left(e^{2x} + \frac{3}{x+1}\right) dx & \text{c) } C = \int_2^5 (3x-4)^4 dx \\ \text{d) } D = \int_{-2}^0 (x - e^{-x}) dx & \text{e) } E = \int_1^4 (x^2 + 3\sqrt{x}) dx & \text{f) } F = \int_1^2 (x^2 - 3x^{-4}) dx \end{array}$$

HD & Giải

$$\begin{array}{l} \text{a) } A = \int_2^4 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx = \int_2^4 \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x}\right)\Big|_2^4 = \frac{275}{12} \\ \text{b) } B = \int_0^1 \left(e^{2x} + \frac{3}{x+1}\right) dx = \left(\frac{1}{2} e^{2x} + 3 \ln|x+1|\right)\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{2} e^2 + 3 \ln 2\right) - \left(\frac{1}{2} e^0 + 3 \ln 1\right) = \frac{e^2}{2} + 3 \ln 2 - \frac{1}{2} \\ \text{c) } C = \int_2^5 (3x-4)^4 dx = \frac{1}{3} \frac{(3x-4)^5}{5} \Big|_2^5 = \frac{161019}{15} \end{array}$$

$$d) D = \int_{-2}^0 (x - e^{-x}) dx = \left(\frac{x^2}{2} + e^{-x} \right) \Big|_{-2}^0 = -1 - e^2$$

$$e) E = \int_1^4 (x^2 + 3\sqrt{x}) dx = \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^4 + 3 \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_1^4 = 35$$

$$F = \int_1^2 (x^2 - 3x^{-4}) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 3 \frac{x^{-3}}{-3} \right) \Big|_1^2 = \left(\frac{x^3}{3} + x^{-3} \right) \Big|_1^2 = \frac{35}{24}$$

Bài 2. Tính các tích phân sau:

$$a) A = \int_0^2 |x^2 - 1| dx$$

$$b) B = \int_1^3 |x^2 - 3x + 2| dx$$

$$c) C = \int_{-2}^3 (|x+1| + |x-2|) dx$$

$$d) D = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2(1 - \cos 2x)} dx$$

$$e) E = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos 2x} dx$$

$$f) F = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin x} dx$$

HD & Giải

a) Ta có:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$x^2 - 1$		+	0	-	0	+

$$A = \int_0^2 |x^2 - 1| dx = \int_0^1 (1 - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx = \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_1^2 = 2$$

b) Ta có:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
x^2-3x+2	+	0	-	0	+

$$B = \int_1^3 |x^2 - 3x + 2| dx = \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2) dx + \int_2^3 (x^2 - 3x + 2) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x \right) \Big|_1^2 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right) \Big|_2^3 = 1$$

c) Ta có

x	$-\infty$	-2	-1	2	3	$+\infty$
$x + 1$			$-$	0	$+$	
$x - 2$			$-$		$-$	0

$$C = \int_{-2}^3 (|x+1| + |x-2|) dx = \int_{-2}^{-1} (-x-1-x+2) dx + \int_{-1}^2 (x+1-x+2) dx + \int_2^3 (x+1+x-2) dx$$

$$= \int_{-2}^{-1} (-2x+1) dx + \int_{-1}^2 3 dx + \int_2^3 (2x-1) dx = \left(-x^2 + x \right) \Big|_{-2}^{-1} + 3x \Big|_{-1}^2 + \left(x^2 - x \right) \Big|_2^3 = 17$$

$$d) D = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2(1 - \cos 2x)} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 \sin^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 |\sin x| dx$$

Dựa vào bảng xét dấu sau :

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$		$-$	0
		$+$	

$$\text{Vậy } D = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2|\sin x| dx = -2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin x dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 2 \cos x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 - 2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4$$

$$\text{e) } E = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos 2x} dx = \int_0^{\pi} \sqrt{2 \cos^2 x} dx = \sqrt{2} \int_0^{\pi} |\cos x| dx$$

Dựa vào bảng xét dấu sau :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$		$+$	0
		$-$	

$$\text{Vậy } E = \sqrt{2} \int_0^{\pi} |\cos x| dx = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx = \sqrt{2} \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{2} \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{f) } F = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin x} dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right)^2} dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \cos^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} dx = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left| \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right| dx$$

Dựa vào bảng xét dấu sau :

x	0	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$		$+$	0
		$-$	

$$\begin{aligned} \text{Vậy } F &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left| \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right| dx = \sqrt{2} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) dx - \sqrt{2} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) dx \\ &= 2\sqrt{2} \sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \Big|_0^{\frac{3\pi}{2}} - 2\sqrt{2} \sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

Dạng 2. Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến (Loại 1)

Phương pháp: Tính $I = \int_a^b f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx$

- ♦ Đặt $t = \varphi(x) \Rightarrow dt = \varphi'(x) dx$
- ♦ Đổi cận: $x = a \Rightarrow t = \varphi(a); x = b \Rightarrow t = \varphi(b)$
- ♦ Khi đó: $I = \int_a^b f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt$

Chú ý: 1/ $t = \varphi(x) \Rightarrow dt = \varphi'(x) dx$

2/ $g(t) = \varphi(x) \Rightarrow g'(t) dt = \varphi'(x) dx$

Bài 4. Tính các tích phân sau:

a) $A = \int_1^2 \sqrt{x+2} dx$

b) $B = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

c) $C = \int_{-1}^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$

d) $D = \int_{-1}^2 3x.e^{x^2} dx$

e) $E = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{\sin x(1+\cos x)} dx$

f) $F = \int_2^4 \frac{\ln x + 1}{x \ln x} dx$

HD & Giải

a) Đặt $t = x + 2 \Rightarrow dt = dx$

Đổi cận:

♦ $x = 1 \Rightarrow t = 3$

♦ $x = 2 \Rightarrow t = 4$

Vậy $A = \int_1^2 \sqrt{x+2} dx = \int_3^4 \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_3^4 = \frac{2}{3} (\sqrt{4^3} - \sqrt{3^3}) = \frac{16-6\sqrt{3}}{3}$

b) Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow t dt = x dx$

Đổi cận:

♦ $x = 0 \Rightarrow t = 1$

♦ $x = \sqrt{3} \Rightarrow t = 2$

Vậy $B = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_1^2 \frac{3t}{t} dt = \int_1^2 3 dt = 3t \Big|_1^2 = 6-3=3$

c) Đặt $t = x^2 + x + 1 \Rightarrow dt = (2x+1) dx$

Đổi cận:

♦ $x = -1 \Rightarrow t = 1$

♦ $x = 1 \Rightarrow t = 3$

Vậy $C = \int_{-1}^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx = \int_1^3 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2 \int_1^3 \frac{dt}{2\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} \Big|_1^3 = 2(\sqrt{3}-1)$

d) Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} dt$

Đổi cận:

♦ $x = -1 \Rightarrow t = 1$

♦ $x = 2 \Rightarrow t = 4$

Vậy $D = \int_{-1}^2 3x.e^{x^2} dx = \frac{3}{2} \int_1^4 e^t dt = \frac{3}{2} e^t \Big|_1^4 = \frac{3}{2} (e^4 - e)$

e) $E = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{\sin x(1+\cos x)} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\cos x) \sin x}{\sin^2 x(1+\cos x)} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\cos x) \sin x}{(1-\cos^2 x)(1+\cos x)} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2} dx$

Đặt $t = 1 + \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

Đổi cận:

♦ $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{3}{2}$

♦ $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$

Vậy $E = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2} dx = -\int_{\frac{3}{2}}^1 \frac{dt}{t^2} = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dt}{t^2} = \left(-\frac{1}{t}\right) \Big|_1^{\frac{3}{2}} = -\left(\frac{2}{3}-1\right) = \frac{1}{3}$

f) Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$

Đổi cận:

♦ $x = 2 \Rightarrow t = \ln 2$

♦ $x = 4 \Rightarrow t = \ln 4$

$F = \int_2^4 \frac{\ln x + 1}{x \ln x} dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{t+1}{t} dt = \int_{\ln 2}^{\ln 4} \left(1 + \frac{1}{t}\right) dt = (t + \ln|t|) \Big|_{\ln 2}^{\ln 4} = (\ln 4 + \ln(\ln 4)) - (\ln 2 + \ln(\ln 2)) = \ln 4$

Bài 5. Tính các tích phân sau:

a) $A = \int_1^3 \frac{dx}{e^x - 1}$

b) $B = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

c) $C = \int_1^e \frac{\ln^7 x}{x} dx$

$$d) D = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$$

$$e) E = \int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$$

$$f) F = \int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$$

HD & Giải

$$a) A = \int_1^3 \frac{dx}{e^x - 1} = \int_1^3 \frac{e^x dx}{(e^x - 1)e^x}$$

$$\text{Đặt } t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$$

Đổi cận:

$$\blacklozenge x = 1 \Rightarrow t = e$$

$$\blacklozenge x = 3 \Rightarrow t = e^3$$

$$\text{Vậy } A = \int_1^3 \frac{e^x dx}{(e^x - 1)e^x} = \int_e^{e^3} \frac{dt}{(t-1)t} = \int_e^{e^3} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt = \left(\ln|t-1| - \ln|t| \right) \Big|_e^{e^3} = \ln(e^2 + e + 1) - 2$$

$$b) \text{ Đặt } t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$$

Đổi cận:

$$\blacklozenge x = 1 \Rightarrow t = \ln 1 = 0$$

$$\blacklozenge x = e \Rightarrow t = \ln e = 1$$

$$\text{Vậy } B = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$c) \text{ Đặt } t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$$

Đổi cận:

$$\blacklozenge x = 1 \Rightarrow t = \ln 1 = 0$$

$$\blacklozenge x = e \Rightarrow t = \ln e = 1$$

$$\text{Vậy } C = \int_1^e \frac{\ln^7 x}{x} dx = \int_0^1 t^7 dt = \frac{t^8}{8} \Big|_0^1 = \frac{1}{8}$$

$$d) \text{ Đặt } t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$$

Đổi cận:

$$\blacklozenge x = e \Rightarrow t = \ln e = 1$$

$$\blacklozenge x = e^2 \Rightarrow t = \ln e^2 = 2$$

$$\text{Vậy } D = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} = \int_1^2 \frac{dt}{t} = \ln|t| \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

$$e) \text{ Đặt } t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$$

Đổi cận:

$$\blacklozenge x = 1 \Rightarrow t = 0$$

$$\blacklozenge x = e \Rightarrow t = 1$$

$$\text{Vậy } E = \int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = \int_0^1 \sin t dt = -\cos x \Big|_0^1 = 1 - \cos 1$$

$$f) \text{ Đặt } t = \sqrt{1 + \ln x} \Rightarrow t^2 = 1 + \ln x \Rightarrow 2t dt = \frac{1}{x} dx$$

Đổi cận:

$$\blacklozenge x = 1 \Rightarrow t = 1$$

$$\blacklozenge x = e \Rightarrow t = \sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } F = \int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2 - 1}{t} 2t dt = 2 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1) dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{3}$$

Bài 6. Tính các tích phân sau:

$$a) A = \int_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x \ln x (\ln(\ln x))}$$

$$b) B = \int_1^e \frac{\ln ex}{1 + x \ln x} dx$$

$$c) C = \int_1^e \frac{1}{x \cos^2(1 + \ln x)} dx$$

$$d) D = \int_0^1 \frac{x^2 + e^x + 2x^2 e^x}{1 + 2e^x} dx$$

$$e) E = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2\sin^2 x}{1 + \sin 2x} dx$$

$$f) F = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{1 + \cos 3x} dx$$

HD Giải

a) Đặt $t = \ln(\ln x) \Rightarrow dt = \frac{1}{x \ln x} dx$

Đổi cận: $\diamond x = e^2 \Rightarrow t = \ln 2$

$\diamond x = e^3 \Rightarrow t = \ln 3$

Vậy $A = \int_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)} = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dt}{t} = \ln \left| t \right|_{\ln 2}^{\ln 3} = \ln \frac{3}{2}$

b) $B = \int_1^e \frac{\ln ex}{1+x \ln x} dx = \int_1^e \frac{1+\ln x}{1+x \ln x} dx$

Đặt $t = 1+x \ln x \Rightarrow dt = (1+\ln x) dx$

Đổi cận: $\diamond x = 1 \Rightarrow t = 1$

$\diamond x = e \Rightarrow t = 1+e$

Vậy $B = \int_1^{1+e} \frac{1+\ln x}{1+x \ln x} dx = \int_1^{1+e} \frac{dt}{t} = \ln \left| t \right|_1^{1+e} = \ln(1+e)$

c) Đặt $t = 1+\ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$

Đổi cận: $\diamond x = 1 \Rightarrow t = 1$

$\diamond x = e \Rightarrow t = 2$

Vậy $C = \int_1^e \frac{1}{x \cos^2(1+\ln x)} dx = \int_1^2 \frac{1}{\cos^2 t} dt = \tan t \Big|_1^2 = \tan 2 - \tan 1$

d) $D = \int_0^1 \frac{x^2 + e^x + 2x^2 e^x}{1+2e^x} dx = D = \int_0^1 \frac{x^2(1+2e^x) + e^x}{1+2e^x} dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 \frac{e^x}{1+2e^x} dx$

$\diamond \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

$\diamond \int_0^1 \frac{e^x}{1+2e^x} dx$. Đặt $t = 1+2e^x \Rightarrow dt = 2e^x dx \Rightarrow e^x dx = \frac{1}{2} dt$

Đổi cận: $\diamond x = 0 \Rightarrow t = 3$

$\diamond x = e \Rightarrow t = 1+2e$

Do đó: $\int_0^1 \frac{e^x}{1+2e^x} dx = \frac{1}{2} \int_3^{1+2e} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln \left| t \right|_3^{1+2e} = \frac{1}{2} \ln(1+2e) - \frac{1}{2} \ln 3 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+2e}{3}$

Vậy $D = \int_0^1 \frac{x^2 + e^x + 2x^2 e^x}{1+2e^x} dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+2e}{3}$

e) $E = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1+\sin 2x} dx$

Đặt $t = 1+\sin 2x \Rightarrow dt = 2 \cos 2x dx \Rightarrow \cos 2x dx = \frac{1}{2} dt$

Đổi cận: $\diamond x = 0 \Rightarrow t = 1$

$\diamond x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 2$

Vậy $E = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1+\sin 2x} dx = \int_1^2 \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} \ln \left| t \right|_1^2 = \frac{1}{2} \ln 2$

f) $F = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{1+\cos 3x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin 3x}{1+\cos 3x} dx$

Đặt $t = 1+\cos 3x \Rightarrow dt = -3 \sin 3x dx \Rightarrow \sin 3x dx = -\frac{1}{3} dt$

Đổi cận: $\diamond x = 0 \Rightarrow t = 2$

$$\diamond x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = 1$$

$$\text{Vậy } F = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin 3x}{1 + \cos 3x} dx = -\int_2^1 \frac{dt}{3t} = \int_1^2 \frac{dt}{3t} = \frac{1}{3} \ln |t| \Big|_1^2 = \frac{1}{3} \ln 2$$

Bài 7. Tính các tích phân sau:

$$\text{a) } A = \int_1^e \frac{\ln x dx}{x(2 + \ln x)^2}$$

$$\text{b) } B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$$

$$\text{c) } C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin^3 x dx$$

$$\text{d) } D = \int_0^{\pi} \sin^5 x dx$$

$$\text{e) } E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$$

$$\text{f) } F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$$

HD & Giải

$$\text{a) Đặt } t = 2 + \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$$

$$\text{Đổi cận: } \diamond x = 1 \Rightarrow t = 2$$

$$\diamond x = e \Rightarrow t = 3$$

$$\text{Vậy } A = \int_1^e \frac{\ln x dx}{x(2 + \ln x)^2} = \int_2^3 \frac{(t-2) dt}{t^2} = \int_2^3 \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} \right) dt = \left(\ln |t| + \frac{2}{t} \right) \Big|_2^3 = -\frac{1}{3} + \ln \frac{3}{2}$$

$$\text{b) Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$$

$$\text{Đổi cận: } \diamond x = 0 \Rightarrow t = 0$$

$$\diamond x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$$

$$\text{Vậy } B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\text{c) } C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x (1 - \cos^2 x) \sin x dx$$

$$\text{Đặt } t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$$

$$\text{Đổi cận: } \diamond x = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$\diamond x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$$

$$\text{Vậy } C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x (1 - \cos^2 x) \sin x dx = -\int_1^0 t^5 (1 - t^2) dt = \int_0^1 t^5 (1 - t^2) dt = \left(\frac{t^6}{6} - \frac{t^8}{8} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{24}$$

$$\text{d) } D = \int_0^{\pi} \sin^5 x dx = \int_0^{\pi} \sin^4 x \sin x dx = \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 x)^2 \sin x dx$$

$$\text{Đặt } t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$$

$$\text{Đổi cận: } \diamond x = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$\diamond x = \pi \Rightarrow t = -1$$

$$\text{Vậy } D = \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 x)^2 \sin x dx = -\int_1^{-1} (1 - t^2)^2 dt = \int_{-1}^1 (1 - 2t^2 + t^4) dt = \left(t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{16}{15}$$

$$\text{e) } E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \cos x dx$$

$$\text{Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$$

$$\text{Đổi cận: } \diamond x = 0 \Rightarrow t = 0$$

$$\diamond x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$$

$$\text{Vậy } E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \int_0^1 (1 - t^2) dt = \left(t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } F &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 - 4\cos 2x + \cos 4x) dx = \frac{1}{8} \left(3x - 2\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{16} \end{aligned}$$

Bài 8. Tính các tích phân sau:

$$\text{a) } A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x - 1) \cos^2 x dx$$

$$\text{b) } B = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx$$

$$\text{c) } C = \int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{1}{\cos^2 3x (1 + \tan 3x)} dx$$

$$\text{d) } D = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)}{\sin 2x + 2(1 + \sin x + \cos x)} dx$$

$$\text{e) } E = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin 2x} dx$$

$$\text{f) } F = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\sqrt{1 + 4\sin 3x} \cos 3x dx$$

HD & Giải

$$\text{a) } A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x - 1) \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = I + J$$

$$\diamond I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx$$

$$\text{Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$$

$$\text{Đổi cận: } \diamond x = 0 \Rightarrow t = 0$$

$$\diamond x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$$

$$\text{Do đó: } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx = \int_0^1 (1 - t^2)^2 dt = t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{8}{15}$$

$$\diamond J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{8}{15} - \frac{\pi}{4}$$

$$\text{b) } B = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{(1 - \tan^2 x) \cos^2 x} dx$$

$$\text{Đặt } t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$\text{Đổi cận: } \diamond x = 0 \Rightarrow t = 0$$

$$\diamond x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Vậy } B = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{(1 - \tan^2 x) \cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{t^4}{1 - t^2} dt = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left[-t^2 - 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \right) \right] dt$$

$$= \left(-\frac{1}{3}t^3 - 1 + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| \right) \bigg|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{10\sqrt{3}}{27}$$

c) Đặt $t = 1 + \tan 3x \Rightarrow dt = \frac{3}{\cos^2 3x} dx$

Đổi cận: $\diamond x = 0 \Rightarrow t = 1$

$\diamond x = \frac{\pi}{12} \Rightarrow t = 2$

Vậy $C = \int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{1}{\cos^2 3x(1 + \tan 3x)} dx = \int_1^2 \frac{dt}{3t} = \frac{1}{3} \ln |t| \bigg|_1^2 = \frac{1}{3} \ln 2$

d) $D = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2x + 2(1 + \sin x + \cos x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x)}{\sin 2x + 2 + 2(\sin x + \cos x)} dx$

Đặt $t = \sin x + \cos x \Rightarrow dt = (\cos x - \sin x) dx$

Đổi cận: $\diamond x = 0 \Rightarrow t = 1$

$\diamond x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \sqrt{2}$

Mặt khác: $t = \sin x + \cos x \Leftrightarrow t^2 = 1 + \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$

Vậy $D = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x)}{\sin 2x + 2 + 2(\sin x + \cos x)} dx = -\frac{\sqrt{2}}{2} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{(t^2 - 1) + 2 + 2t} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{(t+1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{t+1} \bigg|_1^{\sqrt{2}} = \frac{4 - 3\sqrt{2}}{4}$

e) $E = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin 2x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2 \sin x \cos x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2 \tan x \cos^2 x} dx$

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$

Đổi cận: $\diamond x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \sqrt{3}$

$\diamond x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1$

Vậy $E = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2 \tan x \cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln |t| \bigg|_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \ln \sqrt{3}$

f) Đặt $t = 1 + 4 \sin 3x \Rightarrow dt = 12 \cos 3x dx$

Đổi cận: $\diamond x = 0 \Rightarrow t = 1$

$\diamond x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = 5$

Vậy $F = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\sqrt{1 + 4 \sin 3x} \cos 3x dx = \frac{1}{6} \int_1^5 \sqrt{t} dt = \frac{1}{6} \int_1^5 t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{9} t\sqrt{t} \bigg|_1^5 = \frac{1}{9} (5\sqrt{5} - 1)$

Bài 9. Tính các tích phân sau:

a) $A = \int_0^1 x\sqrt{x^2 + 1} dx$

b) $B = \int_0^1 x^3 \sqrt{x^4 + 1} dx$

c) $C = \int_0^1 x^3 \sqrt{x^2 + 1} dx$

d) $D = \int_0^1 x\sqrt{x+1} dx$

e) $E = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$

f) $F = \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} dx$

HD & Giải

a) Đặt $t = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow t^2 = x^2 + 1 \Rightarrow t dt = x dx$

Đổi cận: $\diamond x = 0 \Rightarrow t = 1$

$$\diamond x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } A = \int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx = \int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}-1}{3}$$

b) Đặt $t = \sqrt[3]{x^4+1} \Rightarrow t^3 = x^4+1 \Rightarrow 3t^2 dt = 4x^3 dx \Rightarrow x^3 dx = \frac{3}{4} t^2 dt$ Đổi cận: $\diamond x = 0 \Rightarrow t = 1$

$$\diamond x = 1 \Rightarrow t = \sqrt[3]{2}$$

$$\text{Vậy } B = \int_0^1 x^3 \sqrt[3]{x^4+1} dx = \frac{3}{4} \int_1^{\sqrt[3]{2}} t \cdot t^2 dt = \frac{3}{4} \cdot \frac{t^4}{4} \Big|_1^{\sqrt[3]{2}} = \frac{3(2\sqrt[3]{2}-1)}{16}$$

c) $C = \int_0^1 x^3 \sqrt{x^2+1} dx = \int_0^1 x^2 \sqrt{x^2+1} x dx$

Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow x^2 = t^2-1 \Rightarrow t dt = x dx$ Đổi cận: $\diamond x = 0 \Rightarrow t = 1$

$$\diamond x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } C = \int_0^1 x^2 \sqrt{x^2+1} x dx = \int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1) t \cdot t dt = \int_1^{\sqrt{2}} (t^4-t^2) dt = \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+2}{15}$$

d) Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow x = t^2-1 \Rightarrow 2t dt = dx$ Đổi cận: $\diamond x = 0 \Rightarrow t = 1$

$$\diamond x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } D = \int_0^1 x\sqrt{x+1} dx = \int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1) t \cdot 2t dt = 2 \int_1^{\sqrt{2}} (t^4-t^2) dt = \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}+4}{15}$$

e) Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow t dt = x dx$ Đổi cận: $\diamond x = 0 \Rightarrow t = 1$

$$\diamond x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } E = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t dt}{t} = \int_1^{\sqrt{2}} dt = \sqrt{2}-1$$

f) Đặt $t = \sqrt{x-1} \Rightarrow x^2 = (t+1)^2 \Rightarrow dx = 2(t+1) dx$ Đổi cận: $\diamond x = 4 \Rightarrow t = 1$

$$\diamond x = 9 \Rightarrow t = 2$$

$$\text{Vậy } F = \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} dx = 2 \int_1^2 \frac{(t+1) \cdot (t+1)}{t} dt = 2 \int_1^2 \left(t + 2 + \frac{1}{t} \right) dt = \left(\frac{t^2}{2} + 2t + \ln|t| \right) \Big|_1^2 = 7 + 2 \ln 2$$

Bài 10. Tính các tích phân sau:

a) $A = \int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}} dx$

b) $B = \int_0^{\frac{7}{3}} \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$

c) $C = \int_0^1 x^2 \sqrt[8]{1-x} dx$

d) $D = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} dx$

e) $E = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx$

f) $F = \int_{-2}^2 |x-1| dx$

HD & Giải

a) Đặt $t = \sqrt{x^3+2} \Rightarrow t^2 = x^3+2 \Rightarrow 2t dt = 3x^2 dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{2}{3} t dt$ Đổi cận: $\diamond x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{3}$

$$\diamond x = 2 \Rightarrow t = \sqrt{10}$$

$$\text{Vậy } A = \int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}} dx = \frac{2}{3} \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{10}} \frac{t dt}{t} = \frac{2}{3} t \Big|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{10}} = \frac{2}{3} (\sqrt{10}-\sqrt{3})$$

b) Đặt $t = \sqrt[3]{3x+1} \Rightarrow t^3 = 3x+2 \Rightarrow x = \frac{t^3-2}{3} \Rightarrow dx = t^2 dt$ Đổi cận: $\blacklozenge x=1 \Rightarrow t=1$

$\blacklozenge x = \frac{7}{3} \Rightarrow t=2$

Vậy $B = \int_0^{\frac{7}{3}} \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx = \int_1^2 \frac{\frac{t^3-1}{3}+1}{t} t^2 dt = \frac{1}{3} \int_1^2 (t^4+2t) dt = \frac{1}{3} \left(\frac{t^5}{5} + t^2 \right) \Big|_1^2 = \frac{46}{15}$

c) Đặt $t = 1-x \Rightarrow x = 1-t \Rightarrow dx = -dt$ Đổi cận: $\blacklozenge x=0 \Rightarrow t=1$
 $\blacklozenge x=1 \Rightarrow t=0$

Vậy $C = \int_0^1 x^2 \sqrt[8]{1-x} dx = -\int_1^0 (1-t)^2 \sqrt[8]{t} dt = \int_0^1 (1-2t+t^2) t^{\frac{1}{8}} dt = \int_0^1 \left(t^{\frac{1}{8}} - 2t^{\frac{9}{8}} + t^{\frac{17}{8}} \right) dt$

$= \left(\frac{t^{\frac{9}{8}}}{\frac{9}{8}} - 2 \frac{t^{\frac{17}{8}}}{\frac{17}{8}} + \frac{t^{\frac{25}{8}}}{\frac{25}{8}} \right) \Big|_0^1 = \frac{1024}{3825}$

d) Đặt $t = \sqrt{e^x-1} \Rightarrow t^2 = e^x-1 \Rightarrow e^x = t^2+1 \Rightarrow 2t dt = e^x dx$ Đổi cận: $\blacklozenge x=0 \Rightarrow t=0$
 $\blacklozenge x = \ln 2 \Rightarrow t=1$

Do đó: $D = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} dx = \int_0^1 \frac{t 2t}{t^2+1} dt = 2 \int_0^1 \frac{t}{t^2+1} dt = 2 \int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = 2 - 2I$

$\blacklozenge I = \int_0^1 \frac{dt}{t^2+1}$. Đặt $t = \tan u, \left[t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \right] \Rightarrow dt = (1+\tan^2 u) du \Rightarrow dt = (1+t^2) du$

Đổi cận: $\blacklozenge t=0 \Rightarrow u=0, \blacklozenge t=1 \Rightarrow u = \frac{\pi}{4}$

$I = \int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} du = u \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$. Vậy $D = 2 - 2 \left(\frac{\pi}{4} \right) = 2 - \frac{\pi}{2}$

e) Đặt $t = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt$ Đổi cận: $\blacklozenge x=1 \Rightarrow t=1$

$\blacklozenge x=2 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

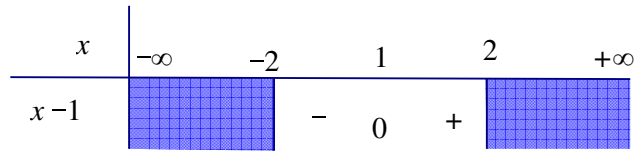
$E = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}{\frac{1}{t^4}} \left(-\frac{1}{t^2} \right) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 t \sqrt{1+t^2} dt$

Đặt $u = \sqrt{1+t^2} \Rightarrow u^2 = 1+t^2 \Rightarrow u du = t dt$ Đổi cận: $\blacklozenge t=1 \Rightarrow u = \sqrt{2}$

$\blacklozenge t = \frac{1}{2} \Rightarrow u = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Vậy $E = \int_{\frac{1}{2}}^1 t \sqrt{1+t^2} dt = \int_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^{\sqrt{2}} u^2 du = \frac{u^3}{3} \Big|_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{1}{3} \left[(\sqrt{2})^3 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^3 \right] = \frac{1}{3} \left(\frac{-5\sqrt{5}+16\sqrt{2}}{8} \right)$

f) Dựa vào bảng xét dấu:



Ta có: $F = \int_{-2}^2 |x-1| dx = -\int_{-2}^1 (x-1) dx + \int_1^2 (x-1) dx = -\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_{-2}^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^2 = 5$

Dạng 3. Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến (Loại 2)

Phương pháp: Tính $I = \int_a^b f(x) dx$

- ♦ Đặt $x = \phi(t) \Rightarrow dx = \phi'(t) dt$
- ♦ Với ϕ là hàm số có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]$, trong đó $a = \phi(\alpha), b = \phi(\beta)$
- ♦ Khi đó: $I = \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\phi(t)] \phi'(t) dt$

1. Các dạng cơ bản: ($k > 0$)

- a) $\int_a^b \sqrt{1-x^2} dx$. Đặt $x = \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ Mở rộng: $\int_a^b \sqrt{k^2-x^2} dx$. Đặt $x = k \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
- b) $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$. Đặt $x = \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ Mở rộng: $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{k^2-x^2}} dx$. Đặt $x = k \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
- c) $\int_a^b \frac{1}{x^2+1} dx$. Đặt $x = \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

- Mở rộng: ♦ $\int_a^b \frac{1}{x^2+k^2} dx$. Đặt $x = k \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
- ♦ $\int_a^b \frac{1}{(\alpha x + \beta)^2 + k^2} dx$. Đặt $\alpha x + \beta = k \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
- ♦ $\int_a^b \frac{1}{f^2(x) + k^2} dx$. Đặt $f(x) = k \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

2. Chú ý:

- ♦ $x = \phi(t) \Rightarrow dx = \phi'(t) dt$
- ♦ $f(x) = \phi(t) \Rightarrow f'(x) dx = \phi'(t) dt$
- ♦ Để có kết quả nhanh, ta có thể dùng các công thức:

$$\begin{array}{ll} 1. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C & 2. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a} \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0) \\ 3. \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C & 4. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad (a > 0) \end{array}$$

Với

♦ $\arcsin 0 = 0$	♦ $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$	♦ $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$
♦ $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$	♦ $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$	♦ $\arctan 0 = 0$
♦ $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$	♦ $\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$	♦ $\arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$

Bài 11. Tính các tích phân sau:

a) $A = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$	b) $B = \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$	c) $C = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
d) $D = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$	e) $E = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$	f) $F = \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+4}$

HD & Giải

a) $A = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$. Đặt $x = \sin t, \left(t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \right) \Rightarrow dx = \cos t dt$ Đổi cận: ♦ $x = 0 \Rightarrow t = 0$

♦ $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

Vậy $A = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \text{ (vì trên đoạn } \left[0; \frac{\pi}{2} \right] \text{ thì } \cos t \geq 0)$$

b) $B = \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$. Đặt $x = 2 \sin t, \left(t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \right) \Rightarrow dx = 2 \cos t dt$ Đổi cận: ♦ $x = 0 \Rightarrow t = 0$

♦ $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$

Vậy $B = \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} |\cos t| \cos t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t dt$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

c) $C = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$. Đặt $x = \sin t, \left(t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \right) \Rightarrow dx = \cos t dt$ Đổi cận: ♦ $x = 0 \Rightarrow t = 0$

♦ $x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$

Vậy $C = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t dt}{|\cos t|} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = t \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}$

d) $D = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$. Đặt $x = 2 \sin t, \left(t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \right) \Rightarrow dx = 2 \cos t dt$ Đổi cận: ♦ $x = 0 \Rightarrow t = 0$

♦ $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$

Vậy $D = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2 \cos t dt}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2 \cos t dt}{2 \cos t} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = t \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}$

e) $E = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$. Đặt $x = \tan t, \left(t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \right) \Rightarrow dx = (1 + \tan^2 t) dt$ Đổi cận: ♦ $x = 0 \Rightarrow t = 0$

♦ $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$

$$\text{Vậy } E = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + \tan^2 t) dt}{\tan^2 t + 1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{f) } F = \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 + 4}. \text{ Đặt } x = 2 \tan t, \left(t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \right) \Rightarrow dx = 2(1 + \tan^2 t) dt \quad \text{Đổi cận: } \blacklozenge x = 0 \Rightarrow t = 0$$

$$\blacklozenge x = 2\sqrt{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Vậy } E = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2(1 + \tan^2 t) dt}{4(\tan^2 t + 1)} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} dt = \frac{1}{2} t \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6}$$

Bài 12. Tính các tích phân sau:

$$\text{a) } A = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$

$$\text{b) } B = \int_0^1 \frac{x^3}{x^8 + 1} dx$$

HD & Giải

$$\text{a) } A = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{(x+1)^2 + 1}. \text{ Đặt } x+1 = \tan t, \left(t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \right) \Rightarrow dx = (1 + \tan^2 t) dt$$

$$\text{Đổi cận: } \blacklozenge x = -1 \Rightarrow t = 0$$

$$\blacklozenge x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Vậy } A = \int_{-1}^0 \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + \tan^2 t) dt}{\tan^2 t + 1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{b) } B = \int_0^1 \frac{x^3}{x^8 + 1} dx = \int_0^1 \frac{x^3}{(x^4)^2 + 1} dx.$$

$$\text{Đặt } x^4 = \tan t, \left(t \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right) \right) \Rightarrow 4x^3 dx = (1 + \tan^2 t) dt \Rightarrow x^3 dx = \frac{1}{4}(1 + \tan^2 t) dt$$

$$\text{Đổi cận: } \blacklozenge x = 0 \Rightarrow t = 0, \blacklozenge x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Vậy } B = \int_0^1 \frac{x^3}{(x^4)^2 + 1} dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \tan^2 t}{1 + \tan^2 t} dt = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{1}{4} t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{16}$$

Dạng 4. Tính tích phân bằng phương pháp từng phần

Phương pháp:

1. Công thức tích phân từng phần

Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x).v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx \quad \text{Hay} \quad \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Lưu ý: Đặt $\begin{cases} u = f(x) & \Rightarrow du = f'(x)dx \\ dv = g(x)dx & \Rightarrow v = \int g(x)dx = G(x) + C \end{cases}$. Ta thường chọn $C = 0 \Rightarrow v = G(x)$

2. Các dạng cơ bản: Cho $P(x)$ là một đa thức

$$\begin{aligned} 1. \int P(x) \sin(ax+b) dx. & \text{ Đặt } \begin{cases} u = P(x) \\ dv = \sin(ax+b) dx \end{cases} & 2. \int P(x) \cos(ax+b) dx. & \text{ Đặt } \begin{cases} u = P(x) \\ dv = \cos(ax+b) dx \end{cases} \end{aligned}$$

3. $\int P(x)e^{ax+b} dx$. Đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax+b} dx \end{cases}$

4. $\int P(x)\ln(ax+b)dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln(ax+b) \\ dv = P(x)dx \end{cases}$

5. $\int e^{ax+b} \sin(Ax+B)dx$ hoặc $\int e^{ax+b} \cos(Ax+B)dx$. Dùng nguyên hàm từng phần hai lần với $u = e^{ax+b}$

Chú ý: $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = g(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \int g(x)dx = G(x) + C \end{cases}$ và chọn $C = 0$

Bài 13. Tính các tích phân sau:

a) $A = \int_0^1 xe^x dx$

b) $B = \int_1^2 x \ln x dx$

c) $C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$

d) $D = \int_1^2 x^5 \ln x dx$

e) $E = \int_0^1 (x+1)e^x dx$

f) $F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$

HD & Giải

a) $A = \int_0^1 xe^x dx$. ♦ Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

Vậy $A = \int_0^1 xe^x dx = \left(xe^x \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = \left(xe^x \right) \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1 = 1$

b) $B = \int_1^2 x \ln x dx$. ♦ Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$$dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

Vậy $B = \int_1^2 x \ln x dx = \left(\frac{x^2}{2} \ln x \right) \Big|_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x dx = \left(\frac{x^2}{2} \ln x \right) \Big|_1^2 - \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$

c) $C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$. ♦ Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$

$$dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x$$

Vậy $C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = \left(-x \cos x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \left(-x \cos x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

d) $D = \int_1^2 x^5 \ln x dx$. ♦ Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$$dv = x^5 dx \Rightarrow v = \frac{x^6}{6}$$

Vậy $D = \int_1^2 x^5 \ln x dx = \left(\frac{x^6 \ln x}{6} \right) \Big|_1^2 - \frac{1}{6} \int_1^2 x^5 dx = \left(\frac{x^6 \ln x}{6} \right) \Big|_1^2 - \frac{1}{36} x^6 \Big|_1^2 = \frac{32}{3} \ln 2 - \frac{7}{4}$

e) $E = \int_0^1 (x+1)e^x dx$. ♦ Đặt $u = x+1 \Rightarrow du = dx$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

$$\text{Vậy } E = \int_0^1 (x+1)e^x dx = \left((x+1)e^x \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = \left((x+1)e^x \right) \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1 = e$$

$$\text{f) } F = \int_0^\pi e^x \cos x dx. \quad \blacklozenge \text{ Đặt } u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

$$\text{Do vậy } F = \int_0^\pi e^x \cos x dx = \left(e^x \cos x \right) \Big|_0^\pi + \int_0^\pi e^x \sin x dx = -1 - e^\pi + I$$

$$\blacklozenge I = \int_0^\pi e^x \sin x dx. \quad \blacklozenge \text{ Đặt } u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

$$\text{Do đó: } I = \int_0^\pi e^x \sin x dx = \left(e^x \sin x \right) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos x dx = -F$$

$$\text{Như vậy: } F = -1 - e^\pi - F \Rightarrow F = -\frac{1+e^\pi}{2}$$

Bài 14. Tính các tích phân sau:

$$\text{a) } A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$$

$$\text{b) } B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x dx$$

$$\text{c) } C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$$

$$\text{d) } D = \int_1^e x^2 \ln x dx$$

$$\text{e) } E = \int_{-1}^1 (x+3)e^x dx$$

$$\text{f) } F = \int_1^2 (2x-1) \ln x dx$$

HD & Giải

$$\text{a) } A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx. \quad \blacklozenge \text{ Đặt } u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x$$

$$\text{Vậy } A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \left(x \sin x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \left(x \sin x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\text{b) } B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x dx. \quad \blacklozenge \text{ Đặt } u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \cos 2x dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\text{Vậy } B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x dx = \left(\frac{1}{2} x \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx = \left(\frac{1}{2} x \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

$$\text{c) } C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx. \quad \blacklozenge \text{ Đặt } u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$$

$$dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x$$

$$\text{Ta có: } C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx = \left(x^2 \sin x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = \left(x^2 \sin x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2I = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

(vì $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = 1$ bài 13c))

d) $D = \int_1^e x^2 \ln x dx$. ♦ Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$$dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3}$$

Vậy $D = \int_1^e x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx = \left(\frac{1}{3} x^3 \ln x \right) \Big|_1^e - \left(\frac{1}{9} x^3 \right) \Big|_1^e = \frac{2e^3 + 1}{9}$

e) $E = \int_{-1}^1 (x+3)e^x dx$. ♦ Đặt $u = x+3 \Rightarrow du = dx$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

Vậy $E = \int_{-1}^1 (x+3)e^x dx = (x+3)e^x \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^x dx = (x+3)e^x \Big|_{-1}^1 - e^x \Big|_{-1}^1 = \frac{3e^2 - 1}{e}$

f) $F = \int_1^2 (2x-1) \ln x dx$. ♦ Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$$dv = (2x-1) dx \Rightarrow v = x^2 - x$$

Vậy $F = \int_1^2 (2x-1) \ln x dx = \left((x^2 - x) \ln x \right) \Big|_1^2 - \int_1^2 (x-1) dx = \left((x^2 - x) \ln x \right) \Big|_1^2 - \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - \frac{1}{2}$

Bài 15. Tính các tích phân sau:

a) $A = \int_0^1 (2x+2)e^x dx$

b) $B = \int_1^e x \ln x dx$

c) $C = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^3} dx$

d) $D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$

e) $E = \int_2^5 2x \ln(x-1) dx$

f) $F = \int_1^e (\ln x)^2 dx$

HD & Giải

a) $A = \int_0^1 (2x+2)e^x dx$. ♦ Đặt $u = 2x+2 \Rightarrow du = 2 dx$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

Vậy $A = \int_0^1 (2x+2)e^x dx = (2x+2)e^x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 e^x dx = (2x+2)e^x \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1 = 2e$

b) $B = \int_1^e x \ln x dx$. ♦ Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$$dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

Vậy $B = \int_1^e x \ln x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x \Big|_1^e - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{e^2 + 1}{4}$

c) $C = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^3} dx$. ♦ Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$$dv = \frac{1}{x^3} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2x^2}$$

$$\text{Vậy } C = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^3} dx = -\frac{\ln x}{2x^2} \Big|_1^2 + \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} \Big|_1^2 - \frac{1}{4x^2} \Big|_1^2 = \frac{3-2\ln 2}{16}$$

d) $D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$. ♦ Đặt $u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$

$$dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x$$

Ta có: $D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx = \left(-x^2 \cos x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = 2I = \pi - 2$

❖ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \frac{\pi}{2} - 1$ (Xem câu 14a)).

e) $E = \int_2^5 2x \ln(x-1) dx$. ♦ Đặt $u = \ln(x-1) \Rightarrow du = \frac{1}{x-1} dx$

$$dv = 2x dx \Rightarrow v = x^2$$

Vậy $E = \int_2^5 2x \ln(x-1) dx = \left(x^2 \ln(x-1) \right) \Big|_2^5 - \int_2^5 \frac{x^2}{x-1} dx = 25 \ln 4 - \int_2^5 \left(x+1 + \frac{1}{x-1} \right) dx$
 $= 25 \ln 4 - \left(\frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| \right) \Big|_2^5 = 24 \ln 4 - \frac{27}{2}$

f) $F = \int_1^e (\ln x)^2 dx$. ♦ Đặt $u = (\ln x)^2 \Rightarrow du = \frac{2 \ln x}{x} dx$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

Ta có: $F = \int_1^e (\ln x)^2 dx = x (\ln x)^2 \Big|_1^e - 2 \int_1^e \ln x dx = e - 2J$

❖ $J = \int_1^e \ln x dx$. ♦ Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

Ta có: $J = \int_1^e \ln x dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = e - x \Big|_1^e = 1$. Vậy $F = e - 2J = e - 2.1 = e - 2$

Bài 16. Tính các tích phân sau:

a) $A = \int_1^3 \frac{3 + \ln x}{(x+1)^2} dx$

b) $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$

c) $C = \int_1^{e^{\pi}} \cos(\ln x) dx$

d) $D = \int_1^2 x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx$

e) $E = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \ln(\cos x) dx$

f) $F = \int_{e^2}^{e^3} \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$

Hướng dẫn giải

a) $A = \int_1^3 \frac{3 + \ln x}{(x+1)^2} dx$. ♦ Đặt $u = 3 + \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$$dv = \frac{dx}{(x+1)^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{x+1}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } A &= \int_1^3 \frac{3+\ln x}{(x+1)^2} dx = -\frac{3+\ln x}{x+1} \Big|_1^3 + \int_1^3 \frac{dx}{x(x+1)} = \frac{3-\ln 3}{4} + \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{3-\ln 3}{4} + \left(\ln|x| - \ln|x+1| \right) \Big|_1^3 = \frac{1}{4} \left(3 + \ln \frac{27}{16} \right) \end{aligned}$$

$$\text{b) } B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx.$$

$$\blacklozenge \text{ Đặt } u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$$

$$dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x$$

$$\text{Ta có: } B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = -e^x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = 1 + K$$

$$\blacklozenge K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx.$$

$$\blacklozenge \text{ Đặt } u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$$

$$dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x$$

$$\text{Vậy } K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = e^x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = e^{\frac{\pi}{2}} - B.$$

$$\text{Vậy } B = 1 + K = 1 + e^{\frac{\pi}{2}} - B \Rightarrow B = \frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$$

$$\text{c) } C = \int_1^{e^\pi} \cos(\ln x) dx.$$

$$\blacklozenge \text{ Đặt } u = \cos(\ln x) \Rightarrow du = -\frac{\sin(\ln x)}{x} dx$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$\text{Ta có: } C = \int_1^{e^\pi} \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) \Big|_1^{e^\pi} + \int_1^{e^\pi} \sin(\ln x) dx = -e^\pi - 1 + M$$

$$\blacklozenge M = \int_1^{e^\pi} \sin(\ln x) dx.$$

$$\blacklozenge \text{ Đặt } u = \sin(\ln x) \Rightarrow du = \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$\text{Ta có: } M = \int_1^{e^\pi} \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) \Big|_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi} \cos(\ln x) dx = -C$$

$$\text{Vậy } C = -e^\pi - 1 + M = -e^\pi - 1 - C \Rightarrow C = -\frac{e^\pi + 1}{2}$$

$$\text{d) } D = \int_1^2 x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx.$$

$$\blacklozenge \text{ Đặt } u = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \Rightarrow du = -\frac{1}{x(x+1)} dx$$

$$dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } D &= \int_1^2 x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^3}{3} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 + \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{x^2}{x+1} dx = \frac{8}{3} \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3} \\ &\quad + \int_1^2 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{8}{3} \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3} \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| \right) \Big|_1^2 = 3 \ln 3 - \frac{10}{3} \ln 2 + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\text{e) } E = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \ln(\cos x) dx. \quad \blacklozenge \text{ Đặt } u = \ln(\cos x) \Rightarrow du = -\frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x$$

$$\text{Vậy } E = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \ln(\cos x) dx = -\cos x \ln(\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = -\cos x \ln(\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}(\ln 2 - 1)$$

$$\text{f) } F = \int_{e^2}^{e^3} \frac{\ln(\ln x)}{x} dx. \quad \blacklozenge \text{ Đặt } u = \ln(\ln x) \Rightarrow du = \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$dv = \frac{1}{x} dx \Rightarrow v = \ln x$$

$$\text{Vậy } F = \int_{e^2}^{e^3} \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = \ln x \ln(\ln x) \Big|_{e^2}^{e^3} - \int_{e^2}^{e^3} \frac{1}{x} dx = \ln x \ln(\ln x) \Big|_{e^2}^{e^3} - \ln |x| \Big|_{e^2}^{e^3} = 3 \ln 3 - 2 \ln 2 - 1$$

Bài 17. Tính các tích phân sau:

$$\text{a) } A = \int_1^2 x \log_2 x dx$$

$$\text{b) } B = \int_0^1 \frac{(x^2 + 1)e^x}{(x+1)^3} dx$$

$$\text{c) } C = \int_0^1 \frac{(x^2 + 1)e^x}{(x+1)^2} dx$$

$$\text{d) } D = \int_0^{\ln 2} x e^{-2x} dx$$

$$\text{e) } E = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx$$

$$\text{f) } F = \int_1^e \frac{1+x \ln x}{x} e^x dx$$

HD & Giải

$$\text{a) } A = \int_1^2 x \log_2 x dx = \frac{1}{\ln 2} \int_1^2 x \ln x dx. \quad \blacklozenge \text{ Đặt } u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{1}{\ln 2} \int_1^2 x \ln x dx = \frac{1}{\ln 2} \left(\frac{x^2}{2} \ln x \right) \Big|_1^2 - \frac{1}{2 \ln 2} \int_1^2 x dx = \frac{1}{\ln 2} \left(\frac{x^2}{2} \ln x \right) \Big|_1^2 - \frac{1}{2 \ln 2} \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = 2 - \frac{3}{4 \ln 2}$$

$$\text{b) } B = \int_0^1 \frac{(x^2 + 1)e^x}{(x+1)^3} dx. \quad \blacklozenge \text{ Đặt } u = (x^2 + 1)e^x \Rightarrow du = (x+1)^2 e^x dx$$

$$dv = \frac{dx}{(x+1)^3} \Rightarrow v = -\frac{1}{2(x+1)^2}$$

$$\text{Vậy } B = \int_0^1 \frac{(x^2 + 1)e^x}{(x+1)^3} dx = -\frac{(x^2 + 1)e^x}{2(x+1)^2} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^x dx = -\frac{(x^2 + 1)e^x}{2(x+1)^2} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} e^x \Big|_0^1 = \frac{1}{4} e$$

$$\text{c) } C = \int_0^1 \frac{(x^2 + 1)e^x}{(x+1)^2} dx. \quad \blacklozenge \text{ Đặt } u = (x^2 + 1)e^x \Rightarrow du = (x+1)^2 e^x dx$$

$$dv = \frac{dx}{(x+1)^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{x+1}$$

$$\text{Ta có: } C = \int_0^1 \frac{(x^2 + 1)e^x}{(x+1)^2} dx = -\frac{(x^2 + 1)e^x}{x+1} \Big|_0^1 + \int_0^1 (x+1)e^x dx = -e + 1 + I$$

$$\diamond I = \int_0^1 (x+1)e^x dx.$$

$$\diamond \text{Đặt } u = x+1 \Rightarrow du = dx$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

$$\text{Do đó: } I = \int_0^1 (x+1)e^x dx = (x+1)e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = (x+1)e^x \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1 = e$$

$$\text{Vậy } C = -e+1+I = -e+1+e = 1$$

$$\text{d) } D = \int_0^{\ln 2} xe^{-2x} dx$$

$$\diamond \text{Đặt } u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = e^{-2x} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$$

$$\text{Vậy } D = \int_0^{\ln 2} xe^{-2x} dx = -\frac{1}{2}(xe^{-2x}) \Big|_0^{\ln 2} + \frac{1}{2} \int_0^{\ln 2} e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}(xe^{-2x}) \Big|_0^{\ln 2} - \frac{1}{4}e^{-2x} \Big|_0^{\ln 2} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4} - \frac{\ln 2}{2}\right)$$

$$\text{e) } E = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 e^{x+\frac{1}{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx = M + N.$$

$$\diamond M = \int_{\frac{1}{2}}^2 e^{x+\frac{1}{x}} dx.$$

$$\diamond \text{Đặt } u = e^{x+\frac{1}{x}} \Rightarrow du = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$\text{Do đó: } M = \int_{\frac{1}{2}}^2 e^{x+\frac{1}{x}} dx = xe^{x+\frac{1}{x}} \Big|_{\frac{1}{2}}^2 - \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx = xe^{x+\frac{1}{x}} \Big|_{\frac{1}{2}}^2 - N = \frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}} - N$$

$$\text{Vậy } E = M + N = \frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}} - N + N = \frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}$$

$$\text{f) } F = \int_1^e \frac{1+x \ln x}{x} e^x dx = \int_1^e \frac{e^x}{x} dx + \int_1^e e^x \ln x dx = K + L$$

$$\diamond K = \int_1^e \frac{e^x}{x} dx$$

$$\diamond \text{Đặt } u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$$

$$dv = \frac{1}{x} dx \Rightarrow v = \ln x$$

$$\text{Do đó: } K = \int_1^e \frac{e^x}{x} dx = e^x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e e^x \ln x dx = e^e - L$$

$$\text{Vậy } F = K + L = e^e - L + L = e^e$$

Dạng 5. Kết hợp giữa phương pháp đổi biến loại I và tích phân từng phần
Phương pháp: Vận dụng linh hoạt và thành thạo ở cả hai phương pháp trên.

Bài 18. Tính các tích phân sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } A = \int_1^e \left(2x - \frac{3}{x}\right) \ln x dx & \text{b) } B = \int_0^{\pi} (e^{\cos x} + x) \sin x dx & \text{c) } C = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin \sqrt{x} dx \\ \text{d) } D = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx & \text{e) } E = \int_0^{\pi} x \sin x \cos^2 x dx & \text{f) } F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \sin x \cos^3 x dx \end{array}$$

$$g) G = \int_0^{\ln 2} \frac{x}{e^x + e^{-x} + 2} dx$$

HD & Giải

$$a) A = \int_1^e \left(2x - \frac{3}{x} \right) \ln x dx = \int_1^e 2x \ln x dx - 3 \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = I - 3J$$

$$\diamond \text{ Tính } I = \int_1^e 2x \ln x dx.$$

$$\diamond \text{ Đặt } u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = 2x dx \Rightarrow v = x^2$$

$$\text{Ta có: } I = \int_1^e 2x \ln x dx = \left(x^2 \ln x \right) \Big|_1^e - \int_1^e x dx = \left(x^2 \ln x \right) \Big|_1^e - \frac{x^2}{2} \Big|_1^e = \frac{e^2 + 1}{2}$$

$$\diamond \text{ Tính } J = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx.$$

$$\diamond \text{ Đặt } t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$$

$$\diamond \text{ Đổi cận: } x = 1 \Rightarrow t = 0; x = e \Rightarrow t = 1$$

$$\text{Ta có: } J = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } A = I - 3J = \frac{e^2 + 1}{2} - \frac{3}{2} = \frac{e^2}{2} - 1$$

$$b) B = \int_0^{\pi} \left(e^{\cos x} + x \right) \sin x dx = \int_0^{\pi} e^{\cos x} \sin x dx + \int_0^{\pi} x \sin x dx = M + N$$

$$\diamond \text{ Tính } M = \int_0^{\pi} e^{\cos x} \sin x dx.$$

$$\diamond \text{ Đặt } t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$$

$$\diamond \text{ Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 1; x = \pi \Rightarrow t = -1$$

$$\text{Ta có: } M = \int_0^{\pi} e^{\cos x} \sin x dx = - \int_1^{-1} e^t dt = \int_{-1}^1 e^t dt = e^t \Big|_{-1}^1 = e - \frac{1}{e}$$

$$\diamond \text{ Tính } N = \int_0^{\pi} x \sin x dx.$$

$$\diamond \text{ Đặt } u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x$$

$$\text{Ta có: } N = \int_0^{\pi} x \sin x dx = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \sin x \Big|_0^{\pi} = \pi$$

$$\text{Vậy } B = M + N = e - \frac{1}{e} + \pi$$

$$c) C = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin \sqrt{x} dx.$$

$$\diamond \text{ Đặt } t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2t dt = dx$$

$$\diamond \text{ Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Do đó: } C = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin \sqrt{x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt = 2K$$

$$\diamond \text{ Tính } K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt$$

$$\diamond \text{ Đặt } u = t \Rightarrow du = dt$$

$$dv = \sin t dt \Rightarrow v = -\cos t$$

$$\text{Ta có: } K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt = -t \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t = -t \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\text{Vậy } C = 2K = 2.1 = 2$$

$$\text{d) } D = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx. \quad \blacklozenge \text{ Đặt } u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx \Rightarrow v = \tan x$$

$$\text{Ta có: } D = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - L$$

$$\blacklozenge \text{ Tính } L = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx \quad \blacklozenge \text{ Đặt } t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$$

$$\blacklozenge \text{ Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 1; x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ta có: } L = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} = -\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{t} = \ln \Big| t \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \ln 2$$

$$\text{Vậy } D = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - L = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \ln 2$$

$$\text{e) } E = \int_0^{\pi} x \sin x \cos^2 x dx. \quad \blacklozenge \text{ Đặt } u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \sin x \cos^2 x dx \Rightarrow v = \int \sin x \cos^2 x dx$$

$$\blacklozenge \text{ Tính } \int \sin x \cos^2 x dx. \quad \blacklozenge \text{ Đặt } t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$$

$$\int \sin x \cos^2 x dx = -\int t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + C. \text{ Chọn } C = 0 \Rightarrow v = -\frac{\cos^3 x}{3}$$

$$\text{Vậy } E = \int_0^{\pi} x \sin x \cos^2 x dx = -\frac{1}{3} \int_0^{\pi} x \cos^3 x + \frac{1}{3} \int_0^{\pi} \cos^3 x dx = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} P$$

$$\blacklozenge \text{ Tính } P = \int_0^{\pi} \cos^3 x dx = \int_0^{\pi} (1 - \sin^2 x) \cos x dx. \quad \blacklozenge \text{ Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$$

$$\blacklozenge \text{ Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \pi \Rightarrow t = 0$$

$$\text{Do đó: } P = \int_0^{\pi} (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \int_0^0 (1 - t^2) dt = 0$$

$$\text{Nư vậy: } E = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} P = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{f) } F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \sin x \cos^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \sin x \cos x \cos^2 x dx.$$

$$\text{Đặt } u = \cos^2 x \Rightarrow du = 2 \sin x \cos x dx \\ dv = e^{\sin^2 x} \sin x \cos x dx \Rightarrow v = \int e^{\sin^2 x} \sin x \cos x dx$$

❖ Tính $\int e^{\sin^2 x} \sin x \cos x dx$. ♦ Đặt $t = \sin^2 x \Rightarrow dt = 2 \sin x \cos x dx \Rightarrow \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} dt$

$$\int e^{\sin^2 x} \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{\sin^2 x} + C. \text{ Chọn } C = 0 \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{\sin^2 x}$$

$$\text{Vậy: } F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \sin x \cos x \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \cos^2 x e^{\sin^2 x} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \cos^2 x e^{\sin^2 x} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} e^{\sin^2 x} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{e}{2} - 1$$

$$g) G = \int_0^{\ln 2} \frac{x}{e^x + e^{-x} + 2} dx = \int_0^{\ln 2} \frac{x e^x}{(e^x + 1)^2} dx.$$

Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$

$$dv = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{e^x + 1}.$$

$$\text{Suy ra: } G = -\frac{x}{e^x + 1} \Big|_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx = -\frac{\ln 2}{3} + \int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx = -\frac{\ln 2}{3} + G_1$$

$$G_1 = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx. \text{ Đặt } t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}; x = 0 \Rightarrow t = 1, x = \ln 2 \Rightarrow t = 2$$

$$\text{Suy ra: } G_1 = \int_1^2 \frac{dt}{t(t+1)} = \int_1^2 \frac{dt}{t} - \int_1^2 \frac{dt}{t+1} = \ln t \Big|_1^2 - \ln(t+1) \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - \ln 3$$

$$\text{Vậy: } G = \frac{5}{3} \ln 2 - \ln 3.$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 19. Tính các tích phân sau:

$$a) A = \int_1^2 x^2 e^{x^3} dx$$

$$b) B = \int_1^3 \frac{1}{x} (\ln x)^2 dx$$

$$c) C = \int_0^{\sqrt{3}} x \sqrt{x^2 + 1} dx$$

$$d) D = \int_0^1 x^2 e^{3x^3} dx$$

$$e) E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx$$

$$f) F = \int_0^2 |x^2 - 1| dx$$

Bài 20. Tính các tích phân sau:

$$a) A = \int_0^{\pi} |\cos x| dx$$

$$b) B = \int_0^2 |1 - x| dx$$

$$c) C = \int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}}$$

$$d) D = \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$$

$$e) E = \int_{10}^{12} \frac{2x+1}{x^2+x-2} dx$$

$$f) F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos x} dx$$

Bài 21. Tính các tích phân sau:

$$a) A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1) \cos x dx$$

$$b) B = \int_0^{\pi} x^3 \sin x dx$$

$$c) C = \int_0^1 x \ln(1+x^2) dx$$

$$d) D = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$e) E = \int_2^3 [\ln(x-1) - \ln(x+1)] dx$$

$$f) F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \sin^2 x dx$$

Kết quả
Bài 19.

- a) $A = \int_1^2 x^2 e^{x^3} dx = \frac{e^8 - e}{3}$. **HD** đổi biến, đặt $t = x^3$
- b) $B = \int_1^3 \frac{1}{x} (\ln x)^2 dx = \frac{(\ln 3)^3}{3}$. **HD** đổi biến, đặt $t = \ln x$
- c) $C = \int_0^{\sqrt{3}} x \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{7}{3}$. **HD** đổi biến, đặt $t = x^2 + 1$
- d) $D = \int_0^1 x^2 e^{3x^3} dx = \frac{e^3 - 1}{9}$. **HD** đổi biến, đặt $t = 3x^3$
- e) $E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx = \ln 2$. **HD** đổi biến, đặt $t = 1 + \sin x$
- f) $F = \int_0^2 |x^2 - 1| dx = 2$. **HD** $F = \int_0^2 |x^2 - 1| dx = \int_0^1 (1 - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx$

Bài 20.

- a) $A = \int_0^{\pi} |\cos x| dx = 2$. **HD** $A = \int_0^{\pi} |\cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx$
- b) $B = \int_0^2 |1 - x| dx = 1$. **HD** $B = \int_0^2 |1 - x| dx = \int_0^1 (1 - x) dx + \int_1^2 (x - 1) dx$
- c) $C = \int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}} = 12$. **HD** $\sqrt{x+9} - \sqrt{x} = \frac{1}{9} (\sqrt{x+9} + \sqrt{x})$
- d) $D = \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx = 2 - \frac{2}{e}$. **HD** $D = \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx = \int_1^e \ln x dx - \int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x dx$. Nguyên hàm của $\ln x$ trên từng

khoảng xác định của nó là $x(\ln x - 1)$.

- e) $E = \int_{10}^{12} \frac{2x+1}{x^2+x-2} dx = \ln 77 - \ln 54$. **HD** đổi biến, đặt $t = x^2 + x - 2$
- f) $F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos x} dx = 1$. **HD** đổi biến, đặt $t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow dt = \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Bài 21.

- a) $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1) \cos x dx = \frac{\pi}{3}$. **HD** Phương pháp tích phân từng phần với $u = 2x-1, dv = \cos x dx$
- b) $B = \int_0^{\pi} x^3 \sin x dx = \pi^3 - 6\pi$. **HD** Phương pháp tích phân từng phần với $u = x^3, dv = \sin x dx$
- c) $C = \int_0^1 x \ln(1+x^2) dx = \ln 2 - \frac{1}{2}$. **HD** Trước hết đổi biến với $t = 1+x^2$.
- $C = \int_0^1 x \ln(1+x^2) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \ln t dt$. Sau đó sử dụng tích phân từng phần với $u = \ln t, dv = dt$

d) $D = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{3}{4} \pi - \ln(7 + 4\sqrt{3})$. **HD** Trước tiên sử dụng tích phân từng phần với

$$u = x, dv = \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx. \text{ Tính } \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{\cos x}.$$

Khi đó $D = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{x}{\cos x} \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} = \frac{x}{\cos x} \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} - K$. Tính $K = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x}$ bằng phương pháp đổi

biến với $t = \sin x$.

e) $E = \int_2^3 [\ln(x-1) - \ln(x+1)] dx = 3 \ln 3 - 6 \ln 2$

f) $F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \sin^2 x dx = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}$. **HD** Phương pháp tích phân từng phần với $u = x, dv = \cos x \sin^2 x dx$.

Tính $\int \cos x \sin^2 x dx$.

GV. Lư Sĩ Pháp

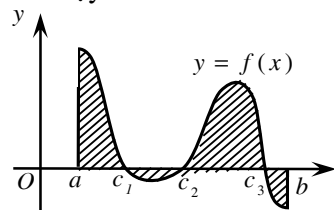
§3. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TRONG HÌNH HỌC

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Diện tích hình phẳng

- ♦ Nếu hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)$, liên tục trên đoạn $[a; b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ thì diện tích S của nó được tính theo công thức: $S = \int_a^b |f(x)| dx$

Như vậy:

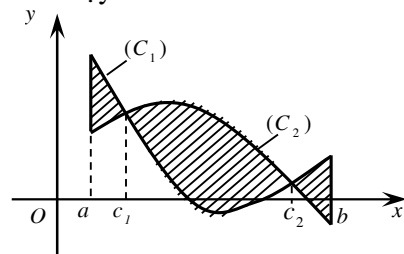


$$(H) \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \quad S = \int_a^b |f(x)| dx$$

Chú ý: Nếu trên $[a; b]$ hàm số $f(x)$ giữ nguyên một dấu thì: $S = \int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$

- ♦ Nếu hình phẳng được giới hạn bởi hai đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ thì diện tích S của nó được tính theo công thức: $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

Như vậy:



$$(H) \begin{cases} (C_1): y = f_1(x) \\ (C_2): y = f_2(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases} \quad S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$$

- ♦ Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, $x = h(y)$ và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ được xác định: $S = \int_c^d |g(y) - h(y)| dy$.

Chú ý: Nếu trên đoạn $[\alpha; \beta]$ biểu thức $f(x) - g(x)$ không đổi dấu thì:

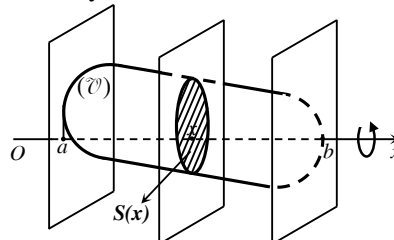
$$\int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx = \left| \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - g(x)] dx \right|$$

2. Thể tích vật thể

Giới hạn vật thể V bởi hai mặt phẳng song song, vuông góc với trục hoành, cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ $x = a, x = b$ và $S(x)$ là diện tích thiết diện của V vuông góc với Ox tại $x \in [a; b]$. Thể tích

của V được cho bởi công thức: $V = \int_a^b S(x) dx$. ($S(x)$ là hàm số không âm, liên tục trên đoạn $[a; b]$)

Như vậy:



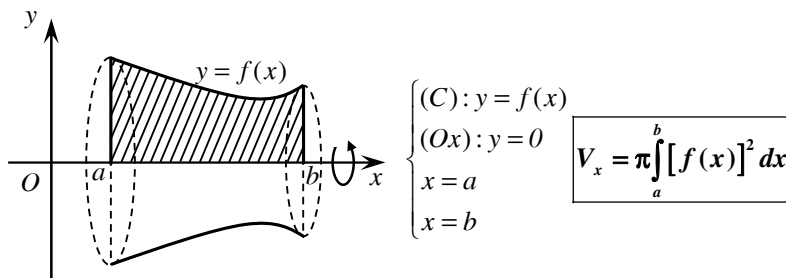
$$V = \int_a^b S(x) dx$$

3. Thể tích khối tròn xoay

Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)$, liên tục trên đoạn $[a; b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ quay quanh trục Ox , ta được khối tròn xoay. Thể tích của khối tròn xoay này được

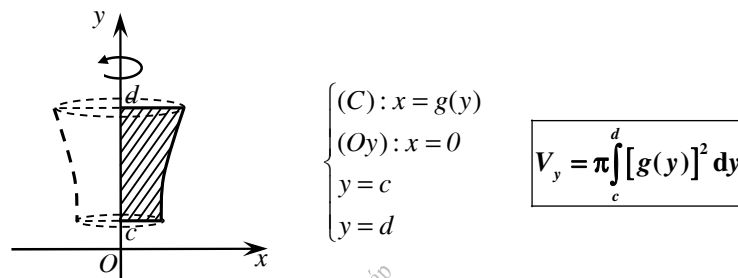
cho bởi công thức $S = \pi \int_a^b f^2(x) dx$

Như vậy:



Lưu ý:

♦ Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y = c, y = d$ quanh trục Oy :



♦ Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ quanh trục Ox : $V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$

B. BÀI TẬP

DẠNG 1. Tính diện tích hình phẳng

- ♦ Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $\begin{cases} (C) : y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a, x = b \end{cases}$. Công thức $S = \int_a^b |f(x)| dx$
- ♦ Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $\begin{cases} (C_1) : y = f(x) \\ (C_2) : y = g(x) \\ x = a, x = b \end{cases}$. Công thức $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

Bài 1. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1, x = 2$

HD & Giải

Gọi S là diện tích cần tìm

Diện tích hình phẳng: $S = \int_{-1}^2 |y| dx = \int_{-1}^2 |x^3| dx$

$$= \int_{-1}^0 |x^3| dx + \int_0^2 |x^3| dx = -\int_{-1}^0 x^3 dx + \int_0^2 x^3 dx = -\left. \frac{x^4}{4} \right|_{-1}^0 + \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^2 = \frac{17}{4}$$

Bài 2. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^3 - 4x, y = 0$ và hai đường thẳng $x = -2, x = 4$

HD Giải

Gọi S là diện tích cần tìm. Diện tích hình phẳng: $S = \int_{-2}^4 |y| dx = \int_{-2}^4 |x^3 - 4x| dx$

Xét phương trình: $x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$ hoặc $x = -2$.

Xét dấu:

x	-2	0	2	4
$x^3 - 4x$	0	$+$	0	$-$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } S &= \int_{-2}^0 |x^3 - 4x| dx + \int_0^2 |x^3 - 4x| dx + \int_2^4 |x^3 - 4x| dx \\ &= \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx - \int_0^2 (x^3 - 4x) dx + \int_2^4 (x^3 - 4x) dx \\ &= \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) \Big|_{-2}^0 - \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) \Big|_2^4 = 44 \end{aligned}$$

Bài 3. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ (C)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C)

b) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành.

HD Giải

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành: $x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

Gọi S là diện tích cần tìm, ta có:

$$S = \int_0^3 |x^3 - 6x^2 + 9x| dx = \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x) dx = \left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9x^2}{2} \right) \Big|_0^3 = \frac{27}{4}$$

Bài 4. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = xe^{\frac{x}{2}}$, $y = 0$ và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 1$

HD Giải

Gọi S là diện tích cần tìm, ta có: $xe^{\frac{x}{2}} > 0, \forall x \in [0; 1]$. Khi đó: $S = \int_0^1 xe^{\frac{x}{2}} dx = \int_0^1 xe^{\frac{x}{2}} dx$

$$\text{Đặt: } u = x \Rightarrow du = dx; dv = e^{\frac{x}{2}} \Rightarrow v = 2e^{\frac{x}{2}}. \text{ Vậy } S = \left(2xe^{\frac{x}{2}} \right) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 e^{\frac{x}{2}} dx = 2e^{\frac{1}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}} \Big|_0^1 = 4 - 2\sqrt{e}$$

Bài 5. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = \cos x$, $y = 0$ và hai đường thẳng $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \pi$.

HD Giải

Gọi S là diện tích cần tìm, ta có: $S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\cos x| dx$. Xét dấu:

$$\begin{array}{c|cccc} x & -\frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \pi & \\ \hline y = \cos x & | & + & 0 & - & | \end{array} \text{ Khi đó: } S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 3$$

Bài 6. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi hai đồ thị của hàm số $y = \cos x$, $y = \sin x$ và hai đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$.

HD Giải

Gọi S là diện tích cần tìm. Đặt $y = f(x) = \cos x$, $y = g(x) = \sin x$

Ta có: $f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \in [0; \pi]$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } S &= \int_0^{\pi} |\cos x - \sin x| dx = \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\cos x - \sin x) dx \right| \\ &= \left| (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right| + \left| (\sin x + \cos x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \right| = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Bài 7. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi hai đồ thị của hàm số $y = x^3 - x$ và $y = x - x^2$

HD & Giải

Gọi S là diện tích cần tìm. Đặt $y = f(x) = x^3 - x, y = g(x) = x - x^2$

$$\text{Ta có: } f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow (x^3 - x) - (x - x^2) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } S &= \int_{-2}^1 |x^3 + x^2 - 2x| dx = \left| \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx \right| \\ &= \left| \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{-2}^0 \right| + \left| \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_0^1 \right| = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12} \end{aligned}$$

Bài 8. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đường cong $y = x^2 + 1$, tiếp tuyến với đường thẳng này tại điểm $M(2;5)$ và trục tung.

HD & Giải

Phương trình tiếp tuyến của đường cong $(P): y = x^2 + 1$ tại điểm $M(2;5)$ là $y = 4x - 3$

$$\text{Gọi } S \text{ là diện tích cần tìm. Ta có: } S = \int_0^2 [x^2 + 1 - (4x - 3)] dx = \left| \int_0^2 (x^2 - 4x + 4) dx \right| = \frac{8}{3}$$

Bài 9.

a) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 2x$ và $y = x + 2$

b) Tính thể tích của hình phẳng (H) quay quanh trục Ox , biết (H) giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}e^{\frac{x}{2}}, y = 0, x = 1, x = 2$

HD & Giải

$$\text{a) Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường: } x^2 + 2x - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Diện tích cần tìm là } S = \left| \int_{-2}^1 (x^2 + x - 2) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_{-2}^1 \right| = \left| \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) - \left(\frac{-8}{3} + 2 + 4 \right) \right| = \frac{9}{2}$$

$$\text{b) Thể tích cần tìm là } V = \pi \int_1^2 x e^x dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow V = \pi \int_1^2 x e^x dx = \pi x e^x \Big|_1^2 - \pi \int_1^2 e^x dx = \pi e^x (x - 1) \Big|_1^2 = e^2. \text{ Vậy } V = \pi e^2$$

Bài 10. Tìm thể tích vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x^2$ và $y = x^3$ xung quanh trục Ox .

HD & Giải

Giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 2 \Rightarrow y = 8 \end{cases}$

Với $x \in [0; 2]$, ta có $2x^2 \geq x^3$ nên thể tích của vật thể tròn xoay là:

$$V = \pi \int_0^2 \left[(2x^2)^2 - (x^3)^2 \right] dx = \frac{256\pi}{35}$$

Bài 11. Cho tam giác vuông OPM có cạnh OP nằm trên trục Ox . Đặt $OM = R$, $\widehat{POM} = \alpha$ ($0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}, R > 0$)

- a) Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay tam giác đó quanh trục Ox theo α và R
b) Tìm α sao cho thể tích V lớn nhất.

HD & Giải

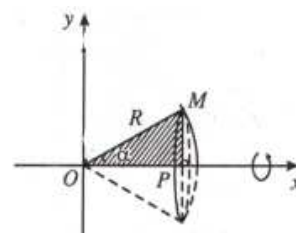
a) Thể tích V của khối tròn xoay :

$$V = \pi \int_0^{R \cos \alpha} y^2 dx = \pi \int_0^{R \cos \alpha} x^2 \tan^2 \alpha dx = \pi \tan^2 \alpha \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{R \cos \alpha} = \frac{\pi R^3}{3} (\cos \alpha - \cos^3 \alpha)$$

b) Đặt $t = \cos \alpha \Rightarrow t \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right]$ (vì $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{3} \right]$). Ta có $V = \frac{\pi R^3}{3} (t - t^3)$

$$V' = \frac{\pi R^3}{3} (1 - 3t^2), V' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ t = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \max_{\left[\frac{1}{2}; 1 \right]} V(\alpha) = \max_{\left[\frac{1}{2}; 1 \right]} V(t) = V\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}\pi R^3}{27} \text{ (trong đó } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}})$$



C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường sau:

- a) $y = x^2 - 2x$ và $y = x$ b) $y = 2x - x^2, x + y = 2$ c) $y = x^3 - 12x, y = x^2$

Bài 2. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đường cong $y = x^2 - 2x + 2$, tiếp tuyến với đường thẳng này tại điểm $M(3; 5)$ và trục tung.

Kết quả

Bài 1.

a) $S = \frac{9}{2}$. **HD:** $S = \left| \int_0^3 (x^2 - 2x - x) dx \right|$

b) $S = \frac{1}{6}$ c) $S = \frac{937}{12}$ **HD:** $S = \int_{-3}^0 (x^3 - 12x - x^2) dx + \int_0^4 (x^2 + 12x - x^3) dx$

Bài 2. Phương trình tiếp tuyến của đường cong (P) : $y = x^2 - 2x + 2$ tại điểm $M(2; 5)$ là $y = 4x - 7$

Gọi S là diện tích cần tìm. Ta có: $S = \int_0^2 |x^2 - 2x + 2 - (4x - 7)| dx = \left| \int_0^2 (x^2 - 6x + 9) dx \right| = 9$

ÔN TẬP CHƯƠNG III

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

§1. NGUYÊN HÀM

1. Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K . Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

Như vậy: $\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

2. Tính chất

$$\diamond \int f'(x)dx = f(x) + C \quad \diamond \int kf(x)dx = k \int f(x)dx \quad \diamond \int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

3. Bảng nguyên hàm

Nguyên hàm của các hàm số sơ cấp thường gặp	Nguyên hàm của những hàm số hợp đơn giản	Nguyên hàm của những hàm số hợp (với $t = t(x)$)
1. $\int 0dx = C$		$\int 0dt = C$
2. $\int dx = x + C$	$\int kdx = kx + C$	$\int dt = t + C$
3. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	$\int t^\alpha dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$
4. $\int \frac{1}{x^\alpha} dx = -\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} + C$	$\int \frac{1}{(ax+b)^\alpha} dx = -\frac{1}{a(\alpha-1)(ax+b)^{\alpha-1}} + C$	$\int \frac{1}{t^\alpha} dt = -\frac{1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} + C$
5. $\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$	$\int \sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{3a} \sqrt{(ax+b)^3} + C$	$\int \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{t^3} + C$
6. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + C$	$\int \frac{1}{t} dt = \ln t + C$
7. $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$	$\int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a(ax+b)} + C$	$\int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} + C$
8. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C, x > 0$	$\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}} dx = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a} + C, ax+b > 0, a \neq 0$	$\int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2\sqrt{t} + C, t > 0$
9. $\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$	$\int e^t dt = e^t + C$
10. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (a \neq 1, a > 0)$	$\int a^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{a^{ax+b}}{\ln a} + C (a \neq 1, a > 0)$	$\int a^t dt = \frac{a^t}{\ln a} + C (a \neq 1, a > 0)$
11. $\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$	$\int \cos t dt = \sin t + C$
12. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$	$\int \sin t dt = -\cos t + C$
13. $\int \tan x dx = -\ln \cos x + C$	$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln \cos x + C$	$\int \tan t dt = -\ln \cos t + C$
14. $\int \cot x dx = \ln \sin x + C$	$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln \sin x + C$	$\int \cot t dt = \ln \sin t + C$
15. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 t} dt = \tan t + C$

16. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cdot \cot(ax+b) + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 t} dt = -\cot t + C$
17. $\int \tan^2 x dx = \tan x - x + C$	$\int \tan^2(ax+b) dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) - x + C$	$\int \tan^2 t dt = \tan t - t + C$
18. $\int \cot^2 x dx = -\cot x - x + C$	$\int \cot^2(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) - x + C$	$\int \cot^2 t dt = -\cot t - t + C$
19. $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$	$\int \frac{1}{(ax+b)(cx-d)} dx = \frac{1}{ad-bc} \ln \left \frac{ax+b}{cx-d} \right + C$	
20. $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$	$\int \ln(ax+b) dx = \frac{(ax+b) \ln(ax+b) - ax}{a} + C$	
21. $\int \log_a x dx = \frac{x \ln x - x}{\ln a} + C$	$\int \log_a (mx+n) dx = \frac{(mx+n) \ln(mx+n) - mx}{m \ln a} + C$	

4. Phương pháp tính nguyên hàm

a. Phương pháp biến đổi

❖ Nếu $\int f(u) du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$\int f(u(x)) u'(x) dx = F(u(x)) + C$. **Lưu ý:** Đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x) dx$. Khi đó: $\int f(t) dt = F(t) + C$, sau đó thay ngược lại $t = u(x)$ ta được kết quả cần tìm.

❖ Với $u = ax + b (a \neq 0)$, ta có $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$

b. Phương pháp tính nguyên hàm từng phần

❖ Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên K thì

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) v(x) dx \quad \text{hay} \quad \int u dv = uv - \int v du$$

❖ Đặt $u = f(x) \Rightarrow du = f'(x) dx$ và $dv = g(x) dx \Rightarrow v = \int g(x) dx = G(x)$ (chọn $C = 0$)

Lưu ý: Với $P(x)$ là đa thức

N.Hàm Đặt	$\int P(x) e^x dx$	$\int P(x) \cos x dx$ hay $\int P(x) \sin x dx$	$\int P(x) \ln x dx$
u	$P(x)$	$P(x)$	$\ln x$
dv	$e^x dx$	$\cos x dx$ hay $\sin x dx$	$P(x) dx$

Yêu cầu tìm nguyên hàm của một hàm số được hiểu là tìm nguyên hàm trên từng khoảng xác định của nó.

§2. TÍCH PHÂN

I. Khái niệm về tích phân

Định nghĩa: $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Chú ý:

1. Khi $a = b$ ta định nghĩa $\int_a^b f(x) dx = \int_a^a f(x) dx = 0$

2. Khi $a > b$, ta định nghĩa $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

3. Tích phân không phụ thuộc vào chữ dùng làm biến số trong dấu tích phân, tức là

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{hay} \quad \int_a^b f(t) dt, \dots, \text{đều tính bằng } F(b) - F(a) \quad \text{hay} \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$$

II Tính chất của tích phân

Tích chất 1. $k \int_a^b f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$ (k là hằng số)

Tích chất 2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

Tính chất 3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, $a < c < b$

III. Phương pháp tính tích phân

3. Phương pháp đổi biến số

DẠNG 1. Đặt t theo x . Cụ thể: Tính $I = \int_a^b f(x)dx$

Đặt: $t = f(x) \Rightarrow dt = f'(x)dx$. Đổi cận: $\begin{matrix} x & | & a & & b \\ t & | & f(a) & & f(b) \end{matrix}$. Khi đó tính: $I = \int_{f(a)}^{f(b)} g(t)dt$

DẠNG 2. Đặt x theo t : Có các dạng cơ bản sau:

- a) $\int_a^b \sqrt{1-x^2} dx$. Đặt: $x = \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. $\int_a^b \sqrt{k^2-x^2} dx$. Đặt: $x = k \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
- b) $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$. Đặt $x = \sin t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{k^2-x^2}} dx$. Đặt $x = k \sin t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
- c) $\int_a^b \frac{1}{x^2+1} dx$. Đặt $x = \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. $\int_a^b \frac{1}{x^2+k^2} dx$. Đặt $x = k \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
- $\int_a^b \frac{1}{(\alpha x + \beta)^2 + k^2} dx$. Đặt $\alpha x + \beta = k \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

4. Phương pháp tính tích phân từng phần

Nếu $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx \text{ hay } \int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Tính $I = \int_a^b f(x)g(x)dx$. Đặt: $\begin{cases} u = f(x) & \Rightarrow du = f'(x)dx \\ dv = g(x)dx & \Rightarrow v = \int g(x)dx \end{cases}$

$$\diamond dv = g(x)dx \Rightarrow v = \int g(x)dx$$

§3. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TRONG HÌNH HỌC

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Diện tích hình phẳng

$\diamond$ Nếu hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)$, liên tục trên đoạn $[a; b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ thì diện tích S của nó được tính theo công thức:

$$S = \int_a^b |f(x)|dx$$

Chú ý: Nếu trên $[a; b]$ hàm số $f(x)$ giữ nguyên một dấu thì: $S = \int_a^b |f(x)|dx = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$

$\diamond$ Nếu hình phẳng được giới hạn bởi hai đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ thì diện tích S của nó được tính theo công thức:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

Chú ý: Nếu trên đoạn $[\alpha; \beta]$ biểu thức $f(x) - g(x)$ không đổi dấu thì:

$$\int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx = \left| \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - g(x)] dx \right|$$

2. Thể tích vật thể

Giới hạn vật thể V bởi hai mặt phẳng song song, vuông góc với trục hoành, cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ $x = a, x = b$ và $S(x)$ là diện tích thiết diện của V vuông góc với Ox tại $x \in [a; b]$. Thể tích của V được cho bởi công thức: $V = \int_a^b S(x) dx$. ($S(x)$ là hàm số không âm, liên tục trên đoạn $[a; b]$)

3. Thể tích khối tròn xoay

Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)$, liên tục trên đoạn $[a; b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ quay quanh trục Ox , ta được khối tròn xoay. Thể tích của khối tròn xoay này được cho bởi công thức $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

B. BÀI TẬP

Bài 1. Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_0^{\pi} x(1 + \cos x) dx$

b) $J = \int_0^1 x^2(x-1)^2 dx$

c) $K = \int_1^e \frac{\sqrt{4+5\ln x}}{x} dx$

d) $H = \int_0^{\ln 2} (e^x - 1)^2 e^x dx$

e) $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \cos x dx$

f) $M = \int_0^1 (1 - xe^x) dx$

HD & Giải

a) $I = \int_0^{\pi} x(1 + \cos x) dx$

Đặt: $\bullet u = x \Rightarrow du = dx$

$\bullet dv = (1 + \cos x) dx \Rightarrow v = x + \sin x$

Do đó: $I = x(x + \sin x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (x + \sin x) dx = \pi^2 - \left(\frac{x^2}{2} - \cos x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2 - 4}{2}$

Cách 2.

$$I = \int_0^{\pi} x(1 + \cos x) dx = \int_0^{\pi} x dx + \int_0^{\pi} x \cos x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} x \cos x dx = \frac{\pi^2}{2} + x \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{\pi^2}{2} + \cos x \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2 - 4}{2}$$

b) $J = \int_0^1 x^2(x-1)^2 dx = \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2) dx = \left(\frac{x^5}{5} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{30}$

c) $K = \int_1^e \frac{\sqrt{4+5\ln x}}{x} dx$ Đặt: $t = \sqrt{4+5\ln x} \Rightarrow t^2 = 4+5\ln x \Rightarrow 2tdt = \frac{5}{x} dx$

Đổi cận: $\begin{array}{c|c} x & 1 \\ \hline t & 2 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} e & 3 \end{array}$

Khi đó: $K = \frac{2}{5} \int_2^3 t^2 dt = \frac{2}{15} t^3 \Big|_2^3 = \frac{38}{15}$

d) $H = \int_0^{\ln 2} (e^x - 1)^2 e^x dx$ Đặt $t = e^x - 1 \Rightarrow dt = e^x dx$

Đổi cận: $\begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline t & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \ln 2 & 1 \end{array}$

Khi đó: $H = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

$$\text{e) } L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \cos x dx \quad \text{Đặt: } \diamond u = x+1 \Rightarrow du = dx$$

$$\diamond dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x$$

$$\text{Khi đó: } L = (x+1) \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + 1 + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{f) } M = \int_0^1 (1 - xe^x) dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 xe^x dx = 1 - M_1. \text{ Tính } M_1 = \int_0^1 xe^x dx$$

$$\text{Đặt: } \diamond u = x \Rightarrow du = dx$$

$$\diamond dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

$$\text{Khi đó: } M_1 = xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x \Big|_0^1 = 1$$

$$\text{Vậy: } M = 1 - M_1 = 1 - 1 = 0$$

Bài 2. Tính các tích phân sau:

$$\text{a) } I = \int_0^1 (x-3)e^x dx$$

$$\text{b) } J = \int_1^2 (2x^3 + \ln x) dx$$

$$\text{c) } K = \int_1^2 \frac{x^2 + 2 \ln x}{x} dx$$

$$\text{d) } H = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+1) \sin 2x dx$$

$$\text{e) } L = \int_1^2 \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + x} dx$$

$$\text{f) } M = \int_1^5 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x-1}}$$

HD & Giải

$$\text{a) } I = \int_0^1 (x-3)e^x dx \quad \text{Đặt: } \diamond u = x-3 \Rightarrow du = dx$$

$$\diamond dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

$$\text{Khi đó: } I = (x-1)e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = (x-1)e^x \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1 = 4 - 3e$$

$$\text{b) } J = \int_1^2 (2x^3 + \ln x) dx = \int_1^2 2x^3 dx + \int_1^2 \ln x dx = J_1 + J_2$$

$$\diamond \text{ Với } J_1 = \int_1^2 2x^3 dx = \frac{1}{2} x^4 \Big|_1^2 = \frac{15}{2}$$

$$\diamond \text{ Với } \int_1^2 \ln x dx = x \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 dx = x \ln x \Big|_1^2 - x \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - 1 \text{ (đặt: } u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx; dv = dx \Rightarrow v = x)$$

$$\text{Vậy } J = J_1 + J_2 = \frac{15}{2} + 2 \ln 2 - 1 = \frac{13}{2} + 2 \ln 2$$

$$\text{c) } K = \int_1^2 \frac{x^2 + 2 \ln x}{x} dx = \int_1^2 x dx + \int_1^2 \frac{2 \ln x}{x} dx = K_1 + K_2$$

$$\diamond \text{ Với } K_1 = \int_1^2 x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^2 = \frac{3}{2}$$

$$\diamond \text{ Với } K_2 = \int_1^2 \frac{2 \ln x}{x} dx \quad \text{Đặt: } t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx. \text{ Đổi cận: } \begin{array}{c|c} x & 1 \\ t & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 2 & \ln 2 \end{array}$$

$$\text{Khi đó: } K_2 = 2 \int_0^{\ln 2} t dt = t^2 \Big|_0^{\ln 2} = \ln^2 2. \text{ Vậy: } K = K_1 + K_2 = \frac{3}{2} + \ln^2 2$$

d) $H = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+1) \sin 2x dx$ Đặt: ♦ $u = x+1 \Rightarrow du = dx$

♦ $dv = \sin 2x dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2} \cos 2x$

Khi đó: $H = -\frac{1}{2}(x+1) \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = -\frac{1}{2}(x+1) \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{4}$

e) $L = \int_1^2 \frac{x^2+3x+1}{x^2+x} dx = \int_1^2 dx + \int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x} dx = L_1 + L_2$

♦ Với $L_1 = \int_1^2 dx = x \Big|_1^2 = 1$

♦ Với $L_2 = \int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x} dx$. Đặt: $t = x^2+x \Rightarrow dt = (2x+1) dx$. Đổi cận: $\begin{array}{c|c} x & 1 \\ \hline t & 2 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 2 & 6 \end{array}$

Khi đó: $L_2 = \int_2^6 \frac{1}{t} dt = \ln |t| \Big|_2^6 = \ln 3$

Vậy: $L = L_1 + L_2 = 1 + \ln 3$

f) $M = \int_1^5 \frac{dx}{1+\sqrt{2x-1}}$. Đặt: $t = \sqrt{2x-1} \Rightarrow t dt = dx$. Đổi cận: $\begin{array}{c|c} x & 1 \\ \hline t & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 1 & 5 \\ \hline 3 & 3 \end{array}$

Khi đó: $M = \int_1^3 \frac{t}{t+1} dt = \int_1^3 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = (t - \ln |t+1|) \Big|_1^3 = 2 - \ln 2$

Bài 3. Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_0^1 \frac{(x+1)^2}{x^2+1} dx$

b) $J = \int_0^1 x \sqrt{2-x^2} dx$

c) $K = \int_1^2 \frac{x^2-1}{x^2} \ln x dx$

d) $H = \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

e) $L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1+\sin 2x) dx$

f) $M = \int_0^1 \frac{x^3}{x^4+3x^2+2} dx$

HD & Giải

a) $I = \int_0^1 \frac{(x+1)^2}{x^2+1} dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{2x}{x^2+1}\right) dx = \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = I_1 + I_2$

♦ Với $I_1 = \int_0^1 dx = x \Big|_0^1 = 1$

♦ Với $I_2 = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx$. Đặt: $t = x^2+1 \Rightarrow dt = 2x dx$. Đổi cận: $\begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline t & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$

Khi đó: $I_2 = \int_1^2 \frac{1}{t} dt = \ln |x| \Big|_1^2 = \ln 2$

Vậy: $I = I_1 + I_2 = 1 + \ln 2$

b) $J = \int_0^1 x \sqrt{2-x^2} dx$. Đặt: $t = \sqrt{2-x^2} \Rightarrow t dt = -x dx$. Đổi cận: $\begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline t & \sqrt{2} \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline \sqrt{2} & 1 \end{array}$

Khi đó: $J = -\int_{\sqrt{2}}^1 t^2 dt = \int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$

c) $K = \int_1^2 \frac{x^2-1}{x^2} \ln x dx$. Đặt: ♦ $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

♦ $dv = \frac{x^2-1}{x^2} dx \Rightarrow v = x + \frac{1}{x}$

Khi đó: $K = \left(x + \frac{1}{x} \right) \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x} \right) \frac{1}{x} dx = \left(x + \frac{1}{x} \right) \ln x \Big|_1^2 - \left(x - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \frac{5}{2} \ln 2 - \frac{3}{2}$

d) $H = \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$. Đặt: $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow 2t dt = dx$. Đổi cận: $\begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline t & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 0 & 3 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$

Khi đó: $H = \int_1^2 2(t^2-1) dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_1^2 = \frac{8}{3}$

e) $L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1 + \sin 2x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx = L_1 + L_2$

♦ Với $L_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{32}$

♦ Với $L_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx$ Đặt: ♦ $u = x \Rightarrow du = dx$

♦ $dv = \sin 2x dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2} \cos 2x$

Khi đó: $L_2 = -\frac{1}{2} x \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}$

Vậy: $L = L_1 + L_2 = \frac{\pi^2}{32} + \frac{1}{4}$

f) $M = \int_0^1 \frac{x^3}{x^4+3x^2+2} dx = \int_0^1 \frac{x \cdot x^2}{(x^2+1)(x^2+2)} dx$. Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$. Đổi cận: $\begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline t & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 \end{array}$

Khi đó: $M = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t dt}{(t+1)(t+2)} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{2}{t+2} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \left(\ln|t+2| - \frac{1}{2} \ln|t+1| \right) \Big|_0^1 = \ln 3 - \frac{3}{2} \ln 2$

Bài 4. Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_1^3 \frac{1 + \ln(x+1)}{x^2} dx$

b) $J = \int_1^2 \frac{2x+1}{x(x+1)} dx$

c) $K = \int_0^4 \frac{4x-1}{\sqrt{2x+1}+2} dx$

d) $H = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+x \sin x}{\cos^2 x} dx$

e) $L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x + (x+1) \cos x}{x \sin x + \cos x} dx$

f) $M = \int_0^1 \frac{2x-1}{x+1} dx$

HD & Giải

a) $I = \int_1^3 \frac{1 + \ln(x+1)}{x^2} dx$ Đặt: ♦ $u = 1 + \ln(x+1) \Rightarrow du = \frac{dx}{x+1}$

♦ $dv = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{x}$

Khi đó: $I = -\frac{1 + \ln(x+1)}{x} \Big|_1^3 + \int_1^3 \frac{dx}{x(x+1)} dx = -\frac{1 + \ln(x+1)}{x} \Big|_1^3 + \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx$

$$= -\frac{1+\ln(x+1)}{x} \Big|_1^3 + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| \Big|_1^3 = \frac{2}{3} + \ln 3 - \frac{2}{3} \ln 2$$

$$\text{b) } J = \int_1^2 \frac{2x+1}{x(x+1)} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln |x(x+1)| \Big|_1^2 = \ln 3$$

$$\text{c) } K = \int_0^4 \frac{4x-1}{\sqrt{2x+1}+2} dx. \text{ Đặt } t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow 4x = 2(t^2-1) \Rightarrow dx = t dt. \text{ Đổi cận: } \begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline t & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} & 4 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$$\text{Khi đó: } K = \int_1^3 \frac{2t^3-3t}{t+2} dt = \int_1^3 \left(2t^2 - 4t + 5 - \frac{10}{t+2} \right) dt = \left(\frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 5t - 10 \ln |t+2| \right) \Big|_1^3 = \frac{34}{3} + 10 \ln \frac{3}{5}$$

$$\text{d) } H = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+x \sin x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx = H_1 + H_2$$

$$\diamond \text{ Với } H_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}$$

$$\diamond \text{ Với } H_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx. \quad \text{Đặt: } \diamond u = x \Rightarrow du = dx$$

$$\diamond dv = \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{\cos x}$$

$$\text{Khi đó: } H_2 = \frac{x}{\cos x} \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx = \frac{2\pi}{3} - H_3$$

$$\diamond \text{ Với } H_3 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{(\sin x - 1)(\sin x + 1)} dx$$

$$\text{Đặt: } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx. \text{ Đổi cận: } \begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline t & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} & \frac{\pi}{3} \\ \hline & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

$$\text{Khi đó: } H_3 = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{(t-1)(t+1)} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \ln(2-\sqrt{3})$$

$$\text{Suy ra: } H_2 = \frac{2\pi}{3} + \ln(2-\sqrt{3}). \text{ Vậy: } H = H_1 + H_2 = \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + \ln(2-\sqrt{3})$$

$$\text{e) } L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x + (x+1) \cos x}{x \sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(x \sin x + \cos x) + x \cos x}{x \sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \cos x}{x \sin x + \cos x} dx = L_1 + L_2$$

$$\diamond \text{ Với } L_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\diamond \text{ Với } L_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \cos x}{x \sin x + \cos x} dx.$$

Đặt: $t = x \sin x + \cos x \Rightarrow dt = x \cos x dx$. Đổi cận:

x	0	$\frac{\pi}{4}$
t	1	$\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi}{4} + 1 \right)$

Khi đó: $L_2 = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi}{4} + 1 \right)} \frac{dt}{t} = \ln \left| t \right| \Big|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi}{4} + 1 \right)} = \ln \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi}{4} + 1 \right) \right]$

Vậy: $L = L_1 + L_2 = \frac{\pi}{4} + \ln \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi}{4} + 1 \right) \right]$

f) $M = \int_0^1 \frac{2x-1}{x+1} dx = \int_0^1 \left(2 - \frac{3}{x+1} \right) dx = (2x - 3 \ln |x+1|) \Big|_0^1 = 2 = 3 \ln 2$

Bài 5. Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_1^e \left(2x - \frac{3}{x} \right) \ln x dx$

b) $J = \int_1^e \frac{\ln x}{x(2 + \ln x)^2} dx$

c) $K = \int_0^1 \frac{x^2 + e^x + 2x^2 e^x}{1 + 2e^x} dx$

d) $H = \int_0^1 (e^{-2x} + x) e^x dx$

e) $L = \int_1^3 \frac{1}{e^x - 1} dx$

f) $M = \int_1^3 \frac{3 + \ln x}{(x+1)^2} dx$

HD & Giải

a) $I = \int_1^e \left(2x - \frac{3}{x} \right) \ln x dx = \int_1^e 2x \ln x dx - 3 \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = I_1 - 3I_2$

♦ Với $I_1 = \int_1^e 2x \ln x dx$. Đặt: ♦ $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

♦ $dv = 2x dx \Rightarrow v = x^2$

Khi đó: $I_1 = x^2 \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x dx = x^2 \ln x \Big|_1^e - \frac{x^2}{2} \Big|_1^e = \frac{e^2 + 1}{2}$

♦ Với $I_2 = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$. Đặt: $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$. Đổi cận:

x	1	e
t	0	1

Khi đó: $I_2 = \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

Vậy: $I = I_1 - 3I_2 = \frac{e^2 + 1}{2} - \frac{3}{2} = \frac{e^2}{2} - 1$

b) $J = \int_1^e \frac{\ln x}{x(2 + \ln x)^2} dx$. Đặt: $t = 2 + \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$. Đổi cận:

x	1	e
t	2	3

Khi đó: $J = \int_2^3 \frac{t-2}{t^2} dt = \int_2^3 \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} \right) dt = \left(\ln |t| + \frac{2}{t} \right) \Big|_2^3 = \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{3}$

c) $K = \int_0^1 \frac{x^2 + e^x + 2x^2 e^x}{1 + 2e^x} dx = \int_0^1 \frac{x^2(1 + e^x) + e^x}{1 + 2e^x} dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 \frac{e^x}{1 + 2e^x} dx = K_1 + K_2$

♦ Với $K_1 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

♦ Với $K_2 = \int_0^1 \frac{e^x}{1 + 2e^x} dx$. Đặt: $t = 1 + 2e^x \Rightarrow dt = 2e^x dx$. Đổi cận:

x	0	1
t	3	$1 + 2e$

Khi đó: $K_2 = \int_3^{1+2e} \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} \ln|t| \Big|_3^{1+2e} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+2e}{3}$

Vậy: $K = K_1 + K_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+2e}{3}$

d) $H = \int_0^1 (e^{-2x} + x) e^x dx = \int_0^1 e^{-x} dx + \int_0^1 x e^x dx = H_1 + H_2$

♦ Với $H_1 = \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{e}$

♦ Với $H_2 = \int_0^1 x e^x dx$. Đặt: ♦ $u = x \Rightarrow du = dx$

♦ $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

Khi đó: $H_2 = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1 = e - e + 1 = 1$

Vậy: $H = H_1 + H_2 = 1 - \frac{1}{e} + 1 = 2 - \frac{1}{e}$

e) $L = \int_1^3 \frac{1}{e^x - 1} dx$. Đặt: $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$. Đổi cận: $\frac{x}{t} \Big|_1^3 \frac{1}{e} \frac{3}{e^3}$

Khi đó: $L = \int_e^{e^3} \frac{dt}{t(t-1)} = \int_e^{e^3} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt = (\ln|t-1| - \ln|t|) \Big|_e^{e^3} = \ln \left| \frac{e^3-1}{e-1} \right| - \ln \left| \frac{e^3}{e} \right| = \ln(e^2 + e + 1) - 2$

f) $M = \int_1^3 \frac{3 + \ln x}{(x+1)^2} dx$. Đặt: ♦ $u = 3 + \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

♦ $dv = \frac{dx}{(x+1)^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{x+1}$

Khi đó: $M = -\frac{3 + \ln x}{(x+1)^2} \Big|_1^3 + \int_1^3 \frac{dx}{x(x+1)} = -\frac{3 + \ln x}{(x+1)^2} \Big|_1^3 + \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx$

$= -\frac{3 + \ln x}{(x+1)^2} \Big|_1^3 + (\ln|x| - \ln|x+1|) \Big|_1^3 = \frac{3 - \ln 3}{4} + (\ln 3 - \ln 4) + \ln 2 = \frac{1}{4} \left(3 + \ln \frac{27}{16} \right)$

Bài 6. Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x - 1) \cos^2 x dx$ b) $J = \int_1^2 \frac{x}{1 + \sqrt{x-1}} dx$ c) $K = \int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}}{x} \ln x dx$

d) $H = \int_2^3 \ln(x^2 - x) dx$ e) $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sin^2 x) \cos x dx$ f) $M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1+3\cos x}} dx$

HD & Giải

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x - 1) \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = I_1 - I_2$

♦ Với $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx$

Đặt: $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$. Đổi cận: $\begin{array}{c|c} x & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & 0 & 1 \end{array}$

Khi đó: $I_1 = \int_0^1 (1-t^2)^2 dt = \int_0^1 (1-2t^2+t^4) dt = \left(t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{t^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{15}$

♦ Với $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

Vậy: $I = I_1 - I_2 = \frac{8}{15} - \frac{\pi}{4}$

b) $J = \int_1^2 \frac{x}{1+\sqrt{x-1}} dx$. Đặt: $t = \sqrt{x-1} \Rightarrow t^2 = x-1 \Rightarrow \begin{cases} 2t dt = dx \\ x = t^2 + 1 \end{cases}$. Đổi cận: $\begin{array}{c|c} x & 1 & 2 \\ \hline t & 0 & 1 \end{array}$

Khi đó: $J = 2 \int_0^1 \frac{(t^2+1)t}{t+1} dt = 2 \int_0^1 \frac{t^3+t}{t+1} dt = 2 \int_0^1 \left(t^2 - t + 2 - \frac{2}{t+1} \right) dt$
 $= 2 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t - 2 \ln|t+1| \right) \Big|_0^1 = \frac{11}{3} - 4 \ln 2$

c) $K = \int_1^e \frac{\sqrt{1+3 \ln x}}{x} \ln x dx$.

Đặt: $t = \sqrt{1+3 \ln x} \Rightarrow t^2 = 1+3 \ln x \Rightarrow \begin{cases} \ln x = \frac{t^2-1}{3} \\ \frac{dx}{x} = \frac{2}{3} t dt \end{cases}$. Đổi cận: $\begin{array}{c|c} x & 1 & e \\ \hline t & 1 & 2 \end{array}$

Khi đó: $K = \int_1^2 \frac{t(t^2-1)}{3} \frac{2}{3} t dt = \frac{2}{9} \int_1^2 (t^4 - t^2) dt = \frac{2}{9} \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{116}{135}$

d) $H = \int_2^3 \ln(x^2 - x) dx$. Đặt: ♦ $u = \ln(x^2 - x) \Rightarrow du = \frac{2x-1}{x^2-x} dx$

♦ $dv = dx \Rightarrow v = x$

Khi đó: $H = x \ln(x^2 - x) \Big|_2^3 - \int_2^3 \frac{x(2x-1)}{x^2-x} dx = x \ln(x^2 - x) \Big|_2^3 - \int_2^3 \frac{2x-1}{x-1} dx$
 $= x \ln(x^2 - x) \Big|_2^3 - \int_2^3 \left(2 + \frac{1}{x-1} \right) dx = x \ln(x^2 - x) \Big|_2^3 - (2x + \ln|x-1|) \Big|_2^3 = 3 \ln 3 - 2$

e) $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sin^2 x) \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = L_1 + L_2$

♦ Với $L_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$. Đặt: ♦ $u = x \Rightarrow du = dx$

♦ $dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x$

Khi đó: $L_1 = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$

♦ Với $L_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$. Đặt: $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$. Đổi cận: $\begin{array}{c|c} x & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & 0 & 1 \end{array}$

Khi đó: $L_2 = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

Vậy: $L = L_1 + L_2 = \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}$

f) $M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1+3\cos x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x (2\cos x + 1)}{\sqrt{1+3\cos x}} dx.$

Đặt: $t = \sqrt{1+3\cos x} \Rightarrow t^2 = 1+3\cos x \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{t^2-1}{3} \\ -\sin x dx = \frac{2}{3} t dt \end{cases}$. Đổi cận: $\begin{array}{c|cc} x & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & 2 & 1 \end{array}$

Khi đó: $M = -\frac{2}{3} \int_2^1 \frac{t \left(2 \cdot \frac{t^2-1}{3} + 1 \right)}{t} dt = \frac{2}{9} \int_1^2 (2t^2 + 1) dt = \frac{2}{9} \left(\frac{2}{3} t^3 + t \right) \Big|_1^2 = \frac{34}{27}$

Bài 7. Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cos x}{1 + \cos x} dx$

b) $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x} + \cos x) \cos x dx$

c) $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{4 - \cos^2 x} dx$

d) $H = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4 \sin^2 x}} dx$

e) $L = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3} dx$

f) $M = \int_0^1 (x-2)e^{2x} dx$

HD & Giải

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cos x}{1 + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cos^2 x}{1 + \cos x} dx.$

Đặt: $t = 1 + \cos x \Rightarrow \begin{cases} \cos x = t - 1 \\ dt = -\sin x dx \end{cases}$. Đổi cận: $\begin{array}{c|cc} x & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & 2 & 1 \end{array}$

Khi đó: $I = -\int_2^1 \frac{2(t-1)^2}{t} dt = 2 \int_1^2 \left(t - 2 + \frac{1}{t} \right) dt = 2 \left(\frac{t^2}{2} - 2t + \ln |t| \right) \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - 1$

b) $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x} + \cos x) \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = J_1 + J_2$

♦ Với $J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx$. Đặt: $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$. Đổi cận: $\begin{array}{c|cc} x & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & 0 & 1 \end{array}$

Khi đó: $J_1 = \int_0^1 e^t dt = e^t \Big|_0^1 = e - 1$

♦ Với $J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

Vậy: $J = J_1 + J_2 = e - 1 + \frac{\pi}{4}$

c) $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{4 - \cos^2 x} dx$. Đặt: $t = 4 - \cos^2 x \Rightarrow dt = 2 \sin x \cos x dx = \sin 2x dx$. Đổi cận: $\begin{array}{c|cc} x & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & 3 & 4 \end{array}$

Khi đó: $K = \int_3^4 \frac{dt}{t} = \ln|t| \Big|_3^4 = \ln \frac{4}{3}$

d) $H = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4 \sin^2 x}} dx$.

Đặt: $t = \sqrt{\cos^2 x + 4 \sin^2 x} \Rightarrow dt = \frac{3 \sin 2x}{2\sqrt{\cos^2 x + 4 \sin^2 x}} dx$. Đổi cận: $\begin{array}{c|cc} x & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & 1 & 2 \end{array}$

Khi đó: $H = \int_1^2 \frac{2}{3} \frac{dt}{t} = \int_1^2 \frac{2}{3} dt = \frac{2}{3} t \Big|_1^2 = \frac{2}{3}$

Lưu ý: Viết: $\cos^2 x + 4 \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) + 2(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2}(5 - 3 \cos 2x)$.

Đặt: $t = \frac{1}{2}(5 - 3 \cos 2x) \Rightarrow dt = 3 \sin 2x dx$. Đổi cận: $\begin{array}{c|cc} x & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & 1 & 4 \end{array}$

Khi đó: $H = \frac{1}{3} \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{3} \sqrt{t} \Big|_1^4 = \frac{2}{3}$

e) $L = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3} = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^x dx}{e^{2x} - 3e^x + 2} = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^x dx}{(e^x - 1)(e^x - 2)}$
 $= \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^x dx}{e^x - 2} - \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^x dx}{e^x - 1} = \left[\ln|e^x - 2| - \ln|e^x - 1| \right]_{\ln 2}^{\ln 5} = \ln \frac{3}{2}$

f) $M = \int_0^1 (x-2)e^{2x} dx$. Đặt: $\diamond u = x-2 \Rightarrow du = dx$

$\diamond dv = e^{2x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x}$

Khi đó: $M = \frac{1}{2}(x-2)e^{2x} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2}(x-2)e^{2x} \Big|_0^1 - \frac{1}{4} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{5-3e^2}{4}$

Bài 8. Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$

b) $J = \int_1^2 \frac{2x dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$

c) $K = \int_1^e x^3 \ln^2 x dx$

d) $H = \int_0^1 (1+e^x) x dx$

e) $L = \int_{-1}^1 x^2 (1-x^3)^4 dx$

f) $M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1) \cos x dx$

HD & Giải

a) $I = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$. Đặt: $\diamond t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$. Đổi cận: $\begin{array}{c|cc} x & 1 & e \\ \hline t & 0 & 1 \end{array}$

Khi đó: $I = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

b) $J = \int_1^2 \frac{2xdx}{\sqrt{x^2+1}}$. Đặt: $t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2xdx$. Đổi cận: $\frac{x}{t} \left| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{matrix} \right.$

Khi đó: $J = \int_2^5 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} \Big|_2^5 = 2(\sqrt{5} - \sqrt{2})$

c) $K = \int_1^e x^3 \ln^2 x dx$. Đặt: $\diamond u = \ln^2 x \Rightarrow du = 2 \ln x \frac{dx}{x}$

$\diamond dv = x^3 dx \Rightarrow v = \frac{x^4}{4}$

Khi đó: $K = \int_1^e x^3 \ln^2 x dx = \frac{x^4}{4} \ln^2 x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x^3 \ln x dx = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{2} K_1$

$\diamond$ Với $K_1 = \int_1^e x^3 \ln x dx$. Đặt: $\diamond u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

$\diamond dv = x^3 dx \Rightarrow v = \frac{x^4}{4}$

Khi đó: $K_1 = \frac{x^4}{4} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{4} \int_1^e x^3 dx = \frac{x^4}{4} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{4} \frac{x^4}{4} \Big|_1^e = \frac{3e^4 + 1}{16}$

Vậy: $K = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{3e^4 + 1}{16} \right) = \frac{5e^4 - 1}{32}$

d) $H = \int_0^1 (1 + e^x) x dx = \int_0^1 x dx + \int_0^1 x e^x dx = H_1 + H_2$

$\diamond$ Với $H_1 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

$\diamond$ Với $H_2 = \int_0^1 x e^x dx$. Đặt: $\diamond u = x \Rightarrow du = dx$

$\diamond dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

Khi đó: $H_2 = \int_0^1 x e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1 = 1$

Vậy: $H = H_1 + H_2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

e) $L = \int_{-1}^1 x^2 (1 - x^3)^4 dx$. Đặt: $t = 1 - x^3 \Rightarrow dt = -3x^2 dx$. Đổi cận: $\frac{x}{t} \left| \begin{matrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{matrix} \right.$

Khi đó: $L = -\frac{1}{3} \int_2^0 t^4 dx = \frac{1}{3} \int_0^2 t^4 dx = \frac{1}{3} \frac{t^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{32}{15}$

f) $M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - 1) \cos x dx$. Đặt: $\diamond u = 2x - 1 \Rightarrow du = 2dx$

$\diamond dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x$

Khi đó: $M = (2x - 1) \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = (2x - 1) \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 3$

Bài 9. Tính các tích phân sau:

$$a) I = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$$

$$b) J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x} dx$$

$$c) K = \int_0^2 |x^2 - x| dx$$

$$d) H = \int_1^2 \frac{x}{1+\sqrt{x-1}} dx$$

$$e) L = \int_2^3 \ln(x^2 - x) dx$$

$$f) M = \int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x} \ln x}{x} dx$$

HD & Giải

$$a) I = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}} = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2+4}}. \text{ Đặt: } t = \sqrt{x^2+4} \Rightarrow \begin{cases} t^2 - 4 = x^2 \\ dt = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}} \end{cases}. \text{ Đổi cận: } \begin{array}{c|c} x & \sqrt{5} \\ \hline t & 3 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} & 2\sqrt{3} \\ \hline & 4 \end{array}$$

$$\text{Khi đó: } I = \int_3^4 \frac{dt}{t^2-4} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| \Big|_3^4 = \frac{1}{4} \left(\ln \frac{1}{3} - \ln \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{4} \ln \frac{5}{3}$$

$$b) J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1+\sin 2x} dx.$$

$$\text{Đặt: } t = 1 + \sin 2x \Rightarrow dt = \frac{1}{2} \cos 2x. \text{ Đổi cận: } \begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline t & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} & \frac{\pi}{4} \\ \hline & 2 \end{array}$$

$$\text{Khi đó: } J = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln \left| t \right| \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$c) K = \int_0^2 |x^2 - x| dx. \text{ Ta có: } \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & 0 & 1 & 2 & +\infty \\ \hline x^2 - x & & 0 & - & 0 & + & \end{array}$$

$$\text{Do đó: } K = \int_0^2 |x^2 - x| dx = \int_0^1 (-x^2 + x) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = 1$$

$$d) H = \int_1^2 \frac{x}{1+\sqrt{x-1}} dx. \text{ Đặt: } t = \sqrt{x-1} \Rightarrow \begin{cases} t^2 + 1 = x \\ 2tdt = dx \end{cases}. \text{ Đổi cận: } \begin{array}{c|c} x & 1 \\ \hline t & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} & 2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Khi đó:

$$H = \int_0^1 \frac{(t^2+1)2t}{1+t} dt = 2 \int_0^1 \frac{t^3+t}{1+t} dt = 2 \int_0^1 \left(t^2 - t + 2 - \frac{2}{t+1} \right) dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t - 2 \ln|t+1| \right) \Big|_0^1 = \frac{11}{3} - 4 \ln 2$$

$$e) L = \int_2^3 \ln(x^2 - x) dx. \text{ Đặt: } \begin{cases} u = \ln(x^2 - x) \Rightarrow du = \frac{2x-1}{x(x-1)} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x-1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } L = (x-1) \ln(x^2-1) \Big|_2^3 - \int_2^3 \frac{2x-1}{x} dx = (x-1) \ln(x^2-1) \Big|_2^3 - (2x - \ln|x|) \Big|_2^3 = 3 \ln 3 - 2$$

$$\text{Cách khác: } L = \int_2^3 \ln(x^2 - x) dx = \int_2^3 \ln x dx + \int_2^3 \ln(x-1) dx = L_1 + L_2. \text{ Tích phân từng phần cho } L_1 \text{ và } L_2$$

$$f) M = \int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x} \ln x}{x} dx. \text{ Đặt: } t = \sqrt{1+3\ln x} \Rightarrow \begin{cases} \frac{t^2-1}{3} = \ln x \\ \frac{2}{3} t dt = \frac{dx}{x} \end{cases}. \text{ Đổi cận: } \begin{array}{c|c} x & 1 \\ \hline t & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} & e \\ \hline & 2 \end{array}$$

$$\text{Khi đó: } M = \int_1^2 t \left(\frac{t^2-1}{2} \right) \frac{2}{3} t dt = \frac{2}{9} \int_1^2 (t^4 - t^2) dt = \frac{2}{9} \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{116}{135}$$

Bài 10.

- a) Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo ra do hình phẳng giới hạn bởi (C) : $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ và các đường thẳng $y = 0, x = 0, x = 3$ quay quanh trục Ox .
- b) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = e^x, y = 2$ và đường thẳng $x = 1$

HD & Giải

- a) Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra bởi phép quay quanh trục Ox miền phẳng D giới hạn bởi:

$$\begin{cases} (C) : y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 \\ y = 0 \\ x = 0, x = 3 \end{cases} \text{ là:}$$

$$V = \pi \int_0^3 y^2 dx = \pi \int_0^3 \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right)^2 dx = \pi \int_0^3 \left(\frac{x^6}{9} - \frac{2}{3}x^5 + x^4 \right) dx = \pi \left(\frac{x^7}{63} - \frac{x^6}{9} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^3 = \frac{81\pi}{35}$$

- b) Hoành độ giao điểm của các đường thẳng $y = e^x$ và $y = 2$ là: $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường đã cho

$$\text{Ta có: } S = \int_{\ln 2}^1 |e^x - 2| dx = \left| \int_{\ln 2}^1 (e^x - 2) dx \right| = \left| e^x - 2x \right|_{\ln 2}^1 = e + 2 \ln 2 - 4$$

Bài 11.

- a) Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường: $y = x \ln x, y = 0, x = e$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình H quanh trục Ox .
- b) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P) : y = -x^2 + 4x$ và đường thẳng $d : y = x$.

HD & Giải

- a) Hoành độ giao điểm của các đường thẳng $y = x \ln x$ và $y = 0$ là: $x \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra bởi phép quay quanh trục Ox miền phẳng D giới hạn bởi:

$$\begin{cases} y = x \ln x \\ y = 0 \\ x = 1, x = e \end{cases} \text{ là: } V = \int_1^e y^2 dx = \pi \int_1^e (x \ln x)^2 dx = \pi \left[\left(\frac{x^3}{3} \ln^2 x \right) \Big|_1^e - \frac{2}{3} \int_1^e x^2 \ln x dx \right] = \frac{\pi e^3}{3} - \frac{2}{3} \pi \int_1^e x^2 \ln x dx$$

$$\diamond \int_1^e x^2 \ln x dx = \left(\frac{x^3}{3} \ln x \right) \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3} \ln x \Big|_1^e - \frac{x^3}{9} \Big|_1^e = \frac{2e^3 + 1}{9}$$

$$\text{Vậy: } V = \frac{\pi e^3}{3} - \frac{2\pi}{3} \left(\frac{2e^3 + 1}{9} \right) = \frac{\pi(5e^3 - 2)}{27}$$

- b) Hoành độ giao điểm của parabol $(P) : y = -x^2 + 4x$ và đường thẳng $d : y = x$ là:

$$-x^2 + 4x = x \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 3$$

Gọi S là diện tích cần tìm.

$$\text{Ta có: } S = \int_0^3 |-x^2 + 4x - x| dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x) dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right) \Big|_0^3 = \frac{9}{2}$$

Bài 12. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$ và $y = \frac{x^2}{4\sqrt{2}}$

HD & Giải

Hoành độ giao điểm của các đường thẳng $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$ và $y = \frac{x^2}{4\sqrt{2}}$ là:

$$\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x^2}{4\sqrt{2}} \Leftrightarrow 4 - \frac{x^2}{4} = \frac{x^4}{32} \Leftrightarrow x^4 + 8x^2 - 128 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -16 \text{ (loại) hoặc } x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$$

Nhận xét: Với $x \in [-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}] \Rightarrow \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} \geq \frac{x^2}{4\sqrt{2}}$. Gọi S là diện tích cần tìm, ta có:

$$S = \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{4\sqrt{2}} \right) dx = 2 \left[\int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} - \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^2}{4\sqrt{2}} \right] = 2(S_1 - S_2)$$

♦ Với $S_1 = \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$ Đặt: $x = 4 \sin t \Rightarrow dx = 4 \cos t dt$. Đổi cận:

x	0	$2\sqrt{2}$
t	0	$\frac{\pi}{4}$

Khi đó: $S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 8 \cos^2 t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt = 4 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi + 2$

♦ Với $S_2 = \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^2}{4\sqrt{2}} = \frac{x^3}{12\sqrt{2}} \Big|_0^{2\sqrt{2}} = \frac{4}{3}$

Vậy: $S = 2(S_1 - S_2) = 2 \left(\pi + 2 - \frac{4}{3} \right) = 2\pi + \frac{4}{3}$

Bài 13. Một ô tô đang chạy với vận tốc $20(m/s)$ thì người người đạp phanh (còn gọi là “thắng”). Sau khi đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -40t + 20(m/s)$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

HD\Giải

Lấy mốc thời gian là lúc ô tô bắt đầu được đạp phanh. Gọi T là thời điểm ô tô dừng. Ta có $v(T) = 0$ suy ra $20 = 40T \Leftrightarrow T = 0,5$. Như vậy, khoảng thời gian từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn của ô tô là 0,5 giây. Trong khoảng thời gian 0,5 giây đó, ô tô di chuyển được quãng đường là

$$s = \int_0^{0,5} (20 - 40t) dt = \left(20t - 20t^2 \right) \Big|_0^{0,5} = 5(m)$$

Bài 14. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 1 - 2 \sin 2t(m/s)$. Tính quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0(s)$ đến thời điểm $t = \frac{3\pi}{4}(s)$

HD\Giải

Quãng đường $S = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 - 2 \sin 2t) dt = \frac{3\pi}{4} - 1$

Bài 15. Một vật đang chuyển động với vận tốc $10(m/s)$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2(m/s^2)$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

HD\Giải

Gọi $v(t)$ là vận tốc của vật. Ta có $v'(t) = a(t) = 3t + t^2$. Suy ra $v(t) = \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + C$

Vì $v(0) = 10$ nên suy ra $C = 10$. Vậy $v(t) = \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + 10$

Do đó quãng đường vật đi được là $S = \int_0^{10} \left(\frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + 10 \right) dt = \frac{4300}{3}(m)$

Bài 16. Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu $25(m/s)$. Gia tốc trọng trường là $9,8(m/s^2)$.

- a) Sau bao lâu thì viên đạn đạt tới độ cao lớn nhất?
 b) Tính quãng đường viên đạn đi được từ lúc bắn lên cho đến khi chạm đất (tính chính xác đến hàng phần trăm).

HD&Giải

a) Gọi $v(t)$ là vận tốc của viên đạn. Ta có $v'(t) = a(t) = -9,8$

Suy ra $v(t) = \int -9,8 dt = -9,8t + C$. Vì $v(0) = 25$ nên $C = 25$. Vậy $v(t) = -9,8t + 25$.

b) Gọi T là thời điểm đạn đạt tới độ cao lớn nhất. Tại đó viên đạn có vận tốc bằng 0.

Vậy $v(T) = 0$. Suy ra $T = \frac{25}{9,8} \approx 2,55$ (giây).

Vậy quãng đường viên đạn đi được cho đến khi rơi xuống là $2S \approx 31,89(m)$

Bài 17. Giả sử một vật từ trạng nghỉ khi $t = 0(s)$ chuyển động thẳng với vận tốc $v(t) = t(5-t)$ (m/s). Tìm quãng đường vật đi được cho tới khi nó dừng lại.

HD&Giải

Vật dừng lại tại thời điểm $t = 5$. Quãng đường vật đi được là $S = \int_0^5 t(5-t) dt = \frac{125}{6}$ (m)

Bài 18. Một đám vi trùng tại ngày thứ t có số lượng là $N(t)$. Biết rằng $N'(t) = \frac{4000}{1+0,5t}$ và lúc đầu vi trùng có 250000 con. Hỏi sau 10 ngày số lượng vi trùng là bao nhiêu?

HD&Giải

Ta có: $N(t) = \int \frac{4000}{1+0,5t} dt = 8000 \ln(1+0,5t) + 250000$. Suy ra: $N(10) = 8000 \ln 6 + 250000 \approx 264334$

Bài 19. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)$ (m/s) có gia tốc $v'(t) = \frac{3}{t+1}$ (m/s^2). Vận tốc ban đầu của vật là 6 (m/s). Hỏi vận tốc của vật sau 10 giây (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

HD&Giải

Ta có: $v(t) = \int \frac{3}{t+1} dt = 3 \ln(t+1) + c$ mà $v(0) = 6 \Rightarrow c = 6 \Rightarrow v(t) = 3 \ln(t+1) + 6$

Vậy: $v(10) = 3 \ln 11 + 6 \approx 13(m/s)$

Bài 20. Một vật chuyển động với vận tốc ban đầu $5m/s$ và có gia tốc được xác định bởi công thức $a = \frac{2}{t+1}$ (m/s^2). Vận tốc của vật sau 10s đầu tiên là (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

HD&Giải

Ta có $v(t) = \int \frac{2}{t+1} dt = 2 \ln(t+1) + c$

Mà vận tốc ban đầu $5m/s$ tức là: $v(0) = 5 \Leftrightarrow 2 \ln(0+1) + c = 5 \Leftrightarrow c = 5$. Nên $v(t) = 2 \ln(t+1) + 5$

Vận tốc của vật sau 10s đầu tiên là: $v(10) = 2 \ln(11) + 5 \approx 9,8$

Bài 21. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$. Tính giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$.

HD&Giải

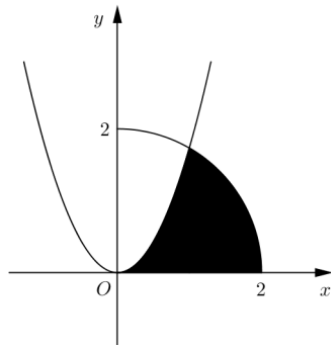
Ta có: $\int \frac{2}{2x-1} dx = \ln|2x-1| + C = f(x)$

❖ Với $x < \frac{1}{2} \Rightarrow C = 1$ nên $f(-1) = 1 + \ln 3$

❖ Với $x > \frac{1}{2} \Rightarrow C = 2$ nên $f(3) = 2 + \ln 5$.

Vậy $f(-1) + f(3) = 3 + \ln 15$

Bài 22. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4-x^2}$ (với $0 \leq x \leq 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



HD & Giải

Phương trình hoành độ giao điểm giữa parabol và cung tròn ta được

$$\sqrt{3}x^2 = \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow x = 1 \text{ với } 0 \leq x \leq 2, \text{ Ta có diện tích}$$

$$S = \int_0^1 \sqrt{3}x^2 dx + \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{\sqrt{3}}{3} x^3 \Big|_0^1 + \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{\sqrt{3}}{3} + \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

$$\text{Đặt: } x = 2 \sin t \Rightarrow dx = 2 \cos t dt; x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}; x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{3} + 2 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi - \sqrt{3}}{6}$$

Bài 23. Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{180}t^2 + \frac{11}{18}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s²) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A . Tính vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A .

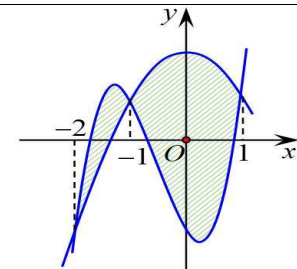
HD & Giải

Tính từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi bị chất điểm B bắt kịp thì A đi được 15 giây, B đi được 10 giây. Ta có: $v_B(t) = \int a dt = at + C$, do $v_B(0) = 0$ suy ra $v_B(t) = at$.

Chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi bị chất điểm B bắt kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được là bằng nhau. Vì vậy: $\int_0^{15} \left(\frac{1}{180}t^2 + \frac{11}{18}t \right) dt = \int_0^{10} at dt \Leftrightarrow 75 = 50a \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$.

Vậy vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(10) = \frac{3}{2} \cdot 10 = 15$ (m/s).

Bài 24. Cho hai hàm số $f(x) = ax^2 + bx^2 + cx - 2$ và $g(x) = dx^2 + ex + 2$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2 ; -1 ; 1 . Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng bao nhiêu?



HD & Giải

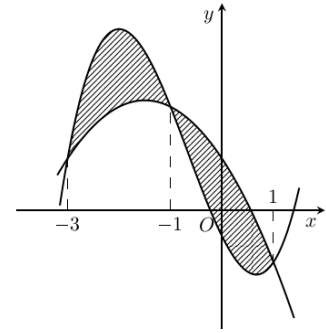
Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f(x)$ và $g(x)$ là

$$ax^3 + bx^2 + cx - 2 = dx^2 + 3x + 2 \Leftrightarrow a^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - 4 = 0 (*)$$

Do đồ thị của hai hàm số cắt nhau tại ba điểm suy ra phương trình $(*)$ có ba nghiệm $x = -2$; $x = -1$; $x = 1$. Ta được $ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - 4 = k(x+2)(x+1)(x-1)$.

Ta có: $-4 = -2k \Rightarrow k = 2$. Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $\int_{-2}^1 |2(x+2)(x+1)(x-1)| dx = \frac{37}{6}$.

Bài 25. Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2}$ và $g(x) = dx^2 + ex + 1$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-3; -1; 1$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng bao nhiêu?



HD&Giải

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_{-3}^{-1} [f(x) - g(x)] dx + \int_{-1}^1 [g(x) - f(x)] dx$$

$$= \int_{-3}^{-1} \left[ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - \frac{3}{2} \right] dx - \int_{-1}^1 \left[ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - \frac{3}{2} \right] dx.$$

Trong đó phương trình $ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - \frac{3}{2} = 0$ (*) là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Phương trình (*) có nghiệm $-3; -1; 1$ nên ta có:

$$\begin{cases} -27a + 9(b-d) - 3(c-e) - \frac{3}{2} = 0 \\ -a + (b-d) - (c-e) - \frac{3}{2} = 0 \\ a + (b-d) + (c-e) - \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -27a + 9(b-d) - 3(c-e) = \frac{3}{2} \\ -a + (b-d) - (c-e) = \frac{3}{2} \\ a + (b-d) + (c-e) = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ (b-d) = \frac{3}{2} \\ (c-e) = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } S = \int_{-3}^{-1} \left[\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \right] dx - \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \right] dx = 2 - (-2) = 4.$$

Bài 26. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{2}{9}$ và $f'(x) = 2x[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của $f(1)$.

HD&Giải

$$\text{Ta có } f'(x) = 2x[f(x)]^2 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = 2x \Leftrightarrow \left[\frac{1}{f(x)} \right]' = -2x \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = -x^2 + C.$$

$$\text{Theo giả thiết, ta có: } f(2) = -\frac{2}{9} \text{ suy ra } C = -\frac{1}{2}. \text{ Do đó } f(1) = \frac{1}{-1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{2}{3}.$$

Bài 27. Biết $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+x\sqrt{x+1}}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - c$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P = a + b + c$.

HD&Giải

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+x\sqrt{x+1}}} &= \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} = \int_1^2 \frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} dx \\ &= \int_1^2 \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) dx = \left(2\sqrt{x} - 2\sqrt{x+1} \right) \Big|_1^2 = 2\sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = \sqrt{32} - \sqrt{12} - 2 \end{aligned}$$

Suy ra : $P = a + b + c = 32 + 12 + 2 = 46$.

Bài 28. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^1 f(x) dx = 2$; $\int_0^3 f(x) dx = 6$.

Tính $I = \int_{-1}^1 f(|2x-1|) dx$.

HD **Giải**

Có $I = \int_{-1}^1 f(|2x-1|) dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(1-2x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(2x-1) dx = I_1 + I_2$

Tính $I_1 = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(1-2x) dx$. Đặt $u = 1-2x \Rightarrow du = -2dx$. Đổi cận : $\begin{cases} x = -1 \Rightarrow u = 3 \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow u = 0 \end{cases}$.

$$\Rightarrow I_1 = \frac{-1}{2} \int_3^0 f(u) du = \frac{1}{2} \int_0^3 f(u) du = 3$$

Tính $I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(2x-1) dx$. Đặt $u = 2x-1 \Rightarrow du = 2dx$. Đổi cận : $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow u = 1 \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow u = 0 \end{cases}$.

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 f(u) du = \frac{1}{2} \int_0^1 f(u) du = 1. \text{ Vậy } I = I_1 + I_2 = 4.$$

Bài 29. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trong đoạn $[1; e]$, biết $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = 1$, $f(e) = 1$.

Tính $I = \int_1^e f'(x) \cdot \ln x dx$.

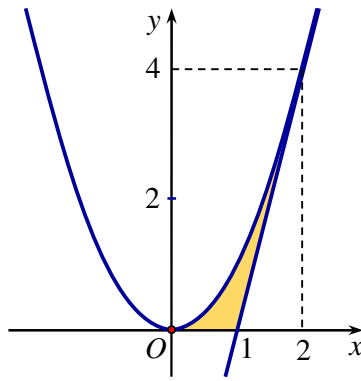
HD **Giải**

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = f(x) \end{cases}$.

$$\text{Suy ra } I = \int_1^e f'(x) \cdot \ln x dx = f(x) \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = f(e) - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Bài 30. Cho hình (H) giới hạn bởi trục hoành, đồ thị của một Parabol và một đường thẳng tiếp xúc với Parabol đó tại điểm $A(2; 4)$, như hình vẽ bên. Thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi khi hình (H) quay quanh trục Ox .

HD **Giải**



Parabol có đỉnh là gốc tọa độ như hình vẽ và đi qua $A(2; 4)$ nên có phương trình $y = x^2$.

Tiếp tuyến của Parabol đó tại $A(2; 4)$ có phương trình là $y = 4(x - 2) + 4 = 4x - 4$.

Suy ra thể tích vật thể tròn xoay cần tìm là

$$V = \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx - \pi \int_1^2 (4x - 4)^2 dx = \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx - \pi \int_1^2 (4x - 4)^2 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{32}{5};$$

$$\int_1^2 (4x - 4)^2 dx = 16 \int_1^2 (x^2 - 2x + 1) dx = 16 \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right) \Big|_1^2 = \frac{16}{3}.$$

$$\text{Vậy } V = \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx - \pi \int_1^2 (4x - 4)^2 dx = \pi \left(\frac{32}{5} - \frac{16}{3} \right) = \frac{16\pi}{15}.$$

Bài 31. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4$ và $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = 2$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

HD & Giải

Xét $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4$. Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx \Rightarrow \frac{dt}{1+t^2} = dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$. $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = \int_0^1 f(\tan x) dx = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t^2} dt = 4 \Rightarrow \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2} dx = 4.$$

Khi đó, ta có: $\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2} (1+x^2) dx = \int_0^1 f(x) dx = 4 + 2 = 6$

Bài 32. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa $2f(x) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

HD & Giải

Ta có: $\int_0^1 [2f(x) + 3f(1-x)] dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \Leftrightarrow A + B = C$.

Tính: $C = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$. Đặt $x = \sin t$ suy ra $dx = \cos t dt$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

Vậy: $C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

Tính: $B = \int_0^1 3f(1-x) dx$. Đặt: Đặt $t = 1-x \Rightarrow dt = -dx$. Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1$; $x=1 \Rightarrow t=0$.

$$\text{Vậy: } B = \int_0^1 3f(t) dt = \int_0^1 3f(x) dx.$$

$$\text{Do đó: } \int_0^1 [2f(x) + 3f(x)] dx = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 5 \int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{20}.$$

Bài 33. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 16$, $\int_0^2 f(x) dx = 4$. Tính tích phân

$$I = \int_0^1 x \cdot f'(2x) dx.$$

HD\>Giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(2x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} f(2x) \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó, } I = x \cdot \frac{1}{2} f(2x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x) dx = \frac{1}{2} f(2) - \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x) dx = 8 - \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x) dx = 8 - \frac{1}{2} H.$$

$$\text{Tính } H = \int_0^1 f(2x) dx. \text{ Đặt } t = 2x \Rightarrow dt = 2dx. \text{ Với } x=0 \Rightarrow t=0; x=1 \Rightarrow t=2.$$

$$\text{Suy ra } I = 8 - \frac{1}{4} \int_0^2 f(t) dt = 8 - 1 = 7.$$

Bài 34. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 6$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 3$. Tính

$$\text{tích phân } I = \int_0^4 f(x) dx.$$

HD\>Giải

$$\bullet \text{ Xét } I = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 6, \text{ đặt } \sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt$$

$$\text{Đổi cận: } x=1 \Rightarrow t=1; x=16 \Rightarrow t=4. I = 2 \int_1^4 f(t) dt = 6 \Rightarrow \int_1^4 f(t) dt = \frac{6}{2} = 3.$$

$$\bullet J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 3, \text{ đặt } \sin x = u \Rightarrow \cos x dx = du$$

$$\text{Đổi cận: } x=0 \Rightarrow u=0; x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=1. J = \int_0^1 f(u) du = 3$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^4 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx = 3 + 3 = 6.$$

Bài 35. Một vật chuyển động với vận tốc 10m/s thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian là $a(t) = t^2 + 3t$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc.

HD&Giải

Ta có $v(0) = 10 \text{ m/s}$ và $v(t) = \int_0^t a(t) dt = \int_0^t (t^2 + 3t) dt = \left(\frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} \right) \Big|_0^t = \frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2$.

Quãng đường vật đi được là $S = \int_0^6 v(t) dt = \int_0^6 \left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 \right) dt = \left(\frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{2}t^3 \right) \Big|_0^6 = 216 \text{ m}$.

Bài 36. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm lẻ và liên tục trên $[-4; 4]$ biết $\int_{-2}^0 f(-x) dx = 2$ và $\int_1^2 f(-2x) dx = 4$. Tính $I = \int_0^4 f(x) dx$.

HD&Giải

Xét tích phân $\int_{-2}^0 f(-x) dx = 2$. Đặt $-x = t \Rightarrow dx = -dt$.

Đổi cận: khi $x = -2$ thì $t = 2$; khi $x = 0$ thì $t = 0$ do đó

$$\int_{-2}^0 f(-x) dx = - \int_2^0 f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt \Rightarrow \int_0^2 f(t) dt = 2 \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx = 2.$$

Do hàm số $y = f(x)$ là hàm số lẻ nên $f(-2x) = -f(2x)$.

$$\text{Do đó } \int_1^2 f(-2x) dx = - \int_1^2 f(2x) dx \Rightarrow \int_1^2 f(2x) dx = -4.$$

Xét $\int_1^2 f(2x) dx$. Đặt $2x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt$.

Đổi cận: khi $x = 1$ thì $t = 2$; khi $x = 2$ thì $t = 4$ do đó $\int_1^2 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_2^4 f(t) dt = -4$

$$\Rightarrow \int_2^4 f(t) dt = -8 \Rightarrow \int_2^4 f(x) dx = -8.$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^4 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = 2 - 8 = -6.$$

Bài 37. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(4-x) = f(x)$. Biết $\int_1^3 xf(x) dx = 5$.

Tính $I = \int_1^3 f(x) dx$.

HD&Giải

Áp dụng: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và thỏa mãn điều kiện $f(a+b-x) = f(x), \forall x \in [a; b]$.

$$\text{Khi đó } \int_a^b xf(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$$

Ta có: $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và thỏa mãn $f(1+3-x) = f(x)$.

$$\text{Khi đó } \int_1^3 xf(x) dx = \frac{1+3}{4} \int_1^3 f(x) dx \Rightarrow \int_1^3 f(x) dx = \frac{5}{2}.$$

CHƯƠNG III

NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

---000---

§1. NGUYÊN HÀM

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K . Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

Như vậy: $\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

2. Tính chất

$$\diamond \int f'(x)dx = f(x) + C \quad \diamond \int kf(x)dx = k \int f(x)dx \quad \diamond \int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

3. Bảng nguyên hàm

Nguyên hàm của các hàm số sơ cấp thường gặp	Nguyên hàm của những hàm số hợp đơn giản	Nguyên hàm của những hàm số hợp (với $t = t(x)$)
1. $\int 0dx = C$		$\int 0dt = C$
2. $\int dx = x + C$	$\int kdx = kx + C$	$\int dt = t + C$
3. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	$\int t^\alpha dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$
4. $\int \frac{1}{x^\alpha} dx = -\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} + C$	$\int \frac{1}{(ax+b)^\alpha} dx = -\frac{1}{a(\alpha-1)(ax+b)^{\alpha-1}} + C$	$\int \frac{1}{t^\alpha} dt = -\frac{1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} + C$
5. $\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$	$\int \sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{3a} \sqrt{(ax+b)^3} + C$	$\int \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{t^3} + C$
6. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + C$	$\int \frac{1}{t} dt = \ln t + C$
7. $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$	$\int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a(ax+b)} + C$	$\int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} + C$
8. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C, x > 0$	$\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}} dx = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a} + C, ax+b > 0, a \neq 0$	$\int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2\sqrt{t} + C, t > 0$
9. $\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$	$\int e^t dt = e^t + C$
10. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (a \neq 1, a > 0)$	$\int a^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{a^{ax+b}}{\ln a} + C (a \neq 1, a > 0)$	$\int a^t dt = \frac{a^t}{\ln a} + C$ ($a \neq 1, a > 0$)
11. $\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$	$\int \cos t dt = \sin t + C$
12. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$	$\int \sin t dt = -\cos t + C$
13. $\int \tan x dx = -\ln \cos x + C$	$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln \cos x + C$	$\int \tan t dt = -\ln \cos t + C$
14. $\int \cot x dx = \ln \sin x + C$	$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln \sin x + C$	$\int \cot t dt = \ln \sin t + C$
15. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 t} dt = \tan t + C$

16. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cdot \cot(ax+b) + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 t} dt = -\cot t + C$
17. $\int \tan^2 x dx = \tan x - x + C$	$\int \tan^2(ax+b) dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) - x + C$	$\int \tan^2 t dt = \tan t - t + C$
18. $\int \cot^2 x dx = -\cot x - x + C$	$\int \cot^2(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) - x + C$	$\int \cot^2 t dt = -\cot t - t + C$
19. $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$	$\int \frac{1}{(ax+b)(cx-d)} dx = \frac{1}{ad-bc} \ln \left \frac{ax+b}{cx-d} \right + C$	
20. $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$	$\int \ln(ax+b) dx = \frac{(ax+b) \ln(ax+b) - ax}{a} + C$	
21. $\int \log_a x dx = \frac{x \ln x - x}{\ln a} + C$	$\int \log_a(mx+n) dx = \frac{(mx+n) \ln(mx+n) - mx}{m \ln a} + C$	

4. Phương pháp tính nguyên hàm

a. Phương pháp biến đổi

❖ Nếu $\int f(u) du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$\int f(u(x)) u'(x) dx = F(u(x)) + C$. **Lưu ý:** Đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x) dx$. Khi đó: $\int f(t) dt = F(t) + C$, sau đó thay ngược lại $t = u(x)$ ta được kết quả cần tìm.

❖ Với $u = ax + b (a \neq 0)$, ta có $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$

b. Phương pháp tính nguyên hàm từng phần

❖ Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên K thì

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) v(x) dx \quad \text{hay} \quad \int u dv = uv - \int v du$$

❖ Đặt $u = f(x) \Rightarrow du = f'(x) dx$ và $dv = g(x) dx \Rightarrow v = \int g(x) dx = G(x)$ (chọn $C = 0$)

Lưu ý: Với $P(x)$ là đa thức

N.Hàm Đặt	$\int P(x) e^x dx$	$\int P(x) \cos x dx$ hay $\int P(x) \sin x dx$	$\int P(x) \ln x dx$
u	$P(x)$	$P(x)$	$\ln x$
dv	$e^x dx$	$\cos x dx$ hay $\sin x dx$	$P(x) dx$

Yêu cầu tìm nguyên hàm của một hàm số được hiểu là tìm nguyên hàm trên từng khoảng xác định của nó.

Lưu ý: Cách đặt u : “**Nhất logarit (ln) – Nhì đa – Tam lượng (giác) – Tứ mũ**” và phần còn lại là dv .

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tìm một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3 \sin x + \frac{2}{x}$.

A. $\int f(x) dx = -3 \cos x + 2 \ln x + C.$

B. $\int f(x) dx = 3 \sin x + 2 \ln x.$

C. $\int f(x) dx = -3 \cos x + 2 \ln x.$

D. $\int f(x) dx = 3 \sin x + 2 \ln x + C.$

Câu 2: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = (1 + \cos x)^2$.

A. $\int f(x) dx = \frac{3x}{2} - 2 \sin x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{3x}{2} + 2 \cos x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{3x}{2} + 2 \sin x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$

D. $\int f(x) dx = 2 \sin x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$

Câu 3: Tìm một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos \frac{x}{2}$.

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} + C.$

B. $\int f(x)dx = 2 \sin \frac{x}{2}.$

C. $\int f(x)dx = 2 \sin \frac{x}{2} + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}.$

Câu 4: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}.$

A. $\int f(x)dx = x^2 + \ln|x-1| + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{x^2}{2} - \ln|x-1| + C.$

D. $\int f(x)dx = \ln|x-1| + C.$

Câu 5: Hãy tính $H = \int \frac{x+1}{(x-2)(x+3)} dx.$

A. $H = \frac{1}{3} \ln \left[|x-2|^3 (x+3)^2 \right] + C.$

B. $H = \ln \left[|x-2|^3 (x+3)^2 \right] + C.$

C. $H = \frac{1}{15} \ln \left[|x-2|^3 (x+3)^2 \right] + C.$

D. $H = \frac{1}{5} \ln \left[|x-2|^3 (x+3)^2 \right] + C.$

Câu 6: Hãy tính $M = \int \frac{1}{x\sqrt{1-x}} dx.$

A. $M = \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} \right| + C.$

B. $M = \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C.$

C. $M = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C.$

D. $M = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} \right| + C.$

Câu 7: Tính $I = \int \cot x dx.$

A. $I = -\ln|\cos x| + C.$

B. $I = \ln|\cos x| + C.$

C. $I = \ln|\sin x| + C.$

D. $I = -\ln|\sin x| + C.$

Câu 8: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}.$

A. $F(x) = \ln e^x + C.$

B. $F(x) = \ln(e+1) + C.$

C. $F(x) = \ln(e^x + 1) + C.$

D. $F(x) = x \ln(e^x + 1) + C.$

Câu 9: Tính $H = \int x(1+x^2)^{\frac{3}{2}} dx.$

A. $H = \frac{1}{5} (1+x^2)^{\frac{5}{2}} + C.$

B. $H = (1+x^2)^{\frac{5}{2}} + C.$

C. $H = \frac{1}{5} (1+x^2)^{\frac{2}{5}} + C.$

D. $H = (1+x^2)^{\frac{2}{5}} + C.$

Câu 10: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin x \cos x}.$

A. $\int f(x)dx = \ln|\cos x| + C.$

B. $\int f(x)dx = \ln|\cot x| + C.$

C. $\int f(x)dx = \ln|\sin x| + C.$

D. $\int f(x)dx = \ln|\tan x| + C.$

Câu 11: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x \sin \frac{x}{2}.$

A. $F(x) = -x \cos \frac{x}{2} + 4 \sin \frac{x}{2} + C.$

B. $F(x) = -2x \cos \frac{x}{2} + 4 \sin \frac{x}{2} + C.$

C. $F(x) = -2 \cos \frac{x}{2} + 4 \sin \frac{x}{2} + C.$

D. $F(x) = 2x \cos \frac{x}{2} + 4 \sin \frac{x}{2} + C.$

Câu 12: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}.$

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+3} \right| + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+3} \right| + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+3}{x-1} \right| + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{3}{4} \ln \left| \frac{x+3}{x-1} \right| + C.$

Câu 13: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \frac{1}{\cos^2 x}$ biết $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

A. $F(x) = -\cos x + \tan x + \sqrt{2} - 1.$

B. $F(x) = \sin x + \cot x + \sqrt{2} - 1.$

C. $F(x) = -\cos x + \tan x + \sqrt{2}.$

D. $F(x) = \cos x - \tan x + \sqrt{2} - 1.$

Câu 14: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x}$ biết $F(e) = \frac{e^2}{2}.$

A. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \ln|x| + 1$ B. $F(x) = \frac{x^2}{2} + \ln|x| - 1$ C. $F(x) = x^2 + \ln|x| - 1$ D. $F(x) = \frac{x^2}{2} + \ln|x|$

Câu 15: Tìm hàm số $f(x)$ biết $f'(x) = \frac{15\sqrt{x}}{14}$ và $f(1) = 4.$

A. $f(x) = \frac{5\sqrt{x^3}}{7} + \frac{23}{7}.$ B. $f(x) = \frac{5\sqrt{x^3}}{7} - \frac{23}{7}.$ C. $f(x) = \frac{\sqrt{x^3}}{7} - \frac{23}{7}.$ D. $f(x) = \frac{\sqrt{x^3}}{7} + \frac{23}{7}.$

Câu 16: Tìm hàm số $f(x)$ biết $f'(x) = 2 - x^2$ và $f(2) = \frac{7}{3}.$

A. $f(x) = 2x - x^3 + 1.$ B. $f(x) = 2x + \frac{x^3}{3} + 1.$ C. $f(x) = 2 - \frac{x^3}{3} + 1.$ D. $f(x) = 2x - \frac{x^3}{3} + 1.$

Câu 17: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x^3 \sqrt{x^4 + 3}.$

A. $F(x) = (x^4 + 3) \sqrt{x^4 + 3} + C.$

B. $F(x) = \frac{(x^4 + 3) \sqrt{x^4 + 3}}{6} + C.$

C. $F(x) = \frac{(x^4 + 3) \sqrt{x^4 + 3}}{4} + C.$

D. $F(x) = \frac{(x^4 + 3) \sqrt{x^4 + 3}}{3} + C.$

Câu 18: Tính $K = \int \frac{\sqrt{1 + \tan x}}{\cos^2 x} dx.$

A. $K = \frac{2}{3} (1 + \tan x) \sqrt{1 + \tan x} + C.$

B. $K = \frac{1}{3} (1 + \tan x) \sqrt{1 + \tan x} + C.$

C. $K = (1 + \tan x) \sqrt{1 + \tan x} + C.$

D. $K = \frac{2}{3} (1 + \cot x) \sqrt{1 + \tan x} + C.$

Câu 19: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x-1)(x^4 + 3x).$

A. $\int f(x)dx = \frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{5} + x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{5} + x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C.$

C. $\int f(x)dx = x^6 - x^5 + x^3 - x^2 + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + x^2 - \frac{3}{2}x + C.$

Câu 20: Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số liên tục trên K và $k \neq 0$. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. $\int f'(x)dx = f(x) + C.$

B. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

C. $\int [f(x).g(x)]dx = \int f(x)dx.\int g(x)dx.$

D. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx.$

Câu 21: Hãy tính $K = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx.$

A. $K = 2 \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| - \sin x + C.$

B. $K = 2 \ln \left| \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \right| + \cos x + C.$

C. $K = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| - \sin x + C.$

D. $K = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \right| - \cos x + C.$

Câu 22: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^2 x.$

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\cos 2x + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

Câu 23: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = (1 - x^2)e^{2x}.$

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{4}(1 - 2x + 2x^2)e^{2x} + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{1}{4}(1 + 2x - 2x^2)e^{2x} + C.$

C. $\int f(x)dx = (1 + 2x - 2x^2)e^{2x} + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}(1 + 2x - 2x^2)e^{2x} + C.$

Câu 24: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = xe^x.$

A. $F(x) = xe^x + e^x + C.$ B. $F(x) = x - e^x + C.$ C. $F(x) = xe^x + C.$ D. $F(x) = xe^x - e^x + C.$

Câu 25: Hãy tính $E = \int (1 + x) \ln x dx.$

A. $E = \left(x + \frac{x^2}{2}\right) - \left(x + \frac{x^2}{4}\right) + C.$

B. $E = \left(x + \frac{x^2}{2}\right) \ln x - \left(x + \frac{x^2}{4}\right) + C.$

C. $E = \left(x + \frac{x^2}{2}\right) \ln x + C.$

D. $E = \left(x + \frac{x^2}{2}\right) \ln x + \left(x + \frac{x^2}{4}\right) + C.$

Câu 26: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3 \cos x - 3^{x-1}.$

A. $\int f(x)dx = 3 \sin x + \frac{3^{x-1}}{\ln 3} + C.$

B. $\int f(x)dx = 3 \sin x - \frac{3^{x-1}}{\ln 3} + C.$

C. $\int f(x)dx = -3 \cos x - \frac{3^{x-1}}{\ln 3} + C.$

D. $\int f(x)dx = 3 \cos x - \frac{3^{x-1}}{\ln 3} + C.$

Câu 27: Tìm một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x^4.$

A. $\int f(x)dx = \frac{5}{4}x^5.$ B. $\int f(x)dx = \frac{5}{4}x^5 + C.$ C. $\int f(x)dx = \frac{4}{5}x^5 + C.$ D. $\int f(x)dx = \frac{4}{5}x^5.$

Câu 28: Tính $K = \int (\ln x)^2 dx.$

A. $K = (\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C.$

B. $K = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + x + C.$

C. $K = x(\ln x)^2 - x \ln x + 2x + C.$

D. $K = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C.$

Câu 29: Hãy tính $G = \int \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} dx.$

A. $G = \ln(\sin x) - x + C.$

B. $G = \tan x \cdot \ln(\sin x) + C.$

C. $G = \tan x \cdot \ln(\sin x) + x + C.$

D. $G = \tan x \cdot \ln(\sin x) - x + C.$

Câu 30: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = e^{\sqrt{3x-9}}$.

A. $F(x) = \frac{2}{3} \left(\sqrt{3x-9} \cdot e^{\sqrt{3x-9}} - e^{\sqrt{3x-9}} \right) + C.$

B. $F(x) = \left(\sqrt{3x-9} - 1 \right) e^{\sqrt{3x-9}} + C.$

C. $F(x) = \frac{2}{3} \sqrt{3x-9} \cdot e^{\sqrt{3x-9}} + C.$

D. $F(x) = \frac{2}{3} \left(\sqrt{3x-9} \cdot e^{\sqrt{3x-9}} + e^{\sqrt{3x-9}} \right) + C.$

Câu 31: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{\cos^3 x}{\cos x + 1}$.

A. $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\sin 2x - \sin x - \tan \frac{x}{2} + C.$

B. $F(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \sin x - \tan \frac{x}{2} + C.$

C. $F(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x - \sin x - \tan \frac{x}{2} + C.$

D. $F(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x - \sin x - \tan \frac{x}{2} + C.$

Câu 32: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x\sqrt{x^2-5}$.

A. $F(x) = \frac{(x^2-5)\sqrt{x^2-5}}{3} + C.$

B. $F(x) = \frac{x^2\sqrt{x^2-5}}{2} + C.$

C. $F(x) = (x^2-5)\sqrt{x^2-5} + C.$

D. $F(x) = \frac{(x^2-5)\sqrt{x^2-5}}{4} + C.$

Câu 33: Tính $I = \int (1-x)^9 dx$.

A. $I = -\frac{(1-x)^{10}}{9} + C.$

B. $I = -(1-x)^{10} + C.$

C. $I = \frac{(1-x)^{10}}{10} + C.$

D. $I = -\frac{(1-x)^{10}}{10} + C.$

Câu 34: Tính $H = \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$.

A. $H = e^{\cot x} + C.$

B. $H = e^{\tan x} + C.$

C. $H = \frac{1}{2}e^{\tan x} + C.$

D. $H = e^{-\tan x} + C.$

Câu 35: Tính $I = \int \tan x dx$.

A. $I = -\ln |\cos x| + C.$

B. $I = -\ln |\sin x| + C.$

C. $I = \ln |\cos x| + C.$

D. $I = \ln |\sin x| + C.$

Câu 36: Hãy tính $I = \int e^{\sin x} \cos x dx$.

A. $I = -e^{\sin x} + C.$

B. $I = e^{\cos x} + C.$

C. $I = e^{\sin x} \cdot \cos x + C.$

D. $I = e^{\sin x} + C.$

Câu 37: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

A. $F(x) = \tan x + \cot x + C.$

B. $F(x) = \sin x + \cos x + C.$

C. $F(x) = \tan x - \cot x + C.$

D. $F(x) = \sin x \cdot \cos x + C.$

Câu 38: Hàm số $F(x) = e^{x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây ?

A. $f(x) = x^2 e^{x^2} - 1.$

B. $f(x) = e^{2x}.$

C. $f(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}.$

D. $f(x) = 2xe^{x^2}.$

Câu 39: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{\sin^2 x} \right)$.

A. $F(x) = 2e^x + \tan x + C.$

B. $F(x) = 2e^x + \cot x + C.$

C. $F(x) = 2e^x - \tan x + C.$

D. $F(x) = 2e^x - \cot x + C.$

Câu 40: Hãy tính $I = \int e^{\sin^2 x} \cdot \sin 2x dx$.

A. $I = e^{\cos^2 x} + C.$

B. $I = e^{\sin^2 x} + C.$

C. $I = -e^{\sin^2 x} + C.$

D. $I = e^{\sin^2 x} \cdot \cos 2x + C.$

Câu 41: Hãy tính $J = \int (2^x - 3^x)^2 dx.$

A. $J = \frac{2^x}{\ln 2} - 2 \frac{6^x}{\ln 6} + \frac{3^x}{\ln 3} + C.$

B. $J = \frac{4^x}{\ln 4} - \frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C.$

C. $J = \frac{4^x}{\ln 4} - 2 \frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C.$

D. $J = \frac{4^x}{\ln 4} - \frac{6^x}{\ln 3} + \frac{9^x}{\ln 9} + C.$

Câu 42: Hãy tính $M = \int (1 - 2x)e^x dx.$

A. $M = (3 - 2x)e^x + C.$ B. $M = (2x - 3)e^x + C.$ C. $M = (3 + 2x)e^x + C.$ D. $M = 2xe^x + C.$

Câu 43: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$

A. $\int f(x)dx = \frac{3}{2}x^3 + 3\sqrt[3]{x} + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}x^3 + \sqrt[3]{x} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}x^3 + 3\sqrt[3]{x} + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}x^3 + 3\sqrt[3]{x} + C.$

Câu 44: Tính $H = \int \cos^3 x \sin x dx.$

A. $H = -\frac{1}{4}\sin^4 x + C.$ B. $H = \frac{1}{4}\sin^4 x + C.$ C. $H = \frac{1}{4}\cos^4 x + C.$ D. $H = -\frac{1}{4}\cos^4 x + C.$

Câu 45: Hàm số $y = \frac{1}{\sin^2 x}$ có nguyên hàm $F(x)$ là biểu thức nào dưới đây, nếu biết đồ thị của hàm số

$F(x)$ đi qua điểm $M\left(\frac{\pi}{6}; 0\right).$

A. $F(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} - \cot x.$ B. $F(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3} + \cot x.$ C. $F(x) = \sqrt{3} - \cot x.$ D. $F(x) = -\sqrt{3} + \cot x.$

Câu 46: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = e^x \left(7 - \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right).$

A. $F(x) = 7e^x + \tan x + C.$

B. $F(x) = 7e^x - \cot x + C.$

C. $F(x) = 7e^x - \tan x + C.$

D. $F(x) = 7e^x + \cot x + C.$

Câu 47: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x\sqrt{x+1}.$

A. $F(x) = 2\sqrt{x+1} \left(\frac{x+1}{5} - \frac{2}{3} \right) + C.$

B. $F(x) = 2(x+1)\sqrt{x+1} \left(\frac{x+1}{5} - \frac{2}{3} \right) + C.$

C. $F(x) = 2(x+1) \left(\frac{x+1}{5} - \frac{2}{3} \right) + C.$

D. $F(x) = (x+1)\sqrt{x+1} \left(\frac{x+1}{5} - \frac{2}{3} \right) + C.$

Câu 48: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}.$

A. $F(x) = \frac{1}{2}(2x+1) + C.$

B. $F(x) = 2\sqrt{2x+1} + C.$

C. $F(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C.$

D. $F(x) = \sqrt{2x+1} + C.$

Câu 49: Hãy tính $P = \int x \sin(2x+1) dx.$

A. $P = -\frac{1}{2} \cos(2x+1) + \frac{1}{4} \sin(2x+1) + C.$

B. $P = \frac{1}{2} x \cos(2x+1) + \frac{1}{4} \sin(2x+1) + C.$

C. $P = -\frac{1}{2} x \cos(2x+1) + \frac{1}{4} \sin(2x+1) + C.$

D. $P = x \cos(2x+1) + \frac{1}{4} \sin(2x+1) + C.$

Câu 50: Hãy tính $I = \int x^2 \sin x dx.$

A. $I = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$

B. $I = x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$

C. $I = -\cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$

D. $I = \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$

Câu 51: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sqrt{x} \ln x.$

A. $F(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}} \ln x - \frac{4}{9} x^{\frac{2}{3}} + C.$

B. $F(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{4}{9} x^{\frac{3}{2}} + C.$

C. $F(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{4}{9} x^{\frac{3}{2}} + C.$

D. $F(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln x + \frac{4}{9} x^{\frac{3}{2}} + C.$

Câu 52: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$

A. $\int f(x) dx = \frac{2}{\sqrt{1-x}} + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{C}{\sqrt{1-x}}.$

C. $\int f(x) dx = -2\sqrt{1-x} + C.$

D. $\int f(x) dx = C\sqrt{1-x}.$

Câu 53: Tính $H = \int \frac{1}{e^x + e^{-x} + 2} dx.$

A. $H = -\frac{1}{1+e^x} + C.$

B. $H = \frac{1}{1+e^x} + C.$

C. $H = -\frac{1}{1+e^{-x}} + C.$

D. $H = \frac{1}{1+e^{-x}} + C.$

Câu 54: Tính $H = \int x e^{-x^2} dx.$

A. $H = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$

B. $H = \frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$

C. $H = -\frac{1}{2} e^{x^2} + C.$

D. $H = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$

Câu 55: Tính $H = \int \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{\sin x - \cos x}} dx.$

A. $H = 2\sqrt{\sin 2x} + C.$

B. $H = 2\sqrt{\sin x + \cos x} + C.$

C. $H = 2\sqrt{\cos x - \sin x} + C.$

D. $H = 2\sqrt{\sin x - \cos x} + C.$

Câu 56: Tìm một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}.$

A. $\int f(x) dx = \sqrt{x^3} + 4\sqrt{x} + C.$

B. $\int f(x) dx = \sqrt{x^3} + 4\sqrt{x}.$

C. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \sqrt{x^3} + 4\sqrt{x} + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \sqrt{x^3} + 4\sqrt{x}.$

Câu 57: Cho hàm số $f(x) = 2^{\sqrt{x}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$ Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. $\int f(x) dx = 2^{\sqrt{x}+1} + C.$

B. $\int f(x) dx = 2(2^{\sqrt{x}} - 1) + C$

C. $\int f(x) dx = 2^{\sqrt{x}} + C$

D. $\int f(x) dx = 2(2^{\sqrt{x}} + 1) + C.$

Câu 58: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{x}{(x+1)^7}.$

A. $F(x) = -\frac{1}{5(x+1)^5} + \frac{1}{6(x+1)^6} + C.$

B. $F(x) = -\frac{5}{6(x+1)^6} + \frac{6}{5(x+1)^5} + C.$

C. $F(x) = \frac{1}{5(x+1)^5} + \frac{1}{6(x+1)^6} + C.$

D. $F(x) = \frac{1}{5(x+1)^5} - \frac{1}{6(x+1)^6} + C.$

Câu 59: Hãy tính $I = \int \cos(7x+5)dx.$

A. $I = \frac{1}{7} \sin(7x+5) + C.$

B. $I = \frac{1}{7} \cos(7x+5) + C.$

C. $I = -\frac{1}{7} \sin(7x+5) + C.$

D. $I = -\frac{1}{7} \cos(7x+5) + C.$

Câu 60: Tìm hàm số $f(x)$ biết $f'(x) = 4\sqrt{x} - x$ và $f(4) = 0.$

A. $f(x) = \frac{8x\sqrt{x}}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{40}{3}.$

B. $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{40}{3}.$

C. $f(x) = \frac{8x\sqrt{x}}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{40}{3}.$

D. $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{40}{3}.$

Câu 61: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$

A. $F(x) = 2 \ln e^x + C.$

B. $F(x) = 2 \ln e^{-x} + C.$

C. $F(x) = \ln(e^x + e^{-x}) + C.$

D. $F(x) = \ln(e^x - e^{-x}) + C.$

Câu 62: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{x}{3}e^{2x}.$

A. $F(x) = \frac{1}{6}xe^{2x} - \frac{1}{12}e^{2x} + C.$

B. $F(x) = \frac{1}{6}e^{2x} - \frac{1}{12}e^{2x} + C.$

C. $F(x) = \frac{1}{6}xe^{2x} + \frac{1}{12}e^{2x} + C.$

D. $F(x) = \frac{1}{6}xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + C.$

Câu 63: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \cos x.$

A. $\int f(x)dx = -\frac{x^2 \sin x}{2} + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{x^2 \cos x}{2} + C.$

C. $\int f(x)dx = -x \cos x + \sin x + C.$

D. $\int f(x)dx = x \sin x + \cos x + C.$

Câu 64: Hãy tính $I = \int 2x(x^2+1)^3 dx.$

A. $I = \frac{1}{8}(x^2+1)^4 + C.$ B. $I = (x^2+1)^4 + C.$ C. $I = \frac{1}{4}(x^2+1)^4 + C.$ D. $I = \frac{1}{2}(x^2+1)^4 + C.$

Câu 65: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x^3 \sqrt{x^2+7}.$

A. $F(x) = \frac{(x^2+7)^2 \sqrt{x^2+7}}{5} + \frac{7(x^2+7) \sqrt{x^2+7}}{3} + C.$

B. $F(x) = \frac{(x^2+7)^2 \sqrt{x^2+7}}{3} - \frac{7(x^2+7) \sqrt{x^2+7}}{5} + C.$

C. $F(x) = \frac{\sqrt{x^2+7}}{5} - \frac{7\sqrt{x^2+7}}{3} + C.$

$$\text{D. } F(x) = \frac{(x^2 + 7)^2 \sqrt{x^2 + 7}}{5} - \frac{7(x^2 + 7)\sqrt{x^2 + 7}}{3} + C.$$

Câu 66: Hãy tính $I = \int \frac{x-1}{x(x+1)^2} dx$.

$$\text{A. } I = \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{2}{x+1} + C.$$

$$\text{B. } I = \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| + \frac{1}{x+1} + C.$$

$$\text{C. } I = \frac{2}{x+1} - \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| + C.$$

$$\text{D. } I = \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{1}{x+1} + C.$$

Câu 67: Hãy tính $I = \int \cos^2 x \sin x dx$.

$$\text{A. } I = -\frac{1}{3} \sin^3 x + C. \quad \text{B. } I = -\frac{1}{3} \cos^3 x + C. \quad \text{C. } I = \frac{1}{3} \sin^3 x + C. \quad \text{D. } I = \frac{1}{3} \cos^3 x + C.$$

Câu 68: Tìm một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}$.

$$\text{A. } \int f(x) dx = \frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}.$$

$$\text{B. } \int f(x) dx = \frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$$

$$\text{C. } \int f(x) dx = \frac{1}{\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$$

$$\text{D. } \int f(x) dx = \frac{1}{3 \cos^3 x} + \frac{1}{\cos x}.$$

Câu 69: Tính $K = \int x \cos x dx$.

$$\text{A. } K = x \sin x + \cos x + C.$$

$$\text{B. } K = x \sin x - \cos x + C.$$

$$\text{C. } K = \sin x + \cos x + C.$$

$$\text{D. } K = -x \sin x + \cos x + C.$$

Câu 70: Hãy tính $I = \int (2x+1)^4 dx$.

$$\text{A. } I = \frac{1}{2} (2x+1)^5 + C. \quad \text{B. } I = \frac{1}{4} (2x+1)^5 + C. \quad \text{C. } I = \frac{1}{10} (2x+1)^5 + C. \quad \text{D. } I = \frac{1}{5} (2x+1)^5 + C.$$

Câu 71: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{3x^2 + 11x + 9}{(x+1)(x+2)^2}$.

$$\text{A. } F(x) = 2 \ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| - \frac{1}{x+2} + C.$$

$$\text{B. } F(x) = \ln |x+1| - \frac{1}{x+2} + 2 \ln |x+2| + C.$$

$$\text{C. } F(x) = \ln |x+1| - \frac{1}{x+2} - 2 \ln |x+2| + C.$$

$$\text{D. } F(x) = -\frac{1}{x+2} + 2 \ln \left| \frac{x+2}{x+1} \right| + C.$$

Câu 72: Hãy tính $F = \int \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx$.

$$\text{A. } F = \frac{\ln x}{x+1} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C.$$

$$\text{B. } F = -\frac{\ln x}{x+1} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C.$$

$$\text{C. } F = -\frac{\ln x}{x+1} - \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C.$$

$$\text{D. } F = \frac{\ln x}{x+1} - \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C.$$

Câu 73: Hãy tính $M = \int x \ln(1+x) dx$.

$$\text{A. } M = \frac{1}{2} (x^2 - 1) - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} x + C.$$

$$\text{B. } M = \frac{1}{2} (x^2 - 1) \ln(1+x) - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} x + C.$$

$$\text{C. } M = \frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} x + C.$$

$$\text{D. } M = (x^2 - 1) \ln(1+x) - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} x + C.$$

Câu 74: Hãy tính $I = \int x e^{-x} dx$.

- A. $I = -x e^{-x} + C$. B. $I = -x e^{-x} + e^x + C$. C. $I = x e^{-x} - e^x + C$. D. $I = -x e^{-x} - e^x + C$.

Câu 75: Biết $\int \frac{x}{(x+1)(2x+1)} dx = \int \left(\frac{a}{x+1} + \frac{b}{2x+1} \right) dx$. Tích của $P = a.b$.

- A. $P = 1$. B. $P = 0$. C. $P = -1$. D. $P = \frac{1}{2}$.

Câu 76: Hãy tính $N = \int (x^2 + 2x - 1) e^x dx$.

- A. $N = e^x (x^2 - 1) + C$. B. $N = e^x + C$. C. $N = e^x x^2 - 1 + C$. D. $N = e^x - x + C$.

Câu 77: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

- A. $\int f(x) dx = \frac{2}{3} (2x-1) \sqrt{2x-1} + C$. B. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \sqrt{2x-1} + C$.
C. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} (2x-1) \sqrt{2x-1} + C$. D. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \sqrt{2x-1} + C$.

Câu 78: Hãy tính $I = \int \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+4}} dx$.

- A. $I = (x^2 + 4)^{\frac{2}{3}} + C$. B. $I = \frac{3}{2} (x^2 + 4)^{\frac{2}{3}} + C$. C. $I = \frac{3}{2} (x^2 + 4)^{\frac{3}{2}} + C$. D. $I = \frac{1}{2} (x^2 + 4)^{\frac{2}{3}} + C$.

Câu 79: Hãy tính $I = \int \sin^2 x \cos x dx$.

- A. $I = \sin^3 x + C$. B. $I = \cos^3 x + C$. C. $I = \frac{1}{3} \sin^3 x + C$. D. $I = \frac{1}{3} \cos^3 x + C$.

Câu 80: Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = (1-x) \cos x$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Tìm hằng số C .

- A. $C = 1 - \frac{\pi}{2}$. B. $C = 0$. C. $C = \frac{\pi}{2}$. D. $C = \pi$.

Câu 81: Hàm số nào dưới đây không là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x(2+x)}{(x+1)^2}$.

- A. $F(x) = \frac{x^2}{x+1}$. B. $F(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x+1}$. C. $F(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x+1}$. D. $F(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x+1}$.

Câu 82: Tìm một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x}$.

- A. $\int f(x) dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$. B. $\int f(x) dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} + C$.
C. $\int f(x) dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. D. $\int f(x) dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3}$.

Câu 83: Hãy tính $N = \int \frac{x dx}{\sqrt{2x+1} + 1}$.

- A. $N = \frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{3} - \frac{2x+1}{2} + C$. B. $N = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{3} + \frac{2x+1}{2} \right) + C$.
C. $N = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{3} - \frac{2x+1}{2} \right) + C$. D. $N = 2 \left(\frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{3} - \frac{2x+1}{2} \right) + C$.

Câu 84: Hãy tính $F = \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$.

A. $F = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.$

B. $F = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.$

C. $F = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \sqrt{1+x^2} + C.$

D. $F = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$

Câu 85: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x^3 \ln(2x)$.

A. $F(x) = \frac{x^4 \ln(2x)}{4} - \frac{x^4}{16} + C.$

B. $F(x) = \frac{\ln(2x)}{4} - \frac{x^4}{16} + C.$

C. $F(x) = \frac{x \ln(2x)}{4} - \frac{x^4}{16} + C.$

D. $F(x) = \frac{x^4 \ln(2x)}{4} + \frac{x^4}{16} + C.$

Câu 86: Tìm hàm số $f(x)$ biết $f'(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^x}$ và $f(\ln 2) = 1$.

A. $f(x) = e^x + e^{-x} - \frac{3}{2}.$ B. $f(x) = e^x + e^{-x} + \frac{3}{2}.$ C. $f(x) = e^x - e^{-x} - \frac{3}{2}.$ D. $f(x) = e^x - e^{-x} + \frac{3}{2}.$

Câu 87: Hãy tính $L = \int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx$.

A. $L = 3\sqrt[3]{\sin x} + C.$ B. $L = -3\sqrt[3]{\cos x} + C.$ C. $L = -3\sqrt[3]{\sin x} + C.$ D. $L = 3\sqrt[3]{\cos x} + C.$

Câu 88: Tính $J = \int 2x \ln(x-1) dx$.

A. $J = x \ln(x-1) - \frac{x^2}{2} - x - \ln|x-1| + C.$

B. $J = x^2 \ln(x-1) - x^2 - x - \ln|x-1| + C.$

C. $J = \ln(x-1) - \frac{x^2}{2} - x - \ln|x-1| + C.$

D. $J = x^2 \ln(x-1) - \frac{x^2}{2} - x - \ln|x-1| + C.$

Câu 89: Hãy tính $K = \int \cos \sqrt{x} dx$.

A. $K = 2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 2 \cos \sqrt{x} + C.$

B. $K = \sqrt{x} \sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x} + C.$

C. $K = 2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x} + C.$

D. $K = 2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + C.$

Câu 90: Tính $J = \int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$.

A. $J = \ln|\ln(\ln x)| + C.$ B. $J = \ln|x \ln x| + C.$ C. $J = \ln|\ln x| + C.$ D. $J = x \ln|\ln x| + C.$

Câu 91: Hãy tính $E = \int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$.

A. $E = x - \frac{1-x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C.$

B. $E = x + \frac{1-x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C.$

C. $E = x - \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C.$

D. $E = x - \frac{x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C.$

Câu 92: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x^2 \cos x$.

A. $F(x) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x - 2C.$

B. $F(x) = \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x - 2C.$

C. $F(x) = x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \sin x - 2C.$

D. $F(x) = x \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x - 2C.$

Câu 93: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^2 x$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \cos 2x + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$

Câu 94: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x^2 - x - 12)}.$

A. $F(x) = 5\ln|x-1| + 7\ln|x-4| - 4\ln|x+3| + C.$ B. $F(x) = 4\ln|x-1| + 5\ln|x-4| - 7\ln|x+3| + C.$

C. $F(x) = 4\ln|x-1| + 7\ln|x-4| - 5\ln|x+3| + C.$ D. $F(x) = 7\ln|x-1| + 4\ln|x-4| - 5\ln|x+3| + C.$

Câu 95: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{x}{(x+1)(2x+1)}.$

A. $F(x) = \ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C.$

B. $F(x) = \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C.$

C. $F(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{2x+1}\right| + C.$

D. $F(x) = \ln\left|\frac{x+1}{2x+1}\right| + C.$

Câu 96: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x \sin x.$

A. $F(x) = x \cos x + \sin x + C.$

B. $F(x) = -x \sin x + \cos x + C.$

C. $F(x) = -x \cos x + \sin x + C.$

D. $F(x) = -x \cos x - \sin x + C.$

Câu 97: Hãy tính $I = \int x e^{1+x^2} dx.$

A. $I = e^{1+x^2} + C.$

B. $I = \frac{1}{2}e^{1+x^2} + C.$

C. $I = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$

D. $I = \frac{1}{2}e + C.$

Câu 98: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{(1+x)(1-2x)}.$

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{1-2x}{1+x}\right| + C.$

B. $\int f(x)dx = \ln\left|\frac{1+x}{1-2x}\right| + C.$

C. $\int f(x)dx = \ln\left|\frac{1-2x}{1+x}\right| + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{1+x}{1-2x}\right| + C.$

Câu 99: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^5}.$

A. $F(x) = \frac{3}{2(x-1)^2} - \frac{2}{3(x-1)^3} - \frac{1}{4(x-1)^4} + C.$ B. $F(x) = \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{2}{3(x-1)^3} + \frac{1}{4(x-1)^4} + C.$

C. $F(x) = -\frac{3}{2(x-1)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} - \frac{1}{4(x-1)^4} + C.$ D. $F(x) = -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{2}{3(x-1)^3} - \frac{1}{4(x-1)^4} + C.$

Câu 100: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{3}{x(x^3+4)}.$

A. $F(x) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^3}{x^3+4}\right| + C.$

B. $F(x) = \ln\left|\frac{x^3}{x^3+4}\right| + C.$

C. $F(x) = 4 - \ln\left|\frac{x^3}{x^3+4}\right| + C.$

D. $F(x) = \frac{1}{4} - \ln\left|\frac{x^3}{x^3+4}\right| + C.$

Câu 101: Tìm hàm số $f(x)$ biết $f'(x) = 2x+1$ và $f(1) = 5.$

A. $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x}{2} + 3.$ B. $f(x) = x^2 + x + 3.$ C. $f(x) = \frac{x^2}{2} + x + 3.$ D. $f(x) = x^2 + x - 3.$

Câu 102: Hãy tính $J = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx$.

A. $J = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + C.$

B. $J = \ln \left(x - \sqrt{x^2 + a^2} \right) + C.$

C. $J = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - a^2} \right) + C.$

D. $J = \ln \left(\sqrt{x^2 + a^2} - x \right) + C.$

Câu 103: Hãy tính $I = \int e^{\cos x} \cdot \sin x dx$.

A. $I = e^{\sin x} + C.$

B. $I = -e^{\sin x} + C.$

C. $I = e^{\sin x} \cdot \sin x + C.$

D. $I = e^{\cos x} + C.$

Câu 104: Tìm hàm số $f(x)$ biết $f'(x) = x - \frac{1}{x^2} + 2$ và $f(1) = 2$.

A. $f(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{x^4}{4} + x + 1.$

B. $f(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{x^4}{4} + x.$

C. $f(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{x^4}{4} + x + 1.$

D. $f(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{x^4}{4} + x.$

Câu 105: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{\cos^2 x}$.

A. $F(x) = 2(\tan x + x) + C.$

B. $F(x) = \tan x + x + C.$

C. $F(x) = 2(\tan x - x) + C.$

D. $F(x) = \tan x - x + C.$

Câu 106: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x+1}$.

A. $\int f(x)dx = \frac{2\sqrt{(2x+1)^3}}{3} + C.$

B. $\int f(x)dx = \sqrt{x^2 + x} + C.$

C. $\int f(x)dx = \sqrt{x^2 + x} + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{3} + C.$

Câu 107: Hãy tính $Q = \int \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}} dx$.

A. $Q = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right| + C.$

B. $Q = \ln \left| \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \right| + C.$

C. $Q = \ln \left| \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right| + C.$

D. $Q = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \right| + C.$

Câu 108: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^{\sqrt{2}}$.

A. $\int f(x)dx = \frac{x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1} + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{x^{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}-1} + C.$

C. $\int f(x)dx = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}+1} + C.$

D. $\int f(x)dx = x^{\sqrt{2}-1} + C.$

Câu 109: Hãy tính $I = \int e^{\cos^2 x} \cdot \sin 2x dx$

A. $I = -e^{\cos^2 x} \sin 2x + C.$

B. $I = e^{\cos^2 x} + C.$

C. $I = -e^{\sin^2 x} + C.$

D. $I = -e^{\cos^2 x} + C.$

Câu 110: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x (1 - 2017e^{-2x})$.

A. $\int f(x)dx = e^x + 2017e^{-x} + C.$

B. $\int f(x)dx = e^x - 2017e^{-x} + C.$

C. $\int f(x)dx = e^x + 2017e^{-2x} + C.$

D. $\int f(x)dx = e^x - 2017e^{-2x} + C.$

Câu 111: Hãy tính $Q = \int (1-x)\cos x dx.$

A. $Q = (1-x)\cos x - \sin x + C.$

B. $Q = (1-x)\sin x + \cos x + C.$

C. $Q = x \sin x - \cos x + C.$

D. $Q = (1-x)\sin x - \cos x + C.$

Câu 112: Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^4 x$ là.

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{8} \left(3x + 2 \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 4x \right) + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{1}{8} \left(3x + 2 \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 4x \right).$

C. $\int f(x)dx = 3x + 2 \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 4x.$

D. $\int f(x)dx = 3x + 2 \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 4x + C.$

Câu 113: Tính $H = \int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx.$

A. $H = \cos(\ln x) + C.$

B. $H = -\cos(\ln x) + C.$

C. $H = -\sin(\ln x) + C.$

D. $H = \sin(\ln x) + C.$

Câu 114: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 3x^2$ biết $F(1) = -1.$

A. $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2.$

B. $F(x) = x^3 + 2.$

C. $F(x) = x^3 - 2.$

D. $F(x) = \frac{x^3}{3} - 2.$

Câu 115: Biết $\int \frac{3x^2 + 11x + 9}{(x+1)(x+2)^2} dx = \int \left(\frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{c}{x+2} \right) dx.$ Tính $P = abc.$

A. $P = 2.$

B. $P = 4.$

C. $P = 8.$

D. $P = \frac{1}{2}.$

Câu 116: Biết $\int \frac{x-1}{x(x+1)^2} dx = \int \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2} \right) dx.$ Tính $S = a + b + c.$

A. $S = 4.$

B. $S = 2.$

C. $S = 3.$

D. $S = 1.$

Câu 117: Hãy tính $F = \int 3x^2 \cos(2x) dx.$

A. $F = \frac{3}{4} (2x \cos 2x - \sin 2x + 2x^2 \sin 2x) + C.$

B. $F = \frac{1}{4} (2x \cos 2x - \sin 2x + 2x^2 \sin 2x) + C.$

C. $F = 2x \cos 2x - \sin 2x + 2x^2 \cos 2x + C.$

D. $F = \frac{3}{4} (2x \sin 2x - \cos 2x + 2x^2 \cos 2x) + C.$

Câu 118: Hãy tính $P = \int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx, (x > -1).$

A. $P = \frac{1}{4} (1+x^3)^{\frac{4}{3}} + C.$

B. $P = \frac{1}{4} (1+x^3)^{\frac{1}{4}} + C.$

C. $P = \frac{3}{4} (1+x^3)^{\frac{4}{3}} + C.$

D. $P = \frac{4}{3} (1+x^3)^{\frac{3}{4}} + C.$

§2. TÍCH PHÂN

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

I. Khái niệm về tích phân

Định nghĩa: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Chú ý:

1. Khi $a = b$ ta định nghĩa $\int_a^b f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0$
2. Khi $a > b$, ta định nghĩa $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
3. Tích phân không phụ thuộc vào chữ dùng làm biến số trong dấu tích phân, tức là $\int_a^b f(x)dx$ hay $\int_a^b f(t)dt, \dots$, đều tính bằng $F(b) - F(a)$ hay $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$

II Tính chất của tích phân

Tính chất 1. $k \int_a^b f(x)dx = \int_a^b k f(x)dx$ (k là hằng số)

Tính chất 2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

Tính chất 3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, $a < c < b$

III. Phương pháp tính tích phân

1. Phương pháp đổi biến số

DẠNG 1. Đặt t theo x . Cụ thể: Tính $I = \int_a^b f(x)dx$

Đặt: $t = f(x) \Rightarrow dt = f'(x)dx$. Đổi cận: $\begin{array}{c|cc} x & a & b \\ \hline t & f(a) & f(b) \end{array}$. Khi đó tính: $I = \int_{f(a)}^{f(b)} g(t)dt$

DẠNG 2. Đặt x theo t : Có các dạng cơ bản sau:

- | | |
|--|---|
| a) $\int_a^b \sqrt{1-x^2} dx$. Đặt: $x = \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. | $\int_a^b \sqrt{k^2-x^2} dx$. Đặt: $x = k \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ |
| b) $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$. Đặt $x = \sin t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. | $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{k^2-x^2}} dx$. Đặt $x = k \sin t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ |
| c) $\int_a^b \frac{1}{x^2+1} dx$. Đặt $x = \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. | $\int_a^b \frac{1}{x^2+k^2} dx$. Đặt $x = k \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ |
| $\int_a^b \frac{1}{(\alpha x + \beta)^2 + k^2} dx$. Đặt $\alpha x + \beta = k \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ | |

2. Phương pháp tính tích phân từng phần

Nếu $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx \text{ hay } \int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Tính $I = \int_a^b f(x)g(x)dx$. Đặt: $\begin{array}{l} \diamond u = f(x) \\ \Rightarrow du = f'(x)dx \end{array}$

$$\diamond dv = g(x)dx \Rightarrow v = \int g(x)dx$$

Lưu ý: Cách đặt u : “Nhất logarit (ln) – Nhì đa – Tam lượng (giác) – Tứ mũ” và phần còn lại là dv .

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = \frac{K}{3} + 1$. Tìm K .

A. $K = \frac{2}{3}$.

B. $K = 7$.

C. $K = -1$.

D. $K = \frac{10}{3}$.

Câu 2: Cho hai tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ và $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I = J$.

B. $I > J$.

C. $I < J$.

D. $I = 2J$.

Câu 3: Tính $P = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$.

A. $P = 2$.

B. $P = \ln 2$.

C. $P = 2 \ln 2$.

D. $P = 2 + \ln 2$.

Câu 4: Biết $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \alpha$ và $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \beta$. Tính $\sin(\alpha + \beta)$.

A. $\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$.

B. $\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{4}$.

C. $\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

D. $\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$.

Câu 5: Tính tích phân $N = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$.

A. $N = \frac{1+e^\pi}{2}$.

B. $N = \frac{1+e}{2}$.

C. $N = \frac{1+e^2}{2}$.

D. $N = \frac{1+e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$.

Câu 6: Biết $\int_1^b x \log_2 x dx = b - \frac{3}{4 \ln b}$, với $b \in \mathbb{Z}$. Tìm b .

A. $b \geq 0$.

B. $-2 \leq b < 0$.

C. $b \leq 1$.

D. $-2 < b \leq 4$.

Câu 7: Biết $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \alpha$. Tính $S = \sin \alpha + \cos \alpha$.

A. $S = -\frac{1}{2}$.

B. $S = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $S = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

D. $S = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Câu 8: Hãy tính $M = \int_0^1 \left(e^{2x} + \frac{3}{x+1} \right) dx$.

A. $M = \frac{e^2}{2} + 3 \ln 2 - \frac{1}{2}$.

B. $M = e^2 + 3 \ln 2 - \frac{1}{2}$.

C. $M = \frac{e^2}{2} + 3 \ln 2 - 1$.

D. $M = \frac{e^2-1}{2} + \ln 2$.

Câu 9: Tính tích phân $J = \int_0^{\frac{7}{3}} \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$ bằng cách đặt $t = \sqrt[3]{3x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $J = \frac{1}{3} \left(\frac{t^5}{5} + t^2 \right) \Big|_1^2$. B. $J = \int_1^2 (t^4 + 2t) dt$. C. $J = \frac{1}{3} \int_1^2 (t^4 + 2t) dt$. D. $J = \frac{46}{15}$.

Câu 10: Biết $\int_2^4 \left(x + \frac{1}{x} \right) dx = 6 + \ln b$. Tìm b .

A. $b = 2$. B. $b = 5$. C. $b = 3$. D. $b = 7$.

Câu 11: Tính tích phân $M = \int_1^e x^2 \ln x dx$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $M = \left(\frac{1}{3} x \ln x \right) \Big|_1^e - \left(\frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_1^e$. B. $M = \left(3x^2 \ln x \right) \Big|_1^e - 3 \int_1^e x^2 dx$.
C. $M = \left(\frac{1}{3} x^2 \ln x \right) \Big|_1^e - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx$. D. $M = \frac{2e^3 - 1}{9}$.

Câu 12: Tính $I = \int_{-1}^0 x^2 (x+1)^3 dx$.

A. $I = \frac{2}{15}$. B. $I = \frac{1}{60}$. C. $I = -\frac{1}{10}$. D. $I = -\frac{1}{60}$.

Câu 13: Cho $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \alpha$. Tính $\cos 2\alpha$.

A. $\cos 2\alpha = 1$. B. $\cos 2\alpha = 0$. C. $\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$. D. $\cos 2\alpha = -1$.

Câu 14: Tính $H = \int_{-1}^2 3x.e^{x^2} dx$.

A. $H = \frac{3}{2} (e^4 + e)$. B. $H = \frac{1}{2} (e^4 - e)$. C. $H = \frac{3}{2} (e^4 - e)$. D. $H = 3 (e^4 - e)$.

Câu 15: Giả sử $\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \ln c$. Tìm c .

A. $c = 81$. B. $c = 3$. C. $c = 9$. D. $c = 8$.

Câu 16: Biết $\int_a^3 |x^2 - 3x + 2| dx = a$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $a \in (-2; 1)$ B. $a < -1$. C. $a > 0$. D. $a \geq 0$.

Câu 17: Tính tích phân $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2-1} dx$ bằng cách đặt $u = x^2 - 1$. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. $I = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^3$. B. $I = \int_0^3 \sqrt{u} du$. C. $I = \int_1^2 \sqrt{u} du$. D. $I = \frac{2}{3} \sqrt{27}$.

Câu 18: Tính tích phân $I = \int_0^\pi \cos^2 x \cdot \sin x dx$.

A. $I = 0$. B. $I = -\frac{2}{3}$. C. $I = \frac{3}{2}$. D. $I = \frac{2}{3}$.

Câu 19: Tính tích phân $I = \int_0^\pi \sin^5 x dx$ bằng cách đặt $u = \cos x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $I = \int_{-1}^1 (1-u^2)^2 du.$ B. $I = \int_0^1 (1-u^2)^2 du.$ C. $I = \int_0^1 (1+u^2)^2 du.$ D. $I = \int_{-1}^1 (1+u^2)^2 du.$

Câu 20: Biết $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2+2x+2} = \alpha$ và $\int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1} dx = \beta$. Tính $\log_2 \frac{\alpha}{\beta}$.

A. $\log_2 \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2}.$ B. $\log_2 \frac{\alpha}{\beta} = 2.$ C. $\log_2 \frac{\alpha}{\beta} = \pi.$ D. $\log_2 \frac{\alpha}{\beta} = 4.$

Câu 21: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x} dx = a \ln b$, với a, b là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $2a+b=3.$ B. $2a+3b=0.$ C. $a+2b=\frac{5}{2}.$ D. $a.b=\frac{1}{2}.$

Câu 22: Trong các tính chất dưới đây, có bao nhiêu tính chất đúng ?

Tính chất 1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, a > b.$ Tính chất 2. $k \int_a^b f(x)dx = \int_a^b k f(x)dx.$

Tính chất 3. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$ Tính chất 4.

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, a < c < b.$

A. 2. B. 3. C. 4. D. 1.

Câu 23: Tính tích phân $E = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx$ bằng cách đặt $t = \frac{1}{x}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $E = \int_{\frac{1}{2}}^1 t\sqrt{1+t^2} dt.$ B. $E = \int_1^{\frac{1}{2}} t\sqrt{1+t^2} dt.$ C. $E = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^4} dt.$ D. $E = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^2} dt.$

Câu 24: Hãy tính $J = \int_{-1}^0 3^{x+1} dx.$

A. $J = \frac{2}{\ln 3}.$ B. $J = 2.$ C. $J = \frac{1}{\ln 3}.$ D. $J = \frac{1}{2} \ln 3.$

Câu 25: Biết $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = a$ và $\int_1^e \frac{\ln^7 x}{x} dx = b$. Tính $S = a + b.$

A. $S = \frac{1}{8}.$ B. $S = \frac{5}{8}.$ C. $S = \frac{8}{5}.$ D. $S = \frac{1}{2}.$

Câu 26: Tính tích phân $J = \int_1^2 x \ln x dx$ bằng cách đặt $u = \ln x, dv = x dx$. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. $J = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}.$ B. $J = \left(\frac{x^2}{2} \ln x \right) \Big|_1^2 - \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^2.$
C. $J = \left(\frac{x^2}{2} \ln x \right) \Big|_1^2 - \int_1^2 x dx.$ D. $J = \left(\frac{x^2}{2} \ln x \right) \Big|_1^2 + \frac{1}{2} \int_2^1 x dx.$

Câu 27: Tính tích phân $F = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\sqrt{1+4\sin 3x} \cos 3x dx$ bằng cách đặt $u = 1+4\sin 3x$. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. $F = \frac{1}{12} \int_1^5 \sqrt{u} du.$ B. $F = \frac{1}{9} (5\sqrt{5} - 1).$ C. $F = \frac{1}{12} \int_1^5 2\sqrt{u} du.$ D. $F = \frac{1}{6} \int_1^5 u^{\frac{1}{2}} du.$

Câu 28: Tính $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x - 1) \cos^2 x dx.$

A. $A = \frac{8}{15} - \frac{\pi}{4}.$ B. $A = \frac{8}{15} + \frac{\pi}{4}.$ C. $A = \frac{8\pi}{15}.$ D. $A = \frac{2\pi}{15}.$

Câu 29: Tính $K = \int_0^1 \frac{x^2 + e^x + 2x^2 e^x}{1 + 2e^x} dx.$

A. $K = \frac{1}{2} \ln \frac{1+2e}{3}.$ B. $K = \frac{1}{3} \ln \frac{1+2e}{3}.$ C. $K = \frac{1}{3} + \ln \frac{1+2e}{3}.$ D. $K = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+2e}{3}.$

Câu 30: Biết $\int_0^{\pi} x \sin x \cos^2 x dx = \alpha.$ Tính $P = \sin 2\alpha + \cos 2\alpha.$

A. $P = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$ B. $P = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$ C. $P = \frac{2\sqrt{3}-3}{6}.$ D. $P = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$

Câu 31: Cho $E = \int_1^4 (x^2 + 3\sqrt{x}) dx$ và $F = \int_1^2 (x^2 - 3x^{-4}) dx.$ Tìm mối liên hệ giữa E và $F.$

A. $E = F.$ B. $E < F.$ C. $E = \frac{1}{2} F.$ D. $E > F.$

Câu 32: Tính tích phân $I = \int_0^1 x \ln(1+x) dx.$

A. $I = \frac{1}{4}.$ B. $I = \frac{1}{2}.$ C. $I = \frac{3}{4}.$ D. $I = -\frac{1}{4}.$

Câu 33: Hãy tính $K = \int_{-1}^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx.$

A. $K = 2(\sqrt{3}+1).$ B. $K = 2(\sqrt{3}-1).$ C. $K = 2\sqrt{3}.$ D. $K = 2\sqrt{3}-1.$

Câu 34: Hãy tính $N = \int_{-2}^3 (|x+1| + |x-2|) dx.$

A. $N = 31.$ B. $N = 71.$ C. $N = 17.$ D. $N = 15.$

Câu 35: Tính tích phân $E = \int_2^5 2x \ln(x-1) dx$ bằng cách đặt $u = \ln(x-1), dv = 2x dx.$ Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. $E = 25 \ln 4 - \int_2^5 \left(x+1 + \frac{1}{x-1} \right) dx.$ B. $E = 24 \ln 4 - \frac{27}{2}.$
C. $E = (x^2 \ln(x-1)) \Big|_2^5 - \int_2^5 \frac{x^2}{x-1} dx.$ D. $E = 25 \ln 4 - \left(\frac{x^2}{2} + x + \ln|x+1| \right) \Big|_2^5.$

Câu 36: Tính tích phân $J = \int_0^{\pi} (e^{\cos x} + x) \sin x dx.$

A. $J = e - \frac{1}{e} + \pi.$ B. $J = e + \frac{1}{e} + \pi.$ C. $J = \frac{1}{e} + \pi.$ D. $J = e - \frac{1}{e} + \frac{\pi}{2}.$

Câu 37: Biết $\int_0^b |x^2 - 1| dx = b.$ Tìm $b.$

A. $b = 3$.

B. $b = 2$.

C. $b = 5$.

D. $b = 4$.

Câu 38: Tính tích phân $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$ bằng cách đặt $u = \sin x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2 du$.

B. $K = \int_0^1 u du$.

C. $K = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2 du$.

D. $K = \int_0^1 u^2 du$.

Câu 39: Tính tích phân $K = \int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{1}{\cos^2 3x(1 + \tan 3x)} dx$ bằng cách đặt $u = 1 + \tan 3x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $K = \int_1^2 \frac{1}{u} du$.

B. $K = \int_1^2 \frac{1}{3u} du$.

C. $K = \int_1^{1+\sqrt{3}} \frac{1}{u} du$.

D. $K = \int_1^{1+\sqrt{3}} \frac{1}{3u} du$.

Câu 40: Tính tích phân $F = \int_0^{\pi} e^x \cos x dx$ bằng cách đặt $u = \cos x, dv = e^x dx$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $F = e^x \cos x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sin x dx$.

B. $F = e^x \sin x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \cos x dx$.

C. $F = e^x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \sin x dx$.

D. $F = e^x \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \cos x dx$.

Câu 41: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{3 \sin x - 4 \sin^3 x}{1 + \cos 3x} dx = a \ln b$, với a, b là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. $a + b = \frac{5}{3}$.

B. $3a + b = 3$.

C. $a - b = -\frac{5}{3}$.

D. $a - 3b = -\frac{17}{3}$.

Câu 42: Biết $\int_2^4 \frac{\ln x + 1}{x \ln x} dx = a \ln b + c$, với a, b, c là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $abc = 1$.

B. $ac + b = 4$.

C. $2a - bc = 0$.

D. $a + b + c = 4$.

Câu 43: Tính $G = \int_1^3 \frac{dx}{e^x - 1}$.

A. $G = 2 - \ln(e^2 + e + 1)$.

B. $G = \ln(e^2 + e + 1)$.

C. $G = 2 \ln(e^2 + e + 1)$.

D. $G = \ln(e^2 + e + 1) - 2$.

Câu 44: Tính tích phân $I = \int_0^1 x e^x dx$ bằng cách đặt $u = x, dv = e^x dx$. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. $I = (x e^x) \Big|_0^1 + \int_0^1 e^x dx$.

B. $I = (x e^x) \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1$.

C. $I = 1$.

D. $I = (x e^x) \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx$.

Câu 45: Tính tích phân $M = \int_1^3 \frac{3 + \ln x}{(x+1)^2} dx$.

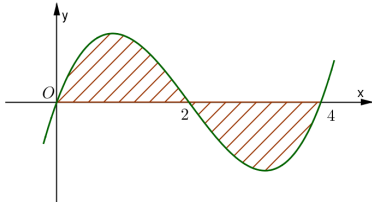
A. $M = \frac{1}{2} \left(3 - \ln \frac{27}{16} \right)$.

B. $M = \frac{1}{2} \left(3 + \ln \frac{27}{16} \right)$.

C. $M = \frac{1}{4} \left(3 - \ln \frac{27}{16} \right)$.

D. $M = \frac{1}{4} \left(3 + \ln \frac{27}{16} \right)$.

Câu 46: Diện tích hình phẳng tô đậm trong hình bên được tính theo công thức nào sau đây ?



A. $S = -\int_0^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx.$

B. $S = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx.$

C. $S = \int_0^4 f(x)dx.$

D. $S = \int_0^2 f(x)dx - \int_2^4 f(x)dx.$

Câu 47: Tính $\int_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)} = a \ln 2 + b \ln 3$, với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $a + 3b = -1.$

B. $2a + b = 0.$

C. $a - 2b = 0.$

D. $a + b = 0.$

Câu 48: Biết $\int_0^1 (x+1)e^x dx = a$, với $a \in \mathbb{R}$. Tính $\ln a$.

A. $\ln a = 10.$

C. $\ln a = 0.$

B. $\ln a = 1.$

C. $\ln a = e.$

Câu 49: Tính tích phân $I = \int_0^1 x^3 \sqrt{x^2 + 1} dx$ bằng cách đặt $u = \sqrt{x^2 + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. $I = \frac{2\sqrt{2} + 2}{15}.$

B. $I = \int_1^2 (u^4 - u^2) du.$

C. $I = \int_1^{\sqrt{2}} (u^4 - u^2) du.$

D. $I = \int_1^{\sqrt{2}} (u^2 - 1) u du.$

Câu 50: Biết $\int_{-2}^2 f(x)dx = 4$, $\int_2^5 f(x)dx = 3$ và $\int_{-2}^5 g(x)dx = 6$. Với mọi $x \in [-2; 5]$, mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $\int_{-2}^5 g(x)dx > \int_{-2}^5 f(x)dx.$

B. $f(x) \leq g(x).$

C. $f(x) > g(x).$

D. $\int_{-2}^5 f(x)dx \geq \int_{-2}^5 g(x)dx.$

Câu 51: Biết $\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 + 4} = \alpha$. Tính $\cos 2\alpha$.

A. $\cos 2\alpha = \frac{1}{2}.$

B. $\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

C. $\cos 2\alpha = -1.$

D. $\cos 2\alpha = 0.$

Câu 52: Biết $\int_1^e \frac{\ln x dx}{x(2 + \ln x)^2} = a + b \ln 2 + c \ln 3$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $a + 2b + 3c = \frac{2}{3}.$

B. $a + bc = \frac{4}{3}.$

C. $(a + b)c = -\frac{3}{4}.$

D. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3.$

Câu 53: Tính tích phân $P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin^3 x dx$ bằng cách đặt $u = \cos x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $P = \int_0^1 u^5 (1 - u^3) du.$

B. $P = \int_0^1 u^5 (1 + u^2) du.$

C. $P = \int_{-1}^0 u^5 (1 - u^2) du.$

D. $P = \int_0^1 u^5 (1 - u^2) du.$

Câu 54: Tính $F = \int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1 + \ln x}} dx.$

A. $F = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

B. $F = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

C. $F = \frac{4-2\sqrt{2}}{3}$.

D. $F = \frac{4+2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 55: Tính tích phân $J = \int_0^1 x^3 \sqrt[3]{x^4+1} dx$ bằng cách đặt $u = \sqrt[3]{x^4+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $J = \int_1^{\sqrt[3]{2}} u^3 du$.

B. $J = \frac{3}{4} \int_1^{\sqrt[3]{2}} u^3 du$.

C. $J = \frac{1}{4} \int_1^{\sqrt[3]{2}} u^3 du$.

D. $J = 3 \int_1^{\sqrt[3]{2}} u^3 du$.

Câu 56: Tính tích phân $I = \int_1^e x \ln x dx$.

A. $I = \frac{e^2-1}{4}$.

B. $I = \frac{e^2+1}{4}$.

C. $I = \frac{e^2-2}{2}$.

D. $I = \frac{e^2}{4}$.

Câu 57: Tính tích phân $E = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ bằng cách đặt $u = \sqrt{x^2+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $E = \sqrt{2}+1$

B. $E = \int_1^{\sqrt{2}} du$.

C. $E = 2 \int_1^{\sqrt{2}} du$.

D. $E = \int_1^{\sqrt{2}} u du$.

Câu 58: Tính tích phân $I = \int_0^1 x\sqrt{x^2+1} dx$ bằng cách đặt $u = \sqrt{x^2+1}$. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. $I = \frac{2\sqrt{3}-1}{3}$

B. $I = 2 \int_1^{\sqrt{2}} u^2 du$.

C. $I = \int_1^{\sqrt{2}} u^2 du$.

D. $I = -\int_{\sqrt{2}}^1 u^2 du$.

Câu 59: Tính tích phân $L = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$.

A. $L = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + 2\ln 2$.

B. $L = \frac{\pi\sqrt{3}-\ln 2}{3}$.

C. $L = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - 3\ln 2$.

D. $L = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \ln 2$.

Câu 60: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2x + 2(1 + \sin x + \cos x)} dx$ bằng cách đặt $u = \sin x + \cos x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $I = -\frac{\sqrt{2}}{2} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{(1+u)^2} du$.

B. $I = -\sqrt{2} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{(1+u)^2} du$.

C. $I = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{(1+u)^2} du$.

D. $I = -\frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{1}{(1+u)^2} du$.

Câu 61: Tính tích phân $H = \int_1^2 x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$.

A. $H = 3\ln 3 + \frac{2}{3}\ln 2 + \frac{1}{6}$.

B. $H = 3\ln 3 - 2\ln 2 + \frac{1}{6}$.

C. $H = 2\ln 2 - \frac{10}{3}\ln 3 + \frac{1}{6}$.

D. $H = 3\ln 3 - \frac{10}{3}\ln 2 + \frac{1}{6}$.

Câu 62: Tính tích phân $F = \int_1^e \frac{1+x\ln x}{x} e^x dx$.

A. $F = e^{\frac{1}{2}}$.

B. $F = e^{\frac{3}{2}}$.

C. $F = e^{\pi}$.

D. $F = e^e$.

Câu 63: Hãy tính $L = \int_1^{25} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

A. $L = 2\sqrt{2}$.

B. $L = 8$.

C. $L = 16$.

D. $L = 4$.

Câu 64: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x dx$. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. $I = \left(\frac{1}{2} x \cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx$.

B. $I = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$.

C. $I = \left(\frac{1}{2} x \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \left(\frac{1}{4} \cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$.

D. $I = \left(\frac{1}{2} x \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx$.

Câu 65: Hãy tính $F = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin x} dx$.

A. $F = 4\pi\sqrt{2}$.

B. $F = \frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$.

C. $F = 4\sqrt{2}$.

D. $F = \sqrt{2}$.

Câu 66: Tính tích phân $J = \int_0^1 x\sqrt{x+1} dx$ bằng cách đặt $u = \sqrt{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $J = 2 \int_1^{\sqrt{2}} (u^4 - u^2) du$.

B. $J = \frac{4(\sqrt{2}-1)}{15}$

C. $J = 2 \int_0^1 (u^4 - u^2) du$.

D. $J = 2 \int_0^{\sqrt{2}} (u^4 - u^2) du$.

Câu 67: Cho biết $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}} dx = a$ và $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{\sin x(1+\cos x)} dx = b$. Tính $P = a.b$.

A. $P = \frac{10}{3}$.

B. $P = 1$.

C. $P = \frac{1}{3}$.

D. $P = 3$.

Câu 68: Biết $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx = a + b \ln c$, với a, b, c là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $ab + c = 9$.

B. $ab + c = 15$.

C. $ac + b = 17$.

D. $a + bc = 11$.

Câu 69: Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} \cos^3 x \cdot \sin x dx$.

A. $I = -\frac{1}{4}$.

B. $I = -\pi^4$.

C. $I = 0$.

D. $I = -\frac{1}{4}\pi^4$.

Câu 70: Tính tích phân $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$ bằng cách đặt $u = x^2, dv = \sin x dx$. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. $J = \pi - 2$

B. $E = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$.

C. $E = (x^2 \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$.

D. $E = (-x^2 \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$.

Câu 71: Tính tích phân $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ bằng cách đặt $x = \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. $I = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}.$

B. $I = \int_0^1 \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt.$

C. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt.$

D. $I = \frac{\pi}{4}.$

Câu 72: Tính tích phân $E = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x} \right) e^{x+\frac{1}{x}} dx.$

A. $E = \frac{2}{5} e^{\frac{5}{2}}.$

B. $E = \frac{3}{2} e^{\frac{2}{5}}.$

C. $E = \frac{3}{2} e^{\frac{5}{2}}.$

D. $E = \frac{2}{3} e^{\frac{5}{2}}.$

Câu 73: Tính $I = \int_0^1 (x-1)e^x dx.$

A. $I = 2 - e.$

B. $I = \frac{1}{2} + e.$

C. $I = \frac{e-1}{2}.$

D. $I = 1 - e^2.$

Câu 74: Biết $\int_1^2 x^5 \ln x dx = a \ln 2 + b$, với a, b là số hữu tỉ. Tính $S = 3a + 4b$.

A. $S = 25.$

B. $S = \frac{107}{12}.$

C. $S = 39.$

D. $S = \frac{575}{12}.$

Câu 75: Tính tích phân $J = \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$ bằng cách đặt $x = 2 \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right].$

Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. $J = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t dt.$

B. $J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4 - \sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt.$

C. $J = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}}.$

D. $J = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Câu 76: Hãy tính $P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2(1 - \cos 2x)} dx.$

A. $P = \frac{\pi}{2}.$

B. $P = 4 + \frac{\pi}{3}.$

C. $P = 4.$

D. $P = \frac{\pi}{4}.$

Câu 77: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^n x \cos x dx = \frac{1}{64}.$ Tìm n .

A. $n = 4.$

B. $n = 5.$

C. $n = 6.$

D. $n = 3.$

Câu 78: Tính tích phân $F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \sin x \cos^3 x dx.$

A. $F = \frac{e}{2} + 1.$

B. $F = \frac{e}{2} - 1.$

C. $F = \frac{1-e}{2}.$

D. $F = \frac{e-1}{2}.$

Câu 79: Cho $\int_0^1 (2f(x) - g(x)) dx = 5$ và $\int_0^1 (3f(x) + g(x)) dx = 10$. Tính $\int_0^1 f(x) dx.$

A. $\int_0^1 f(x)dx = 10.$ B. $\int_0^1 f(x)dx = 5.$ C. $\int_0^1 f(x)dx = 15.$ D. $\int_0^1 f(x)dx = 3.$

Câu 80: Biết $\int_0^a (3x^2 + 2)dx = a^3 + 2$, với $a \in \mathbb{Z}$. Tìm a .

A. $2 \leq a < 5.$ B. $a \geq 4.$ C. $-3 < a \leq 0.$ D. $-1 \leq a \leq 1.$

Câu 81: Tính tích phân $K = \int_0^1 x^2 \sqrt[8]{1-x} dx$ bằng cách đặt $t = 1-x$. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. $K = \frac{1024}{3825}.$ B. $K = \int_0^1 (1-t^2) \sqrt[8]{t} dt.$ C. $K = \int_1^0 (1-t^2) \sqrt[8]{t} dt.$ D. $K = \int_0^1 (1-t^2) t^{\frac{1}{8}} dt.$

Câu 82: Hãy tính $I = \int_1^2 \sqrt{x+2} dx.$

A. $I = \frac{16\sqrt{3}}{3}.$ B. $I = \frac{13-3\sqrt{3}}{3}.$ C. $I = \frac{16-6\sqrt{3}}{3}.$ D. $I = \frac{-6\sqrt{3}}{3}.$

Câu 83: Tính $I = \int_0^1 x \ln(1+x^2) dx.$

A. $I = \frac{2 \ln 2 + 1}{2}.$ B. $I = \frac{2 \ln 2 - 1}{2}.$ C. $I = \frac{\ln 2 - 1}{2}.$ D. $I = \frac{1}{2}.$

Câu 84: Hãy tính $I = \int_0^1 \frac{2x+9}{x+3} dx.$

A. $I = \ln \frac{4}{3}.$ B. $I = 2 + 3 \ln \frac{4}{3}.$ C. $I = \frac{1}{2} + 3 \ln \frac{4}{3}.$ D. $I = 2.$

Câu 85: Tìm tập hợp các giá trị của b sao cho $\int_0^b (2x-4) dx = 5.$

A. $b = \{4\}.$ B. $b = \{-1; 4\}.$ C. $b = \{5\}.$ D. $b = \{-1; 5\}.$

Câu 86: Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}} dx$ bằng cách đặt $t = \sqrt{x^3+2}$. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. $I = \frac{2}{3} \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{10}} dt.$ B. $I = \frac{2}{3} (\sqrt{10} - \sqrt{3}).$ C. $I = \frac{2}{3} t \Big|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{10}}.$ D. $I = \frac{3}{2} \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{10}} dt.$

Câu 87: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx.$ Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $I = (x^2 \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx.$ B. $I = (x^2 \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx.$
C. $I = (x^2 \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx.$ D. $I = \frac{\pi^2}{4} + 2.$

Câu 88: Biết $\int_{-2}^0 \left(4 - e^{-\frac{x}{2}} \right) dx = K - 2e.$ Tìm K .

A. $K = 9.$ B. $K = 10.$ C. $K = 12,5.$ D. $K = 11.$

Câu 89: Tính tích phân $F = \int_{e^2}^{e^3} \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$.

- A. $F = 3 \ln 3 + 2 \ln 2 + 1$ B. $F = 2 \ln 2 - 3 \ln 3 - 1$ C. $F = 3 \ln 3 - 2 \ln 2 - 1$ D. $F = 2 \ln 2 + 3 \ln 3 - 1$

Câu 90: Biết $\int_1^a \frac{\ln x}{x^3} dx = \frac{3 - a \ln a}{8a}$ với $a \in \mathbb{Z}$. Tìm a .

- A. $-1 \leq a \leq 3$. B. $2 < a \leq 5$. C. $-3 \leq a \leq 0$. D. $0 \leq a < 2$.

Câu 91: Tính tích phân $I = \int_1^e x \ln x dx$. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

- A. $I = \left(\frac{1}{2} x^2 \ln x \right) \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx$. B. $I = \left(\frac{1}{2} x \ln x \right) \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx$.
C. $I = \frac{e^2 + 1}{4}$. D. $I = \left(\frac{1}{2} x^2 \ln x \right) \Big|_1^e - \left(\frac{x^2}{4} \right) \Big|_1^e$.

Câu 92: Biết $\int_1^a (2x - 1) \ln x dx = a \ln a - \frac{1}{a}$, với $a \in \mathbb{Z}$. Tìm a .

- A. $-3 < a < 1$. B. $a < 0$. C. $a \geq 1$. D. $a > 1$.

Câu 93: Tính tích phân $F = \int_1^e (\ln x)^2 dx$. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

- A. $F = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx$. B. $F = x (\ln x)^2 \Big|_1^e - 2 \left(x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx \right)$.
C. $F = e - 2$. D. $F = x (\ln x)^2 \Big|_1^e - 2 \int_1^e \ln x dx$.

Câu 94: Tính $K = \int_1^e \frac{\ln ex}{1 + x \ln x} dx$.

- A. $K = e$. B. $K = \ln(1 + e)$. C. $K = 1 + e$. D. $K = \frac{1}{2} \ln(1 + e)$.

Câu 95: Tìm a để $\int_1^a \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{a}$.

- A. $a = 3$. B. $a = 4$. C. $a = 2$. D. $a = 1$.

Câu 96: Tính tích phân $I = \int_0^1 x e^{1-x} dx$.

- A. $I = 1$. B. $I = 1 - e$. C. $I = -1$. D. $I = e - 2$.

Câu 97: Biết $\int_1^2 x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c$, với a, b, c là số hữu tỉ. Tính $S = 3a + 2b + c$.

- A. $S = -\frac{23}{6}$. B. $S = -\frac{41}{6}$. C. $S = 2$. D. $S = -\frac{1}{6}$.

Câu 98: Mệnh đề nào dưới đây sai ?

- A. $\int_0^1 e^{-x} dx > \int_0^1 \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^2 dx$. B. $\int_0^1 \ln(1+x) dx > \int_0^1 \frac{x-1}{e-1} dx$.
C. $\int_0^1 e^{-x^2} dx > \int_0^1 e^{-x^3} dx$. D. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx$.

Câu 99: Hãy tính $E = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos 2x} dx$.

- A. $E = 2\sqrt{2}$. B. $E = 2\pi\sqrt{2}$. C. $E = 2\sqrt{2} + 1$. D. $E = 2 - \sqrt{2}$.

Câu 100: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-x) \sin x \cos x dx$.

- A. $I = \frac{1}{3}(4 - \pi)$. B. $I = \frac{\pi}{8}$. C. $I = \frac{1}{8}(4 - \pi)$. D. $I = \frac{1}{2}(4 + \pi)$.

Câu 101: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \alpha$. Tính $P = \sin 8\alpha + \cos 8\alpha$.

- A. $P = 1$. B. $P = \frac{3}{2}$. C. $P = 2$. D. $P = -1$.

Câu 102: Tính tích phân $H = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin \sqrt{x} dx$.

- A. $H = 2$. B. $H = 2\sqrt{2}$. C. $H = \frac{\pi^2}{4}$. D. $H = \frac{2\pi}{3}$.

Câu 103: Tính tích phân $E = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \ln(\cos x) dx$ bằng cách đặt $u = \ln(\cos x)$, $dv = \frac{1}{x} dx$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $E = \frac{1}{2}(\ln 2 + 1)$. B. $E = (-\cos x \ln(\cos x)) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$.
 C. $E = -\cos x \ln(\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx$. D. $E = -\sin x \ln(\sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx$.

Câu 104: Biết $\int_0^1 \frac{(x^2 + 1)e^x}{(x+1)^3} dx = \frac{a}{4}$. Tính $P = a + \ln a$.

- A. $P = 3$. B. $P = e + 1$. C. $P = 2e + \ln 2$. D. $P = 4 + \ln 3$.

Câu 105: Tính tích phân $K = \int_0^1 \frac{(x^2 + 1)e^x}{(x+1)^2} dx$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $K = -\frac{(x^2 + 1)e^x}{x+1} \Big|_0^1 + \int_0^1 (x+1)e^x dx$. B. $K = -e + 1$.
 C. $K = (x+1)e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx$. D. $K = 2$.

Câu 106: Tính tích phân $L = \int_0^{\ln 2} xe^{-2x} dx$.

- A. $L = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4} - \frac{\ln 2}{2} \right)$. B. $L = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4} + \frac{\ln 2}{2} \right)$. C. $L = \frac{3 - \ln 2}{4}$. D. $L = \frac{3}{8} - \frac{\ln 2}{16}$.

Câu 107: Tính $I = \int_0^2 2e^{2x} dx$.

- A. $I = 3e^4 - 1$. B. $I = e^4 - 1$. C. $I = 4e^4$. D. $I = e^4$.

Câu 108: Hãy tính $K = \int_3^5 \frac{1}{x} dx$.

A. $K = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{5}$.

B. $K = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{3}$.

C. $K = \ln \frac{3}{5}$.

D. $K = \ln \frac{5}{3}$.

Câu 109: Nếu $\int_a^d f(x) dx = 5, \int_b^d f(x) dx = 2$ với $a < d < b$ thì $\int_a^b f(x) dx$ bằng:

A. $\int_a^b f(x) dx = 7$.

B. $\int_a^b f(x) dx = -2$.

C. $\int_a^b f(x) dx = 8$.

D. $\int_a^b f(x) dx = 3$.

Câu 110: Tính tích phân $P = \int_1^{e^\pi} \cos(\ln x) dx$.

A. $P = \frac{e^\pi + 1}{2}$.

B. $P = \frac{1 - e^\pi}{2}$.

C. $P = \frac{e^2 + 1}{2}$.

D. $P = -\frac{e^\pi + 1}{2}$.

Câu 111: Tính tích phân $I = \int_1^e \left(2x - \frac{3}{x} \right) \ln x dx$.

A. $I = \frac{e^2 - 1}{2}$.

B. $I = \frac{1 + e^2}{2}$.

C. $I = \frac{e^2}{2} - 1$.

D. $I = \frac{e^2}{2} + 1$.

Câu 112: Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3-2x}} dx$.

A. $I = \sqrt{3} + 1$.

B. $I = 1$.

C. $I = \sqrt{3} - 1$.

D. $I = \sqrt{3}$.

Câu 113: Biết $\int_0^1 (2x+2)e^x dx = 2a$ với $a \in \mathbb{R}$. Tìm a .

A. $a > 2$.

B. $0 < a < 2$.

C. $a \leq 1$.

D. $a < 1$.

Câu 114: Biết $\int_2^4 \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 dx = 2a + 5$. Tìm a .

A. $a = \frac{512}{12}$.

B. $a = \frac{215}{12}$.

C. $a = \frac{215}{24}$.

D. $a = \frac{251}{24}$.

Câu 115: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx$ bằng cách đặt $u = \tan x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{u^4}{1+u^2} du$.

B. $I = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{u^4}{1-u^2} du$.

C. $I = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{u^4}{1-u^2} du$.

D. $I = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{u^4}{1+u^2} du$.

Câu 116: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1; 4]$, $f(1) = 1$ và $f(4) = 4$. Tính $I = \int_1^4 f'(x) dx$.

A. $I = -3$.

B. $I = 5$.

C. $I = 3$.

D. $I = 4$.

Câu 117: Tính $H = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$.

A. $H = 2 - e^{\frac{\pi}{2}}$.

B. $H = 2 + e^{\ln 2}$.

C. $H = 2 - \frac{\pi}{2}$.

D. $H = 2 + \frac{\pi}{2}$.

Câu 118: Tính tích phân $E = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin 2x} dx$ bằng cách đặt $u = \tan x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $E = 2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{u} du.$

B. $E = -\frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{u} du.$

C. $E = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{u} du.$

D. $E = 2 \int_{\sqrt{3}}^1 \frac{1}{u} du.$

Câu 119: Tính tích phân bằng phương pháp từng phần $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $K = (-x \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx.$

B. $K = 0.$

C. $K = (x \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx.$

D. $K = \left(\frac{x^2}{2} \cos x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}.$

GV. Lư Sĩ Pháp

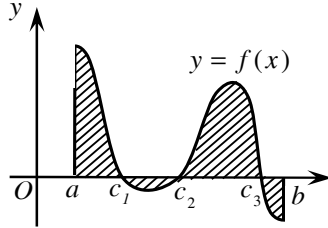
§3. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TRONG HÌNH HỌC

A. KIẾN THỨC CẦN NĂM

1. Diện tích hình phẳng

♦ Nếu hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)$, liên tục trên đoạn $[a; b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ thì diện tích S của nó được tính theo công thức: $S = \int_a^b |f(x)| dx$

Như vậy:

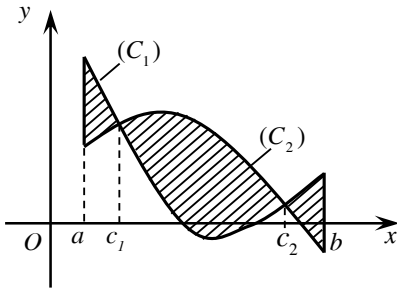


$$(H) \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \quad \boxed{S = \int_a^b |f(x)| dx}$$

Chú ý: Nếu trên $[a; b]$ hàm số $f(x)$ giữ nguyên một dấu thì: $S = \int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$

♦ Nếu hình phẳng được giới hạn bởi hai đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ thì diện tích S của nó được tính theo công thức: $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

Như vậy:



$$(H) \begin{cases} (C_1): y = f_1(x) \\ (C_2): y = f_2(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases} \quad \boxed{S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx}$$

♦ Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, $x = h(y)$ và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ được xác định: $S = \int_c^d |g(y) - h(y)| dy$.

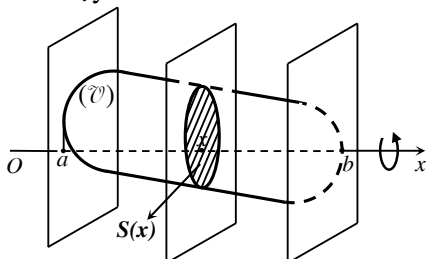
Chú ý: Nếu trên đoạn $[\alpha; \beta]$ biểu thức $f(x) - g(x)$ không đổi dấu thì:

$$\int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx = \left| \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - g(x)] dx \right|$$

2. Thể tích vật thể

Giới hạn vật thể V bởi hai mặt phẳng song song, vuông góc với trục hoành, cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ $x = a, x = b$ và $S(x)$ là diện tích thiết diện của V vuông góc với Ox tại $x \in [a; b]$. Thể tích của V được cho bởi công thức: $V = \int_a^b S(x) dx$. ($S(x)$ là hàm số không âm, liên tục trên đoạn $[a; b]$)

Như vậy:

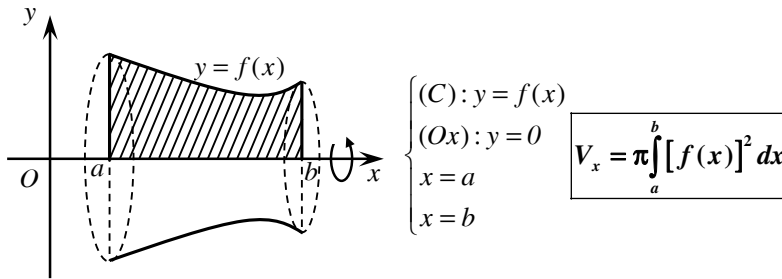


$$\boxed{V = \int_a^b S(x) dx}$$

3. Thể tích khối tròn xoay

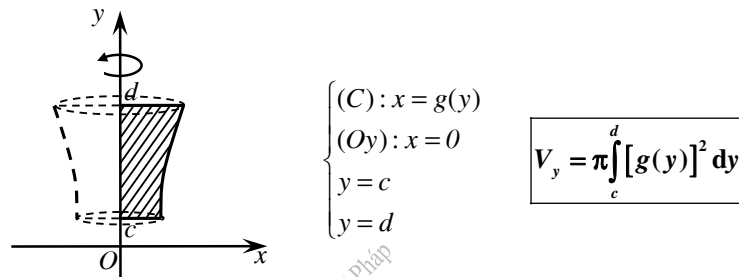
Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)$, liên tục trên đoạn $[a; b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ quay quanh trục Ox , ta được khối tròn xoay. Thể tích của khối tròn xoay này được cho bởi công thức $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$

Như vậy:



Lưu ý:

- ♦ Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y = c, y = d$ quanh trục Oy :



- ♦ Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ quanh trục Ox : $V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tính thể tích V của hình phẳng (H) quay quanh trục Ox , biết (H) giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}e^{\frac{x}{2}}, y = 0, x = 1, x = 2$.

- A. $V = \pi e$. B. $V = \pi e^2$. C. $V = \pi e^3$. D. $V = \frac{\pi}{e^2}$.

Câu 2: Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục tung mỗi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, trục tung và hai đường thẳng $y = 0, y = 4$.

- A. $V = 8 + \pi$. B. $V = \frac{1}{8}\pi$. C. $V = 8\pi$. D. $V = 2\pi$.

Câu 3: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = x^2$ và $y = 6 - |x|$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo được khi quay hình (H) xung quanh trục tung.

- A. $V = \frac{20\pi}{3}$. B. $V = \frac{27\pi}{3}$. C. $V = \frac{32\pi}{4}$. D. $V = \frac{32\pi}{3}$.

Câu 4: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = e^x$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0$ và $x = 1$. Tìm thể tích V khối tròn xoay khi quay hình (H) xung quanh trục hoành cho bởi công thức.

- A. $V = \pi \int_0^1 e^{2x} dx$. B. $V = \pi^2 \int_0^1 e^{2x} dx$. C. $V = \left(\pi \int_0^1 e^{2x} dx \right)^2$. D. $V = \pi \left(\int_0^1 e^{2x} dx \right)^2$.

Câu 5: Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $y=0, x=4$ và $y=\sqrt{x}-1$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) quanh trục hoành.

A. $V = \frac{7\pi}{6}$.

B. $V = \frac{17\pi}{16}$.

C. $V = \frac{24\pi}{25}$.

D. $V = \frac{5\pi}{6}$.

Câu 6: Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục hoành mỗi hình phẳng giới hạn các đường $y = \sin x \cdot \cos x, y=0, x=0, x=\frac{\pi}{2}$.

A. $V = \frac{\pi^2}{9}$.

B. $V = \frac{\pi^2}{4}$.

C. $V = \frac{\pi^2}{16}$.

D. $V = \frac{\pi^2}{25}$.

Câu 7: Tìm diện tích hình phẳng S được giới hạn bởi các đường cong $y=x^3, y=2-x$ và $x=0$.

A. $S=0$.

B. $S = -\frac{17}{12}$.

C. $S = \frac{17}{12}$.

D. $S = \frac{12}{17}$.

Câu 8: Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục hoành mỗi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=2$.

A. $V = \frac{\pi \ln 2}{4}$.

B. $V = \frac{\pi}{4}$.

C. $V = \frac{\pi}{2}$.

D. $V = \frac{\pi \ln 2}{2}$.

Câu 9: Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị các hàm số $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ trên $[-1; 2]$ và trục hoành.

A. $S = \frac{37}{12}$.

B. $S = -\frac{37}{12}$.

C. $S = \frac{12}{37}$.

D. $S = \frac{1}{2}$.

Câu 10: Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$ và $x=\pi$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq \pi$) là một hình vuông cạnh là $2\sqrt{\sin x}$.

A. $V = 8\pi$.

B. $V = 8$.

C. $V = 16\pi$.

D. $V = 12$.

Câu 11: Tìm diện tích hình phẳng S nằm trong góc phần tư thứ nhất, giới hạn bởi các đường thẳng $y=8x, y=x$ và đồ thị hàm số $y=x^3$.

A. $S = \frac{64}{3}$.

B. $S = \frac{63}{4}$.

C. $S = \frac{36}{4}$.

D. $S = \frac{4}{63}$.

Câu 12: Cho tam giác vuông OPM có cạnh OP nằm trên trục Ox . Đặt $OM = R$, $\widehat{POM} = \alpha$ ($0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}, R > 0$). Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay tam giác đó quanh trục Ox theo α và R .

A. $V = \frac{\pi R^3}{3}(\sin \alpha + \sin^3 \alpha)$.

B. $V = \frac{\pi R^3}{3}(\cos \alpha + \cos^3 \alpha)$.

C. $V = \frac{\pi R^3}{3}(\sin \alpha - \sin^3 \alpha)$.

D. $V = \frac{\pi R^3}{3}(\cos \alpha - \cos^3 \alpha)$.

Câu 13: Tìm diện tích hình phẳng S nằm trong góc phần tư thứ nhất, giới hạn bởi các đường thẳng $y=4x$ và đồ thị hàm số $y=x^3$.

A. $S = 7$.

B. $S = 12$.

C. $S = 5$.

D. $S = 4$.

Câu 14: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và đồ thị hàm số $y=x-x^2$.

A. $S = \frac{81}{12}$.

B. $S = \frac{4}{9}$.

C. $S = 13$.

D. $S = \frac{37}{12}$.

Câu 15: Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \ln x$, trục hoành, hai đường thẳng $x=1$ và $x=2$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng đó xung quanh trục hoành.

A. $V = 2\pi(\ln^2 2 + 2\ln 2 + 1)$.

B. $V = \pi(\ln^2 2 - 2\ln 2 + 1)$.

C. $V = 2\pi(\ln^2 2 - 2\ln 2 + 1)$.

D. $V = 2\pi(\ln^2 2 - 2\ln 2)$.

Câu 16: Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = |x^2 - 4|$, $y = \frac{x^2}{2} + 4$.

A. $S = \frac{65}{4}$.

B. $S = \frac{15}{14}$.

C. $S = \frac{64}{3}$.

D. $S = \frac{1}{12}$.

Câu 17: Tìm thể tích V của khối tròn xoay tạo bởi một hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox , hai đường thẳng $x = a$, $x = b$, ($a < b$) quay quanh trục Ox .

A. $V = \pi^2 \int_a^b f^2(x)dx$.

B. $V = \int_a^b f^2(x)dx$.

C. $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.

D. $V = \pi \int_a^b f(x)dx$.

Câu 18: Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đường cong $y = \sqrt{x}$, $x + 2y^2 = 3$ và trục hoành.

A. $S = 12$.

B. $S = \frac{1}{2}$.

C. $S = \frac{25}{2}$.

D. $S = 2$.

Câu 19: Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $x = \frac{2}{y}$, $y = 0$ và $y = 4$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) quanh trục tung.

A. $V = 5\pi$.

B. $V = 3\pi$.

C. $V = 7\pi$.

D. $V = 9\pi$.

Câu 20: Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục tung mỗi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3 - x^2$, trục tung và đường thẳng $y = 1$.

A. $V = \frac{\pi}{2}$.

B. $V = \pi - 2$.

C. $V = 2\pi$.

D. $V = \pi$.

Câu 21: Tính diện tích S của hình phẳng được giới hạn bởi hai đồ thị của hàm số $y = \cos x$, $y = \sin x$ và hai đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$.

A. $S = 2 + \sqrt{2}$.

B. $S = \sqrt{2}$.

C. $S = 2\sqrt{2}$.

D. $S = \sqrt{2} - 2$.

Câu 22: Một đám vi trùng tại ngày thứ t có số lượng là $N(t)$. Biết rằng $N'(t) = \frac{4000}{1 + 0,5t}$ và lúc đầu vi trùng có 250000 con. Hỏi sau 10 ngày số lượng vi trùng là bao nhiêu?(kết quả làm tròn)

A. $8000 \ln 6 + 250000$.

B. $8000 \ln 6$.

C. $4000 \ln 6 + 250000$.

D. 258000.

Câu 23: Cho hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = \sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình này xung quanh trục Ox .

A. $V = \frac{\pi^2}{2}$.

B. $V = \frac{1}{2}$.

C. $V = \frac{\pi}{2}$.

D. $V = \frac{3\pi^2}{2}$.

Câu 24: Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2(x-1)e^x$, trục tung và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox .

A. $V = (4 - 2e)\pi$.

B. $V = 4 - 2e$.

C. $V = e^2 - 5$.

D. $V = (e^2 - 5)\pi$.

Câu 25: Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = \sqrt{3}$, biết thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng (P) vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq \sqrt{3}$) là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là x và $\sqrt{1+x^2}$.

A. $V = 7$.

B. $V = \frac{7}{3}$.

C. $V = 3$.

D. $V = \frac{3}{7}$.

Câu 26: Cho hàm số $f(x) = x(x-1)(x-2)$. Tìm diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị hàm số, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.

A. $S = \left| \int_0^2 f(x)dx \right|$.

B. $S = \int_0^2 f(x)dx$.

C. $S = \int_0^1 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx.$

D. $S = \left| \int_0^1 f(x)dx \right|.$

Câu 27: Tính diện tích S của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1, x = 2$.

A. $S = \frac{19}{2}.$

B. $S = \frac{17}{4}.$

C. $S = \frac{17}{2}.$

D. $S = \frac{21}{23}.$

Câu 28: Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $y = xe^{\frac{x}{2}}, y = 0, x = 0$ và $x = 1$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) quanh trục hoành.

A. $V = \pi(e - 2).$

B. $V = \pi e - 2.$

C. $V = 2\pi - e.$

D. $V = 2e\pi.$

Câu 29: Xét hình phẳng H giới hạn bởi $y = 2\sqrt{1-x^2}$ và $y = 2(1-x)$. Quay hình H xung quanh trục Ox . Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.

A. $V_{(H)} = \frac{1}{3}\pi.$

B. $V_{(H)} = \frac{4}{3}\pi^2.$

C. $V_{(H)} = \frac{1}{3}\pi^2.$

D. $V_{(H)} = \frac{4}{3}\pi.$

Câu 30: Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = 2^x, y = 3 - x$, trục hoành và trục tung.

A. $S = \frac{1}{\ln 2} - 2.$

B. $S = 2.$

C. $S = \frac{1}{\ln 2} + 2.$

D. $S = \ln 2 + 2.$

Câu 31: Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đường cong $x = y^{\frac{2}{3}}, x + y^4 = 2$ và trục hoành.

A. $S = \frac{9}{8}.$

B. $S = \frac{7}{3}.$

C. $S = \frac{6}{5}.$

D. $S = \frac{5}{6}.$

Câu 32: Tìm diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và 2 đường thẳng $x = a, x = b$.

A. $S = \pi \int_a^b |f(x)|dx.$

B. $S = \int_a^b |f(x)|dx.$

C. $S = \int_a^b f(x)dx.$

D. $S = 2 \int_0^b |f(x)|dx.$

Câu 33: Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ (C). Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành.

A. $S = \frac{25}{36}.$

B. $S = \frac{4}{27}.$

C. $S = \frac{1}{24}.$

D. $S = \frac{27}{4}.$

Câu 34: Cho hai hàm số $y = f_1(x)$ và $y = f_2(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Tìm diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số và các đường thẳng $x = a, x = b$.

A. $S = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx.$

B. $S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx.$

C. $S = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$

D. $S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|dx.$

Câu 35: Tìm thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = 3$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x, (0 \leq x \leq 3)$ là một hình chữ nhật có hai kích thước là x và $2\sqrt{9-x^2}$.

A. $V = \frac{9}{2}.$

B. $V = 18.$

C. $V = 9.$

D. $V = \frac{18}{5}.$

Câu 36: Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $x = \sqrt{5}y^2, x = 0, y = -1$ và $y = 1$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) quanh trục tung.

A. $V = 6\pi.$

B. $V = 8\pi.$

C. $V = 2\pi.$

D. $V = 4\pi.$

Câu 37: Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = -1$ và $x = 1$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-1 \leq x \leq 1$) là một hình vuông cạnh là $2\sqrt{1-x^2}$.

A. $V = \frac{10}{3}$.

B. $V = \frac{25}{3}$.

C. $V = 16$.

D. $V = \frac{16}{3}$.

Câu 38: Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = \pi$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq \pi$) là một tam giác đều cạnh là $2\sqrt{\sin x}$.

A. $V = 2\sqrt{3}$.

B. $V = \sqrt{3}$.

C. $V = 2 + \sqrt{3}$.

D. $V = \sqrt{3} - 2$.

Câu 39: Tìm thể tích V của khối tròn xoay tạo nên bởi phép quay xung quanh trục Ox của một hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{x-1}{x}$, $y = \frac{1}{x}$ và $x = 1$.

A. $V = \pi(1 - 2\ln 2)$.

B. $V = \pi(2\ln 2 - 1)$.

C. $V = -\pi$.

D. $V = 0$.

Câu 40: Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục hoành mỗi hình phẳng giới hạn đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.

A. $V = 2 + \pi$.

B. $V = 2\pi$.

C. $V = \pi$.

D. $V = 2 - \pi$.

Câu 41: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 + 2x + 1$, trục hoành, $x = 1$ và $x = 2$.

A. $S = \frac{21}{4}$.

B. $S = \frac{39}{4}$.

C. $S = \frac{3}{4}$.

D. $S = \frac{31}{4}$.

Câu 42: Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $x = \sqrt{2\sin 2y}$, $x = 0$, $y = 0$ và $y = \frac{\pi}{2}$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) quanh trục tung.

A. $V = \frac{\pi}{2}$.

B. $V = 2\pi$.

C. $V = \frac{\pi}{3}$.

D. $V = \frac{\pi}{4}$.

Câu 43: Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục hoành mỗi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x(4-x)$ và trục hoành.

A. $V = \frac{23\pi}{3}$.

B. $V = \frac{512\pi}{15}$.

C. $V = \frac{32\pi}{3}$.

D. $V = \frac{152\pi}{15}$.

Câu 44: Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $y = x^{\frac{1}{2}}e^{\frac{x}{2}}$, $x = 1$, $x = 2$ và $y = 0$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) quanh trục hoành.

A. $V = \pi e^2$.

B. $V = e^2$.

C. $V = \pi(e^2 + 1)$.

D. $V = \frac{\pi e^2}{2}$.

Câu 45: Tìm diện tích hình phẳng S nằm trong góc phần tư thứ nhất, giới hạn bởi các đường thẳng $y = 2x$ và đồ thị hàm số $y = x^2$.

A. $S = \frac{3}{2}$.

B. $S = \frac{5}{3}$.

C. $S = \frac{4}{3}$.

D. $S = \frac{23}{15}$.

Câu 46: Tìm thể tích vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x^2$ và $y = x^3$ xung quanh trục Ox .

A. $V = \frac{56\pi}{35}$.

B. $V = \frac{26\pi}{35}$.

C. $V = \frac{356\pi}{35}$.

D. $V = \frac{256\pi}{35}$.

Câu 47: Tính diện tích S của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = xe^{\frac{x}{2}}$, $y = 0$ và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 1$.

A. $S = 2 - 4\sqrt{e}$.

B. $S = 4 - 2\sqrt{e}$.

C. $S = 4 - \sqrt{e}$.

D. $S = 4 + 2\sqrt{e}$.

Câu 48: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2 + \sin x$, $y = 1 + \cos^2 x$, $x = 0$ và $x = \pi$.

- A. $S = \frac{\pi}{2} + 3$. B. $S = \frac{\pi}{2} + 2$. C. $S = \pi + 2$. D. $S = \frac{3\pi}{4}$.

Câu 49: Một ô tô đang chạy với vận tốc $20(m/s)$ thì người người đạp phanh (còn gọi là “thắng”). Sau khi đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -40t + 20(m/s)$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển một quãng đường s bao nhiêu mét?

- A. $s = 5m$. B. $s = 10m$. C. $s = 15m$. D. $s = 2m$.

Câu 50: Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục hoành mỗi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 3$.

- A. $V = \frac{\pi e^6}{2}$. B. $V = \frac{(e^6 - 1)\pi}{2}$. C. $V = \frac{(e^6 + 1)\pi}{4}$. D. $V = \frac{(e^6 - 1)\pi}{4}$.

Câu 51: Một vật đang chuyển động với vận tốc $10(m/s)$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2 (m/s^2)$. Tính quãng đường s vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

- A. $s = 100(m)$. B. $s = \frac{4300}{3}(m)$. C. $s = \frac{400}{3}(m)$. D. $s = \frac{3400}{3}(m)$.

Câu 52: Tính diện tích S của hình phẳng được giới hạn bởi đường cong $y = x^2 + 1$, tiếp tuyến với đường thẳng này tại điểm $M(2;5)$ và trục tung.

- A. $S = \frac{8}{3}$. B. $S = \frac{8}{5}$. C. $S = \frac{3}{8}$. D. $S = \frac{5}{8}$.

Câu 53: Tìm diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đường cong $y = x + \sin x$ và $y = x$, $(0 \leq x \leq 2\pi)$.

- A. $S = 4$. B. $S = -4$. C. $S = 1$. D. $S = 0$.

Câu 54: Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$), xung quanh trục Ox .

- A. $V = \pi \int_a^b f(x)dx$. B. $V = \int_a^b f^2(x)dx$. C. $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$. D. $V = \pi \int_a^b |f(x)|dx$.

Câu 55: Xét hình phẳng H giới hạn bởi $y = 2\sqrt{1-x^2}$ và $y = 2(1-x)$. Tính diện tích S của hình H

- A. $S_{(H)} = \frac{\pi}{2} - 1$. B. $S_{(H)} = \frac{\pi + 1}{2}$. C. $S_{(H)} = \frac{\pi}{2} + 1$. D. $S_{(H)} = \frac{\pi - 1}{2}$.

Câu 56: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y^2 = 4ax$, $a > 0$ và đường thẳng $x = a$ bằng ka^2 . Tìm k .

- A. $k = \frac{5}{8}$. B. $k = \frac{3}{8}$. C. $k = \frac{8}{5}$. D. $k = \frac{8}{3}$.

Câu 57: Tìm diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đường cong $y = x^3$ và $y = x^5$.

- A. $S = \frac{1}{6}$. B. $S = -4$. C. $S = 2$. D. $S = 0$.

Câu 58: Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục hoành mỗi hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$, $y = 0$.

- A. $V = \frac{15\pi}{16}$. B. $V = \frac{16}{15}$. C. $V = \frac{16\pi}{25}$. D. $V = \frac{16\pi}{15}$.

Câu 59: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y = \sqrt{x}$ và $y = x$ quay xung quanh trục Ox . Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành.

- A. $V = \frac{\pi}{6}$. B. $V = \pi$. C. $V = -\pi$. D. $V = 0$.

Câu 60: Tính diện tích S của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^3 - 4x$, $y = 0$ và hai đường thẳng $x = -2, x = 4$.

- A. $S = 48$. B. $S = 84$. C. $S = 44$. D. $S = 24$.

Câu 61: Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục hoành mỗi hình phẳng giới hạn các đường $y = \ln x, y = 0, x = 2$.

- A. $V = 2\pi(\ln^2 2 + 2\ln 2 + 1)$. B. $V = 2\pi(\ln^2 2 - 2\ln 2 + 1)$.
C. $V = \pi(\ln^2 2 - 2\ln 2 + 1)$. D. $V = 2(\ln^2 2 - 2\ln 2 + 1)$.

Câu 62: Tìm thể tích V của khối tròn xoay tạo nên do quay xung quanh trục Ox hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = (1-x)^2, y = 0, x = 0$ và $x = 2$.

- A. $V = \frac{5\pi}{2}$. B. $V = \frac{8\pi\sqrt{2}}{3}$. C. $V = \frac{2\pi}{5}$. D. $V = 2\pi$.

Câu 63: Tính diện tích S của hình phẳng được giới hạn bởi đường cong $y = x^2 - 2x + 2$, tiếp tuyến với đường thẳng này tại điểm $M(3;5)$ và trục tung.

- A. $S = \frac{9}{2}$. B. $S = 27$. C. $S = 18$. D. $S = 9$.

Câu 64: Tính diện tích S của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = \cos x, y = 0$ và hai đường thẳng $x = -\frac{\pi}{2}, x = \pi$.

- A. $S = 3$. B. $S = 8$. C. $S = 2\sqrt{3}$. D. $S = 3\sqrt{2}$.

Câu 65: Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị các hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ và $g(x) = x$.

- A. $S = 0$. B. $S = 12$. C. $S = 16$. D. $S = 8$.

Câu 66: Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $y = \cos x, y = 0, x = 0$ và $x = \frac{\pi}{4}$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) quanh trục hoành.

- A. $V = \frac{\pi(\pi+2)}{16}$. B. $V = \frac{\pi+2}{8}$. C. $V = \frac{\pi(\pi-2)}{16}$. D. $V = \frac{\pi(\pi+2)}{8}$.

Câu 67: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)(m/s)$ có gia tốc $v'(t) = \frac{3}{t+1}(m/s^2)$. Vận tốc ban đầu của vật là $6(m/s)$. Hỏi vận tốc v của vật sau 10 giây (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

- A. $v = 13(m/s)$. B. $v = 12(m/s)$. C. $v = 9(m/s)$. D. $v = 15(m/s)$.

Câu 68: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 1 - 2\sin 2t(m/s)$. Tính quãng đường s vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0(s)$ đến thời điểm $t = \frac{3\pi}{4}(s)$

- A. $s = \frac{3\pi}{4} - 1$. B. $s = \frac{3\pi}{4} + 1$. C. $s = \frac{3\pi}{4}$. D. $s = \frac{\pi}{4} - 1$.

Câu 69: Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục tung mỗi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \ln x$, trục tung và hai đường thẳng $y = 0, y = 1$.

- A. $V = \frac{(e^2 - 1)\pi}{2}$. B. $V = \frac{(e^2 + 1)\pi}{2}$. C. $V = \frac{(1 - e^2)\pi}{2}$. D. $V = \frac{(1 + e^2)\pi}{2}$.

ÔN TẬP CHƯƠNG III

NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

§1. NGUYÊN HÀM

1. Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K . Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

Như vậy: $\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

2. Tính chất

$$\diamond \int f'(x)dx = f(x) + C \quad \diamond \int kf(x)dx = k \int f(x)dx \quad \diamond \int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

3. Bảng nguyên hàm

Nguyên hàm của các hàm số sơ cấp thường gặp	Nguyên hàm của những hàm số hợp đơn giản	Nguyên hàm của những hàm số hợp (với $t = t(x)$)
1. $\int 0dx = C$		$\int 0dt = C$
2. $\int dx = x + C$	$\int kdx = kx + C$	$\int dt = t + C$
3. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	$\int t^\alpha dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$
4. $\int \frac{1}{x^\alpha} dx = -\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} + C$	$\int \frac{1}{(ax+b)^\alpha} dx = -\frac{1}{a(\alpha-1)(ax+b)^{\alpha-1}} + C$	$\int \frac{1}{t^\alpha} dt = -\frac{1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} + C$
5. $\int \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$	$\int \sqrt{ax+b}dx = \frac{2}{3a}\sqrt{(ax+b)^3} + C$	$\int \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C$
6. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln ax+b + C$	$\int \frac{1}{t} dt = \ln t + C$
7. $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$	$\int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a(ax+b)} + C$	$\int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} + C$
8. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C, x > 0$	$\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}} dx = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a} + C, ax+b > 0, a \neq 0$	$\int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2\sqrt{t} + C, t > 0$
9. $\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax+b} + C$	$\int e^t dt = e^t + C$
10. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (a \neq 1, a > 0)$	$\int a^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{a^{ax+b}}{\ln a} + C (a \neq 1, a > 0)$	$\int a^t dt = \frac{a^t}{\ln a} + C (a \neq 1, a > 0)$
11. $\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \cdot \sin(ax+b) + C$	$\int \cos t dt = \sin t + C$
12. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cdot \cos(ax+b) + C$	$\int \sin t dt = -\cos t + C$
13. $\int \tan x dx = -\ln \cos x + C$	$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln \cos x + C$	$\int \tan t dt = -\ln \cos t + C$
14. $\int \cot x dx = \ln \sin x + C$	$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln \sin x + C$	$\int \cot t dt = \ln \sin t + C$
15. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \cdot \tan(ax+b) + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 t} dt = \tan t + C$
16. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cdot \cot(ax+b) + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 t} dt = -\cot t + C$

17. $\int \tan^2 x dx = \tan x - x + C$	$\int \tan^2(ax+b)dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) - x + C$	$\int \tan^2 t dt = \tan t - t + C$
18. $\int \cot^2 x dx = -\cot x - x + C$	$\int \cot^2(ax+b)dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) - x + C$	$\int \cot^2 t dt = -\cot t - t + C$
19. $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$	$\int \frac{1}{(ax+b)(cx-d)} dx = \frac{1}{ad-bc} \ln \left \frac{ax+b}{cx-d} \right + C$	
20. $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$	$\int \ln(ax+b)dx = \frac{(ax+b) \ln(ax+b) - ax}{a} + C$	
21. $\int \log_a x dx = \frac{x \ln x - x}{\ln a} + C$	$\int \log_a(mx+n)dx = \frac{(mx+n) \ln(mx+n) - mx}{m \ln a} + C$	

4. Phương pháp tính nguyên hàm

a. Phương pháp biến đổi

❖ Nếu $\int f(u)du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C$. **Lưu ý:** Đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x)dx$. Khi đó: $\int f(t)dt = F(t) + C$, sau đó thay ngược lại $t = u(x)$ ta được kết quả cần tìm.

❖ Với $u = ax + b (a \neq 0)$, ta có $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$

b. Phương pháp tính nguyên hàm từng phần

❖ Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên K thì

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x).v(x) - \int u'(x)v(x)dx \quad \text{hay} \quad \int u dv = uv - \int v du$$

❖ Đặt $u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx$ và $dv = g(x)dx \Rightarrow v = \int g(x)dx = G(x)$ (chọn $C = 0$)

Lưu ý: Với $P(x)$ là đa thức

$\begin{matrix} \text{N.Hàm} \\ \text{Đặt} \end{matrix}$	$\int P(x)e^x dx$	$\int P(x)\cos x dx$ hay $\int P(x)\sin x dx$	$\int P(x)\ln x dx$
u	$P(x)$	$P(x)$	$\ln x$
dv	$e^x dx$	$\cos x dx$ hay $\sin x dx$	$P(x)dx$

Yêu cầu tìm nguyên hàm của một hàm số được hiểu là tìm nguyên hàm trên từng khoảng xác định của nó.

Lưu ý: Cách đặt u : “**Nhất logarit (ln) – Nhì đa – Tam lượng – Tứ mũ**” và phần còn lại là dv .

§2. TÍCH PHÂN

I. Khái niệm về tích phân

Định nghĩa: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Chú ý:

1. Khi $a = b$ ta định nghĩa $\int_a^b f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0$ 2. Khi $a > b$, ta định nghĩa

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

3. Tích phân không phụ thuộc vào chữ dùng làm biến số trong dấu tích phân, tức là

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{hay} \quad \int_a^b f(t)dt, \dots, \text{đều tính bằng } F(b) - F(a) \quad \text{hay} \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

II Tính chất của tích phân

Tích chất 1. $k \int_a^b f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$ (k là hằng số)

Tích chất 2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$

Tính chất 3. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad a < c < b$

III. Phương pháp tính tích phân

1. Phương pháp đổi biến số

DẠNG 1. Đặt t theo x . Cụ thể: Tính $I = \int_a^b f(x) dx$

Đặt: $t = f(x) \Rightarrow dt = f'(x) dx$. Đổi cận: $\begin{matrix} x & a & b \\ t & f(a) & f(b) \end{matrix}$. Khi đó tính: $I = \int_{f(a)}^{f(b)} g(t) dt$

DẠNG 2. Đặt x theo t : Có các dạng cơ bản sau:

- a) $\int_a^b \sqrt{1-x^2} dx$. Đặt: $x = \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. $\int_a^b \sqrt{k^2-x^2} dx$. Đặt: $x = k \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
- b) $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$. Đặt $x = \sin t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{k^2-x^2}} dx$. Đặt $x = k \sin t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
- c) $\int_a^b \frac{1}{x^2+1} dx$. Đặt $x = \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. $\int_a^b \frac{1}{x^2+k^2} dx$. Đặt $x = k \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
- $\int_a^b \frac{1}{(\alpha x + \beta)^2 + k^2} dx$. Đặt $\alpha x + \beta = k \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

2. Phương pháp tính tích phân từng phần

Nếu $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx \text{ hay } \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Tính $I = \int_a^b f(x)g(x) dx$. Đặt: $\begin{cases} u = f(x) & \Rightarrow du = f'(x) dx \\ dv = g(x) dx & \Rightarrow v = \int g(x) dx \end{cases}$

$$\diamond dv = g(x) dx \Rightarrow v = \int g(x) dx$$

§3. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TRONG HÌNH HỌC

1. Diện tích hình phẳng

♦ Nếu hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)$, liên tục trên đoạn $[a; b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ thì diện tích S của nó được tính theo công thức: $S = \int_a^b |f(x)| dx$

Chú ý: Nếu trên $[a; b]$ hàm số $f(x)$ giữ nguyên một dấu thì: $S = \int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$

♦ Nếu hình phẳng được giới hạn bởi hai đồ thị của hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ thì diện tích S của nó được tính theo công thức: $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

Chú ý: Nếu trên đoạn $[\alpha; \beta]$ biểu thức $f(x) - g(x)$ không đổi dấu thì:

$$\int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx = \left| \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - g(x)] dx \right|$$

2. Thể tích vật thể

Giới hạn vật thể V bởi hai mặt phẳng song song, vuông góc với trục hoành, cắt trục hoành tại hai điểm có

hoành độ $x=a, x=b$ và $S(x)$ là diện tích thiết diện của V vuông góc với Ox tại $x \in [a; b]$. Thể tích của V được cho bởi công thức: $V = \int_a^b S(x)dx$. ($S(x)$ là hàm số không âm, liên tục trên đoạn $[a; b]$)

3. Thể tích khối tròn xoay

Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)$, liên tục trên đoạn $[a; b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$ quay quanh trục Ox , ta được khối tròn xoay. Thể tích của khối tròn xoay này được cho bởi công thức $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$, biết rằng $F(e) = 2e$.

A. $F(x) = \ln x + 2e$.

B. $F(x) = \ln|x + 2e - 1|$.

C. $F(x) = \ln x + 2e - 1$.

D. $F(x) = 1 + 2e - \ln x$.

Câu 2: Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = (1-x)\cos x$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Tìm hằng số C .

A. $C = 1 - \frac{\pi}{2}$.

B. $C = 0$.

C. $C = \frac{\pi}{2}$.

D. $C = \pi$.

Câu 3: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Khẳng định nào dưới đây là sai ?

A. $\int f(x^2)dx = F(x^2) + C$.

B. $\int f(t)dt = F(t) + C$.

C. $\int f(x)dx = F(x) + C$.

D. $\int 2xf'(x^2)dx = F(x^2) + C$.

Câu 4: Cho $\int_1^2 x \ln(3x - x^2)dx = a \ln b + c$ với a, b, c là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $b(a+c) = 6$.

B. $abc = 36$.

C. $ab - c = -10$.

D. $c(a-b) = 12$.

Câu 5: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Tính $I = F(e) - F(1)$.

A. $I = 1$.

B. $I = e$.

C. $I = \frac{1}{e}$.

D. $I = \frac{1}{2}$.

Câu 6: Biết $\int_3^4 \frac{1}{x^2 + x}dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = 0$.

B. $S = -2$.

C. $S = 6$.

D. $S = 2$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[-1; 2]$, $f(-1) = -2$ và $f(2) = 1$. Tính

$I = \int_{-1}^2 (x^2 - 3x - f'(x))dx$.

A. $I = -\frac{3}{2}$.

B. $I = -\frac{9}{2}$.

C. $I = 3$.

D. $I = -1$.

Câu 8: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos(2x+1)$.

A. $\int f(x)dx = 2 \sin(2x+1) + C$.

B. $\int f(x)dx = -\frac{1}{2} \sin(2x+1) + C$.

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{2} \sin(2x+1) + C$.

D. $\int f(x)dx = -2 \sin(2x+1) + C$.

Câu 9: Tính $I = \int_1^e \frac{(1+2x) \ln x + 3}{1+x \ln x} dx$

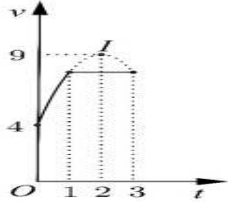
A. $I = 2 + \ln(1+e)$.

B. $I = 2(e-1) + \ln(1+e)$.

C. $I = 2(e-1) \ln(e+1)$.

D. $I = e - 1 + \ln(1+e)$.

Câu 10: Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phân trăm).



A. $s = 13,83(\text{km})$.

B. $s = 21,58(\text{km})$.

C. $s = 23,25(\text{km})$.

D. $s = 15,50(\text{km})$.

Câu 11: Cho $\frac{2}{3} \int_2^3 \frac{x^2+2}{x^2-1} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $abc = -\frac{8}{3}$.

B. $a + 2b + 3c = \frac{11}{3}$.

C. $ab + c = -\frac{5}{3}$.

D. $a.(b+c) = \frac{5}{3}$.

Câu 12: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$.

A. $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$.

B. $\int \cos 3x dx = -\frac{\sin 3x}{3} + C$.

C. $\int \cos 3x dx = 3 \sin 3x + C$.

D. $\int \cos 3x dx = \sin 3x + C$.

Câu 13: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$.

A. $I = -1$.

B. $I = 1$.

C. $I = \frac{\pi}{2}$.

D. $I = 1 - \frac{\pi}{2}$.

Câu 14: Viết công thức tính thể tích V của một khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$), xung quanh trục Ox .

A. $V = \pi \int_a^b f(x) dx$.

B. $V = \int_a^b |f(x)| dx$.

C. $V = \int_a^b f^2(x) dx$.

D. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[2;4]$, $f(2) = 2$ và $f(4) = 4$. Tính $I = \int_2^4 f'(x) dx$.

A. $I = 6$.

B. $I = 8$.

C. $I = -2$.

D. $I = 2$.

Câu 16: Biết $\int_2^4 \frac{dx}{x^2+x} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = -2$.

B. $S = 6$.

C. $S = 2$.

D. $S = 0$.

Câu 17: Biết $\int_0^1 \frac{1}{x^2-5x+6} dx = a \ln 2 + b \ln 3$. Tính $M = a^2 - b^2$.

A. $M = 6$.

B. $M = 3$.

C. $M = -2$.

D. $M = 1$.

Câu 18: Cho $A = \int x \cos x dx$ và đặt $u = x, dv = \cos x dx$. Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

A. $A = x \sin x + \cos x$.

B. $A = x \sin x + \int \sin x dx$.

C. $A = x \sin x + \cos x + C$.

D. $\begin{cases} du = dx \\ v = -\sin x \end{cases}$.

Câu 19: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin x$.

A. $\int f(x) dx = -2 \cos x + C$.

B. $\int f(x) dx = \sin^2 x + C$.

C. $\int f(x) dx = \sin 2x + C$.

D. $\int f(x) dx = 2 \cos x + C$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x)dx=10$ và $2f(1)-f(0)=2$. Tính $I=\int_0^1 f(x)dx$.

A. $I=12$.

B. $I=8$.

C. $I=-8$.

D. $I=-12$.

Câu 21: Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + \sin x + x - 1}{x + \cos x} dx$.

A. $I=\frac{\pi}{2}-\ln \frac{\pi}{2}$.

B. $I=\frac{\pi}{2}$.

C. $I=\ln \frac{\pi}{2}$.

D. $I=\frac{1}{2}-\ln \frac{\pi}{2}$.

Câu 22: Cho $I=\int_1^e \ln x dx$. Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

A. $I=(x \ln x + x)\Big|_1^e$.

B. $I=(x \ln x - x)\Big|_1^e$.

C. $I=\frac{1}{2} \ln^2 x\Big|_1^e$.

D. $I=(x \ln x - 1)\Big|_1^e$.

Câu 23: Cho hình D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=\pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu ?

A. $V=2\pi^2$.

B. $V=2\pi$.

C. $V=2(\pi+1)\pi$.

D. $V=2(\pi+1)$.

Câu 24: Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-4x+6, y=-x^2-2x+6$.

A. $V=4\pi$.

B. $V=\frac{\pi}{2}$.

C. $V=\frac{\pi}{3}$.

D. $V=3\pi$.

Câu 25: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và đồ thị hàm số $y=x-x^2$.

A. $S=13$.

B. $S=\frac{9}{4}$.

C. $S=\frac{37}{12}$.

D. $S=\frac{81}{12}$.

Câu 26: Cho hình D giới hạn bởi đường cong $y=e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu ?

A. $V=\frac{\pi(e^2-1)}{2}$.

B. $V=\frac{\pi(e^2+1)}{2}$.

C. $V=\frac{e^2-1}{2}$.

D. $V=\frac{\pi e^2}{2}$.

Câu 27: Biết tích phân $\int_1^2 (x^2-1) \ln x dx = \frac{a+\ln 2+b}{c}$. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=13$.

B. $S=5$.

C. $S=17$.

D. $S=0$.

Câu 28: Cho $\int_0^1 \left(\frac{3}{3x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

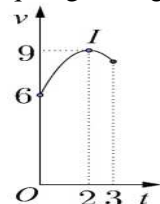
A. $a+2b=0$.

B. $2a+3b=3$.

C. $2a+5b=-1$.

D. $a-b=4$.

Câu 29: Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



A. $s=24,25(\text{km})$.

B. $s=24,75(\text{km})$.

C. $s=25,25(\text{km})$.

D. $s=26,75(\text{km})$.

Câu 30: Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$ ($a < b$) xung quanh trục hoành.

A. $V=\int_a^b f^2(x)dx$.

B. $V=\pi \int_a^b |f(x)|dx$.

C. $V=\pi \int_a^b f(x)dx$.

D. $V=\pi \int_a^b f^2(x)dx$.

Câu 31: Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào sai ?

A. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$

B. $\int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + C.$

C. $\int e^x dx = \frac{e^{x+1}}{x+1} + C.$

D. $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C.$

Câu 32: Cho $\int_1^3 \frac{1+x(1+\ln x)}{x(x+1)^2} dx = a \ln 2 + b \ln 3$ với a, b là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $2a - b = \frac{23}{4}.$

B. $a \cdot b = -\frac{7}{4}.$

C. $2a + b = -\frac{9}{4}.$

D. $a + b = \frac{1}{4}.$

Câu 33: Cho $n \in \mathbb{N}$, tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos x)^n \sin x dx.$

A. $I = \frac{1}{n+1}.$

B. $I = \frac{1}{2n+1}.$

C. $I = \frac{1}{n}.$

D. $I = \frac{1}{n-1}.$

Câu 34: Biết $\int_0^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}$). Tính $S = a \ln a + b \ln b.$

A. $S = 1 + \ln 2.$

B. $S = 2 \ln 2.$

C. $S = 2 + \ln 2.$

D. $S = 2.$

Câu 35: Tìm hàm số $f(x)$ biết $\int f(x) dx = \ln(x^4 + x^2 + 1) + C.$

A. $f(x) = e^{x^4 + x^2 + 1}.$

B. $f(x) = \frac{4x^3 + 2x}{x^4 + x^2 + 1} + C.$

C. $f(x) = \frac{x^4 + x^2 + 1}{4x^3 + 2x}.$

D. $f(x) = \frac{4x^3 + 2x}{x^4 + x^2 + 1}.$

Câu 36: Tìm thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = 3$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x , ($0 \leq x \leq 3$) là một hình chữ nhật có hai kích thước là x và $2\sqrt{9 - x^2}.$

A. $V = 18.$

B. $V = 9.$

C. $V = \frac{18}{5}.$

D. $V = \frac{9}{2}.$

Câu 37: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 10]$ thỏa mãn: $\int_0^{10} f(x) dx = 8$ và $\int_3^5 f(x) dx = -3.$ Tính

$P = \int_5^{10} f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx.$

A. $P = -24.$

B. $P = -11.$

C. $P = 11.$

D. $P = 5.$

Câu 38: Cho $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx = a \ln 2 + b \ln 3$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $a + 2b = 2.$

B. $3a + 2b = 6.$

C. $ab + 1 = 11.$

D. $a - 2b = -2.$

Câu 39: Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào sai ?

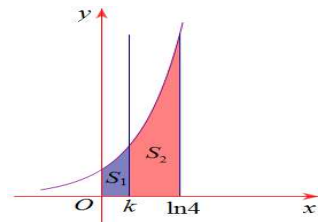
A. $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$

B. $\int_a^a c dx = 0.$

C. $\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b).$

D. $\int_a^b 0 dx = 0.$

Câu 40: Cho hình cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x, y = 0, x = 0$ và $x = \ln 4.$ Đường thẳng $x = k$ ($0 < k < \ln 4$) chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ. Tìm k để $S_1 = 2S_2.$



A. $k = 2 \ln 3$.

B. $k = \frac{2}{3} \ln 3$.

C. $k = \ln 3$.

D. $k = 3$.

Câu 41: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$.

A. $\int f(x)dx = -\frac{1}{2} \sin 2x + C$.

B. $\int f(x)dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$.

C. $\int f(x)dx = 2 \sin 2x + C$.

D. $\int f(x)dx = -2 \sin 2x + C$.

Câu 42: Cho $\int_0^1 (2f(x) - g(x))dx = 5$ và $\int_0^1 (3f(x) + g(x))dx = 10$. Tính $K = \int_0^1 f(x)dx$.

A. $K = 5$.

B. $K = 3$.

C. $K = 15$.

D. $K = 10$.

Câu 43: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+3\sin x}} = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Tính $P = a.b$.

A. $P = 6$.

B. $P = \frac{2}{3}$.

C. $P = \frac{1}{6}$.

D. $P = 12$.

Câu 44: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7^x$.

A. $\int f(x)dx = 7^{x+1} + C$.

B. $\int f(x)dx = 7^x \ln 7 + C$.

C. $\int f(x)dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C$.

D. $\int f(x)dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C$.

Câu 45: Cho $\alpha \in \mathbb{R}$. Hàm số nào trong các hàm số sau đây không phải là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x$?

A. $F(x) = \sin x$.

B. $F(x) = 2 \sin \frac{x+\alpha}{2} \cos \frac{x-\alpha}{2}$.

C. $F(x) = 2 \cos \frac{x+\alpha}{2} \cos \frac{x-\alpha}{2}$.

D. $F(x) = 2 \sin \left(\frac{x}{2} + \alpha \right) \cos \left(\frac{x}{2} - \alpha \right)$.

Câu 46: Cho $I = \int_0^{\sqrt{8}} \sqrt{16-x^2} dx$ và đặt $x = \sin t$. Khẳng định nào dưới đây là sai?

A. $I = 2\pi + 4$.

B. $dx = 4 \cos t dt$.

C. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 16 \cos^2 t dt$.

D. $\sqrt{16-x^2} = 4 \cos t$.

Câu 47: Biết $\int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}} = a \ln 3 + b \ln 5$. Tính $S = a^2 + ab + 3b^2$.

A. $S = 0$.

B. $S = 9$.

C. $S = 5$.

D. $S = 7$.

Câu 48: Ký hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \ln x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 1, x = e$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox .

A. $V = (e-2)\pi$.

B. $V = (e-1)\pi$.

C. $V = (4+2e)\pi$.

D. $V = (e+2)\pi$.

Câu 49: Cho $I = \int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}} dx$ và $t = \sqrt{x^3+2}$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào sai?

A. $I = \frac{2}{3} t \Big|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{10}}$.

B. $I = \frac{2}{3} \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{10}} \frac{1}{t} dt$.

C. $I = \frac{2}{3} (\sqrt{10} - \sqrt{3})$.

D. $I = \frac{2}{3} \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{10}} dt$.

Câu 50: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = -\cos x$, biết $F(2017\pi) = 1$.

A. $F(x) = -\sin x + 1$.

B. $F(x) = -\sin x + C$.

C. $F(x) = \sin x + 1$.

D. $F(x) = -\sin x + 2017$.

Câu 51: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \cos 3x \cos x$, biết rằng đồ thị hàm số $y = F(x)$ đi qua đi qua gốc tọa độ O .

A. $F(x) = \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{2} \sin 2x$.

B. $F(x) = \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x$.

C. $F(x) = \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{4} \cos 2x$.

D. $F(x) = \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{4} \cos 2x$.

Câu 52: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x-2}$.

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{5} \ln|5x-2| + C$.

B. $\int f(x)dx = -\frac{1}{2} \ln|5x-2| + C$.

C. $\int f(x)dx = 5 \ln|5x-2| + C$.

D. $\int f(x)dx = \ln|5x-2| + C$.

Câu 53: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{2x-1}{x-1}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = -1$.

A. $S = 2 - \ln 4$.

B. $S = 3 + \ln 4$.

C. $S = 2 + 3 \ln 2$.

D. $S = 2 - \ln 2$.

Câu 54: Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{x^3}{3}$, $y = x^2$.

A. $V = \frac{4\pi}{3}$.

B. $V = \frac{48\pi}{35}$.

C. $V = \frac{486\pi}{35}$.

D. $V = \frac{126\pi}{35}$.

Câu 55: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + \sin x$ thỏa mãn $F(0) = 19$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = -\cos x + \frac{x^2}{2} + 10$.

B. $F(x) = -\cos x + \frac{x^2}{2} + 20$.

C. $F(x) = \sin x + \frac{x^2}{2} + 20$.

D. $F(x) = -\cos x + x^2 + 20$.

Câu 56: Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 0$, $x = 1$ và $x = 8$.

A. $V = \frac{9\pi}{4}$.

B. $V = \frac{93\pi}{5}$.

C. $V = \frac{12\pi}{5}$.

D. $V = \frac{23\pi}{4}$.

Câu 57: Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y = \sqrt{\tan x}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{4}$.

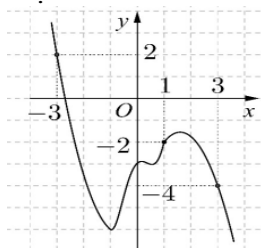
A. $V = \frac{\pi \ln 2}{2}$.

B. $V = \frac{3\pi}{2}$.

C. $V = \pi$.

D. $V = \frac{\ln 2}{2}$.

Câu 58: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) + (x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(1) < g(-3) < g(3)$.

B. $g(1) < g(3) < g(-3)$.

C. $g(3) = g(-3) > g(1)$.

D. $g(3) = g(-3) < g(1)$.

Câu 59: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x dx = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Tính $S = 2a + 3b - 1$.

- A. $S = 8$. B. $S = 4$. C. $S = 12$. D. $S = 10$.

Câu 60: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \tan x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = \frac{\pi}{3}$.

- A. $S = \frac{1}{2} \ln 2$. B. $S = \ln 2$. C. $S = \frac{1}{2} \ln \sqrt{2}$. D. $S = 2 + \ln 2$.

Câu 61: Biết $\int (\sin 2x + \cos 3x) dx = m \cos 2x + n \sin 3x + C$. Tính $S = m + n$.

- A. $S = -\frac{1}{6}$. B. $S = \frac{1}{6}$. C. $S = 5$. D. $S = -\frac{5}{6}$.

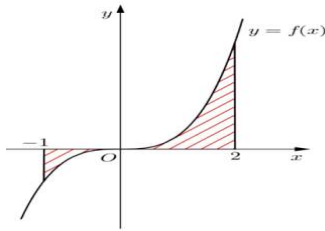
Câu 62: Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \ln x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 1, x = e$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox .

- A. $V = (e - 1)\pi$. B. $V = (e - 2)\pi$. C. $V = (4 + 2e)\pi$. D. $V = (e + 2)\pi$.

Câu 63: Tính $I = \int_0^1 \frac{xe^x + 1}{(x + 1)^2} dx$.

- A. $I = \frac{e^2 - 1}{2}$. B. $I = \frac{e - 1}{2}$. C. $I = \frac{e^2 + 1}{3}$. D. $I = \frac{e - 1}{4}$.

Câu 64: Gọi S là diện tích hình (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1; x = 2$ (như hình vẽ bên).



Đặt $a = \int_{-1}^0 f(x) dx; b = \int_0^2 f(x) dx$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $S = -b - a$. B. $S = a - b$.
C. $S = b + a$. D. $S = b - a$.

Câu 65: Tính diện tích hình phẳng S được giới hạn bởi đường $y = \frac{3^x - 1}{(3^{-x} + 1)\sqrt{3^x + 1}}$ và các đường thẳng $y = 0, x = 1$.

- A. $S = \frac{2(3 - 2\sqrt{2})}{3}$. B. $S = \frac{2(3 - 2\sqrt{2})}{\ln 3}$. C. $S = \frac{2\sqrt{2}}{\ln 3}$. D. $S = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{\ln 3}$.

Câu 66: Biết $\int_0^1 x \ln(1 + x^2) dx = \frac{a \ln a - 1}{a}$ ($a \in \mathbb{N}^*$). Tính $S = C_a^0 + C_a^1 + C_a^2$.

- A. $S = 24$. B. $S = 6$. C. $S = 12$. D. $S = 4$.

Câu 67: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$.

- A. $\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \sin 2x + C$. B. $\int f(x) dx = 2 \sin 2x + C$.
C. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$. D. $\int f(x) dx = -2 \sin 2x + C$.

Câu 68: Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 1$ và $x = 3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x (1 \leq x \leq 3)$ thì được một thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2 - 2}$.

A. $V = \frac{124}{3}$.

B. $V = \frac{124\pi}{3}$.

C. $V = (32 + 2\sqrt{15})\pi$.

D. $V = 32 + 2\sqrt{15}$.

Câu 69: Cho $I = \int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx$ và đặt $t = x^2 + 1$. Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

A. $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{t} dt$.

B. $I = \int_1^2 \sqrt{t} dt$.

C. $I = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{t} dt$.

D. $I = \frac{1}{2} \int_1^2 t dt$.

Câu 70: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-2;3)$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng $(-2;3)$. Tính $I = \int_{-1}^2 (f(x) + 2x) dx$, biết $F(-1) = 1$ và $F(2) = 4$.

A. $I = 9$.

B. $I = 10$.

C. $I = 6$.

D. $I = 12$.

Câu 71: Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = \frac{3^x - 1}{(3^{-x} + 1)\sqrt{3^x + 1}}$, $y = 0$ và $x = 1$.

A. $S = (3 - 2\sqrt{2}) \ln 3$.

B. $S = \frac{2(3 + 2\sqrt{2})}{\ln 3}$.

C. $S = \frac{2(3 - 2\sqrt{2})}{\ln 3}$.

D. $S = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{\ln 3}$.

Câu 72: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\tan^2 x + \tan^4 x) dx$.

A. $I = \frac{\pi}{3} + 1$.

B. $I = \sqrt{3}$.

C. $I = \frac{2\pi}{3}$.

D. $I = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 73: Tính $I = \int_1^5 \frac{x^2 + 1}{x\sqrt{3x+1}} dx$

A. $I = \frac{1}{27} + \ln \frac{5}{9}$.

B. $I = \frac{100}{27} + \ln \frac{9}{5}$.

C. $I = \frac{10}{27} + \ln \frac{9}{5}$.

D. $I = \frac{100}{27} - \ln \frac{5}{9}$.

Câu 74: Tính $I = \int_0^{\pi} \cos^2 x \sin x dx$.

A. $I = \frac{3}{2}$.

B. $I = \frac{2}{3}$.

C. $I = -\frac{2}{3}$.

D. $I = \frac{1}{2}$.

Câu 75: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = e^{2x}$, biết rằng đồ thị hàm số $y = F(x)$ đi qua điểm $M(\ln \sqrt{2}; 2)$.

A. $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$.

B. $F(x) = e^{2x} + 1$.

C. $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + 1$.

D. $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + C$.

Câu 76: Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ (a, b cho trước và $a, b > 0$) trục hoành và các đường thẳng $x = -a, x = a$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox .

A. $V = \frac{1}{3} a^2 b \pi$.

B. $V = \frac{4}{3} a b^2 \pi$.

C. $V = \frac{4}{3} a^2 b \pi$.

D. $V = \frac{1}{3} a b^2 \pi$.

Câu 77: Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ và $y = x$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox .

A. $V = \frac{\pi}{6}$.

B. $V = 2\pi$.

C. $V = \frac{2\pi}{3}$.

D. $V = \frac{3\pi}{4}$.

Câu 78: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{-3x-1}{x-1}$ và hai trục tọa độ.

- A. $S = \frac{1}{2} + \ln \frac{4}{3}$. B. $S = 2 \ln \frac{3}{4}$. C. $S = 4 \ln \frac{4}{3} - 1$. D. $S = 2 - 4 \ln \frac{3}{4}$.

Câu 79: Cho $\int_0^9 f(x)dx = 9$. Tính $I = \int_0^3 f(3x)dx$.

- A. $I = 27$. B. $I = 3$. C. $I = 1$. D. $I = 9$.

Câu 80: Cho $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + a} = a + b \ln \frac{1+e}{2}$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S = a^3 + b^3$.

- A. $S = 1$. B. $S = 2$. C. $S = 0$. D. $S = -2$.

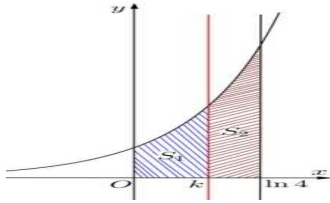
Câu 81: Cho $\int_0^4 f(x)dx = 16$. Tính $I = \int_0^2 f(2x)dx$.

- A. $I = 16$. B. $I = 32$. C. $I = 4$. D. $I = 8$.

Câu 82: Tìm hàm số $f(x)$ biết $F(x) = \cos^3 x$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

- A. $f(x) = -3 \sin^2 x$. B. $f(x) = -3 \sin x \cos^2 x$.
C. $f(x) = -3 \sin x \cos^2 x + C$. D. $f(x) = 3 \cos^2 x$.

Câu 83: Cho hình cong (H) giới hạn bởi đường $y = e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$ và $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$ ($0 < k < \ln 4$) chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.



- A. $k = \ln 3$. B. $k = \ln 2$.
C. $k = \ln \frac{8}{3}$. D. $k = \frac{2}{3} \ln 4$.

Câu 84: Cho $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \ln x$.

- A. $\int f'(x) \ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C$. B. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C$.
C. $\int f'(x) \ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) + C$. D. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C$.

Câu 85: Cho $\int_0^{\ln 2} \frac{x}{e^x + e^{-x} + 2} dx = a \ln 2 + b \ln 3$ với a, b là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây sai?

- A. $a.b = \frac{5}{3}$. B. $a + b = \frac{2}{3}$. C. $a + 2b = -\frac{1}{3}$. D. $3a - b = 7$.

Câu 86: Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2(x-1)e^x$, trục tung và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục hoành.

- A. $V = 4 - 2e$. B. $V = (4 - 2e)\pi$. C. $V = e^2 - 5$. D. $V = (e^2 - 5)\pi$.

Câu 87: Nếu $\int_a^c f(x)dx = 7$ và $\int_b^c f(x)dx = 5$ với $a < c < b$ thì $\int_a^b f(x)dx$ bằng?

- A. -2 . B. 2 . C. 35 . D. 12 .

Câu 88: Cho hình D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{x^2 + 1}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \frac{4}{3}$.

B. $V = 2\pi$.

C. $V = \frac{4\pi}{3}$.

D. $V = 2$.

Câu 89: Tính diện tích hình phẳng S được giới hạn bởi đường $y = x\sqrt{2x-x^2}$ và trục hoành.

A. $S = \frac{\pi}{2}$.

B. $S = 2$.

C. $S = 2\pi + 1$.

D. $S = \frac{3\pi}{2}$.

Câu 90: Tính diện tích hình phẳng S được giới hạn bởi đường $y = (x-1)\sqrt[3]{3-4x}$ và trục hoành.

A. $S = \frac{3}{8}$.

B. $S = \frac{25}{44}$.

C. $S = \frac{9}{448}$.

D. $S = \frac{19}{32}$.

Câu 91: Tính tích phân $I = \int_1^3 \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx$ bằng cách đặt $u = \ln x$ và $dv = \frac{dx}{(x+1)^2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $I = -\frac{\ln x}{x+1} \Big|_1^3 - \int_1^3 \frac{dx}{x(x+1)}$.

B. $I = -\frac{\ln x}{x-1} \Big|_1^3 + \int_1^3 \frac{dx}{x(x-1)}$.

C. $I = \frac{\ln x}{x+1} \Big|_1^3 - \int_1^3 \frac{dx}{x(x+1)}$.

D. $I = -\frac{\ln x}{x+1} \Big|_1^3 + \int_1^3 \frac{dx}{x(x+1)}$.

Câu 92: Tính $I = \int_1^e x \ln x dx$.

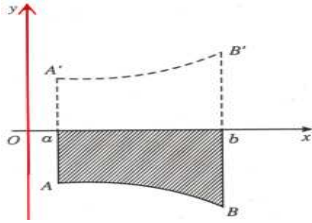
A. $I = \frac{1}{2}$.

B. $I = \frac{e^2-1}{4}$.

C. $I = \frac{e^2+1}{4}$.

D. $I = \frac{e^2-2}{2}$.

Câu 93: Kí hiệu S là diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số liên tục $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$. Như hình vẽ bên, khẳng định nào dưới đây là sai ?



A. $S = \int_a^b f(x) dx$.

B. $S = \int_a^b (-f(x)) dx$.

C. $S = \int_a^b |f(x)| dx$.

D. $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$.

Câu 94: Tính tích phân $I = \int_1^2 \ln x dx$ bằng cách đặt $u = \ln x$ và $dv = dx$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $I = \ln x \Big|_1^2 + \int_1^2 x dx$.

B. $I = x \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 dx$.

C. $I = x \ln x \Big|_1^2 - \int_2^1 dx$.

D. $I = x \ln x \Big|_1^2 + \int_1^2 x dx$.

Câu 95: Cho $\int_2^3 \left(\frac{2}{x+1} - \frac{2}{2x+1} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5 + d \ln 7$ với a, b, c, d là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $abcd = -8$.

B. $a + b + c + d = 1$.

C. $ad - bc = 2$.

D. $ab + cd = -9$.

Câu 96: Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{1}{4}x, y = 0, x = 1$ và $x = 4$ quanh trục Ox .

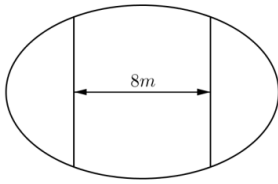
A. $V = \frac{21}{16}$.

B. $V = \frac{23}{16}$.

C. $V = \frac{23\pi}{16}$.

D. $V = \frac{21\pi}{16}$.

Câu 97: Ông an có một mảnh vườn hình elip có độ dài trục lớn bằng $16m$ và độ dài trục nhỏ bằng $10m$. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng $8m$ và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ bên). Biết kinh phí trồng hoa là 100.000 đồng/ $1m^2$. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó ? (Số tiền làm tròn đến hàng nghìn).



A. 7.862.000 đồng.

B. 7.826.000 đồng.

C. 7.653.000 đồng.

D. 7.128.000 đồng.

Câu 98: Biết $\int_1^2 x \ln x dx = a \ln a + b$. Tính $S = a + b$.

A. $S = -\frac{3}{2}$.

B. $S = -\frac{3}{4}$.

C. $S = 2$.

D. $S = \frac{5}{4}$.

Câu 99: Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $x = \frac{\pi}{2}, x = \pi, y = 0$ và $y = \sqrt{1 + \cos^4 + \sin^4}$.

A. $V = \frac{5\pi^2}{8}$.

B. $V = \frac{7\pi^2}{8}$.

C. $V = \frac{5\pi}{8}$.

D. $V = \frac{7\pi}{8}$.

Câu 100: Biết $\int_a^b f(x) dx = 10$ và $\int_a^b (3f(x) - 5g(x)) dx = 5$. Tính $\int_a^b g(x) dx$.

A. $\int_a^b f(x) dx = -5$.

B. $\int_a^b f(x) dx = 5$.

C. $\int_a^b f(x) dx = 15$.

D. $\int_a^b f(x) dx = 0$.

Câu 101: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 + 2 \cos 2x}, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính

$I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx$.

A. $I = 6$.

B. $I = -6$.

C. $I = 0$.

D. $I = -2$.

Câu 102: Cho $\int_1^5 f(x) dx = 5$. Tính $I = \int_0^{\ln 2} e^x f(4e^x - 3) dx$.

A. $I = \frac{5}{8}$.

B. $I = \frac{5}{4}$.

C. $I = 20$.

D. $I = \frac{5}{2}$.

Câu 103: Cho hình D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = (\pi + 1)\pi$.

B. $V = \pi + 1$.

C. $V = (\pi - 1)\pi$.

D. $V = \pi - 1$.

Câu 104: Cho $\int_0^6 f(x) dx = 12$. Tính $I = \int_0^2 f(3x) dx$.

A. $I = 2$.

B. $I = 6$.

C. $I = 4$.

D. $I = 36$.

Câu 105: Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$ bằng cách đặt $u = xe^x$ và $dv = \frac{dx}{(x+1)^2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I = -\frac{xe^x}{x+1} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^x dx$.

B. $I = -\frac{xe^x}{x+1} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{e^x}{x+1} dx$.

C. $I = \frac{xe^x}{x+1} \Big|_0^1 + \int_0^1 xe^x dx$.

D. $I = -\frac{xe^x}{x+1} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx$.

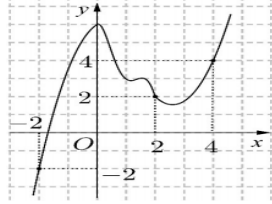
Câu 106: Cho $\int_1^2 f(x)dx = 16$. Tính $I = \int_0^{\ln 2} e^x f(4e^x - 3)dx$.

- A. $I = 4$. B. $I = 32$. C. $I = 16$. D. $I = 8$.

Câu 107: Tính tích phân $I = \int_0^1 x\sqrt{x^2 + 1}dx$.

- A. $I = 2\sqrt{2} - 1$. B. $I = \frac{2\sqrt{2}}{3} - 1$. C. $I = \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$. D. $I = \frac{1}{3}(2\sqrt{2} + 1)$.

Câu 108: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $h(x) = 2f(x) - x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $h(2) > h(4) > h(-2)$. B. $h(4) = h(-2) > h(2)$.
C. $h(4) = h(-2) < h(2)$. D. $h(2) > h(-2) > h(4)$.

Câu 109: Thể tích V của vật thể tròn xoay sinh ra bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{\cos^4 x + \sin^4 x}$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ và $x = \pi$ khi quay quanh trục Ox bằng.

- A. $V = \frac{3\pi}{2}$. B. $V = \frac{5\pi^2}{8}$. C. $V = \frac{5\pi}{8}$. D. $V = \frac{3\pi^2}{8}$.

Câu 110: Cho $2\int_{\frac{1}{2}}^1 x \ln x dx = a \ln 2 + b$ với a, b là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây sai?

- A. $a + b - \frac{1}{4} = -\frac{3}{8}$. B. $a + b = -\frac{1}{8}$. C. $2a - b = \frac{1}{8}$. D. $4a + 8b = -\frac{1}{2}$.

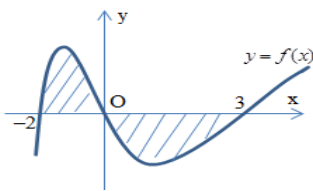
Câu 111: Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x(4 - x)$ và $y = 0$ quanh trục Ox .

- A. $V = \frac{512}{15}$. B. $V = \frac{32}{3}\pi$. C. $V = \frac{32}{3}$. D. $V = \frac{512}{15}\pi$.

Câu 112: Cho $\int_{-1}^2 f(x)dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x)dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)]dx$.

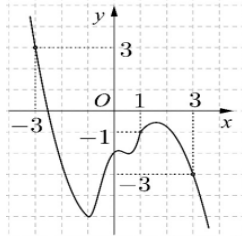
- A. $I = \frac{5}{2}$. B. $I = \frac{11}{2}$. C. $I = \frac{7}{2}$. D. $I = \frac{17}{2}$.

Câu 113: Diện tích hình phẳng (phần gạch chéo) trong hình là?



- A. $S = \int_{-2}^3 f(x)dx$. B. $S = \int_0^{-2} f(x)dx + \int_0^3 f(x)dx$.
C. $S = \int_{-2}^0 f(x)dx - \int_0^3 f(x)dx$. D. $S = \int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^3 f(x)dx$.

Câu 114: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) + x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $g(-3) < g(3) < g(1)$. B. $g(1) < g(-3) < g(3)$.
C. $g(3) < g(-3) < g(1)$. D. $g(1) < g(3) < g(-3)$.

Câu 115: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;2]$, $f(1)=1$ và $f(2)=2$. Tính $I = \int_1^2 f'(x)dx$.

A. $I = \frac{7}{2}$.

B. $I = 3$.

C. $I = 1$.

D. $I = -1$.

Câu 116: Cho hàm số $f(x) = -x(x-1)(x-2)$. Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị hàm số, trục Ox và hai đường thẳng $x=0, x=2$ là.

A. $S = -\int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$.

B. $S = \int_0^1 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx$.

C. $S = \int_0^2 f(x)dx$.

D. $S = \left| \int_0^1 f(x)dx \right|$.

Câu 117: Biết $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \alpha$. Tính $P = \frac{\tan \alpha - 2}{\tan \alpha + 2}$.

A. $P = 0$.

B. $P = -3$.

C. $P = \frac{1}{3}$.

D. $P = -\frac{1}{3}$.

Câu 118: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$, trục tung và tiếp tuyến tại điểm có hoành độ thỏa mãn $y''=0$ được tính bằng công thức ?

A. $S = \int_0^3 (-x^3 + 6x^2 - 10x + 5)dx$.

B. $S = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 12x - 8)dx$.

C. $S = \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 10x - 5)dx$.

D. $S = \int_0^2 (-x^3 + 6x^2 - 12x + 8)dx$.

Câu 119: Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}dx$ bằng cách đặt $u = \sqrt{4-x^2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

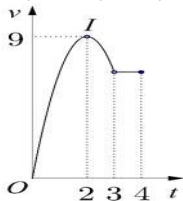
A. $I = \int_{\sqrt{3}}^2 (u^2 - 4)du$.

B. $I = \int_2^{\sqrt{3}} (4 - u^2)du$.

C. $I = \int_0^{\sqrt{3}} (4 - u^2)du$.

D. $I = \int_{\sqrt{3}}^2 (4 - u^2)du$.

Câu 120: Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển trong 4 giờ đó.



A. $s = 26,5(\text{km})$.

B. $s = 24(\text{km})$.

C. $s = 28,5(\text{km})$.

D. $s = 27(\text{km})$.

Câu 121: Cho $F(x) = -\frac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \ln x$.

A. $\int f'(x) \ln x dx = -\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$.

B. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{5x^5} + C$.

C. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$.

D. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{5x^5} + C$.

Câu 122: Biết $\int \frac{x}{(x+1)(2x+1)}dx = \int \left(\frac{a}{x+1} + \frac{b}{2x+1} \right)dx$. Tính $P = a.b$.

A. $P = \frac{1}{2}$.

B. $P = -1$.

C. $P = 0$.

D. $P = 1$.

Câu 123: Cho $\int_0^{e^2} \frac{\ln x + \ln^2 x}{x \ln(e^2 x)} dx = a \ln b$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $a + b = 4$.

B. $a + 2b = 5$.

C. $a - b = 1$.

D. $a \cdot b = 12$.

Câu 124: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C$.

C. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$.

Câu 125: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 5$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx$.

A. $I = 7$.

B. $I = 3$.

C. $I = 5 + \pi$.

D. $I = 5 + \frac{\pi}{2}$.

Câu 126: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

A. $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$.

B. $F(x) = -\cos x + \sin x + 3$.

C. $F(x) = \cos x - \sin x + 3$.

D. $F(x) = -\cos x + \sin x - 1$.

Câu 127: Tìm hàm số $f(x)$ biết $\int f(x) dx = \sin 2x + \cos 2x - e^x + C$.

A. $f(x) = 2 \cos 2x - 2 \sin 2x - e^x + C$.

B. $f(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x - e^x$.

C. $f(x) = 2 \cos 2x - 2 \sin 2x - e^x$.

D. $f(x) = 2 \sin 2x - 2 \cos 2x - e^x$.

Câu 128: Biết $\int_1^2 (2x-1) \ln x dx = a \ln a + b$. Tính $P = ab$.

A. $P = -1$.

B. $P = 2$.

C. $P = \frac{3}{2}$.

D. $P = -\frac{1}{2}$.

Câu 129: Tìm nguyên hàm của hàm số $y = \frac{4x^3 - 5x^2 - 1}{x^2}$.

A. $2x^2 - 5x + \frac{1}{x} + C$.

B. $x^2 - 5x + \frac{1}{x} + C$.

C. $-2x^2 + 5x - \frac{1}{x} + C$.

D. $2x^2 - 5x + \ln|x| + C$.

Câu 130: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5 \sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $f(x) = 3x - 5 \cos x + 15$.

B. $f(x) = 3x + 5 \cos x + 2$.

C. $f(x) = 3x - 5 \cos x + 2$.

D. $f(x) = 3x + 5 \cos x + 5$.

Câu 131: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1; 2]$, $f(1) = 1$ và $f(2) = 2$. Tính $I = \int_1^2 f'(x) dx$.

A. $I = 3$.

B. $I = 1$.

C. $I = -1$.

D. $I = \frac{7}{2}$.

Câu 132: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-1}$ và $F(2) = 1$. Tính $F(3)$.

A. $F(3) = \ln 2 + 1$.

B. $F(3) = \ln 2 - 1$.

C. $F(3) = \frac{1}{2}$.

D. $F(3) = \frac{7}{4}$.

Câu 133: Cho $\int_0^4 f(x)dx = 16$. Tính $I = \int_0^2 f(2x)dx$.

A. $I = 32$.

B. $I = 8$.

C. $I = 16$.

D. $I = 4$.

Câu 134: Cho $\int_0^9 f(x)dx = 81$. Tính $I = \int_0^3 f(3x)dx$.

A. $I = 9$.

B. $I = 3$.

C. $I = 27$.

D. $I = 81$.

Câu 135: Cho hình D giới hạn bởi đường cong $y = \frac{1}{1+\sqrt{4-3x}}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu ?

A. $V = \frac{\pi}{9}$.

B. $V = \frac{\pi}{9} \ln \frac{3}{2}$.

C. $V = \frac{2\pi}{3} \left(\ln \frac{3}{2} - 1 \right)$.

D. $V = \frac{\pi}{9} \left(6 \ln \frac{3}{2} - 1 \right)$.

Câu 136: Cho $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

A. $\int f'(x)e^{2x}dx = -2x^2 + 2x + C$.

B. $\int f'(x)e^{2x}dx = -x^2 + x + C$.

C. $\int f'(x)e^{2x}dx = 2x^2 - 2x + C$.

D. $\int f'(x)e^{2x}dx = -x^2 + 2x + C$.

Câu 137: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \frac{\pi}{a} - \ln b$ ($a, b \in \mathbb{N}$). Tính $P = a.b$.

A. $P = 2\sqrt{2}$.

B. $P = 4$.

C. $P = 4\sqrt{2}$.

D. $P = \sqrt{2}$.

Câu 138: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$.

B. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$.

C. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3}\sqrt{2x-1} + C$.

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C$.

Câu 139: Tính $I = \int_0^{\pi} \cos^3 x \cdot \sin x dx$.

A. $I = -\pi^4$.

B. $I = 0$.

C. $I = -\frac{1}{4}$.

D. $I = -\frac{1}{4}\pi^4$.

Câu 140: Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào sai ?

A. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

B. $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$.

C. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

D. $\int_a^a f(x)dx = 1$.

Câu 141: Tìm tất cả hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = \sqrt[3]{4x+1}$.

A. $f(x) = \frac{16}{3}\sqrt[3]{(4x+1)^4} + C$

B. $f(x) = \frac{(4x+1)\sqrt[3]{4x+1}}{4} + C$

C. $f(x) = \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x+1)^4} + C$

D. $f(x) = \frac{3}{16}\sqrt[4]{(4x+1)^3} + C$

Câu 142: Nếu $\int_a^d f(x)dx = 5$ và $\int_b^d f(x)dx = 2$ với $a < d < b$ thì $\int_a^b f(x)dx$ bằng ?

A. 7.

B. 3.

C. -2.

D. 8.

Câu 143: Thể tích vật thể tròn xoay được giới hạn bởi các đường $y = x^{\frac{1}{2}}e^{\frac{x}{2}}$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$ khi quay quanh trục hoành là $V = \pi(ae^2 + be)$. Khi đó $a + b$ bằng?

- A. 2. B. 1. C. 0. D. -2.

Câu 144: Cho $\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $a - 2b = 0$. B. $a + 2b = 0$. C. $a + b = -2$. D. $a + b = 2$.

Câu 145: Biết $\int \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{x} \right) dx = a\sqrt[3]{x^5} + b \ln|x| + C$. Tính $S = a + b$.

- A. $S = \frac{23}{5}$. B. $S = 5$. C. $S = \frac{3}{5}$. D. $S = \frac{24}{5}$.

Câu 146: Tính tích phân $I = \int_1^{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} dx$ bằng cách đặt $u = \sqrt{x^2+4}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $I = \int_1^{\sqrt{5}} \left(1 + \frac{4}{u^2+4} \right) du$. B. $I = \int_1^{\sqrt{5}} \left(1 - \frac{4}{u^2-4} \right) du$.
C. $I = \int_{\sqrt{5}}^3 \left(1 + \frac{4}{u^2+4} \right) du$. D. $I = \int_{\sqrt{5}}^3 \left(1 - \frac{4}{u^2-4} \right) du$.

Câu 147: Tính tích phân $I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{5e^{2x} - 2e^{3x}} dx$ bằng cách đặt $u = \sqrt{5 - 2e^x}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $I = \int_1^2 u^2 du$. B. $I = \int_0^{\ln 2} u^2 du$. C. $I = \frac{1}{2} \int_1^2 u^2 du$. D. $I = \int_1^2 \sqrt{u} du$.

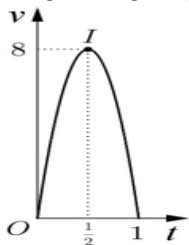
Câu 148: Tính $I = \int \frac{1}{\sqrt{2} x \sqrt{x^2-1}} dx$

- A. $I = \frac{5\pi}{12}$. B. $I = \frac{1}{12}$. C. $I = \frac{\pi}{12}$. D. $I = \frac{\pi+1}{12}$.

Câu 149: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

- A. $\int f(x) dx = \frac{2}{3} (2x-1) \sqrt{2x-1} + C$. B. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \sqrt{2x-1} + C$.
C. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \sqrt{2x-1} + C$. D. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} (2x-1) \sqrt{2x-1} + C$.

Câu 150: Một người chạy trong 1 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I\left(\frac{1}{2}; 8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s người đó chạy trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi bắt đầu chạy.



- A. $s = 2,3$ (km). B. $s = 4,5$ (km).
C. $s = 4,0$ (km). D. $s = 5,3$ (km).

Câu 151: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

- A. $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}$. B. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$. C. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$. D. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$.

Câu 152: Tính tích phân $I = \int_0^4 x^3 \sqrt{x^2 + 9} dx$ bằng cách đặt $u = \sqrt{x^2 + 9}$. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. $I = \int_3^5 (u^2 + 9) u^2 du.$

B. $I = \int_3^5 (u^2 - 9) u^2 du.$

C. $I = \frac{1412}{5}.$

D. $I = \int_3^5 u^4 du - 9 \int_3^5 u^2 du.$

Câu 153: Tính tích phân $I = \int_1^e x \ln x dx.$

A. $I = \frac{e^2 - 1}{4}.$

B. $I = \frac{2e^2 + 1}{3}.$

C. $I = \frac{1 - e^2}{4}.$

D. $I = \frac{e^2 + 1}{4}.$

Câu 154: Cho hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = \sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = \pi$. Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình này xung quanh trục Ox .

A. $V = \frac{1}{2}$

B. $V = \frac{\pi^2}{2}$

C. $V = \frac{\pi}{2}$

D. $V = \frac{3\pi^2}{2}$

Câu 155: Tính tích phân $I = \int_{-1}^3 \frac{1}{x^2 + 3} dx$ bằng cách đặt $x = \sqrt{3} \tan t$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $I = \frac{\sqrt{3}}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 + \tan^2 t} dt.$

B. $I = 3 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos t dt.$

C. $I = \frac{\sqrt{3}}{3} \int_{-1}^3 dt.$

D. $I = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dt.$

Câu 156: Cho hình D giới hạn bởi đường cong $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}}$, trục hoành và các đường thẳng $y = 0, x = 3$.

Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu ?

A. $V = (4 + \ln 3) \pi - \frac{\sqrt{3}}{3} \pi^2.$

B. $V = (4 + \ln 3) \pi - \frac{1}{3} \pi^2.$

C. $V = 4 + \ln 3 + \frac{\sqrt{3}}{3} \pi^2.$

D. $V = (4 + \ln 3) \pi^2.$

Câu 157: Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$ bằng cách đặt $x = 2 \sin t$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos 2t) dt.$

B. $I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2t) dt.$

C. $I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos 2t) dt.$

D. $I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt.$

Câu 158: Biết $\int_1^2 x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c$, với a, b, c là các số hữu tỷ. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = -\frac{10}{3}.$

B. $S = -\frac{1}{6}.$

C. $S = \frac{1}{6}.$

D. $S = 3.$

Câu 159: Cho $f(x)$ là hàm số có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn điều kiện $f(0) = \frac{\pi}{2}$ và

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) dx = 2\pi. \text{ Tính } f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

- A. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{2}$. B. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$. C. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$. D. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$.

Câu 160: Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên K và $k \neq 0$. Khẳng định nào sau đây là sai ?

- A. $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$. B. $\int f'(x) dx = f(x) + C$.
C. $\int [f(x) \cdot g(x)] dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$. D. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$.

Câu 161: Ký hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2(x-1)e^x$, trục tung và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox .

- A. $V = 4 - 2e$. B. $V = e^2 - 5$. C. $V = (4 - 2e)\pi$. D. $V = (e^2 - 5)\pi$.

Câu 162: Cho hình D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{1+2x} \cdot e^{3x}$ và các trục tọa độ. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu ?

- A. $V = \pi^2 \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{18e^3} \right)$. B. $V = \pi \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{18e^3} \right)$. C. $V = \frac{1}{9} + \frac{1}{18e^3}$. D. $V = \pi \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{18e^3} \right)$.

Câu 163: Khẳng định nào dưới đây là sai ?

- A. $\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C. (a \neq 0)$ B. $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$.
C. $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C. (k \neq 0)$ D. $\int \sin x dx = \cos x + C$

Câu 164: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-1}$ và $F(2) = 1$. Tính $F(3)$.

- A. $F(3) = \ln 2 - 1$. B. $F(3) = \frac{7}{4}$. C. $F(3) = \frac{1}{2}$. D. $F(3) = \ln 2 + 1$.

Câu 165: Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sqrt{8 + \cos x} dx$ và đặt $t = 8 + \cos x$. Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

- A. $I = \sqrt{729} - \sqrt{512}$. B. $I = \frac{2}{3} t^{\frac{2}{3}} \Big|_8^9$. C. $I = \int_8^9 \sqrt{t} dt$. D. $I = \int_9^8 \sqrt{t} dt$.

Câu 166: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + 5 \cos x}{3 + 5 \sin x - \cos 2x} dx = a \ln 2 + b \ln 3$ với a, b là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 4$. B. $\frac{2}{a} + b = \frac{1}{3}$. C. $a - 2b = \frac{5}{3}$. D. $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 4$.

Câu 167: Cho $F(x) = (x-1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

- A. $\int f'(x)e^{2x} dx = (4-2x)e^x + C$. B. $\int f'(x)e^{2x} dx = (2-x)e^x + C$.
C. $\int f'(x)e^{2x} dx = (x-2)e^x + C$. D. $\int f'(x)e^{2x} dx = \frac{2-x}{2} e^x + C$.

Câu 168: Một ô tô đang chạy với vận tốc $10m/s$ thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển

động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây (s), kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được một quãng đường s bằng bao nhiêu mét?

- A. $s = 0,2m$. B. $s = 20m$. C. $s = 2m$. D. $s = 10m$.

Câu 169: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và $y = x - x^2$.

- A. $S = \frac{81}{12}$. B. $S = 12$. C. $S = \frac{37}{12}$. D. $S = \frac{7}{2}$.

Câu 170: Biết $\int_0^6 f(x)dx = 10$ và $\int_0^4 f(x)dx = 7$. Tính $\int_4^6 f(x)dx$.

- A. $\int_4^6 f(x)dx = -3$. B. $\int_4^6 f(x)dx = \frac{10}{7}$. C. $\int_4^6 f(x)dx = 17$. D. $\int_4^6 f(x)dx = 3$.

Câu 171: Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} \cos^3 x \cdot \sin x dx$.

- A. $I = -1$. B. $I = -\pi^4$. C. $I = -\frac{1}{4}\pi^4$. D. $I = 0$.

Câu 172: Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$, biết rằng mỗi đơn vị dài trên các trục tọa độ là $2cm$.

- A. $S = 17cm^2$. B. $S = \frac{15}{4}cm^2$. C. $S = 15cm^2$. D. $S = \frac{17}{4}cm^2$.

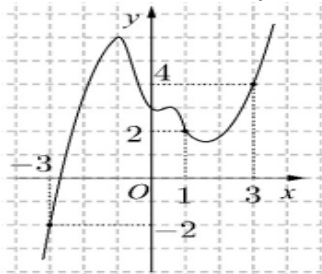
Câu 173: Tính diện tích hình phẳng S được giới hạn bởi các đường $y = \frac{3x}{4}$ và $y = \frac{x^2}{x+1}$.

- A. $S = \frac{15}{8} - 2\ln 2$. B. $S = \frac{15}{8} - \ln 2$. C. $S = \frac{15}{8} + 2\ln 2$. D. $S = 2\ln 2 - \frac{15}{8}$.

Câu 174: Tính tích phân $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2 - 1}dx$ bằng cách đặt $u = x^2 - 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $I = 2\int_0^3 \sqrt{u}du$. B. $I = \int_1^2 \sqrt{u}du$. C. $I = \int_0^3 \sqrt{u}du$. D. $I = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{u}du$.

Câu 175: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $g(1) > g(3) > g(-3)$.
B. $g(-3) > g(3) > g(1)$.
C. $g(1) > g(-3) > g(3)$.
D. $g(3) > g(-3) > g(1)$.

ÔN TẬP THI THPT

Câu 1: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x^3 + x^2$.

A. $F(x) = 3x^2 + 2x + C$.

B. $F(x) = x^3 + x^2 + C$.

C. $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C$.

D. $F(x) = x^4 + x^3 + C$.

Câu 2: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $V = \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$. B. $V = \int_0^2 (x^2 + 3) dx$. C. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$. D. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3) dx$.

Câu 3: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-1}$ thỏa mãn $F(5) = 2$ và $F(0) = 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $F(2) = 2 - 2\ln 2$.

B. $F(-3) = 2$.

C. $F(-1) = 2 - \ln 2$.

D. $F(3) = 1 + \ln 2$.

Câu 4: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \pi \int_0^2 e^x dx$.

B. $S = \int_0^2 e^{2x} dx$.

C. $S = \pi \int_0^2 e^{2x} dx$.

D. $S = \int_0^2 e^x dx$.

Câu 5: Biết $\int f(x) dx = 2x \ln(3x-1) + C$ với $x \in \left(\frac{1}{9}; +\infty\right)$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(3x) dx = 6x \ln(9x-1) + C$.

B. $\int f(3x) dx = 2x \ln(9x-1) + C$.

C. $\int f(3x) dx = 3x \ln(9x-1) + C$.

D. $\int f(3x) dx = 6x \ln(3x-1) + C$.

Câu 6: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa $2f(x) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$. Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $I = \frac{\pi}{4}$.

B. $I = \frac{\pi}{6}$.

C. $I = \frac{\pi}{20}$.

D. $I = \frac{\pi}{16}$.

Câu 7: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là

A. $\frac{x^3}{3} + x + C$.

B. $x^3 + x + C$.

C. $6x + C$.

D. $x^3 + C$.

Câu 8: Diện tích S của hình phẳng phần gạch chéo trong hình vẽ bên được tính bởi công thức nào dưới đây?

A. $S = \int_{-1}^2 (2x-2) dx$.

B. $S = \int_{-1}^2 (-2x+2) dx$.

C. $S = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$.

D. $S = \int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx$.

Câu 9: Cho $\int_2^4 f(x) dx = 10$ và $\int_2^4 g(x) dx = 5$. Tính $I = \int_2^4 [3f(x) - 5g(x)] dx$

A. $I = -5$.

B. $I = 15$.

C. $I = 5$.

D. $I = 10$.

Câu 10: Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $y = -x^3 + 12x$ và $y = -x^2$.

A. $S = \frac{397}{4}$.

B. $S = \frac{793}{4}$.

C. $S = \frac{937}{12}$.

D. $S = \frac{343}{12}$.

Câu 11: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

- A. $V = \pi(\pi + 1)$. B. $V = \pi + 1$. C. $V = \pi(\pi - 1)$. D. $V = \pi - 1$.

Câu 12: Một đám vi khuẩn ngày thứ x có số lượng là $N(x)$. Biết rằng $N'(x) = \frac{2000}{1+x}$ và lúc đầu số lượng vi khuẩn là 5000 con. Vậy ngày thứ 12 số lượng vi khuẩn (sau khi làm tròn) là bao nhiêu con?

- A. 5130. B. 10130. C. 10132. D. 5154.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 2]$ và $\int_1^2 (x-1)f'(x)dx = a$. Tính $I = \int_1^2 f(x)dx$ theo a và biết $b = f(2)$.

- A. $I = a + b$. B. $I = b - a$. C. $I = -a - b$. D. $I = a - b$.

Câu 14: Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = xe^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ xung quanh trục Ox .

- A. $V = \int_0^1 x^2 e^{2x} dx$. B. $V = \pi \int_0^1 x^2 e^{2x} dx$. C. $V = \pi \int_0^1 x^2 e^x dx$. D. $V = \int_0^1 x e^x dx$.

Câu 15: Tính $I = \int_0^1 e^{3x+1} dx$.

- A. $I = e^4 - e$. B. $I = \frac{1}{3}(e^4 - e)$. C. $I = \frac{1}{3}(e^4 + e)$. D. $I = e^3 - e$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{25}$ và $f'(x) = 4x^3 [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của $f(1)$.

- A. $f(1) = -\frac{1}{10}$. B. $f(1) = -\frac{41}{400}$. C. $f(1) = -\frac{1}{40}$. D. $f(1) = -\frac{391}{400}$.

Câu 17: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$ và các đường thẳng $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$. Thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox .

- A. $V = 2\pi \ln 2$. B. $V = \frac{3}{4}$. C. $V = 2 \ln 2$. D. $V = \frac{3\pi}{4}$.

Câu 18: Khẳng định nào dưới đây sai?

- A. $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$. B. $\int 0 dx = C$. C. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$. D. $\int e^x dx = e^x + C$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(-2) = -\frac{2}{9}$ và $f'(x) = 2x[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính $f(1)$.

- A. $f(1) = -\frac{2}{3}$. B. $f(1) = -\frac{19}{36}$. C. $f(1) = -\frac{2}{15}$. D. $f(1) = -\frac{35}{36}$.

Câu 20: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y = x^2 + 2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $V = \int_1^2 (x^2 + 2) dx$. B. $V = \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx$. C. $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2) dx$. D. $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx$.

Câu 21: Một chiếc ô tô chuyển động với vận tốc $v(t)$ (m/s), có gia tốc $a(t) = \frac{3}{t+1}$ (m/s²). Biết vận tốc

của ô tô tại giây thứ 6 bằng 6 (m/s). Tính vận tốc của ô tô tại giây thứ 20.

- A. $v = 26$. B. $v = 3 \ln 3$. C. $v = 14$. D. $v = 3 \ln 3 + 6$.

Câu 22: Gọi V là thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x$ quay xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $V = \pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx$. B. $V = \pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$.
C. $V = \pi \int_0^2 4x^2 dx + \pi \int_0^2 x^4 dx$. D. $V = \pi \int_0^2 (2x - x^2) dx$.

Câu 23: Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $S = \pi \int_0^2 2^x dx$. B. $S = \int_0^2 2^x dx$. C. $S = \pi \int_0^2 2^{2x} dx$. D. $S = \int_0^2 2^{2x} dx$.

Câu 24: Biết $f(x)$ làm hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^9 f(x) dx = 9$. Tính $I = \int_1^4 f(3x-3) dx$.

- A. $I = 3$. B. $I = 27$. C. $I = 0$. D. $I = 24$.

Câu 25: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+1}$, biết $F\left(\frac{e-1}{2}\right) = \frac{3}{2}$.

- A. $F(x) = \ln|2x+1| + \frac{1}{2}$. B. $F(x) = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + 1$.
C. $F(x) = 2 \ln|2x+1| - \frac{1}{2}$. D. $F(x) = 2 \ln|2x+1| + 1$.

Câu 26: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ và $\int_0^{10} f(x) dx = 7$ và $\int_2^6 f(x) dx = 3$. Tính

$$P = \int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx.$$

- A. $P = -4$. B. $P = 4$. C. $P = 10$. D. $P = 7$.

Câu 27: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $2f(x) - 3f(1-x) = x\sqrt{1-x}$.

Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

- A. $I = \frac{1}{25}$. B. $I = -\frac{1}{15}$. C. $I = -\frac{4}{15}$. D. $I = \frac{4}{75}$.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+1} & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{khi } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^3 f(x) dx$.

- A. $\int_0^3 f(x) dx = 6 + \ln 2$. B. $\int_0^3 f(x) dx = 2 + 2 \ln 2$.
C. $\int_0^3 f(x) dx = 4 + \ln 4$. D. $\int_0^3 f(x) dx = 6 + \ln 4$.

Câu 29: Tính thể tích V của vật thể tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = a$, ($a > 1$) quay xung quanh trục Ox .

A. $V = \left(1 + \frac{1}{a}\right)\pi$. B. $V = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\pi$. C. $V = \left(1 + \frac{1}{a}\right)$. D. $V = \left(1 - \frac{1}{a}\right)$.

Câu 30: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f'(x) = x + \sin x$ và $f(0) = 1$. Tìm $f(x)$.

A. $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x + 2$. B. $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x - 2$.
C. $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x$. D. $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x + \frac{1}{2}$.

Câu 31: Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int 3^{2x} dx = \frac{3^{2x}}{\ln 3} + C$. B. $\int 3^{2x} dx = \frac{9^x}{\ln 3} + C$. C. $\int 3^{2x} dx = \frac{3^{2x+1}}{2x+1} + C$. D. $\int 3^{2x} dx = \frac{3^{2x}}{\ln 9} + C$.

Câu 32: Cho $\int_0^9 f(x) dx = 37$ và $\int_9^0 g(x) dx = 16$. Tính $I = \int_0^9 [2f(x) + 3g(x)] dx$.

A. $I = 122$. B. $I = 58$. C. $I = 143$. D. $I = 26$.

Câu 33: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - 1 - \sin x) dx = \pi \left(\frac{\pi}{a} - \frac{1}{b} \right) - 1$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Khẳng định nào dưới đây là sai?

A. $a - b = 2$. B. $a + b = 5$. C. $a + 2b = 8$. D. $2a - 3b = 2$.

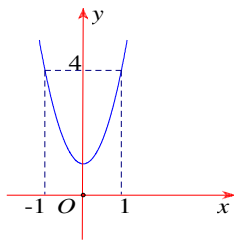
Câu 34: Một ô tô đang chạy với tốc độ $10(m/s)$ thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với $v(t) = -5t + 10(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. $8m$. B. $20m$. C. $5m$. D. $10m$.

Câu 35: Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t(m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc a bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a(m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A . Tính vận tốc V_B của B tại thời điểm đuổi kịp A .

A. $V_B = 16(m/s)$. B. $V_B = 13(m/s)$. C. $V_B = 20(m/s)$. D. $V_B = 15(m/s)$.

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có đồ thị là (C) . Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên.



Tính giá trị $H = f(4) - f(2)$.

A. $H = 45$. B. $H = 64$.
C. $H = 51$. D. $H = 58$.

Câu 37: Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(H): y = \frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ.

A. $S = \ln 2 - 1$. B. $S = 2 \ln 2 - 1$. C. $S = \ln 2 + 1$. D. $S = 2 \ln 2 + 1$.

Câu 38: Biết $\int_0^4 x \ln(x^2 + 9) dx = a \ln 5 + b \ln 3 + c$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính $T = a + b + c$.

A. $T = 10$. B. $T = 25$. C. $T = 8$. D. $T = -9$.

Câu 39: Cho các số thực a, b khác 0. Xét hàm số $f(x) = \frac{a}{(x+1)^3} + bxe^x$ với mọi x khác -1 . Biết

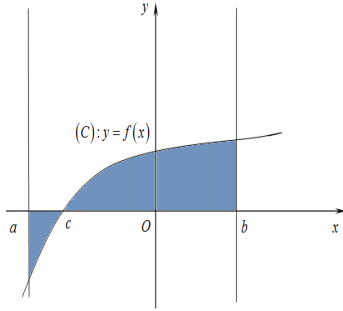
$f'(0) = -22$ và $\int_0^1 f(x) dx = 5$. Tính $a+b$?

- A. $a+b=7$. B. $a+b=10$. C. $a+b=8$. D. $a+b=19$.

Câu 40: Cho biết $\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} dx = a \ln|x+1| + b \ln|x-2| + C$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a+2b=8$. B. $a+b=8$. C. $a-b=8$. D. $2a-b=8$.

Câu 41: Diện tích S của hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$ ($a < b$) (phần tô đậm trong hình vẽ) tính theo công thức nào dưới đây ?



- A. $S = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$. B. $S = \int_a^b f(x) dx$.
C. $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$. D. $S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

Câu 42: Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{120}t^2 + \frac{58}{45}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s^2) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A . Tính vận tốc V_B của B tại thời điểm đuổi kịp A .

- A. $V_B = 25(m/s)$. B. $V_B = 21(m/s)$. C. $V_B = 30(m/s)$. D. $V_B = 36(m/s)$.

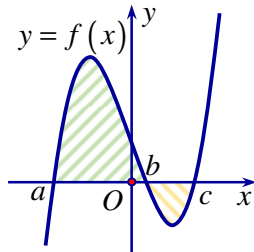
Câu 43: Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)] dx$.

- A. $I = \frac{5}{2}$. B. $I = \frac{7}{2}$. C. $I = \frac{17}{2}$. D. $I = \frac{11}{2}$.

Câu 44: Biết $\int_3^5 \frac{x^2+x+1}{x+1} dx = a + \ln \frac{b}{2}$ với a, b là các số nguyên. Tính $S = a - 2b$.

- A. $S = 5$. B. $S = 2$. C. $S = -2$. D. $S = 10$.

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hình phẳng được đánh dấu trong hình vẽ bên có diện tích S được tính bởi công thức nào dưới đây ?



- A. $S = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$. B. $S = -\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$.
C. $S = \int_a^b f(x) dx - \int_b^c f(x) dx$. D. $S = \int_a^b f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$.

Câu 46: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x(1 + \ln x)$ là

- A. $2x^2 \ln x + x^2 + C$. B. $2x^2 \ln x + x^2$. C. $2x^2 \ln x + 3x^2 + C$. D. $2x^2 \ln x + 3x^2$.

Câu 47: Cho $\int_1^c (1+x \ln x) dx = ae^2 + be + c$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a+b=-c$. B. $a-b=-c$. C. $a+b=c$. D. $a-b=c$.

Câu 48: Cho hai hàm số $F(x) = (x^2 + ax + b)e^{-x}$ và $f(x) = (-x^2 + 3x + 6)e^{-x}$. Tìm a và b để $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

- A. $a=-1, b=-7$. B. $a=1, b=-7$. C. $a=-1, b=7$. D. $a=1, b=7$.

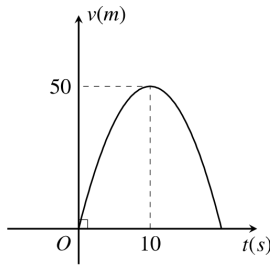
Câu 49: Biết $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{b}{c} + a \ln 2$ (với a là số thực, b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản). Tính giá trị của $T = 2a + 3b + c$.

- A. $T=-6$. B. $T=4$. C. $T=5$. D. $T=6$.

Câu 50: Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}e^x$, trục hoành và đường thẳng $x=1$.

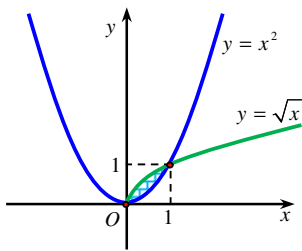
- A. $V = \frac{\pi}{4}(e^2 + 1)$. B. $V = \frac{1}{4}(e^2 + 1)$. C. $V = \frac{\pi}{4}(e^4 - 1)$. D. $V = \frac{1}{4}(e^4 - 1)$.

Câu 51: Một vật chuyển động vận tốc tăng liên tục được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol có hình bên dưới. Biết rằng sau 10s thì vật đó đạt đến vận tốc cao nhất và bắt đầu giảm tốc. Hỏi từ lúc bắt đầu đến lúc đạt vận tốc cao nhất thì vật đó đi được quãng đường bao nhiêu mét?



- A. $\frac{1000}{3}m$. B. $\frac{1400}{3}m$.
C. $\frac{1100}{3}m$. D. $300m$.

Câu 52: Tính thể tích V của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$ quanh trục Ox .



- A. $V = \frac{\pi}{10}$. B. $V = \frac{9\pi}{10}$.
C. $V = \frac{7\pi}{10}$. D. $V = \frac{3\pi}{10}$.

Câu 53: Cho f, g là hai hàm liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn điều kiện $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10$ và

$\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6$. Tính $I = \int_1^3 [f(x) + g(x)] dx$.

- A. $I=12$. B. $I=9$. C. $I=3$. D. $I=6$.

Câu 54: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = 2x$. Thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox .

- A. $V = \frac{21\pi}{15}$. B. $V = \frac{32\pi}{15}$. C. $V = \frac{64\pi}{15}$. D. $V = \frac{16\pi}{15}$.

Câu 55: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5 \cos x$ và $f(0) = 5$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $f(x) = 3x - 5 \sin x + 5$. B. $f(x) = 3x + 5 \sin x + 2$.

C. $f(x) = 3x - 5 \sin x - 5.$

D. $f(x) = 3x + 5 \sin x + 5.$

Câu 56: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = e^{2x}$, biết $F(0) = 1.$

A. $F(x) = e^{2x}.$

B. $F(x) = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{1}{2}.$

C. $F(x) = 2e^{2x} - 1.$

D. $F(x) = e^x.$

Câu 57: Tính $H = \int_1^2 e^{3x-1} dx.$

A. $H = \frac{1}{3} e^5 - e^2.$

B. $H = e^5 - e^2.$

C. $H = \frac{1}{3} (e^5 - e^2).$

D. $H = \frac{1}{3} (e^5 + e^2).$

Câu 58: Hàm số $y = f(x)$ có một nguyên hàm là $F(x) = e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)+1}{e^x}.$

A. $\int \frac{f(x)+1}{e^x} dx = \frac{1}{2} e^x - e^{-x} + C.$

B. $\int \frac{f(x)+1}{e^x} dx = 2e^x + e^{-x} + C.$

C. $\int \frac{f(x)+1}{e^x} dx = 2e^x - e^{-x} + C.$

D. $\int \frac{f(x)+1}{e^x} dx = e^x - e^{-x} + C.$

Câu 59: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của của hàm số $f(x) = \sin x$ và đồ thị hàm số $y = F(x)$ đi qua điểm $M(0;1)$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right).$

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$

B. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$

C. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

D. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

Câu 60: Cho $I = \int_0^2 f(x) dx = 3$. Tính $J = \int_0^2 [4f(x) - 3] dx.$

A. $J = 2.$

B. $J = 6.$

C. $J = 4.$

D. $J = 8.$

Câu 61: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x^3 + x.$

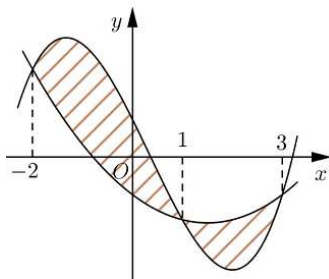
A. $F(x) = x^3 + x + C.$

B. $F(x) = x^4 + x^2 + C.$

C. $F(x) = \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} x^2 + C.$

D. $F(x) = 3x^2 + 1 + C.$

Câu 62: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + \frac{3}{4}$ và $g(x) = dx^2 + ex - \frac{3}{4}$, ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-2; 1; 3$ (tham khảo hình vẽ). Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho.



A. $S = \frac{125}{24}.$

B. $S = \frac{253}{24}.$

C. $S = \frac{125}{48}.$

D. $S = \frac{253}{48}.$

Câu 63: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = ax + \frac{b}{x^2}$ ($x \neq 0$) biết rằng $F(-1) = 1$; $F(1) = 4$ và $f(1) = 0.$

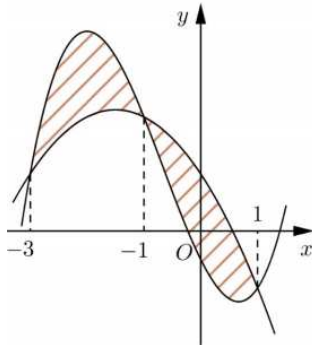
A. $F(x) = \frac{3x^2}{2} - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2}.$

B. $F(x) = \frac{3x^2}{4} - \frac{3}{2x} - \frac{7}{4}.$

C. $F(x) = \frac{3x^2}{2} + \frac{3}{4x} - \frac{7}{4}$.

D. $F(x) = \frac{3x^2}{4} + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}$.

Câu 64: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2}$ và $g(x) = dx^2 + ex + 1$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-3; -1; 1$ (tham khảo hình vẽ bên). Tìm diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho.



A. $S = 8$.

B. $S = 4$.

C. $S = \frac{9}{2}$.

D. $S = 5$.

Câu 65: Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $y = -x^2 + 2x$, trục hoành. Quay hình phẳng (H) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay đó.

A. $V = \frac{32\pi}{15}$.

B. $V = \frac{496\pi}{15}$.

C. $V = \frac{4\pi}{3}$.

D. $V = \frac{16\pi}{15}$.

Câu 66: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = e^{3x}$ thỏa mãn $F(0) = 1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + 1$.

B. $F(x) = -\frac{1}{3}e^{3x} + \frac{4}{3}$.

C. $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{2}{3}$.

D. $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$.

Câu 67: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \ln x$. Tính $F''(x)$.

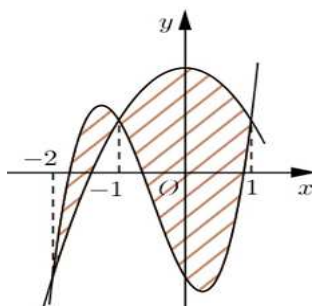
A. $F''(x) = x + \ln x$.

B. $F''(x) = \frac{1}{x}$.

C. $F''(x) = 1 - \ln x$.

D. $F''(x) = 1 + \ln x$.

Câu 68: Cho hai hàm số $f(x) = ax^2 + bx^2 + cx - 2$ và $g(x) = dx^2 + ex + 2$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-2; -1; 1$.



Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho.

A. $S = \frac{9}{2}$.

B. $S = \frac{37}{12}$.

C. $S = \frac{37}{6}$.

D. $S = \frac{13}{2}$.

Câu 69: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x+1)e^x$ và $F(0) = 3$. Tính $F(1)$.

A. $F(1) = 11e - 3$.

B. $F(1) = e + 2$.

C. $F(1) = e + 3$.

D. $F(1) = e + 7$.

Câu 70: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2) = -2; \int_0^2 f(x)dx = 1$. Tính

tích phân $I = \int_0^4 f'(\sqrt{x})dx$.

Câu 71: Một chất điểm A xuất phát từ điểm O , chuyển động với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi

quy luật $v(t) = \frac{1}{180}t^2 + \frac{11}{18}t(m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng $a(m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A . Tìm vận tốc v_B của B tại thời điểm đuổi kịp A .

- A. $v_B = 10(m/s)$. B. $v_B = 7(m/s)$. C. $v_B = 22(m/s)$. D. $v_B = 15(m/s)$.

Câu 72: Cho $\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a + 2b = 0$. B. $a - 2b = 0$. C. $a + b = -2$. D. $a + b = 2$.

Câu 73: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x^4 + x$.

- A. $F(x) = x^5 + x^2 + C$. B. $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^2 + C$.
C. $F(x) = 4x^3 + 1 + C$. D. $F(x) = x^4 + x + C$.

Câu 74: Cho $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = 2018$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{12}} \cos 2x \cdot f(\sin 2x) dx$.

- A. $I = 4036$. B. $I = \frac{1009}{2}$. C. $I = 1009$. D. $I = 2018$.

Câu 75: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[0; 2]$ và $f(2) = 3$, $\int_0^2 f(x) dx = 3$. Tính

$$J = \int_0^2 x \cdot f'(x) dx.$$

- A. $J = 0$. B. $J = -3$. C. $J = 3$. D. $J = 6$.

Câu 76: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^1 f(x) dx = 2$; $\int_0^3 f(x) dx = 6$. Tính $I = \int_{-1}^1 f(|2x-1|) dx$.

- A. $I = \frac{2}{3}$. B. $I = 6$. C. $I = \frac{3}{2}$. D. $I = 4$.

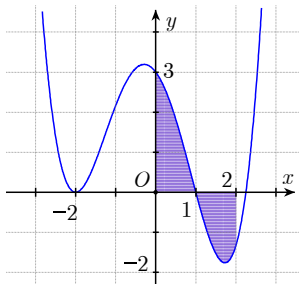
Câu 77: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2018^x \ln 2018 - \cos x$ và $f(0) = 2$. Phát biểu nào sau đây đúng?

- A. $f(x) = \frac{2018^x}{\ln 2018} + \sin x + 1$. B. $f(x) = 2018^x - \sin x + 1$.
C. $f(x) = \frac{2018^x}{\ln 2018} - \sin x + 1$. D. $f(x) = 2018^x + \sin x + 1$

Câu 78: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x^4 + x^2$.

- A. $F(x) = 4x^3 + 2x + C$. B. $F(x) = x^4 + x^2 + C$.
C. $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$. D. $F(x) = x^5 + x^3 + C$.

Câu 79: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị (C) là đường cong như hình bên. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) , trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ là phần tô đen như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S = \left| \int_0^2 f(x) dx \right|$.

B. $S = \int_0^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$.

C. $S = \int_0^2 f(x) dx$.

D. $S = -\int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$.

Câu 80: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{5}$ và $f'(x) = x^3 [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của $f(1)$.

A. $f(1) = -\frac{79}{20}$.

B. $f(1) = -\frac{4}{5}$.

C. $f(1) = -\frac{4}{35}$.

D. $f(1) = -\frac{71}{20}$.

Câu 81: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-4; +\infty)$ và $\int_0^5 f(\sqrt{x+4}) dx = 8$. Tính $I = \int_3^2 x.f(x) dx$.

A. $I = 8$.

B. $I = 4$.

C. $I = -16$.

D. $I = -4$.

Câu 82: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trong đoạn $[1; e]$, biết $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = 1$, $f(e) = 1$. Tính

$I = \int_1^e f'(x) \cdot \ln x dx$.

A. $I = 4$.

B. $I = 1$.

C. $I = 0$.

D. $I = 3$.

Câu 83: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 16$, $\int_0^2 f(x) dx = 4$. Tính tích phân

$I = \int_0^1 x.f'(2x) dx$.

A. $I = 20$.

B. $I = 12$.

C. $I = 7$.

D. $I = 13$.

Câu 84: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và thỏa mãn $f(-1) = 4$; $f(3) = 7$.

Tính $I = \int_{-1}^3 5f'(x) dx$.

A. $I = 15$.

B. $I = 3$.

C. $I = 10$.

D. $I = 20$.

Câu 85: Cho $\int_5^{21} \frac{dx}{x\sqrt{x+4}} = a \ln 3 + b \ln 5 + c \ln 7$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a - b = -2c$.

B. $a + b = c$.

C. $a + b = -2c$.

D. $a - b = -c$.

Câu 86: Cho $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tính $\int_1^e f'(x) \ln x dx$.

A. $I = \frac{3 - e^2}{2e^2}$.

B. $I = \frac{e^2 - 3}{2e^2}$.

C. $I = \frac{e^2 - 2}{e^2}$.

D. $I = \frac{2 - e^2}{e^2}$.

Câu 87: Cho $\int_0^6 f(x) dx = 12$. Tính $I = \int_0^2 f(3x) dx$.

A. $I = 4$.

B. $I = 36$.

C. $I = 2$.

D. $I = 6$.

Câu 88: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $\int_0^1 x[f'(x) - 2] dx = f(1)$. Giá trị của

$I = \int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $I = -2$.

B. $I = -1$.

C. $I = 2$.

D. $I = 1$.

Câu 89: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^x + \frac{1}{x^2}$.

A. $\int f(x)dx = \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{1}{x} + C$.

B. $\int f(x)dx = 3^x - \frac{1}{x} + C$.

C. $\int f(x)dx = \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x} + C$.

D. $\int f(x)dx = 3^x + \frac{1}{x} + C$.

Câu 90: Cho $\int_1^2 f(x^2 + 1)xdx = 2$. Tính $I = \int_2^5 f(x)dx$.

A. $I = -1$.

B. $I = 4$.

C. $I = 4$.

D. $I = 1$.

Câu 91: Cho phần vật thể $(\mathfrak{S})$ giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=0$ và $x=2$. Cắt phần vật thể $(\mathfrak{S})$ bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 2$), ta được thiết diện là một tam giác đều có độ dài cạnh bằng $x\sqrt{2-x}$. Tính thể tích V của phần vật thể $(\mathfrak{S})$.

A. $V = 4\sqrt{3}$.

B. $V = \frac{4}{3}$.

C. $V = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $V = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 92: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \sin 2x$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Tính $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

A. $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{4}$.

B. $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

C. $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$.

D. $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

Câu 93: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x} - 1$, trục hoành và đường thẳng $x = 4$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành.

A. $V = \frac{7\pi}{6}$.

B. $V = \frac{4\pi}{3}$.

C. $V = \frac{\pi}{3}$.

D. $V = \frac{7\pi}{3}$.

Câu 94: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4-x & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^2 f(x)dx$.

A. $\int_0^2 f(x)dx = \frac{7}{2}$.

B. $\int_0^2 f(x)dx = 1$.

C. $\int_0^2 f(x)dx = \frac{5}{2}$.

D. $\int_0^2 f(x)dx = \frac{3}{2}$.

Câu 95: Cho $\int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}dx = \frac{a}{3} + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = 2$.

B. $S = 9$.

C. $S = 1$.

D. $S = 7$.

Câu 96: Cho $\int_0^3 f(x)dx = a$, $\int_2^3 f(x)dx = b$. Tính $H = \int_0^2 f(x)dx$.

A. $H = b - a$.

B. $H = a + b$.

C. $H = -a - b$.

D. $H = a - b$.

Câu 97: Cho $\int_0^1 \frac{xdx}{(x+2)^2} = a + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Tính $S = 3a + b + c$.

A. $S = 1$.

B. $S = -1$.

C. $S = 2$.

D. $S = -2$.

Câu 98: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$, biết $\int_a^d f(x)dx = 5$ và $\int_b^d f(x)dx = 2$ (với $a < d < b$).

Tính $\int_a^b f(x)dx$.

A. $\int_a^b f(x) dx = 3.$ B. $\int_a^b f(x) dx = \frac{2}{5}.$ C. $\int_a^b f(x) dx = 7.$ D. $\int_a^b f(x) dx = 10.$

Câu 99: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 8$. Đường thẳng $x = k$ ($0 < k < \ln 8$) chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 . Tìm k để $S_1 = S_2$.

A. $k = \ln 4.$ B. $k = \ln \frac{9}{2}.$ C. $k = \frac{2}{3} \ln 4.$ D. $k = \ln 5.$

Câu 100: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^1 f(x) dx = 10$. Tính $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx$.

A. $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = 5.$ B. $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{5}{2}.$ C. $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = 10.$ D. $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = 20.$

Câu 101: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = 12$, $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_1^4 f'(x) dx = 17$. Tính $f(4)$.

A. $f(4) = -4.$ B. $f(4) = 5.$ C. $f(4) = 21.$ D. $f(4) = 29.$

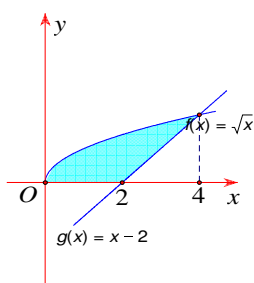
Câu 102: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

A. $F(x) = \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + C.$ B. $F(x) = 1 + \frac{1}{(x-1)^2} + C.$
C. $F(x) = x + \frac{1}{x-1} + C.$ D. $F(x) = x^2 + \ln|x-1| + C.$

Câu 103: Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$, $\int_{-1}^7 f(t) dt = 9$. Tính $J = \int_2^7 f(z) dz$.

A. $J = 18.$ B. $J = 7.$ C. $J = 5.$ D. $J = 11.$

Câu 104: Tích diện tích S của hình phẳng (phần tô màu) trong hình bên.

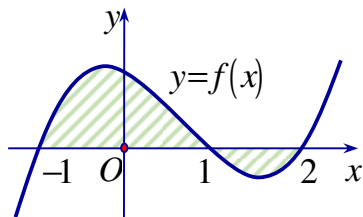


A. $S = \frac{7}{3}.$ B. $S = \frac{8}{3}.$
C. $S = \frac{11}{3}.$ D. $S = \frac{10}{3}.$

Câu 105: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-1}$ và $F(2) = 1$. Tính $F(3)$.

A. $F(3) = \ln 2 - 1.$ B. $F(3) = \frac{1}{2}.$ C. $F(3) = \frac{7}{4}.$ D. $F(3) = \ln 2 + 1.$

Câu 106: Gọi S là diện tích miền hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên. Công thức tính S là



A. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx.$ B. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx.$
C. $S = \int_{-1}^2 f(x) dx.$ D. $S = -\int_{-1}^2 f(x) dx.$

Câu 107: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^1 f(x) dx = 12$. Tính $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} f(2 \cos x) \sin x dx$.

- A. $I = 6$. B. $I = 12$. C. $I = -1$. D. $I = 3$.

Câu 108: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x) dx = 4$, $\int_0^3 f(x) dx = 6$. Tính

$$I = \int_{-1}^1 f(|2x+1|) dx.$$

- A. $I = 5$. B. $I = 3$. C. $I = 6$. D. $I = 4$.

Câu 109: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, trục hoành Ox , các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$.

- A. $S = \frac{8}{3}$. B. $S = 7$. C. $S = 8$. D. $S = \frac{7}{3}$.

Câu 110: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{3}$ và $f'(x) = x[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của $f(1)$.

- A. $f(1) = -\frac{11}{6}$. B. $f(1) = -\frac{7}{6}$. C. $f(1) = -\frac{2}{9}$. D. $f(1) = -\frac{2}{3}$.

Câu 111: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \cdot \sin x dx$.

- A. $I = e^{\frac{\pi}{2}}$. B. $I = 1 - e$. C. $I = e - 1$. D. $I = 1 + e$.

Câu 112: Một chiếc xe đua đang chạy 180 km/h. Tay đua nhấn ga để về đích kể từ đó xe chạy với gia tốc $a(t) = 2t + 1$ (m/s²). Hỏi rằng 5 s sau khi nhấn ga thì xe chạy với vận tốc bao nhiêu km/h.

- A. 300. B. 288. C. 243. D. 200.

Câu 113: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1; +\infty)$ và $\int_0^3 f(\sqrt{x+1}) dx = 8$. Tích phân $I = \int_1^2 xf(x) dx$.

- A. $I = 4$. B. $I = 8$. C. $I = 1$. D. $I = 12$.

Câu 114: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0; 4]$ và $\int_0^2 f(x) dx = 1$; $\int_0^4 f(x) dx = 3$. Tính

$$I = \int_{-1}^1 f(|3x-1|) dx.$$

- A. $I = 4$. B. $I = 2$. C. $I = 1$. D. $I = \frac{4}{3}$.

Câu 115: Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^1 g(x) dx = 5$. Tính $J = \int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx$.

- A. $J = -3$. B. $J = -8$. C. $J = 1$. D. $J = 12$.

Câu 116: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-2) = 1$, $\int_1^2 f(2x-4) dx = 1$.

$$\text{Tính } \int_{-2}^0 xf'(x) dx.$$

- A. $I = 0$. B. $I = 1$. C. $I = -4$. D. $I = 4$.

Câu 117: Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi

quy luật $v(t) = \frac{1}{100}t^2 + \frac{13}{30}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s²) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A . Tính vận tốc V_B của B tại thời điểm đuổi kịp A .

- A. $V_B = 25$ (m/s). B. $V_B = 42$ (m/s). C. $V_B = 9$ (m/s). D. $V_B = 15$ (m/s).

Câu 118: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, luôn dương trên $[0; 3]$ và thỏa mãn $I = \int_0^3 f(x) dx = 4$. Tính

$$K = \int_0^3 (e^{1+\ln(f(x))} + 4) dx.$$

- A. $K = 3 + 14e$. B. $K = 4 + 12e$. C. $K = 14 + 3e$. D. $K = 12 + 4e$.

Câu 119: Cho $\int_{-1}^5 f(x) dx = 4$. Tính $I = \int_{-1}^2 f(2x+1) dx$.

- A. $I = 2$. B. $I = \frac{5}{2}$. C. $I = 4$. D. $I = \frac{3}{2}$.

Câu 120: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 6x + \sin 3x$, biết $F(0) = \frac{2}{3}$.

- A. $F(x) = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} - 1$. B. $F(x) = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{2}{3}$.
C. $F(x) = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} + 1$. D. $F(x) = 3x^2 + \frac{\cos 3x}{3} + 1$.

Câu 121: Biết $\int_a^b (2x-1) dx = 1$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $a^2 - b^2 = a - b - 1$. B. $b^2 - a^2 = b - a + 1$. C. $b - a = 1$. D. $a - b = 1$.

Câu 122: Cho $y = f(x)$, $y = g(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $[0; 2]$ và $\int_0^2 g(x) \cdot f'(x) dx = 2$,

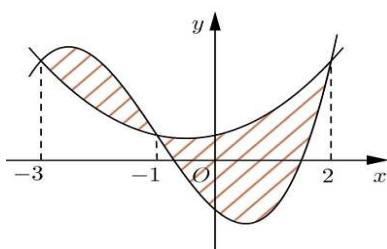
$$\int_0^2 g'(x) \cdot f(x) dx = 3. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^2 [f(x) \cdot g(x)]' dx.$$

- A. $I = 1$. B. $I = 5$. C. $I = 6$. D. $I = -1$.

Câu 123: Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $x=0$, $x=1$, $y=0$ và $y=\sqrt{2x+1}$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức?

- A. $V = \pi \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx$. B. $V = \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx$. C. $V = \int_0^1 (2x+1) dx$. D. $V = \pi \int_0^1 (2x+1) dx$.

Câu 124: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1$ và $g(x) = dx^2 + ex = \frac{1}{2}$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -3 ; -1 ; 2 .



Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số đã cho.

- A. $S = \frac{253}{12}$. B. $S = \frac{253}{48}$.
C. $S = \frac{125}{48}$. D. $S = \frac{125}{12}$.

Câu 125: Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$, $f(-1) = 3$ và $\int_{-1}^3 f'(x) dx = 10$. Tính $f(3)$.

- A. $f(3) = -7$. B. $f(3) = -13$. C. $f(3) = 7$. D. $f(3) = 13$.

Câu 126: Biết $\int_{-1}^4 f(x) dx = \frac{1}{2}$ và $\int_{-1}^0 f(x) dx = \frac{-1}{2}$. Tính tích phân $I = \int_0^4 [4e^{2x} + 2f(x)] dx$.

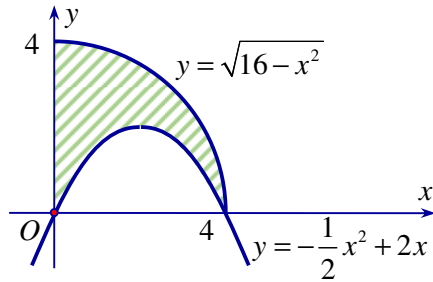
- A. $I = 4e^8$. B. $I = 4e^8 - 2$. C. $I = 2e^8$. D. $I = 2e^8 - 4$.

Câu 127: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2x) = 3f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng $\int_0^1 f(x) dx = 1$.

Tính $I = \int_1^2 f(x) dx$.

- A. $I = 5$. B. $I = 3$. C. $I = 8$. D. $I = 2$.

Câu 128: Cho hình phẳng D giới hạn bởi parabol $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{16 - x^2}$, với $(0 \leq x \leq 4)$, trục tung (phần tô đậm trong hình vẽ). Tính diện tích của hình D .



- A. $S = 2\pi - \frac{16}{3}$. B. $S = 8\pi - \frac{16}{3}$.
C. $S = 4\pi + \frac{16}{3}$. D. $S = 4\pi - \frac{16}{3}$.

Câu 129: Cho $\int_0^1 f(2x+1) dx = 12$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x) \sin 2x dx = 3$. Tính $I = \int_0^3 f(x) dx$.

- A. $I = 15$. B. $I = 22$. C. $I = 26$. D. $I = 27$.

Câu 130: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4 \int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = 2$. Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$.

- A. $I = 3$. B. $I = 2$. C. $I = 6$. D. $I = 1$.

Câu 131: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 2]$ và thỏa mãn $f(2) = 16$, $\int_0^2 f(x) dx = 4$.

Tính tích phân $I = \int_0^1 x \cdot f'(2x) dx$.

- A. $I = 20$. B. $I = 12$. C. $I = 13$. D. $I = 7$.

Câu 132: Cho $\int_1^2 f(x) dx = 2$. Tính $I = \int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ bằng

- A. $I = 1$. B. $I = 2$. C. $I = \frac{1}{2}$. D. $I = 4$.

Câu 133: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$, biết $\int_0^9 f(x) dx = 9$ và $F(0) = 3$. Tính $F(9)$.

- A. $F(9) = -6$. B. $F(9) = 12$. C. $F(9) = -12$. D. $F(9) = 6$.

Câu 134: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^{2018} f(x)dx = 2$. Tính $I = \int_0^{\sqrt{e^{2018}-1}} \frac{x}{x^2+1} f(\ln(x^2+1))dx$.

A. $I = 3$. B. $I = 2$. C. $I = 1$. D. $I = 4$.

Câu 135: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai $f''(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = f(0) = 1, f'(0) = 2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\int_0^1 f''(x)(1-x)dx = -2018$. B. $\int_0^1 f''(x)(1-x)dx = -1$.
- C. $\int_0^1 f''(x)(1-x)dx = 2018$. D. $\int_0^1 f''(x)(1-x)dx = 1$.

Câu 136: Tính tích phân $I = \int_{-1}^2 3xe^x dx$.

- A. $I = \frac{3e^3+6}{-e}$. B. $I = \frac{3e^3+6}{e}$. C. $I = \frac{3e^3+6}{e^{-1}}$. D. $I = \frac{3e^3-6}{e^{-1}}$.

Câu 137: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$). Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức:

- A. $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$. B. $V = 2\pi \int_a^b f^2(x)dx$. C. $V = \pi^2 \int_a^b f^2(x)dx$. D. $V = \pi^2 \int_a^b f(x)dx$.

Câu 138: Tính tích phân $I = \int_0^2 \frac{dx}{x+3}$.

- A. $I = \log \frac{5}{3}$. B. $I = \ln \frac{5}{3}$. C. $I = \frac{16}{225}$. D. $I = \frac{2}{15}$.

Câu 139: Biết $\int xe^{2x} dx = axe^{2x} + be^{2x} + C$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Tính tích ab .

- A. $ab = \frac{1}{4}$. B. $ab = -\frac{1}{4}$. C. $ab = -\frac{1}{8}$. D. $ab = \frac{1}{8}$.

Câu 140: Cho $\int_1^e (2 + x \ln x) dx = ae^2 + be + c$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a + b = -c$. B. $a - b = -c$. C. $a + b = c$. D. $a - b = c$.

ĐÁP ÁN BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

§1. NGUYÊN HÀM

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A																				
B																				
C																				
D																				

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A																				
B																				
C																				
D																				

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
A																				
B																				
C																				
D																				

	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
A																				
B																				
C																				
D																				

	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
A																				
B																				
C																				
D																				

	10 1	10 2	10 3	10 4	10 5	10 6	10 7	10 8	10 9	11 0	11 1	11 2	11 3	11 4	11 5	11 6	11 7	11 8
A																		
B																		
C																		
D																		

§2. TÍCH PHẦN

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A																				
B																				
C																				
D																				

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A																				
B																				
C																				
D																				

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
A																				
B																				
C																				
D																				

	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
A																				
B																				
C																				
D																				

	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
A																				
B																				
C																				
D																				

	10 1	10 2	10 3	10 4	10 5	10 6	10 7	10 8	10 9	11 0	11 1	11 2	11 3	11 4	11 5	11 6	11 7	11 8	11 9
A																			
B																			
C																			
D																			

§3. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TRONG HÌNH HỌC

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A																				
B																				
C																				
D																				

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A																				
B																				
C																				
D																				

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
A																				
B																				
C																				
D																				

	61	62	63	64	65	66	67	68	69
A									
B									
C									
D									

GV. Lư Sĩ Pháp

ÔN TẬP CHƯƠNG III NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A																				
B																				
C																				
D																				

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A																				
B																				
C																				
D																				

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
A																				
B																				
C																				
D																				

	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
A																				
B																				
C																				
D																				

	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
A																				
B																				
C																				
D																				

	10 1	10 2	10 3	10 4	10 5	10 6	10 7	10 8	10 9	11 0	11 1	11 2	11 3	11 4	11 5	11 6	11 7	11 8	11 9	12 0
A																				
B																				
C																				
D																				

	12 1	12 2	12 3	12 4	12 5	12 6	12 7	12 8	12 9	13 0	13 1	13 2	13 3	13 4	13 5	13 6	13 7	13 8	13 9	14 0
A																				
B																				
C																				
D																				

	14 1	14 2	14 3	14 4	14 5	14 6	14 7	14 8	14 9	15 0	15 1	15 2	15 3	15 4	15 5	15 6	15 7	15 8	15 9	16 0
A																				
B																				
C																				
D																				

	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175
A															
B															
C															
D															

ÔN THI THPT

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A																				
B																				
C																				
D																				

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A																				
B																				
C																				
D																				

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
A																				
B																				
C																				
D																				

	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
A																				
B																				
C																				
D																				

	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
A																				
B																				
C																				
D																				

	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
A																				
B																				
C																				
D																				

	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
A																				
B																				
C																				
D																				